Lie-Rinehart Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Ali Aytekin

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Nisan 2010

Crossed Modules of Lie-Rinehart Algebras

Ali Aytekin

DOCTORAL DISSERTATION
Department of Mathematics
April 2010

Lie-Rinehart Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Ali Aytekin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK
Yrd. Doç. Dr. Enver USLU

Nisan 2010

ONAY

Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Ali Aytekin' in DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "**Lie-Rinehart Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

İkinci Danışman : Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Doç. Dr. Abdullah ALĞIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

Lie-Rinehart Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Ali AYTEKİN

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin yapısında kullanılan temel kavramlar verilmiştir. Özellikle kategoriksel kavramlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. İkinci bölümde, Lie-Rinehart cebirleri, Lie-Rinehart çaprazlanmış modülleri ve bu kavramlar ile ilgili temel örnek ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisinin özellikleri incelenerek bu kategoride geriçekme, sonlu çarpımlar, sonlu limitler, koçarpımlar, kolimitler ve ileri itmelerin varlığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisi ile Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi arasındaki doğal denklik ispatlanmıştır. Beşinci bölümde cat^1 Lie-Rinehart cebirler tanımlanarak Lie-Rinehart çaprazlanmış modüllerle olan ilişkisi incelenmiştir. Altıncı bölümde ise Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller tanımlanarak simplisel Lie-Rinehart cebirlerle ilişkisi araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lie-Rinehart cebirler, Lie-Rinehart cebirlerinin çaprazlanmış modülleri, Cat^1 Lie cebir, Simplisel Lie cebir, geri çekme, ileri itme.

Crossed Modules of Lie-Rinehart Algebras

Ali AYTEKİN

SUMMARY

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, it was given basic concepts using structure of thesis. Specially, categorical notions were given examined to closely. In the second chapter, we given the notion of Lie-Rinehart algebras and crossed modules over them with examples and properties. In the third chapter, we investigated the categorical structure of the category of Lie-Rinehart crossed modules over the same base. Also in this category, we shown that there exists pullback, finite products, finite limits, coproducts, colimits and pushout. In the fourth chapter, we defined simplicial Lie-Rinehart algebras and the connection between Lie-Rinehart crossed modules and the simplicial Lie-Rinehart algebras. In the fifth chapter, we defined cat^1 Lie-Rinehart algebras and give the relation between cat^1 and Lie-Rinehart crossed modules. In the sixth chapter, we defined the Lie-Rinehart 2-crossed modules and give the relation between Lie-Rinehart crossed modules and the simplicial Lie-Rinehart algebras.

Keywords: Lie-Rinehart algebras, Crossed modules of Lie-Rinehart algebras, Cat^1 Lie algebras, Simplicial Lie algebras, Pullback, Pushout.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Hocalarım, Sayın;

Prof. Dr. Mahmut KOÇAK ve **Yrd. Doç. Dr. Enver USLU** ya

desteği için hocam Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ'ye, ayrıca, her zaman yanımda olan ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen eşime, oğluma ve aileme, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR vii

BÖLÜM 0. ÖNSÖZ 1

0.1 Giriş 1

BÖLÜM 1. Temel Kavramlar 4

1.1 Giriş 4

1.2 Kategorilerde Evrensel Objeler 8

BÖLÜM 2. Lie-Rinehart Cebirler ve Çaprazlanmış Modülleri 22

2.1 Giriş 22

2.2 Lie-Rinehart Cebirlere Giriş 22

2.2.1 Lie-Rinehart A-cebirleri 22

2.2.2 Yarı-direkt Çarpım ve Etki 36

2.3 Lie-Rinehart Çaprazlanmış Modüller 39

2.3.1 Lie-Rinehart Çaprazlanmış Modüller Kategorisi 49

2.4 Serbest Çaprazlanmış Modüller 51

BÖLÜM 3. $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ nin Kategoriksel Yapısı 52

3.1 Giriş 52

3.2 Lie-Rinehart Çaprazlanmış Modüller Kategorisinin Özellikleri 52

BÖLÜM 4. Simplisel Lie-Rinehart Cebirler **69**

4.1 Giriş 69

4.2 Simplisel Lie-Rinehart Cebirler ve Kategorisi 69

4.3 Bir Simplisel Lie-Rinehart Cebirin Moore Kompleksi 70

BÖLÜM 5. Cat^1 Lie-Rinehart Cebirler **76**

5.1 Giriş 76

BÖLÜM 6. Lie-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller **80**

6.1 Giriş 80

6.2 Lie-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller 80

6.3 Lie-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller Kategorisi 81

BÖLÜM 7. SONUÇ ve ÖNERİLER **87**

KAYNAKLAR DİZİNİ **88**

ÖZGEÇMİŞ **92**

BÖLÜM 0

ÖNSÖZ

0.1 Giriş

Çaprazlanmış modül kavramı, J.H.C.Whitehead (1949) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. O zamandan itibaren çaprazlanmış modül kavramı diğer alanlarda da önemli bir yer tutmuştur. Bu konuda yapılan çalışmalardan bazıları (Brown, 1982,1984), (Brown ve Higgins, 1981) , ve (Brown ve Huebschmann, 1981) dir. Günümüzde çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak düşünülebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinatoriyel grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli rolü vardır.

Asosyatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, farklı bir adla (S. Lichtenbaum, M. Schlessinger, 1967) ve M. Gerstenhaber (1966) çalışmalarında karşımıza çıkar. T. Porter (1986) çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Bununla birlikte, (Z. Arvasi ve T. Porter, 1996) çalışmalarında değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerle ilgili birçok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Lue (1979) da, verilen bir çaprazlanmış modülün otomorfizm grubunun çaprazlanmış modüllerin derivasyon grubuna etki ettiğini göstermiştir. Norrie de (1987) de bu çaprazlanmış modülün yukarıda belirtilen anlamda otomorfizm grubuna benzerliğini ispatlamış ve buna aktör çaprazlanmış modül adını vermiştir. Aktör kavramı, bir çaprazlanmış modülün diğeri üzerine etkisini tanımlamayla doğrudan ilgilidir. Çaprazlanmış modüllerin yarı-direkt çarpımları, çaprazlanmış kare, vs. ile ilgili çalışmalarda önemli yer tutar. Çaprazlanmış modüller, 2-boyutlu cebirler olarak düşünülebileceğinden, bu görüşe dayanılarak çaprazlanmış modüllerin yarı-direkt çarpımlarının "2-boyutlu" çaprazlanmış modülleri olan çaprazlanmış kare ile benzerliği söz konusudur. Çaprazlanmış kare (D.Guin-Walery ve J.L.Loday, 1981) tarafından cebirsel K-teorideki problemlere uygulanmak üzere tanımlanmıştır. Değişmeli cebir için benzer tanım Ellis tarafından (1988) de verilmiştir. Homoloji teoride çaprazlanmış karenin bazı uygulamaları Lue (1979), (Brown ve Loday, 1987) çalışmalarında bulunabilir.

Gruplar için 2-çaprazlanmış modüller kavramı Conduché (1984) da tanımlanmıştır. Daha sonra bu kavramın farklı bir uygulaması olarak (Grandjeán ve Vale, 1986) tarafından değişmeli cebirler için 2-çaprazlanmış modüllerin homolojisi incelenmiştir. Ayrıca Arvasi (1997) çalışmasında yüksek mertebeden hiper çaprazlanmış kompleks çiftlerini kullanarak 2-çaprazlanmış modüller ve simplisel cebirler arasındaki doğal denkliği tanımlamıştır. Bu çalışmaların yanısıra (Arvasi ve Porter, 1998), (Mutlu ve Porter, 1998,2000) ve (Arvasi ve Ulualan, 2007) konuyla ilgili yapılan çalışmalardan bazılarıdır.

Lie cebirleri için çaprazlanmış modüller ilk olarak (Kassel ve Loday, 1982) da tanımlanmıştır. Bu tanımlamanın üzerine araştırmacılar Casas (1991), (Casas ve Ladra, 1998,2000), Ellis (1993) ve (Akça ve Arvasi, 2002) gibi pekçok çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmaların yanısıra simplisel gruplar ilk olarak Kan (1958) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Ellis (1993) simplisel Lie cebirlerini tanımlayarak Moore kompleksi 1 olan simplisel Lie cebirlerinin kategorisi ile Lie çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliğini ispatlamıştır. Ellis aynı makalesinde Moore kompleksi 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisiyle Lie 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliğini de göstermiştir. Ayrıca yapının homotopiksel ve homolojiksel özellikleri incelenmiştir.

Bu bağlamda (Casas, Ladra ve Pirashvili, 2004) çalışmasında Lie-Rinehart cebirler için çaprazlanmış modüller kavramını tanımlamışlardır. Aynı zamanda bu çalışmada Lie-Rinehart cebirlerin kohomolojisi ile çaprazlanmış modüller arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca Lie-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri hakkında yapılan çalışmaların bazıları (Casas, Ladra ve Pirashvili, 2005), (Casas, baskıda) ve (Moerdijk ve Mrćun, arXiv:0801.3929v2) dır.

Bilindiği gibi çaprazlanmış modül kavramı kategori teoride önemli bir yer tutar. Tabiki bu kavram değişik cebirsel yapılar (grup, değişmeli cebir, Lie cebir, vs...) üzerinde tanımlanmaktadır. Yapılan bu çalışmada daha önce literatüre kazandırılmış Lie-Rinehart cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller yapısının özellikleri incelenmiştir. Bu incelemeler esnasında

i) Simplisel Lie-Rinehart cebirler tanımlanabilir mi?

ii) Cat^1 Lie-Rinehart cebirler tanımlanabilir mi?

iii) Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller tanımlanabilir mi?

sorularıyla karşılaşılmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda bu sorulara olumlu yanıt alınmış ve gerekli tanımlamalar yapılmıştır. Bu tanımlamalardan sonra

i) İlgili kategorilerle doğal denkliği varmıdır?

ii) Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisinin kategoriksel özellikleri nelerdir?

soruları gündeme gelmiştir. Daha sonra bu soruların üzerinde çalışmalar yapılarak yine olumlu sonuçlar alınmıştır. Bu doğrultuda tez bölümlere ayrılarak hazırlanmıştır. Bu tezde simplisel Lie-Rinehart cebirler, Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller, cat^1 Lie-Rinehart cebirler tanımlanarak ilgili kategorilerin doğal denkliği verilecektir. Ayrıca Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisinin kategoriksel özellikleri incelenerek, bu kategoride ilk obje, son obje, geri çekme, sonlu çarpımlar, sonlu limitler ve bunların duallerinin varlığı gösterilecektir.

BÖLÜM 1

Temel Kavramlar

1.1 Giriş

Bu bölümde tezde verilen kavramların daha iyi anlaşılması için bilinen cebirsel yapılar verilecektir. Daha sonra çaprazlanmış modül kategorisinin özelliklerini incelemek için gerekli olan kavramların tanımları hatırlanacaktır. Detaylı bilgi için Ege (1998) ve Casas (1991) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 1.1 R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere A, R-modülü

$$\cdot \quad : \quad A \times A \quad \longrightarrow \quad A$$

bilineer dönüşümüyle birlikte A**-cebiri** olarak adlandırılır.

Buradaki bilineer dönüşüm çarpım olarak adlandırılır ve $x, y \in A$ için $\cdot(x, y)$ yerine xy notasyonu kullanılır.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & & (x, y) & \longmapsto & \cdot(x, y) = x \cdot y \end{array}$$

bilineer dönüşümü

M$_1$). $(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y, \quad x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$

M$_2$). $r(xy) = (rx)y = x(ry)\ ,\ r \in R$

şartlarını sağlar.

Bir A-cebiri, A-modül olduğundan $B \subset A$ alt modülü her $x, y \in B$ için $xy \in B$ oluyorsa B, **alt cebir** olarak adlandırılır. Aynı zamanda $x \in A$ ve $y \in B$ için $xy \in B$ ve $yx \in B$ ise B ye A nın **ideali** denir. Açıktır ki her ideal bir alt cebirdir.

A ve B iki R-cebir olmak üzere

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

dönüşümü her $x, y \in A$ için

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

oluyorsa φ ye **cebir homomorfizmi** denir. Eğer φ, birebir ve örtense izomorfizm olarak adlandırılır.

Tanım 1.2 R bir cisim ve A bir R-cebir olsun. Bu durumda

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

şartını sağlayan

$$D : A \longrightarrow A$$

şeklinde tanımlı R-lineer fonksiyonlarına A nın bir R-derivasyonu denir. A nın tüm R-derivasyonları kümesi $\mathrm{Der}(A)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1 Her B halkası toplamsal Abelyan gruptur. Buradan

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times B & \longrightarrow & B \\ (n,b) & \longmapsto & n \cdot b = \underbrace{b + \ldots + b}_{n \text{ tane}} \end{array}$$

işlemiyle B bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla her halka bir $\mathbb{Z}$-cebirdir.

Örnek 1.2 Her B halkası aynı zamanda B-modül olduğundan bir B-cebirdir.

Örnek 1.3 $\boldsymbol{k}$ bir halka, S bir cisim ve $\mathrm{Der}(S)$, S nin k-derivasyonları kümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccccc} + & : & \mathrm{Der}(S) \times \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ & & (D_1, D_2) & \longmapsto & (D_1 + D_2)(s) = D_1(s) + D_2(s) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & : & \mathbf{k} \times \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ & & (k, D) & \longmapsto & (k \cdot D)(s) = D(ks) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte

M$_1$). $(\mathrm{Der}(S), +)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$). Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} (k \cdot (D_1 + D_2))(s) &= (D_1 + D_2)(ks) \\ &= D_1(ks) + D_2(ks) \\ &= k \cdot D_1(s) + k \cdot D_2(s) \\ &= (k \cdot D_1 + k \cdot D_2)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$k \cdot (D_1 + D_2) = k \cdot D_1 + k \cdot D_2$$

dır.

M_3). Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}((k_1+k_2)\cdot D)(s) &= D((k_1+k_2)s)\\ &= D(k_1s+k_2s)\\ &= D(k_1s)+D(k_2s) \quad (\because \mathrm{Der}(S)\ \mathbf{k}\text{-lineer})\\ &= (k_1\cdot D)(s)+(k_2\cdot D)(s)\\ &= (k_1\cdot D+k_2\cdot D)(s)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1+k_2)\cdot D = k_1\cdot D + k_2\cdot D$$

dır.

M_4). Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}((k_1k_2)\cdot D)(s) &= D((k_1k_2)s)\\ &= D(k_1(k_2s))\\ &= k_1\cdot D(k_2s)\\ &= k_1\cdot (k_2\cdot D)(s)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1k_2)\cdot D = k_1\cdot (k_2\cdot D)$$

dır. Bu durumda Der(S) bir **k**-modüldür.

Tanım 1.3 A bir R-cebir olmak üzere her $x, y, z \in A$ için

$$(xy)z = x(yz) \quad \text{(Asosyatiflik kuralı)}$$

oluyor ise A ya **asosyatif cebir** denir.

A, R-modülü $(A,+)$ Abelyan grup yapısını ve $\cdot$ bilineer dönüşümünün (M_1) şartından dağılma aksiyomu sağlandığından asosyatif cebir şu şekilde de tanımlanabilir.

A bir R-modül ve bir halka olsun. Her $r \in R$ ve $x, y \in A$ için

$$r(xy) = (rx)y = x(ry)$$

şartı sağlanıyorsa A ya **asosyatif R-cebir** denir.

Örnek 1.4 A bir R-modül olsun. End(A), A dan A ya tüm modül homomorfizmlerinin kümesi olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} R\times \mathrm{End}(A) & \longrightarrow & \mathrm{End}(A) \\ (r,f) & \longmapsto & r\cdot f \;:\; \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & (r\cdot f)(a) = f(ra) \end{array} \end{array}$$

işlemiyle birlikte End(A) bir asosyatif R-cebirdir.

Bir cebirin asosyatif olmaması fikri, ilginç yapısal sonuçların elde edilmesine olanak sağlar. Çarpım üzerine bazı şartların eklenmesiyle bu sonuçlara ulaşılabilir. Bu şartların en önemlileri asosyatiflik kuralı ve Lie şartlarıdır.

Tanım 1.4 L asosyatif olmayan bir cebir olmak üzere L nin çarpımı (bilineer dönüşüm) her $x,y,z\in L$ için

L$_1$). $xx=0$

L$_2$). $x(yz)+y(zx)+z(xy)=0$ (Jakobi özdeşliği)

şartlarını sağlıyorsa L ye bir **Lie cebiri** denir.

L bir Lie cebiri olsun. Her $x,y\in L$ için $x+y\in L$ olduğundan (L_1) şartı gereğince

$$0=(x+y)(x+y)=xx+xy+yx+yy=xy+yx$$

olacağından

$$xy=-yx$$

elde edilir. Burada $\cdot(xy)=xy$ çarpımı yerine Lie cebirlerinde $[x,y]$ Lie braket (parantez) notasyonu kullanılır.

Asosyatif cebirler ve Lie cebirleri arasında yakın bir ilişki vardır. Örneğin, A herhangi bir asosyatif cebir olmak üzere $[x,y]=xy-yx$ komütatör çarpımı olarak tanımlansın. Bu durumda

L_1). $[x,x]=xx-xx=0$

$$L_2).\quad \begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= [x,yz-zy]+[y,zx-xz]+[z,xy-yx]\\ &= x\left(yz-zy\right)-\left(yz-zy\right)x+\left(xy-yx\right)z\\ &\quad -(zx-xz)y+z\left(xy-yx\right)-\left(xy-yx\right)z\\ &= 0\end{aligned}$$

şartları sağlandığından bir Lie cebiri elde edilir. Diğer taraftan, L bir Lie R-cebir olsun. $x,y\in L$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} ad_Lx & : & L & \longrightarrow & L\\ & & y & \longmapsto & ad_Lx(y)=[x,y]\end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm x tarafından belirlenen adjoint fonksiyon olarak adlandırılır. Açıkca $ad_Lx\in \mathrm{End}(L)$ dır. adx tarafından üretilen

$$\langle ad_Lx\rangle=\{adx:x\in L\}$$

kümesi End(L) kümesinin bir alt cebiridir. End(L) bir asosyatif cebir olduğundan $\langle ad_L x\rangle$ asosyatif cebiri elde edilir. O halde herhangi bir asosyatif cebirden Lie cebiri ve herhangi bir Lie cebirinden asosyatif cebir elde edilebilir.

1.2 Kategorilerde Evrensel Objeler

Buradaki tanımların detaylı incelemesi için Mac Lane (1971) çalışmasına bakılabilir.

Tanım 1.5 $\mathfrak{C}$ kategorisindeki her X objesi için

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(I,X) \text{ yani } |\mathfrak{C}(I,X)| = 1$$

kümesinin bir tek elemanı var ise I ya $\mathfrak{C}$ nin **ilk** (initial) **objesi** denir.

Örnek 1.5 **Küme**, **Grp**, **Top** kategorilerindeki ilk objeleri sırasıyla

$$\text{boş küme}, \{e\}, \text{boş uzay}$$

dır.

Tanım 1.6 Bir $\mathfrak{C}$ kategorisinde her X objesi

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X,S)$$

kümesi tek morfizmden oluşmakta ise $\mathfrak{C}$ nin S objesine **son** (terminal) **obje** denir. Yani $X \to S$ bir tek morfizm var olmasıdır.

Örnek 1.6 **Küme**, **Grp**, **Top**, kategorilerindeki son objeler, sırasıyla

$$\{x\}(\text{veya } \{\emptyset\}), \{1\}, X = \{x\} \text{ topolojik uzay}$$

dir.

Tanım 1.7 $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ iki kategori olsun.

$$F : \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathfrak{D})$$

fonksiyonu;

(i). (Birimlerin koruması) $\mathfrak{C}$ nin her A objesi için

$$F(1_A) = 1_{F(A)};$$

(ii). (Kompozisyonların korunması) $f\circ g$, $\mathfrak{C}$ nin bir kompozisyonu ise

$$F(f\circ g)=F(f)\circ F(g);$$

özelliklerini sağlıyor ise F ye $\mathfrak{C}$ den $\mathfrak{D}$ ye bir **funktor** denir ve $(\mathfrak{C},F,\mathfrak{D})$ ile gösterilir.

Tanım 1.8 $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ iki kategori ve B, $\mathfrak{D}$ nin sabit bir objesi olsun. $\mathcal{C}$ nin herhangi bir A objesi için $F(A)=B$ ve

$$f:A_1\to A_2$$

morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
F(f)\ : \arrow[d, equal] & F(A_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F(A_2) \arrow[d, equal] \\
1_B\ : & B \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

şeklinde birim morfimdir. Yani $\mathfrak{D}$ nin bütün morfizmleri birim morfimdir. Diğer bir deyişle

$$F:\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(\mathfrak{D}) \\ f & \longmapsto & 1_* \end{array}$$

sabit fonksiyon ise bu durumda

$$F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$$

funtoruna **sabit funktor** denir.

Tanım 1.9 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ ve $G:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ iki funktor olsun.

$$\eta:\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})\longrightarrow\mathrm{Mor}(\mathfrak{D})$$

fonksiyonu;

(i). $\mathfrak{C}$ nin her A objesi için

$$\eta_A:F(A)\longrightarrow G(A)$$

morfizmi $\mathfrak{D}$ nin morfizmi;

(ii). $\mathfrak{C}$ nin her $f:A_1\to A_2$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "f"'] & F(A_1) \arrow[r, "\eta_{A_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
A_2 & F(A_2) \arrow[r, "\eta_{A_2}"'] & G(A_2)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli;

şartları sağlanıyorsa (F,η,G) üçlüsüne veya $\eta:F\to G$ ye **doğal transformasyon** denir.

Bu son şarta "doğallık şartı" denir. Yani $\eta_A; \mathfrak{C}$ kategorisinin morfizmleri üzerinde F ve G nin etkisiyle $F(A)$ dan $G(A)$ ya giden bir yoldur.

Tanım 1.10 $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ iki kategori ve

$$G : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

bir funktor olsun. Bu durumda

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$$

funktoru ve

$$\eta : 1_A \Longrightarrow GF \text{ ve } \varepsilon : FG \longrightarrow 1_B$$

doğal izomorfizmleri varsa

$$G : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

funktoruna **kategorilerin denkliği**, $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ ye de **denk kategoriler** denir.

Tanım 1.11 $\mathfrak{C}$ bir kategori, A ve B, $\mathfrak{C}$ nin objeleri olsun.

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \qquad , f \neq g$$

$\mathfrak{C}$ de morfizmleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise (E, j) ikilisine yada kısaca j ye (f, g) nin **eşitleyicisi (equalizer),** E ye ise **eşitleyici obje** denir.

EQ1). $E \in Ob(\mathfrak{C})$ ve

$$E \xrightarrow{j} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

diyagramı için $fj = gj$ dir.

EQ2). $C \in Ob(\mathfrak{C})$ test objesi için

$$h : C \longrightarrow A \quad \text{ve} \quad fh = gh$$

verildiğinde

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $jk = h$ olacak şekilde biricik

$$k : C \longrightarrow E$$

morfizmi vardır.

Örnek 1.7 $\mathfrak{C} = Küme$, A ve B iki küme olsun.

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \qquad , f \neq g$$

fonksiyonları verilsin.

EQ1). $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\} \subseteq A$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{array}{cccccc} j & : & E & \hookrightarrow & A \\ & & a & \longmapsto & j(a) = a \end{array}$$

fonksiyonu için $fj = gj$ dir.

EQ2). $C \in Ob(\mathfrak{C})$ test objesi olmak üzere

$$h : C \longrightarrow A \quad \text{ve} \quad fh = gh$$

verildiğinde

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$\begin{array}{cccccc} k & : & C & \longrightarrow & E \\ & & c & \longmapsto & k(c) = h(c) \end{array}$$

fonksiyonu vardır.

Genel olarak $\mathfrak{C} = Küme$, $\mathfrak{C} = Grp$, $\mathfrak{C} = Top$, $\mathfrak{C} = AbGrp$, $\mathfrak{C} =_R Mod$ kategorileri için eşitleyici obje

$$\{a \in A : f(a) = g(a)\} \xhookrightarrow{j} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

dir.

Tanım 1.12 $\mathfrak{C}$ bir kategori, A ve B, $\mathfrak{C}$ nin objeleri olsun.

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

$\mathfrak{C}$ de morfizmleri verilsin. Bu durumda

KEQ1). $C \in Ob(\mathfrak{C})$ ve

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{h} C$$

diyagramı için $hf = hg$ dir,

KEQ2). $D \in Ob(\mathfrak{C})$ test objesi için

$$k : B \longrightarrow D \quad \text{ve} \quad kf = kg$$

verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & C \arrow[d, dashed, "t"] \\
& & D
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $th = k$ olacak şekilde biricik

$$t : C \longrightarrow D$$

morfizmi vardır,

özellikleri sağlanıyorsa (C, h) ikilisine yada kısaca h ye (f, g) nin **koeşitleyicisi** (coequalizer) denir.

Tanım 1.13 $\mathfrak{C}$ bir kategori, A ve B, $\mathfrak{C}$ nin objeleri ve

$$\pi_1 : C \to A \;\; \text{ve} \;\; \pi_2 : C \to B$$

$\mathfrak{C}$ nin morfizmleri olsun. Bu durumda D bir obje ve

$$q_1 : D \to A \;\; \text{ve} \;\; q_2 : D \to B$$

morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
A & C \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$q : D \longrightarrow C$$

morfizmi varsa C ye A ve B nin **çarpım objesi** denir.

Örnek 1.8 $\mathfrak{C} = Küme$, A ve B iki küme olsun. Bu durumda A ve B nin çarpım objesi $A \times B$ kartezyen çarpım kümesidir. Çünkü D bir küme ve

$$q_1 : D \to A \ \text{ ve } \ q_2 : D \to B$$

morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$\begin{array}{rcccl} q & : & D & \longrightarrow & A \times B \\ & & x & \longmapsto & (q_1(x), q_2(x)) \end{array}$$

morfizmi vardır.

Örnek 1.9 $\mathfrak{C} = Grp$, G ve H iki grup olsun .Bu iki grubun çarpım objesi

$$C = G \times H = \{(x, y) : x \in G,\ y \in H\},$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

işlemiyle birlikte bir gruptur. Çünkü D bir grup ve

$$q_1 : D \to G \ \text{ ve } \ q_2 : D \to H$$

grup homomorfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\ G & G \times H \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & H \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$\begin{array}{rcccl} q & : & D & \longrightarrow & G \times H \\ & & x & \longmapsto & (q_1(x), q_2(x)) \end{array}$$

grup homomorfizmi vardır. O halde G ve H nın çarpım objesi $G \times H$ dır.

Örnek 1.10 $\mathfrak{C} = Top$, X ve Y iki topolojik uzay olsun. Bu durumda X ve Y nin çarpım objesi $X \times Y$ çarpım uzayıdır.

Tanım 1.14 $\mathfrak{C}$ bir kategori, A ve B $\mathfrak{C}$ nin objeleri ve

$$i_1 : A \longrightarrow A+B \text{ ve } i_2 : B \longrightarrow A+B$$

$\mathfrak{C}$ nin morfizmleri olsun. Bu durumda C bir obje ve

$$f : A \longrightarrow C \quad \text{ve} \quad g : B \longrightarrow C$$

morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & A+B \arrow[u, dashed, "<f,g>"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani

$$< f, g > i_1 = f \quad \text{ve} \quad < f, g > i_2 = g$$

olacak şekilde biricik

$$< f, g >: A+B \longrightarrow C$$

morfizmi varsa $A+B$ objesine A ve B nin **toplam (coproduct) objesi** denir.

Örnek 1.11 $\mathfrak{C} = Küme$, X ve Y iki küme olsun. Bu durumda X ve Y nin ayrık birleşim kümesi $X \sqcup Y$ (disjoint union), X ve Y nin toplam kümesidir. Çünkü Z bir küme ve

$$f : X \longrightarrow Z \quad \text{ve} \quad g : Y \longrightarrow Z$$

fonksiyonları verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & X \sqcup Y \arrow[u, dashed, "<f,g>"'] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$< f, g >: X \sqcup Y \longrightarrow Z$$

fonksiyonu vardır. Burada i_1 ve i_2 içine fonksiyon ve

her $x \in X$ için $< f, g > (x) = f(x)$

her $y \in Y$ için $< f, g > (y) = g(y)$

dir.

Tanım 1.15 $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ herhangi iki kategori, $p = (p_i)_{i \in Ob(\mathfrak{D}) = I}$ olsun ve

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$$

funktoru verilsin. $C \in Ob(\mathfrak{C})$ için

$$p : \mathfrak{D} \underset{F}{\overset{\Delta_C}{\Longrightarrow}} \mathfrak{C}$$

doğal transformasyonu varsa $(C, (p_i)_{i \in I})$ ikilisine F üzerinde bir **kone** denir. Daha açık olarak; Δ_C sabit funktor olmak üzere

$$p : \mathfrak{D} \underset{F}{\overset{\Delta_C}{\Longrightarrow}} \mathfrak{C} \qquad (\text{veya } p : \Delta_C \Longrightarrow F)$$

doğal transformasyon ise

(a). Her $i \in Ob(\mathfrak{D}) = I$ için

$$\begin{array}{cccccc} p_i & : & \Delta_C(i) & \longrightarrow & F(i) \\ & & C & \longmapsto & F(i) \end{array}$$

$\mathfrak{C}$ de morfizmi

(b).

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "d"'] & C = \Delta_C(i) \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "1_C"'] & F(i) \arrow[d, "F(d)"] \\ j & C = \Delta_C(i) \arrow[r, "p_j"'] & F(j) \end{tikzcd}$$

yani

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $F(d)p_i = p_j$ olmalıdır. Diğer bir deyişle F üzerinde koneler sabit funktordan F ye giden doğal transformasyon olmaktadır.

Tanım 1.16 $q : \Delta_B \Longrightarrow F$ ve $p : \Delta_C \Longrightarrow F$, F üzerinde iki kone olsun. Bu durumda

$$f : q \longrightarrow p$$

morfizmine **koneler arasındaki morfizm** denir. Açık olarak;

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_j"] & & & & C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j) & \longrightarrow & F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

diyagramı

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "q_i"'] \arrow[ddr, bend left, "q_j"] & \\
& C \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli diyagramdan oluşur. Dolayısıyla

$$f : q \longrightarrow p$$

morfizmi, $\mathfrak{C}$ de

$$f : B \longrightarrow C$$

morfizmine dönüşür.

Böylece F üzerinde koneler kategorisi oluşturulabilir ve bu kategori $\mathfrak{Kone}(F)$ ile gösterilir.

Tanım 1.17 $\mathfrak{Kone}(F)$ kategorsinin son (terminal) objesine

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$$

funktorunun bir limiti denir. Böylece her

$$q : \Delta_Q \Longrightarrow F$$

konesi için

$$m : q \longrightarrow l$$

biricik morfizmi varsa

$$l : \Delta_L \Longrightarrow F$$

konesine F nin **limiti** denir ve $\varinjlim F = L$ ile gösterilir.

Tanım 1.18 $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ herhangi iki kategori, $u=(u_i)_{i\in Ob(\mathfrak{D})=I}$ olsun ve

$$F:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{C}$$

funktoru verilsin. $C\in Ob(\mathfrak{C})$ için

$$u:F\Longrightarrow\Delta_C$$

doğal transformasyonu varsa $(C,(u_i)_{i\in I})$ ikilisine F üzerinde bir **kokone** denir. Daha açık olarak, Δ_C sabit funktor olmak üzere

$$u:F\Longrightarrow\Delta_C$$

doğal transformasyon ise

(a). her $i\in I$ için

$$u_i:F(i)\longrightarrow\Delta_C(i)$$

$\mathfrak{C}$ de morfizmi

(b).

$$\begin{tikzcd}
i & C=\Delta_C(i) & F(i) \arrow[l, "u_i"'] \\
j \arrow[u, "d"] & C=\Delta_C(i) \arrow[u, "1_C"] & F(j) \arrow[l, "u_j"] \arrow[u, "F(d)"']
\end{tikzcd}$$

yani

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
F(i) \arrow[ur, "u_i"] & & F(j) \arrow[ul, "u_j"'] \arrow[ll, "F(d)"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $u_iF(d)=u_j$ olmalıdır.

Tanım 1.19 $q:F\Longrightarrow\Delta_B$ ve $p:F\Longrightarrow\Delta_C$, F üzerinde iki kokone olsun. Bu durumda

$$f:p\longrightarrow q$$

morfizmine **kokoneler arasındaki morfizm** denir. Açık olarak

$$\begin{tikzcd}
 & B & & & & C & \\
 & & & \arrow[l] & & & \\
F(i) \arrow[uur, "q_i"] & & F(j) \arrow[uul, "q_j"'] \arrow[ll, "F(d)"] & & F(i) \arrow[uur, "p_i"] & & F(j) \arrow[uul, "p_j"'] \arrow[ll, "F(d)"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
 & C \arrow[u, "f"'] & \\
F(i) \arrow[uur, bend left, "q_i"] \arrow[ur, "p_i"'] & & F(j) \arrow[uul, bend right, "q_j"'] \arrow[ul, "p_j"] \arrow[ll, "F(d)"]
\end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli diyagramdan oluşur. Dolayısıyla

$$f : p \longrightarrow q$$

morfizmi $\mathfrak{C}$ de

$$f : C \longrightarrow B$$

morfizmine dönüşür.

Böylece $\mathfrak{Kokone}(F)$ ile gösterilen F üzerinde koneler kategorisi oluşturulabilir.

Tanım 1.20 $\mathfrak{Kokone}(F)$ kategorisinin ilk (initial) objesine

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$$

funktorunun bir kolimiti denir. Böylece her

$$q : F \Longrightarrow \Delta_Q$$

kokonesi için

$$m : l \longrightarrow q$$

biricik morfizmi varsa

$$l : F \Longrightarrow \Delta_L$$

kokonesine F nin bir **kolimiti** denir ve $\underleftarrow{\operatorname{colim}} F = L$ ile gösterilir.

Dikkat edileceği üzere kolimit, limitin dualidir. Diyagram olarak limit

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[ddl, bend right, "q_i"'] \arrow[ddr, bend left, "q_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

ve kolimit

$$\begin{tikzcd}
 & Q & \\
 & L \arrow[u, dashed, "m"] & \\
F(i) \arrow[ur, "u_i"] \arrow[uur, bend left, "v_i"] & & F(j) \arrow[ul, "u_j"'] \arrow[uul, bend right, "v_j"'] \arrow[ll, "F(d)"]
\end{tikzcd}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.21 $\mathfrak{C}$ bir kategori olsun. $A,\ B,\ X,\ \mathfrak{C}$ nin objeleri ve

$$\alpha : A \to X \text{ ve } \beta : B \to X$$

morfizmleri olsun.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $\alpha f = \beta g$ verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
 & Y \arrow[r, dashed, "\alpha'"'] \arrow[d, dashed, "\beta'"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
 & B \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

$\alpha'\varepsilon = f$ ve $\beta'\varepsilon = g$ olacak şekilde

$$\varepsilon : Z \longrightarrow Y$$

biricik morfizmi var ise (α', β') ne (α, β) nın **geri çekmesi (pullback)**, Y ye de **geri çekme objesi** denir.

Örnek 1.12 $\mathfrak{C} = K\ddot{u}me$, A, B ve C birer küme ve

$$\alpha : A \to X \text{ ve } \beta : B \to X$$

fonksiyonlar olmak üzere (α, β) nın geri çekmesi (π_A, π_B), geri çekme objesi

$$D = A \times_C B = \{(x, y) : \alpha(x) = \beta(y)\} \subseteq A \times B$$

dir. Çünkü

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı verildiğinde

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & A \times_C B \arrow[r, dashed, "\pi_B"'] \arrow[d, dashed, "\pi_A"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon : & E & \longrightarrow & A \times_C B \\ & z & \longmapsto & (f(z), g(z)) \end{array}$$

morfizmi vardır.

Teorem 1.22 $\mathfrak{C}$ kategorisi sonlu çarpıma ve eşitleyiciye sahip ise $\mathfrak{C}$ nin geri çekmesi vardır.

Tanım 1.23 $\mathfrak{C}$ bir kategori, A, B ve C, $\mathfrak{C}$ nin objeleri olsun.

$$f_1 : A \longrightarrow B \quad \text{ve} \quad f_2 : A \longrightarrow C$$

$\mathfrak{C}$ de morfizmler olsun. Bu durumda

i).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, dashed, "g_2"] \\ C \arrow[r, dashed, "g_1"'] & P \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde

$$g_1 : C \longrightarrow P \quad \text{ve} \quad g_2 : B \longrightarrow P$$

morfizmleri vardır,

ii). Q objesi ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, "h_2"] \\ C \arrow[r, "h_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, dashed, "g_2"] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\ C \arrow[r, dashed, "g_1"'] \arrow[drr, bend right, "h_1"'] & P \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani

$$hg_1 = h_1 \quad \text{ve} \quad hg_2 = h_2$$

olacak şekilde biricik

$$h : P \longrightarrow Q$$

morfizmi vardır,

şartları sağlanıyorsa (P, g_1, g_2) ye yada kısaca P ye (f_1, f_2) nin **ileri itmesi (pushout)** denir.

BÖLÜM 2

Lie-Rinehart Cebirler ve Çaprazlanmış Modülleri

2.1 Giriş

Lie-Rinehart cebir kavramı Herz (1953) tarafından "Pseudo-algébras de Lie" adı altında literatüre kazandırılmıştır. Lie-Rinehart cebirleri "Lie Pseodualgebra","Lie d-ring" ve "Lie-cartan pair" gibi isimlerle yapılan çalışmalarda ortaya çıkar. Daha sonra Rinehart (1963) çalışmasından sonra Rinehart ismi kaynaklarda yerini almıştır. Bu tanımlama doğrultusunda Huebschmann (1990, 1998, 1999, 2000, 2004, 2005) de yaptığı çalışmalarda Lie-Rinehart cebirlerin matematiğin birçok alanında uygulamalarının olduğunu göstermiştir. Kassel ve Loday'in (1982) de Lie cebirleri için vermiş olduğu çaprazlanmış modüller tanımına benzer olarak Lie-Rinehart cebirler için çaprazlanmış modül kavramı (Casas, Ladra ve Pirashvili, 2004) tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde Lie-Rinehart cebirlerin tanımı hatırlanarak örneklerle detaylı bir şekilde Lie-Rinehart cebirlerin yapısı incelenecektir. Ayrıca Lie-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri tanımına ve örneklerine değinilerek bu kavramın temel bazı özellikleri incelenecektir.

2.2 Lie-Rinehart Cebirlere Giriş

2.2.1 Lie-Rinehart A-cebirleri

Öncelikle Lie-Rinehart cebirlerinin tanımını hatırlayalım. $\boldsymbol{k}$ bir cisim olmak üzere A, $\boldsymbol{k}$ üzerinde bir değişmeli cebir, A bir $\boldsymbol{k}$-modül ve

$a, b \in A, k \in \boldsymbol{k}$ için

$$k(ab) = (ka)b = a(kb)$$

olsun.

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b$$

şartını sağlayan $D : A \longrightarrow A$ şeklinde tanımlı $\boldsymbol{k}$-lineer fonksiyonlarına A nın bir $\boldsymbol{k}$-derivasyonu denir. A nın tüm $\boldsymbol{k}$-derivasyonları kümesi $\mathrm{Der}(A)$ ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{Der}(A) = \{D : A \longrightarrow A \mid D(ab) = aD(b) + D(a)b\}$$

dir. Ayrıca Der(A)

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ]:\mathrm{Der}(A)\times\mathrm{Der}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ (D_1,D_2) & \longmapsto & [D_1,D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1 \end{array}$$

braket işlemi altında bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebirdir. Bunu göstermek için $D,D_1,D_2,D_3\in\mathrm{Der}(A)$, $k\in\boldsymbol{k}$ ve $a\in A$ için

a). Der(A), $\boldsymbol{k}$-modül,

b). $[D,D]=0$ ve $[D_1,[D_2,D_3]]+[D_2,[D_3,D_1]]+[D_3,[D_1,D_2]]=0$,

c). $[,]$ braket işlemi k-bilineer

olduğunu göstermeliyiz.

a). $D,D_1,D_2\in\mathrm{Der}(A)$, $k,k_1,k_2\in\boldsymbol{k}$ ve $a\in A$ için

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & \mathrm{Der}(A)\times\mathrm{Der}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ & & (D_1,D_2) & \longmapsto & (D_1+D_2)(a)=D_1(a)+D_2(a) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & \boldsymbol{k}\times\mathrm{Der}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ & & (k,D) & \longmapsto & (k\cdot D)(a)=kD(a) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte

M$_1$). $(\mathrm{Der}(A),+)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$). Her $a\in A$ için

$$\begin{array}{rcl} (k\cdot(D_1+D_2))(a) & = & k((D_1+D_2)(a)) \\ & = & k(D_1(a)+D_2(a)) \\ & = & kD_1(a)+kD_2(a) \\ & = & (k\cdot D_1)(a)+(k\cdot D_2)(a) \\ & = & (k\cdot D_1+k\cdot D_2)(a) \end{array}$$

olduğundan

$$k\cdot(D_1+D_2)=k\cdot D_1+k\cdot D_2$$

dir.

M$_3$). Her $a\in A$ için

$$\begin{array}{rcl} ((k_1+k_2)\cdot D)(a) & = & (k_1+k_2)D(a) \\ & = & k_1D(a)+k_2D(a) \\ & = & (k_1\cdot D)(a)+(k_2\cdot D)(a) \\ & = & (k_1\cdot D+k_2\cdot D)(a) \end{array}$$

olduğundan

$$(k_1+k_2)\cdot D = k_1\cdot D + k_2\cdot D$$

dir.

M$_4$). Her $a\in A$ için

$$\begin{aligned}((k_1k_2)\cdot D)(a) &= (k_1k_2)D(a)\\ &= k_1\cdot(k_2D(a))\\ &= k_1\cdot((k_2\cdot D)(a))\\ &= (k_1\cdot(k_2\cdot D))(a)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1k_2)\cdot D = k_1\cdot(k_2\cdot D)$$

dir. O halde Der(A) bir **k**-modüldür.

b). $[D,D] = D\circ D - D\circ D = 0$

ve benzer şekilde

$$[D_1,[D_2,D_3]]+[D_2,[D_3,D_1]]+[D_3,[D_1,D_2]] = 0$$

olduğu da gösterilebilir.

c). Her $a\in A$ için

$$\begin{aligned}(k\cdot[D_1,D_2])(a) &= k([D_1,D_2](a))\\ &= k((D_1D_2-D_2D_1)(a))\\ &= k(D_1D_2(a)-D_2D_1)(a))\\ &= kD_1D_2(a)-kD_2D_1(a)\\ &= kD_1(D_2(a))-kD_2(D_1(a))\\ &= kD_1(D_2(a))-D_2(kD_1(a))\ \ (\because D: A\longrightarrow A,\ \mathbf{k}\text{-lineer})\\ &= (k\cdot D_1)D_2(a)-D_2(k\cdot D_1)(a)\\ &= ((k\cdot D_1)D_2-D_2(k\cdot D_1))(a)\\ &= [k\cdot D_1,D_2](a)\end{aligned}$$

olduğundan

$$k\cdot[D_1,D_2] = [k\cdot D_1,D_2] = [D_1,k\cdot D_2]$$

olur. Yani $[,]$ braketi **k**-bilineerdir.

Diğer taraftan Der(A) bir A-modüldür. Çünkü $D,D_1,D_2\in\mathrm{Der}(A)$, $k,k_1,k_2\in\boldsymbol{k}$ ve $a\in A$ için

$$\begin{aligned}+:\mathrm{Der}(A)\times\mathrm{Der}(A) &\longrightarrow \mathrm{Der}(A)\\ (D_1,D_2) &\longmapsto (D_1+D_2)(a)=D_1(a)+D_2(a)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\cdot:\boldsymbol{k}\times\mathrm{Der}(A) &\longrightarrow \mathrm{Der}(A)\\ (k,D) &\longmapsto (k\cdot D)(a)=kD(a)\end{aligned}$$

işlemlerini alalım. $D_1, D_2, D'_1, D'_2 \in \mathrm{Der}(A)$ ve $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}(D_1+D_2)(ab) &= a(D_1+D_2)(b)+(D_1+D_2)(a)b \\ &= a(D_1(b)+D_2(b))+(D_1(a)+D_2(a))b \\ &= aD_1(b)+aD_2(b)+D_1(a)b+D_2(a)b \\ &= aD_1(b)+D_1(a)b+aD_2(b)+D_2(a)b \\ &= D_1(ab)+D_2(ab)\end{aligned}$$

ve $(D_1, D_2) = (D'_1, D'_2)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(D_1+D_2)(a) &= D_1(a)+D_2(a) \\ &= D'_1(a)+D'_2(a) \\ &= (D'_1+D'_2)(a)\end{aligned}$$

olduğundan $+$ dönüşümü bir ikili işlemdir.

M$_1$). $(\mathrm{Der}(A), +)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$). Her $b \in A$ için

$$\begin{aligned}(a\cdot(D_1+D_2))(b) &= a((D_1+D_2)(b)) \\ &= a(D_1(b)+D_2(b)) \\ &= aD_1(b)+aD_2(b) \\ &= (a\cdot D_1)(b)+(a\cdot D_2)(b) \\ &= (a\cdot D_1+a\cdot D_2)(b)\end{aligned}$$

olduğundan

$$a\cdot(D_1+D_2) = a\cdot D_1 + a\cdot D_2$$

dir.

M$_3$). Her $b \in A$ için

$$\begin{aligned}((a_1+a_2)\cdot D)(b) &= (a_1+a_2)D(b) \\ &= a_1D(b)+a_2D(b) \\ &= (a_1\cdot D)(b)+(a_2\cdot D)(b) \\ &= (a_1\cdot D+a_2\cdot D)(b)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(a_1+a_2)\cdot D = a_1\cdot D + a_2\cdot D$$

dir.

M$_4$). Her $b \in A$ için

$$\begin{aligned}((a_1a_2)\cdot D)(b) &= (a_1a_2)D(b) \\ &= a_1\cdot(a_2D(b)) \\ &= a_1\cdot((a_2\cdot D)(b)) \\ &= (a_1\cdot(a_2\cdot D))(b)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(a_1a_2)\cdot D = a_1\cdot(a_2\cdot D)$$

dir. Bu durumda Der(A) bir A-modüldür. Ayrıca $D_1, D_2 \in$ Der(A) ve $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
[D_1, aD_2](b) &= (D_1(aD_2))(b) - ((aD_2)D_1)(b) \\
&= D_1((aD_2)(b)) - aD_2(D_1(b)) \\
&= D_1(aD_2(b)) - aD_2(D_1(b)) \\
&= aD_1(D_2(b)) + D_2(b)D_1(a) - aD_2(D_1(b)) \quad (\because \text{derivasyon tanımı}) \\
&= aD_1(D_2(b)) - aD_2(D_1(b)) + D_2(b)D_1(a) \\
&= a(D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))) + D_1(a)D_2(b) \quad (\because A \text{ değişmeli}) \\
&= a([D_1, D_2])(b) + (D_1(a)D_2)(b)
\end{aligned}$$

dır. Yani

$$[D_1, aD_2] = a[D_1, D_2] + D_1(a)D_2 \neq a[D_1, D_2]$$

olduğundan $[,]$ braketi A-bilineer değildir. Dolayısıyla Der(A) bir Lie A-cebir değildir.

Tanım 2.1 $\boldsymbol{k}$ bir cisim, A değişmeli bir $\boldsymbol{k}$-cebir, $\mathcal{L}$ bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebir ve bir A-modül olsun. Bu durumda Lie cebir homomorfizmi ve A-modül homomorfizmi olan

$$\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \text{Der}(A)$$

fonksiyonu (anchor map) her $l, l' \in \mathcal{L}$, $a \in A$ ve $\alpha(l)(a) = l(a)$ için

$$[l, al'] = a[l, l'] + l(a)l'$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{L}$ ye **Lie-Rinehart A-cebir** veya A **üzerinde bir Lie-Rinehart cebir** denir.

Örnek 2.1 Herhangi bir $\mathcal{L}$ Lie-Rinehart cebirde, $\alpha = 0$ anchor dönüşümü yardımıyla $\mathcal{L}$ ve Der(A) Lie-Rinehart cebirleri elde edilir. Buradan Lie-Rinehart cebirleri tam olarak Lie cebirlerine karşılık gelir. Çünkü $\alpha = 0$ iken

$$\begin{aligned}
[l, al'] &= a[l, l'] + (\alpha(l(a)))l' \\
&= a[l, l'] + (0(l(a)))l' \\
&= a[l, l']
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca, A değişmeli bir **k**-cebir olmak üzere $\mathcal{L} = $ Der(A) eşitliğiyle bir Lie-Rinehart cebir

$$\begin{aligned}
\alpha : \text{Der}(A) &\longrightarrow \text{Der}(A) \\
d &\longmapsto d
\end{aligned}$$

dönüşümü yardımıyla elde edilebilir. Diğer taraftan $A = \mathbf{k}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
A \times A &\longrightarrow A \\
(a, a') &\longmapsto aa' = 0
\end{aligned}$$

etki işlemiyle birlikte A bir A-cebirdir. A nın herhangi bir d A-derivasyonu ve her $a, b \in A$ için

$$d(ab) = ad(b) + d(a)b = 0$$

olduğundan Der(A) $= 0$ dır. Buradan $\alpha = 0$ anchor dönüşümü elde edilir ve sonuç olarak Lie cebiri ile Lie-Rinehart cebiri arasında fark kalmaz.

Örnek 2.2 $\mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir olsun. Bu durumda

$$[(l,a),(l',b)] = ([l,l'], l(b) - l'(a))$$

ve $\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\alpha} : \mathcal{L} \times A & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ (l,a) & \longmapsto & \tilde{\alpha}(l,a) = \alpha(l) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte $\mathcal{L} \times A$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir. Çünkü;

a). i). $(l,a),(l',b) \in \mathcal{L} \times A$, $a,b \in A$, $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbf{k} \times (\mathcal{L} \times A) & \longrightarrow & \mathcal{L} \times A \\ (k,(l,a)) & \longmapsto & k \cdot (l,a) = (kl, ka) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} + : (\mathcal{L} \times A) \times (\mathcal{L} \times A) & \longrightarrow & \mathcal{L} \times A \\ ((l,a),(l',b)) & \longmapsto & (l,a),(l',b) = (l+l', a+b) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte $\mathcal{L} \times A$ bir $\mathbf{k}$-modüldür.

ii).
$$\begin{array}{rcl} k \cdot [(l,a),(l',b)] & = & k \cdot ([l,l'], l(b) - l'(a)) \\ & = & (k[l,l'], k(l(b) - l'(a))) \\ & = & ([kl,l'], kl(b) - kl'(a)) \\ & = & ([kl,l'], (kl)(b) - l'(ka)) \quad (\because \alpha \text{ modül homomorfizmi}) \\ & = & [(kl,ka),(l',b)] \\ & = & [k \cdot (l,a),(l',b)] \end{array}$$

olur. Benzer şekilde

$$k \cdot [(l,a),(l',b)] = [(l,a), k \cdot (l',b)]$$

olduğu da gösterilebilir. O halde $[,]$ braketi $\mathbf{k}$-bilineerdir.

iii).

$$\begin{array}{rcl} [(l,a),(l,a)] & = & ([l,l], l(a) - l(a)) \\ & = & (0,0) \\ & = & 0 \end{array}$$

olur. Benzer şekilde

$$[(l,a),[(l',b),(l'',c)]] + [(l',b),[(l'',c),(l,a)]] + [(l'',c),[(l,a),(l',b)]] = 0$$

olduğu da gösterilebir. Yani $\mathcal{L} \times A$ bir Lie $\mathbf{k}$-cebirdir.

b).

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A \times (\mathcal{L} \times A) & \longrightarrow & \mathcal{L} \times A \\ (b,(l,a)) & \longmapsto & b \cdot (l,a) = (bl, ba) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} +:(\mathcal{L}\times A)\times(\mathcal{L}\times A) & \longrightarrow & \mathcal{L}\times A \\ ((l,a),(l',b)) & \longmapsto & (l,a),(l',b)=(l+l',a+b) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte $\mathcal{L}\times A$ bir A-modül yapısı oluşturur.

c).

$$\begin{array}{rcl} a'[(l,a),(l',b)]+(\widetilde{\alpha}(l,a))(a')(l',b) & = & a'([l,l'],l(b)-l'(a))+(\alpha(l)(a')(l',b) \\ & = & (a'[l,l'],a'(l(b)-l'(a)))+((\alpha(l))(a')l',(\alpha(l))(a')b) \\ & = & (a'[l,l']+(\alpha(l))(a')l',a'(l(b)-l'(a))+(\alpha(l))(a')b) \\ & = & ([l,a'l'],a'l(b)-a'l'(a)+l(a')b) \\ & = & ([l,a'l'],a'l(b)+l(a')b-a'l'(a)) \\ & = & [(l,a),(a'l',a'b)] \\ & = & [(l,a),a'(l',b)] \end{array}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{L}\times A$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir.

Örnek 2.3 $\mathfrak{g}$ bir Lie $\mathbf{k}$-cebir ve A değişmeli bir $\boldsymbol{k}$-cebir olsun. $\mathfrak{g}$ nin A üzerine etkisi derivasyon yardımıyla

$$\gamma:\mathfrak{g}\longrightarrow \mathrm{Der}(A)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $(\mathfrak{g},A)$ nın Lie-Rinehart dönüşümü

$$[(a\otimes g),(a'\otimes g')]=aa'\otimes[g,g']+a\gamma(g)(a')\otimes g'-a'\gamma(g')(a)\otimes g$$

Lie braketi ve

$$\begin{array}{rcl} \alpha:\mathcal{L}=A\otimes\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ (a\otimes g) & \longmapsto & \alpha(a\otimes g)(a')=a\gamma(g)(a') \end{array}$$

anchor dönüşümüyle birlikte $\mathcal{L}=A\otimes\mathfrak{g}$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir. Çünkü;

i). Öncelikle $A\otimes\mathfrak{g}$ nin Lie $\mathbf{k}$-cebir olduğunu gösterelim.

a). $(a\otimes g),(a'\otimes g')\in A\otimes\mathfrak{g}$, $k,k_1,k_2\in\mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{rcl} +\ :\ (A\otimes\mathfrak{g})\times(A\otimes\mathfrak{g}) & \longrightarrow & (A\otimes\mathfrak{g}) \\ ((a\otimes g),(a'\otimes g')) & \longmapsto & (a\otimes g)+(a'\otimes g')=(a+a'\otimes g+g') \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \cdot\ :\ \mathbf{k}\times(A\otimes\mathfrak{g}) & \longrightarrow & (A\otimes\mathfrak{g}) \\ (k,(a\otimes g)) & \longmapsto & k\cdot(a\otimes g)=(ka\otimes g) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte

M$_1$). $((A\otimes\mathfrak{g}),+)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$).

$$\begin{aligned} k\cdot((a\otimes g)+(a'\otimes g')) &= k\cdot(a+a'\otimes g+g') \\ &= (k(a+a')\otimes g+g') \\ &= (ka+ka'\otimes g+g') \\ &= (ka\otimes g)+(ka'\otimes g') \\ &= k\cdot(a\otimes g)+k\cdot(a'\otimes g') \end{aligned}$$

olduğundan

$$k\cdot((a\otimes g)+(a'\otimes g'))=k\cdot(a\otimes g)+k\cdot(a'\otimes g')$$

dır.

M$_3$).

$$\begin{aligned} (k_1+k_2)\cdot(a\otimes g) &= ((k_1+k_2)a\otimes g) \\ &= (k_1a+k_2a\otimes g) \\ &= (k_1a\otimes g)+(k_2a\otimes g) \\ &= k_1\cdot(a\otimes g)+k_2\cdot(a\otimes g) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1+k_2)\cdot(a\otimes g)=k_1\cdot(a\otimes g)+k_2\cdot(a\otimes g)$$

dır.

M$_4$).

$$\begin{aligned} (k_1k_2)\cdot(a\otimes g) &= ((k_1k_2)a\otimes g) \\ &= (k_1(k_2a)\otimes g) \\ &= k_1\cdot(k_2a\otimes g) \\ &= k_1\cdot(k_2\cdot(a\otimes g)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1k_2)\cdot(a\otimes g)=k_1\cdot(k_2\cdot(a\otimes g))$$

dır. O halde $A\otimes\mathfrak{g}$ bir $\boldsymbol{k}$-modüldür.

b).

$$\begin{aligned} [(a\otimes g),(a\otimes g)] &= aa\otimes[g,g]+a\gamma(g)(a)\otimes g-a\gamma(g)(a)\otimes g \\ &= aa\otimes 0+(a\gamma(g)(a)-a\gamma(g)(a))\otimes g \quad (\because \text{ tensör çarpım özelliği}) \\ &= 0+0\otimes g \quad (\because \text{ tensör çarpım özelliği}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$[(a\otimes g),[(a'\otimes g'),(a''\otimes g'')]]+[(a'\otimes g'),[(a''\otimes g''),(a\otimes g)]]+[(a''\otimes g''),[(a\otimes g),(a'\otimes g')]]=0$$

olduğu da gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
\textbf{c).}\ \ [k\cdot(a\otimes g),(a'\otimes g')] &= [ka\otimes g),(a'\otimes g')] \\
&= (ka)a'\otimes[g,g'] + (ka)\gamma(g)(a')\otimes g' - a'\gamma(g')(ka)\otimes g \\
&= k(aa')\otimes[g,g'] + k(a\gamma(g)(a'))\otimes g' - k(a'\gamma(g')(a))\otimes g \ \ (\because \gamma\ \mathbf{k}\text{-lineer}) \\
&= k\cdot(aa'\otimes[g,g']) + k\cdot(a\gamma(g)(a')\otimes g') - k\cdot(a'\gamma(g')(a)\otimes g) \\
&= k\cdot(aa'\otimes[g,g'] + a\gamma(g)(a')\otimes g' - a'\gamma(g')(a)\otimes g) \\
&= k\cdot[(a\otimes g),(a'\otimes g')]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$k\cdot[(a\otimes g),(a'\otimes g')] = [k\cdot(a\otimes g),(a'\otimes g')] = [(a\otimes g),k\cdot(a'\otimes g')]$$

dır. Benzer şekilde

$$k\cdot[(a\otimes g),(a'\otimes g')] = [(a\otimes g),k\cdot(a'\otimes g')]$$

olduğu da gösterilebilir. O halde $[,]$ braketi **k**-bilineerdir.

ii). Şimdi $A\otimes\mathfrak{g}$ nın A-modül olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
+\ :\ (A\otimes\mathfrak{g})\times(A\otimes\mathfrak{g}) &\longrightarrow (A\otimes\mathfrak{g}) \\
((a\otimes g),(a'\otimes g')) &\longmapsto (a\otimes g)+(a'\otimes g') = (a+a'\otimes g+g')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cdot\ :\ A\times(A\otimes\mathfrak{g}) &\longrightarrow (A\otimes\mathfrak{g}) \\
(a',(a\otimes g)) &\longmapsto a'\cdot(a\otimes g) = (a'a\otimes g)
\end{aligned}$$

işlemleriyle birlikte $A\otimes\mathfrak{g}$, A-modül yapısı oluşturur.

iii). $a,a',b\in A$ ve $(a\otimes g),(a'\otimes g')\in A\otimes\mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned}
[(a\otimes g),b(a'\otimes g')] &= [(a\otimes g),(ba'\otimes g')] \\
&= a(ba')\otimes[g,g'] + a\gamma(g)(ba')\otimes g' - (ba')\gamma(g')(a)\otimes g \\
&= b(aa')\otimes[g,g'] + a(b\gamma(g)(a') + \gamma(g)(b)a')\otimes g' - (ba')\gamma(g')(a)\otimes g \\
&= b(aa')\otimes[g,g'] + (ab\gamma(g)(a') + a\gamma(g)(b)a')\otimes g' - (ba')\gamma(g')(a)\otimes g \\
&= b(aa')\otimes[g,g'] + ba\gamma(g)(a')\otimes g' + a\gamma(g)(b)a'\otimes g' - (ba')\gamma(g')(a)\otimes g \\
&= b(aa')\otimes[g,g'] + ba\gamma(g)(a')\otimes g' - (ba')\gamma(g')(a)\otimes g + a\gamma(g)(b)a'\otimes g' \\
&= b\cdot(aa'\otimes[g,g'] + a\gamma(g)(a')\otimes g' - a'\gamma(g')(a)\otimes g) + a\gamma(g)(b)a'\otimes g' \\
&= b\cdot[(a\otimes g),(a'\otimes g')] + a\gamma(g)(b)\cdot(a'\otimes g') \\
&= b\cdot[(a\otimes g),(a'\otimes g')] + \alpha(a\otimes g)(b)(a'\otimes g')
\end{aligned}$$

olduğundan

$$[(a\otimes g),b(a'\otimes g')] = b[(a\otimes g),(a'\otimes g')] + \alpha(a\otimes g)(b)(a'\otimes g')$$

elde edilir. Sonuç olarak $A\otimes\mathfrak{g}$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir.

Örnek 2.4 S asosyatif **k**-cebir ve S nin merkezi A olsun. A nın etkisi ve $\mathrm{Der}(S)$ üzerinde Lie **k**-cebir yapısı $D,D_1\in\mathrm{Der}(S)$, $a\in A$ ve $s\in S$ için

$$[D,D_1] = DD_1 - D_1D$$

$$(aD)(s) = aD(s)$$

olsun. Burada

$$\begin{array}{rcccl} \alpha & : & \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ & & D & \longmapsto & D(as) \end{array}$$

homomorfizmi kısıtlanmadır. Bu durumda Der(S) nin bir Lie-Rinehart A-cebir olduğunu gösterelim.

Öncelikle

$$D(as) = aD(s) + D(a)s\, ve\, D(sa) = sD(a) + D(s)a$$

olduğundan

$$\begin{array}{rcl} D(as) - D(sa) & = & aD(s) + D(a)s - sD(a) - D(s)a \\ & = & aD(s) + D(a)s - D(a)s - aD(s) \quad (\because \text{ merkez tanımı}) \\ & = & 0 \end{array}$$

olup α iyi tanımlıdır.

i). Der(S) nin Lie **k**-cebir olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcl} + : \mathrm{Der}(S) \times \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ (D_1, D_2) & \longmapsto & (D_1 + D_2)(s) = D_1(s) + D_2(s) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbf{k} \times \mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ (k, D) & \longmapsto & (k \cdot D)(s) = D(ks) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte Der(S) bir **k**-modüldür (Örnek 1.1).

b). $[D, D] = DD - DD = 0$ ve benzer şekilde

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0$$

olduğu da gösterilebilir.

c). Her $s \in S$ için

$$\begin{array}{rcl} k \cdot [D_1, D_2](s) & = & [D_1, D_2](ks) \\ & = & (D_1 D_2 - D_2 D_1)(ks) \\ & = & D_1 D_2(ks) - D_2 D_1(ks) \\ & = & D_1(D_2(ks)) - D_2(D_1(ks)) \\ & = & D_1(kD_2(s)) - D_2(kD_1(s)) \quad (\because \mathrm{Der}(S)\ \mathbf{k}\text{-lineer}) \\ & = & kD_1(D_2(s)) - D_2(kD_1(s)) \quad (\because \mathrm{Der}(S)\ \mathbf{k}\text{-lineer}) \\ & = & ((kD_1)D_2)(s) - (D_2(kD_1))(s) \\ & = & ((kD_1)D_2 - D_2(kD_1))(s) \\ & = & [k \cdot D_1, D_2](s) \end{array}$$

olduğundan

$$k\cdot[D_1,D_2]=[k\cdot D_1,D_2]=[D_1,k\cdot D_2]$$

dır. Benzer şekilde

$$k\cdot[D_1,D_2]=[D_1,k\cdot D_2]$$

olduğu da gösterilebilir. O halde $[,]$ braketi **k**-bilineerdir.

ii).

$$\begin{array}{rrcl} + \ : & \mathrm{Der}(S)\times\mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ & (D_1,D_2) & \longmapsto & (D_1+D_2)(s)=D_1(s)+D_2(s) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rrcl} \cdot \ : & A\times\mathrm{Der}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(S) \\ & (a,D) & \longmapsto & (a\cdot D)(s)=aD(s) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte $\mathrm{Der}(S)$ bir A-modüldür.

iii). Her $s\in S$ için

$$\begin{aligned} [D_1,aD_2](s) &= (D_1(aD_2)-(aD_2)D_1)(s) \\ &= D_1(aD_2)(s)-(aD_2)D_1(s) \\ &= D_1(aD_2(s))-a(D_2D_1(s)) \\ &= aD_1(D_2(s))+D_1(a)D_2(s)-a(D_2D_1(s)) \\ &= a(D_1(D_2(s))-D_2D_1(s))+D_1(a)D_2(s) \\ &= a(D_1D_2-D_2D_1)(s)+(D_1(a)D_2)(s) \\ &= a[D_1,D_2](s)+(D_1(a)D_2)(s) \\ &= (a[D_1,D_2]+(D_1(a)D_2))(s) \\ &= (a[D_1,D_2]+(\alpha(D_1)(a)D_2)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$[D_1,aD_2]=a[D_1,D_2]+(\alpha(D_1)(a))D_2$$

dır. Sonuç olarak $\mathrm{Der}(S)$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir.

Örnek 2.5 R bir Lie A-cebir ve $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir olsun. $d:R\longrightarrow R$ dönüşümü $l\in\mathfrak{L}$, $a\in A$ ve $r\in R$ için

$$d(ar)=ad(r)+l(a)r$$

şartını sağlayan R nin **k**-derivasyonları olmak üzere (d,l) tarafından gerilen vektör uzayını $DO(A,\mathfrak{L},R)$ ile göstereceğiz. Ayrıca

$$DO(A,\mathfrak{L},R)\xrightarrow{\pi}\mathfrak{L}\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Der}(A)$$

bileşkesi yardımıyla $DO(A,\mathfrak{L},R)$ üzerinde Lie-Rinehart cebir yapısı oluşturulabilir. Yani;

a). i).

$$\begin{array}{rcl} \cdot \ : \ \mathbf{k} \times DO(A,\mathcal{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathcal{L},R) \\ (k,(d,l)) & \longmapsto & k\cdot(d,l)=(kd,kl) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} + \ : \ DO(A,\mathcal{L},R)\times DO(A,\mathcal{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathcal{L},R) \\ ((d_1,l),(d_2,l')) & \longmapsto & (d_1,l)+(d_2,l')=(d_1+d_2,l+l') \end{array}$$

işlemleriyle birlikte

M$_1$). $(DO(A,\mathcal{L},R),+)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$).
$$\begin{array}{rcl} k\cdot((d,l)+(d',l')) & = & k\cdot(d+d',l+l') \\ & = & (k(d+d'),k(l+l')) \\ & = & (kd+kd',kl+kl') \\ & = & (kd,kl)+(kd',kl') \\ & = & k\cdot(d,l)+k\cdot(d',l') \end{array}$$

dir.

M$_3$).
$$\begin{array}{rcl} (k_1+k_2)\cdot(d,l) & = & ((k_1+k_2)d,(k_1+k_2)l) \\ & = & (k_1d+k_2d,k_1l+k_2l) \\ & = & (k_1d,k_1l)+(k_2d,k_2l) \\ & = & k_1\cdot(d,l)+k_2\cdot(d,l) \end{array}$$

dir.

M$_4$).
$$\begin{array}{rcl} (k_1k_2)\cdot(d,l) & = & ((k_1k_2)d,(k_1k_2)l) \\ & = & (k_1(k_2d),k_1(k_2l)) \\ & = & k_1\cdot(k_2d,k_2l) \\ & = & k_1\cdot(k_2\cdot(d,l)) \end{array}$$

dir. Bu durumda $DO(A,\mathcal{L},R)$ bir **k**-modüldür.

ii).

$$\begin{array}{rcl} [,]:DO(A,\mathcal{L},R)\times DO(A,\mathcal{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathcal{L},R) \\ ((d,l),(d',l')) & \longmapsto & [(d,l),(d',l')]=([d,d'],[l,l']) \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} k\cdot[(d,l),(d',l')] & = & k\cdot([d,d'],[l,l']) \\ & = & (k[d,d'],k[l,l']) \\ & = & ([kd,d'],[kl,l']) \\ & = & [(kd,kl),(d',l')] \\ & = & [k\cdot(d,l),(d',l')] \end{array}$$

olur. Benzer şekilde

$$k\cdot[(d,l),(d',l')]=[(d,l),k\cdot(d',l')]$$

olduğu da gösterilebilir. O halde $[,]$ braketi **k**-bilineerdir.

iii).

$$[(d,l),(d,l)] = ([d,d],[l,l]) = 0$$

dır. Benzer şekilde

$$[(d,l),[(d',l'),(d'',l'')]] + [(d',l'),[(d'',l''),(d,l)]] + [(d'',l''),[(d,l),(d',l')]] = 0$$

olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak $DO(A,\mathfrak{L},R)$ bir Lie **k**-cebirdir.

b).

$$\begin{array}{cccl} + : & DO(A,\mathfrak{L},R)\times DO(A,\mathfrak{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathfrak{L},R) \\ & ((d,l),(d',l')) & \longmapsto & (d,l)+(d',l') = (d+d', l+l') \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{cccl} \cdot : & A\times DO(A,\mathfrak{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathfrak{L},R) \\ & (a,(d,l)) & \longmapsto & a\cdot(d,l) = (ad, al) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte $DO(A,\mathfrak{L},R)$ bir A-modüldür.

c). Önce ispata yardımcı olacak aşağıdaki eşitliği verelim.

$$\begin{array}{rcl} [d,ad'](r) & = & (d(ad')-(ad')d)(r) \\ & = & d(ad')(r)-(ad')d(r) \\ & = & d(ad'(r))-(ad')d(r) \\ & = & ad(d'(r))+(\alpha(l))(a)d'(r)-(ad')d(r) \\ & = & ad(d'(r))-(ad')d(r)+(\alpha(l))(a)d'(r) \\ & = & a(dd'(r)-d'd(r))+(\alpha(l))(a)d'(r) \\ & = & a(dd'-d'd)(r)+(\alpha(l))(a)d'(r) \\ & = & (a(dd'-d'd)+((\alpha(l))(a)d')(r) \\ & = & (a[d,d']+((\alpha(l))(a)d')(r) \end{array}$$

olduğundan

$$[d,ad'] = a[d,d'] + \alpha(l)(a)d'$$

olur. Diğer taraftan

$$\widetilde{\alpha} = \alpha\pi : DO(A,\mathfrak{L},R) \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$$

anchor dönüşümünü alalım.

$$\begin{array}{rcl} [(d,l),a\cdot(d',l')] & = & [(d,l),(ad',al')] \\ & = & ([d,ad'],[l,al']) \\ & = & (a[d,d']+(\alpha(l))(a)d', a[l,l']+(\alpha(l))(a)l') \\ & = & (a[d,d'],a[l,l'])+((\alpha(l))(a)d',(\alpha(l))(a)l') \\ & = & a\cdot([d,d'],[l,l'])+(\alpha(l))(a)(d',l') \\ & = & a\cdot[(d,l),(d',l')]+(\alpha\pi(d,l))(a)(d',l') \\ & = & a\cdot[(d,l),(d',l')]+(\widetilde{\alpha}(d,l))(a)(d',l') \end{array}$$

olduğundan sonuç olarak $DO(A,\mathfrak{L},R)$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir.

Tanım 2.2 $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}'$ birer Lie-Rinehart cebir olsun. Eğer $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ fonksiyonu bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebir homomorfizmi, bir A-modül homomorfizmi ve

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & Der(A) \\ \mathcal{L}' \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $\alpha' f = \alpha$ ise f fonksiyonuna **Lie-Rinehart cebir homomorfizmi** denir.

Bu tanımlama yardımıyla Lie-Rinehart A-cebirler kategorisi oluşturulur. Ve bu kategori $\mathcal{LR}(A)$ ile gösterilir. Lie A-cebirlerin kategorisi $\mathcal{L}(A)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{LR}(A)$$

dır.

Herhangi bir Lie-Rinehart cebir homomorfizminin çekirdeği Lie A-cebirdir. Çünkü;

a). Her $X, Y, Z \in$ Çek$f$, $a, b \in A$ için

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & A \times \text{Çek}f & \longrightarrow & \text{Çek}f \\ & & (a, X) & \longmapsto & a \cdot X = [a, X] = aX - Xa \end{array}$$

şeklindeki dönüşümü ele alalım.

i).

$$\begin{aligned} a \cdot (X + Y) &= [a, X + Y] \\ &= a(X + Y) - (X + Y)a \\ &= aX + aY - Xa - Ya \\ &= aX - Xa + aY - Ya \\ &= [a, X] + [a, Y] \\ &= a \cdot X + a \cdot Y \end{aligned}$$

dır.

ii).

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot X &= [a + b, X] \\ &= (a + b)X - X(a + b) \\ &= aX + bX - Xa - Xb \\ &= aX - Xa + bX - Xb \\ &= [a, X] + [b, X] \\ &= a \cdot X + b \cdot X \end{aligned}$$

dır.

iii).

$$\begin{aligned}(ab)\cdot X &= [ab,X]\\ &= (ab)X - X(ab)\\ &= a(bX)-(Xa)b\\ &= a(bX)-(aX)b\\ &= a(bX)-a(Xb)\\ &= a(bX-Xb)\\ &= a\cdot[b,X]\\ &= a\cdot(b\cdot X)\end{aligned}$$

dır. O halde Çek$f$ bir A-modüldür.

b). $X,Y \in$ Çek$f$ ve $a\in A$ için

$$\begin{aligned}[,]\ :\ \text{Çek}f\times\text{Çek}f &\longrightarrow \text{Çek}f\\ (X,Y) &\longmapsto [X,Y]=XY-YX\end{aligned}$$

dönüşümünü ele alalım. Öncelikle bu dönüşümün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}f[X,Y] &= f(XY-YX)\\ &= f(XY)-f(YX)\\ &= f(X)f(Y)-f(Y)f(X)\\ &= 0-0 \quad (\because X,Y\in \text{Çek}f \text{ olduğundan } f(X)=f(Y)=0)\\ &= 0\end{aligned}$$

i). $[X,X]=0$

dır. Benzer şekilde

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

olduğu da gösterilebilir.

c).

$$\begin{aligned}[aX,Y] &= (aX)Y-Y(aX)\\ &= a(XY)-(Ya)X\\ &= a(XY)-(aY)X\\ &= a(XY)-a(YX)\\ &= a(XY-YX)\\ &= a[X,Y]\end{aligned}$$

dir. Bu durumda $[,]$ braketi A-bilineerdir. Sonuç olarak Çek$f$ bir Lie A-cebirdir.

2.2.2 Yarı-direkt Çarpım ve Etki

Öncelikle değişmeli cebir ve Lie cebirleri için etki tanımını verelim.

Tanım 2.3 C ve R iki değişmeli **k**-cebir olsun.

$$\begin{array}{rcl} f : R \times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & f(r,c) = r \cdot c \end{array}$$

fonksiyonu her $k \in \mathbf{k}$, $c,\ c' \in C,\ r,\ r' \in R$ için ,

i). $k(r \cdot c) = (kr \cdot c) = (r \cdot kc)$

ii). $r \cdot (c + c') = r \cdot c + r \cdot c'$

iii). $(r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c$

iv). $r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c')$

v). $rr' \cdot c = r \cdot (r' \cdot c)$

şartlarını sağlıyor ise f ye R nin C üzerine **değişmeli cebir etkisi** denir.

Tanım 2.4 M ve S iki Lie **k**-cebir olmak üzere M üzerinde S nin **Lie etkisi**, aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{array}{rcl} S \times M & \longrightarrow & M \\ (s,m) & \longmapsto & s \cdot m \end{array}$$

dönüşümdür. Her $k \in \mathbf{k},\ m, m' \in M$ ve $s, s' \in S$ için

i). $k(s \cdot m) = (ks) \cdot m = s \cdot (km)$

ii). $s \cdot (m + m') = s \cdot m + s \cdot m'$

iii). $(s + s') \cdot m = s \cdot m + s' \cdot m$

iv). $[s, s'] \cdot m = s(s' \cdot m) - s'(s \cdot m)$

v). $s \cdot [m, m'] = [s \cdot m, m'] + [m, s \cdot m']$

Tanım 2.5 $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir ve R bir Lie A-cebir olsun. Eğer

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L} \times R & \longrightarrow & R \\ (l,r) & \longmapsto & {}^{l}r \end{array}$$

$\boldsymbol{k}$-lineer fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathfrak{L}$, R **üzerine etki ediyor** denir. Her $l, l' \in \mathfrak{L}$, $r, r_1, r_2 \in R$ ve $a \in A$ için

1. ${}^{[l,l']}r = {}^{l}({}^{l'}r) - {}^{l'}({}^{l}r)$

2. ${}^{l}([r_1,r_2]) = [{}^{l}r_1, r_2] - [{}^{l}r_2, r_1] = [{}^{l}r_1, r_2] + [r_1, {}^{l}r_2]$

3. ${}^{al}r = a({}^{l}r)$

4. ${}^{l}(ar) = a({}^{l}r) + ((\alpha(l))(a))r$

Burada (1) ve (2) şartı Lie $\boldsymbol{k}$-cebirler kategorisinde $\mathfrak{L}$ nin R üzerine etkisini ifade eder.

Tanım 2.6 R değişmeli bir Lie A-cebir ve $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir olsun. Eğer $\mathfrak{L}$ nin R üzerine etkisi varsa R ye $\mathfrak{L}$ üzerinde **Lie-Rinehart modül** denir. $\mathfrak{L}$ üzerinde Lie-Rinehart modüller kategorisi $(\mathfrak{L},A)-\mathfrak{mod}$ ile gösterilir.

Lie $\boldsymbol{k}$-cebirler kategorisinde

$$[(l,r),(l',r')] = ([l,l'],[r,r'] + {}^{l}r' - {}^{l'}r)$$

braketi altında $\mathfrak{L} \rtimes R$ bir $\boldsymbol{k}$-cebirdir. Ayrıca $\mathfrak{L} \rtimes R$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir. Çünkü $\mathfrak{L} \rtimes R$, $\mathfrak{L}$ ve R, A-modüllerinin direkt toplamı olduğundan $\mathfrak{L} \rtimes R$ bir A-modül ve

$$a(l,r) = (al, ar)$$

dır. Aynı zamanda $\widetilde{\alpha} : \mathfrak{L} \rtimes R \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ fonksiyonu A-modül homomorfizmi ve Lie A-cebir homomorfizmidir. Çünkü;

i). $(l,r),(l',r') \in \mathfrak{L} \rtimes R$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}[(l,r),(l',r')] &= \widetilde{\alpha}([l,l'],[r,r'] + {}^{l}r' - {}^{l'}r) \\
&= \alpha([l,l']) \\
&= [\alpha(l),\alpha(l')] \quad (\because \alpha \text{ Lie } A\text{-cebir homomorfizmi}) \\
&= [\widetilde{\alpha}(l,r),\widetilde{\alpha}(l',r')]
\end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{\alpha}$ bir Lie A-cebir homomorfizmidir.

ii). $(l,r),(l',r') \in \mathfrak{L} \rtimes R$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}((l,r)+(l',r')) &= \widetilde{\alpha}(l+l', r+r') \\
&= \alpha(l+l') \\
&= \alpha(l)+\alpha(l') \quad (\because \alpha,\ A\text{-modül homomorfizmi}) \\
&= \widetilde{\alpha}(l,r)+\widetilde{\alpha}(l',r')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}(a(l,r)) &= \widetilde{\alpha}(al,ar)\\ &= \alpha(al)\\ &= a\alpha(l)\ \ (\because \alpha\ A\text{-modül homomorfizmi})\\ &= a\widetilde{\alpha}(l,r)\end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{\alpha}$ bir A-modül homomorfizmidir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}[(l,r),a(l',r')] &= [(l,r),(al',ar')]\\ &= ([l,al'],[r,ar']+^{l}(ar')-^{al'}r)\\ &= (a[l,l']+l(a)l',a[r,r']+a(^{l}r')+l(a)r'-a(^{l'}r))\\ &= a([l,l'],[r,r']+^{l}r'-^{l'}r)+(l(a)l',l(a)r')\\ &= a[(l,r),(l',r')]+l(a)(l',r')\end{aligned}$$

dir. Diğer bir ifadeyle

$$\begin{aligned}[(l,r),a(l',r')] &= a[(l,r),(l',r')]+(\widetilde{\alpha}(l,r))(a)(l',r')\\ &= a[(l,r),(l',r')]+(\alpha(l))(a)(l',r')\end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{L}\rtimes R$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir.

Örnek 2.6 $\partial:\mathfrak{L}\longrightarrow\mathfrak{L}'$ bir Lie-Rinehart cebir homomorfizması olsun. Bu durumda Gör(∂) bir Lie-Rinehart A-cebirdir. Çünkü;

$x',y'\in$Gör(∂) olsun. Bu durumda $\partial(x)=x'$ ve $\partial(y)=y'$ olacak şekilde $x,y\in\mathfrak{L}$ vardır. Her $a\in A$ için

$$\begin{aligned}[x',ay'] &= [\partial(x),a\partial(y)]\\ &= [\partial(x),\partial(ay)]\\ &= \partial([x,ay])\\ &= \partial(a[x,y]+(\alpha(x))(a)y)\\ &= \partial(a[x,y])+\partial((\alpha(x))(a)y)\\ &= a(\partial[x,y])+((\alpha(x))(a))(\partial(y))\\ &= a([\partial(x),\partial(y)])+((\alpha(x))(a))(\partial(y))\\ &= a([x',y'])+((\alpha(x))(a))(y')\\ &= a([x',y'])+((\alpha'\partial(x))(a))(y')\\ &= a[x',y']+((\alpha'(x'))(a))(y')\end{aligned}$$

olup Gör(∂) bir Lie-Rinehart A-cebirdir.

2.3 Lie-Rinehart Çaprazlanmış Modüller

Öncelikle değişmeli cebirler ve Lie cebirleri için çaprazlanmış modül kavramını hatırlayalım.

Tanım 2.7 C bir R-cebir olsun.

$$\begin{array}{ccc} R\times C & \longrightarrow & C\\ (r,c) & \longmapsto & r\cdot c\end{array}$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere

$$\partial : C \longrightarrow R$$

R-cebirlerin morfizmi, her $c, c' \in C$ için

$$\partial(c) \cdot c' = cc'$$

şartını sağlıyor ise $\mathfrak{X}$=(C, R, ∂) üçlüsüne $(\text{veya } \partial : C \to R)$ bir **çaprazlanmış** R**-modül** denir. Bu şart Peiffer şartı olarak adlandırılır.

Uyarı 2.8 $\partial : C \to R$, R-cebirlerin morfizmi olduğundan her $r \in R$ ve $c \in C$ için

$$\partial(r \cdot c) = r \partial c$$

şartını sağlaması gerekir. Bu şart ön çaprazlanmış modül şartı olarak adlandırılır.

Örnek 2.7 M herhangi bir R-modül olsun.

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \longrightarrow & M \\ (m_1, m_2) & \longmapsto & m_1 m_2 = 0 \end{array}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} \partial = 0 : & M & \longrightarrow & R \\ & m & \longmapsto & \partial(m) = 0 \end{array}$$

şeklinde verilen sıfır homomorfizmi,

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r, m) & \longmapsto & r \cdot m = rm \end{array}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 2.9 $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül ve $\partial' : C' \to R'$çaprazlanmış R'-modül olsun.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "\varphi \times \theta"] \arrow[d] & R' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları gözönüne alındığında

$$\begin{tikzcd}
(r,c) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\varphi(r),\theta(c)) \arrow[d, mapsto] \\
r\cdot c \arrow[r, mapsto] & \theta(r\cdot c)=\varphi(r)\cdot\theta(c)
\end{tikzcd}$$

olup

$$\theta(r\cdot c)=\varphi(r)\cdot\theta(c)$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\theta,\varphi\right):(C,R,\partial)\longrightarrow\left(C',R',\partial'\right)$$

homomorfizm çiftine, **çaprazlanmış modül morfizmi** denir. Bununla birlikte kompozisyon

$$(\theta,\varphi)\circ\left(\theta',\varphi'\right)=\left(\theta'\circ\theta,\varphi'\circ\varphi\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda **k**, sabit halkası için değişmeli **k**-cebir **k-Ceb** (veya **Ceb**) kategorisinde, çaprazlanmış R-modüller kategorisini tanımlayabiliriz. Bu kategoriyi $\mathbf{XMod_k}$ (veya **XMod**) ile göstereceğiz.

Tanım 2.10 M ve S iki Lie **k**-cebir olsun.

$$\mu\quad:\quad M\quad\longrightarrow\quad S$$

bir Lie **k**-cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{ccc} S\times M & \longrightarrow & M \\ (s,m) & \longmapsto & s\cdot m \end{array}$$

S nin M üzerine Lie etkisi ile birlikte her $m,m'\in M$ ve $s,s'\in S$ için

ÇM1). $\mu(s\cdot m)=[s,\mu(m)]$

ÇM2). $\mu(m)\cdot m'=[m,m']$

şartları sağlanıyor ise (M,S,μ) üçlüsüne **Lie çaprazlanmış modül** denir.

Örnek 2.8 R bir Lie A-cebir ve I,R nin bir ideali olsun.

$$\begin{array}{cccc} \partial: & I & \longrightarrow & R \\ & i & \longmapsto & i \end{array}$$

içine dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} R\times I & \longrightarrow & I \\ (r,i) & \longmapsto & r\,i=[r,i] \end{array}$$

şeklinde Lie çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

ÇM1). $\partial(r\cdot i)=\partial[r,i]=[r,i]=[r,\partial i]$

ÇM2). $\partial(r)\cdot r'=rr'=[r,r']$

olduğundan (I,R,∂) bir Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 2.11 (M,S,μ) ve (M',S',μ') iki Lie çaprazlanmış modül olsun.

$$f(s\cdot m)=\phi(s)\cdot f(m)$$

ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & M' \arrow[d, "\mu'"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\mu' f(m)=\phi\mu(m)$$

olacak şekilde $f:M\to M',\phi:S\longrightarrow S'$ Lie **k**-cebir morfizmleri varsa

$$(f,\phi):(M,S,\mu)\longrightarrow(M',S',\mu')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir. Böylece çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulur ve bu kategori $LXMod(\mathbf{k})$ ile gösterilir.

Tanım 2.12 $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir ve R bir Lie A-cebir olsun. Eğer $\mathfrak{L}$ nin R üzerine etkisiyle birlikte

$$\partial:R\longrightarrow\mathfrak{L}$$

Lie $\boldsymbol{k}$-cebir homomorfizmi her $r,r'\in R$, $l\in\mathfrak{L}$ ve $a\in A$ için

1. $\partial({}^{l}r)=[l,\partial(r)]$

2. ${}^{\partial(r')}r=[r',r]$

3. $\partial(ar)=a\partial(r)$

4. $\partial(r)(a)=0$

şartlarını sağlıyorsa ∂ ya **Lie-Rinehart A-cebir çaprazlanmış modülü** denir.(1) ve (2) şartına göre

$$\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$$

bir Lie $\boldsymbol{k}$-cebir çaprazlanmış modüldür. (3) şartına göre ∂, bir A-modül fonksiyonudur. (4) şartına göre ise,

$$R \xrightarrow{\partial} \mathfrak{L} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}(A)$$

fonksiyonunun bileşkesi sıfır fonksiyonudur. Çünkü $\partial(r) = l$ olarak alınırsa

$$\begin{array}{rcl} l(a) & = & \alpha(l)(a) \\ & & \alpha(\partial(r))(a) \\ & & ((\alpha\partial)(r))(a) \end{array}$$

dır.

Örnek 2.9 a). $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir, N bir A-modül ve alt Lie k-cebir olsun. N nin A üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccccccccc} N & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathfrak{L} & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Der}(A) & & \\ l & \longmapsto & i(l) = l & \longmapsto & \alpha(l) : A & \longrightarrow & A \\ & & & & a & \longmapsto & \alpha(l)(a) = l(a) \end{array}$$

olmak üzere N ye $\mathfrak{L}$ nin **alt Lie-Rinehart cebiri** denir.

b). $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir ve N, $\mathfrak{L}$ nin alt Lie-Rinehart cebiri olsun. Eğer N, $\mathfrak{L}$ nin (Lie k-cebir olarak) ideali ve

$$N \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{L} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}(A)$$

bileşkesi aşikar (trivial) ise N ye $\mathfrak{L}$ nin **ideali** denir ve $N \trianglelefteq \mathfrak{L}$ ile gösterilir.

$N \trianglelefteq \mathfrak{L}$ olmak üzere

$$i : N \longrightarrow \mathfrak{L}$$

içine dönüşümü ve

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L} \times N & \longrightarrow & N \\ (l, n) & \longmapsto & {}^{l}n = [l, n] \end{array}$$

etkisiyle birlikte $(N, \mathfrak{L}, i)$ üçlüsü çaprazlanmış modüldür. Çünkü; $l \in \mathfrak{L}$, $n, n' \in N$ ve $a \in A$ için

ÇM 1).

$$\begin{array}{rcl} i({}^{l}n) & = & {}^{l}n \\ & = & [l, n] \\ & = & [l, i(n)] \end{array}$$

dır.

ÇM 2).

$$\begin{aligned} {}^{i(n')}n &= {}^{n'}n \\ &= [n', n] \end{aligned}$$

dır.

ÇM 3).

$$\begin{aligned} i(an) &= an \\ &= ai(n) \end{aligned}$$

dır.

ÇM 4). N, $\mathcal{L}$ nin bir ideali olduğundan

$$N \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}(A)$$

bileşkesi aşikar, yani $\alpha i = 0$ dır. Dolayısıyla $(\alpha i)(n) = 0$ olur.

Özel olarak $N = \mathcal{L}$ durumunda $\mathcal{L}$ bir Lie k-cebirdir. Fakat Lie A-cebir değildir. Bu durumda

$$i : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

bir çaprazlanmış modül değildir.

Tersine;

Teorem 2.13 $\partial : R \longrightarrow \mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\text{Gör}(\partial) \trianglelefteq \mathcal{L}$ dir.

İspat. $r' \in \text{Gör}(\partial)$ ve $l \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda $r' = \partial r$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

$$[l, r'] = [l, \partial r] = \partial [l, r]$$

ve $(R, \mathcal{L}, \partial)$ çaprazlanmış modül olduğundan $\partial [l, r] \in \text{Gör}(\partial)$ dir. Bu durumda $\text{Gör}(\partial) \trianglelefteq \mathcal{L}$ olur. □

Örnek 2.10 R bir $(\mathcal{L}, A)$-modül olsun. Bu durumda $0 : R \longrightarrow \mathcal{L}$ bir çaprazlanmış modüldür.

R bir $(\mathcal{L}, A)$-modül olduğundan R değişmeli Lie A-cebirdir. Yani her $r, r' \in R$ için $[r, r'] = 0$ dır. Üstelik $\mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir. Ayrıca

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} \times R & \longrightarrow & R \\ (l, r) & \longmapsto & {}^{l}r = [l, r] \end{array}$$

etkisi vardır. O halde $l \in \mathcal{L}$, $r, r' \in R$ ve $a \in A$ için

ÇM 1).

$$\begin{aligned} 0({}^{l}r) &= 0 \\ &= [l, 0] \\ &= [l, 0(r)] \end{aligned}$$

dır.

ÇM 2).

$$\begin{aligned} {}^{0(r')}r &= {}^{0}r \\ &= [0, r] \\ &= 0 \\ &= [r, r'] \quad (\because R \text{ değişmeli Lie } A\text{-cebirdir}) \end{aligned}$$

dır.

ÇM 3).

$$\begin{aligned} 0(ar) &= 0 \\ &= a0 \\ &= a0(r) \end{aligned}$$

dır.

ÇM 4).

$$\begin{aligned} 0(r)(a) &= 0(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Tersine;

Teorem 2.14 $\partial : R \longrightarrow \mathcal{L}$ bir çaprazlanmış modül ve $I = \partial(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Çek$(\partial) \trianglelefteq R$
ii) Çek(∂), $\mathcal{L}/I$-modüldür
iii) R/R^2 ve I/I^2, $\mathcal{L}/I$-modüldür

İspat. i) $c \in$Çek(∂) ve $r \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \partial[r, c] &= [\partial(r), \partial(c)] \\ &= [\partial(r), 0] \quad (\because c \in \text{Çek}(\partial) \text{ olduğundan } \partial(c) = 0 \text{ dır}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $[r, c] \in$ Çek(∂) dir. O halde Çek$(\partial) \trianglelefteq R$ olur.

ii) $l, l' \in \mathcal{L}$ için

$$[l+I, l'+I] = [l, l'] + I$$

braket işlemiyle birlikte $\mathcal{L}/I$ nın Lie **k**-cebir olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathcal{L}/I & \longrightarrow & \mathcal{L}/I \\ (a, l+I) & \longmapsto & al + I \end{array}$$

etkisi altında $\mathcal{L}/I$, A-modüldür. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\alpha} : \mathcal{L}/I & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ l+I & \longmapsto & \widetilde{\alpha}(l+I) = \alpha(l) \end{array}$$

anchor dönüşümü ile $\mathcal{L}/I$ Lie-Rinehart A-cebirdir. Çek(∂) ın $\mathcal{L}/I$-modül olduğunu göstermeye yardımcı olması için $r \in R$, $a \in$ Çek(∂) ve $l = \partial(r)$ için

$$\begin{array}{lcl} I \times \text{Çek}(\partial) & \longrightarrow & \text{Çek}(\partial) \\ (l, a) & \longmapsto & l \cdot a \end{array}$$

etkisini

$$\begin{array}{rcl} l \cdot a & = & \partial(r) \cdot a \\ & = & [r, a] \quad (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = & \partial(a) \cdot r \quad (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = & 0 \cdot r \\ & = & 0 \end{array}$$

olarak tanımlayalım. Böylece yukarıda verilen etkinin, I nın Çek(∂) üzerine sıfır etkisi olduğu gösterilmiş olur. Bu etki yardımıyla $\mathcal{L}/I$ nın Çek(∂) üzerine etkisi

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}/I \times \text{Çek}(\partial) & \longrightarrow & \text{Çek}(\partial) \\ (l+I, a) & \longmapsto & (l+I) \cdot a = l \cdot a \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda Çek(∂) nin $\mathcal{L}/I$-modül olduğu açıktır.

iii) (ii) ye benzer şekilde gösterilebilir. □

Örnek 2.11 $\mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir, R ve R' iki Lie A-cebir olsun. $\theta : R \longrightarrow R'$ bir $(\mathcal{L}, A)$-modül homomorfizması ve $\mathcal{L} \rtimes R'$, $\mathcal{L}$ ve R' nün yarıdirekt çarpımı olmak üzere Örnek 1.2 gereğince $\mathcal{L} \rtimes R'$ bir Lie-Rinehart A-cebirdir. Bu durumda $\mathcal{L} \rtimes R'$ nün R' üzerine her $l \in \mathcal{L}$, $r \in R$ ve $r' \in R'$ için

$$^{(l,r')}r = {}^{l}\, r$$

şeklindeki etkisi ve

$$\begin{array}{rccl} \partial : & R & \longrightarrow & \mathcal{L} \rtimes R' \\ & r & \longmapsto & \partial(r) = (0, \theta(r)) \end{array}$$

homomorfizması ile birlikte $(R, \mathcal{L} \rtimes R', \partial)$ üçlüsü Lie-Rinehart çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.12 $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ bir Lie-Rinehart homomorfizması ise Çek$f \hookrightarrow \mathcal{L}$ bir çaprazlanmış modüldür. Çünkü genel olarak; $N \trianglelefteq \mathcal{L}$ olmak üzere

$$N \hookrightarrow \mathcal{L}$$

dönüşümünün çaprazlanmış modül olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan Çek$f \trianglelefteq \mathcal{L}$ olduğundan özel olarak $N =$Çek$f$ alınırsa

$$\text{Çek} f \hookrightarrow \mathcal{L}$$

bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 2.13 $\mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} \partial : \text{Çek}\alpha & \longrightarrow & DO(A, \mathcal{L}, \text{Çek}\alpha) \\ r & \longmapsto & \partial(r) = (ad_r, 0) \end{array}$$

işlemi ve

$$\begin{array}{rcl} DO(A, \mathcal{L}, \text{Çek}\alpha) \times \text{Çek}\alpha & \longrightarrow & \text{Çek}\alpha \\ ((d,l), r) & \longmapsto & {}^{(d,l)}r = [(d,l), r] = d(r) \end{array}$$

etkisiyle birlikte (Çekα, $DO(A, \mathcal{L}$, Çek$\alpha), \partial$) üçlüsü çaprazlanmış modüldür. $\mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir olduğundan

$$\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \text{Der}(A)$$

anchor dönüşümü vardır. Ayrıca $DO(A, \mathcal{L}$, Çek$\alpha)$ yapısının özelliğinden dolayı

$$d : \text{Çek}\alpha \longrightarrow \text{Çek}\alpha$$

dönüşümü $a \in A$, $r, r' \in R$, $l \in \mathcal{L}$ için

$$\begin{aligned} d(ar) &= ad(r) + l(a)r \\ d(rr') &= d(r)r' + rd(r') \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Son olarak $ad_l(r) = [l, r]$ olarak alınmaktadır. Önce ispata yardımcı olması bakımından aşağıdaki eşitliği verelim.

$$\begin{aligned} [d, ad_r](r') &= (d(ad_r) - (ad_r) - d)(r') \\ &= d(ad_r(r')) - ad_r(d(r')) \\ &= d[r, r'] - [r, d(r')] \\ &= d(rr' - r'r) - rd(r') + d(r')r \\ &= d(rr') - d(r'r) - rd(r') + d(r')r \\ &= rd(r') + d(r)r' - r'd(r) - d(r')r - rd(r') + d(r')r \\ &= d(r)r' - r'd(r) \\ &= [d(r), r'] \\ &= ad_{d(r)}(r') \end{aligned}$$

dır.

ÇM 1).

$$\begin{array}{rcl} \partial({}^{(d,l)}r) & = & \partial(d(r)) \\ & = & (ad_{d(r)},0) \\ & = & ([d,ad_r],0) \\ & = & ([d,ad_r],[l,0]) \\ & = & [(d,l),(ad_r,0)] \\ & = & [(d,l),\partial(r)] \end{array}$$

dır.

ÇM 2).

$$\begin{array}{rcl} {}^{\partial(r')}r & = & {}^{(ad_{r'},0)}r \\ & = & [(ad_{r'},0),r] \\ & = & ad_{r'}(r) \\ & = & [r',r] \end{array}$$

dır.

ÇM 3). $b\in A$ için

$$\begin{array}{rcl} \partial(br)(r') & = & (ad_{br},0)(r') \\ & = & (ad_{br}(r'),0(r')) \\ & = & ([br,r'],0) \\ & = & (b[r,r'],0) \\ & = & b([r,r'],0) \\ & = & b(ad_r(r'),0(r')) \\ & = & b(ad_r,0)(r') \\ & = & b\partial(r)(r') \end{array}$$

dır.

ÇM 4).

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Çek}\alpha & \xrightarrow{\partial} & DO(A,\mathcal{L},\text{Çek}\alpha) & \xrightarrow{\alpha\pi} & \text{Der}(A) & & \\ r & \longmapsto & \partial(r) & \longmapsto & (\alpha\pi)\partial(r):A & \longrightarrow & A \\ & & & & a & \longmapsto & ((\alpha\pi)\partial(r))(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ((\alpha\pi)\partial(r))(a) & = & ((\alpha\pi)(ad_r,0))(a) \\ & = & (\alpha(\pi(ad_r,0)))(a) \\ & = & (\alpha(0))(a) \\ & = & 0 \end{array}$$

dır. Bu durumda $(\text{Çek}\alpha, DO(A,\mathcal{L},\text{Çek}\alpha),\partial)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 2.14 $\mathcal{L}$ bir Lie-Rinehart cebir olsun. $\mathcal{L}$ nin merkezi

$$Z(\mathcal{L})=\{l\in\mathcal{L}: \text{Her } l'\in\mathcal{L} \text{ için } [l,l']=0 \text{ ve her } a\in A \text{ için } l(a)=0\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durumda $Z(\mathcal{L})\trianglelefteq\mathcal{L}$ dir. Ayrıca $Z(\mathcal{L})$ bir Lie A-cebirdir. O halde

$$i:Z(\mathcal{L})\longrightarrow\mathcal{L}$$

bir çaprazlanmış modüldür.

2.3.1 Lie-Rinehart Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Tanım 2.15 $(R,\mathfrak{L},\partial)$ ve $(R',\mathfrak{L}',\partial')$ iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & R' \arrow[d, "\partial'"] \\ \mathfrak{L} \arrow[r, "\phi"'] & \mathfrak{L}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{L}\times R \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{L}'\times R' \arrow[d] \\ R \arrow[r] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli yani,

$$\partial' f(r) = \phi\partial(r) \text{ ve } f(l\cdot r) = \phi(l)\cdot f(r)$$

olacak şekilde bir

$$f : R \longrightarrow R'$$

Lie k-cebir homomorfizması ve

$$\phi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$$

Lie-Rinehart cebir homomorfizması varsa

$$(f,\phi) : (R,\mathfrak{L},\partial) \longrightarrow (R',\mathfrak{L}',\partial')$$

homomorfizmasına çaprazlanmış modüller arasındaki homomorfizma denir.

Bu tanım yardımıyla Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulur ve bu kategori $\mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$ ile gösterilir. Şimdi bu kategorinin bazı temel funktoriyel özelliklerini verelim. Forgetful (unutulabilir) funktorların

$$\begin{array}{rccc} U_1 : & \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}\mathcal{R}(A) \\ & (R,\mathfrak{L},\partial) & \longmapsto & \mathfrak{L} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} U_2 : & \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(A) \\ & (R,\mathfrak{L},\partial) & \longmapsto & R \end{array}$$

şeklinde tanımlandığı açıktır. $\mathfrak{LXmod}(k)$, Lie k cebirlerin çaprazlanmış modüller kategorisini göstermek üzere forgetful funktor A-modül yapısı unutularak

$$\begin{array}{rccc} U_3 : & \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) & \longrightarrow & \mathfrak{LXmod}(k) \\ & (R,\mathfrak{L},\partial) & \longmapsto & \mathfrak{L} \end{array}$$

şeklinde elde edilir.

Uyarı 2.16 **1).** $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}'$ iki Lie-Rinehart A-cebir, $f, g : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ Lie-Rinehart cebir homomorfizmileri ve Çek$(\alpha') = 0$ olsun. Bu durumda $f = g$ dir. Çünkü

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathcal{L}' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd}$$

her $l \in \mathcal{L}$ için

$$\begin{aligned} \alpha'(f(l) - g(l)) &= \alpha' f(l) - \alpha' g(l) \\ &= \alpha f(l) - \alpha g(l) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. O halde $f(l) - g(l) \in$Çek(α') olup $f = g$ elde edilir.

Özel olarak $I \trianglelefteq \mathrm{Der}(A)$, $(R, \mathrm{Der}(A), \partial)$ bir çaprazlanmış modül ve

$$\partial' = i : I \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$$

içine dönüşümü alınırsa i birebir olduğundan Çek$(\partial') = 0$ olup

$$f : (R, \mathrm{Der}(A), \partial) \longrightarrow (I, \mathrm{Der}(A), i)$$

şeklinde biricik çaprazlanmış modül homomorfizması vardır.

2). R bir Lie A-cebir olsun. Eğer

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha=0"'] & & Der(A) \arrow[dl, "\alpha'=Id_R"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise $f = 0$ dır. Ayrıca Çek$(\partial') = 0$ olduğundan f biriciktir.

3). R bir Lie A-cebir olsun. Eğer

$$\begin{tikzcd} Der(A) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Id_R"'] & & R \arrow[dl, "\partial"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise $\partial(R) = \mathrm{Der}(A)$ olup ∂ örtendir.

2.4 Serbest Çaprazlanmış Modüller

Tanım 2.17 $(C,\mathfrak{L},\partial)$ bir Lie-Rinehart çaprazlanmış modül, X bir küme ve $f : X \longrightarrow \mathfrak{L}$ bir fonksiyon olsun. $\partial g = f$ olacak biçimde bir

$$g : X \longrightarrow C$$

varsa ve herhangi bir $(C',\mathfrak{L},\partial')$ Lie-Rinehart çaprazlanmış modülü ve $\partial g = \partial' g'$ olacak biçimde herhangi

$$g' : X \longrightarrow C'$$

fonksiyonu için $wg = g'$ olacak biçimde bir tek

$$w : (C,\mathfrak{L},\partial) \longrightarrow (C',\mathfrak{L},\partial')$$

var ve

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] \arrow[dd, "f"] & \\
C \arrow[rr, dashed, "w"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\
 & \mathfrak{L} &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise $(C,\mathfrak{L},\partial)$ ya $(X,\mathfrak{L},f)$ üzerinde serbest Lie-Rinehart çaprazlanmış modül denir.

BÖLÜM 3

$\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ nin Kategoriksel Yapısı

3.1 Giriş

Bu bölümde Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisinin özellikleri incelenerek bu kategoride geriçekme, sonlu çarpımlar, sonlu limitler, koçarpımlar, kolimitler ve ileri itmelerin varlığı gösterilecektir. Benzer çalışma Shammu (1992) tarafından değişmeli cebirler için yapılmıştır. Fakat varlığı araştırılan objelerin bazıları Lie-Rinehart durumu için farklı bir yapıya sahiptir.

3.2 Lie-Rinehart Çaprazlanmış Modüller Kategorisinin Özellikleri

$\mathfrak{L}$ bir sabit Lie-Rinehart cebir olsun. Tabanı $\mathfrak{L}$ olan tüm Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisini $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ ile göstereceğiz. Ayrıca $(X,\mathfrak{L},\partial)$ Lie-Rinehart çaprazlanmış modülünü çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül olarak adlandırıp (X,∂) ile göstereceğiz.

Teorem 3.1 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ de aynı tanım ve görüntü kümesine sahip her morfizma çifti bir eşitleyiciye sahiptir.

İspat. $f,g:(C,\partial)\longrightarrow(D,\delta)$ iki çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül homomorfizması olsun.

$$E=\{c\in C: f(c)=g(c)\}$$

olmak üzere

$$\partial|_E=\varepsilon:E\longrightarrow\mathfrak{L}$$

dönüşümü bir çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modüldür. Bunu göstermek için önce E nin bir Lie A-cebir olduğunu gösterelim. $c\in C$ ve $e\in E$ için

$$\begin{aligned} f([c,e]) &= f({}^{\partial c}e)\\ &= {}^{\partial c}f(e)\\ &= {}^{\partial c}g(e)\\ &= g({}^{\partial c}e)\\ &= g([c,e]) \end{aligned}$$

olduğundan $[c,e] \in E$ elde edilir. Sonuç olarak E bir Lie A-cebirdir. Şimdi $\mathcal{L}$ nin E üzerinde bir Lie-Rinehart etkisi olduğunu gösterelim. $\mathcal{L}$ nin E üzerine etkisini, $\mathcal{L}$ nin C üzerine etkisi yardımıyla tanımlayalım. $l \in \mathcal{L}$ ve $e \in E$ için

$$\begin{aligned} f({}^l e) &= {}^l f(e) \quad (\because f : C \longrightarrow D \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül homomorfizması}) \\ &= {}^l g(e) \quad (\ e \in E \text{ dir}) \\ &= g({}^l e) \quad (\because g : C \longrightarrow D \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül homomorfizması}) \end{aligned}$$

olduğundan ${}^l e \in E$ dir. Böylece $\mathcal{L}$ nin E üzerine etkisi tanımlanmış olur. O halde (E,ε) bir Lie-Rinehart çaprazlanmış modüldür. Böylece

$$i : E \longrightarrow C$$

içine dönüşümü olmak üzere

$$i : (E,\varepsilon) \longrightarrow (C,\partial)$$

$\mathfrak{XMod}/\mathcal{L}$ de bir morfizmadır. Diğer taraftan

$$k : (E',\varepsilon') \longrightarrow (C,\partial)$$

$fk = gk$ olacak biçimde $\mathfrak{XMod}/\mathcal{L}$ de bir morfizma olsun. Her $x \in E'$ için $k(x) \in E$ ise $k(E') \subseteq E$ dir. Dolayısıyla E' den E ye bir dönüşüm vardır.

$\gamma, h : E' \longrightarrow E$ morfizmaları $i\gamma = k$ ve $ih = k$ şartlarını sağlasın. $x \in E'$ için $ih(x) = k(x)$ olup $h(x) = k(x)$ ve $i\gamma(x) = k(x)$ olduğundan $\gamma(x) = k(x)$ olup $h(x) = \gamma(x)$ olur. Yani bu morfizma biriciktir. □

Teorem 3.2 $\mathfrak{XMod}/\mathcal{L}$ kategorisi geri çekmelere sahiptir.

İspat. $f : (C,\partial) \longrightarrow (B,\beta)$ ve $g : (D,\delta) \longrightarrow (B,\beta)$ iki çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül morfizması ve

$$X = C \underset{B}{\times} D = \{(c,d) : f(c) = g(d)\}$$

olsun. X üzerindeki Lie çarpımı her $(x_1,x_2),(x_3,x_4) \in X$ için

$$[(x_1,x_2),(x_3,x_4)] = ([x_1,x_3],[x_2,x_4])$$

bileşensel çarpım olarak tanımlansın. Bu durumda her $(c,d) \in C \times D$ ve $(x_1,x_2) \in X$ için

$$[(c,d),(x_1,x_2)] = ([c,x_1],[d,x_2])$$

olduğundan bir önceki teorem kullanılarak

$$f([c,x_1]) = g([d,x_2])$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca

$$\begin{array}{rccl}\lambda: & X & \longrightarrow & B \\ & (c,d) & \longmapsto & f(c)=g(d)\end{array}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\lambda(k(c,d)) &= \lambda((kc,kd)) \\ &= f(kc) \\ &= kf(c) \\ &= k(\lambda(c,d))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda[(c,d),(c',d')] &= \lambda([c,c'],[d,d']) \\ &= f([c,c']) \\ &= [f(c),f(c')] \\ &= [\lambda(c,d),\lambda(c',d')]\end{aligned}$$

olduğundan λ dönüşümü Lie cebir homomorfizmasıdır. Aynı zamanda her $l \in \mathfrak{L}$ ve $(c,d) \in X$ için

$$\begin{array}{ccl}\mathfrak{L}\times X & \longrightarrow & X \\ (l,(c,d)) & \longmapsto & {}^{l}(c,d)=({}^{l}c,{}^{l}d)\end{array}$$

şeklinde tanımlanan işlemin $\mathfrak{L}$ nin X üzerinde Lie-Rinehart etkisi olduğunu gösterelim.

E1). Her $l,l' \in \mathfrak{L}$ ve $(c,d) \in X$ için

$$\begin{aligned}{}^{[l,l']}(c,d) &= ({}^{[l,l']}c,{}^{[l,l']}d) \\ &= ({}^{l}({}^{l'}c)-{}^{l'}({}^{l}c),{}^{l}({}^{l'}d)-{}^{l'}({}^{l}d)) \\ &= ({}^{l}({}^{l'}c),{}^{l}({}^{l'}d))-({}^{l'}({}^{l}c),{}^{l'}({}^{l}d)) \\ &= {}^{l}(({}^{l'}c),({}^{l'}d))-{}^{l'}(({}^{l}c),({}^{l}d)) \\ &= {}^{l}({}^{l'}(c,d))-{}^{l'}({}^{l}(c,d))\end{aligned}$$

dır.

E2). Her $l \in \mathfrak{L}$ ve $(c,d),(c',d') \in X$ için

$$\begin{aligned}{}^{l}[(c,d),(c',d')] &= {}^{l}([c,c'],[d,d']) \\ &= ({}^{l}[c,c'],{}^{l}[d,d']) \\ &= ([{}^{l}c,c']+[c,{}^{l}c'],[{}^{l}d,d']+[d,{}^{l}d']) \\ &= ([{}^{l}c,c'],[{}^{l}d,d'])+([c,{}^{l}c'],[d,{}^{l}d']) \\ &= [({}^{l}c,{}^{l}d),(c',d')]+[(c,d),({}^{l}c',{}^{l}d')] \\ &= [{}^{l}(c,d),(c',d')]+[(c,d),{}^{l}(c',d')]\end{aligned}$$

dır.

E3). Her $l \in \mathfrak{L}$, $(c,d) \in X$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned}{}^{al}(c,d) &= ({}^{al}c,{}^{al}d) \\ &= (a({}^{l}c),a({}^{l}d)) \\ &= a({}^{l}c,{}^{l}d) \\ &= a({}^{l}(c,d))\end{aligned}$$

dır.

E4). $\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ anchor dönüşümü ve her $l \in \mathcal{L}$, $(c,d) \in X$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned}
{}^{l}(a(c,d)) &= {}^{l}(ac,ad) \\
&= ({}^{l}(ac),{}^{l}(ad)) \\
&= (a({}^{l}c)+((\alpha(l))(a))c, a({}^{l}d)+((\alpha(l))(a))d) \\
&= (a({}^{l}c), a({}^{l}d))+(((\alpha(l))(a))c, ((\alpha(l))(a))d) \\
&= a({}^{l}c,{}^{l}d)+(((\alpha(l))(a))c, ((\alpha(l))(a))d) \\
&= a({}^{l}c,{}^{l}d)+((\alpha(l))(a))(c,d) \\
&= a({}^{l}(c,d))+((\alpha(l))(a))(c,d)
\end{aligned}$$

dır. Böylece tanımlanan etki $\mathcal{L}$ nin X üzerine bir Lie-Rinehart etkisidir. $\beta\lambda = \varphi : X \longrightarrow \mathcal{L}$ dönüşümünün Lie-Rinehart çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\lambda"] & C \arrow[d, "f"] & \\
D \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

ÇM1). Her $l \in \mathcal{L}$ ve $(c,d) \in X$ için

$$\begin{aligned}
\varphi({}^{l}(c,d)) &= \beta\lambda({}^{l}(c,d)) \\
&= \beta(\lambda({}^{l}c,{}^{l}d)) \\
&= \beta(f({}^{l}c)) \\
&= \beta({}^{l}f(c)) \quad (\because f \text{ homomorfizma}) \\
&= [l,\beta(f(c))] \quad (\because B \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\
&= [l,\beta\lambda(c,d)] \\
&= [l,\varphi(c,d)]
\end{aligned}$$

dır.

ÇM2). $f : (C,\partial) \longrightarrow (B,\beta)$ ve $g : (D,\delta) \longrightarrow (B,\beta)$ iki çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül homomorfizması olduğundan

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{L} \arrow[r, "Id"'] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{L} \arrow[r, "Id"'] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli yani $\beta f = \partial$ ve $\beta g = \delta$ dır. O halde her $(c,d),(c',d') \in X$ için

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi(c,d)}(c',d') &= {}^{\beta\lambda(c,d)}(c',d') \\
&= {}^{\beta f(c)}(c',d') \\
&= ({}^{\beta f(c)}c', {}^{\beta f(c)}d') \quad (\because \text{etki tanımı}) \\
&= ({}^{\partial(c)}c', {}^{\beta g(d)}d') \quad (\because f(c)=g(d)) \\
&= ({}^{\partial(c)}c', {}^{\delta(d)}d') \\
&= ([c,c'],[d,d']) \quad (\because C \xrightarrow{\partial} \mathcal{L} \text{ ve } D \xrightarrow{\delta} \mathcal{L} \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\
&= [(c,d),(c',d')]
\end{aligned}$$

dır.

ÇM3). Her $a \in A$ ve $(c,d) \in X$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(a(c,d)) &= \varphi(ac,ad) \\
&= \beta\lambda(ac,ad) \\
&= \beta f(ac) \\
&= \beta(af(c)) \quad (\because f, \text{homomorfizma}) \\
&= a\beta f(c) \quad (\because B \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\
&= a(\beta\lambda(c,d)) \\
&= a\varphi(c,d)
\end{aligned}$$

dır.

ÇM4). (B,β) çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül olduğundan çaprazlanmış modülün 4. şartı gereği

$$B \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}(A)$$

bileşkesi $\alpha\beta = 0$ dır. O halde her $a \in A$ ve $(c,d) \in X$ için

$$\begin{aligned}
(\varphi(c,d))(a) &= (\alpha(\varphi(c,d)))(a) \\
&= (\alpha(\beta\lambda(c,d)))(a) \\
&= (\alpha(\beta f(c)))(a) \\
&= (\alpha\beta(f(c)))(a) \\
&= (0(f(c)))(a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak (X,φ) bir çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modüldür. Aynı zamanda $(c,d) \in X$ için $f(c)=g(d)$ olup

$$f(\pi_1(c,d)) = f(c) = g(d) = g(\pi_2(c,d))$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Diğer taraftan π'_1, π'_2 morfizmleri ve (X', φ') çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modülü ile birlikte

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi'_1"] \arrow[d, "\pi'_2"'] & C \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $f\pi'_1 = g\pi'_2$ olsun. Bu durumda her $x \in X'$ için

$$f(\pi'_1(x)) = g(\pi'_2(x))$$

olup $(\pi'_1(x), \pi'_2(x)) \in X$ elde edilir. Bu bağlamda

$$\begin{array}{rccl} h: & X' & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & (\pi'_1(x), \pi'_2(x)) \end{array}$$

olarak tanımlayalım. $\pi'_1 = \pi_1 h$ ve $\pi'_2 = \pi_2 h$ olup

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi'_1"'] & & X \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi'_2"'] & & X \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmelidir. Benzer şekilde $h_0 : X' \longrightarrow X$ dönüşümü

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "h_0"] \arrow[dr, "\pi'_1"'] & & X \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "h_0"] \arrow[dr, "\pi'_2"'] & & X \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapsın ve $h(x) = (c, d)$, $h_0(x) = (c_0, d_0)$ olsun. Bu durumda her $x \in X'$ için

$$\begin{array}{rcl} \pi'_1(x) & = & \pi_1 h(x) \\ & = & \pi_1(c, d) \\ & = & c \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} \pi'_2(x) & = & \pi_2 h(x) \\ & = & \pi_2(c, d) \\ & = & d \end{array} \qquad (*)$$

$$\begin{array}{rcl} \pi'_1(x) & = & \pi_1 h_0(x) \\ & = & \pi_1(c_0, d_0) \\ & = & c_0 \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} \pi'_2(x) & = & \pi_2 h_0(x) \\ & = & \pi_2(c_0, d_0) \\ & = & d_0 \end{array} \qquad (**)$$

olup (*) ve (**) eşitliklerinden $c = c_0$ ve $d = d_0$ elde edilir. Yani

$$h(x) = (c, d) = (c_0, d_0) = h_0(x)$$

olup h biriciktir. Yukarıda tanımlanan morfizmleri diyagramatik olarak

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\pi_1'"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_2'"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& D \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

şeklinde ifade edebiliriz. □

Teorem 3.3 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisinde (Çekα, i) çaprazlanmış modülü bir son objedir.

İspat. Öncelikle α anchor dönüşüm olmak üzere, (C,∂) bir çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül ise $\alpha\partial = 0$ olduğundan Gör$\partial \subseteq$Çekα dır. f ve g, (C,∂) ile (Çekα, i) arasında

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\partial"'] & & \text{Çek}\alpha \arrow[dl, "i"] \\
& \mathfrak{L} &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde iki dönüşüm olsun. Bu durumda her $c \in C$ için

$$\begin{aligned} \partial(c) &= if(c) \\ &= f(c) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \partial(c) &= ig(c) \\ &= g(c) \end{aligned}$$

olup $f(c) = g(c)$ yani $f = g$ elde edilir. □

Teorem 3.4 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisinde sonlu çarpımlar mevcuttur.

İspat. (C,∂) ve (D,δ), $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisinde iki obje olsun. Bu iki objenin çarpımı (Çekα, i) terminal objesi üzerinde (C,∂) ve (D,δ) nin geri çekmesidir.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, dashed, "\lambda"] & C \arrow[d, "\partial"] & \\
D \arrow[r, "\delta"'] & \text{Çek}\alpha \arrow[r, "i"'] & \mathfrak{L}
\end{tikzcd}$$

$\lambda = \partial\pi_1 = \delta\pi_2$ olmak üzere $(X, i\lambda)$ objesi (C,∂) ve (D,δ) nin çarpımıdır. Tümevarım metodu ile $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ de sonlu çarpımların olduğu gösterilebilir. □

$\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisi sonlu çarpımlara ve eşitleyiciye sahip olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.5 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisi sonlu limite sahiptir yani sonlu tamdır (finitely complete).

Teorem 3.6 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisinde aynı tanım ve görüntü kümesine sahip her çaprazlanmış modül homomorfizma çifti bir koeşitleyiciye sahiptir.

İspat. $f,g:(C,\partial)\longrightarrow(B,\beta)$ iki çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül morfizması ve I, B nin $c\in C$ için $f(c)-g(c)$ formundaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olsun. Yani I, $\{f(c)-g(c): c\in C\}$ alt kümesini içeren en küçük ideali olsun. Her $c\in C$ için

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\partial"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\
& \mathfrak{L} &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\beta f(c)=\partial(c)$ ve $\beta g(c)=\partial(c)$ dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\beta(f(c)-g(c)) &= \beta(f(c))-\beta(g(c)) \\
&= \partial(c)-\partial(c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $f(c)-g(c)\in$Çekβ, yani $I\subseteq$Çekβ elde edilir. $\overline{B}=B/I$ Lie-Rinehart cebirini alalım. $\mathfrak{L}$ nin $\overline{B}$ üzerine etkisi $l\in\mathfrak{L}$ ve $b+I\in\overline{B}$ için

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{L}\times\overline{B} & \longrightarrow & \overline{B} \\
(l,b+I) & \longmapsto & {}^{l}(b+I)={}^{l}b+I
\end{array}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Öncelikle bu etkinin bir Lie-Rinehart etkisi olduğunu gösterelim.

E1). Her $l,l'\in\mathfrak{L}$ ve $b+I\in\overline{B}$ için

$$\begin{aligned}
{}^{[l,l']}(b+I) &= {}^{[l,l']}b+I \\
&= {}^{l}({}^{l'}b)-{}^{l'}({}^{l}b)+I \quad (\because \mathfrak{L} \text{ nin } B \text{ üzerine etkisi özelliği}) \\
&= {}^{l}({}^{l'}b)+I-({}^{l'}({}^{l}b)+I) \\
&= {}^{l}({}^{l'}b+I)-({}^{l'}({}^{l}b+I)) \\
&= {}^{l}({}^{l'}(b+I))-({}^{l'}({}^{l}(b+I))
\end{aligned}$$

dır.

E2). Her $l\in\mathfrak{L}$ ve $b_1+I,b_2+I\in\overline{B}$ için

$$\begin{aligned}
{}^{l}([b_1+I,b_2+I]) &= {}^{l}([b_1,b_2]+I) \\
&= {}^{l}[b_1,b_2]+I \\
&= [{}^{l}b_1,b_2]+[b_1,{}^{l}b_2]+I \quad (\because \mathfrak{L} \text{ nin } B \text{ üzerine etkisi özelliği}) \\
&= [{}^{l}b_1+I,b_2+I]+[b_1+I,{}^{l}b_2+I] \\
&= [{}^{l}(b_1+I),b_2+I]+[b_1+I,{}^{l}(b_2+I)]
\end{aligned}$$

dır.

E3). Her $l \in \mathcal{L}$, $b+I \in \overline{B}$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} {}^{al}(b+I) & = & {}^{al}b+I \\ & = & a({}^{l}b)+I \quad (\because \mathcal{L} \text{ nin } B \text{ üzerine etkisi özelliği}) \\ & = & a({}^{l}b+I) \\ & = & a({}^{l}(b+I)) \end{array}$$

dır.

E4). $\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ anchor dönüşümü ve her $l \in \mathcal{L}$, $b+I \in \overline{B}$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} {}^{l}(a(b+I)) & = & {}^{l}(ab+I) \\ & = & {}^{l}(ab)+I \\ & = & a({}^{l}b)+((\alpha(l))(a))b+I \quad (\because \mathcal{L} \text{ nin } B \text{ üzerine etkisi özelliği}) \\ & = & a({}^{l}b)+((\alpha(l))(a))(b+I) \end{array}$$

olup yukarıda tanımlanan etki Lie-Rinehart etkisidir. Ayrıca

$$\begin{array}{rccc} \overline{\beta}: & \overline{B} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ & b+I & \longmapsto & \beta(b) \end{array}$$

şeklinde $\overline{\beta}$ dönüşümünü tanımlayalım. Şimdi bu dönüşüm yardımıyla $(\overline{B}, \overline{\beta})$ nın bir çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül olduğunu gösterelim.

ÇM1). Her $l \in \mathcal{L}$ ve $b+I \in \overline{B}$ için

$$\begin{array}{rcl} \overline{\beta}({}^{l}(b+I)) & = & \overline{\beta}({}^{l}b+I) \\ & = & \beta({}^{l}b) \\ & = & [l, \beta(b)] \quad (\because (B,\beta) \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\ & = & [l, \overline{\beta}(b+I)] \end{array}$$

dır.

ÇM2). Her $b_1+I, b_2+I \in \overline{B}$ için

$$\begin{array}{rcl} {}^{\overline{\beta}(b_1+I)}(b_2+I) & = & {}^{\beta(b_1)}(b_2+I) \\ & = & {}^{\beta(b_1)}(b_2)+I \\ & = & [b_1, b_2]+I \quad (\because (B,\beta) \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\ & = & [b_1+I, b_2+I] \end{array}$$

dır.

ÇM3). Her $b+I \in \overline{B}$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} \overline{\beta}(a(b+I)) & = & \overline{\beta}(ab+I) \\ & = & \beta(ab) \\ & = & a(\beta(b)) \quad (\because (B,\beta) \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\ & = & a(\overline{\beta}(b+I)) \end{array}$$

dır.

ÇM4). $\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ anchor dönüşümü ve her $b+I \in \overline{B}$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\beta}(b+I))(a) & = & (\alpha(\overline{\beta}(b+I)))(a) \\ & = & (\alpha(\beta(b)))(a) \\ & = & (\alpha\beta(b))(a) \\ & = & (0(b))(a) \quad (\because (B,\beta) \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\ & = & 0 \end{array}$$

dır. Böylece $(\overline{B},\overline{\beta})$ bir çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modüldür. Diğer taraftan

$$\begin{array}{rccc} p: & B & \longrightarrow & \overline{B} \\ & b & \longmapsto & b+I \end{array}$$

izdüşüm fonksiyonu (B,β) ve $(\overline{B},\overline{\beta})$ arasında bir çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül homomorfizmasıdır. Yani

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\partial"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & \overline{B} \arrow[d, "\overline{\beta}"] \\ \mathcal{L} \arrow[r, equal] & \mathcal{L} \arrow[r, equal] & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Şimdi p nin koeşitleyici olduğunu gösterelim. Öncelikle her $c \in C$ için

$$\begin{array}{rcl} p(f(c)) - p(g(c)) & = & p(f(c) - g(c)) \\ & = & f(c) - g(c) + I \\ & = & I \end{array}$$

olup $p(f(c)) - p(g(c)) = 0$, $pf(c) = pg(c)$ yani $pf = pg$ bulunur. Şimdi p nin evrensellik şartını sağladığını gösterelim.

$$p' : B \longrightarrow \overline{B}'$$

bir çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül homomorfizması olup $p'f = p'g$ şartını sağlasın.

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \overline{B} & \longrightarrow & \overline{B}' \\ & b+I & \longmapsto & p'(b) \end{array}$$

şeklinde bir ϕ dönüşümü tanımlayalım. Dikkat edileceği üzere her $b \in B$ için

$$\begin{array}{rcl} \phi p(b) & = & \phi(b+I) \\ & = & p'(b) \end{array}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p'"'] & \overline{B} \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & & \overline{B}' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Diğer taraftan

$$\phi_1 : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}'$$

dönüşümü

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p'"'] & \overline{B} \arrow[d, dashed, "\phi_1"] \\ & & \overline{B}' \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapsın. O halde

$$\begin{aligned} \phi(b+I) &= p'(b) \\ &= \phi_1(p(b)) \\ &= \phi_1(b+I) \end{aligned}$$

olduğundan $\phi = \phi_1$ dir. Yani ϕ dönüşümü biriciktir. Dolayısıyla p homomorfizması f ve g homomorfizmalarının koeşitleyicisidir. □

(C,∂) ve (B,β) iki çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modül olsun. B nin C üzerine β vasıtasıyla

$$b \cdot c = {}^{\beta(b)} c$$

şeklinde bir etkisi vardır. Burada $\beta(b)$ nin c üzerine etkisi (C,∂) çaprazlanmış $\mathcal{L}$-modülünde mevcut olan etkidir. Öncelikle

E1). Her $b_1, b_2 \in B$ ve $c \in C$ için

$$\begin{aligned} [b_1,b_2]\cdot c &= {}^{\beta([b_1,b_2])}c \\ &= {}^{[\beta(b_1),\beta(b_2)]}c \\ &= {}^{\beta(b_1)}({}^{\beta(b_2)}c) - {}^{\beta(b_2)}({}^{\beta(b_1)}c) \quad (\because (C,\partial) \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\ &= b_1\cdot({}^{\beta(b_2)}c) - b_2\cdot({}^{\beta(b_1)}c) \\ &= b_1\cdot(b_2\cdot c) - b_2\cdot(b_1\cdot c) \end{aligned}$$

olur.

E2). Her $b \in B$ ve $c_1, c_2 \in C$ için

$$\begin{aligned} b\cdot[c_1,c_2] &= {}^{\beta(b)}[c_1,c_2] \\ &= [{}^{\beta(b)}c_1, c_2] + [c_1, {}^{\beta(b)}c_2] \quad (\because (C,\partial) \text{ çaprazlanmış } \mathcal{L}\text{-modül}) \\ &= [b\cdot c_1, c_2] + [c_1, b\cdot c_2] \end{aligned}$$

dır. Bu durumda bu etki Lie cebir etkisidir. Bu etki yardımıyla $C \rtimes B$ yarı-direkt çarpımı ile $C \times B$ üzerinde bir Lie A-cebiri elde ederiz. Yani,

$$C \rtimes B = \{(c,b) : c \in C, b \in B\}$$

olmak üzere Lie braketi

$$\begin{aligned}[(c,b),(c',b')] &= ([c,c'] - b'\cdot c + b\cdot c', [b,b']) \\ &= ([c,c'] - {}^{\beta(b')}c + {}^{\beta(b)}c', [b,b'])\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda $\mathfrak{L}$ nin $C \rtimes B$ üzerine etkisi $(c,b) \in C \rtimes B$ ve $l \in \mathfrak{L}$ için

$$^{l}(c,b) = (^{l}c, ^{l}b)$$

şeklinde tanımlanır. Bu etkinin bir Lie-Rinehart etkisi olduğunu gösterelim.

E1). Her $l, l' \in \mathfrak{L}$ ve $(c,b) \in C \rtimes B$ için

$$\begin{aligned}{}^{[l,l']}(c,b) &= ({}^{[l,l']}c, {}^{[l,l']}b) \\ &= ({}^{l}({}^{l'}c) - {}^{l'}({}^{l}c), {}^{l}({}^{l'}b) - {}^{l'}({}^{l}b)) \\ &= ({}^{l}({}^{l'}c), {}^{l}({}^{l'}b)) - ({}^{l'}({}^{l}c), {}^{l'}({}^{l}b)) \\ &= {}^{l}(({}^{l'}c), ({}^{l'}b)) - {}^{l'}(({}^{l}c), ({}^{l}b)) \\ &= {}^{l}({}^{l'}(c,b)) - {}^{l'}({}^{l}(c,b))\end{aligned}$$

olur.

E2). Her $l \in \mathfrak{L}$ ve $(c,b),(c',b') \in C \rtimes B$ için

$$\begin{aligned}{}^{l}[(c,b),(c',b')] &= {}^{l}([c,c'],[b,b']) \\ &= ({}^{l}[c,c'], {}^{l}[b,b']) \\ &= ([{}^{l}c,c'] + [c,{}^{l}c'], [{}^{l}b,b'] + [b,{}^{l}b']) \\ &= ([{}^{l}c,c'],[{}^{l}b,b']) + ([c,{}^{l}c'],[b,{}^{l}b']) \\ &= [({}^{l}c,{}^{l}b),(c',b')] + [(c,b),({}^{l}c',{}^{l}b')] \\ &= [{}^{l}(c,b),(c',b')] + [(c,b),{}^{l}(c',b')]\end{aligned}$$

olur.

E3). Her $l \in \mathfrak{L}$, $(c,b) \in C \rtimes B$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned}{}^{al}(c,b) &= ({}^{al}c, {}^{al}b) \\ &= (a({}^{l}c), a({}^{l}b)) \\ &= a({}^{l}c, {}^{l}b) \\ &= a({}^{l}(c,b))\end{aligned}$$

olur.

E4). $\alpha : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ anchor dönüşümü ve her $l \in \mathfrak{L}$, $(c,b) \in C \rtimes B$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned}{}^{l}(a(c,b)) &= {}^{l}(ac, ab) \\ &= ({}^{l}(ac), {}^{l}(ab)) \\ &= (a({}^{l}c) + ((\alpha(l))(a))c, a({}^{l}b) + ((\alpha(l))(a))b) \\ &= (a({}^{l}c), a({}^{l}b)) + (((\alpha(l))(a))c, ((\alpha(l))(a))b) \\ &= a({}^{l}c, {}^{l}b) + (((\alpha(l))(a))c, ((\alpha(l))(a))b) \\ &= a({}^{l}c, {}^{l}b) + ((\alpha(l))(a))(c,b)\end{aligned}$$

olur. O halde bu etki bir Lie-Rinehart etkisidir. Burada

$$\begin{array}{rccc} i: & B & \longrightarrow & C \rtimes B \\ & b & \longmapsto & (0,b) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} j: & C & \longrightarrow & C \rtimes B \\ & c & \longmapsto & (c,0) \end{array}$$

şeklinde iki dönüşüm vardır. Elbette $b,b' \in B$ ve $c,c' \in C$ için

$$\begin{array}{rcl} i([b,b']) & = & (0,[b,b']) \\ & = & ([0,0],[b,b']) \\ & = & [(0,b),(0,b')] \\ & = & [i(b),i(b')] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} j([c,c']) & = & ([c,c'],0) \\ & = & ([c,c'],[0,0]) \\ & = & [(c,0),(c',0)] \\ & = & [j(c),j(c')] \end{array}$$

olduğundan bu dönüşümler 1-1 Lie A-cebir homomorfizmalarıdır. Şimdi $(c,b) \in C \rtimes B$ için

$$\delta'(c,b) = \partial(c) + \beta(b)$$

şeklinde bir

$$\delta' : C \rtimes B \longrightarrow \mathfrak{L}$$

dönüşümü tanımlayalım. Amacımız burada verilen δ' dönüşümü yardımıyla $(C \rtimes B, \delta')$ nü Lie-Rinehart çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül yapmaktır. Yani $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisinde (C,∂) ve (B,β) çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modüllerinin çarpımını elde etmektir. Esasen δ' dönüşümü Lie-Rinehart çaprazlanmış modül şartlarının 3. ve 4. şartını sağlamaktadır. Çünkü her $(c,b) \in C \rtimes B$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} \delta'(a(c,b)) & = & \delta'(ac,ab) \\ & = & \partial(ac) + \beta(ab) \\ & = & a\partial(c) + a\beta(b) \\ & = & a(\partial(c) + \beta(b)) \\ & = & a(\delta'(c,b)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \delta'(c,b)(a) & = & ((\alpha\delta')(c,b))(a) \\ & = & (\alpha(\partial(c) + \beta(b))(a) \\ & = & (\alpha\partial(c) + \alpha\beta(b))(a) \\ & = & (0(c) + 0(b))(a) \quad (\because (C,\partial) \text{ ve } (B,\beta) \text{ çaprazlanmış } \mathfrak{L}\text{-modül}) \\ & = & 0 \end{array}$$

olur. Şimdi δ' dönüşümü her $l \in \mathfrak{L}$ ve $(c,b) \in C \rtimes B$ için

$$\begin{array}{rcl} \delta'({}^{l}(c,b)) & = & \delta'(({}^{l}c, {}^{l}b)) \\ & = & \partial({}^{l}c) + \beta({}^{l}b) \\ & = & [l,\partial(c)] + [l,\beta(b)] \quad (\because (C,\partial) \text{ ve } (B,\beta) \text{ çaprazlanmış } \mathfrak{L}\text{-modül}) \\ & = & [l,\partial(c) + \beta(b)] \\ & = & [l,\delta'(c,b)] \end{array}$$

olduğundan 1. şart da sağlanır. Fakat δ' dönüşümü Peiffer şartını sağlamayabilir. Her $(c,b),(c',b') \in C \rtimes B$ için

$$\begin{array}{rcl} {}^{\delta'(c',b')}(c,b) - [(c',b'),(c,b)] & = & {}^{(\partial(c')+\beta(b'))}(c,b) - ([c',c] - {}^{\beta(b)}c' + {}^{\beta(b')}c, [b',b]) \\ & = & ({}^{(\partial(c')+\beta(b'))}c, {}^{(\partial(c')+\beta(b'))}b) - ([c',c] - {}^{\beta(b)}c' + {}^{\beta(b')}c, [b',b]) \\ & = & ({}^{\partial(c')}c + {}^{\beta(b')}c, {}^{\partial(c')}b + {}^{\beta(b')}b) - ([c',c] - {}^{\beta(b)}c' + {}^{\beta(b')}c, [b',b]) \\ & = & ([c',c] + {}^{\beta(b')}c, {}^{\partial(c')}b + [b,b']) - ([c',c] - {}^{\beta(b)}c' + {}^{\beta(b')}c, [b',b]) \\ & = & ({}^{\beta(b)}c', {}^{\partial(c')}b) \end{array}$$

olur. I, $({}^{\beta(b)}c', {}^{\partial(c')}b)$ tarafından üretilen bir ideal olsun. Böylece δ' ve I yardımıyla

$$\begin{array}{rccl} \delta: & (C \rtimes B)/I & \longrightarrow & \mathfrak{L} \\ & (c,b)+I & \longmapsto & \delta'(c,b) = \partial(c) + \beta(b) \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Şimdi Peiffer özdeşliğinin sağlandığını gösterelim. Her $(c,b),(c',b') \in C \rtimes B$ için

$${}^{\delta((c,b)+I)}((c',b')+I) = ({}^{\delta'(c,b)}(c',b')) + I$$

olup

$$({}^{\delta'(c,b)}(c',b')) - [(c,b),(c',b')] \in I$$

ve

$$\begin{array}{rcl} {}^{\delta((c,b)+I)}((c',b')+I) & = & [(c,b),(c',b')] + I \\ & = & [(c,b)+I,(c',b')+I] \end{array}$$

elde edilir. Böylelikle Peiffer şartı sağlanır. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 3.7 $((C \rtimes B)/I, \delta)$ yapısı bir çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modüldür.

Teorem 3.8 $\begin{array}{rccl} i: & C & \longrightarrow & (C \rtimes B)/I \\ & c & \longmapsto & (c,0)+I \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} j: & B & \longrightarrow & (C \rtimes B)/I \\ & b & \longmapsto & (0,b)+I \end{array}$

dönüşümleriyle birlikte $((C \rtimes B)/I, i, j)$ yapısı (C,∂) ve (B,β) çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modüllerinin koçarpımıdır.

İspat. $f : C \longrightarrow X$ ve $g : B \longrightarrow X$ çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül morfizmleri olsun. $(m,n)+I \in (C \rtimes B)/I$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & (C \rtimes B)/I & \longrightarrow & X \\ & (m,n)+I & \longmapsto & \varphi((m,n)+I) = f(m) + g(n) \end{array}$$

şeklinde φ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& (C \rtimes B)/I \arrow[r, dashed, "\varphi"] & X \\
B \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ve φ biricik olup istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Buradan hareketle

$$\begin{array}{rccl} *: & \mathfrak{XMod}/\mathfrak{L} \times \mathfrak{XMod}/\mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{XMod}/\mathfrak{L} \\ & ((C,\partial),(B,\beta)) & \longmapsto & ((C \rtimes B)/I, \delta) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $*$ funktoru

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & \mathfrak{XMod}/\mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}\times\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L} \\ & (E,\varepsilon) & \longmapsto & ((E,\varepsilon),(E,\varepsilon)) \end{array}$$

funktorunun $((C,\partial),(B,\beta))\in\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}\times\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ ve $(E,\varepsilon)\in\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ için

$$\mathrm{Hom}(((C,\partial),(B,\beta)),((E,\varepsilon),(E,\varepsilon)))\cong\mathrm{Hom}(((C\rtimes B)/I,\delta),(E,\varepsilon))$$

olduğundan sol ekidir (left adjoint).

(C,∂) ve (B,β) iki çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül olmak üzere

$$^{\partial}(^{\beta(b)}(-c))=[\beta(b),-\partial(c)]=[\partial(c),\beta(b)]$$

ve

$$^{\beta}(^{\partial(c)}b)=[\partial(c),\beta(b)]$$

olduğundan her $c\in C$ ve $b\in B$ için

$$(^{\beta(b)}(-c),{}^{\partial(c)}b)\in C\underset{\text{Çek}\alpha}{\times}B$$

dir. Buradan hareketle her $c\in C$ ve $b\in B$ için $(^{\beta(b)}(-c),{}^{\partial(c)}b)$ formundaki elemanların $C\underset{\text{Çek}\alpha}{\times}B$ de ürettiği ideal $<C,B>$ olsun.

Teorem 3.9

$$\begin{array}{rccc} \lambda': & C\underset{\text{Çek}\alpha}{\times}B & \longrightarrow & C\rtimes B \\ & (c,b) & \longmapsto & (-c,b) \end{array}$$

olmak üzere Lie A-cebirlerinin oluşturduğu

$$0\longrightarrow C\underset{\text{Çek}\alpha}{\times}B\xrightarrow{\lambda'}C\rtimes B\xrightarrow{\delta'}\text{Çek}\alpha$$

dizi tamdır. Üstelik $\lambda'(<C,B>)=I$ yani $(^{\beta(b)}c,{}^{\partial(c)}b)$ şeklindeki elemanların ürettiği idealdir. Böylece

$$0\longrightarrow\frac{C\underset{\text{Çek}\alpha}{\times}B}{<C,B>}\xrightarrow{\lambda}\frac{C\rtimes B}{I}\longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir.

İspat. Her $(c,b),(c',b')\in C\underset{\text{Çek}\alpha}{\times}B$ için

$$\begin{aligned} \lambda'((c,b)+(c',b')) &= \lambda'(c+c',b+b') \\ &= (-c-c',b+b') \\ &= (-c,b)+(-c',b') \\ &= \lambda'(c,b)+\lambda'(c',b') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda'[(c,b),(c',b')] &= \lambda'([c,c'],[b,b']) \\
&= (-[c,c'],[b,b']) \\
&= ([c',c],[b,b']) \\
&= ([c,c']+[c',c]-[c,c'],[b,b']) \\
&= ([c,c']+{}^{\partial(c')}c-{}^{\partial(c)}c',[b,b']) \\
&= ([c,c']+{}^{\beta(b')}c-{}^{\beta(b)}c',[b,b']) \quad (\because \beta(b)=\partial(c) \text{ ve } \beta(b')=\partial(c')) \\
&= ([c,c']+b'\cdot c-b\cdot c',[b,b']) \quad (\because B \text{ nin } C \text{ ye etkisi}) \\
&= ([-c,-c']+b'\cdot(-c)+b\cdot(-c'),[b,b']) \\
&= [(-c,b),(-c',b')] \\
&= [\lambda'(c,b),\lambda'(c',b')]
\end{aligned}$$

olduğundan λ' Lie A-cebir homomorfizmasıdır. $\lambda'(c,b)=\lambda'(c',b')$ olsun. Bu durumda $(-c,b)=(-c',b')$ olup $c=c'$ve $b=b'$ yani $(c,b)=(c',b')$ dir. O halde λ' birebirdir. Şimdi Görλ' =Çekδ' olduğunu gösterelim. $(c,b)\in C \underset{\text{Çek}\alpha}{\times} B$ olsun.

$$\begin{aligned}
\delta'(\lambda'(c,b)) &= \delta'(-c,b) \\
&= \partial(-c)+\beta(b) \\
&= -\partial(c)+\partial(c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan Görλ' $\subseteq$Çekδ' elde edilir. Diğer taraftan (c,b) $\in$Çekδ' olsun. Bu durumda $\delta'(c,b)=\partial(c)+\beta(b)=0$ olup $\partial(-c)=\beta(b)$ ve $(c,b)=\lambda'(-c,b)$ dir. Buda Çek$\delta'\subseteq$ Görλ' demektir. Ohalde Görλ' =Çekδ' dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\lambda'({}^{\beta(b)}(-c),{}^{\partial(c)}b) &= (-{}^{\beta(b)}(-c),{}^{\partial(c)}b) \\
&= ({}^{\beta(b)}(c),{}^{\partial(c)}b)\in I
\end{aligned}$$

dır. Yani $\lambda'(<C,B>)\subseteq I$ olup buradan λ' dönüşümüne bağlı olarak

$$\begin{aligned}
\lambda: \frac{C \underset{\text{Çek}\alpha}{\times} B}{<C,B>} &\longrightarrow \frac{C\rtimes B}{I} \\
(c,b)+<C,B> &\longmapsto \lambda'(c,b)+I
\end{aligned}$$

dönüşümü tanımlanabilir ve istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 3.10 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisi ileri itmelere sahiptir.

İspat. $f:(D,\varepsilon)\longrightarrow(C,\partial)$, $g:(D,\varepsilon)\longrightarrow(B,\beta)$ iki çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modül homomorfizması olsun. N, $({}^{\beta(b)}(c),{}^{\partial(c)}b)$ ve $(-f(d),g(d))$ formundaki elemanların ürettiği ideal olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}: \frac{C\rtimes B}{N} &\longrightarrow \mathfrak{L} \\
(c,b)+N &\longmapsto \partial(c)+\beta(b)
\end{aligned}$$

dönüşümü bir çaprazlanmış $\mathfrak{L}$-modüldür.

$$\begin{aligned}
i: B &\longrightarrow \frac{C\rtimes B}{N} \\
b &\longmapsto (0,b)+N
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} j: & C & \longrightarrow & \dfrac{C \rtimes B}{N} \\ & c & \longmapsto & (c,0)+N \end{array}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Her $d \in D$ için

$$(-f(d), g(d)) \in N$$

yani

$$-(f(d),0)+(0,g(d)) \in N$$

olup

$$f(d)+N = g(d)+N$$

olduğundan

$$jf = ig$$

dir. $(\dfrac{C \rtimes B}{N}, \overline{\delta})$ nin evrensellik özelliğini sağladığı kolayca gösterilebilir. □

Sonuç 3.11 $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisi kotam(cocomplete) yani sonlu kolimitlere sahiptir.

İspat. $\mathfrak{XMod}/\mathfrak{L}$ kategorisi koeşitleyiciye ve koçarpıma sahip olduğundan sonlu kolimitlere sahiptir. □

BÖLÜM 4

Simplisel Lie-Rinehart Cebirler

4.1 Giriş

Simplisel grup kavramı Kan (1958) tarafından tanımlanmıştır. Bu tanımlama yardımıyla Ellis (1993) çalışmasında simplisel Lie cebirleri tanımlayarak, bu kategorinin çaprazlanmış modüller kategorisiyle doğal denk olduğunu göstermiştir. Bu bölümde simplisel Lie-Rinehart cebirler tanımlanarak bu objelerin yardımıyla simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisi oluşturulacaktır. Ayrıca bu kategorinin Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisiyle doğal denkliği de gösterilecektir.

4.2 Simplisel Lie-Rinehart Cebirler ve Kategorisi

Tanım 4.1 $\boldsymbol{k}$ bir cisim, A değişmeli bir $\boldsymbol{k}$-cebir ve $\mathcal{L}=\{L_0,L_1,...,L_n,...\}$ Lie-Rinehart A-cebirlerin kümesi olsun.

$$\begin{array}{rcll} d_i := d_i^n : & L_n & \longrightarrow & L_{n-1}\ ,\ 0\le i\le n \quad (n\neq 0) \\ s_i := s_i^n : & L_n & \longrightarrow & L_{n+1}\ ,\ 0\le i\le n \end{array}$$

Lie-Rinehart homomorfizmler olmak üzere $0\le i\le n$ için

$$\begin{array}{rcll} d_id_j & = & d_{j-1}d_i, & i<j \\ d_is_j & = & \begin{cases} s_{j-1}d_i, & i<j \\ Id, & i=j \text{ veya } \dot{I}=j+1 \\ s_jd_{i-1}, & i>j+1 \end{cases} \\ s_is_j & = & s_{j+1}s_i, & i\le j \end{array}$$

özdeşlikleri sağlanıyorsa $\mathcal{L}=((L_n)_{n\in\mathbb{N}},d_i,s_j)$ üçlüsüne **simplisel Lie-Rinehart cebir** denir. d_i ve s_j ye de sırasıyla **yüz** *ve* ***dejenere*** *operatörleri* denir. Diyagram olarak $((L_n)_{n\in\mathbb{N}},d_i,s_j)$ simplisel Lie-Rinehart cebiri aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}:\ldots L_k \arrow[r, shift left=6] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\vdots"] \arrow[r, shift left] & L_{k-1}\ldots L_2 \arrow[l, shift left] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\vdots"] \arrow[l, shift left=6] \arrow[r, shift left=3, "d_0,d_1,d_2"] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r] & L_1 \arrow[l, shift left=1.5] \arrow[l, shift left=3, "s_1,s_0"] \arrow[r, shift left, "d_1,d_0"] \arrow[r, shift left=2] & L_0 \arrow[l, shift left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

Örnek 4.1 $\mathcal{L}$ bir simplisel Lie-Rinehart cebir olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $L_n=\mathcal{L}$ ve $d_i=s_j=id$ olmak üzere $((L_n)_{n\in\mathbb{N}},d_i,s_j)$ bir simplisel Lie-Rinehart cebirdir. Bu üçlüye sabit simplisel Lie-Rinehart cebir denir ve $\boldsymbol{k}(\mathcal{L},0)$ ile gösterilir.

Herhangi bir $x \in L_n$ elemanına n-boyutlu simpleks denir. Eğer bazı y ler için $x = s_i(y)$ oluyorsa, x-simpleksine dejenere olan eleman denir.

$f : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$ şeklindeki bir simplisel Lie-Rinehart cebir morfizmi, d_i ve s_j yüz ve dejenere operatörleri ile değişmeli olan $f_n : L_n \longrightarrow L'_n$ şeklindeki Lie-Rinehart cebir homomorfizmlerinin bir ailesidir. Yani herbir i ve n için

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \ \text{ ve } f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

dir. Diğer taraftan

$$f_n : L_n \longrightarrow L'_n$$

Lie-Rinehart cebir homomorfizmi olduğundan

$$\alpha' f_n = \alpha$$

dır. Böylece simplisel Lie-Rinehart cebirlerinin kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategoriyi $\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ ile göstereceğiz.

4.3 Bir Simplisel Lie-Rinehart Cebirin Moore Kompleksi

$\mathfrak{L}$ bir simplisel Lie-Rinehart cebir olsun.

$$NL_0 = L_0, \quad NL_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n$$

olmak üzere d_n nın NL_n ye kısıtlanmışı olan

$$\partial_n : NL_n \longrightarrow NL_{n-1}$$

homomorfizmini tanımlayalım. Bu durumda

$$N\mathfrak{L} : \cdots \longrightarrow NL_n \xrightarrow{\partial_n} NL_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} NL_1 \xrightarrow{\partial_1} NL_0$$

zinciri bir komplekstir. Gerçekten $x \in NL_{n+1} = \bigcap_{i=0}^{n} Çekd_i^{n+1}$ için

$$\partial_n \partial_{n+1}(x) = d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x)$$

olduğundan ve simplisel özelliklerden

$$d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x) = d_n^n(0) = 0 \quad (\because x \in NL_{n+1})$$

olup $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dır. O halde $N\mathfrak{L}$ bir komplekstir. Bu komplekse $\mathfrak{L}$ simplisel Lie-Rinehart cebirinin **Moore kompleksi** denir ve $(N\mathfrak{L},\partial)$ veya kısaca $N\mathfrak{L}$ ile gösterilir. Lie-Rinehart cebir homomorfizminin çekirdeği Lie A-cebir olduğundan $n \geq 1$ için $N\mathfrak{L}_n$ de bir Lie A-cebirdir. Eğer $n > k$ için $NL_n = 0$ ise Simplisel Lie-Rinehart cebirinin boyutu k dan küçük veya eşittir denir ve $\leq k$ ile gösterilir. Moore kompleksinin boyutu $\leq k$ olan simplisel cebirlerin kategorisini $\mathfrak{Simp}_{\leq k}(\mathfrak{LR})$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki tanımın Lie cebirler için olan durumunun incelemesi Ellis tarafından (1993) de verilmiştir.

Tanım 4.2 $0 \leq i \leq k$ için $\mathfrak{L}_i$ ler Lie-Rinehart A-cebir olmak üzere

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathfrak{L}_k \; \begin{matrix} \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow \end{matrix} \; \mathfrak{L}_{k-1} \ldots \mathfrak{L}_2 \; \begin{matrix} \xrightarrow{d_0, d_1, d_2} \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \xleftarrow[s_1, s_0]{} \end{matrix} \; \mathfrak{L}_1 \; \begin{matrix} \xrightarrow{d_1, d_0} \\ \longrightarrow \\ \xleftarrow[s_0]{} \end{matrix} \; \mathfrak{L}_0$$

ile tanımlı olan simplisel Lie-Rinehart cebire k**-parçalanmış simplisel Lie-Rinehart cebir** denir. k-parçalanmış simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisini $\mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ ile göstereceğiz. $\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ kategorisinden $\mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ kategorisine kısıtlama ile verilen tr_k parçalanmış funktoru vardır. Bu funktorun k-iskelet funktor olarak adlandırılan st_k sol eki ve k-koiskelet funktor olarak adlandırılan $\cos t_k$ sağ eki vardır. Bu ekler diyagram olarak

$$\mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR}) \underset{cost_k}{\overset{tr_k}{\leftrightarrows}} \mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR}) \underset{st_k}{\overset{tr_k}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 4.3 Lie-Rinehart cebir çaprazlanmış modülleri kategorisi $\mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$ ile Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisi $\mathfrak{Simp}_{\leq 1}(\mathfrak{LR})$ doğal denktir.

İspat. $\mathfrak{L}$, Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Lie-Rinehart cebir, $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1$ iki Lie-Rinehart A-cebir ve $R =$Çekd_0 olsun. R bir Lie-Rinehart homomorfizmasının çekirdeği olduğundan Lie A-cebirdir. $\partial = d_1|_{\text{Çek}d_0}$ olsun. Bu durumda d_1 Lie-Rinehart homomorfizması olduğundan A-modül homomorfizmasıdır. O halde ∂ da A-modül homomorfizmasıdır. $l \in \mathfrak{L}_0$ ve $r \in R$ olmak üzere $\mathfrak{L}_0$ ın R üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_0 \times R & \longrightarrow & R \\ (l, r) & \longmapsto & {}^l r = [s_0 l, r] \end{array}$$

ve

$$\partial({}^l r) = [d_1 s_0 l, d_1 r] = [l, \partial r]$$

şeklinde tanımlansın. Bu etki bir Lie-Rinehart etkisidir. Aynı zamanda $\partial : R \longrightarrow \mathcal{L}_0$ bir Lie-Rinehart A-cebir çaprazlanmış modüldür. Sırasıyla etki ve çaprazlanmış modül şartlarının sağlandığını gösterelim.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_1 \arrow[r, shift left=2, "d_0{,}d_1"] \arrow[r] & \mathcal{L}_0 \arrow[l, shift left=2, "s_0"] \end{tikzcd}$$

bir Lie-Rinehart cebir homomorfizması olduğundan

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \alpha d_0=\alpha' & \mathcal{L}_0 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{L}_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \alpha d_1=\alpha' & \mathcal{L}_0 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{L}_1 \arrow[dr, "\alpha'"'] & \alpha' s_0=\alpha & \mathcal{L}_0 \arrow[ll, "s_0"'] \arrow[dl, "\alpha"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları vardır. Her $l, l' \in \mathcal{L}_0$, $r, r_1, r_2 \in R$ ve $a \in A$ için

E1).

$$\begin{aligned} {}^{[l,l']}r &= [s_0[l,l'],r] \\ &= [[s_0 l, s_0 l'],r] \quad (\because s_0, \text{ Lie-Rinehart homomorfizması }) \\ &= [s_0 l,[s_0 l',r]]-[s_0 l',[s_0 l,r]] \quad (\because \text{ Lie bracket özelliği }) \\ &= {}^{l}([s_0 l',r])-{}^{l'}([s_0 l,r]) \\ &= {}^{l}({}^{l'}r)-{}^{l'}({}^{l}r) \end{aligned}$$

olur.

E2).

$$\begin{aligned} {}^{l}([r_1,r_2]) &= [s_0 l,[r_1,r_2]] \\ &= [[s_0 l,r_1],r_2]+[r_1,[s_0 l,r_2]] \quad (\because \text{ Lie bracket özelliği }) \\ &= [{}^{l}r_1,r_2]+[r_1,{}^{l}r_2] \end{aligned}$$

olur.

E3).

$$\begin{aligned} {}^{(al)}r &= [s_0(al),r] \\ &= [a s_0 l,r] \quad (\because s_0, A\text{-modül homomorfizması}) \\ &= a[s_0 l,r] \quad (\because \text{ Lie bracket özelliği }) \\ &= a({}^{l}r) \end{aligned}$$

olur.

E4).

$$\begin{aligned} {}^{l}(ar) &= [s_0 l,ar] \\ &= a[s_0 l,r]+((s_0 l)(a))r \\ &= a[s_0 l,r]+(\alpha'(s_0 l)(a))r \\ &= a[s_0 l,r]+(\alpha(l)(a))r \quad (\because \alpha' s_0=\alpha) \\ &= a({}^{l}r)+(\alpha(l)(a))r \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\mathcal{L}_0 \times R \longrightarrow R$ bir Lie-Rinehart etkisidir. Şimdi $\partial : R \longrightarrow \mathcal{L}_0$ ın çaprazlanmış modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

ÇM 1).

$$\begin{aligned}\partial({}^{l}r) &= \partial[s_0 l, r]\\ &= [d_1 s_0 l, d_1 r]\\ &= [l, \partial r] \quad (\because\ d_1 s_0 = Id)\end{aligned}$$

dır.

ÇM 2).

$$\begin{aligned}{}^{\partial(r')}r &= [s_0 d_1(r'), r]\\ &= [s_0 d_1(r') - r' + r', r]\\ &= [s_0 d_1(r') - r', r] + [r', r]\\ &= [d_2 s_0 r' - d_2 s_1 r', d_2 s_1 r] + [r', r] \quad (\because\ s_0 d_1 = d_2 s_0, d_2 s_1 = Id)\\ &= d_2[s_0 r' - s_1 r', s_1 r] + [r', r]\\ &= [r', r] \quad (\because\ N\mathfrak{L}_2 = 0)\end{aligned}$$

dır.

ÇM3). $\partial = d_1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\partial(ar) &= d_1(ar)\\ &= a d_1(r) \quad (\because d_1 \text{ Lie-Rinehart homomorfimasıdır})\\ &= a\partial(r)\end{aligned}$$

dır.

ÇM4).

$$\begin{aligned}\partial(r)(a) &= (\alpha(\partial(r)))(a)\\ &= (\alpha' s_0(d_1(r)))(a)\\ &= (\alpha'(s_0 d_1(r)))(a)\\ &= (\alpha'(d_2 s_0(r)))(a)\\ &= (\alpha'(0))(a) \quad (\because\ NL_2 = 0\ )\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}_0$$

bir Lie-Rinehart A-cebir çaprazlanmış modüldür. Böylece

$$N_1 : \mathfrak{Simp}_{\leq 1}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$$

funktorunu elde ederiz.

Tersine $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ Lie-Rinehart cebir çaprazlanmış modül olsun. $\mathfrak{L}$ nin R üzerine etkisi yardımıyla

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \rtimes R \subseteq \mathfrak{L} \times R$$

yarıdirekt çarpımını elde ederiz. Diğer bir deyişle $\mathcal{L}_1$ bir Lie-Rinehart cebirdir. Her $a \in A$, $l, l' \in \mathcal{L}$ ve $r, r' \in R$ için toplam, çarpım ve skaler ile çarpma

$$\begin{aligned} a(l,r) &= (al, ar) \\ (l,r)+(l',r') &= (l+l', r+r') \\ [(l,r),(l',r')] &= ([l,l'],[r,r']+{}^{l}r'-{}^{l'}r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d_0 : \quad & \mathcal{L} \rtimes R \longrightarrow \mathcal{L} \\ & (l,r) \longmapsto l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 : \quad & \mathcal{L} \rtimes R \longrightarrow \mathcal{L} \\ & (l,r) \longmapsto (\partial r)+l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 : \quad & \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \rtimes R \\ & l \longmapsto (l,0) \end{aligned}$$

homomorfizmlerini ele alalım. Bu homomorfizmler her $l \in \mathcal{L}$, $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \alpha d_0((l,r)) &= \alpha(d_0(l,r)) \\ &= \alpha(l) \\ &= \widetilde{\alpha}((l,r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha d_1((l,r)) &= \alpha(d_1(l,r)) \\ &= \alpha((\partial r)+l) \\ &= \alpha(\partial r)+\alpha(l) \\ &= \alpha\partial(r)+\alpha(l) \\ &= \alpha(l) \quad (\because \mathcal{R} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L}_0 \text{ çaprazlanmış modül}) \\ &= \widetilde{\alpha}((l,r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} s_0(l) &= \widetilde{\alpha}(s_0(l)) \\ &= \widetilde{\alpha}((l,0)) \\ &= \alpha(l) \end{aligned}$$

olduğundan Lie-Rinehart cebir homomorfizmlerdir. Ayrıca her $l \in \mathcal{L}$ için

$$\begin{aligned} d_0 s_0(l) &= d_0(l,0) \\ &= l \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1 s_0(l) &= d_1(l,0) \\ &= \partial(0)+l \\ &= l \end{aligned}$$

dır. Diğer bir deyişle $d_0 s_0 = d_1 s_0 = Id$ olur. Bu durumda simplisel özdeşlikler sağlanır. Sonuç olarak

$$\mathcal{L}_1 \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow} \mathcal{L}_0$$

bir 1-parçalanmış simplisel Lie-Rinehart cebirdir. Böylece

$$M : \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Tr}_1\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$$

funktoru elde edilir. st_k funktorunu kullanarak 1-parçalanmış simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisinden Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisine ulaşılır. Böylece M ve st_1 in bileşkesi olarak

$$s_1 : \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Simp}_{\leq 1}(\mathfrak{LR})$$

tanımlanır. Sonuç olarak Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisinin doğal denkliği elde edilir. $\square$

BÖLÜM 5

Cat^1 Lie-Rinehart Cebirler

5.1 Giriş

Cat^n-gruplar kavramı ilk olarak homotopi n-tipler için cebirsel model olarak Loday (1982) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Ellis (1988) k-cebir kategorisinde cat^n-cebir kavramını tanımlamıştır. Bu tanımlamalar yardımıyla (Alp ve Gürmen, 2006) çalışmasında cat^1-Lie cebirleri tanımlamışlardır. Bu bölümde cat^1 Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturularak, bu kategorinin Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisiyle doğal denk olduğu gösterilecektir.

Öncelikle cat^1 cebir tanımını hatırlayalım.

Tanım 5.1 A ve R iki **k**-cebir olsun.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, two heads, "s"] \arrow[r, two heads, "t"'] & R \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

s ve t örten homomorfizmler ve e gömme homomorfizmi

$$\begin{array}{ll} CAT1. & se = id_R = te \\ CAT2. & \text{Çek } s \text{ Çek } t = \{0_A\} \end{array}$$

şartlarını sağlayan $\mathfrak{C} = (e; s, t : A \twoheadrightarrow R)$ cebirsel sisteme **cat^1-cebir** denir.

$\mathfrak{C} = (e; s, t : A \to R)$ ve $\mathfrak{C}' = (e'; s', t' : A' \to R')$ iki cat^1-cebir olsun. $\gamma : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$, cat^1-cebirler homomorfizmi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, shift right, two heads, "t"'] \arrow[d, shift left, two heads, "s"] & A' \arrow[d, shift right, two heads, "t'"'] \arrow[d, shift left, two heads, "s'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, bend left=60, "e"] & R' \arrow[u, bend right=60, "e'"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $t'\phi = \varphi t,\ s'\phi = \varphi s,\ e'\varphi = \phi e$) olacak şekilde $\gamma = (\phi, \varphi)$ ikilisinden oluşmaktadır. Böylece **Cat^1-Ceb** ile gösterilen cat^1-cebirler kategorisi oluşturulabilir.

Tanım 5.2 $\mathfrak{L}$ bir Lie-Rinehart A-cebir, s ve t Lie-Rinehart cebir homomorfizmaları olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ll} \textbf{i).} & st = t \text{ and } ts = s \\ \textbf{ii).} & [\text{Çek}s, \text{Çek}t] = 0 \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa $(\mathfrak{L},s,t)$ üçlüsüne **cat**[1] **Lie-Rinehart cebir** denir. Morfizmler tanım ve görüntü kümesiyle uyumlu Lie-Rinehart cebir homomorfizmleri olmak üzere Cat[1] Lie-Rinehart cebirler kategorisini oluşturabiliriz ve bu kategoriyi $\mathfrak{Cat}^1(\mathfrak{LR})$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki teoremin değişmeli cebir durumu için (Shammu,1992) çalışmasına bakılabilir.

Teorem 5.3 Cat[1] Lie-Rinehart cebirler kategorisi $\mathfrak{Cat}^1(\mathfrak{LR})$ ile Lie-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri kategorisi $\mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$ doğal denktir.

İspat. $(\mathfrak{L},s,t)$ bir Cat[1] Lie-Rinehart cebir, $M=$ Çek$s$, $N=$Görs ve $\partial=t|_M$ olsun. t, A-modül homomorfizması olduğundan ∂ da A-modül homomorfizmasıdır. Öncelikle $\alpha s=\alpha$ ve $\alpha t=\alpha$ olduğundan $\alpha s=\alpha t$.elde edilir. N nin M üzerine etkisini ${}^{n}m=[n,m]$ olarak tanımlayalım.

ÇM 1). Her $n\in N$ ve $m\in M$ için

$$\begin{aligned}
\partial({}^{n}m) &= \partial[n,m]\\
&= [\partial n,\partial m]\\
&= [(\partial n)+n-n,\partial m]\\
&= [(\partial n)-n,\partial m]+[n,\partial m]
\end{aligned}$$

olur. $n\in$*Görs* olduğundan $s(n')=n$ olacak şekilde $n'\in\mathfrak{L}$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\partial({}^{n}m) &= [(\partial n)-n,\partial m]+[n,\partial m]\\
&= [(\partial n)-s(n'),\partial m]+[n,\partial m]\\
&= [tn-ts(n'),tm]+[n,\partial m]\\
&= t[n-s(n'),m]+[n,\partial m]\\
&= t[n-n,m]+[n,\partial m]\\
&= t[0,m]+[n,\partial m]\\
&= [n,\partial m]
\end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM 2). Her $m,m'\in M$ için

$$\begin{aligned}
{}^{\partial m}m' &= [\partial m,m']\\
&= [m-m+\partial m,m']\\
&= [-m+\partial m,m']+[m,m']
\end{aligned}$$

olur. $\partial m\in$*Görs* olduğundan $s(a)=\partial(m)$ olacak şekilde $a\in\mathfrak{L}$ vardır.

$$\begin{aligned}
t(\partial m-m) &= t(sa-m)\\
&= tsa-tm\\
&= sa-tm\\
&= tm-tm\\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $(\partial l, l) \in$ Çek$t$ dir. $m' \in$ Çek$s$ ve $[$Çek$t$, Çek$s] = 0$ olduğundan $[\partial m - m, m'] = 0$ dır. O halde

$$^{\partial m}m' = [m, m']$$

elde edilir.

ÇM 3). ∂, A-modül homomorfizması olduğundan $m \in M$ ve $a \in A$ için

$$\partial(am) = a\partial(m)$$

dir.

ÇM 4). Her $m \in M$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned} \partial(m)(a) &= (\alpha(\partial m))(a) \\ &= (\alpha(tm))(a) \\ &= (\alpha(sm))(a) \\ &= (\alpha(0))(a) \quad (\because\ m \in \text{Çeks}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $\partial : M \longrightarrow N$ Lie-Rinehart cebir çaprazlanmış modüldür.

Tersine, $\partial : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{L}$ çaprazlanmış modül olsun. $K = \mathcal{R} \ltimes \mathcal{L}$ nin Lie-Rinehart A-cebir olduğunu biliyoruz. s ve t ;

$$\begin{aligned} s : \quad \mathcal{R} \ltimes \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{R} \ltimes \mathcal{L} \\ (r, l) &\longmapsto (0, l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t : \quad \mathcal{R} \ltimes \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{R} \ltimes \mathcal{L} \\ (r, l) &\longmapsto (0, \partial r + l) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Her $(r, l), (r_1, l_1), (r_2, l_2) \in \mathcal{R} \ltimes \mathcal{L}$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned} s(a(r, l)) &= s(ar, al) \\ &= (0, al) \\ &= a(0, l) \\ &= a(s(r, l)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s[(r_1, l_1), (r_2, l_2)] &= s([r_1, r_2], [l_1, l_2]) \\ &= (0, [l_1, l_2]) \\ &= ([0, 0], [l_1, l_2]) \\ &= [(0, l_1), (0, l_2)] \\ &= [s(r_1, l_1), s(r_2, l_2)] \end{aligned}$$

olduğundan s, A-modül homomorfizmi ve Lie k-cebir homomorfizmidir. Benzer şekilde t nin de A-modül homomorfizmi ve Lie k-cebir homomorfizmi olduğu gösterilebilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}(s))(r, l) &= \tilde{\alpha}(0, l) \\ &= \alpha(l) \\ &= \tilde{\alpha}(r, l) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\widetilde{\alpha}(t))(r,l) &= \widetilde{\alpha}(0,\partial r+l)\\ &= \alpha(\partial r+l)\\ &= \alpha\partial r+\alpha l\\ &= 0+\alpha l\\ &= \widetilde{\alpha}(r,l)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}\ltimes\mathcal{L} \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "t"'] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"'] & & \mathcal{R}\ltimes\mathcal{L} \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup s ve t Lie-Rinehart cebir homomorfizmdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}s(t(r,l)) &= s(0,\partial r+l)\\ &= (0,\partial r+l)\\ &= t(r,l)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t(s(r,l)) &= t(0,l)\\ &= (0,l)\\ &= s(r,l)\end{aligned}$$

olup $st=t$ ve $ts=s$ elde edilir. s ve t nin tanımından

$$\text{Çek}s=\{(r,0)|r\in R\} \text{ ve Çek}t=\{(r,-\partial r)|r\in R\}$$

olup

$$\begin{aligned}[(r,0),(r',-\partial(r'))] &= ([r,r']-{}^{-\partial r'}r+{}^{0}r',[0,-\partial r'])\\ &= ([r,r']+{}^{\partial r'}r+0,0)\\ &= ([r,r']+[r',r],0)\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

olur. Buradan $[\text{Çek}s,\text{Çek}t]=0$ elde edilir. Sonuç olarak Cat^1 Lie-Rinehart cebirler kategorisi ile Lie-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri kategorisinin denkliği gösterilmiş olur. □

BÖLÜM 6

Lie-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller

6.1 Giriş

Gruplar için 2-çaprazlanmış modüller kavramı Conduché (1984) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Lie cebir versiyonunu Ellis (1993) ve değişmeli cebir versiyonunu Grandjeán ve Vale (1986) da tanımlamıştır. Bu bölümde Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller tanımlanarak kategorisi oluşturulacaktır. Ayrıca bu kategorinin simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisiyle doğal denk olduğu gösterilecektir.

6.2 Lie-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller

Öncelikle (Ellis, 1993) de tanımlanan Lie cebirler için 2-çaprazlanmış modül tanımını verelim.

Tanım 6.1 K, M ve L birer Lie cebir ve

$$K \xrightarrow{\partial_2} M$$

Lie çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda L nin M ve K üzerine etkisi ve

$$\{,\} : M \times M \longrightarrow K$$

k-bilineer fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$$K \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} L$$

Lie cebir kompleksine, **Lie cebir 2-çaprazlanmış modül** denir. Her x, x_1, $x_2 \in K$, y, y_0, y_1, $y_2 \in M$ ve $z \in L$ için

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{1).} & \partial_2\{y_0, y_1\} & = & [y_0, y_1] - y_0 \cdot \partial_1(y_1), \\
\textbf{2).} & \{\partial_2(x_1), \partial_2(x_2)\} & = & [x_1, x_2], \\
\textbf{3).} & \{\partial_2(x), y\} & = & y \cdot x - \partial_1(y) \cdot x, \\
\textbf{4).} & \{y, \partial_2(x)\} & = & y \cdot x, \\
\textbf{5).} & \{y_0, y_1\} \cdot z & = & \{y_0 \cdot z, y_1\} + \{y_0, y_1 \cdot z\}, \\
\textbf{6).} & \{[y_0, y_1], y_2\} & = & \{y_0, y_2\} \cdot \partial_1(y_1) + \{y_1, [y_0, y_2]\} - \{y_1, y_2\} \cdot \partial_1(y_0) \\
 & & & -\{y_0, [y_1, y_2]\}, \\
\textbf{7).} & \{y_0, [y_1, y_2]\} & = & \{y_0, y_1\} \cdot \partial_1(y_2) - \{y_0, y_2\} \cdot \partial_1(y_1) \\
 & & & +\{y_1, [y_0, y_2] - y_0 \cdot \partial_1(y_2)\} - \{y_2, [y_0, y_1] - y_0 \cdot \partial_1(y_1)\}.
\end{array}$$

Buradaki

$$\{,\}: M\times M \longrightarrow K$$

k-bilineer fonksiyonu Peiffer Lifting (taşıyıcı) olarak adlandırılır.

Şimdi Lie-Rinehart cebirler için 2-çaprazlanmış modül kavramını tanımlayalım.

Tanım 6.2 R ve R' birer Lie A-cebir, $\mathfrak{L}$ Lie-Rinehart A-cebir ve

$$R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

Lie k-cebir 2-çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda her $a\in A$, $r\in R$ ve $r'\in R'$ için

i) $\partial_1(ar) = a\partial_1(r)$, $\partial_2(ar') = a\partial_2(r')$

ii) $\partial_1(r)(a) = 0$

şartları sağlanıyorsa

$$R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

kompleksine **Lie-Rinehart cebir 2-çaprazlanmış modül** denir.

6.3 Lie-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Tanım 6.3

$$R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L} \text{ ve } R'_1 \xrightarrow{\partial'_2} R_1 \xrightarrow{\partial'_1} \mathfrak{L}_1$$

iki 2-çaprazlanmış modül,

$$f_2 : R' \longrightarrow R'_1 \text{ ve } f_1 : R \longrightarrow R_1$$

iki Lie cebir homomorfizmaları ve

$$f_0 : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}_1$$

Lie-Rinehart cebir homomorfizması olsun. Bu durumda

$$R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

den

$$R'_1 \xrightarrow{\partial'_2} R_1 \xrightarrow{\partial'_1} \mathfrak{L}_1$$

e 2-çaprazlanmış modül homomorfizmi

$$f_0\partial_1 = \partial'_1 f_1,\ \ f_1\partial_2 = \partial'_2 f_2$$

şartlarını sağlayan (f_2, f_1, f_0) üçlüsüdür. Ayrıca f_1 ve f_2 f_0-equivariantdır. Böylece Lie-Rinehart cebirler için 2-çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulabilir. Bu kategori $\mathfrak{X}_2\mathfrak{mod}(\mathfrak{LR})$ ile gösterilir.

Teorem 6.4 Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller kategorisi $\mathfrak{X}_2\mathfrak{mod}(\mathfrak{LR})$ ile Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisi $\mathfrak{Simp}_{\leq 2}(\mathfrak{LR})$ doğal denktir.

İspat. $\mathcal{L}$ Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Lie-Rinehart cebir ve $\mathcal{L}$ nin Moore kompleksi

$$\cdots \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow N\mathcal{L}_2 \longrightarrow N\mathcal{L}_1 \longrightarrow N\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, $R = N\mathcal{L}_1$ ve $R' = N\mathcal{L}_2$ olarak alalım ve Peiffer taşıyıcıyı

$$\begin{array}{rcl} \{,\} : R \times R & \longrightarrow & R' \\ (r_1, r_2) & \longmapsto & \{r_1, r_2\} = [s_1 r_1, s_1 r_2 - s_0 r_2] \end{array}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca ∂_2 ve ∂_1 i sırasıyla d_2 ve d_1 in $N\mathcal{L}_2$ ve $N\mathcal{L}_1$ e kısıtlanmışı olarak alalım. Aynı zamanda $N\mathcal{L}_0$ ın $N\mathcal{L}_1$ üzerine etkisini $z \in N\mathcal{L}_0$, $y \in N\mathcal{L}_1$ için

$${}^{z}y = [s_0 z, y],$$

$N\mathcal{L}_0$ ın $N\mathcal{L}_2$ üzerine etkisini $z \in N\mathcal{L}_0$, $x \in N\mathcal{L}_2$ için

$${}^{z}x = [s_0 s_0 z, x]$$

ve $N\mathcal{L}_1$ in $N\mathcal{L}_2$ üzerine etkisini $y \in N\mathcal{L}_1$ ve $x \in N\mathcal{L}_2$ için

$$y \cdot x = [s_1 y, x]$$

olarak alalım. Öncelikle ispatlarda yardımcı olacağından Lie 2-çaprazlanmış modüller kategorisinde elde edilen aşağıdaki sonuçları verelim. Her $y \in R$ ve $x, x_1, x_2 \in R'$ için

$$\begin{array}{rcl} [s_1 d_2 x_1, s_1 d_2 x_2 - s_0 d_2 x_2] & = & [x_1, x_2] \\ [s_0 y - s_1 y, s_1 d_2 x] & = & [s_0 y - s_1 y, x] \\ [s_1 s_0 d_1 y - s_0 y, x] & = & 0 \\ [s_1 y, s_1 d_2 x - s_0 d_2 x] & = & [s_1 y, x] \end{array}$$

dir. Bu eşitlikler ve yukarıda verilen tanımlamalar yardımıyla

$$R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{L}$$

nin Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Her $x, x_1, x_2 \in R'$, $y, y_0, y_1, y_2 \in R$ ve $z \in \mathcal{L}$ için

1).

$$\begin{aligned}\partial_2\{y_0,y_1\} &= \partial_2[s_1y_0, s_1y_1 - s_0y_1]\\ &= [d_2s_1y_0, d_2s_1y_1 - d_2s_0y_1]\\ &= [y_0, y_1 - s_0d_1y_1] \quad (\because d_2s_1 = Id \text{ ve } d_2s_0 = s_0d_1)\\ &= [y_0,y_1] - [y_0, s_0d_1y_1]\\ &= [y_0,y_1] - y_0\cdot\partial_1(y_1)\end{aligned}$$

olur.

2).

$$\begin{aligned}\{\partial_2(x_1),\partial_2(x_2)\} &= [s_1d_2x_1, s_1d_2x_2 - s_0d_2x_2]\\ &= [x_1,x_2]\end{aligned}$$

olur.

3).

$$\begin{aligned}\{\partial_2(x),y\} &= [s_1d_2x, s_1y - s_0y]\\ &= [s_1(y),x] - [s_0(y),x]\\ &= y\cdot x - \partial_1(y)\cdot x\end{aligned}$$

olur.

4).

$$\begin{aligned}\{y,\partial_2(x)\} &= [s_1y, s_1\partial_2x - s_0\partial_2x]\\ &= [s_1(y),x]\\ &= y\cdot x\end{aligned}$$

olur.

5).

$$\begin{aligned}\{y_0,y_1\}\cdot z &= [s_1y_0, s_1y_1 - s_0y_1]\cdot z\\ &= [s_0s_0z, [s_1y_0, s_1y_1 - s_0y_1]]\\ &= [[s_0s_0z, s_1y_0], s_1y_1 - s_0y_1] + [s_1y_0, [s_0s_0z, s_1y_1 - s_0y_1]]\\ &= [[s_0s_0z, s_1y_0], s_1y_1 - s_0y_1] + [s_1y_0, [s_0s_0z, s_1y_1] - [s_0s_0z, s_0y_1]]\\ &= [[s_1s_0z, s_1y_0], s_1y_1 - s_0y_1] + [s_1y_0, [s_1s_0z, s_1y_1] - [s_0s_0z, s_0y_1]]\\ &= [s_1[s_0z,y_0], s_1y_1 - s_0y_1] + [s_1y_0, s_1[s_0z,y_1] - s_0[s_0z,y_1]]\\ &= \{[s_0z,y_0],y_1\} + \{y_0,[s_0z,y_1]\}\\ &= \{y_0\cdot z, y_1\} + \{y_0, y_1\cdot z\}\end{aligned}$$

olur benzer şekilde

6).

$$\{[y_0,y_1],y_2\} = \{y_0,y_2\}\cdot\partial_1(y_1) + \{y_1,[y_0,y_2]\} - \{y_1,y_2\}\cdot\partial_1(y_0) - \{y_0,[y_1,y_2]\}$$

ve

7).

$$\{y_0,[y_1,y_2]\} = \{y_0,y_1\}\cdot\partial_1(y_2) - \{y_0,y_2\}\cdot\partial_1(y_1) + \{y_1,[y_0,y_2] - y_0\cdot\partial_1(y_2)\} - \{y_2,[y_0,y_1] - y_0\cdot\partial_1(y_1)\}$$

şartlarıda sağlanır. Aynı zamanda her $a\in A$, $r\in R$ ve $r'\in R'$ için

i).

$$\begin{aligned}\partial_1(ar) &= d_1(ar)\\ &= ad_1(r)\\ &= a\partial_1(r)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\partial_2(ar') &= d_2(ar')\\ &= ad_2(r')\\ &= a\partial_2(r')\end{aligned}$$

olur.

ii). L Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Lie-Rinehart cebir olduğundan

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{L}_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0{,}d_1{,}d_2"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\alpha''"] & \mathcal{L}_1 \arrow[l, shift left=4, "s_0{,}s_1"] \arrow[l, shift left=6] \arrow[r, shift left, "d_0{,}d_1"] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & \mathcal{L}_0 \arrow[l, shift left=2, "s_0"] \arrow[d, "\alpha"] \\
& Der(A) \arrow[r, equal] & Der(A) \arrow[r, equal] & Der(A)
\end{tikzcd}$$

diyagramına sahibiz. Bu diyagram normalizasyon funktor sayesinde

$$\begin{tikzcd}
N\mathcal{L}_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\alpha''=0"] & N\mathcal{L}_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\alpha'=0"] & N\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 \arrow[d, "\alpha=0"] \\
Der(A) & Der(A) & Der(A)
\end{tikzcd}$$

haline gelir. d_1 Lie-Rinehart homomorfizmi olduğundan

$$\alpha' = \alpha d_1$$

dir. Bu ifade ikinci diyagram için de geçerli olacağından

$$\alpha' = \alpha\partial_1 = 0$$

olacaktır. Yani,

$$\begin{aligned}\partial_1(r)(a) &= (\alpha(\partial_1(r)))(a)\\ &= (\alpha\partial_1(r))(a)\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. O halde

$$R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{L}$$

Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüldür.

Tersine, $R' \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{L}$ Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modül olsun. Öncelikle $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ olarak alalım. $\mathcal{L}$ nin R üzerine etkisi yardımıyla $\mathcal{L}_1 = R \ltimes \mathcal{L}$ yarı-direkt çarpımını oluşturabiliriz. Bu durumda

$$\begin{array}{rccl}
d_0: & R \ltimes \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\
 & (r,l) & \longmapsto & l \\
d_1: & R \ltimes \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\
 & (r,l) & \longmapsto & \partial_1(r)+l \\
s_0: & \mathcal{L} & \longrightarrow & R \ltimes \mathcal{L} \\
 & l & \longmapsto & (0,l)
\end{array}$$

homomorfizmaları vardır. Ayrıca $r \in R$ nin $r' \in R'$ üzerine etkisi

$$r \cdot r' = {}^{\partial_1 r} r' - \{r, \partial_2 r'\}$$

olarak verilmektedir. Bu etki yardımıyla $R' \ltimes R$ yarı-direkt çarpımını oluşturabiliriz. Bu durumda $(r,l) \in R \ltimes \mathcal{L}$ nin $(r', r_1) \in R' \ltimes R$ üzerine etkisi

$${}^{(r,l)}(r', r_1) = ({}^{l} r' + {}^{\partial_1 r} r' + \{r, r_1\}, {}^{l} r_1 + [r, r_1])$$

şeklindedir. Bu etki yardımıyla $\mathcal{L}_2 = (R' \ltimes R) \ltimes (R \ltimes \mathcal{L})$ yarı-direkt çarpımını oluşturabiliriz. Bu durumda

$$\begin{array}{rccl}
d_0: & (R' \ltimes R) \ltimes (R \ltimes \mathcal{L}) & \longrightarrow & R \ltimes \mathcal{L} \\
 & (r', r_1, r_2, l) & \longmapsto & (r_2, l) \\
d_1: & (R' \ltimes R) \ltimes (R \ltimes \mathcal{L}) & \longrightarrow & R \ltimes \mathcal{L} \\
 & (r', r_1, r_2, l) & \longmapsto & (r_1 + r_2, l) \\
d_2: & (R' \ltimes R) \ltimes (R \ltimes \mathcal{L}) & \longrightarrow & R \ltimes \mathcal{L} \\
 & (r', r_1, r_2, l) & \longmapsto & (r_1, \partial_1(r_2) + l) \\
s_0: & R \ltimes \mathcal{L} & \longrightarrow & (R' \ltimes R) \ltimes (R \ltimes \mathcal{L}) \\
 & (r,l) & \longmapsto & (0,0,r,l) \\
s_1: & R \ltimes \mathcal{L} & \longrightarrow & (R' \ltimes R) \ltimes (R \ltimes \mathcal{L}) \\
 & (r,l) & \longmapsto & (0,r,0,l)
\end{array}$$

homomorfizmaları vardır.

$$\begin{array}{rcl}
d_0^1 d_1^2(r', r_1, r_2, l) & = & d_0^1(r_1 + r_2, l) \\
 & = & l
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
d_0^1 d_0^2(r', r_1, r_2, l) & = & d_0^1(r_2, l) \\
 & = & l
\end{array}$$

olduğundan $d_0^1 d_1^2 = d_0^1 d_0^2$ olur.

$$\begin{array}{rcl}
d_0^1 d_2^2(r', r_1, r_2, l) & = & d_0^1(r_1, \partial_1(r_2) + l) \\
 & = & \partial_1(r_2) + l
\end{array}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1^1 d_0^2(r', r_1, r_2, l) &= d_1^1(r_2, l) \\ &= \partial_1(r_2) + l \end{aligned}$$

olduğundan $d_0^1 d_2^2 = d_1^1 d_0^2$ olur.

$$\begin{aligned} d_1^1 d_2^2(r', r_1, r_2, l) &= d_1^1(r_1, \partial_1(r_2) + l) \\ &= \partial_1(r_1) + \partial_1(r_2) + l \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1^1 d_1^2(r', r_1, r_2, l) &= d_1^1(r_1 + r_2, l) \\ &= \partial_1(r_1 + r_2) + l \\ &= \partial_1(r_1) + \partial_1(r_2) + l \end{aligned}$$

olduğundan $d_1^1 d_2^2 = d_1^1 d_1^2$ olur.

$$\begin{aligned} s_0^2 s_0^1(l) &= s_0^2(0, l) \\ &= (0, 0, 0, l) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s_1^2 s_0^1(l) &= s_1^2(0, l) \\ &= (0, 0, 0, l) \end{aligned}$$

olduğundan $s_0^2 s_0^1 = s_1^2 s_0^1$ olur. Yani bu homomorfizmalar simplisel özdeşlikleri sağlar. O halde

$$\mathfrak{L}_2 \underset{s_0, s_1}{\overset{d_0, d_1, d_2}{\rightrightarrows}} \mathfrak{L}_1 \underset{s_0}{\overset{d_0, d_1}{\rightrightarrows}} \mathfrak{L}_0$$

yapısı 2-parçalanmış simplisel Lie-Rinehart cebirdir. Böylece bir

$$N_2 : \mathfrak{X}_2\mathfrak{mod}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Tr}_2\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$$

funktoru elde edilir.

$$st_k : \mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Simp}_{\leq k}(\mathfrak{LR})$$

funktoru ve N_2 nin bileşkesi alınarak

$$s_2 : \mathfrak{X}_2\mathfrak{mod}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Simp}_{\leq 2}(\mathfrak{LR})$$

elde edilir. Böylece Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Lie-Rinehart cebirler kategorisi ile Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller kategorisi arasında bir doğal denklik elde edilmiş olur. □

BÖLÜM 7

SONUÇ ve ÖNERİLER

Lie-Rinehart cebirler diferansiyel geometrinin üzerinde yoğun olarak henüz çalışılmamış bir kısmıdır. 1950 lerde diferansiyel geometri, fizik ve cebir içinde değişik isimlerle defalarca ortaya konulmuştur. Daha sonra Huebschmann (1990,2004) çalışmalarında kuantum mekaniğinde Lie-Rinehart cebirlerin kullanılabileceğini ileri sürmüştür.

Lie-Rinehart cebirlerine yapı itibariyle benzerlik gösteren Poisson cebirleri, saf olarak klasik mekanik uygulamalara sahiptir. Ayrıca Lian ve Zuckerman (1993) çalışmasında Poisson cebirlerinin sicim teoride ve topolojik alan teorilerinin BRST kohomoloji yapılarında da kullanılabileceğini göstermiştir. Aynı zamanda Huebschmann (1990) çalışmasında Poisson kohomolojisi ile kuantum mekaniğini incelemiştir.

Bu çalışmada Simplisel Lie-Rinehart cebirler, cat^1 Lie-Rinehart cebirler ve Lie-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller tanımlanarak ilgili kategorilerle doğal denkliği verilmiştir. Ayrıca Lie-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisinin kategoriksel özellikleri incelenmiştir.

Yapılan bu çalışmanın yanısıra Lie-Rinehart cebirler için indirgenmiş çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış kare, 3-çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış küp, kuadratik modüller ve nilpotent çaprazlanmış modüllerin varlığı araştırılıp bu kavramların tanımlanması mümkün görünmektedir.

Diğer taraftan aynı cebirsel yapı üzerinde tam çaprazlanmış modüller, aktör çaprazlanmış modüller ve aktör kulesinin inşaası yapı itibariyle tanımlanmaya müsait olmadığı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça,İ., Arvasi, Z., 2002, Simplicial and Crossed Lie Algebras,Homology, Homotopy and Applications, Vol.4(1), 43-57.

Alp, M., Gürmen, Ö., 2006, Pushouts of Crossed Module and Cat^1-Lie algebra, XIX. Matematik Sempozyumu Kütahya-TÜRKİYE, 403-409.

André, M., 1970, Homologie des Algebrès Commutatives, Springer-Verlag, 206.

Arvasi, Z., 1997, Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Theory and Applications of Categories, Vol.3, No.7, 160-181.

Arvasi, Z., Porter T., 1996, Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, Journal of Algebras, 181, 426-448.

Arvasi, Z., Porter T., 1998, Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Applied Categorical Structures, Vol.6, No.4, 455-471.

Arvasi, Z., Ulualan, E.,2007, Quadratic and 2-Crossed Modules of Algebras, Algebra Colloquium, 14:4, 669-686.

Brown, R., 1982, Higher Dimensional Group Theory, Low Dimensional Topology, London Math. Soc. Lecture Note Series, 48 , 215-238.

Brown, R., 1984, Coproducts of Crossed P-modules: Applications to second Homotopy Groups and to the Homology of Groups, Topology, 23, 337-345.

Brown, R., Higgins, P., 1978, On the Connection between the Second Relative Homotopy Groups of some Related Spaces, Proc. London Math. Soc.,3, 36, 193-212.

Brown, R., Higgins, P., 1981, Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups, J. Pure Appl. Algebra, 22 , 249-370.

Brown, R., Huebschmann, J., 1981, Identities among Relations, J. Pure Appl. Algebra, 21 , 233-260.

Brown, R., Loday, J.L., 1987, Homotopical Excision, and Hurwicz Theorems, for n-cubes of Spaces, Proc. London Math. Soc., 54, 3, 176-192.

Brown, R., Loday, J.L., 1987, Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces, Topology, 26 , 311-335.

Casas, J.M., 1991, Invariantes de Módulos Cruzados en Álgebras de Lie, Ph.D.Thesis, University of Santiago.

Casas, J.M., Obstructions to Lie-Rinehart Algebra Extensions, Algebra Colloquium, (Baskıda).

Casas, J.M., Ladra, M., 1998, The Actor of a Crossed Module in Lie Algebras, Communications in Algebra, 26(7), 2065-2089.

Casas, J.M., Ladra, M., 2000, Colimits in the Crossed Modules Category in Lie Algebras, Georgian Mathematical Journal, 7, 3, 461-474.

Casas, J.M., Ladra, M., Pirashvili, T., 2004, Crossed Modules for Lie-Rinehart Algebras, Journal of Algebra, 274, 192-201.

Casas, J.M., Ladra, M., Pirashvili, T., 2005, Triple Cohomology of Lie-Rinehart Algebras and Canonical Class of Associative Algebras, Journal of Algebra,291, 144-163.

Conduchè, D., 1984, Modules Croisès Gènèralisès de Longueur 2, J. Pure Appl. Algebra, 34, 155-178.

Ege, U., 1998, Çaprazlanmış Modüller, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi.

Ellis, G.J., 1984, Crossed Modules and their Higher Dimensional Analogues, Ph.D Thesis University of Wales, Bangor.

Ellis, G.J., 1988, Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras, J.Pure Appl. Algebra 52 , 277-282.

Ellis, G.J., 1993, Homotopical Aspects of Lie Algebras, J.Austral. Math. Soc.(Series A), 54, 393-419.

Grandjeán, A.R. and Vale, M.J., 1986, 2-Modulos Cruzados en la Cohomologia de André-Quillen, Memorias de la Real Academia de Ciencias, 22, 1-28.

Gerstenhaber, M., 1966, On the Deformation of Rings and Algebras, Annals of Math. Soc., 84, 1-19.

Herz, J., 1953, Pseudo-algébres de Lie, C.R. Acad. Sci. Paris, 236, 1935-1937.

Huebschmann, J., 1990, Poisson cohomology and quantization, J. Reine Angew. Math., 408, 57–113.

Huebschmann, J., 1998, Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras and Batalin-Vilkovisky algebras, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 48, 425-440.

Huebschmann, J., 1999, Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class, J. Reine Angew. Math., 510, 103-159.

Huebschmann, J., 1999, Extensions of Lie-Rinehart algebras and the Chern-Weil construction. Higher homotopy structures in topology and mathematical physics, Amer. Math. Soc., 227, 145–176.

Huebschmann, J., 2000, Differential Batalin-Vilkovisky algebras arising from twilled Lie-Rinehart algebras. Poisson geometry Polish Acad. Sci., Banach Center Publ., 51,. Warsaw, 51, 87–102.

Huebschmann, J., 2004, Lie-Rinehart algebras, descent, and quantization. Galois theory, Hopf algebras, and semiabelian categories, Amer. Math. Soc., 43, 295-316.

Huebschmann, J., 2005, Higher homotopies and Maurer-Cartan algebras: quasi-Lie-Rinehart, Gerstenhaber, and Batalin-Vilkovisky algebras. The breadth of symplectic and Poisson geometry, Progr. Math., 232, 237–302.

Kan, D.M., 1958, A Combinatorial Definition of Homotopy Groups, Annals of Maths., 6, 288-312.

Kassel, C., Loday, J.L., 1982, Extensions Centrales d'algébres de Lie, Ann. Inst. Fourier. Grenable, 32(4), 119-142.

Lian, B.H., Zuckerman, G.J., 1993, New Perspectives on the BRST-Algebraic Structure of String Theory, Commun. Math. Phys.,154, 613-646.

Lichtenbaum, S. and Schlessinger, M., 1967, The Cotangent Complex of a Morphism, Trans Amer. Math. Soc., 128, 41-70.

Loday, J.L., 1982, Spaces with Finitely many non-trivial Homotopy Groups, J. Pure and Applied Algebra, Vol. 24, 179-202.

Lue, T., 1979, Semi-Complete Crossed Modules and Holomorphs of Groups, Bull.London Math.Society, 11 , 8-16.

Mac Lane, S., 1971, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, 5 Springer, New York.

Moerdijk, I. and Mrćun, J., On the Universal Enveloping Algebra of a Lie-Rinehart Algebra, Preprint: arXiv:0801.3929v2.

Mutlu, A., Porter T., 1998, Freeness Conditions for 2-Crossed Modules and Complexes, Theory and Applications of Categories, Vol.4, No.8, 174-194.

Mutlu, A., Porter T., 2000, Freeness Conditions for Crossed Squares and Squared Complexes, Kluwer Academic Publishers, 20, 345-368.

Norrie, K.J., 1987, Crossed Modules and Analogues of Group Teorems, Ph.D.Thesis, King's College.

Porter, T., 1978, Some Categorical Results in the Category of Crossed Modules in Commutative Algebra, J. Algebra, 109, 415-429.

Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 99, 458-465.

Rinehart, G., 1963, Differential forms for general commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 108, 195-222.

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and an Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Thesis,U.C.N.W.

Walery, D. , Loday, J.L, 1981, Obstructions Áléxcision en K-théorie Algébrique, Springer Lecture Notes in Mathematics, 854, 179-216.

Whitehead, J. H. C., 1949, Combinatorial Homotopy, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 453-496.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Aytekin 28 Temmuz 1979 tarihinde Yozgat'ta doğmuştur. Lisans öğrenimine 1998 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başlamış ve 2002 yılında mezun olmuştur. Yüksek lisans öğrenimini 2005 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalında "Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri" başlıklı teziyle tamamlamıştır. İş hayatına 2002 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak başlamıştır. 2006 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde doktora öğrenimini yapmak üzere görevlendirilmiştir ve halen aynı bölümde akademik çalışmalarına devam etmektedir.

Eskişehir Osmangazi
Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Matematik ve
Bilgisayar Bilimleri Bölümü
ESKİŞEHİR