

3-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine

Ümit Ziya Savcı

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Nisan 2011

On the Parallel Ruled Weingarten Surfaces in 3-Dimensional Euclid Space

Ümit Ziya Savcı

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

April 2011

3-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine

Ümit Ziya Savcı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ali Görgülü

Nisan 2011

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Ümit Ziya Savcı' nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "3-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Doç. Dr. Erhan ATA

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmanın amacı Öklid uzayında regle Weingarten yüzeylerin paralel yüzeylerini incelemektir. Çalışmanın ‘Giriş’ bölümünde, Öklid uzayında regle yüzeyler, paralel yüzeyler ve Weingarten yüzeylerin tarihsel gelişimi açıklandı.

İkinci bölümde, regle yüzeyler, paralel yüzeyler ve Weingarten yüzeyler için bazı önemli tanımlar ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölümünde, bir yüzey üzerindeki bir eğrinin bu yüzeyin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünün geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik torsiyonu hesaplanmıştır. Ayrıca bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün eğriliği hesaplanmış ve sonra paralel yüzey için Meusnier teoremi verilmiştir. Temel formlarından faydalanarak, açılabilir olmayan bir regle yüzeyin paralel yüzeylerinin regle yüzey olmadığı elde edilmiştir.

Sonuç olarak dördüncü bölümde ise, bir regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeylerinin de Weingarten yüzey olduğu bulunmuştur. Açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeylerinin regle Weingarten yüzey olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Weingarten yüzeyler, regle yüzeyler, paralel yüzeyler, eğrilikler

SUMMARY

The aim of this thesis is to study parallel surfaces of ruled Weingarten surfaces in Euclid space. In the introduction of the study, the historical developments of ruled surfaces, parallel surfaces and Weingarten surfaces in Euclid space are explained.

In the second chapter, some important definitions and theorems about the ruled surfaces, parallel surfaces and Weingarten surfaces have been presented.

In the third chapter, the geodesic curvature, normal curvature and geodesic torsion of the image of a curve on a surface which stands on a parallel surface of that surface have been computed. Besides, curvature of an image of a curve which is on a parallel surface has been computed, and then the Meusnier theorem on parallel surfaces has been given. It has been obtained that parallel surfaces of a non-developable ruled surface are not ruled surfaces by using fundamental forms of the surface.

As a result in the fourth chapter, it has been obtained that parallel surfaces of a ruled Weingarten surface are also Weingarten surfaces. It has been shown that the parallel surfaces of a developable ruled surface are ruled Weingarten surfaces.

Key Words: Weingarten surfaces, ruled surfaces, parallel surfaces, curvature.

TEŞEKKÜR

3-boyutlu Öklid uzayında paralel regle Weingarten Yüzeyler üzerine adlı tez çalışmamda ve derslerimde, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan başta danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali Görgülü' ye ve destekleri için Doç. Dr. Cumali Ekici' ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Öklid Uzayı.....	4
2.2. Riemann Manifoldu ve Hiperyüzeyler	6
2.2.1. Meusnier teoremi ve sonuçları.....	11
2.2.2. Regle Yüzeyler	21
2.2.3. Paralel Yüzeyler.....	23
2.2.4. Weingarten Yüzeyler	25
3. PARALEL YÜZEYLERİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ.....	33
3.1. Paralel Yüzeylerin Çatı Alanları	33
3.1.1. Bir Eğrinin Paralel Yüzey Üzerindeki Resminin Darboux Çatısı	33
3.1.2. Bir Eğrinin Paralel Yüzey Üzerindeki Resminin Frenet Çatısı	38
3.2. Regle Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri	47
3.2.1. Bir Regle Yüzeyin Paralel Yüzeyinin Temel Formları	50
3.2.2. Açılabilir Paralel Regle Yüzeyler	53
4. REGLE WEİNGARTEN YÜZEYLERİN PARALEL YÜZEYLERİ.....	57
4.1. Regle Weingarten Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri.....	57

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

Sayfa

SONUÇ VE TARTIŞMA	67
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	68
ÖZGEÇMİŞ	71

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1	8
2.2	11
2.3	13
3.1	42
3.2	57
4.1(a)-(b)	67
4.2 (a)-(b)	67
4.3 (a)-(b)	69

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	<u>Anlamı</u>
\mathbb{R}	Reel sayılar cümlesi
\mathbb{R}^3	3 – boyutlu Reel uzay
\mathbb{E}^3	3 – boyutlu Öklid uzayı
E, F, G	Birinci temel form katsayıları
L, M, N	İkinci temel form katsayıları
M^r	M Yüzeyinin paralel yüzeyi
K	Yüzeyin Gauss eğriliği
H	Yüzeyin ortalama eğriliği
κ	Eğrinin eğriliği
τ	Eğrinin burulması
k_g	Geodezik eğrilik
k_n	Normal eğrilik
τ_g	Geodezik burulma
K^r	Paralel yüzeyin Gauss eğriliği
H^r	Paralel yüzeyin ortalama eğriliği
κ^r	Paralel yüzeydeki eğrinin eğriliği
k_g^r	Paralel yüzeydeki eğrinin geodezik eğriliği
k_n^r	Paralel yüzeydeki eğrinin normal eğriliği
τ_g^r	Paralel yüzeydeki eğrinin geodezik burulması

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Eski Yunan döneminden başlayarak Isaac Newton'un (1645-1727), diferensiyel ve integral hesabı bulmasına kadar geçen zaman boyunca, yüzey ve eğri geometrisi matematikle ilgilenenlerin büyük ilgisini çekmiştir. 18. Yüzyıl boyunca diferensiyel hesabın kullanılması ile geometri çalışmaları diferensiyel geometrinin gelişmesini sağlamıştır.

Diferensiyel geometriye en çok katkı yapanlardan biri de Leonhard Euler (1707-1783) dir. Euler 1736 yılında bir düzlem eğrisini koordinatlarla ifade etmiştir. Euler, aynı zamanda geodezikler ve yüzeyler teorisine katkıda bulunmuştur. Fransız matematikçi Gaspard Monge (1746-1818) uzay eğrilerinin teorisini ortaya atmıştır ve 1807 yılında ilk diferensiyel geometri kitabını yazmıştır.

Matematikçilerin prensi sayılan Carl Friendrich Gauss (1777-1855) diferensiyel geometrinin gelişmesine öncülük etmiş ve diferensiyel geometriye, matematiğin diğer branşlarının da kullanabileceği bir bakış açısı getirmiştir. Gauss özellikle birinci temel form üzerinde durmuş ve bir yüzeyin Gauss eğriliğini veren Egregium teoreminin sadece birinci temel formun katsayıları ve onların türevleri ile ifade edilebileceğini göstermiştir.

19. Yüzyılda regle yüzeyler ve özellikle açılabilir regle yüzeylerin tüm özelliklerinin çok iyi bilindiği ve kayda değer tüm sonuçlarının bulunduğu düşünüüyordu fakat bu konular geçtiğimiz yarım yüzyıldan beri tekrar araştırma konusu olmuş ve bir çok önemli özelliği keşfedilmiştir. Bu konuda birçok matematikçi hala çalışmaktadır. Regle yüzeyler ile ilgili ayrıntılı bilgi (Carmo, 1976) kitabında bulunulabilir. (Park and Kim, 1998) çalışmasında

açılabilir olmayan bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin regle yüzey olmadığı, ancak açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğu ifade edilmiştir. Son zamanlarda regle yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili bir çok çalışma ortaya konmuştur. Bunlardan (Izuyuma et al, 2005) çalışmasında regle yüzeylerin beş özel sınıfını;

- i) Açılabilir yüzeyler (silindirik, konik, tanjant yüzeyler),
- ii) Asli normal ve Binormal yüzeyler,
- iii) Darboux açılabilir yüzeyler,
- iv) Rektefiyan açılabilir yüzeyler,
- v) Uzay eğrilerinin odak yüzeyleri,

şeklinde ifade edilmiştir.

Diferensiyel geometrinin bir başka konusu olan paralel yüzeyler tarih boyunca birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve çalışma konusu olmuştur. Craig, 1883 yılında elipsoidin paralel yüzeyini bulmaya çalışmıştır (Craig, 1883). Eisenhart, paralel yüzeylerden de bahseden bir kitap yazmıştır (Eisenhart, 1909). Nizamoğlu, paralel regle yüzeyi bir parametreye bağlı bir eğri olarak ifade etmiş ve bu yüzeyin bazı geometrik özelliklerini hesaplamıştır (Nizamoğlu, 1986).

Weingarten yüzeyler ilk olarak 1861 yılında J. Weingarten' in "Über eine klasse auf einander abwickelbarer flachen" çalışmasında ortaya atılmıştır. Sonra birçok matematikçi bu konu ile ilgilenmiştir. Kühnel, Weingarten yüzeyleri beş ana başlıkta toplamıştır. Bunlar;

- i) Dönel yüzeyler,
- ii) Asli eğriliklerinden biri sabit olan bir eğrinin kanal yüzeyleri,
- iii) Helisoidal yüzeyler,
- iv) Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler,

v) Sabit ortalama eğrilikli yüzeylerdir
dir (Kühnel, 1994).

Betrami ve Dini, açılabilir olmayan tek regle Weingarten yüzeyin, helisoid-
sel regle yüzeyin bir parçası olduğunu ispatlamışlardır (Betrami, 1865; Dini,
1865).

Bu çalışmada orjinal olarak, bir yüzey üzerindeki bir eğrinin paralel yüzey
üzerindeki görüntüsünün geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik burulması
ve eğrinin eğriliği elde edilmiştir. Ayrıca paralel yüzeyler için Meusnier
teoremi verilmiştir. (Park and Kim, 1998) çalışmasında kullandıklarından
farklı bir yolla açılabilir olmayan bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin regle
yüzey olmadığı elde edilmiştir. Ayrıca bir regle Weingarten yüzeyin paralel
yüzeyinin Weingarten yüzey olduğu ispat edilmiştir. Paralel yüzey ve paralel
regle Weingarten yüzey ile ilgili örnek de verilmiştir.

Eskişehir, 2011

Ümit Ziya SAVCI

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 Boş olmayan bir A cümlesi ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$(1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R).$$

(2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.2 \mathbb{R}^3 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş \mathbb{R}^3 afin uzayını ele alalım. Bu \mathbb{R}^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i, \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanırsa \mathbb{R}^3 afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^3 ile gösterilir.

Bir reel afin uzayında tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanırlar. Bununla beraber reel afin uzayları ile Öklid uzayları farklıdır. Çünkü, bir V reel vektör uzayı ile birleşen A afin uzayındaki metrik özellikler V uzayında seçilecek olan iç çarpımdan doğar, bu nedenle

Öklid uzaylarındaki özelliklerle diğer afin uzaylarındakiler farklı olur (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.3 $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$d: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.4

$$d: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^3 uzayında Öklid metriği denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.5 $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^3$ için \widehat{xyz} açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{yx}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{yx}\| \|\vec{yz}\|}$$

ile hesaplanan θ reel sayısıdır (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.6 \mathbb{E}^3 de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dördlüsüne, \mathbb{R}^3 de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, \mathbb{R}^3 için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine \mathbb{E}^3 ün bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 1998).

Örnek 2.1.7 \mathbb{E}^3 de $E_0=(0, 0, 0)$, $E_1=(1, 0, 0)$, $E_2=(0, 1, 0)$, $E_3=(0, 0, 1)$ noktaları bir dik çatı oluşturur (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.8 \mathbb{E}^3 deki $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 1998).

2.2 Riemann Manifoldu ve Hiperüzeyler

Tanım 2.2.1 \mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri α olsun, $\vec{\mathbf{T}}(t) = \vec{\alpha}'(t)$ vektörüne α eğrisinin birim teğet vektörü, $\vec{\mathbf{n}}(t) = \vec{\mathbf{T}}'(t) / \|\vec{\mathbf{T}}'(t)\|$ vektörüne α eğrisinin asli normal vektörü ve $\vec{\mathbf{b}}(t) = \vec{\mathbf{T}}(t) \wedge \vec{\mathbf{n}}(t)$ vektörüne de binormal vektörü denir. $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ üçlüsü \mathbb{R}^3 de ortonormal bir çatı oluşturur. Bu çatıya Frenet çatısı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.2 \mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri α olsun. α eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{\mathbf{T}}(t)$, α eğrisi boyunca yüzeyin normali $\vec{\mathbf{N}}(t)$ ve bu iki vektörün vektörel çarpımı $\vec{\mathbf{B}}(t) = \vec{\mathbf{N}}(t) \wedge \vec{\mathbf{T}}(t)$ olmak üzere $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{N}}\}$ üçlüsü yeni bir dik çatıdır, bu çatıya Darboux çatısı denir (Ru, 1999).

Tanım 2.2.3 \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen

$$\alpha : I \rightarrow M, \quad I \subset \mathbb{R}$$

birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{\mathbf{T}}(t) = \vec{\alpha}'(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \kappa(t) = \|\vec{\mathbf{T}}'(t)\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği adı verilir (Ru, 1999).

Tanım 2.2.4 \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen

$$\alpha : I \rightarrow M, \quad I \subset \mathbb{R}$$

birim hızlı bir eğri olsun, α eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tau : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \tau(t) = \langle \vec{\mathbf{n}}'(t), \vec{\mathbf{b}}(t) \rangle\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(t)$ sayısına da eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.5 \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri α olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{N}}\}$ olmak üzere,

$$k_g(t) = \langle \vec{\mathbf{T}}'(t), \vec{\mathbf{B}}(t) \rangle = - \langle \vec{\mathbf{T}}(t), \vec{\mathbf{B}}'(t) \rangle$$

ifadesine geodezik eğrilik denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.6 \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri α olsun, α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{N}}\}$ olmak üzere,

$$k_n(t) = \langle \vec{\mathbf{T}}'(t), \vec{\mathbf{N}}(t) \rangle = - \langle \vec{\mathbf{T}}(t), \vec{\mathbf{N}}'(t) \rangle$$

ifadesine normal eğrilik denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.7 \mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri α olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{N}}\}$ olmak üzere,

$$\tau_g(t) = \langle \vec{\mathbf{B}}'(t), \vec{\mathbf{N}}(t) \rangle = - \langle \vec{\mathbf{B}}(t), \vec{\mathbf{N}}'(t) \rangle$$

ifadesine geodezik torsiyon veya geodezik burulma denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2.8 M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin geodezik ve normal eğrilikleri sırasıyla k_g, k_n ve geodezik burulması da τ_g olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{T}}'(t) &= k_g(t)\vec{\mathbf{B}}(t) + k_n(t)\vec{\mathbf{N}}(t) \\ \vec{\mathbf{B}}'(t) &= -k_g(t)\vec{\mathbf{T}}(t) + \tau_g(t)\vec{\mathbf{N}}(t) \\ \vec{\mathbf{N}}'(t) &= -k_n(t)\vec{\mathbf{T}}(t) - \tau_g(t)\vec{\mathbf{B}}(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2004).

Sonuç 2.2.9 \mathbb{E}^3 de M yüzeyi üzerinde birim hızlı α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{B}, \vec{N}\}$ olmak üzere,

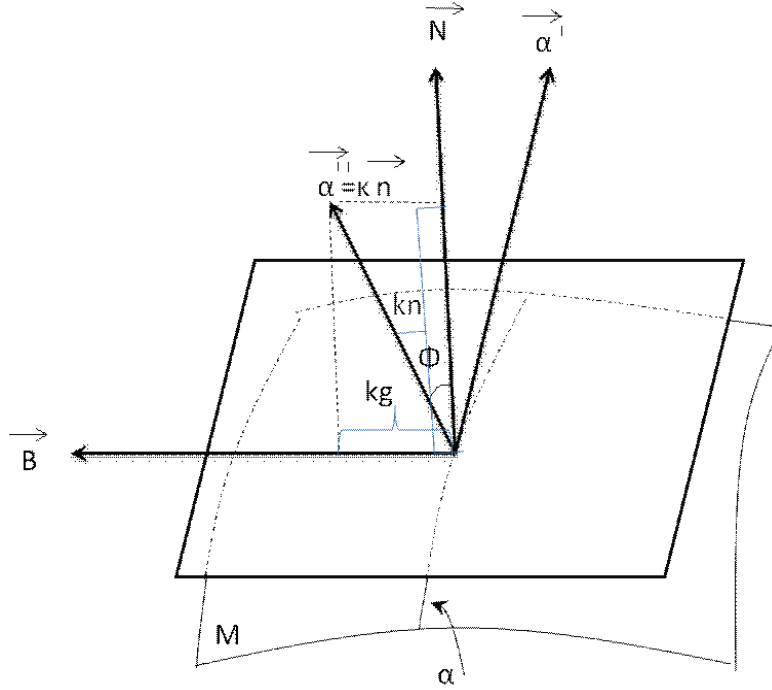
$$\vec{\alpha}''(t) = k_n(t)\vec{N}(t) + k_g(t)\vec{B}(t)$$

dir (Ru, 1999).

Teorem 2.2.10 M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir α eğrisi verilsin. Eğrinin eğriliği κ , eğrinin normal eğriliği k_n ve eğrinin geodezik eğriliği k_g olsun. Bu durumda,

$$\kappa(t) = \sqrt{k_n^2(t) + k_g^2(t)} \quad (2.2)$$

eşitliği sağlar (Ru, 1999).



Şekil 2.1

Yüzeyin normali \vec{N} ile eğrinin asıl normali \vec{n} arasındaki açı Φ olmak üzere $\vec{\alpha}''(t) = \kappa \vec{n}(t)$ olduğundan, $k_n = \kappa \vec{n} \cdot \vec{N} = \kappa \cos \Phi$, $k_g = \pm \kappa \sin \Phi$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten yararlanarak κ nın değeri k_n ve k_g bağlı olarak bulunur. Şekil 2.1 de bu eğrilikler grafik üzerinde gösterilmiştir.

Tanım 2.2.11 Yüzey üzerinde her noktasındaki normal eğriliği $k_n = 0$ olan eğrilere, asimptotik çizgiler denir (Uras, 1992).

Tanım 2.2.12 Yüzey üzerinde her noktasındaki geodezik eğriliği $k_g = 0$ olan eğrilere, geodezik eğriler denir (Uras, 1992).

Tanım 2.2.13 Yüzey üzerinde her noktasındaki geodezik burulması $\tau_g = 0$ olan eğrilere, eğrilik çizgisi denir (Uras, 1992).

Teorem 2.2.14 \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı olmayan bir eğri α olsun. α eğrisinin teğet vektörü $\vec{\alpha}'$ olmak üzere $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \nu \neq 1$ ve α eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ ise

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \frac{\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''\|}, \quad \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{T}} \quad (2.3)$$

dir. α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları da

$$\kappa = \frac{\|\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''' \rangle}{\|\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''\|^2} \quad (2.4)$$

eşitlikleriyle belirlidir (Oprea, 1997).

Teorem 2.2.15 \mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı olmayan bir eğri α olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{b}}$, eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ, τ , $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \nu$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{T}}' &= \nu\kappa\vec{\mathbf{n}} \\ \vec{\mathbf{n}}' &= \nu(-\kappa\vec{\mathbf{T}} + \tau\vec{\mathbf{b}}) \\ \vec{\mathbf{b}}' &= -\nu\tau\vec{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

dir (Oprea, 1997).

Teorem 2.2.16 \mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı olmayan bir eğri α olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{N}}\}$,

$\|\vec{\alpha}'(t)\| = \nu$ ve bu eğri-yüzey ikilisinin geodezik ve normal eğrilikleri, sırasıyla, k_g, k_n ve geodezik burulması da τ_g olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tau_g &= -\frac{1}{\nu} \langle \vec{\mathbf{N}}', \vec{\mathbf{B}} \rangle \\ k_n &= \frac{1}{\nu^2} \langle \vec{\alpha}'', \vec{\mathbf{N}} \rangle \\ k_g &= \frac{1}{\nu^2} \langle \vec{\alpha}'', \vec{\mathbf{B}} \rangle\end{aligned}\tag{2.6}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2.17 \mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı olmayan bir eğri α olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{N}}\}$, $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \nu$ ve bu eğri-yüzey ikilisinin geodezik torsiyonu ile eğrilikleri, sırasıyla, τ_g, k_n, k_g olduğuna göre,

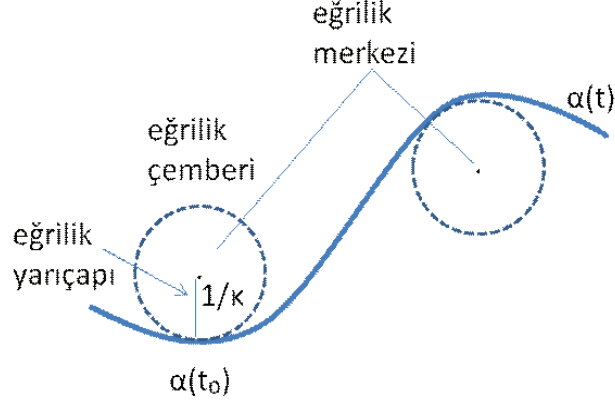
$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{T}}' &= \nu(k_g \vec{\mathbf{B}} + k_n \vec{\mathbf{N}}) \\ \vec{\mathbf{B}}' &= \nu(-k_g \vec{\mathbf{T}} + \tau_g \vec{\mathbf{N}}) \\ \vec{\mathbf{N}}' &= \nu(-k_n \vec{\mathbf{T}} - \tau_g \vec{\mathbf{B}})\end{aligned}\tag{2.7}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.18 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrileri verilsin.

$\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$, $\alpha'(t_0) = \gamma'(t_0)$, ..., $\alpha^k(t_0) = \gamma^k(t_0)$, ($k \in \mathbb{N}$) oluyorsa, γ eğrisi, α eğrisine, $\alpha(t_0)$ noktasında k -yıncı basamaktan değişiyor, denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.19 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında ikinci basamaktan değen γ çemberine, α eğrisinin, $\alpha(t_0)$ noktasındaki eğrilik çemberi ve eğrinin eğriliği κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ değerine eğrilik yarıçapı denir. Bu çemberin merkezine, $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezi denir. $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezinden geçen ve $\vec{\mathbf{b}}_0$ vektörüne paralel olan doğruya, $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik eksenini denir (Sabuncuoğlu, 2004).



Şekil 2.2

Eğrilik çemberi, eğrilik yarıçapı ve eğrilik merkezi Şekil 2.2 de gösterilmiştir.

2.2.1 Meusnier Teoremi ve Sonuçları

\mathbb{E}^3 de bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı eğri α olsun. α eğrisinin eğriliği ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} \Big|_P = \kappa \vec{\mathbf{n}}$$

ve $\forall P \in \alpha$ noktası için $\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2} \Big|_P, \vec{\mathbf{N}} \rangle = -II\left(\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\alpha}{ds}\right)$ olduğundan

$$\kappa \langle \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{N}}_p \rangle = -II\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P, \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right)$$

yazılabilir. α eğrisinin M üzerinde bir asimptotik eğri olmadığını yani

$$II\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P, \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right) = \langle S\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right), \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P \rangle \neq 0$$

olduğunu varsayalım. $P \in \alpha$ noktasında yüzeyin $\vec{\mathbf{N}}_p$ birim normal vektörü ve II . esas formun değeri sabit olduğundan κ eğriliğinin sadece $\vec{\mathbf{n}}$ ye bağlı olarak bir değere sahip olacağı görülmektedir. Buna göre şu iki sonuç aşıkardır;

(i). $P = \alpha(t_0)$ noktasında α eğrisi ile aynı oskütatör düzleme sahip olan ve M üzerinde bulunan bütün eğrilerin κ eğrilikleri aynıdır.

(ii). $P = \alpha(t_0)$ noktasında aynı teğet vektöre sahip olan fakat $\vec{\mathbf{n}}$ asli normalleri farklı olan eğrilerin κ eğrilikleri farklıdır.

Bu durumda M yüzeyi üzerinde bir $P = \alpha(t_0)$ noktasında aynı \vec{X}_p teğet vektöre sahip olan eğrilerin κ eğriliklerini incelemek demek, P noktasındaki \vec{X}_p teğet vektörünü sabit tutup $\vec{\mathbf{n}}$ vektörü değiştirilerek elde edilen oskütatör düzlemlerin M ile arakesitleri olan eğrilerin κ eğriliklerini incelemek demektir. \vec{X}_p teğet vektörünün sabit tutulup $\vec{\mathbf{n}}$ nin değiştirilmesi ise, P deki oskütatör düzlemin döndürülmesi anlamına gelir. Bu dönme sırasında elde edilen yeni arakesit eğrilerini α_i ile gösterirsek α_i eğrisinin eğriliği κ_i olur. $\vec{\mathbf{n}}_i$ ile $\vec{\mathbf{N}}_p$ aralarındaki dar açı Φ_i , $0 \leq \Phi_i \leq \frac{\Pi}{2}$ olmak üzere,

$$\kappa_i = -\frac{II\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P, \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right)}{\cos \Phi_i}$$

veya

$$\kappa_i \cos \Phi_i = -II\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P, \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right) \quad (2.8)$$

olur. $P = \alpha(t_0)$ noktasında bu son eşitliğin sağ yanı sabit olduğundan κ_i ve $\cos \Phi_i$ değiştiği zaman çarpımların sabit kaldığını görüyoruz.

$(\vec{X}_p, \vec{\mathbf{n}}_i)$ oskütatör düzlemi \vec{X}_p etrafında dönerken öyle bir an gelir ki $(\vec{X}_p, \vec{\mathbf{N}}_p)$ normal düzlemiyle çakışır. Dolayısıyla $\vec{\mathbf{n}}_i$ vektörü $\vec{\mathbf{N}}_p$ vektörü ile çakışır. Bu şekilde elde edilen arakesit eğrisine β , bu eğrinin asli normaline $\vec{\mathbf{n}}$, asli normalin yüzey normali ile arasındaki açığa $\bar{\Phi}$ ve eğriliğine $\bar{\kappa}$ dersek; $\bar{\Phi} = 0$ olacağından $\langle \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{N}}_p \rangle = 1$ ve dolayısıyla

$$\bar{\kappa} = -II\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P, \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right) \quad (2.9)$$

bulunur. $-1 \leq \cos \Phi_i \leq 1$ olduğundan $\bar{\kappa}$, κ_i eğriliklerinin en küçüğü ve $R = \frac{1}{\bar{\kappa}}$ eğrilik yarıçapı da diğer bütün eğrilerin P deki eğrilik yarıçaplarının

en büyüğüdür. Buna göre $\bar{\kappa}$ eğriliğinin (2.9) eşitliğinden

$$\frac{1}{R} = -II\left(\frac{d\alpha}{ds} \Big|_P, \frac{d\alpha}{ds} \Big|_P\right) \quad (2.10)$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafı M üzerinde verilen α eğrisine bağlı olarak hesaplandığı için α_i arakesit eğri ailesine bağlı değildir. Demek ki, α eğrisinin M üzerinde verilmesiyle R reel sayısı $P \in M$ de bellidir. (2.8) ve (2.10) eşitliklerinden

$$\kappa_i \cos \Phi_i = \frac{1}{R}$$

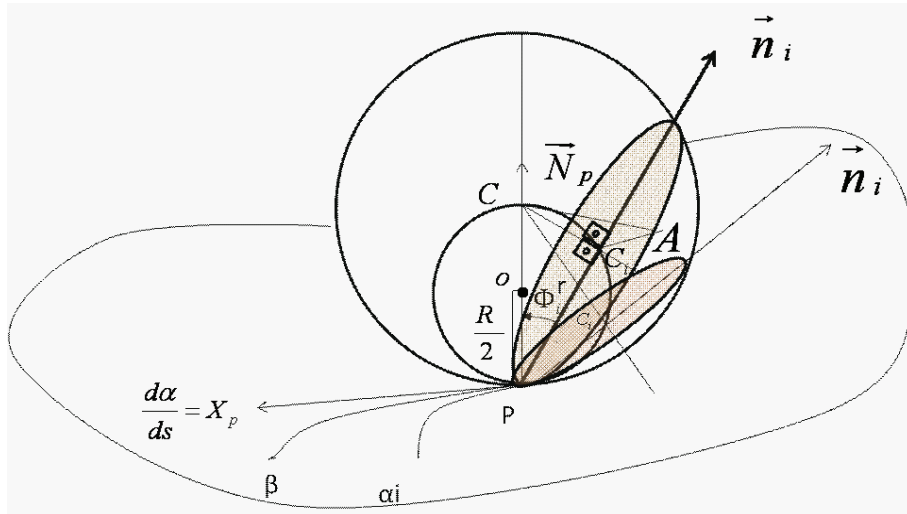
veya $(\rho_i) = \frac{1}{\kappa_i}$ dersek (eğrilik yarıçapı)

$$(\rho_i) = R \cos \Phi_i \quad (2.11)$$

sonucu elde edilir.

α_i eğrisinin $P = \alpha(t_0)$ noktasındaki eğrilik çemberi (\vec{X}_p, \vec{n}_i) oskulator düzleminde bulunan yarıçapı (ρ_i) ve merkezi $C_i = P + (\rho_i) \vec{n}_i$ noktası olan bir çemberdir.

β eğrisinin P noktasındaki eğrilik çemberi de (\vec{X}_p, \vec{N}_p) düzleminde bulunan, Şekil 2.3. de görüldüğü gibi R yarıçaplı ve $C = P + R\vec{N}_p$ merkezli bir diğer çemberdir.



Şekil 2.3

$R, (\rho_i), \vec{\mathbf{n}}_i$ ve $\vec{\mathbf{N}}_p$ belli olduklarından C_i ve C merkez noktaları da bellidir. $C\hat{P}C_i$ üçgeninde (2.11) eşitliğinin sağlanması demek, $\vec{PC}_i \perp \vec{C_iC}$ demektir.

Buna göre

$$\|\vec{C_iC}\| = \sqrt{R^2 - (\rho_i)^2}$$

dir. Diğer taraftan α_i eğrisinin P noktasındaki eğrilik çemberi üzerinde alınan herhangi bir A noktasının C noktasına olan uzaklığı, $C\hat{A}C_i$ üçgeni yardımı ile hesaplanırsa,

$$\|\vec{CA}\| = R$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk:

Teorem 2.2.20 (MEUSNIER)

\mathbb{E}^3 de bir M yüzeyi üzerinde bulunan ve $P \in M$ noktasında aynı teğete (asimptotik doğrultu olmayan) sahip olan bütün eğrilerin, P noktasındaki eğrilik çemberleri, yarıçapı R ve merkezi $C = P + R\vec{\mathbf{N}}_p$ noktası olan bir küre üzerinde bulunurlar (Hacısalihoglu, 1994).

Tanım 2.2.21 Meusnier Küresi:

$M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin, bir P noktasında asimptotik olmayan ve ortak bir teğet doğrultusuna sahip olan eğrilerin eğrilik çemberlerini üzerinde bulunduran küreye, M nin P noktasındaki Meusnier küresi denir (Hacısalihoglu, 1994).

Meusnier küresi üzerinde bulunan eğrilik çemberlerinden sadece eğri normal ile yüzey normalinin çakıştığı β eğrisininki bir büyük çemberdir, diğer eğrilerin eğrilik çemberleri birer küçük çemberdir.

Meusnier teoreminin birer sonucu olarak aşağıdaki özellikleri sıralayabiliriz:

Sonuç 2.2.22

\mathbb{E}^3 de bir M yüzeyi üzerinde bulunan ve belli bir $P \in M$ noktasında aynı \vec{X}_p teğetine (asimptotik olmayan) sahip olan eğrilerin eğrilik merkezi, $(\vec{X}_p, \vec{\mathbf{n}}_i)$ düzleminde yarıçapı $\frac{R}{2}$ ve merkezi $D = P + \frac{R}{2}\vec{\mathbf{N}}_p$ noktası olan bir

çember üzerinde bulunurlar.

Sonuç 2.2.23

\mathbb{E}^3 de bir M yüzeyi üzerinde bulunan ve belli bir $P \in M$ noktasında aynı \vec{X}_p teğetine (asimptotik olmayan) sahip olan bütün eğrilerin P noktasına karşılık gelen eğrilik eksenleri, tepesi Meusnier küresinin merkezi olan ve (\vec{n}, \vec{N}_p) düzleminde bulunan düzlemsel bir doğru demetine dahildirler.

Sonuç 2.2.24

\mathbb{E}^3 de bir M yüzeyi üzerinde bulunan bir $P \in M$ noktasında yüzeye teğet olan ve asimptotik doğrultu olmayan bütün doğrultuları, ortak teğet doğrultusu kabul eden eğri ailelerinin P noktasına karşılık gelen,

a) Eğrilik çemberleri, yarıçapı R ve merkezi $C = P + R\vec{N}_p$ noktası olan Meusnier küresi üzerinde bulunurlar.

b) Eğrilik merkezleri, yarıçapı $\frac{R}{2}$ ve merkezi

$$D = P + \frac{R}{2}\vec{N}_p$$

noktası olan bir çember üzerinde bulunurlar.

c) Eğrilik eksenleri tepesi $C = P + R\vec{N}_p$ noktası olan uzaysal bir doğru demetine sahiptir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.2.25: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifold veya n -manifold dur denir:

- (1) M bir Hausdorff uzayıdır.
- (2) M n -boyutlu lokal Öklidyendir.
- (3) M açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.26: M bir n -boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıftan diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıftan diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.27 $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve

$\vec{v}_p \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun. Bu durumda $\vec{v}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere;

$$\vec{v}_p[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n + t(Q_n - P_n)))|_{t=0}$$

reel sayısına f fonksiyonun \vec{v}_p vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalihoglu, 1998).

Teorem.2.2.28 $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{E}^n$ ve $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\vec{v}_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$$

dir (Hacısalihoglu, 1998).

Teorem 2.2.29 $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{E}^n, \mathbb{R})$, $\forall \vec{v}_p, \vec{u}_p \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için:

- (i) $(a\vec{v}_p + b\vec{u}_p)[f] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{u}_p[f]$,
- (ii) $\vec{v}_p[af + bg] = a\vec{v}_p[f] + b\vec{v}_p[g]$,
- (iii) $\vec{v}_p[f \cdot g] = \vec{v}_p[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \vec{v}_p[g]$

dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.2.30 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna \mathbb{E}^n de bir eğri denir. Bir $t \in I$ değeri için eğrinin bir $\alpha(t)$ noktası elde edilir. Bu noktada

$$\vec{\alpha}'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t) \right)$$

vektörü eğrinin hız vektörü adını alır ve $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisi bir tanjant vektördür (Hacısalihoglu, 1998).

Teorem 2.2.31 α , \mathbb{E}^n de bir eğri ve bir diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyon f ise

$$\vec{\alpha}'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha))}{dt} \Big|_t = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_t$$

dir.

İspat: Tanım 2.2.30 dan

$$\vec{\alpha}'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t) \right)$$

olduğundan Teorem.2.2.28 gereğince

$$\alpha'(t)[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_t$$

yazılabilir. Burada $(f(\alpha(t))) = (f \circ \alpha)(t)$ bileşke fonksiyonu $f(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ yazılabileceğinden zincir kuralı ile

$$\frac{d(f(\alpha))}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_i}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_t$$

olur.

Buradaki türev $\vec{\alpha}'(t)[f] = D_{\vec{\alpha}'(t)}f$ olarak yazılabilir ve bu türev

$f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi boyunca kovaryant türev adını alır.

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_t = \langle \vec{\nabla} f, \vec{\alpha}' \rangle \Big|_t$$

olarak da gösterilen bu türev iç çarpım işlemidir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.2.32 M bir diferensiyellenebilir manifold ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere bir $\alpha : I \rightarrow M$ fonksiyonunun C^k sınıfından olması, $\alpha(t) = P \in M$ noktasının bir komşuluğundaki $\{u_1, \dots, u_n\}$ lokal koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan, α eğrisinin

$$\alpha_i = u_i \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonlarının C^k sınıfından olması demektir. $\alpha(I) \subset M$ cümlesine, $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri denir.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ da M üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri olsun. $\alpha(t) = P \in M$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow X_p(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_t \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı X_p fonksiyonuna, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem.2.2.33 M bir diferensiyellenebilir manifold, $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay, $T_M(P)$ ve $\forall X_p \in T_M(P)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

- 1) $X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineerdir.
- 2) $X_p(fg) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g)$

dir. Ayrıca M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : \begin{matrix} \text{örten} \\ \xrightarrow{1-1} \\ \bigcup \\ p \in M \end{matrix} T_M(p)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.34 (Riemann Manifoldu): M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, \langle , \rangle fonksiyonuna M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.35 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$(1) \quad D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z,$$

$$(2) \quad D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y,$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve D_X operatörüne de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.36 M yarı-Riemann manifoldu olsun. M üstünde bir D afin koneksiyonu

- (1) D , C^∞ sınıftandır.
- (2) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir.

- (3) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ sınıftan her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $p \in A$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle|_P + \langle Y, D_X Z \rangle|_P$$

özelliklerini sağlıyorsa, D koneksiyonuna, M üstünde bir Riemann koneksiyonu ve D_X operatörüne de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.37 \mathbb{E}^n , n -boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ -boyutlu bir hiperyüzey diye \mathbb{E}^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset \mathbb{E}^n \mid f : U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, \quad U \text{ açık}\}$$

$$x \longrightarrow f(x) = c \text{ sabit}$$

olmak üzere, $\nabla f|_p \neq 0$, her $p \in M$ biçiminde tanımlanır. Her $X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.38 \mathbb{E}^n n -boyutlu Öklid uzayının bir M hiperyüzeyi üzerinde, q -yuncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.39 \mathbb{E}^n n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.40 \mathbb{E}^n n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = iz(S(P)) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.41 \mathbb{E}^n n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerlerine M nin bu noktasındaki asli eğrilikleri denir. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin P noktasındaki asli eğrilik vektörleri veya asli eğrilik doğrultuları adı verilir (Hacısalihoğlu, 1994).

2.2.2 Regle Yüzeyler

Bu kısımda regle yüzeyler ile ilgili kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.42 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. Her $p \in M$ noktasında, \mathbb{E}^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey denir ve $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Sonuç 2.2.43 \mathbb{E}^3 , 3–boyutlu Öklid uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

olsun. Her $u \in I$ için $\alpha(u)$ noktasındaki $T_{\alpha(u)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ v &\rightarrow l(v) = (\alpha_1(u) + vX_1(u), \alpha_2(u) + vX_2(u), \alpha_3(u) + vX_3(u)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $X_i(u) \in \mathbb{R}$ skalarları $\alpha(u)$ noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir. l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\alpha_1(u) + vX_1(u), \alpha_2(u) + vX_2(u), \alpha_3(u) + vX_3(u)) \end{aligned}$$

$\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ olacak şekilde bir regle yüzey elde edilir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.44 Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.45 Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.46 Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz çizgisi (striksiyon eğrisi) adı verilir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.47 Bir $\varphi(u, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\bar{\alpha}$ yervektörü, dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(u)$ yervektörü, $X(u)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan \bar{u} uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(u, \bar{u}) = \alpha(u) + \bar{u}X(u)$$

şeklinde ifade edilir. \bar{u} parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultmanı cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $X(u)$ ve $X(u) + dX(u)$ olan komşu üç anadoğrusunu seçelim. Burada P ve Q farklı iki boğaz noktası olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(u, \bar{u}) = \alpha(u) - \frac{\langle \frac{dX}{ds}, T \rangle}{\left\| \frac{dX}{ds} \right\|^2} X(u), \quad \alpha'(u) = T \quad (2.12)$$

bulunur (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.48 Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu iki komşu anadoğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir. Ayrıca yüzeyin dralinin diferensiyel denklemi

$$\lambda = - \frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle} \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.49 Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2.3 Paralel Yüzeyler

Bu kısımda paralel yüzeyler ile ilgili kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.50 M_1 ve M_2 , \mathbb{E}^n in iki hiperyüzeyi ve M_1 in birim normal vektör alanı

$$\vec{N}_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve her $P \in M_1$ için

$$f(p) = (p_1 + ra_1(p), p_2 + ra_2(p), \dots, p_n + ra_n(p))$$

olacak şekilde bir

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa, M_2 ye M_1 in paralel hiperyüzeyi denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Bundan sonra, \mathbb{E}^n in M hiperyüzeyine paralel olan hiperyüzeyi M^r ile göstereceğiz. Buradaki r indisi $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısını belirtir. M nin birim normal vektör alanını \vec{N} , şekil operetörünü S ve M^r nin birim normal vektör alanını \vec{N}^r , şekil operatörü de S^r ile göstereceğiz. O halde $\vec{N}^r = \vec{N}_1$ yani

$$\vec{N}^r = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{a}_i(f(p)) = a_i(p)$$

olacaktır (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 2.2.51 \mathbb{E}^n in M hiperyüzeyine paralel M^r hiperyüzeyi verilsin. \mathbb{E}^n öklid uzayının $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre; $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M^r)$ vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

öyleki, her $P \in M$ için $b_i(p) = \bar{b}_i(f(p))$, $1 \leq i \leq n$, özelliği ile verilsin. O zaman

- 1) $f_*(X) = X + rS(X)$
- 2) $S^r(f_*(X)) = S(X)$

dir (Hacısalihoglu, 1994).

Teorem 2.2.52 $f : M \rightarrow M^r$ olmak üzere, M nin bir paralel hiperyüzeyi M^r olsun. O zaman

(1) f üçüncü temel form olma özelliğini korur.

(2) f umbilik nokta olma özelliğini korur.

(3) f asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.

(4) M nin temel formları, sırasıyla, I, II, III ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall P \in M$ için

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} = I(X_p, Y_p) + 2rII(X_p, Y_p) + r^2III(X_p, Y_p)$$

dir (Hacısalihoglu, 1994).

Teorem.2.2.53 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M^r olsun. $P \in M$ noktasında M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla, K ve H , $f(P) \in M^r$ noktasında M^r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K^r ve H^r olsun. O zaman,

$$K^r = \frac{K}{(1 + rH + r^2K)} \quad (2.14)$$

$$H^r = \frac{H + 2rK}{(1 + rH + r^2K)}$$

dır (Hacısalihoglu, 1994).

Sonuç 2.2.54 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M^r olsun. $P \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla K ve H , $f(P) \in M^r$ noktasında M^r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K^r ve H^r olsun. O zaman M ve M^r yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında ,

$$K = \frac{K^r}{1 - rH^r + r^2K^r} \quad (2.15)$$

$$H = \frac{H^r - 2rK^r}{1 - rH^r + r^2K^r}$$

eşitlikleri vardır.

2.2.4 Weingarten Yüzeyler

Bu kısımda Weingarten yüzey tanımı ve regle Weingarten yüzey olma şartı verilmiştir.

Tanım 2.2.55 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için yüzeyin K Gauss ve H ortalama eğrilikleri arasında

$$\Phi(H, K) = 0$$

olacak şekilde fonksiyonel bir Φ bağıntısının var olması veya bununla özdeş olarak, H ve K eğriliklerinin değişimleri lineer bağımsız ise M yüzeyine Weingarten yüzey denir (Sipus, 2008).

Teorem 2.2.56 $M(u, v) \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey olsun. Bu yüzeyin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H olmak üzere,

$$K_u H_v - K_v H_u = 0 \quad (2.16)$$

eşitliği sağlanıyorsa M yüzeyi Weingarten yüzeyidir (Sipus, 2008).

Teorem 2.2.57 $K \neq 0$ olmak üzere $\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzeyi açılabilir olmayan bir yüzey olsun. Bu durumda,

$$\|X\| = \|X'\| = 1, \quad \langle \alpha', X' \rangle = 0 \quad (2.17)$$

eşitlikleri sağlanmak üzere

$$\begin{aligned} F &= \langle \alpha', X \rangle & Q &= \det(\alpha', X, X') \\ J &= \det(X'', X', X), & D &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

olsun. Birinci esas formun E, F, G katsayıları ve D ;

$$\begin{aligned} E &= \|\alpha'\|^2 + v^2, & F &= \langle \alpha', X \rangle \\ G &= 1, & D &= \sqrt{Q^2 + v^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

dir (Kühnel, 1994).

İspat: Birinci esas formun katsayılarının

$$E = \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_u \rangle, F = \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v \rangle \text{ ve } G = \langle \vec{\varphi}_v, \vec{\varphi}_v \rangle$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\vec{\varphi}_u = \alpha' + v.X' \text{ ve } \vec{\varphi}_v = X$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} E &= \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_u \rangle \\ &= \langle \alpha' + v.X', \alpha' + v.X' \rangle \\ &= \langle \alpha', \alpha' \rangle + v. \langle \alpha', X' \rangle + v. \langle X', \alpha' \rangle + v^2. \langle X', X' \rangle \\ &= \|\alpha'\|^2 + v^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} F &= \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v \rangle \\ &= \langle \alpha' + v.X', X \rangle \\ &= \langle \alpha', X \rangle + v. \langle X', X \rangle \\ &= \langle \alpha', X \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

ve

$$G = \langle \vec{\varphi}_v, \vec{\varphi}_v \rangle = \langle X, X \rangle = 1$$

olur. (2.18) eşitliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(|\alpha'|^2 + v^2).1 - F^2} \\ &= \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle + v^2 - F^2} \\ &= \sqrt{\langle F.X + Q.X \wedge X', F.X + Q.X \wedge X' \rangle + v^2 - F^2} \\ &= \sqrt{Q^2 \langle X \wedge X', X \wedge X' \rangle + 2QF \langle X \wedge X', X \rangle + F^2 \langle X, X \rangle + v^2 - F^2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada Lagrange özdeşiği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \langle X \wedge X', X \wedge X' \rangle &= \langle X, X \rangle \langle X', X' \rangle - \langle X, X' \rangle \langle X, X' \rangle \\ &= \|X\|^2 \cdot \|X'\|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{Q^2 + F^2 + v^2 - F^2} \\ &= \sqrt{Q^2 + v^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.2.58 φ, \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey olsun. φ yüzeyinin Gauss ve Ortalama eğrilikleri, E, F, G ve L, M, N , sırasıyla, φ ye bağlı birinci ve ikinci esas formunun katsayıları olmak üzere,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{ve} \quad H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}$$

(Sabuncuoğlu, 2004).

Sonuç 2.2.59 k_1 ve k_2 asli eğrilikleri,

$$\mathbf{k}^2 - 2H\mathbf{k} + K = 0$$

kuadratik denkleminin kökleridir. k_1 ve k_2 nin eşitleri;

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{ve} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dir (Kühnel, 1994).

Yardımcı Teorem 2.2.60 φ, \mathbb{E}^3 de bir yüzey olsun. İkinci esas formun katsayıları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ M &= \frac{\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ N &= \frac{\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(\vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

(Gary, 1993).

(2.18) eşitliklerden faydalanarak, ikinci temel formun katsayıları Q, J ve F ye bağlı olarak ifade edilirse,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{1}{D}(Q(QJ + F) - vQ' + v^2J) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{D}(\det(\vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v)) \\ &= \frac{1}{D} \langle X', (\alpha' + vX') \wedge X \rangle \\ &= \frac{1}{D} \langle X', \alpha' \wedge X + vX' \wedge X \rangle \\ &= \frac{1}{D} [\langle X', \alpha' \wedge X \rangle + \langle X', vX' \wedge X \rangle] \\ &= \frac{Q}{D} \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} N &= \frac{\det(\vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v)}{D} \\ &= \frac{\det(0, \varphi_u, \varphi_v)}{D} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Gauss eğriliği,

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-(\frac{Q}{D})^2}{D^2} \\ &= -\frac{Q^2}{D^4} \end{aligned} \tag{2.24}$$

ve ortalama eğrilik ise

$$\begin{aligned}
H &= \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{\frac{Q(QJ + F) - vQ' + v^2J}{D} - 2 \cdot \frac{Q}{D} \cdot F}{2D^2} \\
&= \frac{Q^2J - QF - vQ' + v^2J}{2D^3}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

dır.

Bir yüzeyin Weingarten yüzey olması için; (2.16) denkleminin sağlanması gerekir. (2.24) ifadesindeki K Gauss eğriliğinin, sırasıyla, u ve v ye göre türevleri alınrsa,

$$\begin{aligned}
K_u &= \frac{-2QQ'(Q^2 + v^2)^2 + 2(Q^2 + v^2)2QQ'Q^2}{(Q^2 + v^2)^4} \\
&= \frac{2QQ'(Q^2 + v^2)[-Q^2 - v^2 + 2Q^2]}{(Q^2 + v^2)^4} \\
&= \frac{2QQ'D^2[Q^2 - v^2]}{D^8}
\end{aligned}$$

veya

$$K_u = \frac{2QQ'[Q^2 - v^2]}{D^6} \tag{2.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_v &= \frac{2(Q^2 + v^2) \cdot 2v \cdot Q^2}{(Q^2 + v^2)^4} \\
&= \frac{4vQ^2}{(Q^2 + v^2)^3}
\end{aligned}$$

veya

$$K_v = \frac{4Q^2v}{D^6} \tag{2.27}$$

bulunur.

(2.25) eşitliğindeki H ortalama eğriliğinin, sırasıyla, u ve v ye göre türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
H_u &= \frac{1}{4(Q^2 + v^2)^3} [J'v^2 - Q''v + 2QQ'J + J'Q^2 - Q'F - F'Q] 2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad - 3(Q^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} 2QQ'[Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF] \\
&= \frac{1}{4D^6} [J'v^2 - Q''v + 2QQ'J + J'Q^2 - Q'F - F'Q] 2D^3 \\
&\quad - 6DQQ'[Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF] \\
&= \frac{1}{2D^5} [J'v^2 - Q''v + 2QQ'J + J'Q^2 - Q'F - F'Q] (Q^2 + v^2) \\
&\quad - 3QQ'[Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF] \\
&= \frac{1}{2D^5} [Q^2(2QF' - QQ'J + J'Q^2 + 2Q'F) - (Q^2Q'' + 3QQ'^2)v \\
&\quad + (2Q^2J' - Q'F - F'Q - QQ'J')v^2 - Q''v^3 + J'v^4]
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
H_u &= \frac{1}{2D^5} [Q^2(2QF' - QQ'J + J'Q^2 + 2Q'F) - (Q^2Q'' + 3QQ'^2)v \\
&\quad + (2Q^2J' - Q'F - F'Q - QQ'J')v^2 - Q''v^3 + J'v^4]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

elde edilir. Ayrıca v ye göre kısmi türev

$$\begin{aligned}
H_v &= \frac{(2Jv - Q')2(Q^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot \frac{3}{2}(Q^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2v \cdot (Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF)}{4(Q^2 + v^2)^3} \\
&= \frac{2(Q^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} [(2Jv - Q')(Q^2 + v^2) - 3v(Jv^2 - Q'v + Q^2J - QF)]}{4(Q^2 + v^2)^3} \\
&= \frac{2JvQ + 2Jv^3 - Q'Q^2 - Q'v^2 - 3Jv^3 + 3Q'v^2 - 3Q^2Jv + 3QFv}{2(Q^2 + v^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

veya

$$H_v = \frac{1}{2D^5} [-Q'Q^2 - (Q^2J - 3QF)v + 2Q'v^2 - Jv^3] \tag{2.29}$$

bulunur. Bu sonuçlar (2.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& K_v H_u - K_u H_v \\
&= \frac{4Q^2 v}{D^6} \cdot \frac{1}{2D^5} [(2Q^3 Q' J - Q^2 Q' F - Q^3 F' - 3Q^3 Q' J + 3Q^2 Q' F) - (Q^2 Q'' + 3Q Q'^2) v \\
&\quad + (Q^2 J' + 2Q Q' J + J' Q^2 - Q' F - F' Q - 3Q Q' J') v^2 - Q'' v^3 + J' v^4] \\
&\quad - \frac{2Q Q' [Q^2 - v^2]}{D^6} \cdot \frac{1}{2D^5} (-Q' Q^2 - (Q^2 J - 3Q F) v + 2Q' v^2 - J v^3) \\
&= \frac{1}{D^{11}} [(4Q^5 Q' J - 2Q^4 Q' F - 2Q^5 F' - 6Q^5 Q' J + 6Q^4 Q' F) v - (2Q^4 Q'' - 6Q^3 Q'^2) v^2 \\
&\quad + (4Q^4 J' + 2Q^3 Q' J - 2Q^2 Q' F - 2F' Q^3) v^3 - 2Q^2 Q'' v^4 + 2Q^2 J' v^5] \\
&\quad - \frac{1}{D^{11}} [-Q^5 Q'^2 + Q^3 Q'^2 v^2 - Q^5 Q' J v + Q^3 Q' J v^3 + 3Q^4 Q' F v - 3Q^2 Q' F v^3 \\
&\quad + 2Q^3 Q'^2 v^2 - 2Q Q'^2 v^4 - Q^3 Q' J v^3 + Q Q' J v^5]
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& K_v H_u - K_u H_v \\
&= \frac{1}{D^{11}} [(2Q^2 J' - Q Q' J) v^5 + (2Q Q'^2 - 2Q^2 Q'') v^4 + (-2Q^3 Q' J + 4Q^4 J' \\
&\quad - 2Q^2 Q' F - 2Q^3 F' + 3Q^2 Q' F) v^3 + (6Q^3 Q'^2 - 2Q^4 Q'' - 3Q^3 Q'^2) v^2 \quad (2.30) \\
&\quad + (-2Q^5 Q' J + 2Q^6 J' + 4Q^4 Q' F - 2Q^5 F' + Q^5 Q' J - 3Q^4 Q' F) v + Q^5 Q'^2]
\end{aligned}$$

bulunur ve $K \neq 0$ kabul edildiğinden $Q \neq 0$ şartını sağlayan herhangi bir nokta komşuluğunda, $Q^5 Q'^2$ ve v^5 katsayılarının yok olması için, $Q' = 0$ ve $J' = 0$ olmalıdır. Aynı şekilde, v^3 ün katsayısının yok olması için, $F' = 0$ olmalıdır. Buna bağlı olarak, $K \neq 0$ olduğu herhangi bir regle Weingarten yüzey için Q, J, F büyüklükleri sabit olmalıdır. $J = F = 0$ iken $H = 0$ olur. Bu durumda yüzey helisoidsel yüzeydir.

Teorem 2.2.61 Açılabilir olmayan bir φ regle yüzeyi için, aşağıdaki koşullar özdeştir;

(i) φ bir Weingarten yüzeydir.

(ii) Q, J, F büyüklükleri sabittirler.

İspat: (i) \Rightarrow (ii) bir önceki sayfadaki açıklamadan görülmektedir.

(ii) \Rightarrow (i) Q, J, F değerleri sabit olsun Bu durumda $Q^i = J^i = F^i = 0$ olur.

(2.30) denkleminde Q^i, J^i ve F^i yerine 0 yazılırsa

$$K_v H_u - K_u H_v = 0$$

elde edilir (Kühnel, 1994).

BÖLÜM 3

PARALEL YÜZEYLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin, M^r paralel yüzeyi üzerindeki resminin Darboux ve Frenet çatılarına göre eğrilikleri hesaplanmıştır. Bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin temel formları bulunmuştur.

3.1 Paralel Yüzeyler ve Meusnier Teoremi

Bu kısımda M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin, M^r paralel yüzeyi üzerindeki resminin geodezik ve normal eğriliği, geodezik torsiyonu, verilmiştir. Daha sonra Meusnier teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

3.1.1 Bir Eğrinin Paralel Yüzeyi Üzerindeki Resminin Darboux Çatısı

Tanım 3.1.1 M yüzeyinin paralel yüzeyi M^r , M yüzeyi üzerinde birim hızlı α eğrisinin M^r yüzeyi üzerindeki görüntüsü $(f \circ \alpha) = \beta$ olsun. $\vec{\beta}' = \overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}$ dir. β eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux üçyüzlüsü (çatısı) eğri birim hızlı olmadığından $\|\overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}\| = v$ olmak üzere $\left\{ \vec{\mathbf{T}}^r = \frac{\overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}}{v}, \vec{\mathbf{B}}^r = \vec{\mathbf{T}}^r \wedge \vec{\mathbf{N}}^r, \vec{\mathbf{N}}^r \right\}$ olarak ifade edilir.

Teorem 3.1.2 M^r yüzeyinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux üçyüzlüsü $\left\{ \vec{\mathbf{T}}^r, \vec{\mathbf{B}}^r, \vec{\mathbf{N}}^r \right\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{T}}^r &= \frac{1}{v} \left[(1 - rk_n) \vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}} \right] \\
\vec{\mathbf{B}}^r &= \frac{1}{v} \left[(1 - rk_n) \vec{\mathbf{B}} + r\tau_g \vec{\mathbf{T}} \right] \\
\vec{\mathbf{N}}^r &= \vec{\mathbf{N}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

dir.

İspat: Esas yüzeyin birim normal vektör alanının türevi $\vec{\mathbf{N}}^1 = -k_n \vec{\mathbf{T}} - \tau_g \vec{\mathbf{B}}$ olduğuna göre $(f \circ \alpha) = \beta$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki teğet vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{\beta}^1 &= \overline{f_*(\mathbf{T})} = \vec{\mathbf{T}} + r\overline{S(\mathbf{T})} \\
&= \vec{\mathbf{T}} + r(-k_n \vec{\mathbf{T}} - \tau_g \vec{\mathbf{B}}) \\
&= (1 - rk_n) \vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olur. $\vec{\beta}^1$ vektörünün normunu hesaplırsak

$$\begin{aligned}
\|\vec{\beta}^1\| &= \sqrt{(1 - rk_n)^2 + r^2\tau_g^2} \\
&= v
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. $\vec{\mathbf{T}}^r = \frac{f_*(\mathbf{T})}{v}$ olduğundan. M^r yüzeyinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki birim teğet vektörü $\vec{\mathbf{T}}^r = \frac{1}{v}((1 - rk_n) \vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}})$ olur. M^r yüzeyi M yüzeyine paralel olduğundan $\vec{\mathbf{N}}^r = \frac{v}{\vec{\mathbf{N}}}$ ve $\vec{\mathbf{T}}^r$ ile $\vec{\mathbf{N}}$ vektörel çarpılırsa binormal vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{B}}^r &= \vec{\mathbf{N}} \wedge \vec{\mathbf{T}}^r \\
&= \vec{\mathbf{N}} \wedge \frac{(1 - rk_n) \vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}}}{v} \\
&= \frac{1}{v} \left[(1 - rk_n) \vec{\mathbf{B}} + r\tau_g \vec{\mathbf{T}} \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\{\vec{\mathbf{T}}^r, \vec{\mathbf{B}}^r, \vec{\mathbf{N}}\}$ M^r yüzeyi üzerinde $(f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux çatısı olur.

Teorem 3.1.3 M yüzeyi üzerinde birim hızlı olmayan bir α eğrisinin M^r paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $(f \circ \alpha) = \beta$ eğrisinin geodezik

eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
k_g^r &= \frac{1}{v^3} [k_g v^2 - r(r\tau_g k_n^l + (1 - rk_n)\tau_g^l)] \\
k_n^r &= \frac{1}{v^2} (k_n - r(k_n^2 + \tau_g^2)) \\
\tau_g^r &= \frac{\tau_g}{v^2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dir. Burada $\|\overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}\| = v = \sqrt{(1 - rk_n)^2 + (r\tau_g)^2}$ dir.

İspat: β eğrisi birim hızlı olmadığından hesaplamalar Teorem 2.2.16 dan yararlanarak yapılacaktır.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\beta}^i &= (1 - rk_n)\overrightarrow{\mathbf{T}} - r\tau_g\overrightarrow{\mathbf{B}} \\
\overrightarrow{\beta}^{ii} &= -rk_n^l\overrightarrow{\mathbf{T}} + (1 - rk_n)\overrightarrow{\mathbf{T}}^i - r\tau_g^l\overrightarrow{\mathbf{B}} - r\tau_g\overrightarrow{\mathbf{B}}^i \\
&= -rk_n^l\overrightarrow{\mathbf{T}} + (1 - rk_n)(k_g\overrightarrow{\mathbf{B}} + k_n\overrightarrow{\mathbf{N}}) - r\tau_g^l\overrightarrow{\mathbf{B}} - r\tau_g(-k_g\overrightarrow{\mathbf{T}} + \tau_g\overrightarrow{\mathbf{N}})
\end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{\beta}^{ii} = (r\tau_g k_g - rk_n^l)\overrightarrow{\mathbf{T}} + (k_g(1 - rk_n) - r\tau_g^l)\overrightarrow{\mathbf{B}} + [(1 - rk_n)k_n - r\tau_g^2]\overrightarrow{\mathbf{N}} \tag{3.5}$$

olur. Buradan paralel yüzeye ait geodezik eğrilik

$$\begin{aligned}
k_g^r &= \frac{1}{v^2} \langle \overrightarrow{\beta}^{ii}, \overrightarrow{\mathbf{B}}^r \rangle \\
&= \frac{1}{v^2} \langle (r\tau_g k_g - rk_n^l)\overrightarrow{\mathbf{T}} + (k_g(1 - rk_n) - r\tau_g^l)\overrightarrow{\mathbf{B}} \\
&\quad + [(1 - rk_n)k_n - r\tau_g^2]\overrightarrow{\mathbf{N}}, \frac{1}{v} [(1 - rk_n)\overrightarrow{\mathbf{B}} + r\tau_g\overrightarrow{\mathbf{T}}] \rangle \\
&= \frac{1}{v^3} [r^2\tau_g^2 k_g - r^2\tau_g k_n^l + k_g(1 - rk_n)^2 - (1 - rk_n)r\tau_g^l] \\
&= \frac{1}{v^3} [k_g(r^2\tau_g^2 + (1 - rk_n)^2) - r(r\tau_g k_n^l + (1 - rk_n)\tau_g^l)]
\end{aligned}$$

veya

$$k_g^r = \frac{1}{v^3} [k_g v^2 - r(r\tau_g k_n^l + (1 - rk_n)\tau_g^l)] \tag{3.6}$$

elde edilir. Normal eğrilik

$$\begin{aligned}
k_n^r &= \frac{1}{v^2} \langle \vec{\beta}^n, \vec{\mathbf{N}} \rangle \\
&= \frac{1}{v^2} \langle (r\tau_g k_g - rk_n^l) \vec{\mathbf{T}} + (k_g(1-rk_n) - r\tau_g^l) \vec{\mathbf{B}} + [(1-rk_n)k_n - r\tau_g^2] \vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{N}} \rangle \\
&= \frac{1}{v^2} [(1-rk_n)k_n - r\tau_g^2]
\end{aligned}$$

veya

$$k_n^r = \frac{1}{v^2} [k_n - r(k_n^2 + \tau_g^2)] \quad (3.7)$$

bulunur. Geodezik torsiyon ise;

$$\begin{aligned}
\tau_g^r &= -\frac{1}{v} \langle \vec{\mathbf{N}}^l, \vec{\mathbf{B}}^r \rangle \\
&= -\frac{1}{v} \langle -k_n \vec{\mathbf{T}} - \tau_g \vec{\mathbf{B}}, \frac{1}{v} [(1-rk_n) \vec{\mathbf{B}} + r\tau_g \vec{\mathbf{T}}] \rangle \\
&= -\frac{1}{v^2} [-rk_n \tau_g - \tau_g(1-rk_n)]
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\tau_g^r = \frac{\tau_g}{v^2} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.1 Esas yüzey üzerinde geodezik olan bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki resminin de geodezik olabilmesi için, aşağıdaki şartlardan birisi sağlanması gerekmektedir.

i) Esas yüzey üzerindeki eğri eğrilik çizgisi olmalıdır.

ii) Esas yüzey üzerindeki eğrinin normal eğriliği ve geodezik burulması sabit olmalı,

iii) $k_g = \frac{r}{v^2} [(r\tau_g k_n^l + (1-rk_n)\tau_g^l]$ olmalıdır.

İspat: Esas yüzey üzerinde geodezik olan bir eğrinin Tanım 2.2.12 den geodezik eğriliği $k_g = 0$ dır. Eğrinin resminin paralel yüzeyde geodezik olabilmesi için Tanım 2.2.12 den geodezik eğriliği $k_g^r = 0$ olmalıdır.

i) Esas yüzey üzerindeki eğri aynı zamanda eğrilik çizgisi ise Tanım 2.2.13 den $\tau_g = 0$ dır. (3.6) eşitliğinde $k_g = 0$ ve $\tau_g = 0$ alınrsa $k_g^r = 0$ olur.

ii) Esas yüzey üzerinde eğrinin normal eğriliği ve geodezik burulması sabit ise (3.6) eşitliğinde $k_g = 0$, $k_n^l = 0$ ve $\tau_g^l = 0$ alınrsa $k_g^r = 0$ bulunur.

iii) (3.6) eşitliğinde k_g yerine $\frac{r}{v^2} [(r\tau_g k_n^l + (1 - rk_n) \cdot \tau_g)]$ alınrsa $k_g^r = 0$ olur.

Sonuç 3.1.2 Esas yüzey üzerinde asimptotik olan bir eğrinin resminin paralel yüzeyde asimptotik eğri olması için aşağıdaki şartlardan birisi sağlanması gerekmektedir.

i) Eğri esas yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olmalıdır.

ii) $k_n = r(k_n^2 + \tau_g^2)$ eşitliği sağlanmalıdır.

İspat: Esas yüzey üzerinde eğri asimptotik olan bir eğrinin Tanım 2.2.11 den normal eğriliği $k_n = 0$ dır. Eğrinin resminin paralel yüzeyde asimptotik olabilmesi için Tanım 2.2.11 den geodezik eğriliği $k_n^r = 0$ olmalıdır.

i) Esas yüzey üzerinde aynı zamanda eğrilik çizgisi ise Tanım 2.2.13 den $\tau_g = 0$ dır. (3.7) eşitliğinde $k_n = 0$ ve $\tau_g = 0$ alınrsa $k_n^r = 0$ olur.

ii) (3.7) eşitliğinde k_n yerine $r(k_n^2 + \tau_g^2)$ alınrsa $k_n^r = 0$ bulunur.

Sonuç 3.1.3 Esas yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olan bir eğrinin, paralel yüzeydeki resmi de eğrilik çizgisidir.

İspat: Esas yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olan bir eğrinin Tanım 2.2.13 den geodezik burulması $\tau_g = 0$ dır. Eğrinin resminin paralel yüzeyde eğrilik çizgisi olabilmesi için Tanım 2.2.13 den geodezik burulması $\tau_g^r = 0$ olmalıdır. (3.8) eşitliğinde $\tau_g = 0$ alınrsa $\tau_g^r = 0$ olur.

3.1.2 Bir Eğrinin Paralel Yüzeyi Üzerindeki Resminin Frenet Çatısı

Bu kısımda bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünün Frenet çatısı ve eğriliği elde edilmiştir.

Teorem 3.1.4 M^r yüzeyinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki $(f \circ \alpha) = \beta$ eğrisinin Frenet üçyüzlüsü $\{\vec{\mathbf{T}}^r, \vec{\mathbf{n}}^r, \vec{\mathbf{b}}^r\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{T}}^r &= \frac{1}{v} \left[(1 - rk_n) \vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}} \right] \\ \vec{\mathbf{n}}^r &= \frac{1}{v\sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \left[r\tau_g k_g^r \vec{\mathbf{T}} + (1 - rk_n) k_g^r \vec{\mathbf{B}} + vk_n^r \vec{\mathbf{N}} \right] \\ \vec{\mathbf{b}}^r &= \frac{1}{v^3\sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \left[-r\tau_g v^2 k_n^r \vec{\mathbf{T}} - (1 - rk_n) v^2 k_n^r \vec{\mathbf{B}} + v^3 k_g^r \vec{\mathbf{N}} \right]\end{aligned}\quad (3.9)$$

dir.

İspat: β eğrisi birim hızlı bir eğri olmadığından Teorem 2.2.14 ifadesinden faydalanılacaktır. β^I ve (3.5) eşitliğinden β^{II} değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II} &= \left[(1 - rk_n) \vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}} \right] \wedge \left((r\tau_g k_g - rk_n^I) \vec{\mathbf{T}} \right. \\ &\quad \left. + (k_g(1 - rk_n) - r\tau_g^I) \vec{\mathbf{B}} + (k_n(1 - rk_n) - r\tau_g^2) \vec{\mathbf{N}} \right) \\ &= \left[k_g(1 - rk_n)^2 - (1 - rk_n)r\tau_g^I \right] \vec{\mathbf{N}} - (1 - rk_n) \left[(1 - rk_n)k_n - r\tau_g^2 \right] \vec{\mathbf{B}} \\ &\quad + \left[r^2\tau_g^2 k_g - r^2\tau_g k_n^I \right] \vec{\mathbf{N}} - r\tau_g \left[(1 - rk_n)k_n - r\tau_g^2 \right] \vec{\mathbf{T}}\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.4) formüllerindeki eşitlikler kul-

lanılırsa

$$\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II} = -r\tau_g v^2 k_n^r \vec{\mathbf{T}} - (1 - rk_n) v^2 k_n^r \vec{\mathbf{B}} + v^3 k_g^r \vec{\mathbf{N}} \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu vektörün normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\|\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}\| &= \left(\langle \vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}, \vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\langle -r\tau_g v^2 k_n^r \vec{\mathbf{T}} - (1 - rk_n)v^2 k_n^r \vec{\mathbf{B}} + v^3 k_g^r \vec{\mathbf{N}}, \right. \\
&\quad \left. -r\tau_g v^2 k_n^r \vec{\mathbf{T}} - (1 - rk_n)v^2 k_n^r \vec{\mathbf{B}} + v^3 k_g^r \vec{\mathbf{N}} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(r^2 \tau_g^2 v^4 (k_n^r)^2 + (1 - rk_n)^2 v^4 (k_n^r)^2 + v^6 (k_g^r)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\|\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}\| &= \left((k_n^r)^2 v^4 (r^2 \tau_g^2 + (1 - rk_n)^2 + v^6 (k_g^r)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left((k_n^r)^2 v^6 + v^6 (k_g^r)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Düzenleme yapılırsa

$$\|\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}\| = v^3 \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2} \quad (3.11)$$

elde edilir. Bu eşitliklerden yararlanılarak eğrinin binormal vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{b}}^r &= \frac{\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}}{\|\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}\|} \\
&= \frac{1}{v^3 \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \left[-r\tau_g v^2 k_n^r \vec{\mathbf{T}} - (1 - rk_n)v^2 k_n^r \vec{\mathbf{B}} + v^3 k_g^r \vec{\mathbf{N}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. $\vec{\mathbf{b}}^r$ ile $\vec{\mathbf{T}}^r$ vektörel çarpılarak normal vektör

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{n}}^r &= \vec{\mathbf{b}}^r \wedge \vec{\mathbf{T}}^r \\
&= \frac{-r\tau_g v^2 k_n^r \vec{\mathbf{T}} - (1 - rk_n)v^2 k_n^r \vec{\mathbf{B}} + v^3 k_g^r \vec{\mathbf{N}}}{v^3 \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \wedge \frac{(1 - rk_n)\vec{\mathbf{T}} - r\tau_g \vec{\mathbf{B}}}{v} \\
&= \frac{r^2 \tau_g^2 v^2 k_n^r \vec{\mathbf{N}} + (1 - rk_n)^2 v^2 k_n^r \vec{\mathbf{N}} + (1 - rk_n)v^3 k_g^r \vec{\mathbf{B}} + r\tau_g v^3 k_g^r \vec{\mathbf{T}}}{v^4 \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}}
\end{aligned}$$

ve

$$\vec{\mathbf{n}}^r = \frac{1}{v \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \left[r\tau_g k_g^r \vec{\mathbf{T}} + (1 - rk_n)k_g^r \vec{\mathbf{B}} + vk_n^r \vec{\mathbf{N}} \right] \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. $\{\vec{\mathbf{T}}^r, \vec{\mathbf{b}}^r, \vec{\mathbf{n}}^r\}$ M^r yüzeyi üzerinde $(f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(P)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsüdür.

Teorem 3.1.5 M^r yüzeyi üzerinde $(f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{\vec{\mathbf{T}}^r, \vec{\mathbf{b}}^r, \vec{\mathbf{n}}^r\}$, eğrinin asli normalı $\vec{\mathbf{n}}^r$ ile yüzeyin birim normal vektörü $\vec{\mathbf{N}}^r$ arasındaki açı Φ^r ve eğrinin eğriliği κ^r ise;

$$(\kappa^r)^2 = (k_n^r)^2 + (k_g^r)^2 \quad \text{ve} \quad \cos \Phi^r = \frac{k_n^r}{\sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \quad (3.13)$$

dir.

İspat: (2.4) denkleminde $\|\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}\|$ ve $\|\vec{\beta}^I\|$ değerleri yerlerine yazılırsa eğrinin eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa^r &= \frac{\|\vec{\beta}^I \wedge \vec{\beta}^{II}\|}{\|\vec{\beta}^I\|^3} \\ &= \frac{v^3 \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}}{v^3} \end{aligned}$$

veya

$$\kappa^r = \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2} \quad (3.14)$$

bulunur. Eğrinin asli birim normalı $\vec{\mathbf{n}}^r$ ile yüzeyin birim normal vektörü $\vec{\mathbf{N}}^r = \vec{\mathbf{N}}$ iç çarpılır ve (3.12) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \cos \Phi^r &= \langle \vec{\mathbf{n}}^r, \vec{\mathbf{N}}^r \rangle \\ &= \langle \vec{\mathbf{n}}^r, \vec{\mathbf{N}} \rangle \\ &= \left\langle \frac{r\tau_g k_g^r \vec{\mathbf{T}} + (1 - rk_n)k_g^r \vec{\mathbf{B}} + vk_n^r \vec{\mathbf{N}}}{v\sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}}, \vec{\mathbf{N}} \right\rangle \\ &= \frac{k_n^r}{\sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \end{aligned}$$

veya

$$\cos \Phi^r = \frac{k_n^r}{\kappa^r} \quad (3.15)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6 Bir yüzey üzerinde verilen bir noktada aynı teğet vektöre sahip tüm eğrilerin, normal eğriliği ve geodezik burulması aynıdır (Louis, 1948).

Teorem 3.1.7 Bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir α eğrisinin $P = \alpha(t_0)$ noktasındaki teğet vektörü $\vec{\mathbf{T}}$ ile gösterilirse α eğrisinin paralel M^r yüzeyi üzerindeki görüntüsü $(f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t_0))$ noktasındaki teğet vektörü

$$f_*(\mathbf{T}) = (1 - rk_n)\vec{\mathbf{T}} - r\tau_g\vec{\mathbf{B}} \quad (3.16)$$

dır.

Teorem 3.1.6 dan yararlanarak şu sonuç çıkarılabilir:

Esas yüzeyde verilen bir noktada aynı teğet vektöre sahip tüm eğrilerin paralel yüzey üzerindeki görüntüleri de aynı $f_*(\mathbf{T})$ teğet vektörüne sahiptir. Ayrıca (2.5) ve (2.7) denklemlerinden

$$\begin{aligned} v(k_g^r\vec{\mathbf{B}}^r + k_n^r\vec{\mathbf{N}}^r) &= v\kappa^r\vec{\mathbf{n}}^r \\ \implies k_g^r\vec{\mathbf{B}}^r + k_n^r\vec{\mathbf{N}}^r &= \kappa^r\vec{\mathbf{n}}^r \\ \implies k_n^r \langle \vec{\mathbf{N}}^r, \vec{\mathbf{N}}^r \rangle &= \kappa^r \langle \vec{\mathbf{n}}^r, \vec{\mathbf{N}}^r \rangle \\ \implies k_n^r &= \kappa^r \cos \Phi^r \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $(f \circ \alpha_i)$ eğrileri için ifade edilirse

$$k_n^r = \kappa_i^r \cos \Phi_i^r \quad (3.17)$$

olur. $f(P)$ noktasında k_n^r ve $\vec{\mathbf{N}}^r$ sabit olduğu için κ_i^r sadece $\vec{\mathbf{n}}_i^r$ vektörüne bağlı bir değere sahip olacaktır. M^r yüzeyi üzerindeki $f(P) = (f \circ \alpha_i)(t_0)$ noktasındaki aynı $f_*(\mathbf{T})$ teğet vektörüne sahip tüm eğrileri göz önüne alırsak, bu eğriler içinde öyle bir $(f \circ \beta)$ eğrisi vardır ki, bu eğrinin asli normalisi ile yüzey normalisi çakışır. Eğrinin asli normalisi

$$\vec{\mathbf{n}}^r = \frac{1}{v\sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2}} \left[r\tau_g k_g^r \vec{\mathbf{T}} + (1 - rk_n) k_g^r \vec{\mathbf{B}} + vk_n^r \vec{\mathbf{N}} \right]$$

olduğundan bu vektörün \vec{N} vektörü ile çakışması için $k_g^r = 0$ olması gerekir. Böylece

$$k_n^r = \kappa^r$$

olacaktır. κ^r eğriliği κ_i^r eğriliklerin en küçüğü ve $R^r = \frac{1}{\kappa^r}$ eğrilik yarıçaplarının en büyüğü olacaktır ve

$$\frac{1}{R^r} = k_n^r \quad (3.18)$$

dir. (3.17) ve (3.18) eşitlikleri göz önüne alınırsa

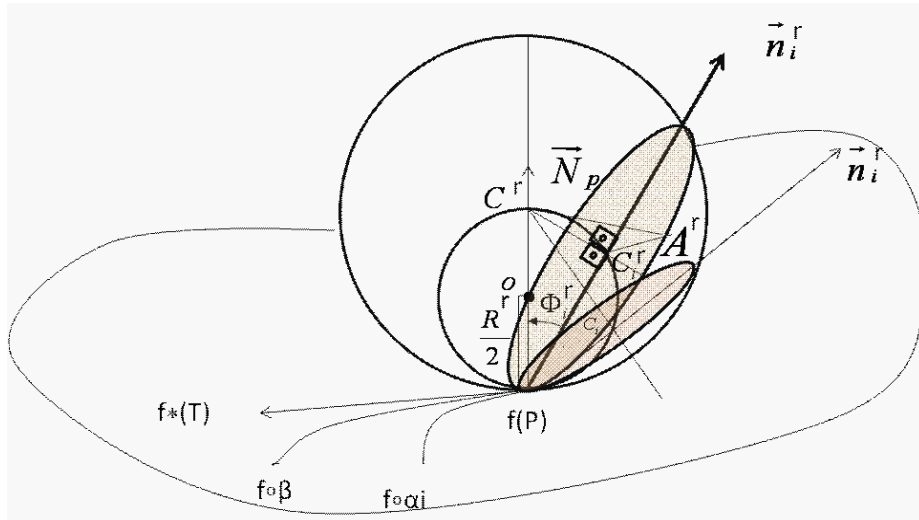
$$\kappa_i^r \cos \Phi_i^r = \frac{1}{R^r}$$

veya $(\rho_i^r) = \frac{1}{\kappa_i^r}$ (eğrilik yarıçapı) olarak alırsak

$$(\rho_i^r) = R^r \cos \Phi_i^r \quad (3.19)$$

sonucunu elde ederiz.

$(f \circ \alpha_i)$ eğrisinin $f(P) = (f \circ \alpha_i)(t_0)$ noktasındaki eğrilik çemberi $(\overrightarrow{f_*}(\mathbf{T}), \vec{n}_i^r)$ öskülatör düzleminde bulunan yarıçapı (ρ_i^r) ve merkezi $C_i^r = f(P) + (\rho_i^r) \vec{n}_i^r$ noktası olan bir çemberdir. $(f \circ \beta)$ eğrisinin $f(P)$ noktasındaki eğrilik çemberi de $(\overrightarrow{f_*}(\mathbf{T}), \vec{N}^r)$ düzleminde yatan R^r yarıçaplı ve $C^r = f(P) + R^r \vec{N}_{f(P)}^r$ merkezli bir diğer çemberdir.



Şekil 3.1

Teorem 3.1.8 Meusnier:

\mathbb{E}^3 de M yüzeyine paralel bir M^r yüzeyi üzerinde bulunan ve $f(P) \in M^r$ noktasında aynı teğete (asimptotik olmayan) sahip olan bütün eğrilerin $f(P)$ noktasındaki eğrilik çemberleri, yarıçapı R^r ve merkezi $C^r = f(P) + R^r \vec{\mathbf{N}}_{f(P)}^r$ noktası olan bir küre üzerinde bulunurlar.

İspat: R^r , (ρ_i^r) , $\vec{\mathbf{n}}_i^r$ ve $\vec{\mathbf{N}}^r$ bilindiği için C_i^r ve C^r noktaları da bilinmektedir. Şekil 3.1 de $C^r f(P) C_i^r$ üçgeninde (3.19) denklemi göz önüne alınırsa $\overrightarrow{f(P)C_i^r} \perp \overrightarrow{C_i^r C^r}$ olduğu görülür. Buna göre

$$\left\| \overrightarrow{C_i^r C^r} \right\| = \sqrt{(R^r)^2 - (\rho_i^r)^2}$$

eşitliği elde edilir. $(f \circ \alpha_i)$ eğrisinin $f(P)$ noktasındaki eğrilik çemberi üzerinde alınan herhangi bir A^r noktasının C^r noktasına olan uzaklığı, $C^r A^r C_i^r$ üçgeninden hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{C^r A^r} \right\| &= \sqrt{\left\| \overrightarrow{C_i^r C^r} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{C_i^r A^r} \right\|^2} \\ &= \sqrt{((R^r)^2 - (\rho_i^r)^2) + (\rho_i^r)^2} \\ &= \sqrt{(R^r)^2 - (\rho_i^r)^2 + (\rho_i^r)^2} \\ &= \sqrt{(R^r)^2} \\ &= R^r \end{aligned}$$

elde edilir

Sonuç 3.1.9 M^r yüzeyi üzerinde bulunan ve belli bir $f(P) \in M^r$ noktasında aynı $\overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}$ teğet vektörüne sahip olan eğrilerin eğrilik merkezleri, $(\vec{\mathbf{n}}_i^r, \vec{\mathbf{N}}_{f(P)}^r)$ düzleminde yarıçapı $\frac{R^r}{2}$ ve merkezi

$$D^r = f(P) + \frac{R^r}{2} \vec{\mathbf{N}}_{f(P)}^r$$

noktası olan bir çember üzerinde bulunurlar.

Sonuç 3.1.10 M^r yüzeyi üzerinde bulunan ve belli bir $f(P) \in M^r$ noktasında aynı $\overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}$ teğet vektörüne sahip olan bütün eğrilerin $f(P)$ noktasına karşılık gelen eğrilik eksenleri, tepesi Meusnier küresinin merkezi olan ve $(\overrightarrow{\mathbf{n}}^r, \overrightarrow{\mathbf{N}}_{f(P)}^r)$ düzleminde bulunan, düzlemsel bir doğru demetine dahildir.

Sonuç 3.1.11 M^r yüzeyi üzerinde bulunan ve belli bir $f(P) \in M^r$ noktasında aynı $\overrightarrow{f_*(\mathbf{T})}$ teğet vektörüne sahip olan bütün eğrilerin $f(P)$ noktasına karşılık gelen,

i) Eğrilik çemberleri, yarıçapı R^r ve merkezi $C^r = f(P) + R^r \overrightarrow{\mathbf{N}}_{f(P)}^r$ noktası olan Meusnier küresi üzerinde bulunur.

ii) Eğrilik merkezleri, yarıçapı $\frac{R^r}{2}$ ve merkezi

$$D^r = f(P) + \frac{R^r}{2} \overrightarrow{\mathbf{N}}_{f(P)}^r$$

noktası olan bir çember üzerinde bulunur.

iii) Eğrilik eksenleri, tepesi $C^r = f(P) + R^r \overrightarrow{\mathbf{N}}_{f(P)}^r$ noktası olan uzaysal bir doğru demetine dahildir.

Örnek 3.1.1 $\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$ şeklinde verilen küre yüzeyi M ile gösterilsin

i) $I = (0, \pi)$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (r \cos t, 0, r \sin t)$ eğrisinin M yüzeyi üzerinde bir eğri olduğunu gösterelim.

ii) (M, α) ikilisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Daurbox üçyüzlüsünü elde edelim.

iii) (M, α) ikilisinin eğriliklerini ve α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik yarı çapımı hesaplayalım.

iv) M küre yüzeyinin kendi yarıçapı kadar normali yönünde ötelenerek elde edilen paralel yüzeyi M^r olsun. $(M^r, f \circ \alpha)$ ikilisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki eğriliklerini ve $f \circ \alpha$ eğrisinin eğriliğini elde edelim.

Çözüm: i) M yüzeyi üzerindeki noktalar

$$(p_1, p_2, \sqrt{r^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2})$$

biçimindeki noktalar. p_1 yerine $\cos t$, p_2 yerine sıfır alalım. Böylece, $(r \cos t, 0, \sqrt{r^2 - (r \cos t)^2 - (0)^2})$ noktası elde edilir. Bu noktanın üçüncü bileşeni $r \sin t$ olacaktır. Böylece her bir $\alpha(t)$ noktasının M yüzeyinin üstünde olduğu görülür.

ii) $\varphi(u, v)$ yüzeyinin u ve v ye göre kısmi türevleri

$$\vec{\varphi}_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}\right), \quad \vec{\varphi}_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

olduğundan,

$$\vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v = \left(\frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}}, 1\right) \quad (3.20)$$

bulunur. (3.20) ifadesinin normu hesaplanırsa

$$\|\vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v\| = \frac{r}{\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}} \quad (3.21)$$

olur. (3.20) ve (3.21) eşitliklerinden, yüzey normali

$$\vec{\mathbf{N}} = \frac{1}{r}(u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2})$$

olarak elde edilir. $\alpha'(t) = (-r \sin t, 0, r \cos t)$ ve $v = \|\alpha'(t)\| = r$ olduğundan

$$\vec{\mathbf{T}} = (-\sin t, 0, \cos t)$$

dır. $\vec{\mathbf{N}}(\alpha(t)) = \frac{1}{r}\alpha(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ olur. Darboux üçyüzlüsünün binormal vektörü

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{N}} \wedge \vec{\mathbf{T}} = (0, -r, 0) \quad (3.22)$$

eşitliğiyle bulunur. Böylece $\{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{N}}, \vec{\mathbf{B}}\}$ Darboux çatısı bulunmuş olur.

iii) (2.6) eşitliklerinde (3.22), $\vec{\mathbf{N}}'(\alpha(t)) = (-\sin t, 0, \cos t)$ ve $\alpha''(t) = (-r \cos t, 0, -r \sin t)$ ifadelerini kullanırsak

$$\tau_g(t) = -\frac{1}{v} \langle \vec{\mathbf{N}}'(\alpha(t)), \vec{\mathbf{B}}(t) \rangle = -\frac{1}{r} 0 = 0,$$

$$k_n(t) = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'(t), \vec{\mathbf{N}}(\alpha(t)) \rangle = \frac{1}{r^2} (-r) = -\frac{1}{r}$$

ve

$$k_g(t) = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'(t), \vec{\mathbf{B}}(t) \rangle = \frac{1}{r^2} 0 = 0$$

elde edilir. Buradan $\alpha(t)$ eğrisinin eğriliği (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \sqrt{k_n^2(t) + k_g^2(t)} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{r}\right)^2 + 0} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

olur. Tanım 2.2.19 dan eğrilik yarıçapı $R = \frac{1}{\kappa}$ olduğundan, $R = r$ bulunur.

iv) $f \circ \alpha = \beta$ olsun. β eğrisinin teğet vektörü $\vec{\beta}' = (1 - rk_n)\vec{\mathbf{T}} - r\tau_g\vec{\mathbf{B}}$ dir. Esas yüzeye ait $\tau_g = 0, k_n = -\frac{1}{r}$ ve $k_g = 0$ ifadeleri (3.3) eşitliğinde kullanılırsa $\vec{\beta}'$ teğet vektörünün normu

$$\begin{aligned} \|\vec{\beta}'\| &= \sqrt{\langle (1 - rk_n)\vec{\mathbf{T}} - r\tau_g\vec{\mathbf{B}}, (1 - rk_n)\vec{\mathbf{T}} - r\tau_g\vec{\mathbf{B}} \rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \left(1 - r\left(-\frac{1}{r}\right)\right)\vec{\mathbf{T}}, \left(1 - r\left(-\frac{1}{r}\right)\right)\vec{\mathbf{T}} \right\rangle} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olur. Paralel yüzeye ait geodezik eğrilik k_g^r , normal eğrilik k_n^r ve geodezik burulma τ_g^r , sırasıyla,

$$k_g^r = \frac{1}{v^3} [k_g v^2 - r(r\tau_g k_n' + (1 - rk_n)\tau_g')]$$

$$0$$

$$\begin{aligned} k_n^r &= \frac{1}{v^2} (k_n - r(k_n^2 + \tau_g^2)) \\ &= \frac{1}{2^2} \left(-\frac{1}{r} - r\left(-\frac{1}{r}\right)^2\right) \\ &= -\frac{1}{2r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_g^r &= \frac{\tau_g}{v^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. $f \circ \alpha = \beta$ eğrisinin eğriliği (3.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\kappa^r &= \sqrt{(k_n^r)^2 + (k_g^r)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2r}\right)^2 + 0} \\ &= \frac{1}{2r}\end{aligned}$$

elde edilir. β eğrisinin eğrilik yarıçapı R^r ile gösterilirse, $R^r = 2r$ bulunur.

3.2 Regle Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri

Bu kısımda paralel yüzeye ait temel formlar elde edilmiş. Açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin de açılabilir bir regle yüzey olduğu gösterilmiştir.

$\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzey olsun. $\varphi(u, v)$ yüzeyinin kısmi türevleri

$$\vec{\varphi}_u(u, v) = \vec{\alpha}_u(u) + v\vec{X}_u(u) \quad \text{ve} \quad \vec{\varphi}_v(u, v) = \vec{X}(u)$$

olmak üzere bu yüzeyin normal vektörü

$$\begin{aligned}\vec{N}(u, v) &= \vec{\varphi}_u(u, v) \wedge \vec{\varphi}_v(u, v) \\ &= \vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) + v(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u))\end{aligned} \tag{3.23}$$

dir.

Teorem 3.2.1 $\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}E &= \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle + 2v \langle \alpha_u, X_u \rangle + v^2 \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle \alpha_u, X \rangle + v \langle X_u, X \rangle \\ G &= \langle X, X \rangle\end{aligned} \tag{3.24}$$

ve ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= -(\langle \alpha_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v \langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle) \\
&\quad + v \langle X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v^2 \langle X_u, X_{uu} \wedge X \rangle) \\
M &= - \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle \\
N &= 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dir.

İspat: Birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_u \rangle \\
&= \langle \alpha_u + vX_u, \alpha_u + vX_u \rangle \\
&= \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle + 2v \langle \alpha_u, X_u \rangle + v^2 \langle X_u, X_u \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v \rangle \\
&= \langle \alpha_u + vX_u, X \rangle \\
&= \langle \alpha_u, X \rangle + v \langle X_u, X \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G &= \langle \vec{\varphi}_v, \vec{\varphi}_v \rangle \\
&= \langle X, X \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= - \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle \\
&= - \langle \alpha_u + vX_u, \alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v(X_{uu} \wedge X) \rangle \\
&= -(\langle \alpha_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v \langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle) \\
&\quad + v \langle X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v^2 \langle X_u, X_{uu} \wedge X \rangle),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= - \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle \\
&= - \langle \alpha_u + vX_u, X_u \wedge X \rangle \\
&= - \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle \\
&= - \langle \vec{\varphi}_v, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle \\
&= - \langle X, \alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v(X_{uu} \wedge X) \rangle \\
&= - \langle X, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\
&= - \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
N &= - \langle \vec{\varphi}_v, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle \\
&= - \langle X, X_u \wedge X \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan herhangi bir regle yüzeyin ikinci temel formunun katsayısı olan N değeri sıfır olmalıdır. Bu bir regle yüzey olma özelliğidir.

$\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzeyinin (3.23) denklemindeki normali

$$\vec{\mathbf{N}} = \vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) + v \left(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right)$$

ifadesinin u ve v parametrelerine göre türevleri

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{N}}_u &= \vec{\alpha}_{uu} \wedge \vec{X} + \vec{\alpha}_u \wedge \vec{X}_u + v \left(\vec{X}_{uu} \wedge \vec{X} \right) \\
\vec{\mathbf{N}}_v &= \vec{X}_u \wedge \vec{X}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur. (3.26) eşitliklerindeki $\vec{\mathbf{N}}_u$ ifadesini kendisi ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle &= \langle \alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v(X_{uu} \wedge X), \\
&\quad \alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v(X_{uu} \wedge X) \rangle \\
&= \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + 2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\
&\quad + 2v \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle + \langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\
&\quad + 2v \langle \alpha_u \wedge X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + v^2 \langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle
\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. $\vec{\mathbf{N}}_u$ ile $\vec{\mathbf{N}}_v$ ifadeleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle &= \langle \alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v (X_{uu} \wedge X), X_u \wedge X \rangle \\ &= \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle + \langle \alpha_u \wedge X_u, X_u \wedge X \rangle \\ &\quad + v \langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

olur ve $\vec{\mathbf{N}}_v$ kendisi ile iç çarpılırsa,

$$\langle \vec{\mathbf{N}}_v, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle = \langle X_u \wedge X, X_u \wedge X \rangle \quad (3.29)$$

bulunur.

3.2.1 Bir Regle Yüzeyin Paralel Yüzeyinin Temel Form- ları

Parametrik olarak verilen $\varphi(u, v)$ yüzeyinin paralel yüzeyi

$$\varphi^r(u, v) = \varphi(u, v) + r\vec{\mathbf{N}}(u, v)$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlamaya göre ve (3.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi^r(u, v) &= \varphi(u, v) + r\vec{\mathbf{N}}(u, v) \\ &= \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u) + r \left(\vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) + v \left(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right) \right) \\ &= \vec{\alpha}(u) + r \left(\vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right) + v \left[\vec{X}(u) + r \left(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right) \right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzeyinden elde edilen $\varphi^r(u, v) = \vec{\alpha}(u) + r \left(\vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right) + v \left[\vec{X}(u) + r \left(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right) \right]$ paralel yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları E^r, F^r ve G^r , ikinci temel formunun katsayıları L^r, M^r ve N^r olsun.

Teorem 3.2.3 $\varphi^r(u, v)$ yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E^r &= E - 2rL + r^2 \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle \\ F^r &= F - 2rM + r^2 \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle \\ G^r &= G + r^2 \langle \vec{\mathbf{N}}_v, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle \end{aligned}$$

dir. İkinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} L^r &= L - r \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle \\ M^r &= M - r \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle \\ N^r &= -r \langle \vec{\mathbf{N}}_v, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle \end{aligned}$$

dir.

İspat: Birinci temel formunun katsayıları φ^r paralel yüzeyinin kısmi türevleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} E^r &= \langle \vec{\varphi}_u^r, \vec{\varphi}_u^r \rangle \\ &= \langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], \\ &\quad \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)] \rangle \\ &= \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle + r \langle \alpha_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v \langle \alpha_u, X_u \rangle + rv \langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + r \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \rangle + r^2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + r^2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle + rv \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \rangle + r^2 v \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + r^2 \langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + r^2 \langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\ &\quad + r^2 v \langle \alpha_u \wedge X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + v \langle X_u, \alpha_u \rangle + vr \langle X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + v^2 \langle X_u, X_u \rangle + v^2 r \langle X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + rv \langle X_{uu} \wedge X, \alpha_u \rangle \\ &\quad + r^2 v \langle X_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + r^2 v \langle X_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\ &\quad + v^2 r \langle X_{uu} \wedge X, X_u \rangle + r^2 v^2 \langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle \end{aligned}$$

olur. Buradan (3.24), (3.25) ve (3.27) eşitliklerinden

$$E^r = E - 2rL + r^2 \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} F^r &= \langle \varphi_u^r, \varphi_v^r \rangle \\ &= \langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], X + r(X_u \wedge X) \rangle \\ &= \langle \alpha_u, X \rangle + r \langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle + r^2 \langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \\ &\quad + r \langle \alpha_u \wedge X_u, X \rangle + r^2 \langle \alpha_u \wedge X_u, X_u \wedge X \rangle \\ &\quad + v \langle X_u, X \rangle + vr^2 \langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \end{aligned}$$

olur (3.24), (3.25) ve (3.27) eşitlikleri kullanılırsa

$$F^r = F - 2rM + r^2 \langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle$$

bulunur.

$$\begin{aligned} G^r &= \langle \vec{\varphi}_v^r, \vec{\varphi}_v^r \rangle \\ &= \langle X + r(X_u \wedge X), X + r(X_u \wedge X) \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + r\langle X, X_u \wedge X \rangle + r\langle X_u \wedge X, X \rangle + r^2\langle X_u \wedge X, X_u \wedge X \rangle \end{aligned}$$

dır. (3.24) ve (3.29) değerleri göz önüne alınırsa

$$G^r = G + r^2 \langle \vec{\mathbf{N}}_v, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle$$

elde edilir. İkinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} L^r &= - \langle \vec{\varphi}_u^r, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle \\ &= - \langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], \\ &\quad \alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u + v(X_{uu} \wedge X) \rangle \\ &= -(\langle \alpha_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v\langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle + r\langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + r\langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle + rv\langle \alpha_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle \\ &\quad + rv\langle \alpha_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle + r\langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + r\langle \alpha_u \wedge X_u, \alpha_u \wedge X_u \rangle + rv\langle \alpha_u \wedge X_u, X_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + v\langle X_u, \alpha_{uu} \wedge X \rangle + v^2\langle X_u, X_{uu} \wedge X \rangle + vr\langle X_{uu} \wedge X, \alpha_{uu} \wedge X \rangle \\ &\quad + vr\langle X_{uu} \wedge X, \alpha_u \wedge X \rangle + v^2r\langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle) \end{aligned}$$

veya (3.25) ve (3.27) denklemlerinden

$$L^r = L - r\langle \vec{\mathbf{N}}_u, \vec{\mathbf{N}}_u \rangle$$

olur.

$$\begin{aligned} M^r &= - \langle \vec{\varphi}_u^r, \vec{\mathbf{N}}_v \rangle \\ &= - \langle \alpha_u + r(\alpha_{uu} \wedge X + \alpha_u \wedge X_u) + v[X_u + r(X_{uu} \wedge X)], X_u \wedge X \rangle \\ &= -(\langle \alpha_u, X_u \wedge X \rangle + r\langle \alpha_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle \\ &\quad + r\langle \alpha_u \wedge X_u, X_u \wedge X \rangle + vr\langle X_{uu} \wedge X, X_u \wedge X \rangle) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
M^r &= - \langle \vec{\varphi}_v^r, \vec{N}_u \rangle \\
&= - \langle X + r(X_u \wedge X), \vec{\alpha}_{uu} \wedge \vec{X} + \vec{\alpha}_u \wedge \vec{X}_u + v (\vec{X}_{uu} \wedge \vec{X}) \rangle \\
&= -(\langle X, \alpha_u \wedge X_u \rangle + r \langle X_u \wedge X, \vec{\alpha}_{uu} \wedge \vec{X} \rangle \\
&\quad + r \langle X_u \wedge X, \alpha_u \wedge X_u \rangle + vr \langle X_u \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle)
\end{aligned}$$

olur. (3.25) ve (3.28) denklemlerinden

$$M^r = M - r \langle \vec{N}_u, \vec{N}_v \rangle$$

bulunur. Son olarak da

$$\begin{aligned}
N^r &= - \langle \vec{\varphi}_v^r, \vec{N}_v \rangle \\
&= - \langle X + r(X_u \wedge X), X_u \wedge X \rangle \\
&= - \langle X_u \wedge X, X_u \wedge X \rangle
\end{aligned}$$

veya (3.29) denkleminde

$$N^r = -r \langle \vec{N}_v, \vec{N}_v \rangle$$

bulunur. Buradan bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin de regle yüzey olması için yüzey normalinin v parametresinden bağımsız olması gerektiği elde edilir.

3.2.2 Açılabilir Paralel Regle Yüzeyler

Bu kısımda açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.2.4 Açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyi de açılabilir bir regle yüzeydir.

İspat: Kabul edelim ki $\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ açılabilir bir regle yüzey, $\|\vec{X}(u)\| = 1$ ve $\|\vec{X}_u(u)\| = 1$ olsun. Açılabilir regle yüzeylerin normalleri bir doğrultman boyunca sabit ve v parametresinden bağımsızdır. $\varphi(u, v)$ yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{N}_1 = \vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) + v (\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u)) \quad (3.30)$$

olduğundan $\vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u)$ vektörü ile $\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u)$ vektörü lineer bağımlıdır. Böylece,

$$\vec{\alpha}_u(u) \wedge \vec{X}(u) = \varepsilon \left(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right)$$

yazılabilir (Park and Kim, 1998). Ayrıca (3.30) denkleminde yüzey normalini $\vec{N}_1 = (\varepsilon + v) \vec{X}_u \wedge \vec{X}$ olur. Yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\vec{N}_1}{\|\vec{N}_1\|} \\ &= \frac{(\varepsilon + v) \vec{X}_u \wedge \vec{X}}{(\varepsilon + v)} \\ &= \vec{X}_u \wedge \vec{X} \end{aligned} \quad (3.31)$$

bulunur. $\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzeyin paralel yüzeyi (3.31) denklemini gözönüne alınırsa

$$\varphi^r(u, v) = \vec{\alpha}(u) + r \left(\vec{X}_u(u) \wedge \vec{X}(u) \right) + v\vec{X}(u) \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. $\varphi^r(u, v)$ yüzeyinin dağılma parametresi

$$\begin{aligned} \lambda &= \langle \vec{\alpha}_u + r\vec{X}_{uu} \wedge \vec{X}, \vec{X}_u \wedge \vec{X} \rangle \\ &= \langle \vec{\alpha}_u, \vec{X}_u \wedge \vec{X} \rangle + r \langle \vec{X}_{uu} \wedge \vec{X}, \vec{X}_u \wedge \vec{X} \rangle \end{aligned}$$

ve $\langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle = 1$ olduğunda $\langle \vec{X}_u, \vec{X}_{uu} \rangle = 0$ olacaktır. O zaman

$$\vec{X}_{uu} = a\vec{X} + b\vec{X}_u \wedge \vec{X}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{X}_{uu} \wedge \vec{X} &= \left(a\vec{X} + b\vec{X}_u \wedge \vec{X} \right) \wedge \vec{X} \\ &= a\vec{X} \wedge \vec{X} + b \left(\vec{X}_u \wedge \vec{X} \right) \wedge \vec{X} \\ &= -b\vec{X}_u \end{aligned} \quad (3.33)$$

olur (3.33) eşitliği ve $\varphi(u, v)$ açılabilir yüzeyinin dağılma parametresi $\det(\vec{\alpha}_u, \vec{X}_u, \vec{X})$ yerine sıfır yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda &= \langle \vec{\alpha}_u, \vec{X}_u \wedge \vec{X} \rangle + r \langle \vec{X}_{uu} \wedge \vec{X}, \vec{X}_u \wedge \vec{X} \rangle \\ &= -rb \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \wedge \vec{X} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varphi^r(u, v)$ açılabilir bir yüzeydir. Bu yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}L^r &= - \langle \vec{\varphi}_u^r, \vec{N}_u \rangle \\ &= - \langle \alpha_u + r(X_{uu} \wedge X) + vX_u, X_{uu} \wedge X \rangle \\ &= -(\langle \alpha_u, X_{uu} \wedge X \rangle + r \langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle) \\ &= -r \langle X_{uu} \wedge X, X_{uu} \wedge X \rangle\end{aligned}$$

veya

$$L^r = -r \langle \vec{N}_u, \vec{N}_u \rangle$$

olur.

$$\begin{aligned}M^r &= - \langle \vec{\varphi}_u^r, \vec{N}_v \rangle \\ &= \langle \alpha_u + r(X_{uu} \wedge X), 0 \rangle\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}M^r &= - \langle \vec{\varphi}_v^r, \vec{N}_u \rangle \\ &= \langle X, X_{uu} \wedge X \rangle\end{aligned}$$

ifadelerinden

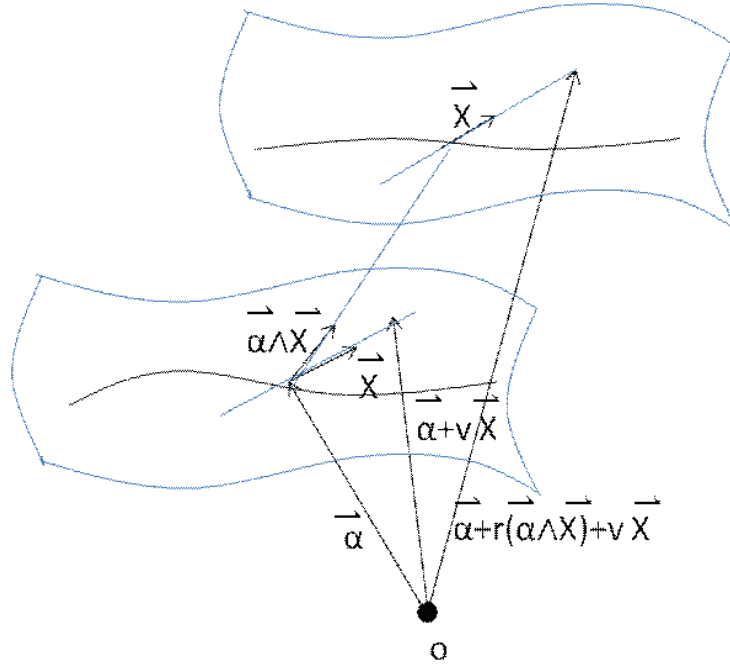
$$M^r = 0$$

ve

$$\begin{aligned}N^r &= \langle \vec{\varphi}_v^r, \vec{N}_v \rangle \\ &= \langle X, 0 \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\varphi^r(u, v)$ yüzeyi dayanak eğrisi $\vec{\alpha} + r(\vec{X}_u \wedge \vec{X})$ ve doğrultmanı \vec{X} olmak üzere Şekil 3.2 de görüldüğü gibi bir açılabilir regle

yüzey belirtir.



Şekil 3.2

BÖLÜM 4

REGLE WEINGARTEN YÜZEYLERİN PARALEL YÜZEYLERİ

Bu bölümde bir regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzey olduğu gösterilmiştir. Ayrıca açılabilir olmayan regle Weingarten yüzeylerin paralel yüzeylerine ait bir örnek verilmiştir.

4.1 Regle Weingarten Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri

Bu kısımda, regle Weingarten yüzeylerin paralel yüzeylerinin de Weingarten yüzey oldukları gösterilmiştir.

Teorem 4.1.1 $\varphi(u, v)$ Regle yüzeyinin paralel yüzeyi $\varphi^r(u, v)$ olsun. $\varphi(u, v)$ bir regle Weingarten yüzeydir ancak ve ancak $\varphi^r(u, v)$ paralel yüzeyi Weingarten yüzeyidir.

İspat: $\varphi(u, v)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H ve $\varphi^r(u, v)$ yüzeyinin Gauss eğriliği K^r , ortalama eğriliği H^r olsun.

(\Rightarrow) : $\varphi(u, v)$ regle Weingarten yüzeyi olduğundan (2.16) denkleminde

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

eşitliği sağlandığında

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0 \quad (4.1)$$

eşitliğinin de sağlandığını göstermeliyiz.

(2.14) deki eşitlikler (4.1) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r \\
&= \left(\frac{K}{1+rH+r^2K} \right)_u \left(\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \right)_v - \left(\frac{K}{1+rH+r^2K} \right)_v \left(\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \right)_u \\
&= \left[\frac{K_u(1+rH+r^2K) - (rH_u+r^2K_u)K}{(1+rH+r^2K)^2} \right] \\
&\quad \left[\frac{(H_v+2rK_v)(1+rH+r^2K) - (rH_v+r^2K_v)(H+2rK)}{(1+rH+r^2K)^2} \right] \\
&\quad - \left[\frac{K_v(1+rH+r^2K) - (rH_v+r^2K_v)K}{(1+rH+r^2K)^2} \right] \\
&\quad \left[\frac{(H_u+2rK_u)(1+rH+r^2K) - (rH_u+r^2K_u)(H+2rK)}{(1+rH+r^2K)^2} \right]
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^4} [(K_u+rK_uH+r^2KK_u-rKH_u-r^2KK_u) \\
&\quad (H_v+rHH_v+r^2KH_v+2rK_v+2r^2K_vH+2r^3KK_v-rHH_v \\
&\quad -2r^2KH_v-r^2K_vH-2r^3KK_v)-(K_v+rK_vH+r^2KK_v-rKH_v-r^2KK_v) \\
&\quad (H_u+rHH_u+r^2KH_u+2rK_u+2r^2K_uH+2r^3KK_u-rHH_u-2r^2KH_u \\
&\quad -r^2K_uH-2r^3KK_u)] \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^4} [(K_u+rK_uH-rKH_u)(H_v+r^2KH_v+2rK_v+2r^2K_vH \\
&\quad -2r^2KH_v-r^2K_vH)-(K_v+rK_vH-rKH_v)(H_u+r^2KH_u+2rK_u \\
&\quad +2r^2K_uH-2r^2KH_u-r^2K_uH)]
\end{aligned}$$

bulunur. Esas yüzeyin Weingarten yüzey olma şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^4} [K_u H_v + r^2 K K_u H_v + r K_u H H_v - K_v H_u - r^2 K K_v H_u - r K_v H H_u] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(\Leftarrow) : $\varphi^r(u, v)$ paralel Weingarten yüzeyi olsun. Bu durumda

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. (2.15) eşitlikleri (2.16) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& K_u H_v - K_v H_u \\
&= \left(\frac{K^r}{1-rH^r+r^2K^r} \right)_u \left(\frac{H^r-2rK^r}{1-rH^r+r^2K^r} \right)_v - \left(\frac{K^r}{1-rH^r+r^2K^r} \right)_v \left(\frac{H^r-2rK^r}{1-rH^r+r^2K^r} \right)_u \\
&= \frac{1}{(1-rH^r+r^2K^r)^2} [(K_u^r(1-rH^r+r^2K^r) - (1-rH^r+r^2K^r)_u K^r) \cdot \cdot \\
&\quad ((H^r-2rK^r)_v(1-rH^r+r^2K^r) - (1-rH^r+r^2K^r)_v(H^r-2rK^r)) \\
&\quad - (K_v^r(1-rH^r+r^2K^r) - (1-rH^r+r^2K^r)_v K^r)((H^r-2rK^r)_u(1-rH^r+r^2K^r)) \\
&\quad - (H^r-2rK^r)(1-rH^r+r^2K^r)_u] \\
&= \frac{1}{(1-rH^r+r^2K^r)^2} [(K_u^r - rH^r K_u^r + rH_u^r K_r)(H_v^r + r^2 K^r H_v^r - 2rK_v^r + 2r^2 K_v^r H^r \\
&\quad - 2r^3 H_v^r K^r - r^2 K_v^r H^r) - (K_v^r - rK_v^r H^r + rK^r H_v^r)(H_u^r + r^2 K^r H_u^r - 2rK_u^r \\
&\quad - 2r^3 H_u^r K^r + r^2 K_u^r H^r)]
\end{aligned}$$

olur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2 $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$, $K \neq 0$ olacak şekilde açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun.

$$\|X\| = \|X'\| = 1, \quad \langle \alpha', X' \rangle = 0$$

ve

$$F = \langle \alpha', X \rangle, \quad Q = \det(\alpha', X, X'), \quad J = \det(X'', X', X)$$

olmak üzere $\varphi(u, v)$ yüzeyinin paralel yüzeyi $\varphi^r(u, v)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar özdeşirler;

- (i) φ bir Weingarten yüzeydir.
- (ii) Q, J, F büyüklükleri sabittirler.
- (iii) $\varphi^r(u, v)$ bir Weingarten yüzeydir.

İspat: (i) \Leftrightarrow (ii): Teorem 2.5.61 da ispat edildi.

(ii) \Rightarrow (iii): Q, J, F büyüklükleri sabit olsun. Q, J, F cinsinden değerleri paralel yüzeye ait Gauss ve ortalama eğrilik formüllerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K^r &= \frac{K}{(1 + rH + r^2K)} \\ &= \frac{-2Q^2}{2D^4 + rJv^2 - rQ'v + rQ(QJ - F) - 2r^2Q^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir. (4.2) denklemindeki K^r Gauss eğriliğinin, sırasıyla, u ve v ye göre türevleri alınırsa

$$K_u^r = 0 \quad (4.3)$$

ve

$$K_v^r = \frac{2Q^2 [16D^3v + 2rJv - rQ']}{(2D^4 + rJv^2 - rQ'v + rQ(QJ - F) - 2r^2Q^2)^2} \quad (4.4)$$

bulunur. H^r ortalama eğriliğinin Q, J, F cinsinden değeri

$$\begin{aligned} H^r &= \frac{H + 2rK}{(1 + rH + r^2K)} \\ &= \frac{Jv^2D - Q'vD + Q(QJ - F)D - 4rQ^2}{2D^4 + rJv^2 - rQ'v + rQ(QJ - F) - 2r^2Q^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olur. (4.5) eşitliğinin u ve v ye göre kısmi türevleri

$$H_u^r = 0 \quad (4.6)$$

ve

$$H_v^r = \frac{2JvD + 2vJv^2 - Q'D(2D^4 + rJv^2 - rQ'v + rQ(QJ - F) - 2r^2Q^2)}{2D^4 + rJv^2 - rQ'v + rQ(QJ - F) - 2r^2Q^2}$$

$$\frac{[Jv^2D - Q'vD + Q(QJ - F)D - 4rQ^2](16D^3v + 2rJv - rQ')}{2D^4 + rJv^2 - rQ'v + rQ(QJ - F) - 2r^2Q^2} \quad (4.7)$$

bulunur. (4.3), (4.4), (4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0$$

elde edilir. Böylece paralel yüzey de Weingarten yüzeydir.

(iii) \Rightarrow (ii): $\varphi^r(u, v)$ bir Weingarten yüzey ve $1+rH+r^2K$ ifadesi kısalığın hatırına Ψ ile gösterilsin. Bu durumda

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r$$

$$= \left(\frac{K}{1+rH+r^2K} \right)_u \left(\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \right)_v - \left(\frac{K}{1+rH+r^2K} \right)_v \left(\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \right)_u$$

$$= \left(\frac{K}{\Psi} \right)_u \left(\frac{H+2rK}{\Psi} \right)_v - \left(\frac{K}{\Psi} \right)_v \left(\frac{H+2rK}{\Psi} \right)_u$$

$$= \left(\frac{K_u \Psi - K \Psi_u}{\Psi^2} \right) \left(\frac{(H_v + 2rK_v) \Psi - (H + 2rK) \Psi_v}{\Psi^2} \right)$$

$$- \left(\frac{K_v \Psi - K \Psi_v}{\Psi^2} \right) \left(\frac{(H_u + 2rK_u) \Psi - (H + 2rK) \Psi_u}{\Psi^2} \right)$$

veya

$$\begin{aligned}
& K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r \\
&= \frac{1}{\Psi^4} [(K_u H_v + 2r K_u K_v) \Psi^2 - (K_u H + 2r K_u K) \Psi \Psi_v - (K H_v + 2r K K_v) \Psi_u \Psi \\
&\quad + (K H + 2r K K) \Psi_u \Psi_v - (K_v H_u + 2r K_u K_v) \Psi^2 + (K_v H + 2r K_v K) \Psi \Psi_u \\
&\quad + (K H_u + 2r K K_u) \Psi \Psi_v - (K H + 2r K K) \Psi_u \Psi_v] \\
&= \frac{1}{\Psi^4} [(K_u H_v - K_v H_u) \Psi^2 + (K_v H - K H_v) \Psi \Psi_u + (K H_u - K_u H) \Psi \Psi_v] \\
&= \frac{1}{\Psi^3} [(K_u H_v - K_v H_u) \Psi + (K_v H - K H_v) \Psi_u + (K H_u - K_u H) \Psi_v]
\end{aligned}$$

elde edilir ve Ψ yerine $1+rH+r^2K$ değeri tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{K}{1+rH+r^2K} \right)_u \left(\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \right)_v - \left(\frac{K}{1+rH+r^2K} \right)_v \left(\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \right)_u \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^3} [(K_u H_v - K_v H_u) (1+rH+r^2K) \\
&\quad + (K_v H - K H_v) (rH_u + r^2K_u) + (K H_u - K_u H) (rH_v + r^2K_v)] \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^3} [(K_u H_v - K_v H_u) (1+rH+r^2K) + rH(K_v H_u) \\
&\quad + r^2H(K_v K_u) - rK(H_v H_u) - r^2K(H_v K_u) + rK(H_u H_v) \\
&\quad + r^2K(H_u K_v) - rH(K_u H_v) - r^2H(K_u K_v)] \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^3} [(K_u H_v - K_v H_u) (1+rH+r^2K) \\
&\quad - rH(K_u H_v - K_v H_u) - r^2K(K_u H_v - K_v H_u)] \\
&= \frac{1}{(1+rH+r^2K)^3} [(K_u H_v - K_v H_u) + rH(K_u H_v - K_v H_u) \\
&\quad + r^2K(K_u H_v - K_v H_u) + rH(K_u H_v - K_v H_u) - r^2K(K_u H_v - K_v H_u)]
\end{aligned}$$

olur. Gerekli sadeleştirmelerle

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = \frac{1}{(1+rH+r^2K)^3} (K_u H_v - K_v H_u) \quad (4.8)$$

bulunur. (4.8) denkleminin sifira eşit olması için Q, J ve F değerlerinin sabit olması gerektiği Teorem 2.2.61 da gösterilmiştir.

(i) \Leftrightarrow (iii) olduğu (4.8) denkleminde açıktır.

Teorem 4.1.3 Açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyi regle Weingarten yüzeydir.

İspat: $\varphi(u, v)$ açılabilir bir regle yüzey olsun $K = 0$ olacağından, K nın u ve v ye göre türevleri de sıfır olacaktır. (2.16) denkleminde $\varphi(u, v)$ Weingarten yüzey olur. $\varphi(u, v)$ yüzeyinin paralel yüzeyi Teorem 3.2.4 ifadesine göre açılabilir bir regle yüzey olduğundan, $K^r = 0$ dır. K^r Gauss eğriliğinin u ve v ye göre türevleri de sıfır olacağından $\varphi^r(u, v)$ paralel yüzeyi de açılabilir bir regle Weingarten yüzeydir.

Örnek 4.2 1: $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ parametrik denklemi ile verilen bir helisoid yüzeyi

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (0, 0, au) + v(\cos u, \sin u, 0) \\ &= \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)\end{aligned}\tag{4.9}$$

olacak şekilde bir regle yüzey belirtir. Bu regle yüzeyin ve paralel yüzeyinin Weingarten yüzey olduğunu görelim.

Yüzeyin temel formlarını bulmak için $\varphi(u, v)$ yüzeyinin u ve v ye göre kısmi türevlerini alalım.

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}_u &= (0, 0, a) + v(-\sin u, \cos u, 0) \\ \vec{\varphi}_v &= (\cos u, \sin u, 0) \\ \vec{\varphi}_{uu} &= v(-\cos u, -\sin u, 0) \\ \vec{\varphi}_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ \vec{\varphi}_{vv} &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Yüzeyin birim normali

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{N}} &= \frac{\vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}} (-a \sin u, a \cos u, v)\end{aligned}\quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Buradan birinci temel formun katsayıları,

$$\begin{aligned}E &= \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_u \rangle = a^2 + v^2 \\ F &= \langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \vec{\varphi}_v, \vec{\varphi}_v \rangle = 1\end{aligned}\quad (4.11)$$

olur. İkinci temel formun katsayıları,

$$\begin{aligned}L &= \langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\mathbf{N}} \rangle = 0 \\ M &= \langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\mathbf{N}} \rangle = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}} \\ N &= \langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\mathbf{N}} \rangle = 0\end{aligned}\quad (4.12)$$

bulunur. Birinci ve ikinci temel formların katsayılarından faydalanarak yüzeyin Gauss eğriliği,

$$\begin{aligned}K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= -\frac{a^2}{(a^2 + v^2)^2}\end{aligned}\quad (4.13)$$

ve ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned}H &= \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.14)$$

elde edilir. K ve H eğriliklerinin kısmi türevlerini hesaplar, (2.16) denkleminde yerlerine yazarsak

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

bulunur. O halde Helisoid yüzeyi regle Weingarten yüzeydir.

Bu yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzey olduğunu gösterelim (2.14) denkleminde

$$K^r = \frac{K}{(1 + rH + r^2K)}$$

$$H^r = \frac{H + 2rK}{(1 + rH + r^2K)}$$

idi. K ve H eğriliklerinin (4.13) ve (4.14) eşitliklerindeki değerleri yerlerine yazılırsa, paralel yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K^r = \frac{-\frac{a^2}{(a^2 + v^2)^2}}{1 - \frac{r^2 a^2}{(a^2 + v^2)^2}} = -\frac{a^2}{(a^2 + v^2)^2 - r^2 a^2}$$

ve ortalama eğriliği

$$H^r = \frac{-\frac{2ra^2}{(a^2 + v^2)^2}}{1 - \frac{r^2 a^2}{(a^2 + v^2)^2}} = -\frac{2ra^2}{(a^2 + v^2)^2 - r^2 a^2}$$

olur. K^r ve H^r ifadelerinin u ya göre kısmi türevleri 0 olacağından,

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0$$

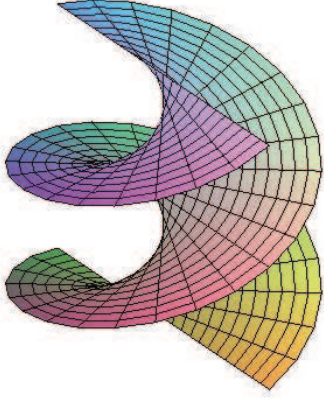
olur. Bu durumda Helisoid regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyi de Weingarten yüzeydir.

$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ parametrik denklemi ile verilen regle Weingarten helisoid yüzeyinin grafiği Şekil 4.1.a ile verilmiştir.

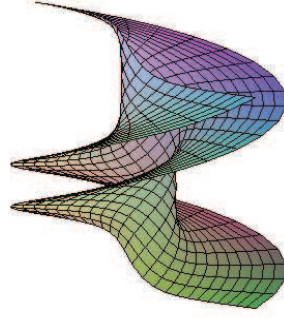
$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ parametrik denklemi ile verilen regle Weingarten helisoid yüzeyinden $\varphi^r(u, v) = \varphi(u, v) + r\vec{N}(u, v)$ olarak elde edilen paralel Weingarten yüzeyinin parametrik denklemi, (4.10) kullanılırsa

$$\varphi^r(u, v) = \left(v \cos u - \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}} a \sin u, v \sin u + \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}} a \cos u, au + v \right)$$

bulunur. Bu yüzeyin $r = a = 1$ durumdaki grafiği de Şekil 4.1.b de verilmiştir.

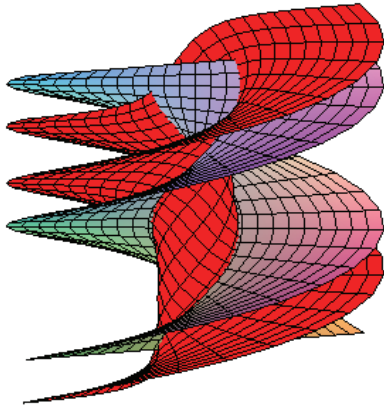


Şekil 4.1.a

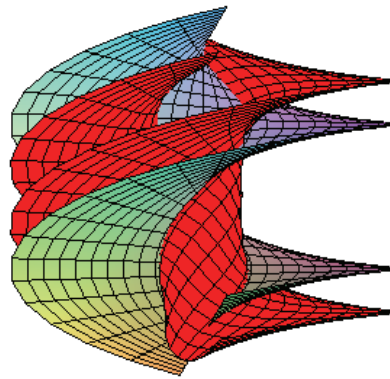


Şekil 4.1.b

Belirli parametreler için paralel yüzeyin grafiği kırmızı ile gösterilmek üzere, esas yüzeyle birlikte maple programı yardımıyla grafikleri Şekil 4.2.a ve Şekil 4.2.b deki gibidir.



Şekil 4.2.a



Şekil 4.2.b

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma sırasında, Öklid uzayındaki temel kavramlar ve teoremler verildi. Esas yüzey üzerindeki bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki resminin geodezik, normal eğrilikleri, geodezik torsiyonu ve eğrinin eğriliği ayrıca Frenet ve Darboux çatıları hesaplandı. Paralel yüzey için Meusnier teoremi ifade edildi. Bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin temel formları bulundu. Regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzey olduğu ispat edildi. Bu doktora tezindeki tanımlar yardımıyla paralel yüzeydeki bir eğrinin burulması elde edilebilir ve açılabilir paralel regle yüzeyler üzerine çalışılabilir. Ayrıca bu tezdeki 3-boyutlu Öklid uzayında bulunan sonuçlar n-boyutlu Öklid uzayına genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Beltrami E., 1865 Risoluzione di un Problema relativo alla teoria Delle Superficie Gobbe, Ann. Mat. Pura App 1.7 139-150
- Boothby, W.M., 1986, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Second Edition, Academic Press Inc., Florida.
- Carmo, M. P. do, 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Craig T., 1883, Note on Parallel Surfaces, Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 94, 162–170.
- Dillen, F. and Sodsırı, W., 2005, Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-space, Katholieke Üniversiteit Leuven, 83, 10-21.
- Dillen, F. and Kuhnel W., 1999, Ruled Weingarten Surfaces in Minkowski 3-space, Manuscripta Math., 98, 307–320.
- Dini U., 1865 Sulle Superficie Gobbe nelle quali Uno Dei Due Raggidi Curvatura Principale e una funzione dell'altro, Ann. Mat. Pura App 1.7 205-210
- Eisenhart, L.P., 1909, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Boston: New York [etc.] Ginn and Company.

Gray A. 1993, Modern Differential Geometry of Curves And Surfaces, CRC Press, Inc.

Hacısalihoglu H.H. ve Ekmekçi N., 2003, Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hacısalihoglu H.H., 1994, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hacısalihoglu, H.H., 1998, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları, No. 2.

Izumuya, S., Sji, K. and Takecumı, N.,2005, Circular Surfaces, Advances in Geometry, 7, 295-313.

Kuhnel, W., 1994, Ruled W-surfaces, Arch. Math. (Basel), 62, 475-480.

Kuhnel, W., and Steller M, 2005, On Closed Weingarten Surfaces, Monatsh. Math., 146, 113-126.

Louis, B., 1948, Vector and Tensor Analysis, John Wiley & Sons Inc.

Nizamoglu Ş., 1986, Surfaces Réglées Parallèles, Ege Üniv. Fen Fak. Derg., 9(Ser. A), 37-48.

O'Neill, B., 1966, Elementary Differential Goemetry, Acedemic Press, Inc.

Oprea, J.,1997, Differential Goemetry And Its Applications, Prentice-Hall, Inc.

Park, K. R. and Kim, G. I., 1998, Offsets of Ruled Surfaces, J. Korean Computer Graphics Society, 4, 69-75.

Ru, M.,1999, Lecture on Differential Geometry Part I., Huston Üniversiti.

Sabuncuoğlu, A., 2001, Diferensiyel Gemetri, Nobel Yayın Dağıtım.

Sipus, Z.M.,2008, Ruled Weingarten surfaces in Galilean space, Periodica Mathematica Hungarica, 56(2):213–225.

Sodsiri, W., 2003, Ruled Linear Weingarten Surfaces in Minkowski 3-Space, Soochow Journal of Mathematics, 29(4), 435-443.

Uras, F., 1992, Diferensiyel Geometri Dersleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayın Komisyonu.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Ereğli/Konya'da doğdu. 1989 yılında orta öğrenimini tamamladı, 1992 yılında Ereğli Lisesi'nden mezun oldu. 1995 yılında Hacettepe Üniversitesi Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksek Okulu Radyoloji Bölümü'nden mezun oldu. 2004 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden lisans mezunu olarak aynı yıl Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2006 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora öğrenimine başladı. Halen radyoloji teknisyeni olarak görev yapmaktadır.

Ümit Ziya Savcı