

**BAZI ÖKLİDYEN PROBLEMLERİN  
TAKSİ GEOMETRİDEKİ BENZERLERİ**

**Harun Barış ÇOLAKOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Aralık - 2005**

**BAZI ÖKLİDYEN PROBLEMLERİN  
TAKSİ GEOMETRİDEKİ BENZERLERİ**

**Harun Barış ÇOLAKOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Aralık - 2005**

**TAXICAB ANALOGUES OF  
SOME EUCLIDEAN PROBLEMS**

**Harun Barış ÇOLAKOĞLU**

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

**Department of Mathematics**

**December - 2005**

**BAZI ÖKLİDYEN PROBLEMLERİN  
TAKSİ GEOMETRİDEKİ BENZERLERİ**

**Harun Barış ÇOLAKOĞLU**

**Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır**

**Danışman: Prof. Dr. Rüstem KAYA**

**Aralık - 2005**

Harun Barış ÇOLAKOĞLU' nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “BAZI ÖKLİDYEN PROBLEMLERİN TAKSİ GEOMETRİDEKİ BENZERLERİ” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye : Doç. Dr. Münevver ÖZCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

Taksi düzlem  $\mathbb{R}_T^2$ , Öklidyen analitik düzlem  $\mathbb{R}^2$  ile hemen hemen aynıdır. Noktalar ve doğrular aynı, açılar da aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Menger, [13] de analitik düzlemde verilen  $A=(x_1, y_1)$  ve  $B=(x_2, y_2)$  noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

yerine, [14] de Minkowski tarafından tanımlanan

$$d_M(A, B) = \left[ |x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

metriğinin  $p=1$  için özel hali olan

$$d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

uzaklığını kullanarak taksi düzlem geometri fikrini ortaya attı ve bu fikir, [11] de Krause tarafından geliştirildi. Daha sonraları bir çok matematikçi taksi düzlem geometri üzerine çalışmalar yaptı. Yapılan çalışmaların bazıları tez sonunda referans olarak verilmiştir. Bakınız [2,3,4,6,9,12,18,20,22] .

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde taksi geometride bilinen bazı kavramlar özetlendi. İkinci bölümde, Öklidyen düzlemde üçgenlerle ilgili bazı formüllerin taksi benzerleri verildi. Üçüncü bölümde, verilen üç noktadan geçen taksi çemberlerin varlığı geometrik olarak incelendi. Dördüncü bölümde, Öklidyen uzayda bir dörtyüzlünün hacmini, kenar uzunlukları cinsinden veren formülün bir taksi benzeri verildi. Beşinci bölümde, Öklid düzleminde iyi bilinen kissoid, konhoid ve sikloid eğrilerinin taksi benzerleri elde edildi.

## SUMMARY

The taxicab plane  $\mathbb{R}_T^2$  is almost the same as the Euclidean analytical plane  $\mathbb{R}^2$ . The points are the same, the lines are the same, and the angles are measured in the same way. However, the distance function is different. In [13], Menger has introduced the taxicab plane geometry by using the metric

$$d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

which is special case for  $p = 1$  of Minkowski metric

$$d_M(A, B) = \left[ |x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

defined in [14] by Minkowski, instead of Euclidean distance function

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

for any two points  $A = (x_1, y_1)$  and  $B = (x_2, y_2)$  in the analytical plane. This geometry has been developed in [11] by Krause. Later, some mathematicians have studied on taxicab plane geometry. Some of them have been given as references at the end of this thesis. See [2,3,4,6,9,12,18,20,22].

This study consists of five chapters. In the first chapter, some known concepts have been summarized in the taxicab geometry. In the second chapter, the taxicab analogues of some well-known triangle properties in Euclidean plane have been given. In the third chapter, existence of the taxicab circles through the given three points is investigated geometrically. In the fourth chapter, the taxicab analogue of the volume formulae of a tetrahedron in the Euclidean 3-space have been given. In the fifth chapter, the taxicab analogues of kissoid, konhoid and sycloid curves have been given.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm hocam

Prof. Dr. Rüstem Kaya' ya,

arkadaşım Özcan Gelişgen' e ve Çolakoğlu ailesine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2005

Harun Barış ÇOLAKOĞLU



# İçindekiler

<b>1</b>	<b>TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ÖKLİD DÜZLEMİNDE ÜÇGENLERLE İLGİLİ BAZI FORMÜLLERİN TAKSİ DÜZLEMDEKİ BENZERLERİ</b>	<b>12</b>
2.1	Thales Bağlıntıları	13
2.2	Kenarortay Teoremi	16
2.3	İç Açıortay Teoremi	23
2.4	Dış Açıortay Teoremi	27
2.5	Öklid Bağlıntıları	31
2.6	Pisagor Teoremi	36
2.7	Carnot Teoremi	41
2.8	Stewart Teoremi	44
2.9	Menelaus Teoremi	54
2.10	Ceva Teoremi	56
<b>3</b>	<b>TAKSİ DÜZLEMİNDEKİ ÇEMBERLERE BİR GEOMETRİK YAKLAŞIM</b>	<b>58</b>
3.1	Öklid Düzleminde Çember	59
3.2	Taksi Düzleminde Çember	60
<b>4</b>	<b>DÖRTYÜZLÜNÜN ÖKLİDYEN HACİM FORMÜLÜNÜN TAKSİ BENZERİ</b>	<b>75</b>
4.1	Heron Formülünün Bir Genelmesi	76
4.2	Taksi Uzayda Dörtüzlünün Hacmi	83

<b>5 ÖKLİDYEN DÜZLEMDEKİ KISSOİD, KONHOİD ve SİKLOİD EĞRİLERİNİN TAKSİ BENZERLERİ .....</b>	<b>86</b>
5.1 Kissoid Eğrisi .....	87
5.2 Konhoid Eğrisi .....	95
5.3 Sikloid Eğrisi .....	98
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>102</b>

## **Bölüm 1**

### **TEMEL KAVRAMLAR**

Her ne kadar referanslarda taksi geometriyi tanıtan ve inceleyen çalışmalar varsa da, bu bölümde tezi diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için taksi düzlem geometride ve 3-boyutlu taksi uzay geometride bilinen bazı kavram ve özellikler, [1, 8, 11, 13, 18, 21] nolu kaynaklar esas alınarak özetlendi.

### Taksi Düzlem, 3-Boyutlu Taksi Uzay ve Uzaklık Fonksiyonları

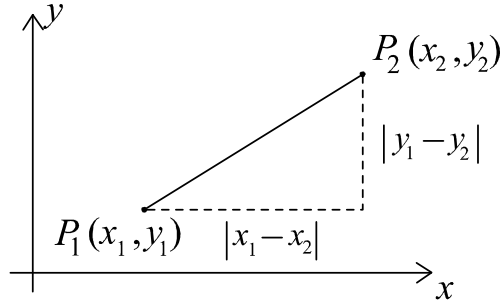
Taksi düzlemi  $\mathbb{R}_T^2$  nin noktaları ve doğruları, Öklid düzlemi  $\mathbb{R}^2$  nin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açılar da aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Analitik düzlemde alınan  $P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken, taksi uzaklık

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

ile tanımlıdır. Daha açık olarak,  $P_1$  ve  $P_2$  noktaları arasındaki  $d_T$  taksi uzaklığı,  $P_1$  den  $P_2$  ye en kısa yolun uzunluğu olarak, bu noktalardan koordinat eksenlerine paralel olarak çizilen doğru parçalarının birleşiminin uzunluğundan ibarettir. (Bkz. Şekil 1.1)



Şekil 1.1

3-boyutlu taksi uzay  $\mathbb{R}_T^3$  de benzer biçimde tanımlanır: 3-boyutlu taksi uzay  $\mathbb{R}_T^3$ , 3-boyutlu analitik uzayda alınan  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  noktaları için tanımlı Öklidyen uzaklık fonksiyonu

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

yerine taksi metrik

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

kullanılarak elde edilir. Yani, basitçe 3-boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{R}^3$  de  $d_E$  yerine  $d_T$  alınarak oluşturulur.

Şimdi taksi düzlemde bilinen bazı kavram ve özellikleri özetleyelim:

**Teorem 1.1 :**  $P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  analitik düzlemde farklı iki nokta olsun.  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğrunun eğimi  $m$  olmak üzere,

$$i. m \in \mathbb{R} \text{ iken, } d_E(P_1, P_2) = \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(P_1, P_2)$$

$$ii. m \rightarrow \infty \text{ iken, } d_E(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$$

dir (Bkz.[8] ).

**İspat :** Birbirinden farklı  $P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  noktalarından geçen doğrunun

eğimi  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$  dir.

*i.*  $m \in \mathbb{R}$  iken  $x_1 \neq x_2$  dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{d_E(P_1, P_2)}{d_T(P_1, P_2)} &= \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2 \right]}}{|x_1 - x_2| \cdot \left( 1 + \left| \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right| \right)} \\ &= \frac{|x_1 - x_2| \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2}}{|x_1 - x_2| \cdot \left( 1 + \left| \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right| \right)} = \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2}}{\left( 1 + \left| \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right| \right)} \quad \text{bulunur. O halde,} \end{aligned}$$

$$d_E(P_1, P_2) = \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(P_1, P_2) \quad \text{dir.}$$

*ii.*  $m \rightarrow \infty$  iken  $x_1 = x_2$  dir. Buna göre,

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_T(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|} = \frac{\sqrt{(y_1 - y_2)^2}}{|y_1 - y_2|} = 1 \quad \text{bulunur. O halde,}$$

$$d_E(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2) \quad \text{dir.}$$

□

**Teorem 1.2 :**  $P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  analitik düzlemde farklı iki nokta olsun. Eğer  $Q = (x, y)$ ,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru üzerinde ve  $P_2$  noktasından farklı bir nokta ise,

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{d_T(P_1, Q)}{d_T(P_2, Q)}$$

dir (Bkz. [16] ).

**İspat:**  $P_1 = Q$  ise eşitliğin sağlandığı açıktır.

$P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  noktalarından geçen doğrunun eğimi  $m$  olsun. Teorem 1.1 gereğince

$m \in \mathbb{R}$  iken,

$$d_E(P_1, Q) = \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(P_1, Q) \quad \text{ve} \quad d_E(P_2, Q) = \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(P_2, Q) \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{\left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(P_1, Q)}{\left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(P_2, Q)} = \frac{d_T(P_1, Q)}{d_T(P_2, Q)} \quad ;$$

$m \rightarrow \infty$  iken,

$$d_E(P_1, Q) = d_T(P_1, Q) \quad \text{ve} \quad d_E(P_2, Q) = d_T(P_2, Q) \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{d_T(P_1, Q)}{d_T(P_2, Q)} \quad \text{bulunur.}$$

□

**Teorem 1.3 :**  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  analitik uzayda farklı iki nokta olsun.

$P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru  $l$  ve  $l$  doğrusunun doğrultu vektörü  $(p, q, r)$  ise,

$$d_E(P_1, P_2) = \left( \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{|p| + |q| + |r|} \right) \cdot d_T(P_1, P_2)$$

dir (Bkz. [1] ).

**İspat:** 3-boyutlu analitik uzayda farklı  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  noktalarından geçen  $l$  doğrusunun doğrultu vektörü  $(p, q, r) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$  dir.

Buna göre,

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{d_T(P_1, P_2)} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{|p| + |q| + |r|} \text{ dir. O halde,}$$

$$d_E(P_1, P_2) = \left( \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{|p| + |q| + |r|} \right) \cdot d_T(P_1, P_2) \text{ bulunur.}$$

□

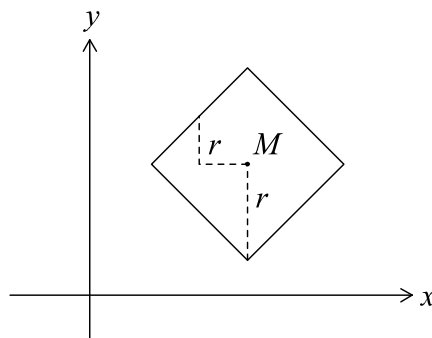
### Taksi Çemberi

Taksi düzlemde sabit bir noktadan sabit bir taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine **taksi çemberi** denir. Sabit nokta taksi çemberinin merkezini, sabit taksi uzaklığı da taksi çemberinin yarıçap uzunluğunu gösterir. Analitik düzlemde merkezi  $M = (a, b)$  ve yarıçapı  $r$  olan taksi çember

$$\mathcal{C} = \{(x, y) : |x - a| + |y - b| = r, x, y \in \mathbb{R}\}$$

dir ( Bkz. [11], [13] ).

Taksi çemberleri, bir kenarının eğimi 1 ya da -1 olan karelerdir. (Bkz. Şekil 1.2)



*Taksi Çemberi*

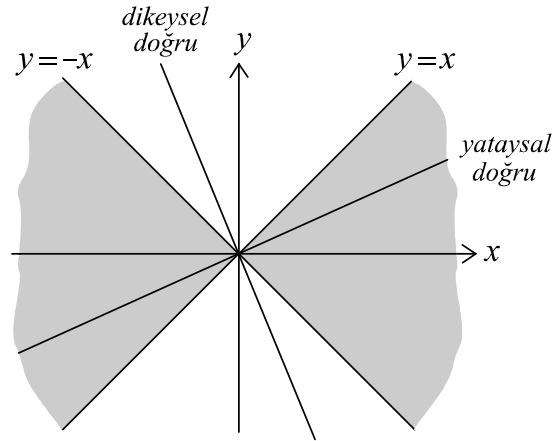
Şekil 1.2

### Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması

Taksi düzlemde  $l \dots ax+by+c=0$  doğrusu verilsin.  $l$  doğrusuna,

$\left|-\frac{a}{b}\right|>1$  ise, **dikeysel doğru** ;  $\left|-\frac{a}{b}\right|<1$  ise, **yataysal doğru** ;  $\left|-\frac{a}{b}\right|=1$  ise, **ayraç doğru**

denir ( Bkz. [11] ).



Şekil 1.3

### Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Taksi düzlemde bir  $P$  noktasının bir  $l$  doğrusuna olan uzaklığı,  $P$  nin  $l$  doğrusu üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır. Kısaca  $d_T(P,l) = \min_{X \in l} d_T(X,P)$  dir (Bkz. [11] ).

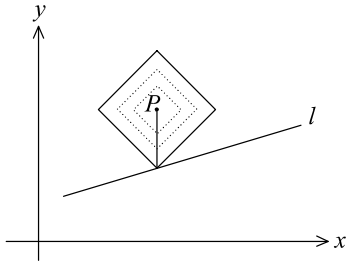
Taksi düzlemde bir  $P$  noktasının bir  $l$  doğrusuna olan uzaklığını bulmak için izlenilebilecek başka bir prosedür de merkezi  $P$  noktası olan bir taksi çemberinin yarıçapını, çember doğruya değene kadar büyütmezdür. Çember, doğruya değdiği anda çemberin yarıçapı,  $P$  noktasının  $l$  doğrusuna olan en kısa uzaklığı olur ( Bkz. [11] ). O halde,

*i)* Eğer  $l$  yataysal bir doğru ise,  $P$  noktasının  $l$  doğrusuna olan uzaklığı,  $P$  den  $l$  ye  $y$ -eksenine paralel uzaklıktır. (Bkz. Şekil 1.4)

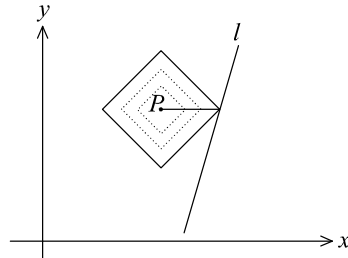
*ii)* Eğer  $l$  dikeysel bir doğru ise,  $P$  noktasının  $l$  doğrusuna olan uzaklığı,  $P$  den  $l$  ye  $x$ -eksenine paralel uzaklıktır. (Bkz. Şekil 1.5)



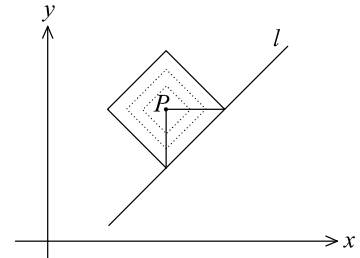
iii) Eğer  $l$  bir ayıraç doğru ise,  $P$  noktasının  $l$  doğrusuna olan uzaklığı,  $P$  den  $l$  ye  $x$ -eksenine paralel veya  $y$ -eksenine paralel uzaklıktır. (Bkz. Şekil 1.6)



Şekil 1.4



Şekil 1.5



Şekil 1.6

**Teorem 1.4 :** Taksi düzlemde herhangi bir  $P(x_0, y_0)$  noktasının  $l \dots ax + by + c = 0$  doğrusuna olan taksi uzaklığı

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

dir (Bkz. [9] ).

**İspat :** Taksi düzlemde bir  $P = (x_0, y_0)$  noktasının  $l$  doğrusuna olan uzaklığı  $d_T(P, l) = \min_{X \in l} d_T(X, P)$  ve  $X$  noktası,  $l$  doğrusuyla  $x = x_0$  veya  $y = y_0$  doğrusunun kesişim noktalarının biri olacağından hesaplamayla aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$d_T(P, l) = \begin{cases} \min \left\{ \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right|, \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a} \right| \right\}, & a \neq 0 \neq b \text{ iken} \\ \left| \frac{by_0 + c}{b} \right|, & a = 0 \text{ ve } b \neq 0 \text{ iken} \\ \left| \frac{ax_0 + c}{a} \right|, & b = 0 \text{ ve } a \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

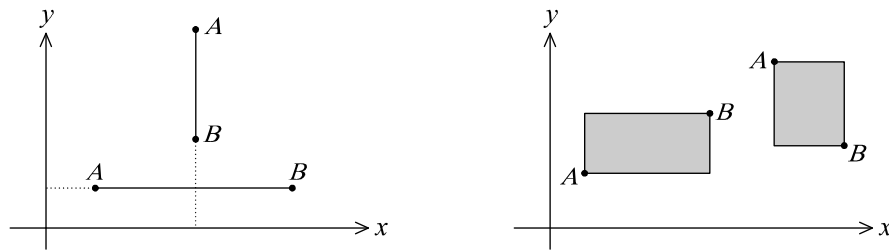
□

### En Kısa Uzaklık Kümesi

Taksi düzlemde herhangi  $A$  ve  $B$  noktaları için  $d_T(A, X) + d_T(X, B) = d_T(A, B)$  özelliğindeki tüm  $X$  noktalarının kümesine  $A$  ve  $B$  noktalarının **en kısa uzaklık kümesi** denir ( Bkz. [11] ).

**Teorem 1.4 :** Taksi düzlemde verilen farklı  $A$  ve  $B$  noktalarının en kısa uzaklık kümesi,  
*i.*  $A$  ve  $B$  noktaları aynı apsis veya aynı ordinata sahipse,  $AB$  doğru parçasıdır;

*ii.*  $A$  ve  $B$  noktaları farklı apsis ve ordinata sahipse, köşelerinin ikisi  $A$  ve  $B$  olan ayrıca kenarları eksenlere paralel olan dikdörtgenel bölgedir. (Bkz. Şekil 1.7)



Şekil 1.7

Teoremin ispatı basit fakat çok uzun olduğundan bırakıyoruz.

□

### Taksi Düzlemde İki Noktanın Orta Kümesi

Taksi düzlemde herhangi  $A$  ve  $B$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktaların geometrik yerine  **$A$  ve  $B$  noktalarının orta kümesi** denir. Bu küme

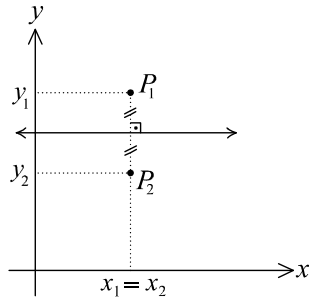
$$\{P = (x, y) : d_T(P, A) = d_T(P, B), x, y \in \mathbb{R}\}$$

dir (Bkz. [11] ).

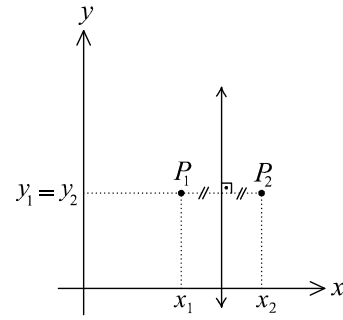
**Teorem 1.5 :** Taksi düzlemde verilen farklı  $P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktaların kümesi

i)  $x_1 = x_2$  ise,  $\left\{ (x, y) : y = \frac{y_1 + y_2}{2}, x \in \mathbb{R} \right\}$  dir.

ii)  $y_1 = y_2$  ise,  $\left\{ (x, y) : x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y \in \mathbb{R} \right\}$  dir.



Şekil 1.8



Şekil 1.9

iii)  $x_1 < x_2$ ,  $y_1 < y_2$  ve

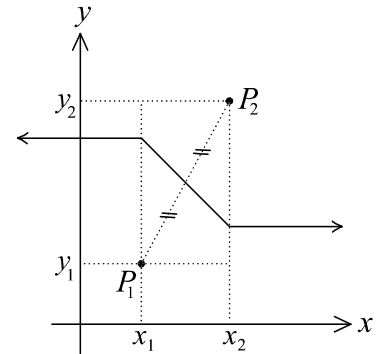
(a)  $(x_2 - x_1) < (y_2 - y_1)$  ise,

$$\left\{ (x, y) : y = \frac{-x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{2}, x \leq x_1 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : x + y = \frac{x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{2}, x_1 < x < x_2 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : y = \frac{x_1 - x_2 + y_1 + y_2}{2}, x_2 \leq x \right\}$$

kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.10

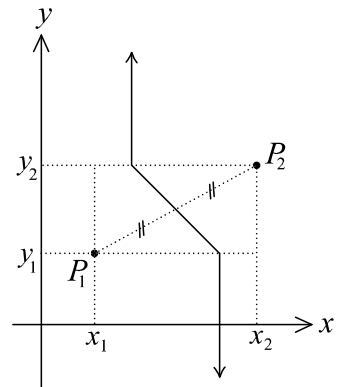
(b)  $(x_2 - x_1) > (y_2 - y_1)$  ise,

$$\left\{ (x, y) : x = \frac{x_1 + x_2 - y_1 + y_2}{2}, y \leq y_1 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : x + y = \frac{x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{2}, y_1 < y < y_2 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : x = \frac{x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}, y_2 \leq y \right\}$$

kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.11

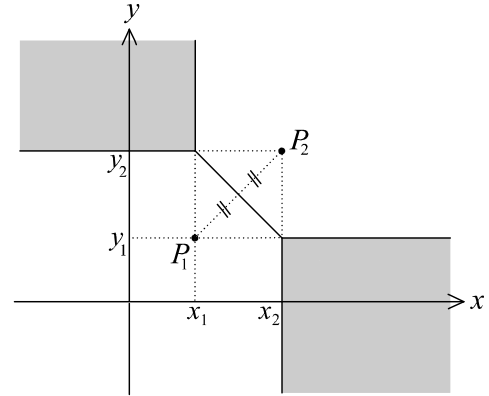
(c)  $(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)$  için,

$$\{(x, y) : x \leq x_1, y_2 \leq y\}$$

$$\left\{ (x, y) : x + y = \frac{x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{2}, x_1 < x < x_2 \right\}$$

$$\{(x, y) : x_2 \leq x, y \leq y_1\}$$

kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.12

ii)  $x_1 < x_2, y_1 > y_2$  ve

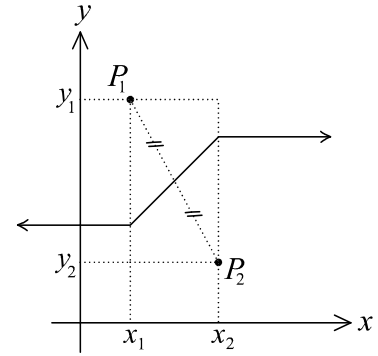
(a)  $(x_2 - x_1) < (y_1 - y_2)$  ise,

$$\left\{ (x, y) : y = \frac{x_1 - x_2 + y_1 + y_2}{2}, x \leq x_1 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : x - y = \frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}, x_1 < x < x_2 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : y = \frac{-x_1 + x_2 + y_1 + y_2}{2}, x_2 \leq x \right\}$$

kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.13

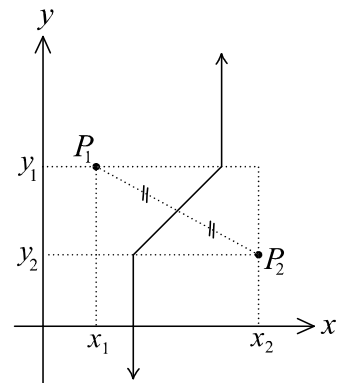
(b)  $(x_2 - x_1) > (y_1 - y_2)$  ise,

$$\left\{ (x, y) : x = \frac{x_1 + x_2 - y_1 + y_2}{2}, y \leq y_2 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : x - y = \frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}, y_2 < y < y_1 \right\}$$

$$\left\{ (x, y) : x = \frac{x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}, y_1 \leq y \right\}$$

kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.14

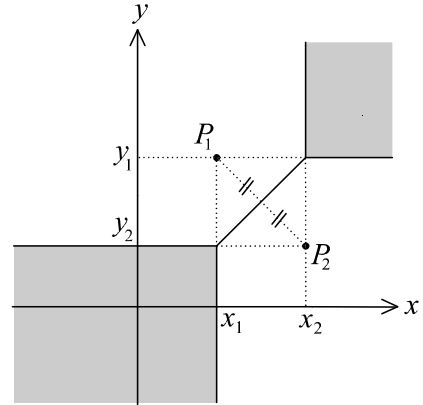
(c)  $(x_2 - x_1) = (y_1 - y_2)$  için,

$$\{(x, y) : x \leq x_1, y \leq y_2\}$$

$$\left\{ (x, y) : x - y = \frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}, x_1 < x < x_2 \right\}$$

$$\{(x, y) : x_2 \leq x, y_1 \leq y\}$$

kümelerinin birleşimidir.



Şekil 1.15

Teoremin ispatı basit fakat çok uzun olduğundan bırakıyoruz.

□

## **Bölüm 2**

### **ÖKLİD DÜZLEMİNDE ÜÇGENLERLE**

### **İLGİLİ BAZI FORMÜLLERİN**

### **TAKSİ BENZERLERİ**

Bu bölümde, Öklid düzlemindeki üçgenlere ait iyi bilinen bazı özelliklerin taksi benzerleri elde edilecektir. Ancak taksi düzlemde kenar uzunlukları ile verilen bir üçgen genel olarak tek türlü belirli olmadığı için özelliklerin taksi benzerlerinde kullanılacak parametreler, Öklid düzleminde kullanılan parametrelerle farklılık gösterebilecektir (Bkz. [8], [15], [16] ). İnceleyeceğimiz özelliklerin taksi benzerleri burada kullanılan parametreler dışında başka parametrelerle de elde edilebilir. Fakat burada amaç elde edilecek formülün Öklidyen formuna biçimsel anlamda da benzemesi olacaktır.

İncelenecek olan özellikler sırasıyla, Thales bağıntıları, kenarortay teoremi, iç ve dış açıortay teoremleri, Öklid bağıntıları, Pisagor teoremi, Carnot teoremi, Stewart teoremi, Menelaus teoremi ve Ceva teoremidir. Özelliklerin taksi versiyonları incelenmeden önce Öklidyen anlamda ifade ve ispatları verilecektir.

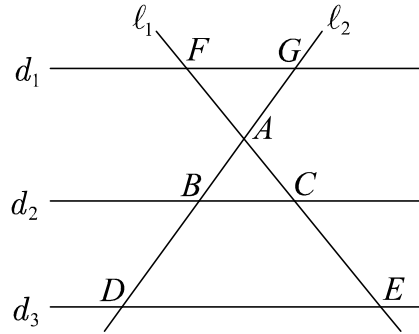
## 2.1 Thales Bağntıları

### Öklid Düzleminde Thales Bağntıları

Kesişen iki doğru, paralel üç doğruyla kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani, şekil 2.1.1 de  $d_1 // d_2 // d_3$  ve  $\ell_1 \not\parallel \ell_2$  ise

$$i. \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} \quad ii. \frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

dir.



Şekil 2.1.1

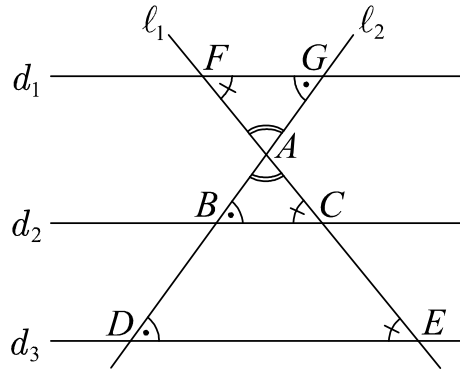
### İspat :

$ABC$  ve  $ADE$  üçgenlerinin (A.A.A) benzerliğinden (Bkz. Şekil 2.1.2)

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} ; \text{ABC ve AGF üçgenlerinin (A.A.A) benzerliğinden}$$

$$\frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|} \text{ elde edilir.}$$

□



Şekil 2.1.2

### Thales Bağıntılarının Taksi Benzeri

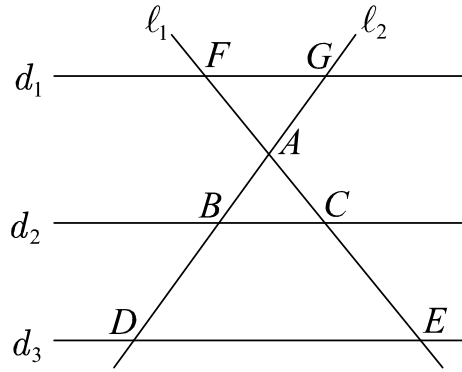
(A.A.A) benzerlik teoremi taksi düzlemde genel olarak geçerli değildir ( Bkz. [11] ).

#### Teorem 2.1.1 :

Kesişen iki doğru, paralel üç doğru ile kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani, şekil 2.1.3 de  $d_1 // d_2 // d_3$  ve  $\ell_1 \not\parallel \ell_2$  ise

$$i. \frac{d_T(A,B)}{d_T(A,D)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,E)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(D,E)} \quad ii. \frac{d_T(A,B)}{d_T(A,G)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,F)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(F,G)}$$

dir (Bkz. [16] ).



Şekil 2.1.3

#### İspat :

$A, B, D$  noktaları ve  $A, C, E$  noktaları doğruduş olduğundan Teorem 1.2 gereğince

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,D)} = \frac{d_T(A,B)}{d_T(A,D)} \quad \text{ve} \quad \frac{d_E(A,C)}{d_E(A,E)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,E)} \quad \text{dir. O halde}$$

$$\frac{d_T(A,B)}{d_T(A,D)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,E)} \quad \text{dir. } d_1 \text{ doğrusunun eğimi } m \text{ olsun. } d_1 // d_2 // d_3 \text{ olduğundan } d_2$$

ve  $d_3$  doğrularının eğimleri de  $m$  dir. Teorem 1.1 gereğince

$m \in \mathbb{R}$  için

$$d_E(B,C) = \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(B,C) \quad \text{ve} \quad d_E(D,E) = \left( \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \right) \cdot d_T(D,E) \quad \text{olduğundan}$$



$$\frac{d_E(B,C)}{d_E(D,E)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(B,C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(D,E)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(D,E)} ;$$

$m \rightarrow \infty$  için  $d_E(B,C) = d_T(B,C)$  ve  $d_E(D,E) = d_T(D,E)$  olduğundan

$$\frac{d_E(B,C)}{d_E(D,E)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(D,E)} \text{ dir. Sonuç olarak}$$

$$\frac{d_T(A,B)}{d_T(A,D)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,E)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(D,E)} \text{ bulunur.}$$

Benzer biçimde,  $A, B, G$  noktaları ve  $A, C, F$  noktaları doğrudan olduğundan Teorem 1.2 gereğince

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,G)} = \frac{d_T(A,B)}{d_T(A,G)} \text{ ve } \frac{d_E(A,C)}{d_E(A,F)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,F)} \text{ dir. O halde}$$

$$\frac{d_T(A,B)}{d_T(A,G)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,F)} \text{ dir. Teorem 1.1 gereğince}$$

$m \in \mathbb{R}$  için

$$d_E(B,C) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(B,C) \text{ ve } d_E(F,G) = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(F,G) \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{d_E(B,C)}{d_E(F,G)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(B,C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\right) \cdot d_T(F,G)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(F,G)} ;$$

$m \rightarrow \infty$  için  $d_E(B,C) = d_T(B,C)$  ve  $d_E(F,G) = d_T(F,G)$  olduğundan,

$$\frac{d_E(B,C)}{d_E(F,G)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(F,G)} \text{ dir. Sonuç olarak}$$

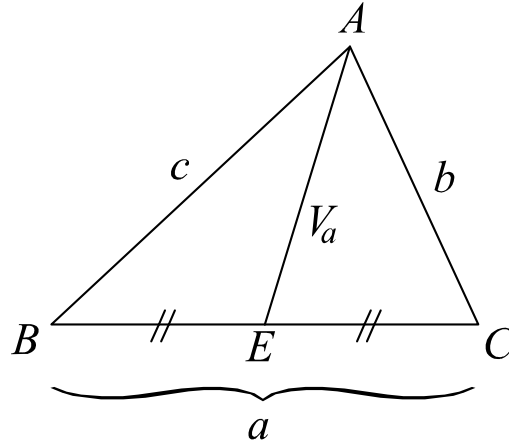
$$\frac{d_T(A,B)}{d_T(A,G)} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,F)} = \frac{d_T(B,C)}{d_T(F,G)} \text{ bulunur.}$$

□

## 2.2 Kenarortay Teoremi

### Öklid Düzleminde Kenarortay Teoremi

Bir üçgende herhangi bir kenara ait kenarortayın karesinin iki katı ile bu kenarın karesinin yarısının toplamı, diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir.



Şekil 2.2.1

Yani, şekil 2.2.1 e göre  $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$  dir.

### İspat :

Şekil 2.2.1 de  $AEC$  açısının derece cinsinden ölçüsü  $\alpha$  olarak alınırsa  $AEB$  açısının ölçüsü  $180 - \alpha$  olur.  $AEC$  ve  $AEB$  üçgenlerinde kosinüs teoremi gereğince

$$V_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot V_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha = b^2 \quad \text{ve} \quad V_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot V_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(180 - \alpha) = c^2$$

dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

elde edilir.

□

### Kenarortay Teoreminin Taksi Benzeri

Bir üçgenin herhangi bir kenarına ait kenarortayının uzunluğunu veren formülün taksi versiyonunu bulmak için, Özcan ve Kaya'nın [15] de üçgenin kenar uzunlukları cinsinden alanını veren formülün (Heron formülü) taksi versiyonunu bulmak için izledikleri yöntem benzer bir yöntem kullanılacaktır. [15] de kullanılan yeni tanımlar ve parametreler aşağıda verilmiştir:

—  $ABC$ , taksi düzlemde herhangi bir üçgen olsun. Üçgenin her köşesinde biri  $x$  eksenine, diğeri  $y$  eksenine paralel olan bir çift doğrunun varlığı açıktır. Bu doğrulardan, geçtiği köşenin karşısındaki kenarla kesişenlere özel olarak  $ABC$  üçgeninin **temel doğrusu** diyeceğiz. Yani, eğer  $l$ ,  $ABC$  üçgeninin bir temel doğrusu ise koordinat eksenlerinden birine paraleldir,  $ABC$  üçgeninin bir köşesinden geçer ve geçtiği köşenin karşısındaki kenarla kesişir. Üçgenin köşelerinden birinin daima bir ya da iki temel doğruya sahip olduğu yine açıktır. Böyle bir köşeye **temel köşe** diyeceğiz. Temel doğru üzerinde yatan ve temel köşe ile karşısındaki kenarla sınırlı doğru parçasına da **temel doğru parçası** diyeceğiz.

— [15] de parametreler şöyle tanımlanmıştır:

$D$  : Bir temel doğrunun karşı kenarı kestiği nokta,

$H$  : Kalan iki köşeden birinin, aynı temel doğru üzerindeki fakat temel doğru parçası üzerinde olmayan dik izdüşüm noktası,

$H'$  : Kalan üçüncü köşenin, yine aynı temel doğru üzerindeki fakat temel doğru parçası üzerinde olmayan dik izdüşüm noktası

olmak üzere,

$\alpha_T$  = Üçgenin temel doğru parçasının uzunluğu

$\alpha'_T = d_T(D, H)$

$\alpha''_T = d_T(\text{temel köşe}, H')$

dir.

Kenarortay teoreminin bir taksi benzerini vermek için yukarıdaki tanımları aynen alıp parametreleri biraz değiştireceğiz. Şöyle ki, bir  $ABC$  üçgeninde  $A$  köşesine ait kenarortay bulunacak ise,

$E$  noktası, kenarortayın karşı kenarı kestiği nokta ve

$D$  :  $A$  köşesine ait bir temel doğrunun karşı kenarı kestiği nokta,

$F$  :  $B$  ve  $C$  köşelerinden biri; öyle ki,  $D$  noktası  $F$  ile  $E$  noktaları arasında, ( $D$  ile  $E$  noktaları çakıştığı zaman, köşelerden herhangi biri  $F$  noktası olarak alınabilir.)

$F'$  :  $A$  ve  $F$  köşelerinden farklı olan köşenin aynı temel doğru üzerindeki izdüşümü olmak üzere;

$$\alpha_T = d_T(\text{temel doğru}, F)$$

$$\beta_T = d_T(A, F')$$

dir.

Şimdi bu tanım ve parametrelerle kenarortay teoreminin bir taksi benzerini verelim.

**Teorem 2.2.1 :**

Taksi düzlemde kenar uzunlukları  $a_T = d_T(B, C)$ ,  $b_T = d_T(A, C)$  ve  $c_T = d_T(A, B)$  olan bir  $ABC$  üçgeninin herhangi bir kenarına ait kenarortay uzunluğu, diyelim ki  $BC$  kenarına ait kenarortay uzunluğu  $V_{a_T}$  ve  $BC$  kenarının orta noktası  $E$  olmak üzere,

$$2V_{a_T} = \begin{cases} b_T + c_T & , A \text{ köşesinin hiç temel doğrusu yoksa} \\ b_T + c_T - 2\alpha_T & , A \text{ köşesinin bir tek temel doğrusu varsa} \\ b_T + c_T - 2(\alpha_T + \beta_T) & , A \text{ köşesinin iki tane temel doğrusu var ve} \\ & E \text{ noktası, } A \text{ köşesine ait temel doğrularla karşı} \\ & \text{kenarın kesişim noktaları arasında kalıyorsa} \\ |b_T - c_T| & , A \text{ köşesinin iki tane temel doğrusu var ve} \\ & E \text{ noktası, } A \text{ köşesine ait temel doğrularla karşı} \\ & \text{kenarın kesişim noktaları arasında kalmıyorsa} \end{cases}$$

dir ( Bkz. [10] ).

**İspat :**

$B'$  :  $B$  noktasının  $A$  dan geçen  $y$ -eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$C'$  :  $C$  noktasının  $A$  dan geçen  $x$ -eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$E'$  :  $E$  noktasının  $A$  dan geçen  $x$ -eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

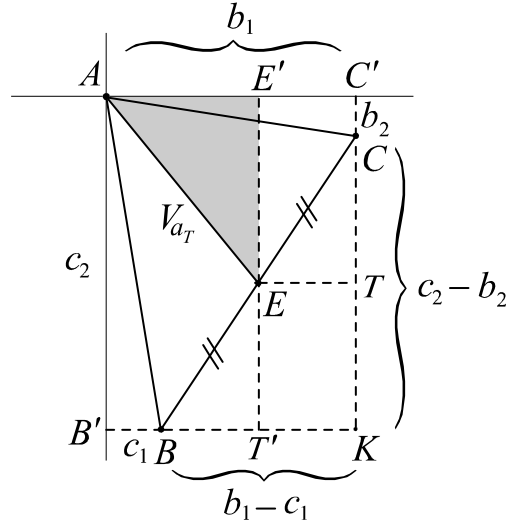
$T$  :  $E$  noktasının  $CC'$  doğrusuna dik izdüşümü,

$T'$  :  $E$  noktasının  $BB'$  doğrusuna dik izdüşümü

ve  $d_E(A, C') = b_1$ ,  $d_E(C, C') = b_2$ ,  $d_E(A, B') = c_2$ ,  $d_E(B, B') = c_1$  olsun. Böylece

$b_T = b_1 + b_2$ ,  $c_T = c_1 + c_2$  ve  $V_{a_T} = d_E(A, E') + d_E(E, E')$  dir.

*i.*  $ABC$  üçgeni,  $A$  köşesinde hiç temel doğrusu olmayan bir üçgen olsun.



Şekil 2.2.2

Şekil 2.2.2 de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E, T) = \frac{b_1 - c_1}{2}$  ve  $d_T(E, T') = \frac{c_2 - b_2}{2}$  dir.

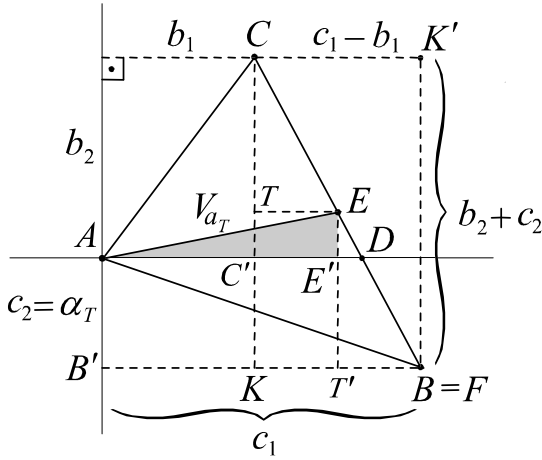
$d_E(A, E') = b_1 - d_T(E, T)$ ,  $d_E(E, E') = c_2 - d_E(E, T')$  ve  $V_{a_T} = d_E(A, E') + d_E(E, E')$

olduğundan

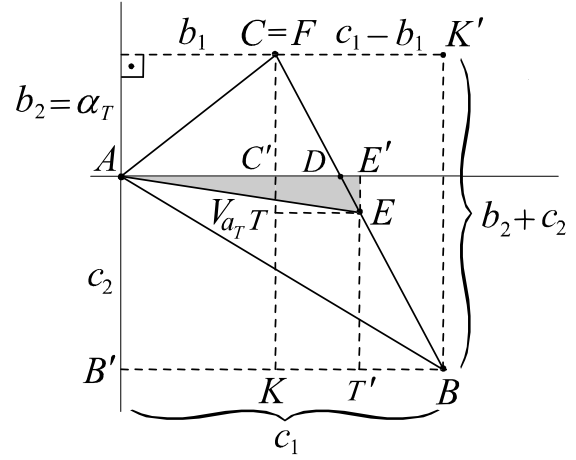
$V_{a_T} = b_1 - \frac{b_1 - c_1}{2} + c_2 - \frac{c_2 - b_2}{2} = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} = \frac{b_T}{2} + \frac{c_T}{2}$  dir. Buradan,

$2V_{a_T} = b_T + c_T$  bulunur.

*ii.*  $ABC$  üçgeni,  $A$  köşesinde bir tek temel doğrusu olan bir üçgen olsun.



Şekil 2.2.3



Şekil 2.2.4

Şekil 2.2.3 de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E, T) = \frac{c_1 - b_1}{2}$  ve  $d_T(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$  dir.

$$d_E(A, E') = b_1 + d_T(E, T) \quad , \quad d_E(E, E') = d_E(E, T') - c_2 \quad \text{ve} \quad V_{a_T} = d_E(A, E') + d_E(E, E')$$

olduğundan

$$V_{a_T} = b_1 + \frac{c_1 - b_1}{2} + \frac{b_2 + c_2}{2} - c_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} = \frac{b_T}{2} + \frac{c_T}{2} - c_2 \text{ dir.}$$

$c_2 = \alpha_T$  olduğundan

$$2V_{a_T} = b_T + c_T - 2\alpha_T \text{ bulunur.}$$

Şekil 2.2.4 de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E, T) = \frac{c_1 - b_1}{2}$  ve  $d_T(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$  dir.

$$d_E(A, E') = b_1 + d_T(E, T) \quad , \quad d_E(E, E') = c_2 - d_E(E, T') \quad \text{ve} \quad V_{a_T} = d_E(A, E') + d_E(E, E')$$

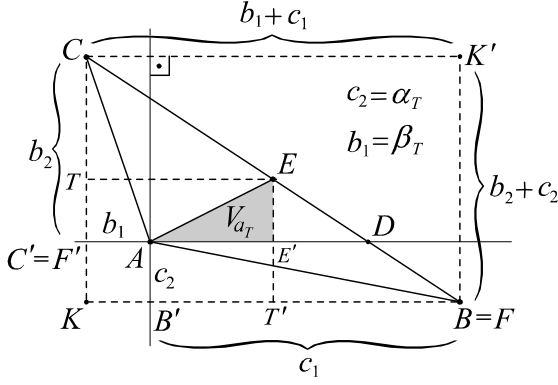
olduğundan

$$V_{a_T} = b_1 + \frac{c_1 - b_1}{2} + c_2 - \frac{b_2 + c_2}{2} = \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} = \frac{b_T}{2} + \frac{c_T}{2} - b_2 \text{ dir.}$$

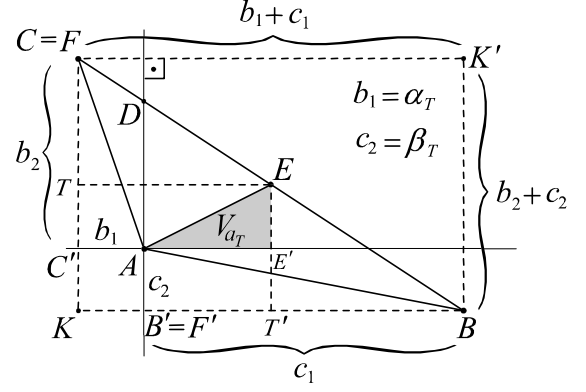
$b_2 = \alpha_T$  olduğundan

$$2V_{a_T} = b_T + c_T - 2\alpha_T \text{ bulunur.}$$

**iii.**  $ABC$  üçgeni,  $A$  köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun ve  $E$  noktası  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.



Şekil 2.2.5



Şekil 2.2.6

Şekil 2.2.5 de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E, T) = \frac{b_1 + c_1}{2}$  ve  $d_T(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$  dir.

$$d_E(A, E') = d_T(E, T) - b_1, \quad d_E(E, E') = d_T(E, T') - c_2 \quad \text{ve} \quad V_{a_T} = d_E(A, E') + d_E(E, E')$$

olduğundan

$$V_{a_T} = \frac{b_1 + c_1}{2} - b_1 + \frac{b_2 + c_2}{2} - c_2 = -\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} = \frac{b_T}{2} + \frac{c_T}{2} - b_1 - c_2 \quad \text{dir.}$$

$c_2 = \alpha_T$  ve  $b_1 = \beta_T$  olduğundan

$$2V_{a_T} = b_T + c_T - 2(\alpha_T + \beta_T) \quad \text{bulunur.}$$

Şekil 2.2.6 da Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E, T) = \frac{b_1 + c_1}{2}$  ve  $d_T(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$  dir.

$$d_E(A, E') = d_T(E, T) - b_1, \quad d_E(E, E') = d_T(E, T') - c_2 \quad \text{ve} \quad V_{a_T} = d_E(A, E') + d_E(E, E')$$

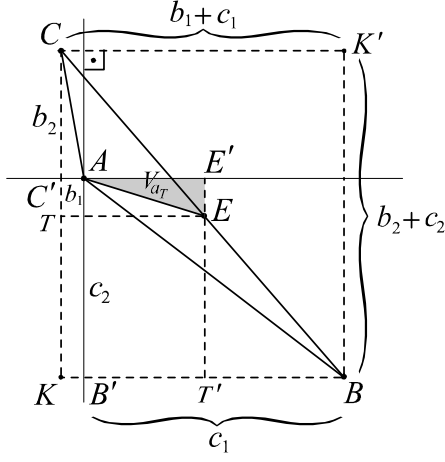
olduğundan

$$V_{a_T} = \frac{b_1 + c_1}{2} - b_1 + \frac{b_2 + c_2}{2} - c_2 = -\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} = \frac{b_T}{2} + \frac{c_T}{2} - b_1 - c_2 \quad \text{dir.}$$

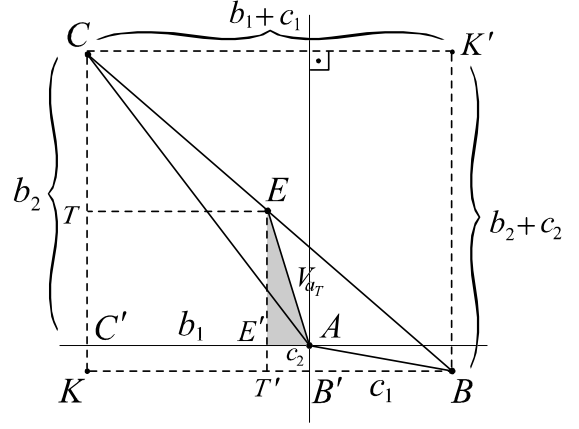
$b_1 = \alpha_T$  ve  $c_2 = \beta_T$  olduğundan

$$2V_{a_T} = b_T + c_T - 2(\alpha_T + \beta_T) \quad \text{bulunur.}$$

**iv.**  $ABC$  üçgeni,  $A$  köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun ve  $E$  noktası  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.



Şekil 2.2.7



Şekil 2.2.8

Şekil 2.2.7 de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E,T) = \frac{b_1+c_1}{2}$  ve  $d_T(E,T') = \frac{b_2+c_2}{2}$  dir.

$$d_E(A,E') = d_T(E,T) - b_1 \quad , \quad d_E(E,E') = c_2 - d_E(E,T') \quad \text{ve} \quad V_{a_T} = d_E(A,E') + d_E(E,E')$$

olduğundan

$$V_{a_T} = \frac{b_1+c_1}{2} - b_1 + c_2 - \frac{b_2+c_2}{2} = -\frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} = \frac{c_T}{2} - \frac{b_T}{2} \quad \text{dir. Buradan,}$$

$$2V_{a_T} = c_T - b_T \quad \text{bulunur.}$$

Şekil 2.2.8 Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(E,T) = \frac{b_1+c_1}{2}$  ve  $d_T(E,T') = \frac{b_2+c_2}{2}$  dir.

$$d_E(A,E') = b_1 - d_T(E,T) \quad , \quad d_E(E,E') = d_E(E,T') - c_2 \quad \text{ve} \quad V_{a_T} = d_E(A,E') + d_E(E,E')$$

olduğundan

$$V_{a_T} = b_1 - \frac{b_1+c_1}{2} + \frac{b_2+c_2}{2} - c_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} - \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} = \frac{b_T}{2} - \frac{c_T}{2} \quad \text{dir. Buradan} \quad 2V_{a_T} = b_T - c_T$$

bulunur. O halde,

$$2V_{a_T} = |b_T - c_T| \quad \text{dir.}$$

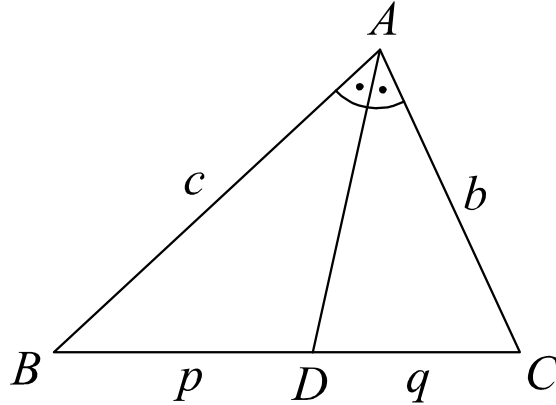
□



## 2.3 İç Açılırtay Teoremi

### Öklid Düzleminde İç Açılırtay Teoremi

Bir üçgende bir iç açının açılırtayı, karşı kenarı komşu kenarlarla orantılı olarak böler.



Şekil 2.3.1

Yani, şekil 2.3.1 e göre  $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$  dir.

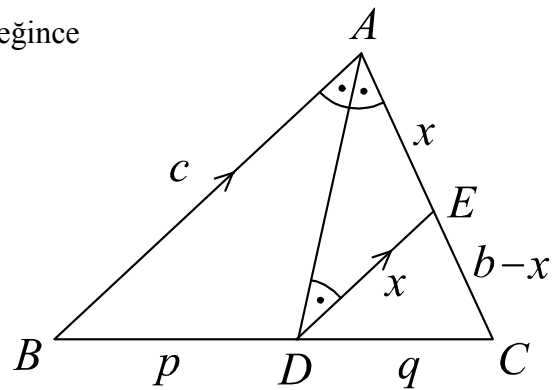
#### İspat :

Şekil 2.3.1 de  $D$  noktasından  $AB$  doğru parçasına çizilen paralelin  $AC$  doğru parçası ile kesişimi  $E$  noktası ve  $|DE| = x$  alınırsa, (Bkz. Şekil 2.3.2)  $CED$  ve  $CAB$  üçgenlerinin benzerliğinden ve Thales bağıntısı gereğince

$$\frac{b-x}{x} = \frac{q}{p} \text{ ve } \frac{b-x}{x} = \frac{b}{c} \text{ eşitlikleri}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \text{ bulunur.}$$



Şekil 2.3.2

□

### İç Açortay Teoreminin Taksi Benzeri

İç açortay teoreminin taksi versiyonunu vermek için Kaya'nın [8] de, taksi üçgenlerinin alan formülünü bulmak için izlediği yönteme benzer bir yöntem kullanılacaktır. [8] de kullanılan yeni parametre sadece verilen üçgenin tabanının eğimidir. Biz burada, parametre olarak açortayın kesmediği iki kenarın eğimini seçeceğiz. Şimdi bu parametrelerle iç açortay teoreminin bir taksi benzerini ifade ve ispat edelim.

#### Teorem 2.3.1 :

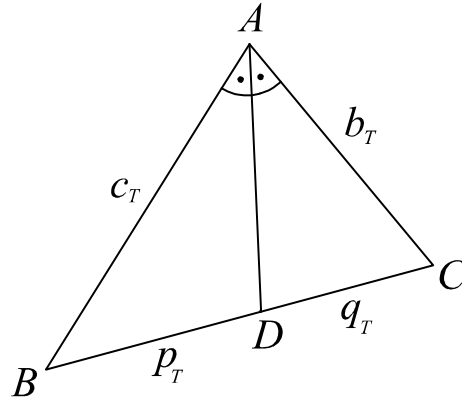
Taksi düzlemde herhangi bir  $ABC$  üçgeninin  $A$  köşesine ait iç açortayının  $BC$  kenarı ile kesişimi  $D$  noktası;  $a_T = d_T(B,C)$ ;  $b_T = d_T(A,C)$ ;  $c_T = d_T(A,B)$ ;  $p_T = d_T(B,D)$ ;  $q_T = d_T(C,D)$ ;  $AC$  kenarının eğimi  $m_b$ ;  $AB$  kenarının eğimi  $m_c$  olmak üzere,

$$i. \quad m_b, m_c \in \mathbb{R} \text{ ise, } \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{1+|m_c|} \cdot \sqrt{\frac{1+m_c^2}{1+m_b^2}} \right)$$

$$ii. \quad m_b \rightarrow \infty \text{ ise, } \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)$$

$$iii. \quad m_c \rightarrow \infty \text{ ise, } \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{\sqrt{1+m_b^2}} \right)$$

dir.



Şekil 2.3.3

**İspat :**  $BC$  kenarının eğimi  $m_a$  olsun.

*i.*  $m_a, m_b, m_c \in \mathbb{R}$  iken

$$d_E(B, D) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad d_E(D, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right),$$

$$d_E(A, C) = b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad d_E(A, B) = c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{dir. Buna göre,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &\Rightarrow \frac{p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)}{q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)} = \frac{c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)}{b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{1+|m_c|} \cdot \sqrt{\frac{1+m_c^2}{1+m_b^2}} \right) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

$m_b, m_c \in \mathbb{R}$  ve  $m_a \rightarrow \infty$  iken,

$$d_E(B, D) = p_T, \quad d_E(D, C) = q_T,$$

$$d_E(A, C) = b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad d_E(A, B) = c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{dir. Buna göre,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)}{b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{1+|m_c|} \cdot \sqrt{\frac{1+m_c^2}{1+m_b^2}} \right) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

ii.  $m_b \rightarrow \infty$  iken ( Bu durumda  $m_a \rightarrow \infty$  ve  $m_c \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

$$d_E(B, D) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad d_E(D, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)$$

$$d_E(A, C) = b_T, \quad d_E(A, B) = c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{dir. Buna göre,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &\Rightarrow \frac{p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)}{q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)} = \frac{c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)}{b_T} \\ &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

iii.  $m_c \rightarrow \infty$  iken, ( Bu durumda  $m_a \rightarrow \infty$  ve  $m_b \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

$$d_E(B, D) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad d_E(D, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right),$$

$$d_E(A, C) = b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad d_E(A, B) = c_T \quad \text{dir. Buna göre,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &\Rightarrow \frac{p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)}{q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)} = \frac{c_T}{b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{\sqrt{1+m_b^2}} \right) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

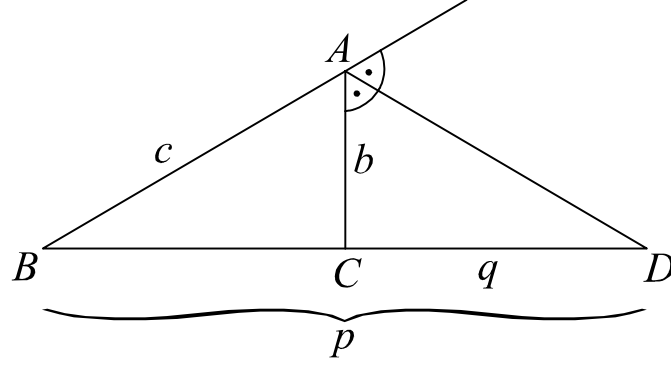
□

**Uyarı 2.3.2 :**  $p$  ve  $q$ , sırasıyla  $BD$  ve  $DC$  doğru parçalarının Öklidyen uzunlukları olmak üzere, burada  $p_T/q_T = p/q$  olduğu dikkate alınarak teoremin ifadesi biraz farklı biçimde de verilebilir.

## 2.4 Dış Açortay Teoremi

### Öklid Düzleminde Dış Açortay Teoremi

Bir üçgende bir dış açının açortayı karşı kenarın uzantısını bölerse, komşu kenarlarla orantılı olarak böler.



Şekil 2.4.1

Yani, şekil 2.4.1 e göre  $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$  dir.

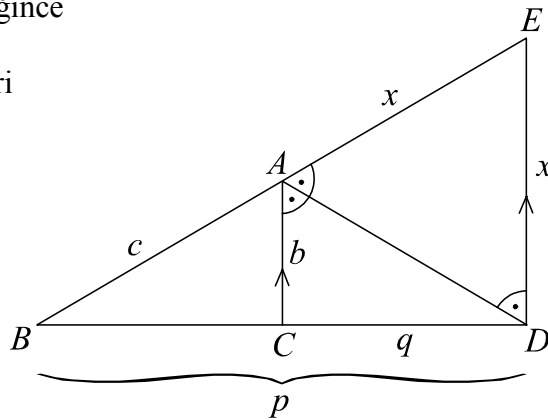
### İspat :

Şekil 2.4.1 de  $D$  noktasından  $AC$  doğru parçasına çizilen paralelin  $BA$  ışını ile kesişimi  $E$  noktası ve  $|DE| = x$  alınırsa (Bkz. Şekil 2.4.2),  $BAC$  ve  $BED$  üçgenlerinin benzerliğinden ve Thales bağıntısı gereğince

$$\frac{x}{x+c} = \frac{q}{p} \text{ ve } \frac{x}{c+x} = \frac{b}{c} \text{ eşitlikleri}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \text{ bulunur.}$$



Şekil 2.4.2

□

### Dış Açortay Teoreminin Taksi Benzeri

Burada da iç açortay teoreminde kullanılan yöntem izlenecektir. Şimdi, aynı yaklaşımla dış açortay teoreminin bir taksi benzerini ifade ve ispat edelim.

#### Teorem 2.4.1 :

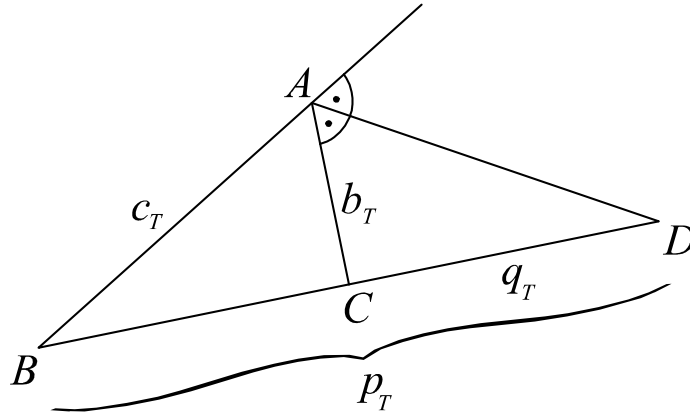
Taksi düzlemde herhangi bir  $ABC$  üçgeninin  $A$  köşesine ait dış açortayının  $BC$  kenar uzantısını kestiği nokta  $D$  noktası;  $a_T = d_T(B,C)$ ;  $b_T = d_T(A,C)$ ;  $c_T = d_T(A,B)$ ;  $p_T = d_T(B,D)$ ;  $q_T = d_T(C,D)$ ;  $AC$  kenarının eğimi  $m_b$ ;  $AB$  kenarının eğimi  $m_c$  olmak üzere,

$$i. \quad m_b, m_c \in \mathbb{R} \text{ ise, } \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{1+|m_c|} \cdot \sqrt{\frac{1+m_c^2}{1+m_b^2}} \right)$$

$$ii. \quad m_b \rightarrow \infty \text{ ise, } \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)$$

$$iii. \quad m_c \rightarrow \infty \text{ ise, } \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{\sqrt{1+m_b^2}} \right)$$

dir.



Şekil 2.4.3

**İspat :**  $BC$  kenarının eğimi  $m_a$  olsun.

*i.*  $m_a, m_b, m_c \in \mathbb{R}$  iken,

$$d_E(B, D) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad d_E(D, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right),$$

$$d_E(A, C) = b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad d_E(A, B) = c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{dir. Buna göre,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &\Rightarrow \frac{p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)}{q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)} = \frac{c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)}{b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{1+|m_c|} \cdot \sqrt{\frac{1+m_c^2}{1+m_b^2}} \right) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

$m_b, m_c \in \mathbb{R}$  ve  $m_a \rightarrow \infty$  iken,

$$d_E(B, D) = p_T, \quad d_E(D, C) = q_T,$$

$$d_E(A, C) = b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad d_E(A, B) = c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{dir. Buna göre,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)}{b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right)} \\ &\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{1+|m_c|} \cdot \sqrt{\frac{1+m_c^2}{1+m_b^2}} \right) \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

ii.  $m_b \rightarrow \infty$  iken ( Bu durumda  $m_a \rightarrow \infty$  ve  $m_c \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

$$d_E(B, D) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad d_E(D, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right),$$

$$d_E(A, C) = b_T, \quad d_E(A, B) = c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{dir. Buna göre}$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} \Rightarrow \frac{p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)}{q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)} = \frac{c_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right)}{b_T}$$

$$\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right) \quad \text{elde edilir.}$$

iii.  $m_c \rightarrow \infty$  iken ( Bu durumda  $m_a \rightarrow \infty$  ve  $m_b \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

$$d_E(B, D) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad d_E(D, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right),$$

$$d_E(A, C) = b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad d_E(A, B) = c_T \quad \text{dir. Buna göre}$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} \Rightarrow \frac{p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)}{q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right)} = \frac{c_T}{b_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_T}{q_T} = \frac{c_T}{b_T} \cdot \left( \frac{1+|m_b|}{\sqrt{1+m_b^2}} \right) \quad \text{elde edilir.}$$

□

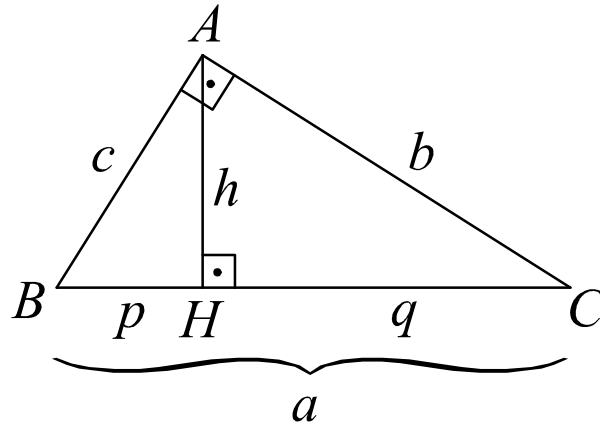


## 2.5 Öklid Bağlıları

### Öklid Düzleminde Öklid Bağlıları

*i.* Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun karesi, bu yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

*ii.* Bir dik üçgende bir dik kenarın uzunluğunun karesi, hipotenüs uzunluğuyla hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüsü ayırdığı parçalardan kendisi tarafında kalan parçanın uzunluğunun çarpımına eşittir.



Şekil 2.5.1

Yani, şekil 2.5.1 e göre  $h^2 = p \cdot q$ ,  $b^2 = q \cdot a$  ve  $c^2 = p \cdot a$  dir.

### İspat :

*i.* Şekil 2.5.1 de  $ABH$  ve  $CAH$  dik üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$  elde edilir.

Buradan da  $h^2 = p \cdot q$  bulunur.

*ii.* Şekil 2.5.1 de  $CAH$  ve  $CBA$  dik üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{b}{q} = \frac{a}{b}$  ;

$ABH$  ve  $CBA$  dik üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{c}{p} = \frac{a}{c}$  elde edilir. Buradan da

$b^2 = q \cdot a$  ve  $c^2 = p \cdot a$  eşitlikleri bulunur.

□

### Öklid Bağıntılarının Taksi Benzeri

Yine, [8] de kullanılan yöntemle Öklid bağıntılarının taksi benzerleri ifade ve ispat edelim.

#### Teorem 2.5.1 :

*i.* Taksi düzlemde herhangi bir  $ABC$  dik üçgeninin hipotenüsüne ait yüksekliğinin uzunluğunun karesi, yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

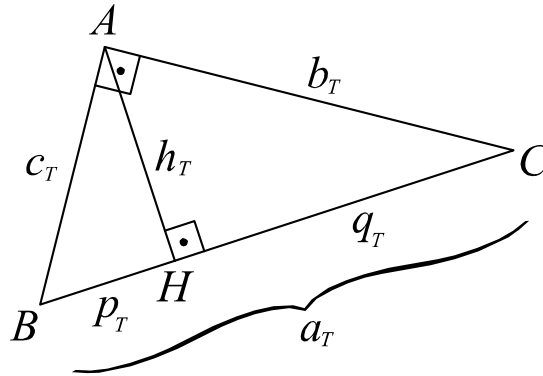
*ii.* Taksi düzlemde  $A$  açısı dik olan bir  $ABC$  üçgeninde hipotenüsün eğimi  $m_h$ , dik kenarlardan herhangi birinin eğimi de  $m_d$  ise,

$$\rho(m_h, m_d) = \begin{cases} \left( \frac{1+m_d^2}{1+m_h^2} \right) \cdot \left( \frac{1+|m_h|}{1+|m_d|} \right)^2, & m_h, m_d \in \mathbb{R} \\ \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right) & , m_h \rightarrow \infty \\ \left( \frac{(1+|m_h|)^2}{1+m_h^2} \right) & , m_d \rightarrow \infty \end{cases}$$

olmak üzere

$$\rho(m_h, m_d) \cdot b_T^2 = q_T \cdot a_T \quad \text{ve} \quad \rho(m_h, m_d) \cdot c_T^2 = p_T \cdot a_T$$

dir.



Şekil 2..5.2

**İspat :**

*i.*  $m_h \in \mathbb{R} - \{0\}$  iken,

$$d_E(A, H) = h_T \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{m_h}\right)^2}}{1 + \left|-\frac{1}{m_h}\right|} = h_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right),$$

$$d_E(B, H) = p_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right), \quad d_E(H, C) = q_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right) \text{ dir. Buna göre}$$

$$[d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$\Rightarrow h_T^2 \cdot \left(\frac{1 + m_h^2}{(1 + |m_h|)^2}\right) = p_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right) \cdot q_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right)$$

$$\Rightarrow h_T^2 = p_T \cdot q_T \text{ bulunur.}$$

$m_h = 0$  veya  $m_h \rightarrow \infty$  iken

$$d_E(A, H) = h_T, \quad d_E(B, H) = p_T, \quad d_E(H, C) = q_T \text{ dir. Buna göre}$$

$$[d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C) \Rightarrow h_T^2 = p_T \cdot q_T \text{ bulunur.}$$

*ii.*  $AB$  kenarının eğimi  $m_d$  olsun.

*a)*  $m_h, m_d \in \mathbb{R}$  iken,

$$d_E(A, B) = c_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_d^2}}{1 + |m_d|}\right), \quad d_E(A, C) = b_T \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{m_d}\right)^2}}{1 + \left|-\frac{1}{m_d}\right|} = b_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_d^2}}{1 + |m_d|}\right),$$

$$d_E(B, H) = p_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right), \quad d_E(H, C) = q_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right), \quad d_E(B, C) = a_T \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{1 + |m_h|}\right)$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
[d_E(A, C)]^2 &= d_E(C, H) \cdot d_E(C, B) \\
\Rightarrow b_T^2 \cdot \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right) &= q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right) \cdot a_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right) \\
\Rightarrow \left( \frac{1+m_d^2}{1+m_h^2} \right) \cdot \left( \frac{1+|m_h|}{1+|m_d|} \right)^2 \cdot b_T^2 &= q_T \cdot a_T \text{ dir. Ve}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d_E(A, B)]^2 &= d_E(B, H) \cdot d_E(B, C) \\
\Rightarrow c_T^2 \cdot \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right) &= p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right) \cdot a_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right) \\
\Rightarrow \left( \frac{1+m_d^2}{1+m_h^2} \right) \cdot \left( \frac{1+|m_h|}{1+|m_d|} \right)^2 \cdot c_T^2 &= p_T \cdot a_T \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

**b)**  $m_h \rightarrow \infty$  iken,

$$d_E(A, B) = c_T \cdot \frac{\sqrt{1+m_d^2}}{1+|m_d|}, \quad d_E(A, C) = b_T \cdot \frac{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{m_d}\right)^2}}{1+\left|-\frac{1}{m_d}\right|} = b_T \cdot \frac{\sqrt{1+m_d^2}}{1+m_d},$$

$d_E(B, H) = p_T$ ,  $d_E(H, C) = q_T$ ,  $d_E(B, C) = a_T$  dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
[d_E(A, C)]^2 &= d_E(C, H) \cdot d_E(C, B) \\
\Rightarrow \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right) \cdot b_T^2 &= q_T \cdot a_T \text{ dir. Ve}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d_E(A, B)]^2 &= d_E(B, H) \cdot d_E(B, C) \\
\Rightarrow \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right) \cdot c_T^2 &= p_T \cdot a_T \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

c)  $m_d \rightarrow \infty$  iken,

$$d_E(A, B) = c_T, \quad d_E(A, C) = b_T,$$

$$d_E(B, H) = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right), \quad d_E(H, C) = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right), \quad d_E(B, C) = a_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right)$$

dir. Buna göre

$$[d_E(A, C)]^2 = d_E(C, H) \cdot d_E(C, B)$$

$$\Rightarrow b_T^2 = q_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right) \cdot a_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{(1+|m_h|)^2}{1+m_h^2} \right) \cdot b_T^2 = q_T \cdot a_T \text{ dir. Ve}$$

$$[d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

$$\Rightarrow c_T^2 = p_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right) \cdot a_T \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_h^2}}{1+|m_h|} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{(1+|m_h|)^2}{1+m_h^2} \right) \cdot c_T^2 = p_T \cdot a_T \text{ bulunur.}$$

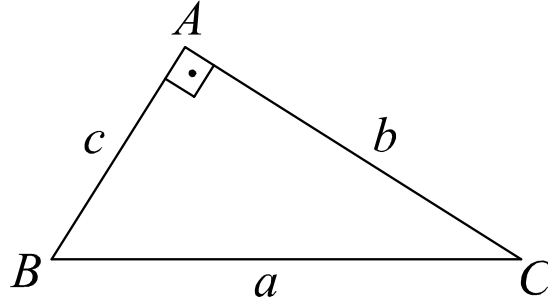
Burada  $AC$  kenarının eğimi  $m_d$  olarak alınsaydı sonuç değişmezdi.

□

## 2.6 Pisagor Teoremi

### Öklid Düzleminde Pisagor Teoremi

Bir dik üçgende, hipotenüsün karesi, dik kenarların kareleri toplamına eşittir.



Şekil 2.6.1

Yani, şekil 2.6.1 e göre  $a^2 = b^2 + c^2$  dir.

### İspat :

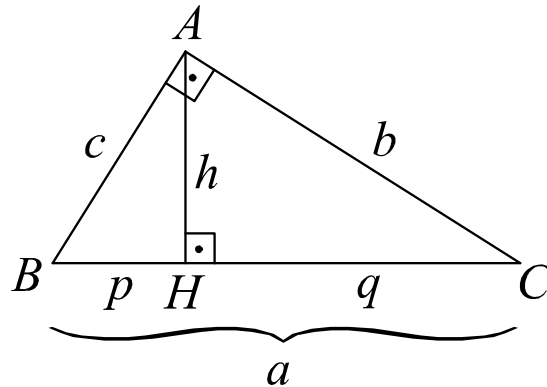
Şekil 2.6.1 de  $A$  noktasından  $BC$  doğru parçasına indirilen dikmenin ayağı  $H$  noktası;

$|BH| = p$  ve  $|HC| = q$  olarak alınırsa (Bkz. Şekil 2.6.2), Öklid bağıntısı gereğince

$b^2 = q \cdot a$  ve  $c^2 = p \cdot a$  dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$b^2 + c^2 = a \cdot (p + q)$  elde edilir. Buradan da,  $p + q = a$  olduğundan

$a^2 = b^2 + c^2$  bulunur.



Şekil 2.6.2

□

### Pisagor Teoreminin Taksi Benzeri

Bu teorem için farklı iki yöntem izlenerek teoremin taksi versiyonu olan farklı iki formül elde edilecektir. Şöyle ki, Öklid bağıntılarının taksi benzeri kullanılarak kolayca elde edilebilecek formülün yanı sıra bir de [15] de kullanılan yöntemle formülün bir taksi benzeri verilecektir.

#### Teorem 2.6.1 :

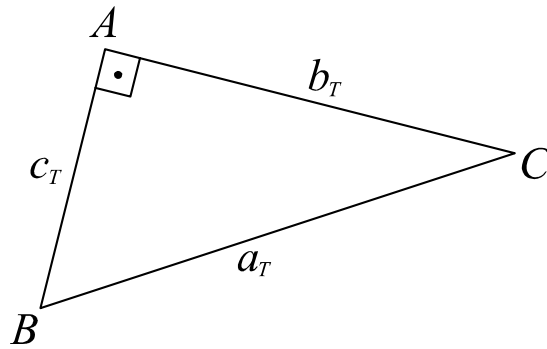
Taksi düzleminde bir  $ABC$  dik üçgeninde, hipotenüs uzunluğu  $a_T$ ; dik kenarların uzunlukları  $b_T$  ve  $c_T$ ; hipotenüsün eğimi  $m_h$ ; dik kenarlardan herhangi birinin eğimi  $m_d$  ise,

$$\rho(m_h, m_d) = \begin{cases} \left( \frac{1+m_d^2}{1+m_h^2} \right) \cdot \left( \frac{1+|m_h|}{1+|m_d|} \right)^2, & m_h, m_d \in \mathbb{R} \\ \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right), & m_h \rightarrow \infty \\ \left( \frac{(1+|m_h|)^2}{1+m_h^2} \right), & m_d \rightarrow \infty \end{cases}$$

olmak üzere,

$$a_T^2 = \rho(m_h, m_d) \cdot (b_T^2 + c_T^2)$$

dir ( Bkz. [10] ) .



Şekil 2.6.3

**İspat :**

Öklid bağıntısının taksi benzeri gereğince

$$\rho(m_h, m_d) = \begin{cases} \left( \frac{1+m_d^2}{1+m_h^2} \right) \cdot \left( \frac{1+|m_h|}{1+|m_d|} \right)^2, & m_h, m_d \in \mathbb{R} \\ \left( \frac{1+m_d^2}{(1+|m_d|)^2} \right) & , m_h \rightarrow \infty \\ \left( \frac{(1+|m_h|)^2}{1+m_h^2} \right) & , m_d \rightarrow \infty \end{cases}$$

olmak üzere

$$\rho(m_h, m_d) \cdot b_T^2 = q_T \cdot a_T \quad \text{ve} \quad \rho(m_h, m_d) \cdot c_T^2 = p_T \cdot a_T \quad \text{dir.}$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanır

$$a_T \cdot (p_T + q_T) = \rho(m_h, m_d) \cdot (b_T^2 + c_T^2) \quad \text{elde edilir.} \quad p_T + q_T = a_T \quad \text{olduğu}$$

göz önüne alınır

$$a_T^2 = \rho(m_h, m_d) \cdot (b_T^2 + c_T^2) \quad \text{bulunur.}$$

□

**Uyarı 2.6.2 :**  $A$  açısı dik olan bir  $ABC$  üçgeninde  $d_T(A, B) = c_T$  ve  $d_T(A, C) = b_T$  ise,

$$\tan(\widehat{B}) = b_T/c_T \quad \text{ve} \quad \tan(\widehat{C}) = c_T/b_T \quad \text{dir. (Bkz. Şekil 2.6.4)}$$

$$\text{Eğer } m_{AB} = m_d \text{ olarak alınır, } m_h \in \left\{ \frac{b_T + c_T m_d}{c_T - b_T m_d}, \frac{c_T m_d - b_T}{b_T m_d + c_T} \right\};$$

$$\text{Eğer } m_{AC} = m_d \text{ olarak alınır, } m_h \in \left\{ \frac{c_T + b_T m_d}{b_T - c_T m_d}, \frac{b_T m_d - c_T}{c_T m_d + b_T} \right\} \text{ olur.}$$

Böylece  $m_d$  belirlendiği takdirde formül tek bir parametreye bağlı olarak elde edilebilir.

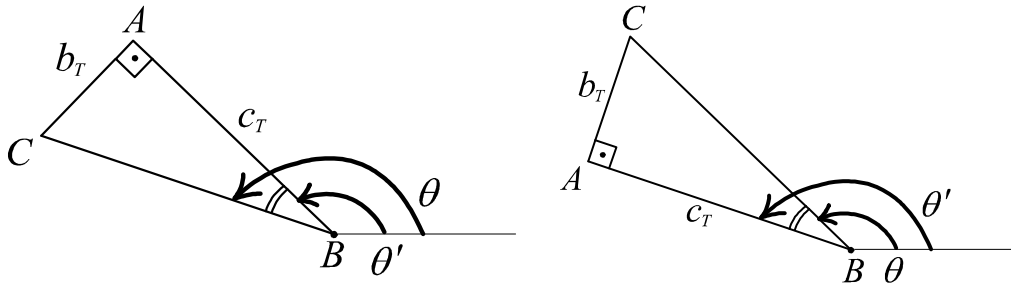
Daha açık olarak,  $BC$  doğrusunun eğim açısı  $\theta$ ;  $AB$  doğrusunun eğim açısı  $\theta'$  ve

$$m_{AB} = m_d \text{ olarak alınır, } \tan \theta = m_h \text{ ve } \tan \theta' = m_d$$

$$0 < \theta \leq \pi \text{ ve } 0 < \theta' \text{ için } \tan(\theta - \theta') = \tan(\widehat{B}) \text{ veya}$$

$$0 < \theta' \leq \pi \text{ ve } 0 < \theta \text{ için } \tan(\theta' - \theta) = \tan(\widehat{B}) \text{ olacağı açıktır. (Bkz. Şekil 2.6.4)}$$





Şekil 2.6.4

Böylece  $\frac{m_h - m_d}{1 + m_d \cdot m_h} = \frac{b_T}{c_T}$  veya  $\frac{m_d - m_h}{1 + m_d \cdot m_h} = \frac{b_T}{c_T}$  olduğu dolayısıyla da

$$m_h = \frac{b_T + c_T m_d}{c_T - b_T m_d} \text{ veya } m_h = \frac{c_T m_d - b_T}{b_T m_d + c_T} \text{ olduğu görülür. } \tan \theta = \tan(\pi + \theta) \text{ olduğu göz}$$

önüne alınarak sonucun  $0 < \theta \leq 2\pi$  durumu için geçerliliği görülür.

$m_{AC} = m_d$  durumu da benzerdir fakat  $b_T$  ve  $c_T$  nin rolleri değişir.

□

Teoremin başka bir benzeri de, [15] de izlenilen yöntem yardımıyla verilebilir.  $A$  açısı dik olan bir  $ABC$  üçgeni için  $A$  köşesi daima temel köşedir. Başka bir ifade ile,  $A$  köşesine ait daima bir ya da iki temel doğru vardır. Ve eğer  $A$  köşesine ait iki temel doğru varsa  $ABC$  dik üçgeninin dik kenarları bu temel doğrular üzerinde yatar. Teoremin ifadesini ve ispatını vermeden önce kullanılacak parametreyi verelim:

$A$  açısı dik olan bir  $ABC$  dik üçgeninde

$H$  :  $B$  ve  $C$  köşelerinden birinin  $A$  köşesine ait temel doğru parçası üzerindeki dik izdüşüm noktası

olmak üzere,

$$\gamma_T = d_T(A, H)$$

dir.

**Teorem 2.6.2 :**

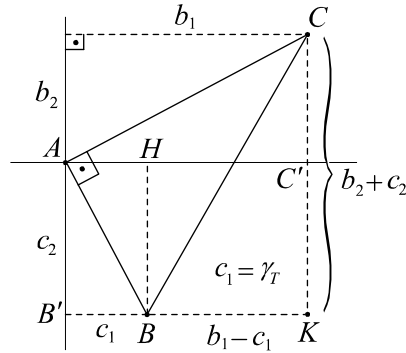
Bir  $ABC$  dik üçgeninde,  $a_T = d_T(B, C)$  hipotenüs uzunluğunu;  $b_T = d_T(A, C)$  ve  $c_T = d_T(A, B)$  dik kenarların uzunluklarını göstermek üzere,

$$a_T = \begin{cases} b_T + c_T - 2\gamma_T & , A \text{ köşesine ait bir tek temel doğru varsa} \\ b_T + c_T & , A \text{ köşesine ait iki tane temel doğru varsa} \end{cases}$$

dir ( Bkz. [10] ).

**İspat :**  $b_1, b_2, c_1$  ve  $c_2$  Teorem 2.2.1 deki gibi tanımlanmış olsun.

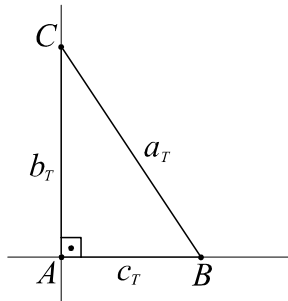
*i.*  $ABC$  üçgeni,  $A$  açısı dik ve  $A$  köşesinde bir tek temel doğrusu olan bir dik üçgen olsun.



Şekil 2.6.3

Şekil 2.6.3 de  $a_T = b_1 - c_1 + b_2 + c_2 = b_T + c_T - 2c_1$  dir.  $c_1 = \gamma_T$  olduğu göz önüne alınırsa,  $a_T = b_T + c_T - 2\gamma_T$  bulunur.

*ii.*  $ABC$  üçgeni,  $A$  açısı dik ve  $A$  köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir dik üçgen olsun.



Şekil 2.6.4

Şekil 2.6.4 de  $a_T = b_T + c_T$  dir.

□

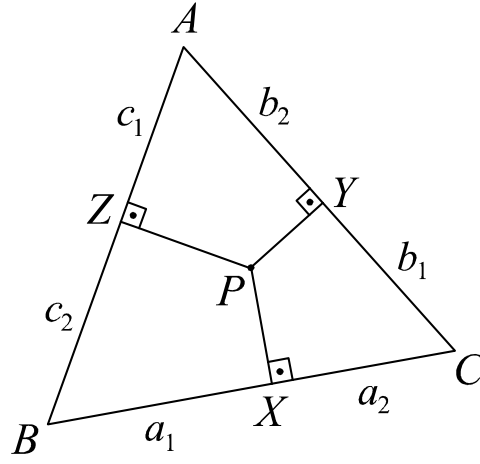
## 2.7 Carnot Teoremi

### Öklid Düzleminde Carnot Teoremi

$ABC$  herhangi bir üçgen ve  $P$  noktası bu üçgen içinde sabit bir nokta olmak üzere,  $P$  noktasından  $ABC$  üçgeninin kenarlarına (şekil 2.7.1 deki gibi) indirilen dikmelerin bu kenarlar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları arasında

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

bağıntısı vardır.



Şekil 2.7.1

### İspat :

Şekil 2.7.1 de  $AP$ ,  $BP$  ve  $CP$  doğru parçaları çizilip elde edilen tüm dik üçgenlerde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$a_1^2 + |PX|^2 = c_2^2 + |PZ|^2 \quad , \quad b_1^2 + |PY|^2 = a_2^2 + |PX|^2 \quad , \quad c_1^2 + |PZ|^2 = b_2^2 + |PY|^2$$

elde edilir. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanıp gerekli işlemler yapılırsa

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

bağıntısı bulunur.

□

### Carnot Teoreminin Taksi Benzeri

Öklidyen versiyondaki parametrelere ek olarak üçgenin kenarlarının eğimleri de parametre olarak eklenecek ve bu parametreler cinsinden formülün bir taksi benzeri verilecektir.

#### Teorem 2.7.1 :

$ABC$  taksi düzlemde herhangi bir üçgen;  $P$  noktası bu üçgenin içinde sabit bir nokta;  $P$  noktasından kenarlara inilen dikmelerin ayakları  $X$ ,  $Y$  ve  $Z$  noktaları; dikmelerin kenarlar üzerindeki ayırdığı parçaların taksi uzunlukları  $a_{1_T}, a_{2_T}, b_{1_T}, b_{2_T}, c_{1_T}, c_{2_T}$  olsun.

(Bkz. Şekil 2.7.2).  $BC$  kenarının eğimi  $m_a$ ;  $AC$  kenarının eğimi  $m_b$ ;  $AB$  kenarının eğimi

$$m_c \text{ ve } \sigma(m_i) = \frac{(1+m_i^2)}{(1+|m_i|)^2}, \quad i \in \{a, b, c\} \text{ olmak üzere,}$$

**i.**  $m_a, m_b, m_c \in \mathbb{R}$  ise,

$$\sigma(m_a) \cdot a_{1_T}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{1_T}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{1_T}^2 = \sigma(m_a) \cdot a_{2_T}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{2_T}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{2_T}^2$$

**ii.**  $m_a \rightarrow \infty$  ise,

$$a_{1_T}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{1_T}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{1_T}^2 = a_{2_T}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{2_T}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{2_T}^2$$

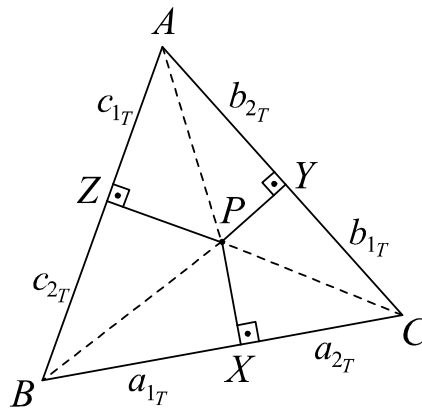
**iii.**  $m_b \rightarrow \infty$  ise,

$$\sigma(m_a) \cdot a_{1_T}^2 + b_{1_T}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{1_T}^2 = \sigma(m_a) \cdot a_{2_T}^2 + b_{2_T}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{2_T}^2$$

**iv.**  $m_c \rightarrow \infty$  ise,

$$\sigma(m_a) \cdot a_{1_T}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{1_T}^2 + c_{1_T}^2 = \sigma(m_a) \cdot a_{2_T}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{2_T}^2 + c_{2_T}^2$$

dir.



Şekil 2.7.2

**İspat :**

*i.*  $m_a, m_b, m_c \in \mathbb{R}$  ise, Teorem 1.1 gereğince aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$a_j = a_{j_r} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+|m_a|} \right), \quad b_j = b_{j_r} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+|m_b|} \right), \quad c_j = c_{j_r} \cdot \left( \frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+|m_c|} \right); \quad j=1,2.$$

Buradan da  $\sigma(m_i) = \frac{(1+m_i^2)}{(1+|m_i|)^2}$ ,  $i \in \{a, b, c\}$  olmak üzere,

$$a_j^2 = a_{j_r}^2 \cdot \sigma(m_a) \quad , \quad b_j^2 = b_{j_r}^2 \cdot \sigma(m_b) \quad , \quad c_j^2 = c_{j_r}^2 \cdot \sigma(m_c) \quad ; \quad j=1,2 \text{ dir.}$$

O halde, Öklid düzlemindeki Carnot teoreminden

$$\sigma(m_a) \cdot a_{1_r}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{1_r}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{1_r}^2 = \sigma(m_a) \cdot a_{2_r}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{2_r}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{2_r}^2$$

elde edilir.

*ii.*  $m_a \rightarrow \infty$  ise,  $a_j^2 = a_{j_r}^2$ ;  $j=1,2$  olduğu göz önüne alınır

$$a_{1_r}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{1_r}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{1_r}^2 = a_{2_r}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{2_r}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{2_r}^2 \text{ elde edilir.}$$

(Bu durumda  $m_b \rightarrow \infty$  ve  $m_c \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

*iii.*  $m_b \rightarrow \infty$  ise,  $b_j^2 = b_{j_r}^2$ ;  $j=1,2$  olduğu göz önüne alınır

$$\sigma(m_a) \cdot a_{1_r}^2 + b_{1_r}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{1_r}^2 = \sigma(m_a) \cdot a_{2_r}^2 + b_{2_r}^2 + \sigma(m_c) \cdot c_{2_r}^2 \text{ elde edilir.}$$

(Bu durumda  $m_a \rightarrow \infty$  ve  $m_c \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

*iv.*  $m_c \rightarrow \infty$  ise,  $c_j^2 = c_{j_r}^2$ ;  $j=1,2$  olduğu göz önüne alınır

$$\sigma(m_a) \cdot a_{1_r}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{1_r}^2 + c_{1_r}^2 = \sigma(m_a) \cdot a_{2_r}^2 + \sigma(m_b) \cdot b_{2_r}^2 + c_{2_r}^2 \text{ elde edilir.}$$

(Bu durumda  $m_a \rightarrow \infty$  ve  $m_b \rightarrow \infty$  olamayacağı açıktır.)

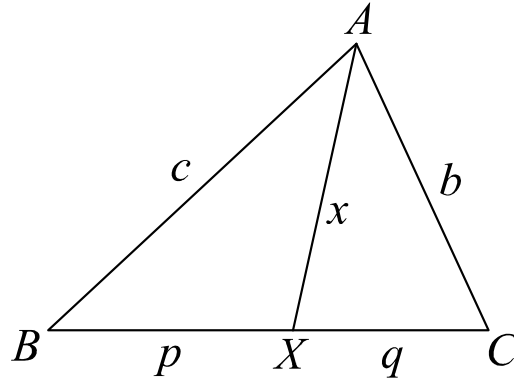
□

## 2.8 Stewart Teoremi

### Öklid Düzleminde Stewart Teoremi

$ABC$  herhangi bir üçgen ve  $X \in [BC]$  olmak üzere;  $|BC|=a$ ,  $|AC|=b$ ,  $|AB|=c$ ,  $|BX|=p$ ,  $|CX|=q$  ve  $|AX|=x$  ise aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$x^2 = \frac{b^2 \cdot p + c^2 \cdot q}{p+q} - p \cdot q$$



Şekil 2.8.1

#### İspat :

$B = X$  iken, yani  $p = 0$  için ve  $C = X$  iken, yani  $q = 0$  için bağıntı geçerlidir.

$X \in (BC)$  için şekil 2.8.1 de  $AXC$  açısının derece cinsinden ölçüsü  $\alpha$  olarak alınırsa  $AXB$  açısının ölçüsü  $180 - \alpha$  olur.  $AXC$  ve  $AXB$  üçgenlerinde kosinüs teoremi gereğince,

$$b^2 = x^2 + q^2 - 2xq \cdot \cos \alpha \quad \text{ve} \quad c^2 = x^2 + p^2 - 2xp \cdot \cos(180 - \alpha)$$

dir. İlk eşitliğin her iki yanını  $q$  ile, ikinci eşitliğin her iki yanını  $p$  ile bölünüp, eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{b^2}{q} + \frac{c^2}{p} = x^2 \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + p + q \quad \text{elde edilir. Buradan da} \quad x^2 = \frac{b^2 \cdot p + c^2 \cdot q}{p+q} - p \cdot q$$

bulunur.

□

### Stewart Teoreminin Taksi Benzeri

2.2 de verilen parametreler cinsinden formülün bir taksi benzeri verilecektir.

#### Teorem 2.8.1 :

$ABC$  taksi düzlemde herhangi bir üçgen;  $X \in [BC]$ ,  $a_T = d_T(B, C)$ ,  $b_T = d_T(A, C)$ ,  $c_T = d_T(A, B)$ ,  $p_T = d_T(B, X)$ ,  $q_T = d_T(C, X)$  ve  $x_T = d_T(A, X)$  olmak üzere,

*i.* Eğer  $A$  köşesinin hiç temel doğrusu yoksa 
$$x_T = \frac{b_T \cdot p_T + c_T \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

*ii.* Eğer  $A$  köşesinin yalnız bir temel doğrusu var ve

*a)*  $X$  noktası  $D$  ile  $B$  noktaları arasında ise 
$$x_T = \frac{b_T \cdot p_T + (c_T - 2\alpha_T) \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

*b)*  $X$  noktası  $D$  ile  $C$  noktaları arasında ise 
$$x_T = \frac{(b_T - 2\alpha_T) \cdot p_T + c_T \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

*iii.* Eğer  $A$  köşesinin iki tane temel doğrusu var;  $X$  noktası,  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalıyor ve

*a)*  $X$  noktası  $D$  ile  $B$  noktaları arasında ise

$$x_T = \frac{(b_T - 2\beta_T) \cdot p_T + (c_T - 2\alpha_T) \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

*b)*  $X$  noktası  $D$  ile  $C$  noktaları arasında ise

$$x_T = \frac{(b_T - 2\alpha_T) \cdot p_T + (c_T - 2\beta_T) \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

*iv.* Eğer  $A$  köşesinin iki tane temel doğrusu var ve  $X$  noktası,  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmıyor ise

$$x_T = \frac{|b_T \cdot p_T - c_T \cdot q_T|}{p_T + q_T}$$

dir ( Bkz. [10] ).

**İspat :**

$B'$  :  $B$  noktasının  $A$  dan geçen  $y$ -eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$C'$  :  $C$  noktasının  $A$  dan geçen  $x$ -eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$X'$  :  $X$  noktasının  $A$  dan geçen  $x$ -eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

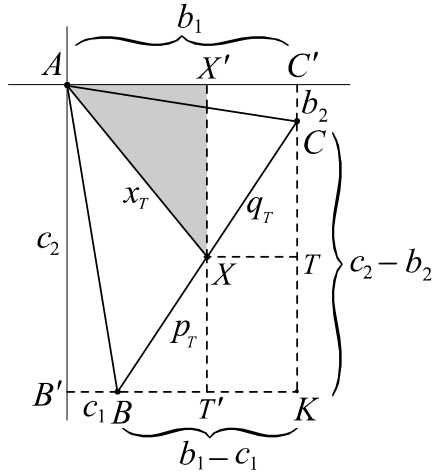
$T$  :  $X$  noktasının  $CC'$  doğrusuna dik izdüşümü,

$T'$  :  $X$  noktasının  $BB'$  doğrusuna dik izdüşümü

ve  $d_E(A, C') = b_1$ ,  $d_E(C, C') = b_2$ ,  $d_E(A, B') = c_2$ ,  $d_E(B, B') = c_1$  olsun. Böylece

$b_T = b_1 + b_2$ ,  $c_T = c_1 + c_2$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  dir.

*i.*  $ABC$  üçgeni  $A$  köşesinde hiç temel doğrusu olmayan bir üçgen olsun.



Şekil 2.8.2

Şekil 2.8.2de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(b_1 - c_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(c_2 - b_2)}{p_T + q_T}$

dir.  $d_E(A, X') = b_1 - d_T(X, T)$ ,  $d_E(X, X') = c_2 - d_E(X, T')$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$

olduğundan

$$\begin{aligned} x_T &= b_1 - \frac{q_T \cdot (b_1 - c_1)}{p_T + q_T} + c_2 - \frac{p_T \cdot (c_2 - b_2)}{p_T + q_T} \\ &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_1 \cdot q_T - b_1 \cdot q_T + c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot p_T + c_2 \cdot q_T - c_2 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T}{p_T + q_T} \end{aligned}$$

$$= \frac{b_1 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T + c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{dir. Buradan}$$

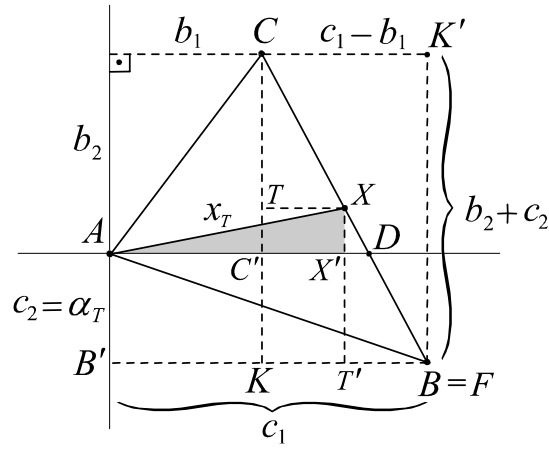


$$x_T = \frac{b_T \cdot p_T + c_T \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

bulunur.

ii.  $ABC$  üçgeni  $A$  köşesinde bir tek temel doğrusu olan bir üçgen olsun.

a)  $X$  noktası  $D$  ile  $C$  noktaları arasında ise,  $B = F$  dir.

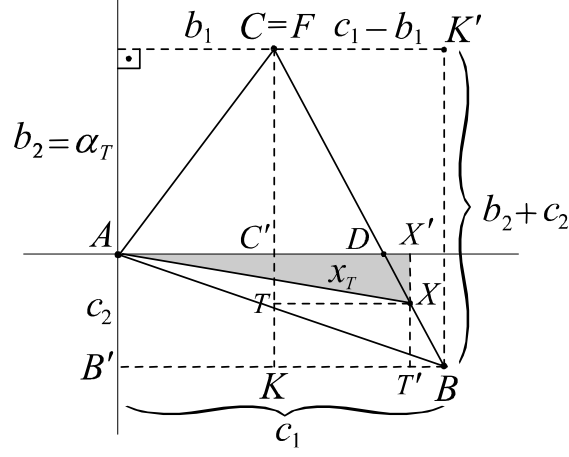


Şekil 2.8.3

Şekil 2.8.3de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(c_1 - b_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(b_2 + c_2)}{p_T + q_T}$  dir.  $d_E(A, X') = b_1 + d_T(X, T)$ ,  $d_E(X, X') = d_E(X, T') - c_2$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  olduğundan

$$\begin{aligned} x_T &= b_1 + \frac{q_T \cdot (c_1 - b_1)}{p_T + q_T} + \frac{p_T \cdot (b_2 + c_2)}{p_T + q_T} - c_2 \\ &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_1 \cdot q_T + c_1 \cdot q_T - b_1 \cdot q_T + b_2 \cdot p_T + c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \\ &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T + c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot q_T - 2c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{dir. } c_2 = \alpha_T \quad \text{olduğundan} \\ x_T &= \frac{b_T \cdot p_T + (c_T - 2\alpha_T) \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

b)  $X$  noktası  $D$  ile  $B$  noktaları arasında ise,  $C = F$  dir.



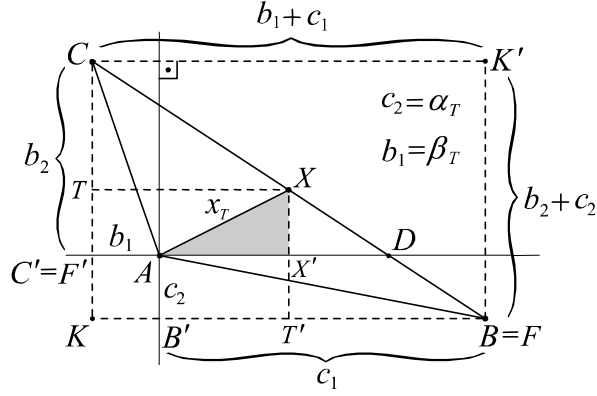
Şekil 2.8.4

Şekil 2.8.4de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(c_1 - b_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(b_2 + c_2)}{p_T + q_T}$  dir.  $d_E(A, X') = b_1 + d_T(X, T)$ ,  $d_E(X, X') = c_2 - d_E(X, T')$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  olduğundan

$$\begin{aligned}
 x_T &= b_1 + \frac{q_T \cdot (c_1 - b_1)}{p_T + q_T} + c_2 - \frac{p_T \cdot (b_2 + c_2)}{p_T + q_T} \\
 &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_1 \cdot q_T + c_1 \cdot q_T - b_1 \cdot q_T + c_2 \cdot p_T + c_2 \cdot q_T - b_2 \cdot p_T - c_2 \cdot p_T}{p_T + q_T} \\
 &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T + c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot q_T - 2b_2 \cdot p_T}{p_T + q_T} \quad \text{dir. } b_2 = \alpha_T \text{ olduğundan} \\
 x_T &= \frac{(b_T - 2\alpha_T) \cdot p_T + c_T \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{bulunur.}
 \end{aligned}$$

iii.  $ABC$  üçgeni  $A$  köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun.  $X$  noktası da  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.

a)  $X$  noktası  $D$  ile  $C$  noktaları arasında ise,  $B = F$  ve  $C' = F'$  dir.



Şekil 2.8.5

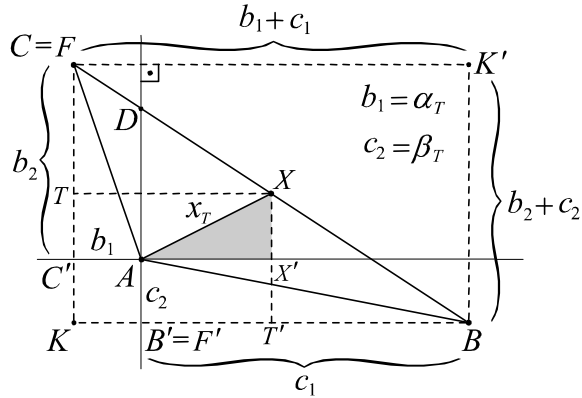
Şekil 2.8.5de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(b_1 + c_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(b_2 + c_2)}{p_T + q_T}$  dir.  $d_E(A, X') = d_T(X, T) - b_1$ ,  $d_E(X, X') = d_E(X, T') - c_2$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  olduğundan

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{q_T \cdot (b_1 + c_1)}{p_T + q_T} - b_1 + \frac{p_T \cdot (b_2 + c_2)}{p_T + q_T} - c_2 \\ &= \frac{b_1 \cdot q_T + c_1 \cdot q_T - b_1 \cdot p_T - b_1 \cdot q_T + b_2 \cdot p_T + c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \\ &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T + c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot q_T - 2b_1 \cdot p_T - 2c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$c_2 = \alpha_T$  ve  $b_1 = \beta_T$  olduğundan

$$x_T = \frac{(b_T - 2\beta_T) \cdot p_T + (c_T - 2\alpha_T) \cdot q_T}{p_T + q_T} \text{ bulunur.}$$

**b)**  $X$  noktası  $D$  ile  $B$  noktaları arasında ise,  $C = F$  ve  $B' = F'$  dir.



Şekil 2.8.6

Şekil 2.8.6da Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(b_1 + c_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(b_2 + c_2)}{p_T + q_T}$  dir.  $d_E(A, X') = d_T(X, T) - b_1$ ,  $d_E(X, X') = d_E(X, T') - c_2$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  olduğundan

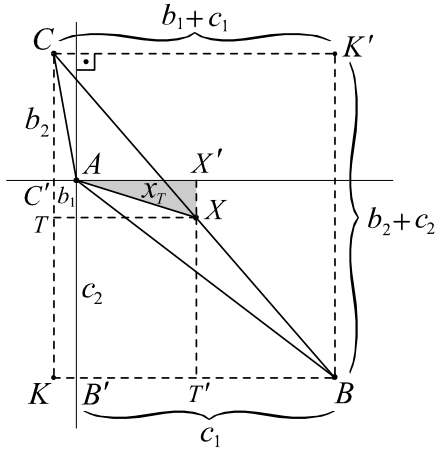
$$\begin{aligned} x_T &= \frac{q_T \cdot (b_1 + c_1)}{p_T + q_T} - b_1 + \frac{p_T \cdot (b_2 + c_2)}{p_T + q_T} - c_2 \\ &= \frac{b_1 \cdot q_T + c_1 \cdot q_T - b_1 \cdot p_T - b_1 \cdot q_T + b_2 \cdot p_T + c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \\ &= \frac{b_1 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T + c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot q_T - 2b_1 \cdot p_T - 2c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

$b_1 = \alpha_T$  ve  $c_2 = \beta_T$  olduğundan

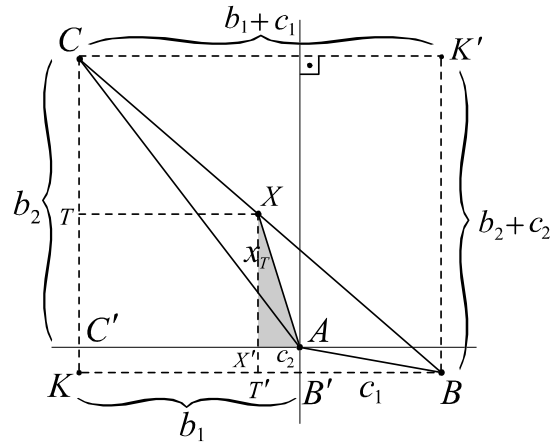
$$x_T = \frac{(b_T - 2\alpha_T) \cdot p_T + (c_T - 2\beta_T) \cdot q_T}{p_T + q_T}$$

bulunur.

iv.  $ABC$  üçgeni  $A$  köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun. Ve  $X$  noktası,  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.



Şekil 2.8.7



Şekil 2.8.8

Şekil 2.8.7de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(b_1 + c_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(b_2 + c_2)}{p_T + q_T}$  dir.  $d_E(A, X') = d_T(X, T) - b_1$ ,  $d_E(X, X') = c_2 - d_E(X, T')$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  olduğundan

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{q_T \cdot (b_1 + c_1)}{p_T + q_T} - b_1 + c_2 - \frac{p_T \cdot (b_2 + c_2)}{p_T + q_T} \\
&= \frac{b_1 \cdot q_T + c_1 \cdot q_T - b_1 \cdot p_T - b_1 \cdot q_T + c_2 \cdot p_T + c_2 \cdot q_T - b_2 \cdot p_T - c_2 \cdot p_T}{p_T + q_T} \\
&= \frac{c_1 \cdot q_T + c_2 \cdot q_T - b_1 \cdot p_T - b_2 \cdot p_T}{p_T + q_T} \quad \text{dir. Buradan}
\end{aligned}$$

$$x_T = \frac{c_T \cdot q_T - b_T \cdot p_T}{p_T + q_T} \quad \text{bulunur.}$$

Şekil 2.8.8 de Teorem 2.1.1 gereğince  $d_T(X, T) = \frac{q_T(b_1 + c_1)}{p_T + q_T}$  ve  $d_T(X, T') = \frac{p_T(b_2 + c_2)}{p_T + q_T}$  dir.  $d_E(A, X') = b_1 - d_T(X, T)$ ,  $d_E(X, X') = d_E(X, T') - c_2$  ve  $x_T = d_E(A, X') + d_E(X, X')$  olduğundan

$$\begin{aligned}
x_T &= b_1 - \frac{q_T \cdot (b_1 + c_1)}{p_T + q_T} + \frac{p_T \cdot (b_2 + c_2)}{p_T + q_T} - c_2 \\
&= \frac{b_1 \cdot p_T + b_1 \cdot q_T - b_1 \cdot q_T - c_1 \cdot q_T + b_2 \cdot p_T + c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot p_T - c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \\
&= \frac{b_1 \cdot p_T + b_2 \cdot p_T - c_1 \cdot q_T - c_2 \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{dir. Buradan}
\end{aligned}$$

$$x_T = \frac{b_T \cdot p_T - c_T \cdot q_T}{p_T + q_T} \quad \text{bulunur. O halde}$$

$$x_T = \frac{|b_T \cdot p_T - c_T \cdot q_T|}{p_T + q_T} \quad \text{dir.}$$

□

### Uyarı 2.8.2:

Hem Öklid düzleminde geçerli olan Stewart teoremini hem de Stewart teoreminin taksi versiyonunu bir özel durum için uygulayalım:

Öklid düzleminde geçerli olan Stewart teoremini,  $p = q$  durumu için uygularsak, ki bu

durumda  $x = V_a$  ve  $p = q = a/2$  olacaktır. Öyleyse  $x^2 = \frac{b^2 p + c^2 q}{p + q} - pq$  formülünde

değişen değerleri yerine koyarsak aşağıdaki ifade elde edilir:

—  $ABC$  herhangi bir üçgen ve  $E \in [BC]$  olmak üzere;  $|BC|=a$ ,  $|AC|=b$ ,  $|AB|=c$ ,  $|EB|=|EC|$ ,  $|AE|=V_a$  ise, aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} .$$

Bu da kenarortay teoremini verir. Benzer biçimde Stewart teoreminin taksi versiyonunu,  $p_T = q_T$  durumu için uygularsak, ki bu durumda  $x_T = V_{a_T}$  olacaktır,

—  $ABC$  taksi düzlemde herhangi bir üçgen;  $E \in [BC]$ ,  $a_T = d_T(B, C)$ ,  $b_T = d_T(A, C)$ ,  $c_T = d_T(A, B)$ ,  $d_T(E, B) = d_T(E, C)$  ve  $V_{a_T} = d_T(A, E)$  olmak üzere,

*i.*  $A$  köşesinin hiç temel doğrusu yoksa  $2V_{a_T} = b_T + c_T$ ,

*ii.*  $A$  köşesinin yalnız bir temel doğrusu var ve

*a)*  $E$  noktası  $D$  ile  $B$  noktaları arasında ise  $2V_{a_T} = b_T + c_T - 2\alpha_T$ ,

*b)*  $E$  noktası  $D$  ile  $C$  noktaları arasında ise  $2V_{a_T} = b_T + c_T - 2\alpha_T$ ,

*iii.*  $A$  köşesinin iki tane temel doğrusu var;  $E$  noktası,  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalıyor ve

*a)*  $E$  noktası  $D$  ile  $B$  noktaları arasında ise  $2V_{a_T} = b_T + c_T - 2(\alpha_T + \beta_T)$ ,

*b)*  $E$  noktası  $D$  ile  $C$  noktaları arasında ise  $2V_{a_T} = b_T + c_T - 2(\alpha_T + \beta_T)$ ,

*iv.*  $A$  köşesinin iki tane temel doğrusu var ve  $E$  noktası,  $A$  köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmıyor ise

$$2V_{a_T} = |b_T - c_T|$$

elde edilir, ki bu da kenarortay teoreminin taksi versiyonu olan

“Taksi düzlemde kenar uzunlukları  $a_T = d_T(B, C)$ ,  $b_T = d_T(A, C)$  ve  $c_T = d_T(A, B)$  olan bir  $ABC$  üçgeninin herhangi bir kenarına ait kenarortay uzunluğu, diyelim ki  $BC$  kenarına ait kenarortay uzunluğu  $V_{a_T}$  ve  $BC$  kenarının orta noktası  $E$  olmak üzere,

$$2V_{a_T} = \begin{cases} b_T + c_T & , A \text{ köşesinin hiç temel doğrusu yoksa} \\ b_T + c_T - 2\alpha_T & , A \text{ köşesinin bir tek temel doğrusu varsa} \\ b_T + c_T - 2(\alpha_T + \beta_T) & , A \text{ köşesinin iki tane temel doğrusu var ve} \\ & E \text{ noktası, } A \text{ köşesine ait temel doğrularla karşı} \\ & \text{kenarın kesişim noktaları arasında kalıyorsa} \\ |b_T - c_T| & , A \text{ köşesinin iki tane temel doğrusu var ve} \\ & E \text{ noktası, } A \text{ köşesine ait temel doğrularla karşı} \\ & \text{kenarın kesişim noktaları arasında kalmıyorsa} \end{cases}$$

dir.”

teoremine eşdeğerdir ( Bkz. [10] ) .

□

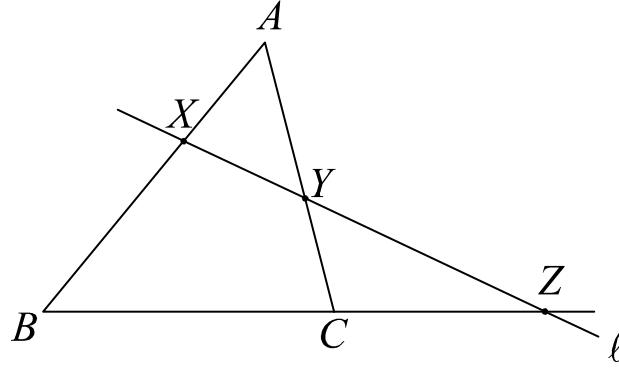
## 2.9 Menelaus Teoremi

### Öklid Düzleminde Menelaus Teoremi

$ABC$  herhangi bir üçgen ve  $\ell$  bu üçgenin iki kenarını, diyelim ki  $AB$  ve  $AC$  kenarını sırasıyla,  $A, B, C$  noktalarından farklı  $X$  ve  $Y$  noktalarında kesen bir doğru olsun.  $\ell$  doğrusunun  $BC$  kenarının uzantısını kestiği nokta  $Z$  ise (Bkz. Şekil 2.31),

$$\frac{|ZC|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XA|} \cdot \frac{|AY|}{|YC|} = 1$$

dir.



Şekil 2.9.1

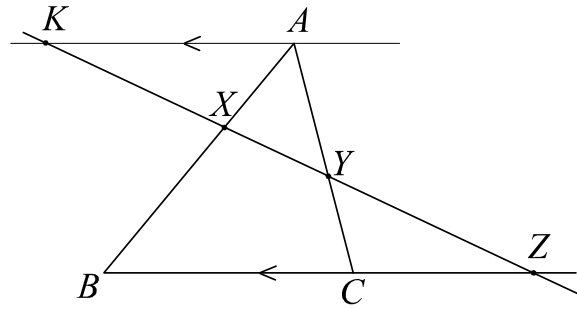
### İspat :

Şekil 2.9.1 de  $A$  noktasından  $BC$  doğrusuna paralel çizilsin. Çizilen paralelin  $\ell$  doğrusu ile kesişimi  $K$  noktası ise  $AKY$  ile  $CZY$  üçgenleri ve  $AKX$  ile  $BZX$  üçgenlerinin benzerliklerinden (Thales bağımlıları)

$$\frac{|AK|}{|ZC|} = \frac{|AY|}{|YC|} \quad \text{ve} \quad \frac{|AK|}{|ZB|} = \frac{|XA|}{|BX|}$$

elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünüp düzenlenirse

$$\frac{|ZC|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XA|} \cdot \frac{|AY|}{|YC|} = 1 \quad \text{bulunur.}$$



Şekil 2.9.2

□



### Menelaus Teoreminin Taksi Benzeri

Thales bağıntıları taksi düzlemde geçerli olduğundan Menelaus teoreminin taksi düzlemde geçerliliği aşikardır. Teoremin ifadesini verelim:

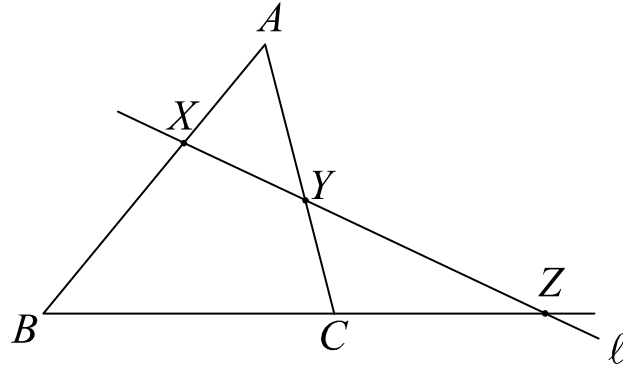
#### Teorem 2.9.1 :

Taksi düzleminde  $ABC$  herhangi bir üçgen ve  $\ell$ , bu üçgenin iki kenarını diyelim ki,  $AB$  ve  $AC$  kenarını sırasıyla,  $A, B, C$  noktalarından farklı  $X$  ve  $Y$  noktalarında kesen bir doğru olsun.  $\ell$  doğrusunun  $BC$  kenarının uzantısını kestiği nokta  $Z$  ise (Bkz. Şekil 2.9.3),

$$\frac{d_T(Z,C)}{d_T(Z,B)} \cdot \frac{d_T(B,X)}{d_T(X,A)} \cdot \frac{d_T(A,Y)}{d_T(Y,C)} = 1$$

dir ( Bkz. [16] ).

□



Şekil 2.9.3

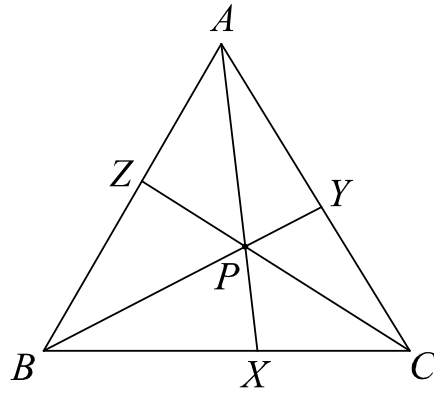
## 2.10 Ceva Teoremi

### Öklid Düzleminde Ceva Teoremi

$ABC$  herhangi bir üçgen ve  $P$ , bu üçgen içinde bir nokta olsun.  $AP$  doğrusunun  $BC$  doğru parçasını kestiği nokta  $X$ ;  $BP$  doğrusunun  $AC$  doğru parçasını kestiği nokta  $Y$ ;  $CP$  doğrusunun  $AB$  doğru parçasını kestiği nokta  $Z$  ise (Bkz. Şekil 2.10.1),

$$\frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} = 1$$

dir.



Şekil 2.10.1

### İspat :

Şekil 2.10.1 de  $ABX$  üçgeni ve  $ZPC$  keseni;  $AXC$  üçgeni ve  $BPY$  keseni göz önüne alınarak Menelaus teoremi uygulanırsa,

$$\frac{|CX|}{|CB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} \cdot \frac{|AP|}{|PX|} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{|BX|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AP|}{|PX|} = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünüp düzenlenirse,

$$\frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} = 1$$

bulunur.

□

### Ceva Teoreminin Taksi Benzeri

Menelaus teoremi taksi düzlemde geçerli olduğundan Ceva teoreminin taksi düzlemde geçerliliği aşikardır. Teoremin ifadesini verelim:

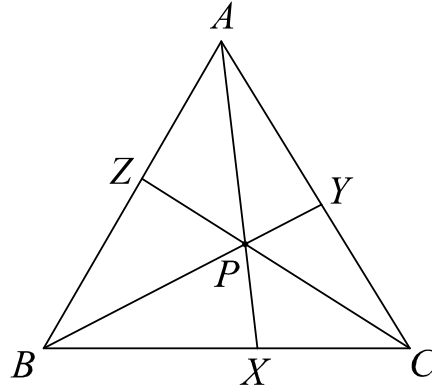
#### Teorem 2.10.1 :

Taksi düzleminde  $ABC$  herhangi bir üçgen ve  $P$ , bu üçgen içinde bir nokta olsun.  $AP$  doğrusunun  $BC$  doğru parçasını kestiği nokta  $X$ ;  $BP$  doğrusunun  $AC$  doğru parçasını kestiği nokta  $Y$ ;  $CP$  doğrusunun  $AB$  doğru parçasını kestiği nokta  $Z$  ise (Bkz. Şekil 2.10.2),

$$\frac{d_T(A,Y)}{d_T(Y,C)} \cdot \frac{d_T(C,X)}{d_T(X,B)} \cdot \frac{d_T(B,Z)}{d_T(Z,A)} = 1$$

dir ( Bkz. [16] ).

□



Şekil 2.10.2

## **Bölüm 3**

### **TAKSİ DÜZLEMİNDEKİ ÇEMBERLERE**

### **BİR GEOMETRİK YAKLAŞIM**

Öklid düzleminde çemberlerin iyi bilinen üç özelliği aşağıdadır:

1. Farklı iki noktadan geçen sonsuz çoklukta çember vardır.
2. Doğrudaş olmayan farklı üç noktadan bir ve yalnız bir çember geçer.
3. Doğrudaş olan farklı üç noktadan geçen çember yoktur.

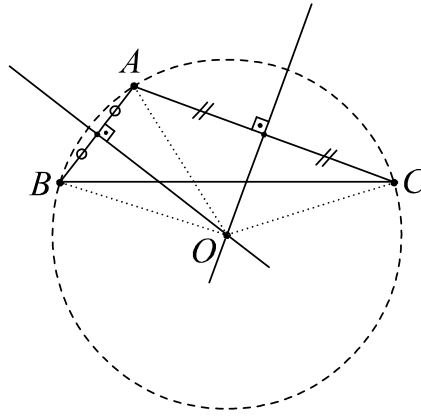
Tian-So-Chen [22] de birinci özelliğin taksi geometride sağlandığını fakat ikinci ve üçüncü özelliklerin genel olarak sağlanmadığını analitik olarak ispatlamıştır. Biz bu bölümde [22] de elde edilen sonuçları sentetik olarak elde edeceğiz. Taksi düzlemdeki sonuçları elde etmek için kullanacağımız sentetik yöntem, Öklid düzleminde bu özellikleri elde etmek için kullanılan sentetik yöntemle benzediğinden önce özelliklerin Öklid düzleminde sentetik olarak nasıl çıkarıldığı ele alınacaktır.

### 3.1 Öklid Düzleminde Çember

Öklid düzleminde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan tüm noktaların kümesine **çember** denir. Öyleyse birinci özelliğin doğru olduğunu göstermek için düzlemde alınan herhangi farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan sonsuz çoklukta noktanın var olduğu gösterilmelidir. Düzlemde sabit ve farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikmesi olduğundan istenilen özellikte var olan sonsuz çoklukta noktanın varlığı aşikardır.

Benzer olarak ikinci özelliğin doğru olduğunu göstermek için düzlemde doğrudan olmayan herhangi farklı üç noktaya eşit uzaklıkta bulunan bir ve yalnız bir noktanın var olduğu gösterilmelidir. Düzlemde doğrudan olmayan herhangi farklı üç nokta  $A$ ,  $B$  ve  $C$  olarak adlandırılınsın ve bu doğrudan olmayan üç noktadan farklı iki nokta çifti seçilsin. Örneğin  $A$  ve  $B$  ile  $A$  ve  $C$ . Düzlemde  $A$  ve  $B$  noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar kümesi,  $AB$  doğru parçasının orta dikmesidir. Benzer biçimde  $A$  ve  $C$  noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar kümesi de  $AC$  doğru parçasının orta dikmesidir.  $AB$  doğrusu ile  $AC$  doğrusunun eğimleri birbirinden farklı olduğundan  $AB$  doğru parçasının orta dikmesi ile  $AC$  doğru parçasının orta dikmesinin eğimleri birbirinden farklıdır. Öyleyse, bu iki orta dikme bir ve yalnız bir noktada kesişir. Bu kesişim noktası  $A$ ,  $B$  ve  $C$  noktalarından eşit uzaklıktadır. Kesişim noktasına  $O$  noktası ve  $|OA| = |OB| = |OC| = r$  denirse,  $O$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı çember, bu üç noktadan geçen bir tek çember olur. (Bkz. Şekil 3.1.1)

Son özellik ise, açıktır ki doğrudan olan farklı üç noktanın ikişerli orta dikmelerinin kesişmemesi sonucudur.



Şekil 3.1.1

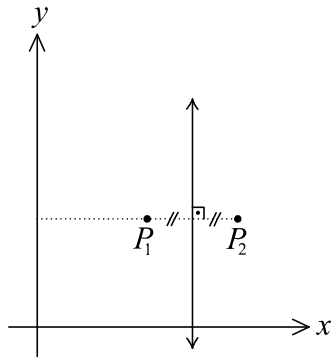
### 3.2 Taksi Düzleminde Çember

Taksi düzlemde de çemberler benzer biçimde tanımlanır (Bkz. Bölüm 1). Öklidyen düzlemde elde edilen yukarıdaki özellikler iki noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi yardımıyla elde edildi. Taksi düzlemde de benzer bir yöntem kullanılacağından taksi düzlemde iki noktaya eşit taksi uzaklıkta olan tüm noktaların kümesi, yani bölüm 1 de tanımlandığı şekli ile iki noktanın orta kümesi temel eleman olacaktır.

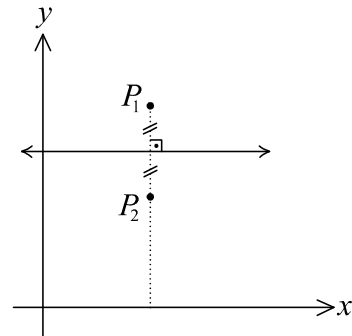
So ve Al-Maskari [21] de iki noktanın orta kümesini aşağıda olduğu gibi dört formla karakterize etmiştir:

$P_1$  ve  $P_2$  taksi düzlemde farklı iki noktayı göstermek üzere;

1.  $P_1$  ve  $P_2$  noktaları, aynı  $x$  apsisine ya da aynı  $y$  ordinatına sahipse, bu iki noktaya eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesi ile eşit Öklidyen uzaklıktaki noktalar kümesi aynıdır. (Bkz. Şekil 3.2.2 ve Şekil 3.2.3)



Şekil 3.2.2



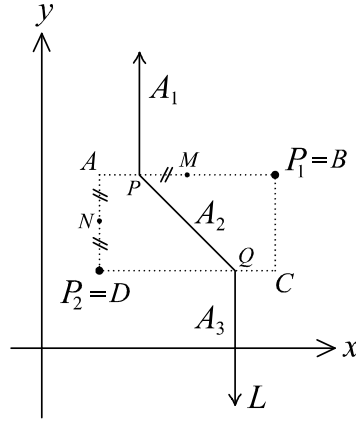
Şekil 3.2.3

2.  $P_1$  ve  $P_2$  noktaları farklı apsis ve ordinatlara sahipse, bu iki noktaya eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesi aşağıdaki gibi oluşturulur:

**1.Adım:**  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen yatay ve dikey doğrular çizilerek,  $P_1$  ve  $P_2$  noktaları karşı köşelere gelecek şekilde,  $ABCD$  dikdörtgeni oluşturulur. Uygunluk amacı ile  $A$ , her zaman sol üst köşeyi;  $B$ , her zaman sağ üst köşeyi;  $C$ , her zaman sağ alt köşeyi;  $D$ , her zaman sol alt köşeyi gösterecektir.

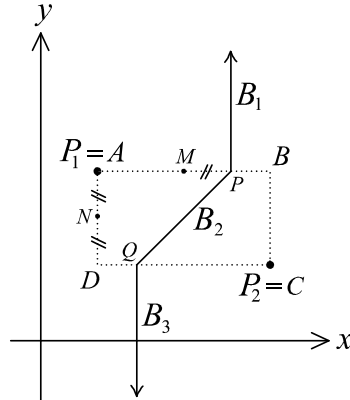
**2. Adım:**

(a) Eğer  $|AB| > |AD|$ ,  $P_1 = B$  ve  $P_2 = D$  ise,  $AB$  ve  $AD$  doğru parçalarının sırasıyla orta noktaları olan  $M$  ve  $N$  belirlenir.  $|DN| = |MP|$  olacak şekilde  $M$  nin solunda  $P$  noktası işaretlenir.  $CD$  doğru parçası ile  $P$  noktasından geçen  $-1$  eğimli doğrunun kesim noktası  $Q$  ile;  $AB$  doğru parçasının üstündeki, başlangıç noktası  $P$  olan dikey ışın  $A_1$  ile;  $CD$  doğru parçasının altındaki, başlangıç noktası  $Q$  olan dikey ışın  $A_3$  ile;  $PQ$  doğru parçası da  $A_2$  ile gösterilirse,  $A_1, A_2$  ve  $A_3$  kümelerinin birleşimi olan  $L$  kümesi,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesidir. (Bkz. Şekil 3.2.4)



Şekil 3.2.4

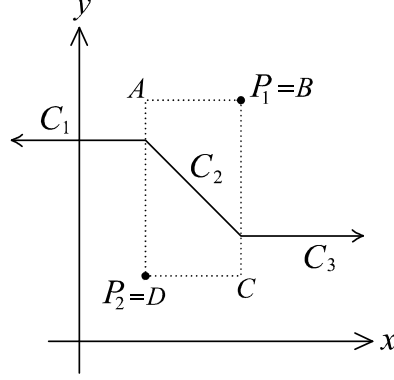
(b) Benzer olarak, eğer  $|AB| > |AD|$ ,  $P_1 = A$  ve  $P_2 = C$  ise,  $B_1, B_2$  ve  $B_3$  kümelerini (a) daki gibi oluşturabiliriz.  $B_1, B_2$  ve  $B_3$  kümelerinin birleşimi,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesidir. (Bkz. Şekil 3.2.5)



Şekil 3.2.5

(c) Eğer  $|AB| < |AD|$ ,  $P_1 = B$  ve  $P_2 = D$  ise,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesini, şekil 3.2.5 i  $90^\circ$  saat yönünde döndürerek elde edebiliriz.

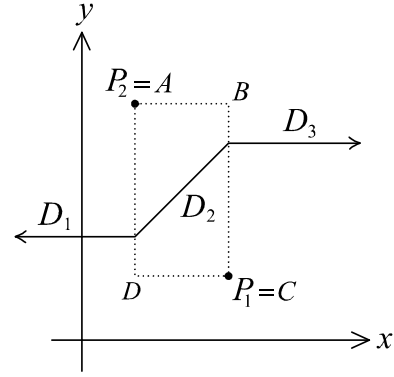
(Bkz. Şekil 3.2.6)



Şekil 3.2.6

(d) Eğer  $|AB| < |AD|$ ,  $P_1 = C$  ve  $P_2 = A$  ise,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesini, şekil 3.2.4 ü  $90^\circ$  saat yönünde döndürerek elde edebiliriz.

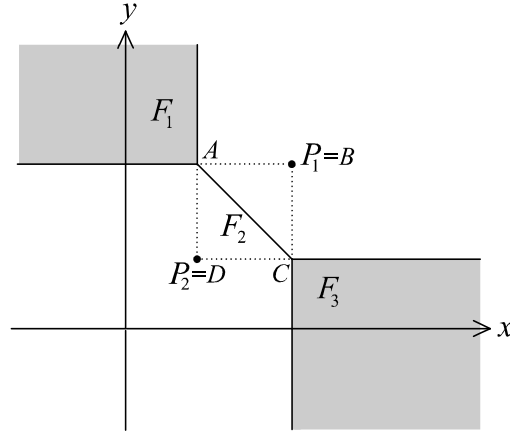
(Bkz. Şekil 3.2.7)



Şekil 3.2.7

(e) Eğer  $|AB| = |AD|$ ,  $P_1 = B$  ve  $P_2 = D$  ise,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesi,  $AP_2$  doğrusunun üzerinde veya solunda ve  $AP_1$  doğrusunun üzerinde veya üst kısmında olan  $F_1$  bölgesi;  $P_1C$  doğrusunun üzerinde veya sağında ve  $P_2C$  doğrusunun üzerinde veya alt kısmında olan  $F_3$  bölgesi ve  $ABCD$  karesinin  $AC$  köşegeni olan  $F_2$  kümesinin birleşimidir. (Bkz. Şekil 3.2.8)

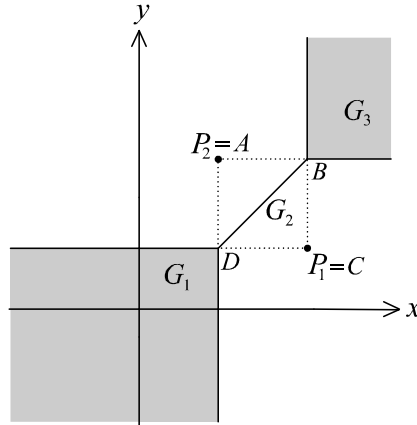




Şekil 3.2.8

(f) Benzer olarak, eğer  $|AB|=|AD|$ ,  $P_1=C$  ve  $P_2=A$  ise,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarına eşit taksit uzaklıktaki noktalar kümesi,  $G_1, G_2$  ve  $G_3$  kümelerinin birleşimidir.

(Bkz. Şekil 3.2.9)



Şekil 3.2.9

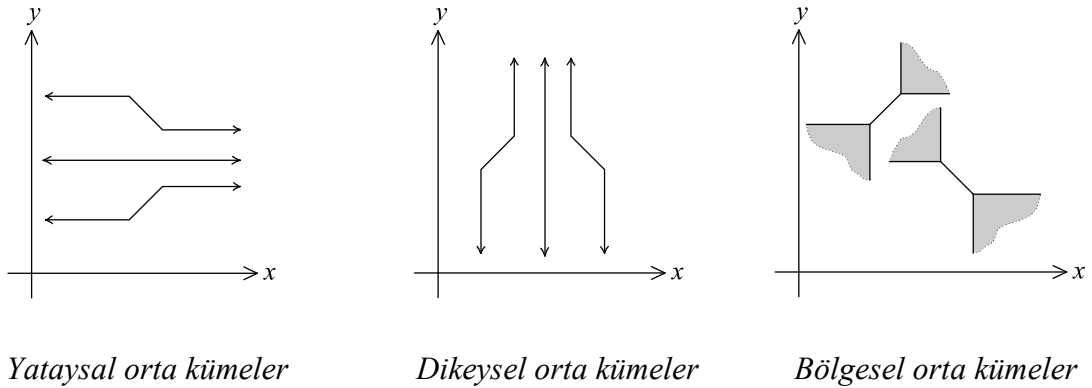
So ve Al-Maskari nin şekil 3.2.2 ve 3.2.3, şekil 3.2.4 ve 3.2.5, şekil 3.2.6 ve 3.2.7, şekil 3.2.8 ve 3.2.9 da verilen orta küme tipleriyle dörde ayırdığı orta kümeler, başka bir açıdan bakılarak  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğrunun tipine göre de üç sınıfa ayrılabilir. Şöyle ki, şekil 3.2.2, 3.2.4 ve 3.2.5 deki orta kümeleri oluşturan noktaların oluşturduğu doğrular yataysal doğrular; şekil 3.2.3, 3.2.6 ve 3.2.7 deki orta kümeleri oluşturan noktaların oluşturduğu doğrular dikeysel doğrular; şekil 3.2.8 ve 3.2.9 daki orta kümeleri oluşturan noktaların oluşturduğu doğrular da ayıraç doğrulardır.

Öyleyse, şekil 3.2.2, 3.2.4 ve 3.2.5 deki orta küme tipleri genel olarak **dikeysel orta küme**; şekil 3.2.3, 3.2.6 ve 3.2.7 deki orta küme tipleri genel olarak **yataysal orta küme**; şekil 3.2.8 ve 3.2.9 daki orta küme tipleri de genel olarak **bölgesel orta küme** diye adlandırılırsa aşağıdaki genelleme yapılabilir:

$P_1$  ve  $P_2$  taksit düzlemde farklı iki noktayı göstermek üzere;

1.  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru yataysal bir doğru ise,  $P_1$  ve  $P_2$  bir **dikeysel orta küme**ye sahiptir.
2.  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru dikeysel bir doğru ise,  $P_1$  ve  $P_2$  bir **yataysal orta küme**ye sahiptir.
3.  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru ayıraç doğru ise,  $P_1$  ve  $P_2$  bir **bölgesel orta küme**ye sahiptir.

Böylece iki noktanın orta kümeleri üç sınıfa ayrılmış oldu. (Bkz. Şekil 3.2.10)



Şekil 3.2.10

Tanımlanan orta kümelerin genel olarak kaç noktada kesişebilecekleri incelenmeden önce kolaylık sağlaması açısından bu orta kümelerin parçalarına isimler vereceğiz. Şöyle ki, orta kümelerle, orta kümeleri oluşturan noktaların en kısa uzaklık kümelerinin (Bkz. Bölüm 1) kesişimine bu orta kümelerin **jeneratörleri**; yataysal orta kümelerin geri kalan parçalarına bu orta kümelerin **yatay kanatları**; dikeysel orta kümelerin geri kalan parçalarına bu orta kümelerin **dikey kanatları**; bölgesel orta kümelerin kalan parçalarına da bu orta kümelerin **bölgesel kanatları** diyelim.

Verilen tanımlar yardımıyla iki orta kümenin arakesit noktaları ile ilgili aşağıdaki özellikler kolayca elde edilebilir:

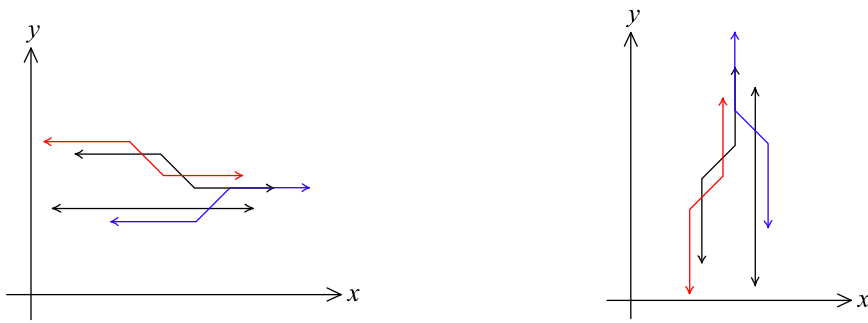
**1.** İki yataysal orta küme veya iki dikeysel orta küme için aşağıdaki dört durumdan biri ve yalnız biri geçerlidir:

*i.* Kesişmezler.

*ii.* Bir tek nokta da kesişirler.

*iii.* İki farklı noktada kesişirler.

*iv.* Sonsuz çoklukta arakesit noktaları vardır. (Bkz. Şekil 3.2.11)

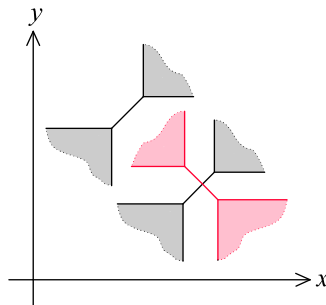


Şekil 3.2.11

**2.** İki bölgesel orta küme için aşağıdaki iki durumdan biri ve yalnız biri geçerlidir:

*i.* Bir tek nokta da kesişirler.

*ii.* Sonsuz çoklukta arakesit noktaları vardır. (Bkz. Şekil 3.2.12)

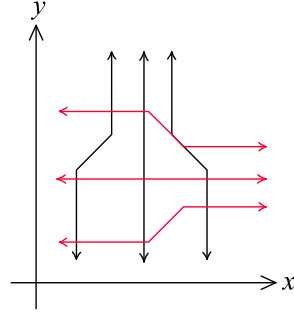


Şekil 3.2.12

**3.** Bir yataysal ve bir dikeysel orta küme için aşağıdaki iki durumdan biri ve yalnız biri geçerlidir:

*i.* Bir tek nokta da kesişirler.

*ii.* Sonsuz çoklukta arakesit noktaları vardır. (Bkz. Şekil 3.2.13)

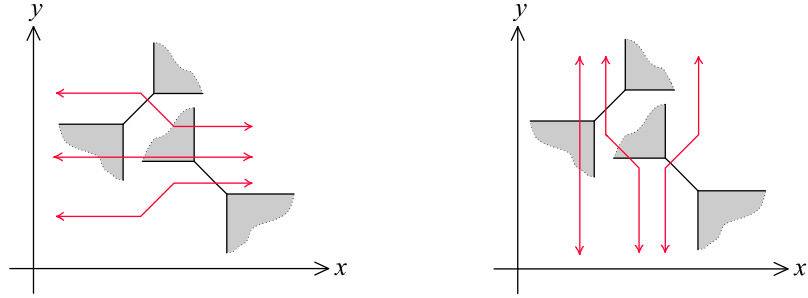


Şekil 3.2.13

4. Bir yataysal ve bir bölgesel orta küme veya bir dikeysel ve bir bölgesel orta küme için aşağıdaki iki durumdan biri ve yalnız biri geçerlidir:

*i.* Bir tek nokta da kesişirler.

*ii.* Sonsuz çoklukta arakesit noktaları vardır. (Bkz. Şekil 3.2.14)

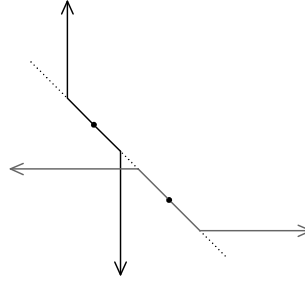


Şekil 3.2.14

**Yardımcı Teorem 3.2.1 :** Biri yataysal, diğeri dikeysel doğru oluşturan iki nokta çiftinin orta noktaları bir ayıraç doğru üzerinde değil ise, bu iki nokta çiftinin orta kümeleri bir ve yalnız bir noktada kesişir.

**İspat :** Yataysal doğru oluşturan nokta çifti bir dikeysel orta kümeye, dikeysel doğru oluşturan nokta çifti de bir yataysal orta kümeye sahiptir ve bu orta kümelerin en az bir ara kesit noktası vardır. Bir yataysal orta küme ile bir dikeysel orta küme ancak jeneratörleri en az iki noktada kesişirlerse sonsuz çoklukta arakesit noktasına sahip olabilir. Çünkü yatay kanatlarla dikey kanatların en çok bir tane ortak noktası olabilir. Jeneratörleri en az iki noktada kesişmeyen biri yataysal diğeri dikeysel orta kümeler yalnız bir noktada kesişirler. Eğer nokta çiftlerinin orta noktaları bir ayıraç doğru

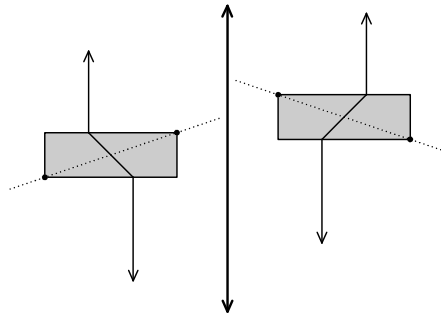
üzerinde değil ise, jeneratörler de bir ayıraç doğru üzerinde değildirler. Bir ayıraç doğru üzerinde olmayan jeneratörlerin sonsuz çoklukta arakesit noktası olamayacağından orta kümelerin jeneratörleri en az iki noktada kesişmezler. Dolayısıyla orta kümelerin bir ve yalnız bir arakesit noktaları olur. (Bkz. Şekil 3.2.15)



Şekil 3.2.15

**Yardımcı Teorem 3.2.2 :** Birer yataysal doğru oluşturan iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalıyorsa bu iki nokta çiftinin orta kümeleri kesişmezler.

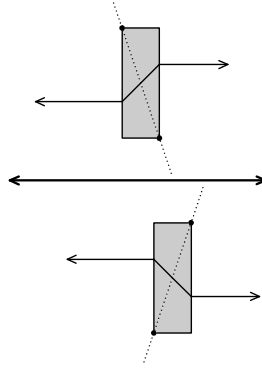
**İspat :** Birer yataysal doğru oluşturan iki nokta çifti birer dikeysel orta kümeye sahiptirler. Eğer bu nokta çiftlerinin en kısa uzaklık kümeleri  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalırsa, bu orta kümelerin jeneratörleri ve dikey kanatları bu doğrunun farklı taraflarında kalır ve kesişmezler. (Bkz. Şekil 3.2.16)



Şekil 3.2.16

**Yardımcı Teorem 3.2.3 :** Birer dikeysel doğru oluşturan iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri  $x$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalıyorsa bu iki nokta çiftinin orta kümeleri kesişmezler.

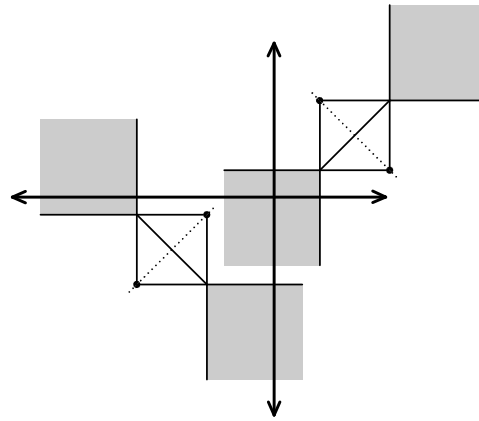
**İspat :** Birer dikeysel doğru oluşturan iki nokta çifti birer yataysal orta kümeye sahiptirler. Eğer bu nokta çiftlerinin en kısa uzaklık kümeleri  $x$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalırsa, bu orta kümelerin jeneratörleri ve yatay kanatları bu doğrunun farklı taraflarında kalır ve kesişmezler. (Bkz. Şekil 3.2.17)



Şekil 3.2.17

**Yardımcı Teorem 3.2.4 :** Birer ayıraç doğru oluşturan iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri  $x$ -eksenine paralel veya  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalıyorsa bu iki nokta çiftinin orta kümelerinin sonsuz çoklukta arakesit noktası vardır.

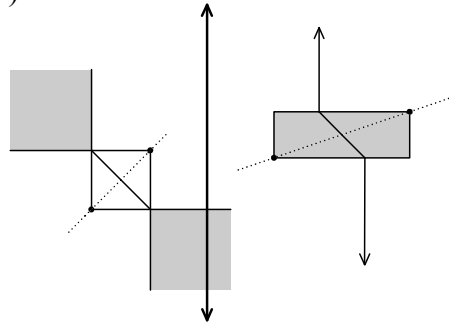
**İspat :** Birer ayıraç doğru oluşturan iki nokta çifti birer bölgesel orta kümeye sahiptirler. Eğer bu nokta çiftlerinin en kısa uzaklık kümeleri  $x$ -eksenine paralel veya  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalırsa, bu orta kümelerin jeneratörleri ya uç noktalarında kesişirler ya da hiç kesişmezler. Bu durumda bu iki orta kümenin sonsuz çoklukta ara kesit noktası vardır. (Bkz. Şekil 3.2.18)



Şekil 3.2.18

**Yardımcı Teorem 3.2.5 :** Biri ayıraç doğru diğeri yataysal doğru oluşturan iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalıyorsa bu iki nokta çiftinin orta kümelerinin sonsuz çoklukta arakesit noktası vardır.

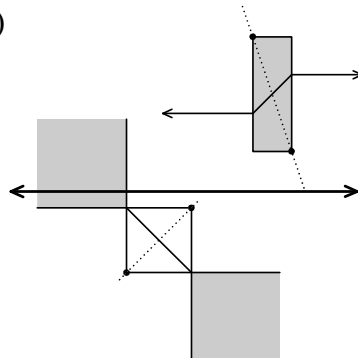
**İspat :** Ayıraç doğru oluşturan nokta çifti bir bölgesel orta küme, yataysal doğru oluşturan nokta çifti de bir dikeysel orta küme sahiptir. Eğer bu nokta çiftlerinin en kısa uzaklık kümeleri  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalırsa, bölgesel orta kümenin bölgesel kanatlarından biriyle dikeysel orta kümenin dikeysel kanatlarından en az biri kesişir. Böylece sonsuz çoklukta arakesit noktası oluşur. (Bkz. Şekil 3.2.19)



Şekil 3.2.19

**Yardımcı Teorem 3.2.6 :** Biri ayıraç doğru diğeri dikeysel doğru oluşturan iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri  $x$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalıyorsa bu iki nokta çiftinin orta kümelerinin sonsuz çoklukta arakesit noktası vardır.

**İspat :** Ayıraç doğru oluşturan nokta çifti bir bölgesel orta küme, dikeysel doğru oluşturan nokta çifti de bir yataysal orta küme sahiptir. Eğer bu nokta çiftlerinin en kısa uzaklık kümeleri  $x$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalırsa, bölgesel orta kümenin bölgesel kanatlarından biriyle yataysal orta kümenin yatay kanatlarından en az biri kesişir. Böylece sonsuz çoklukta arakesit noktası oluşur. (Bkz. Şekil 3.2.20)



Şekil 3.2.20

**Yardımcı Teorem 3.2.7 :** Biri yataysal, diğeri dikeysel doğru oluşturan iki nokta çiftinin orta kümelerinin jeneratörleri aynı bir ayıraç doğru üzerinde ve bu jeneratörlerin uzunlukları toplamı, nokta çiftlerinin orta noktaları arası uzaklığın iki katından büyükse, orta kümelerin sonsuz çoklukta arakesit noktası; büyük değil ise, yalnız bir kesişim noktası vardır.

**İspat :** Açıktır. (Bkz. Şekil 3.2.15)

□

**Teorem 3.2.8 :** Taksi düzlemde aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. Farklı iki noktadan geçen sonsuz çoklukta çember vardır.
2. Eğimi 1 veya -1 olmayan bir doğru üzerindeki doğrudaş farklı üç noktadan geçen taksi çemberi yoktur. Bununla birlikte, eğimi 1 veya -1 olan bir doğru üzerindeki doğrudaş farklı üç noktadan geçen sonsuz çoklukta taksi çemberi vardır.
3. Bir yataysal, iki dikeysel veya bir dikeysel, iki yataysal doğru oluşturan ve doğrudaş olmayan farklı üç noktadan geçen bir ve yalnız bir taksi çemberi vardır.
4. Üç yataysal veya üç dikeysel doğru oluşturan ve doğrudaş olmayan farklı üç noktadan geçen taksi çemberi yoktur.
5. Bir ayıraç, iki yataysal veya bir ayıraç, iki dikeysel doğru oluşturan ve doğrudaş olmayan farklı üç noktadan geçen sonsuz çoklukta çember vardır.
6. İki ayıraç, bir yataysal veya iki ayıraç bir dikeysel doğru oluşturan ve doğrudaş olmayan farklı üç noktadan geçen sonsuz çoklukta çember vardır.
7. Bir yataysal, bir dikeysel, bir ayıraç doğru oluşturan ve doğrudaş olmayan farklı üç noktadan geçen bir ya da sonsuz çoklukta taksi çemberi vardır; şöyle ki, eğer ayıraç doğruyu oluşturan nokta çifti dışında kalan üçüncü noktanın bu ayıraç doğruya olan uzaklığı, ayıraç doğruyu oluşturan nokta çifti arasındaki uzaklığın  $\sqrt{2}$  katından büyük ise, sonsuz çoklukta; büyük değil ise, bu üç noktadan geçen yalnız bir tane taksi çemberi vardır.

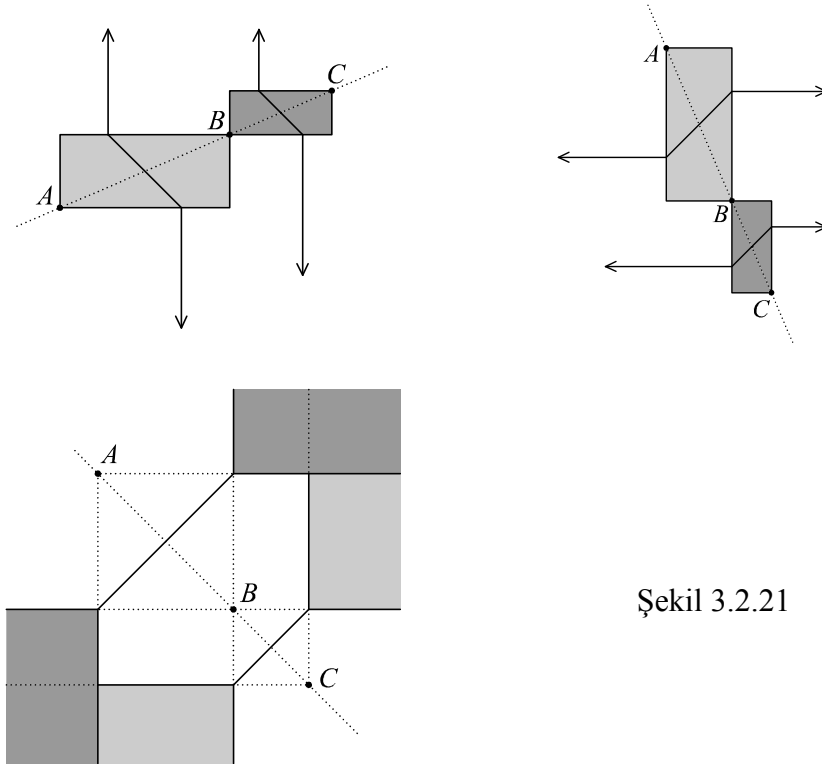
**İspat :**

1. Taksi düzlemde herhangi farklı iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan sonsuz çoklukta nokta olduğundan bu ifadenin doğruluğu açıktır. (Bkz. Teorem 1.5)



2. Eğimi 1 veya -1 olmayan bir doğru üzerindeki doğrudan farklı üç noktadan geçen doğru ya bir yataysal ya da bir dikeysel doğrudur. Eğer yataysal doğru ise, bu üç noktadan seçilen üç nokta çiftinin her biri birer dikeysel orta kümeye sahiptir. Ayrıca iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri daima  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun iki farklı tarafında kalır ve Y. Teorem 3.2.2 gereğince bu iki orta küme kesişmezler. Dolayısıyla bu üç noktadan geçen taksi çemberi yoktur. Eğer dikeysel doğru ise, bu üç noktadan seçilen üç nokta çiftinin her biri birer yataysal orta kümeye sahiptir. Ayrıca iki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri daima  $x$ -eksenine paralel bir doğrunun iki farklı tarafında kalır ve Y. Teorem 3.2.3 gereğince bu iki orta küme kesişmezler. Dolayısıyla bu üç noktadan geçen taksi çemberi yoktur. Bununla birlikte, eğimi 1 veya -1 olan bir doğru üzerindeki doğrudan farklı üç noktadan geçen sonsuz çoklukta taksi çemberi vardır. Çünkü bu üç noktadan geçen doğru bir ayıraç doğrudur ve bu üç noktadan seçilen nokta çiftleri birer bölgesel orta kümeye sahiptirler. İki nokta çiftinin en kısa uzaklık kümeleri daima  $x$ -eksenine paralel veya  $y$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalacağından Y. Teorem 3.2.4 gereğince iki nokta çiftinin orta kümelerinin sonsuz çoklukta arakesit noktası vardır. (Bkz. Şekil 3.2.21)

□

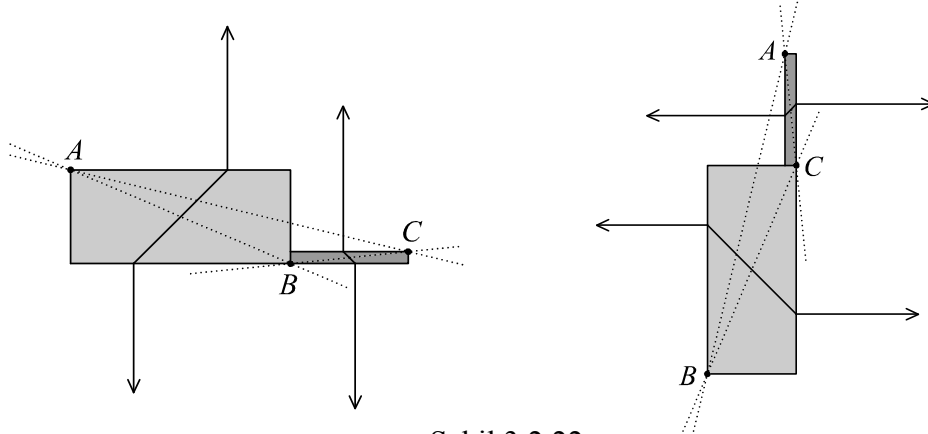


Şekil 3.2.21

3. Bir yataysal, bir dikeysel ve bir ayıraç olmayan doğru oluşturan herhangi farklı üç nokta çiftinden yataysal ve dikeysel doğru oluşturan nokta çiftinin orta noktaları Teorem 2.1.1 gereğince bir ayıraç doğru üzerinde değildir. O halde, Y. Teorem 3.2.1 gereğince bu iki nokta çiftinin orta kümeleri bir ve yalnız bir noktada kesişir. Sonuç olarak bu noktalardan geçen bir ve yalnız bir taksit çemberi vardır.

□

4. Üç yataysal veya üç dikeysel doğru oluşturan ve doğrudan olmayan farklı üç noktadan seçilen üç nokta çifti sırasıyla üç dikeysel veya üç yataysal orta küme sahiptir. Bu özellikteki nokta çiftlerinden daima ikisinin en kısa uzaklık kümesi sırasıyla bir  $y$ -eksenine paralel veya bir  $x$ -eksenine paralel doğrunun farklı iki tarafında kalır. O halde, Y. Teorem 3.2.2 ve 3.2.3 gereğince bu nokta çiftlerinin arakesit noktası yoktur. (Bkz. Şekil 3.2.22)

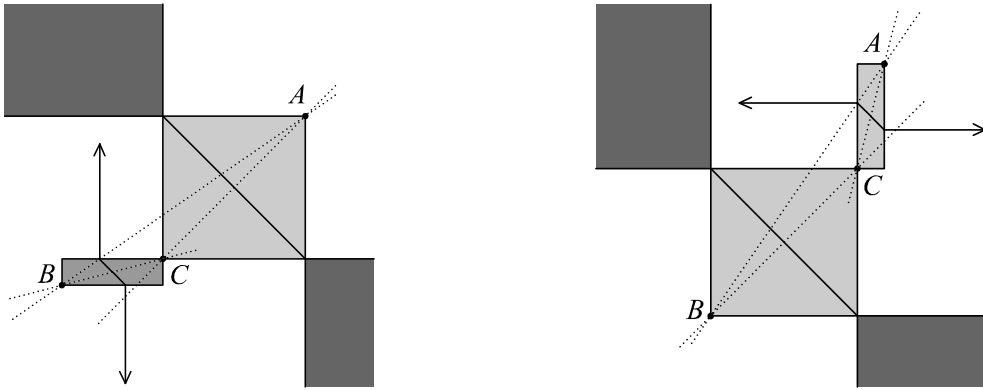


Şekil 3.2.22

□

5. Bir ayıraç, iki yataysal veya bir ayıraç, iki dikeysel doğru oluşturan ve doğrudan olmayan farklı üç noktadan seçilen üç nokta çifti bir bölgesel, iki dikeysel veya bir bölgesel iki yataysal orta küme sahiptir. Bölgesel orta küme sahip nokta çiftinin en kısa uzaklık kümesi ile dikeysel veya yataysal orta küme sahip iki nokta çiftinin birinin en kısa uzaklık kümesi daima, sırasıyla bir  $y$ -eksenine paralel ve bir  $x$ -eksenine paralel doğrunun farklı iki tarafında kalırlar. O halde, Y. Teorem 3.2.5 ve 3.2.6 gereğince bu orta kümelerin sonsuz çoklukta arakesit noktaları vardır. Sonuç olarak, bu özelliklerdeki üç noktadan geçen sonsuz çoklukta taksit çemberi vardır. (Bkz. Şekil 3.2.23)

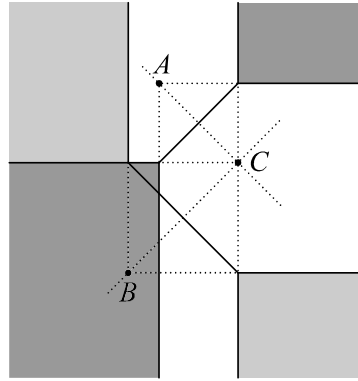
□



Şekil 3.2.23

6. Birer ayıraç doğru oluşturan iki nokta çifti iki bölgesel orta kümeye sahiptir ve bu iki nokta çiftinin bir noktası ortak olduğundan bu nokta çiftlerinin en kısa uzaklık kümeleri  $y$ -eksenine paralel veya  $x$ -eksenine paralel bir doğrunun farklı iki tarafında kalır. O halde, Y. Teorem 3.2.4 gereğince bu iki orta kümenin sonsuz çoklukta arakesiti vardır. Sonuç olarak bu özellikteki noktalardan geçen sonsuz çoklukta taksit çemberi vardır. (Bkz. Şekil 3.2.24)

□

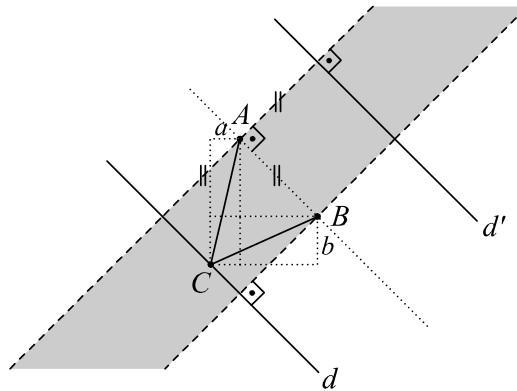


Şekil 3.2.24

7. Taksit düzlemde bir yataysal, bir dikeysel, bir ayıraç doğru oluşturan ve doğrudan olmayan farklı üç nokta verilsin. Ayıraç doğruyu oluşturan noktalar Şekil 3.2.25 deki  $A$  ve  $B$  noktaları ise üçüncü nokta  $C$ , taralı bölgede olmalıdır.  $C$  noktasının ayıraç doğruya olan uzaklığı, ayıraç doğruyu oluşturan nokta çifti arasındaki uzaklığın  $\sqrt{2}$  katı ise,  $C$  noktası  $d$  veya  $d'$  doğrularından biri üzerindedir.  $C$  noktasının  $d$  doğrusu üzerinde

olduğunu kabul edelim.  $A$  ve  $C$  noktalarının en kısa uzaklık kümesi sınırları ile  $C$  ve  $B$  noktalarının en kısa uzaklık kümesi sınırları şekilde noktalı doğru parçaları ile gösterilmiştir.  $A$  ve  $C$  nin oluşturduğu dikdörtgenin kısa kenarına  $a$ ,  $B$  ve  $C$  nin oluşturduğu dikdörtgenin kısa kenarına  $b$  dersek,  $AB$  doğru parçasının taksit uzunluğu  $2(a+b)$  ve Thales teoreminin taksit benzeri (Teorem 2.1.1) gereğince  $A$  ve  $C$  noktalarının orta noktası ile  $B$  ve  $C$  noktalarının orta noktası arası uzaklık  $(a+b)$  bulunur. Ayrıca,  $A$  ve  $C$  noktaların oluşturduğu orta kümenin jeneratör uzunluğu  $2a$ ;  $B$  ve  $C$  noktalarının oluşturduğu orta kümenin jeneratör uzunluğu  $2b$  ve jeneratörlerin uzunlukları toplamı da  $2(a+b)$  dir. O halde bu durumda, Y. Teorem 3.2.7 gereğince nokta çiftlerinin orta kümeleri yalnız bir noktada kesişir. Dolayısıyla bu üç noktadan geçen yalnız bir çember vardır. Eğer  $C$  noktası  $AB$  doğrusuna yaklaşırsa, yani  $C$  noktasının  $AB$  doğrusuna olan uzaklığı  $A$  ve  $B$  noktaları arası uzaklığın  $\sqrt{2}$  katından küçük ise, jeneratörlerin uzunlukları toplamı, orta noktalar arası uzaklığın iki katından küçük kalır ve Y. Teorem 3.2.7 gereğince yine nokta çiftlerinin orta kümeleri yalnız bir noktada kesişir ve dolayısıyla bu üç noktadan geçen yalnız bir çember vardır. Eğer  $C$  noktası  $AB$  doğrusundan uzaklaşırsa, yani  $C$  noktasının  $AB$  doğrusuna olan uzaklığı  $A$  ve  $B$  noktaları arası uzaklığın  $\sqrt{2}$  katından büyük ise, jeneratörlerin uzunlukları toplamı, orta noktalar arası uzaklığın iki katından büyük kalır ve Y. Teorem 3.2.7 gereğince nokta çiftlerinin orta kümelerinin sonsuz çoklukta arakesit noktası vardır. Dolayısıyla bu üç noktadan geçen sonsuz çoklukta çember olduğu görülür.  $C$  noktasının  $d'$  doğrusu üzerinde olduğu durumda benzer biçimde yapılır.

□



Şekil 3.2.25

## Bölüm 4

### DÖRTYÜZLÜNÜN ÖKLİDYEN

### HACİM FORMÜLÜNÜN

### TAKSİ BENZERİ

Öklidyen düzlemde, kenar uzunlukları  $a$ ,  $b$ ,  $c$  olan bir üçgenin alanını bulmak için kullanılan ünlü Heron formülü,

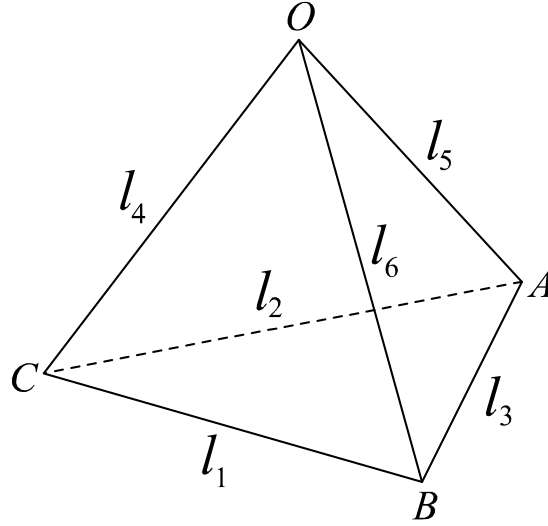
$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$$

veya  $u$  üçgenin yarıçevresini göstermek üzere,

$$S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu formülün taksi benzeri, Özcan ve Kaya tarafından [15] de verilmiştir. Burada, Heron formülünün dörtyüzlüler için bir genellemesi incelenecek ve taksi benzeri verilecektir. Bu genelleme, Sabitov tarafından [19] da Heron-Tartaglia-Euler formülü olarak verilmesine karşın, [17] de formülün Piero Della Francesca (1412-1492) adlı İtalyan matematikçi tarafından bulunduğu belirtilmektedir.

#### 4.1 Heron Formülünün Bir Genellemesi



Şekil 4.1.1

Şekil 4.1.1 de verilen  $(OABC)$  dörtyüzlüsü, tepe noktası  $O$  noktası ve tabanı  $ABC$  üçgeni olan bir üçgen piramit olarak düşünülebilir.  $h$ , piramidin yüksekliğini göstermek üzere, bu üçgen piramidin hacmi,

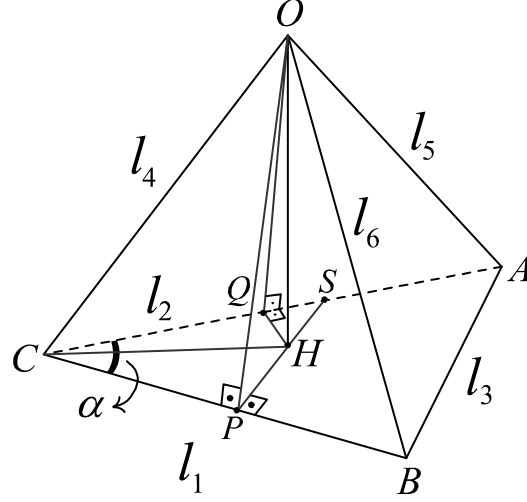
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A(\triangle ABC)$$

dir. Euler'in, [5] de bu hacmi kenarlar cinsinden vermek için izlediği yol aşağıdaki gibidir:

$O$  noktasından geçip,  $AC$  doğru parçasına dik olan düzlemin  $AC$  doğru parçasını kestiği nokta,  $Q$  noktası ile;  $O$  noktasından geçip,  $BC$  doğru parçasına dik olan düzlemin  $BC$  doğru parçasını kestiği nokta,  $P$  noktası ile; üçgen piramidin yükseklik ayağı,  $H$  noktası ile ve  $PH$  doğrusunun  $AC$  doğrusu ile arakesit noktası,  $S$  noktası ile gösterilsin. (Bkz. Şekil 4.1.2)

O halde, üç dikme teoremi gereğince,  $[HQ] \perp [AC]$  ve  $[HP] \perp [BC]$  dir.

Buradan da  $\triangle CPS \sim \triangle HQS$  benzerliği ve  $\frac{|CP|}{|HQ|} = \frac{|PS|}{|QS|} = \frac{|CS|}{|HS|}$  eşitliği elde edilir.



Şekil 4.1.2

Bu aşamada aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$|HQ| = \frac{|CP| \cdot |QS|}{|PS|}, \quad |CP| = \frac{l_1^2 + l_4^2 - l_6^2}{2l_1}, \quad |CQ| = \frac{l_2^2 + l_4^2 - l_5^2}{2l_2}.$$

$m(\widehat{ACB}) = \alpha$  denirse,  $\cos \alpha = \frac{|CP|}{|CS|}$  ve  $\tan \alpha = \frac{|PS|}{|CP|}$  olur. Buradan  $|HQ| = \frac{|QS|}{\tan \alpha}$  ve

$$|CS| = \frac{|CP|}{\cos \alpha} \text{ bulunur.}$$

$$|QS| = |CS| - |CQ| \text{ olduğundan, } |QS| = \frac{|CP|}{\cos \alpha} - |CQ| = \frac{|CP| - |CQ| \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha};$$

$$|HQ| = \frac{|QS|}{\tan \alpha} \text{ olduğundan, } |HQ| = \frac{|CP| - |CQ| \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ elde edilir.}$$

$CQH$  dik üçgeninde, Pisagor teoremi gereğince  $|CH|^2 = |CQ|^2 + |HQ|^2$  dir.

O halde,

$$\begin{aligned} |CH|^2 &= |CQ|^2 + \left( \frac{|CP| - |CQ| \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \\ &= \frac{|CQ|^2 \cdot \sin^2 \alpha + |CQ|^2 \cdot \cos^2 \alpha + |CP|^2 - 2|CP| \cdot |CQ| \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{|CQ|^2 + |CP|^2 - 2|CP| \cdot |CQ| \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

dir ve bu sonucu  $OHC$  dik üçgeninde, Pisagor teoremi gereğince elde edilen

$$|OH|^2 = l_4^2 - |CH|^2 \text{ eşitliğinde yerine yazarsak,}$$

$$h = |OH| = \frac{\sqrt{l_4^2 \cdot \sin^2 \alpha - |CQ|^2 - |CP|^2 + 2|CP| \cdot |CQ| \cdot \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

elde edilir.

$$A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \alpha \text{ olduğuna göre, üçgen piramidin hacmi,}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \alpha \cdot h$$

$$= \frac{1}{6} l_1 l_2 \sqrt{l_4^2 \cdot \sin^2 \alpha - |CQ|^2 - |CP|^2 + 2|CP| \cdot |CQ| \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{l_1^2 l_2^2 l_4^2 \cdot \sin^2 \alpha - l_1^2 l_2^2 \cdot |CQ|^2 - l_1^2 l_2^2 \cdot |CP|^2 + 2l_1^2 l_2^2 \cdot |CP| \cdot |CQ| \cdot \cos \alpha}$$

olur. Burada,  $|CP| = \frac{l_1^2 + l_4^2 - l_6^2}{2l_1}$ ,  $|CQ| = \frac{l_2^2 + l_4^2 - l_5^2}{2l_2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1 l_2}$  ve

$$\sin^2 \alpha = \frac{4l_1^2 l_2^2 - (l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^2}{4l_1^2 l_2^2} \text{ olduğu göz önüne alınırsa,}$$

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{l_4^2 \left( 4l_1^2 l_2^2 - (l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^2 \right)}{4} - \frac{l_1^2 (l_2^2 + l_4^2 - l_5^2)^2}{4} - \frac{l_2^2 (l_1^2 + l_4^2 - l_6^2)^2}{4} + \frac{(l_2^2 + l_4^2 - l_5^2)(l_1^2 + l_4^2 - l_6^2)(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)}{4}}$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{4l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^2 - l_1^2 (l_2^2 + l_4^2 - l_5^2)^2 - l_2^2 (l_1^2 + l_4^2 - l_6^2)^2 + (l_2^2 + l_4^2 - l_5^2)(l_1^2 + l_4^2 - l_6^2)(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)}$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{\begin{aligned} & l_3^2 l_1^2 l_5^2 + l_3^2 l_1^2 l_4^2 + l_3^2 l_2^2 l_6^2 + l_3^2 l_2^2 l_4^2 + l_3^2 l_6^2 l_4^2 + l_3^2 l_5^2 l_4^2 \\ & + l_1^2 l_2^2 l_6^2 + l_1^2 l_2^2 l_5^2 + l_1^2 l_6^2 l_5^2 + l_1^2 l_5^2 l_4^2 + l_2^2 l_6^2 l_5^2 + l_2^2 l_6^2 l_4^2 \\ & - l_3^4 l_4^2 - l_3^2 l_4^4 - l_1^4 l_5^2 - l_1^2 l_5^4 - l_2^4 l_6^2 - l_2^2 l_6^4 \\ & - l_3^2 l_1^2 l_2^2 - l_3^2 l_6^2 l_5^2 - l_1^2 l_6^2 l_4^2 - l_2^2 l_5^2 l_4^2 \end{aligned}}$$



$$= \frac{1}{12} \sqrt{l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_3^2 - l_1^2 l_4^2 l_6^2 - l_2^2 l_4^2 l_5^2 - l_3^2 l_5^2 l_6^2}$$

bulunur.

□

Formül, [19] da verilen haliyle aşağıdaki gibidir:

$$V^2 = \frac{1}{144} \cdot \left[ l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_3^2 - l_1^2 l_4^2 l_6^2 - l_2^2 l_4^2 l_5^2 - l_3^2 l_5^2 l_6^2 \right]$$

**Gözlem 4.1.1 :**

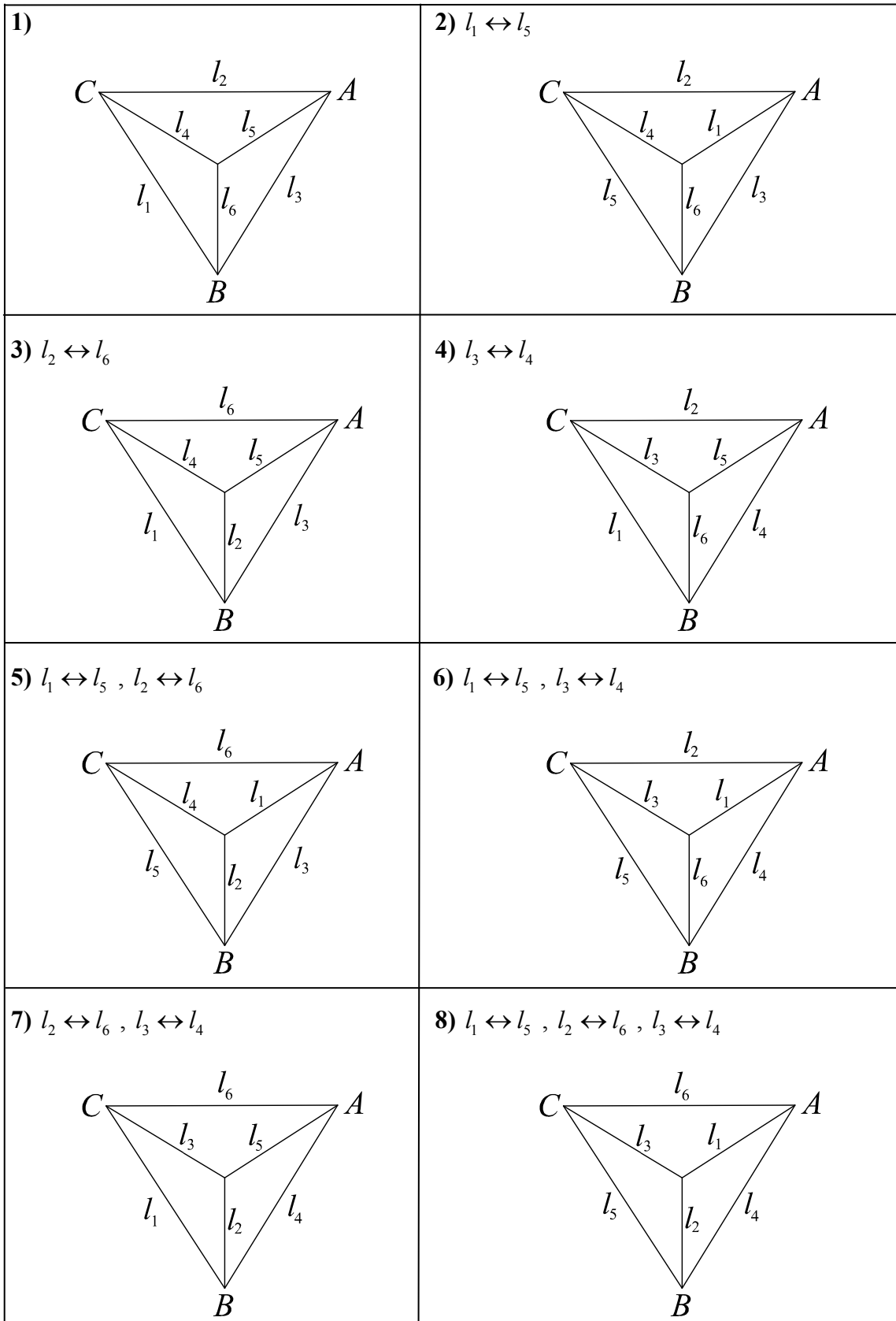
Dikkat edilirse alınan şekilde  $l_1$  ile  $l_5$ ;  $l_2$  ile  $l_6$  ve  $l_3$  ile  $l_4$  uzunluklu kenarlar, üçgen piramidin kesişmeyen karşılıklı kenarlarıdır ve bu ikililer dışındaki tüm ikililer için bu durum söz konusu değildir. Bu bakış açısıyla [17] de formülün başka bir formu aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned}
144 \cdot V^2 = & l_1^2 l_5^2 \left[ -(l_1^2 + l_5^2) + (l_2^2 + l_6^2) + (l_3^2 + l_4^2) \right] \\
& + l_2^2 l_6^2 \left[ (l_1^2 + l_5^2) - (l_2^2 + l_6^2) + (l_3^2 + l_4^2) \right] \\
& + l_3^2 l_4^2 \left[ (l_1^2 + l_5^2) + (l_2^2 + l_6^2) - (l_3^2 + l_4^2) \right] \\
& - \frac{(l_1^2 + l_5^2)(l_2^2 + l_6^2)(l_3^2 + l_4^2)}{2} - \frac{(l_1^2 - l_5^2)(l_2^2 - l_6^2)(l_3^2 - l_4^2)}{2}
\end{aligned}$$

[17] de belirtildiği gibi, formülün bu formu şu soruyu yanıtlamada kolaylık sağlayacaktır: *Acaba,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  kenar uzunlukları ile verilecek olan bir dört yüzlüde,  $l_1$  ile  $l_5$ ;  $l_2$  ile  $l_6$  ve  $l_3$  ile  $l_4$  uzunluklu kenarlar, ikişer ikişer, kesişmeyen karşılıklı kenarlar ise, yukarıdaki hacim formülü geçerli midir?* Bu sorunun yanıtı kesin değildir. Şöyle ki, bu özellikte var olan en çok sekiz farklı üçgen piramid olabilir. Şekil 4.1.3 de bu olası sekiz farklı üçgen piramid verilmiştir.

— Birinci şekil, şekil 4.1.1 in üstten görünüşüdür. Hacminin son formu yukarıda verilmiştir.

— Diğer üçgen piramidlerin hacmini bulmak için, değişen kenarlara, formülde karşılık gelen değerleri değiştirmek yeterlidir. Bununla birlikte, değiştirme sonucunda formülün ilk dört teriminde bir değişiklik olmayacağı açıktır. Son terimdeki değişiklik ise, başındaki işaretin değişiminden ileri gidemeyecektir.



Şekil 4.1.3

Buraya kadar olan incelemelerimizi aşağıdaki sonuçla özetleyelim.

**Sonuç 4.1.2 :**

$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  kenar uzunlukları ile verilecek olan bir üçgen piramitte  $l_1$  ile  $l_5$ ;  $l_2$  ile  $l_6$  ve  $l_3$  ile  $l_4$  uzunluklu kenarlar, ikişer ikişer kesişmeyen karşılıklı kenarlar olsun. Bu özellikte var olabilecek tüm üçgen piramitlerin hacimleri, şekil 4.1.3 de verilen sıra ile 1, 5, 6 ve 7. durumlar için

$$144 \cdot V^2 = l_1^2 l_5^2 \left[ -(l_1^2 + l_5^2) + (l_2^2 + l_6^2) + (l_3^2 + l_4^2) \right] \\ + l_2^2 l_6^2 \left[ (l_1^2 + l_5^2) - (l_2^2 + l_6^2) + (l_3^2 + l_4^2) \right] \\ + l_3^2 l_4^2 \left[ (l_1^2 + l_5^2) + (l_2^2 + l_6^2) - (l_3^2 + l_4^2) \right] \quad \text{yani,} \\ - \frac{(l_1^2 + l_5^2)(l_2^2 + l_6^2)(l_3^2 + l_4^2)}{2} - \frac{(l_1^2 - l_5^2)(l_2^2 - l_6^2)(l_3^2 - l_4^2)}{2}$$

$$V^2 = \frac{1}{144} \cdot \left[ l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) \right. \\ \left. + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_3^2 - l_1^2 l_4^2 l_6^2 - l_2^2 l_4^2 l_5^2 - l_3^2 l_5^2 l_6^2 \right];$$

2, 3, 4 ve 8. durumlar için

$$144 \cdot V^2 = l_1^2 l_5^2 \left[ -(l_1^2 + l_5^2) + (l_2^2 + l_6^2) + (l_3^2 + l_4^2) \right] \\ + l_2^2 l_6^2 \left[ (l_1^2 + l_5^2) - (l_2^2 + l_6^2) + (l_3^2 + l_4^2) \right] \\ + l_3^2 l_4^2 \left[ (l_1^2 + l_5^2) + (l_2^2 + l_6^2) - (l_3^2 + l_4^2) \right] \quad \text{yani,} \\ - \frac{(l_1^2 + l_5^2)(l_2^2 + l_6^2)(l_3^2 + l_4^2)}{2} + \frac{(l_1^2 - l_5^2)(l_2^2 - l_6^2)(l_3^2 - l_4^2)}{2}$$

$$V^2 = \frac{1}{144} \cdot \left[ l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) \right. \\ \left. + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2 \right]$$

dir.

□

## 4.2 Taksi Uzayda Dörtüzlünün Hacmi

Taksi uzayda karşılıklı kesişmeyen kenarları belirtilerek tüm kenarlarının taksi uzunlukları verilen bir dörtüzlünün sonsuz değişik biçimde var olduğu kolayca görülebilir. Üstelik bu şekilde verilen dörtüzlünün kenar uzunlukları da genel olarak, simetrikler ve dönmeler altında aynı kalmayacaktır. Dolayısıyla, formülün taksi versiyonunun verilebilmesi için bu parametrelerin yeterli olmayacağı hemen söylenebilir. Burada, taksi uzayda köşe koordinatları verilmiş bir dörtüzlü ele alınacaktır. Böylece Öklidyenden farklı olarak, taksi uzayda sabitlenmiş bir dörtüzlünün hacmini taksi kenar uzunlukları cinsinden veren formül incelenecektir. 4.1 de elde edilen bulgularla köşe koordinatları ile verilen bir dörtüzlünün hacmi, Öklidyen kenar uzunlukları cinsinden verilebilir. O halde dörtüzlünün taksi kenar uzunluklarını, Öklidyen kenar uzunluklarına dönüştüren bir bağıntı yardımıyla da formülün taksi benzeri elde edilebilir. Akça ve Kaya tarafından [1] de verilen bu formül aşağıdaki gibidir:

**Teorem 4.2.1 :** Taksi uzayda  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  noktaları verilsin.  $l$ ,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru olmak üzere, eğer  $l$  doğrusunun doğrultu vektörü  $(p, q, r)$  ise,

$$(|p|+|q|+|r|) \cdot d_E(P_1, P_2) = \left( (p^2 + q^2 + r^2)^{1/2} \right) \cdot d_T(P_1, P_2)$$

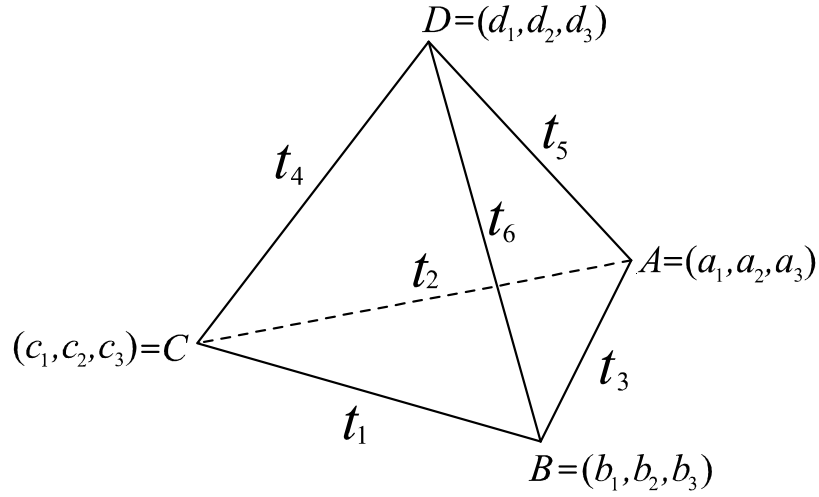
dir.

□

Buradan da,  $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$  olduğundan

$$d_E(P_1, P_2) = \frac{(p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}}{|p|+|q|+|r|} \cdot d_T(P_1, P_2) \text{ yazılabilir.}$$

Bu dönüşüm sayesinde dörtyüzlünün hacim formülünün taksi versiyonu aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.2.1

**Teorem 4.2.2 :**  $A = (a_1, a_2, a_3)$  ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  ,  $C = (c_1, c_2, c_3)$  ,  $D = (d_1, d_2, d_3)$  köşe noktalarıyla verilen dörtyüzlünün taksi kenar uzunlukları  $|BC|_T = t_1$  ,  $|AC|_T = t_2$  ,  $|AB|_T = t_3$  ,  $|DC|_T = t_4$  ,  $|DA|_T = t_5$  ,  $|DB|_T = t_6$  ise, hacmi

$$\alpha_1 = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (b_j - c_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^3 |b_j - c_j|} , \quad \alpha_2 = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (a_j - c_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^3 |a_j - c_j|} ,$$

$$\alpha_3 = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (a_j - b_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^3 |a_j - b_j|} , \quad \alpha_4 = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (c_j - d_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^3 |c_j - d_j|} ,$$

$$\alpha_5 = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (a_j - d_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^3 |a_j - d_j|} , \quad \alpha_6 = \frac{\left[ \sum_{j=1}^3 (b_j - d_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sum_{j=1}^3 |b_j - d_j|}$$

olmak üzere,

$$V = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{\begin{aligned} &(\alpha_1 t_1)^2 (\alpha_5 t_5)^2 \left[ (\alpha_2 t_2)^2 + (\alpha_3 t_3)^2 + (\alpha_4 t_4)^2 + (\alpha_6 t_6)^2 - (\alpha_1 t_1)^2 - (\alpha_5 t_5)^2 \right] \\ &+ (\alpha_2 t_2)^2 (\alpha_6 t_6)^2 \left[ (\alpha_1 t_1)^2 + (\alpha_3 t_3)^2 + (\alpha_4 t_4)^2 + (\alpha_5 t_5)^2 - (\alpha_2 t_2)^2 - (\alpha_6 t_6)^2 \right] \\ &+ (\alpha_3 t_3)^2 (\alpha_4 t_4)^2 \left[ (\alpha_1 t_1)^2 + (\alpha_2 t_2)^2 + (\alpha_5 t_5)^2 + (\alpha_6 t_6)^2 - (\alpha_3 t_3)^2 - (\alpha_4 t_4)^2 \right] \\ &- (\alpha_1 t_1)^2 (\alpha_2 t_2)^2 (\alpha_3 t_3)^2 - (\alpha_1 t_1)^2 (\alpha_4 t_4)^2 (\alpha_6 t_6)^2 \\ &- (\alpha_2 t_2)^2 (\alpha_4 t_4)^2 (\alpha_5 t_5)^2 - (\alpha_3 t_3)^2 (\alpha_5 t_5)^2 (\alpha_6 t_6)^2 \end{aligned}}$$

dir.

□

## **Bölüm 5**

### **ÖKLİDYEN DÜZLEMDEKİ**

### **KİSSOİD, KONHOİD ve SİKLOİD**

### **EĞRİLERİNİN TAKSİ BENZERLERİ**

Taksi benzerlerini inceleyeceğimiz eğrilerden ikisi, günümüzde çağdaş yöntemlerle yalnız pergel ve cetvel yardımıyla çözülemeyeceği ispatlanmış üç meşhur geometri probleminin ikisini çözmeye kullanılan kissoid (asma) ve konhoid eğrileri; üçüncüsü ise, bir transandant eğri örneği olan sikloid eğrisidir. Eğrilerin taksi düzlemdeki denklemleri ve şekillerine geçmeden önce Öklidyen anlamdaki tanımları, denklemleri ve şekilleri verilecektir. Konunun dışına çıkmamak amacıyla cebirsel eğrilerin, meşhur problemleri çözmeye nasıl kullanılacağına dair bir inceleme olmayacaktır. İlgili konu [7] nolu kaynaktan bakılabilir.



## 5.1 Kissoid Eğrisi

Verilen bir küpün hacminin iki katına eşit hacimli küpün bulunmasında kullanılan kissoid eğrisinin bir tanımlaması şöyle yapılabilir:

Şekil 5.1.1 de görüldüğü gibi,  $r$  yarıçaplı ( $OA$  çaplı) çemberi ve bu çembere  $A$  noktasında teğet olan  $d$  doğrusunu düşünelim. Çemberi ve  $d$  doğrusunu sırasıyla  $R$  ve  $S$  noktalarında kesen ve  $O$  noktasından geçerek bu nokta etrafında döndürülen doğru üzerinde bulunan,  $|OP| = |RS|$  özellikli  $P$  noktalarının geometrik yerine **kissoid (asma) eğrisi** denir ( Bkz. [7] ) .

Kissoid eğrisinin denklemini bulmak için,

$P = (x, y)$  denirse,  $|OM| = |NA| = x$  dolayısıyla da  $ORA$  dik üçgeninde

$|NR|^2 = |ON| \cdot |NA| = (2r - x) \cdot x$  olur. Bunlar,  $OMP$  ve  $ONR$  üçgenlerinin benzerliğinden

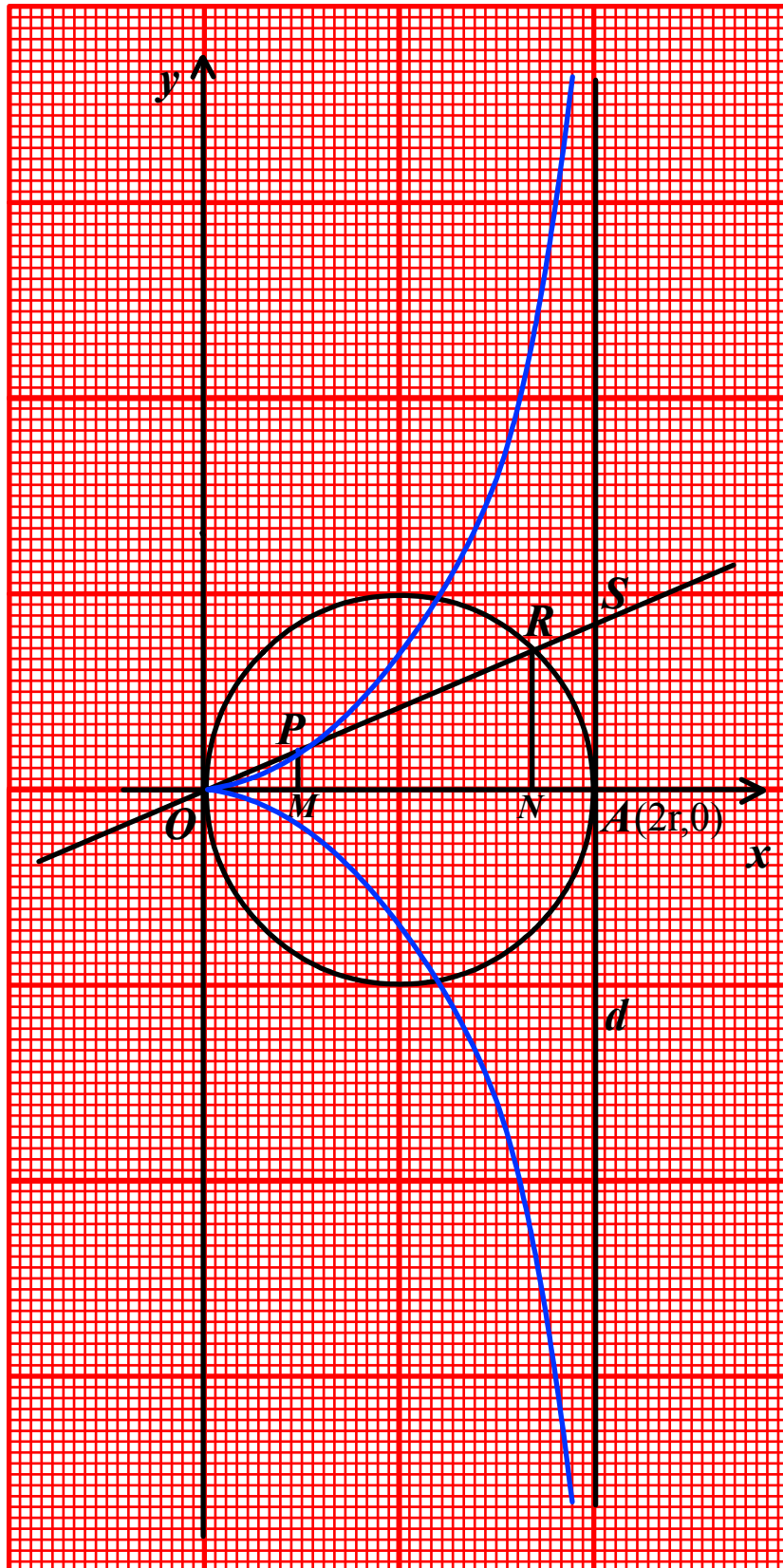
elde edilen  $\frac{|MP|}{|OM|} = \frac{|NR|}{|ON|}$  eşitliğinde kullanılırsa,

$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(2r - x) \cdot x}}{(2r - x)}$  bulunur ki, bu da düzenlendiğinde kissoid eğrisinin denklemi olan

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

ifadesi elde edilir ( Bkz. [7] ) .

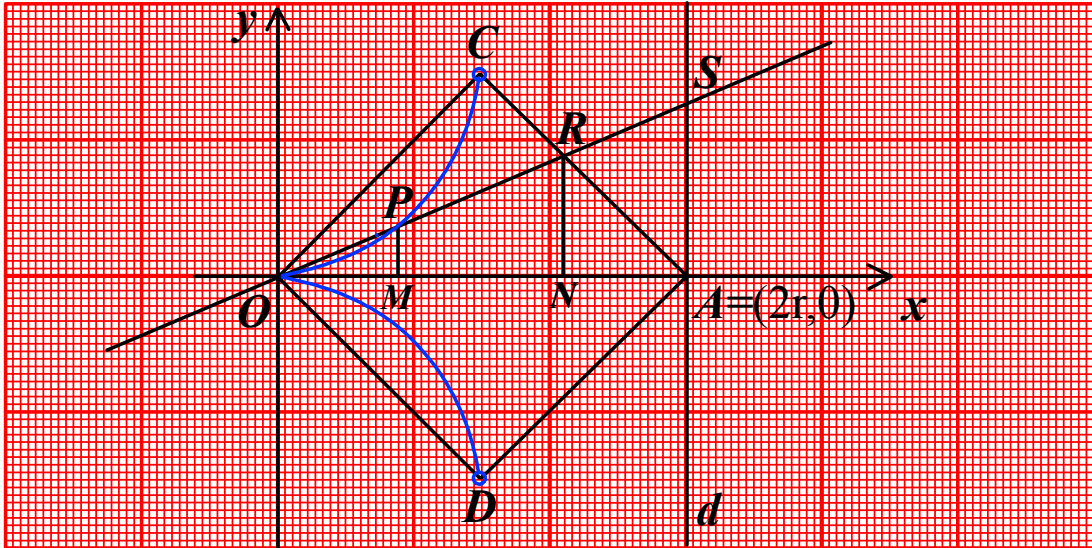
□



Şekil 5.1.1

Şimdi aynı eğriyi, benzer tanımla taksi düzlemde inceleyelim. Taksi düzlemde bu eğrinin bir tanımlaması şöyle yapılabilir:

Şekil 5.1.2 de görüldüğü gibi,  $r$  yarıçaplı ( $OA$  çaplı) taksi çemberi ve bu çembere  $A$  noktasında teğet (!) olan  $d$  doğrusunu düşünelim. Çemberi ve  $d$  doğrusunu sırasıyla  $R$  ve  $S$  noktalarında kesen ve  $O$  noktasından geçerek bu nokta etrafında döndürülen doğru üzerinde bulunan,  $|OP|_r = |RS|_r$  özellikli  $P$  noktalarının geometrik yerine **taksi kissoid (asma) eğrisi** denir.



Şekil 5.1.2

#### Uyarı 5.1.1 :

Burada dikkat edilmesi gereken iki husus vardır:

— Birincisi, “bir taksi çemberinin bir noktasındaki teğeti” kavramıdır. Şekil 5.1.2 den de anlaşıldığı gibi, burada bir taksi çemberin bir noktasındaki teğeti, o noktadan geçip eksenlerden birine paralel olan ve çemberle başka ortak noktası olmayan doğru olarak alınmıştır. Bu tanımla her taksi çemberinin yalnız dört tane teğet doğrusu olduğu aşikardır. Eğer tanımı -Öklidyen düzlemdeki çemberlerde olduğu gibi- “çemberle yalnız

bir tek ortak noktası olan doğru” olarak alırsak, Şekil 5.1.2 deki taksi çemberinin  $A$  noktasından geçen sonsuz çoklukta teğet doğrusunun olduğunu görürüz. Doğal olarak seçilen teğete göre de taksi kissoid eğrisinin şekli değişecektir. Bu genel durum, ilk teğet tanımı ile verilen taksi kissoid eğrisinin denklemi verildikten sonra incelenecektir. — İkincisi ise taksi kissoid eğrisi tanımında verilen, “ $O$  noktasından geçerek bu nokta etrafında döndürülen doğru” nun taksi çemberini daima kesmeyeceği, yani  $R$  noktasının daima var olmayacağı gerçeğidir. Ayrıca bu doğrunun eğimi 1 ya da  $-1$  olduğu durumlarda da sonsuz çoklukta  $R$  noktası oluşacaktır. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak amacıyla  $O$  noktasından geçen bu doğrunun eğimi, 1 den küçük,  $-1$  den büyük alınacaktır. Bu da eğrinin Öklidyen düzlemde olduğu gibi sonsuza uzanan bir eğri olmayacağını gösterir. Fakat göreceğiz ki, eğer taksi çemberin bir kenarını içeren doğrular da teğet doğru olarak kabul edilirse, sonsuza uzanan eğriler elde edilebilir.

Şekil 5.1.2 deki taksi kissoid eğrisinin denklemini verelim.

$P = (x, y)$  denirse  $|OM|_T = |NA|_T = x$  dolayısıyla da  $RNA$  ikizkenar dik üçgeninde  $|NR|_T = |NA|_T = x$  olur. Bunlar,  $OMP$  ve  $ONR$  üçgenlerinin benzerliğinden elde edilen  $\frac{|MP|_T}{|OM|_T} = \frac{|NR|_T}{|ON|_T}$  eşitliğinde kullanılırsa,  $\frac{y}{x} = \frac{x}{(2r-x)}$  bulunur ki, bu da düzenlenirse

$y = \frac{x^2}{2r-x}$  ifadesi elde edilir. O halde, eğrinin sınırlarını ve simetrik olma özelliğini göz

önüne alarak denklemini aşağıdaki gibi verebiliriz:

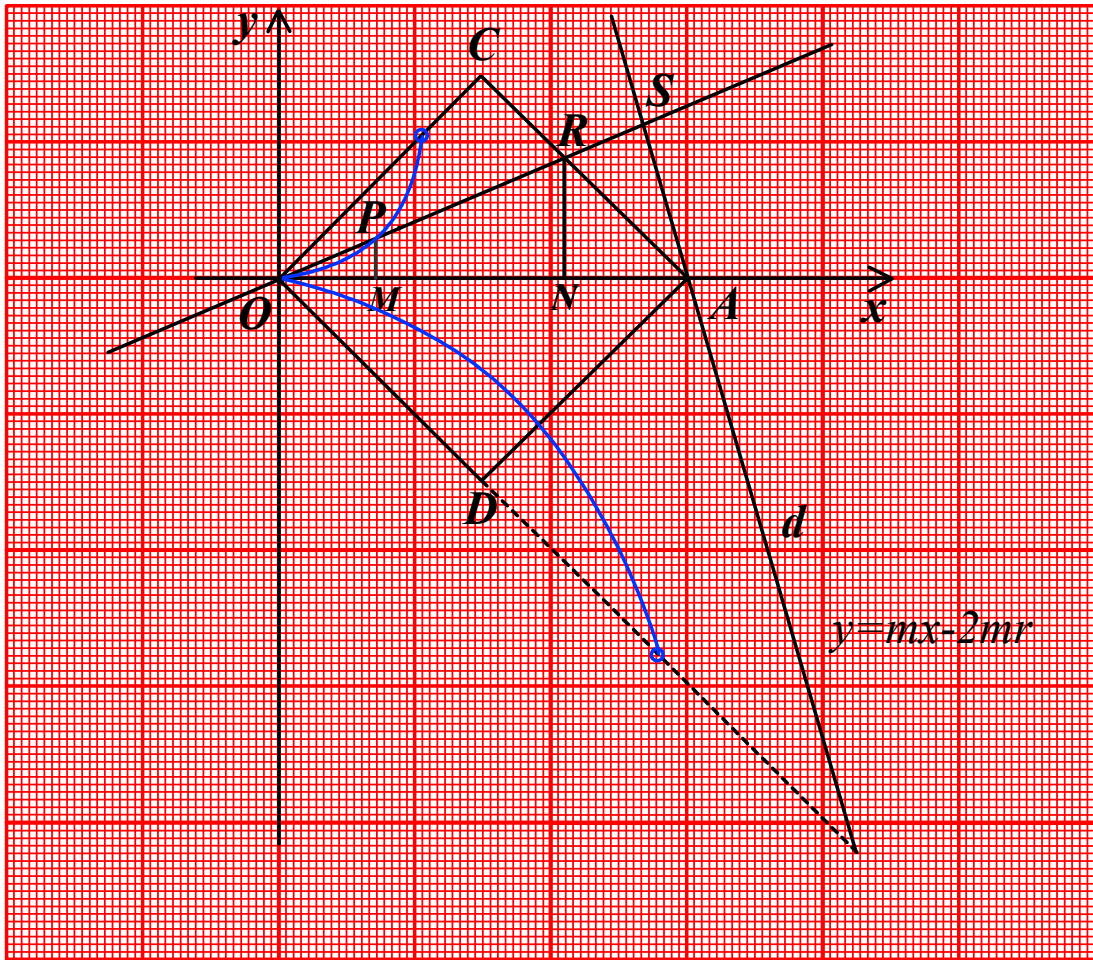
$$y = \mp \frac{x^2}{2r-x} ; 0 \leq x < r \quad .$$

□

Şimdi, ikinci teğet tanımı ile taksi kissoid eğrisini inceleyelim.

Şekil 5.1.3 deki taksi çemberinin  $A$  noktasındaki teğeti  $m \in \mathbb{R} - [-1,1]$  olmak üzere,  $y = mx - 2mr$  doğrularından biridir. Dikkat edilirse,

$y = mx - 2mr \Rightarrow x = 2r + \frac{y}{m}$  ve  $m \rightarrow \infty$  ise, birinci teğet tanımına göre taksi çemberin  $A$  noktasındaki teğeti olan  $x = 2r$  doğrusu elde edilir.



Şekil 5.1.3

$P = (x, y)$  ve  $|NR|_T = |NA|_T = a$  denirse,  $S = (2r + x - a, y + a)$  olur.  $S$  noktası  $d$  doğrusu üzerinde olduğundan  $y = mx - 2mr$  denklemini sağlar.  $S$  noktasının

koordinatları denklemden yerine yazılırsa,  $a = \frac{mx - y}{m + 1}$  bulunur. Bunlar,  $OMP$  ve  $ONR$

üçgenlerinin benzerliğinden elde edilen  $\frac{|MP|_T}{|OM|_T} = \frac{|NR|_T}{|ON|_T}$  eşitliğinde kullanılırsa,

$$\frac{y}{x} = \frac{\left(x - \frac{x+y}{m+1}\right)}{2r - \left(x - \frac{x+y}{m+1}\right)}$$
 bulunur ki, bu da düzenlenirse

$$y = \frac{x^2}{2r-x} - \frac{(x+y)^2}{(m+1).(2r-x)}$$

ifadesi elde edilir. Benzer işlemler alt yarı düzlemde alınan bir  $P$  noktası için de yapılırsa,

$$y = -\frac{x^2}{2r-x} - \frac{(x-y)^2}{(m-1).(2r-x)}$$

ifadesi elde edilir.

O halde, eğrinin sınırlarını da göz önüne alarak denklemini aşağıdaki iki denklemin birleşimi olarak verebiliriz:

$$y = \frac{x^2}{2r-x} - \frac{(x+y)^2}{(m+1).(2r-x)} ; 0 \leq x < \left(\frac{r \cdot (m+1)}{(m-1)}\right)$$

$$y = -\frac{x^2}{2r-x} - \frac{(x-y)^2}{(m-1).(2r-x)} ; 0 \leq x < \left(\frac{r \cdot (m-1)}{(m+1)}\right)$$

□

**Gözlem 5.1.2 :**

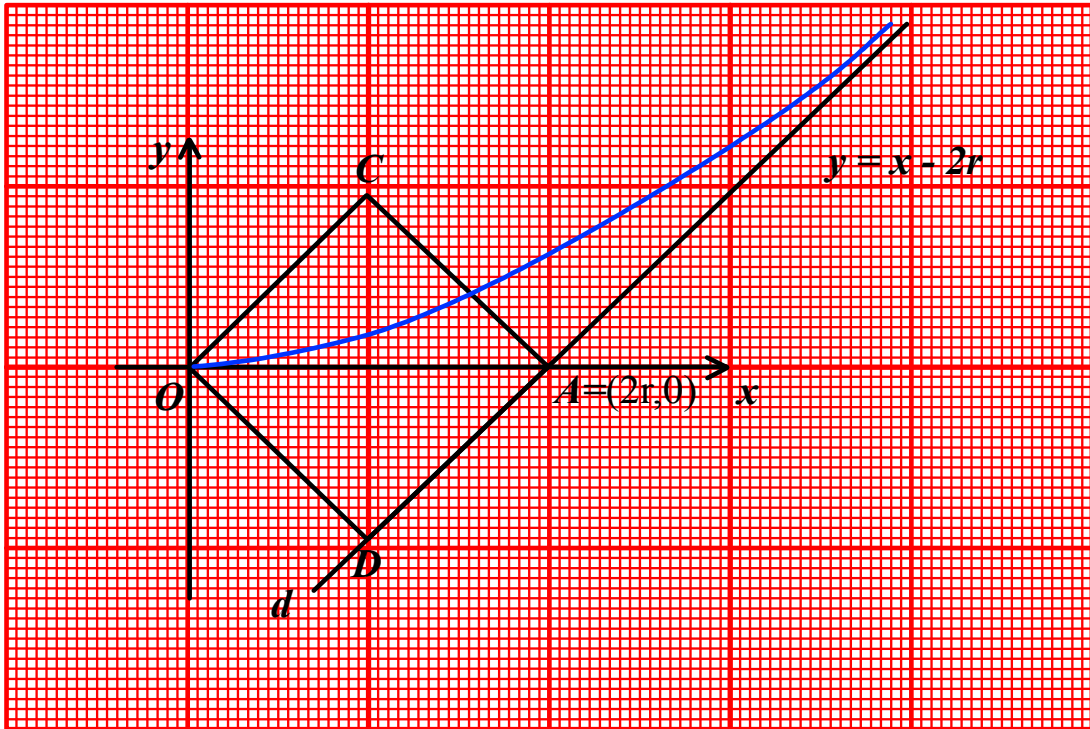
1.  $m \rightarrow \infty$  iken, birinci teğet tanımı ile elde ettiğimiz taksi kissoidinin denklemi olan

$$y = \mp \frac{x^2}{2r-x} ; 0 \leq x < r \text{ denklemi elde ediliyor.}$$

2. Eğer taksi çemberin bir kenarını içeren doğrular da çemberin teğet doğruları olarak kabul edilirse, sonsuza uzanan eğriler elde edilebilir. Şöyle ki,

*i.*  $m = 1$  ise, taksi kissoidinin denklemi  $y = \sqrt{x^2 + 4r^2} - 2r ; x \geq 0$  dir.

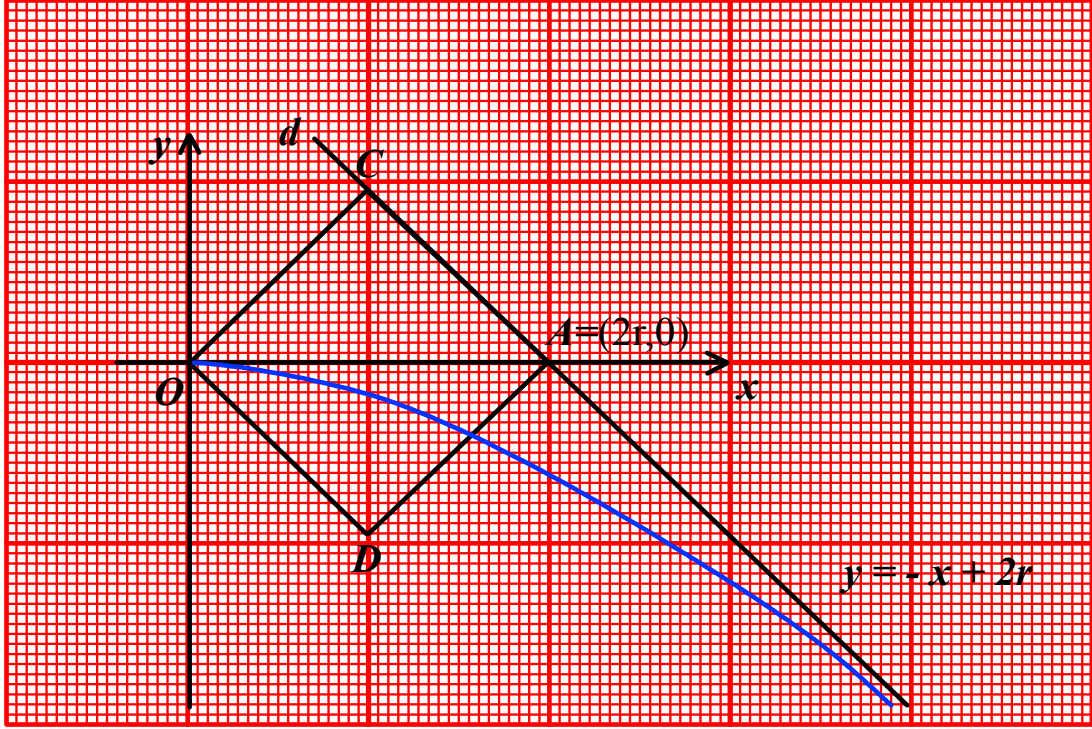
(Bkz. Şekil 5.1.4)



Şekil 5.1.4

ii.  $m = -1$  ise, taksi kissoidinin denklemi  $y = 2r - \sqrt{x^2 + 4r^2}$  ;  $x \geq 0$  dir.

(Bkz. Şekil 5.1.5)



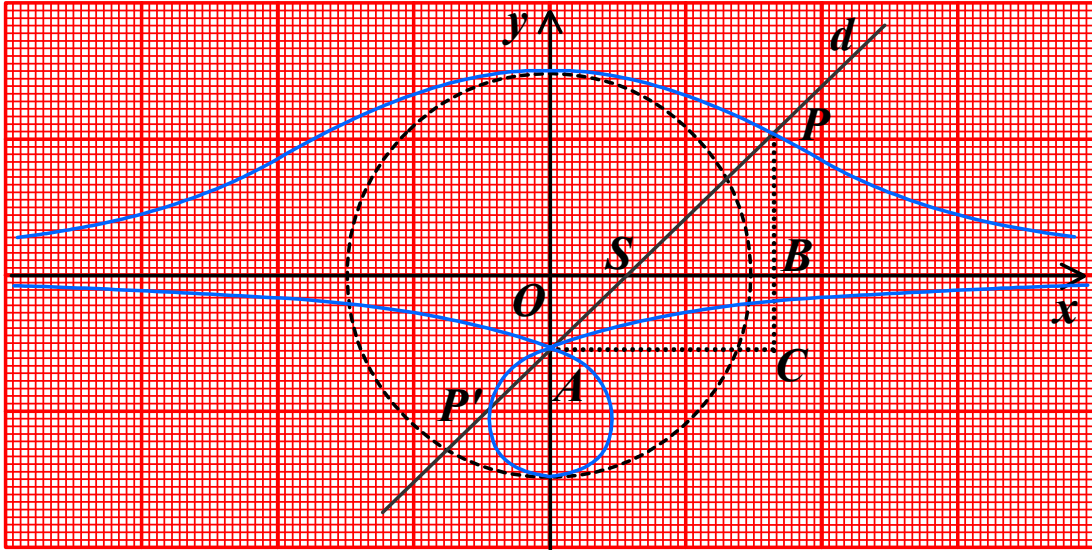
Şekil 5.1.5



## 5.2 Konhoid Eğrisi

Öklidyen düzlemde verilen bir açıyı üç eş parçaya ayırmada kullanılan konhoid eğrisinin bir tanımı şöyle yapılabilir:

$A$  sabit bir nokta,  $Ox$  sabit bir doğru olsun.  $A$  dan geçen ve bu nokta etrafında döndürülen hareketli bir  $d$  doğrusu düşünelim.  $r$  sabit bir değer ve  $d$  doğrusunun  $Ox$  doğrusunu kestiği nokta  $S$  olmak üzere,  $d$  doğrusu üzerinde  $|SP|=r$  (ve  $|SP'|=r$ ) koşuluna uyan  $P$  (ve  $P'$ ) noktalarının geometrik yerine **konhoid eğrisi** denir (Bkz. [7]).



Şekil 5.2.1

$A$  dan  $Ox$  doğrusuna indirilen dikme  $y$ -ekseni;  $|AO|=a$ ;  $P=(x,y)$  den  $Ox$  doğrusuna indirilen dikme ayağı  $B$  ve  $A$  dan  $y$ -eksenine çizilen dikmenin  $BP$  doğrusunu kestiği nokta  $C$  olarak alınırsa,  $ACP$  ve  $SBP$  benzer üçgenlerinden  $\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|SB|}{|BP|}$ , yani

$\frac{x}{y+a} = \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}$  elde edilir ki, bu da konhoid eğrisinin denkleminin

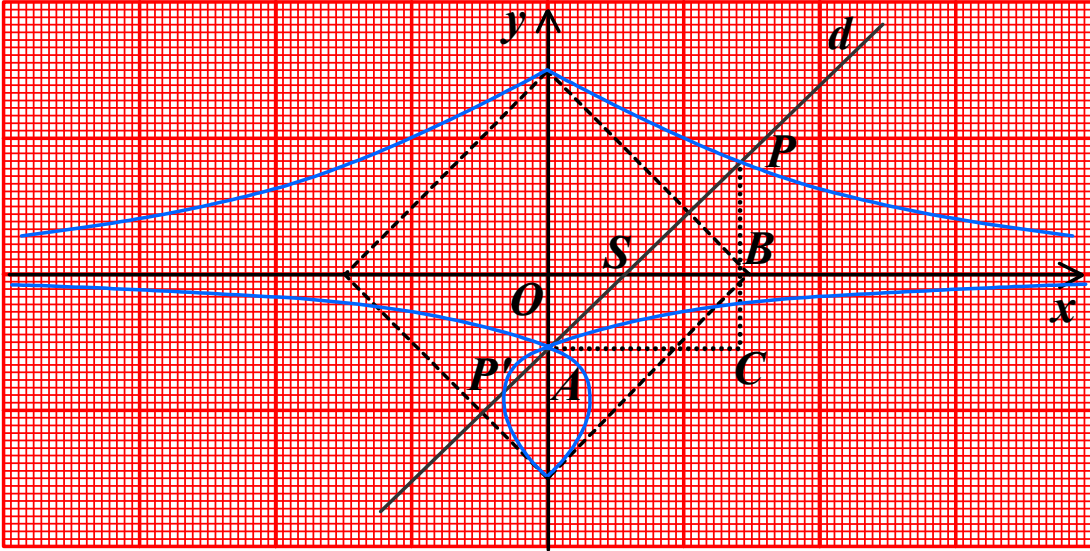
$x^2y^2 = (y+a)^2(r^2-y^2)$  olduğunu gösterir ( Bkz. [7] ).

□

Bu eğrinin  $y$ -eksenine göre simetrik olduğu ve tanım gereğince  $y = \pm r$  doğruları arasında bulunduğu göz önüne alınırsa  $a < r$  iken, grafiğinin şekil 5.2.1 de görüldüğü gibi olduğu kolaylıkla bulunabilir.

Şimdi aynı eğriyi benzer tanımla taksi düzlemde inceleyelim. Taksi düzlemde bu eğrinin bir tanımlaması şöyle yapılabilir:

$A$  sabit bir nokta,  $Ox$  sabit bir doğru olsun.  $A$  dan geçen ve bu nokta etrafında döndürülen hareketli bir  $d$  doğrusu düşünelim.  $r$  sabit bir değer ve  $d$  doğrusunun  $Ox$  doğrusunu kestiği nokta  $S$  olmak üzere,  $d$  doğrusu üzerinde  $|SP|_T = r$  (ve  $|SP'|_T = r$ ) koşuluna uyan  $P$  (ve  $P'$ ) noktalarının geometrik yerine *taksi konhoid eğrisi* denir.



Şekil 5.2.2

Şimdi bu eğrinin denklemini verelim:

$A$  dan  $Ox$  doğrusuna indirilen dikme  $y$ -ekseni;  $|AO|_T = a$ ;  $P = (x, y)$  den  $Ox$  doğrusuna indirilen dikme ayağı  $B$  ve  $A$  dan  $y$ -eksenine çizilen dikmenin  $BP$  doğrusunu kestiği

nokta  $C$  olarak alınırsa,  $ACP$  ve  $SBP$  benzer üçgenlerinden  $\frac{|AC|_T}{|CP|_T} = \frac{|SB|_T}{|BP|_T}$ , yani

$\frac{x}{y+a} = \frac{r-y}{y}$  elde edilir ki, bu da eğrinin  $y$  eksenine göre simetrik olduğu göz önüne

alınarak düzenlenirse

$$xy = \pm(y+a)(r-y) \quad ; \quad y \geq 0$$

ifadesi elde edilir. Benzer işlemler alt yarı düzlemdeki  $P'$  noktası için de yapılırsa, eğrinin denklemini aşağıdaki iki denklemin birleşimi olarak verebiliriz:

$$xy = \pm(y+a)(r-y) \quad ; \quad y \geq 0$$

$$xy = \pm(y+a)(r+y) \quad ; \quad y < 0 .$$

□

### 5.3 Sikloid Eğrisi

Bir çember, bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanırken çember üzerinde bulunan herhangi sabit bir noktanın çizdiği eğriye **sikloid eğrisi** denir ( Bkz. [7] ).

Sabit doğruyu  $x$ -ekseni ve sikloidi çizen noktanın  $x$ -ekseni üzerinde bulunduğu bir pozisyonu da başlangıç noktası olarak sikloidin parametrik denklemini bulalım. Sikloidin değişken noktası  $P = (x, y)$ , çemberin yarıçap  $r$  ve merkezi  $M$  olsun.  $t = \widehat{PMB}$  parametre olarak seçilirse, kaymadan yuvarlanma gereğince ( $t$  nin raydan değeri alınarak) hemen

$$|OB| = |\widehat{PB}| = r \cdot t$$

bulunur. Böylece

$$x = |OA| = |OB| - |AB| = r \cdot t - r \cdot \sin t$$

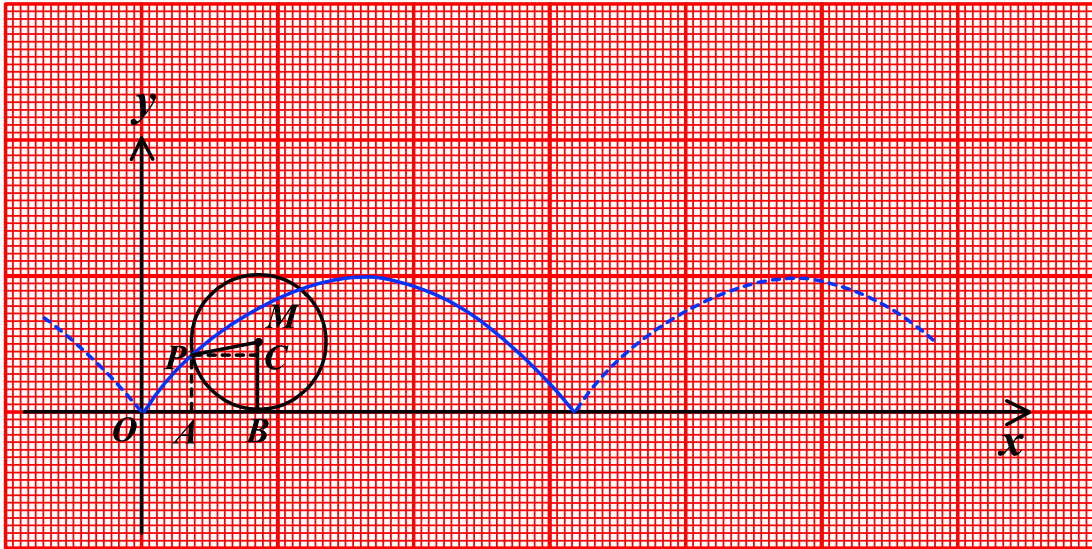
$$y = |PA| = |MB| - |MC| = r - r \cdot \cos t$$

bulunur ki bu da sikloidin parametrik denkleminin

$$x = r \cdot (t - \sin t)$$

$$y = r \cdot (1 - \cos t)$$

olması demektir.



Şekil 5.3.1

Sikloidin dik koordinatlardaki denklemi de hesaplamayla

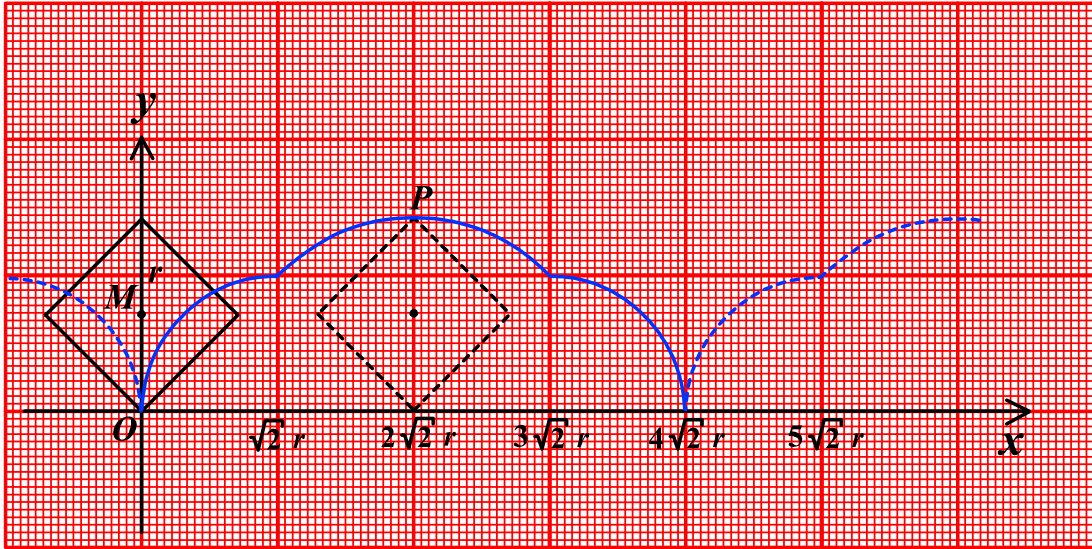
$$x = r \cdot \arccos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{2ry - y^2}$$

bulunur. Burada  $0 \leq t < \pi$  iken  $-$ ,  $\pi \leq t \leq 2\pi$  iken  $+$  alınmalıdır ( Bkz. [7] ).

Şimdi aynı eğriyi, benzer tanımla, taksi düzlemde inceleyelim. Taksi düzlemde bu eğrinin bir tanımlaması şöyle yapılabilir:

Bir taksi çember, bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanırken çember üzerinde bulunan herhangi sabit bir noktanın çizdiği eğriye **taksi sikloid eğrisi** denir.

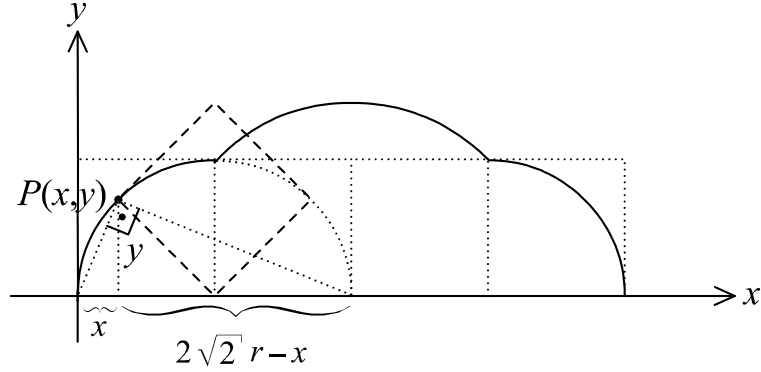
Sabit doğruyu  $x$ -ekseni ve sikloidi çizen noktanın  $x$ -ekseni üzerinde bulunduğu bir pozisyonu da başlangıç noktası olarak (Bkz. Şekil 5.3.2), taksi sikloid eğrisinin denklemini bulalım. Sikloidin değişken noktası  $P=(x,y)$ , çemberin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $M$  olsun.



Şekil 5.3.2

Buna göre,

1.  $0 \leq x < \sqrt{2}r$  için  $y = \sqrt{x \cdot (2\sqrt{2}r - x)}$  bulunur. (Bkz. Şekil 5.3.3)



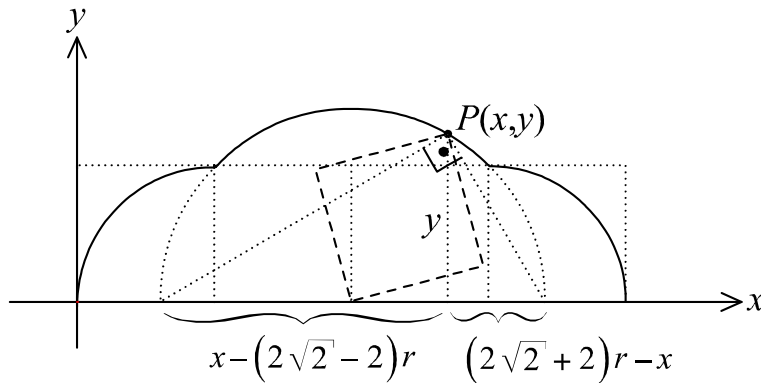
Şekil 5.3.3

Benzer durum  $n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere, genel olarak  $(4n)\sqrt{2}r \leq x < (4n+1)\sqrt{2}r$  için yapılırsa,

$$y = \sqrt{[x - (4n)\sqrt{2}r] \cdot [(2n+1)2\sqrt{2}r - x]} \text{ elde edilir.}$$

2.  $\sqrt{2}r \leq x < 3\sqrt{2}r$  için  $y = \sqrt{[x - (2\sqrt{2} - 2)r] \cdot [(2\sqrt{2} + 2)r - x]}$  bulunur.

(Bkz. Şekil 5.3.4)

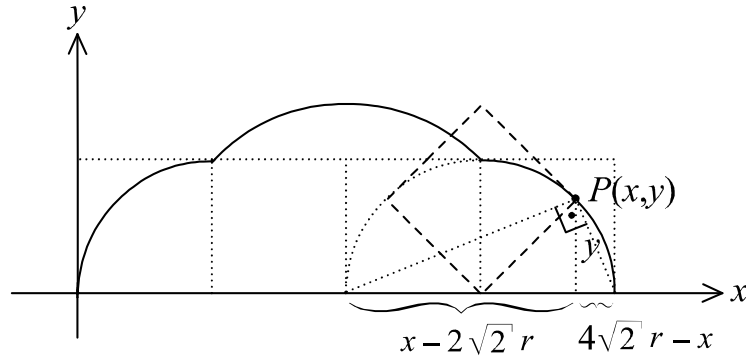


Şekil 5.3.4

Benzer durum  $n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere, genel olarak  $(4n+1)\sqrt{2}r \leq x < (4n+3)\sqrt{2}r$  için

$$y = \sqrt{[x - ((2n+1)2\sqrt{2} - 2)r] \cdot [((2n+1)2\sqrt{2} + 2)r - x]} \text{ elde edilir.}$$

3.  $3\sqrt{2}r \leq x < 4\sqrt{2}r$  için  $y = \sqrt{(x - 2\sqrt{2}r) \cdot (4\sqrt{2}r - x)}$  bulunur. (Bkz. Şekil 5.3.5)



Şekil 5.3.5

Benzer durum  $n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere, genel olarak  $(4n+3)\sqrt{2}r \leq x < (4n+4)\sqrt{2}r$  için yapılırsa,  $y = \sqrt{[x - (2n+1)2\sqrt{2}r] \cdot [(n+1) \cdot 4\sqrt{2}r - x]}$  elde edilir.

Sonuç olarak taksi sikloidin dik koordinatlardaki denklemini bu hesaplamalarla  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$$y = \begin{cases} \sqrt{[x - (4n)\sqrt{2}r] \cdot [(2n+1)2\sqrt{2}r - x]} & , (4n)\sqrt{2}r \leq x < (4n+1)\sqrt{2}r \\ \sqrt{[x - ((2n+1)2\sqrt{2} - 2)r] \cdot [((2n+1)2\sqrt{2} + 2)r - x]} & , (4n+1)\sqrt{2}r \leq x < (4n+3)\sqrt{2}r \\ \sqrt{[x - (2n+1)2\sqrt{2}r] \cdot [(n+1) \cdot 4\sqrt{2}r - x]} & , (4n+3)\sqrt{2}r \leq x < (4n+4)\sqrt{2}r \end{cases}$$

olarak bulunur.

□

**NOT :** Tez içinde verilen çizimler *Compass And Ruler* ve *Flash* bilgisayar programlarıyla elde edilmiştir.

□

## KAYNAKLAR

- [1] AKÇA, Z. , KAYA, R. “*On the Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space.*” Hadronic J., Vol. 27, No. 5 (2004), 521-532.
- [2] AKÇA, Z. , KAYA, R. “*On the Norm in the Higher Dimensional Taxicab Spaces.*” Hadronic J., Journal Supplement Vol 19, (2004), 491-501.
- [3] AKÇA, Z. , KAYA, R. “*On the Taxicab Trigonometry.*” Jour. Of Inst. Of Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.), 10 (1997), 151-159.
- [4] EKİCİ, C. , KOCAYUSUFOĞLU, I., AKÇA, Z. “*The Norm in Taxicab Geometry.*” Tr. J. of Mathematics, 22 (1998), 295-307.
- [5] EULER, L. “*Demonstratio nonnularum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa, proposito V*” , Novi commentarii Acad. Sc. Imper. Petropolitanae, IV (91752-53), ed. 1758, 158-160.
- [6] HO, Y. P. , LIU, Y. “*Parabolas in Taxicab Geometry.*” Missouri J. of Math. Sci., 8 (1996), 63-72.
- [7] KAYA, R. “*Analitik Geometri.*” Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2002.
- [8] KAYA, R. “*Area Formula for Taxicab Triangles.*” Pi Mu Epsilon Journal, (to appear, Fall 2005).
- [9] KAYA, R., AKÇA, Z., GUNALTILI, I., OZCAN, M. “*General Equation for Taxicab Conics and Their Classification.*” Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19 (2000), 135-148.
- [10] KAYA, R., ÇOLAKOĞLU, H. B. “*Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems.*” IJPAM, (to appear, 2006).
- [11] KRAUSE, E. F. “*Taxicab Geometry : An Adventure in Non-Euclidean Geometry.*” Dover Publications, Inc., New York, 1986.



- [12] LAATSCH, R.        “*Pyramidal Sections in Taxicab Geometry.*”  
Mitt. Mathematics Magazine, 55 (1982), 205-212.
- [13] MENGER, K.        “*You Will Like Geometry.*”  
Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit,  
Museum of Science and Industry, Chicago, III, (1952).
- [14] MINKOWSKI, H.     “*Gesammelte Abhandlungen.*”  
Chelsea Publishing Co. New York, 1967.
- [15] ÖZCAN, M. , KAYA, R.   “*Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance.*”  
Missouri J. of Math. Sci.,15 (2003), 178-185.
- [16] ÖZCAN, M. , KAYA, R.   “*On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane  
and Related Properties.*” Missouri J. of Math. Sci.,14 (2002), 107-117.
- [17] *Piero della Francesca's Tetrahedron Formula*  
<http://www.mathpages.com/home/kmath424.htm>
- [18] REYNOLDS, B. E.       “*Taxicab Geometry.*”  
Pi Mu Epsilon Journal, 7 (1980), 77-88.
- [19] SABITOV, I. KH.     “*Volume Formula for Polyhedra.*”  
F.Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi 11(3), 1999, 7-15.
- [20] SCHATTSCHEIDER, D. J.   “*The Taxicab Group.*”  
Amer. Math. Monthly, 91 (1984), 423-428.
- [21] SO, S. S. , AL-MASKARI, Z. S.   “*Two Simple Examples in Non-Euclidean  
Geometry.*” Kansas Science Teacher (Jr. of Math. and Sci. Teaching), Vol 11, 14-18  
(1995).
- [22] TIAN, S. , SO, S. S. , CHEN G.   “*Concerning Circles in Taxicab Geometry.*”  
J. Math. Educ. Sci. Technol., 28 (1997), 727-733.