Adi Diferensiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri

Gökhan Çelebi

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Temmuz 2010

Symmetries and Solutions of Ordinary Differential Equations

Gökhan Çelebi

MASTER DISSERTATION
Department of Mathematics
July 2010

Adi Diferensiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri

Gökhan Çelebi

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

UygulamalıMatematik Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Temmuz 2010

ONAY

Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Gökhan Çelebi' ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Adi Diferensiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Doç. Dr. Abdullah ALGIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde diferensiyel denklemlerin çözüm metotlarından biri olan Lie nokta simetrileri ele alınmıştır. Bu metodun uygulanması için gerekli temel teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu alt yapıdan sonra lineer ve lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerin Lie nokta simetrileri bulunmuştur. Bulunan bu simetriler ile kanonik koordinatlara geçilerek verilen adi diferensiyel denklemler indirgenerek çözümlerine ulaşılmıştır. Ayrıca alt gruplar arasında ilişki kuran bir dönüşümün, karşı gelen değişmez çözümler arasında da ilişki kurulabildiği optimal sistemler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adi diferensiyel denklemler, Lie Teori, değişmez fonksiyonlar, kanonik koordinatlar, optimal sistemler.

SUMMARY

In this master thesis, we consider the Lie point symmetries which is one of the solution methods of differential equations. Basic definitions and theorems are given for applying this method. After that Lie point symmetries of linear and nonlinear ordinary differential equations are found. After finding Lie group symmetries of differential equations, these equations are reduced to canonical coordinates. These reduced equations are solved in an easier way than the original equations. Also optimal systems in which a transformation, which can correlate among subgroups, can also correlate corresponding invariant solutions are discussed.

Keywords: Ordinary differential equations, Lie Theory, invariant functions, canonical coordinates, optimal systems.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgileriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygı değer danışmanım Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve çalışma sırasında vermiş oldukları bursla maddi destek sağlayan TUBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Bu tezde anlatılan konulara genel bir bakış açısı sağlamak ve konu hakkında bir fikir edinmek için çalışmanın ana içeriğini oluşturan adi diferensiyel denklemler ve Lie Teorisinin tarihsel gelişim süreci giriş olarak aşağıda kısaca anlatılmıştır.

Bilim dallarında karşılaşılan problemlerin çözümlerine ulaşabilmek için problemin özelliklerini taşıyan matematiksel modellerin kurulmasına ihtiyaç duyulmuştur. (Özer ve Eser, 1996) Diferensiyel denklemler konusu 17. yüzyılda Isaac Newton'un ve Willhem Leibnitz'in çalışmalarıyla matematiğin bir konusu olmaya başlamıştır. Newton diferensiyel denklemleri formlarına göre sınıflandırmış ve sonrasında da Leibnitz matematiksel gösterimleri daha kuvvetli kullanmıştır. Aynı yüzyılda Bernoulli kardeşler diferensiyel denklemlerin çözüm metotları konusunda gelişmeler sağlamışlar ve uygulama alanlarını genişleterek mekaniğin birçok problemini diferensiyel denklemlerle modelleyerek integral terimini ilk defa kullanmışlardır. 18. yüzyılın sonlarına doğru adi diferensiyel denklemlerin çözümleri için basit metotlar keşfedilmiştir. 19. yüzyılda ise invariant (değişmezlik) teorisi matematikte ilgi çekici araştırma konularından biri olmuştur. Sophus Lie, Felix Klein, David Hilbert, Elie Cartan gibi birçok matematikçinin bu konunun gelişmesine büyük katkısı olmuştur. (Özceylan, 2007)

Lie grupları, Sophus Lie tarafından geometri ve diferensiyel denklemlerin integrasyon metotları üzerindeki çalışmalarının bir sonucu olarak tanımlanmıştır. Lie grupları sürekli geometrilerin simetrileridir ve yaygın olarak geometrik invaryantların kurulmasında kullanılır. (Özceylan, 2007)

Son yıllarda diferensiyel denklemler için simetri metotları önemli gelişme sağlamıştır. Diferensiyel denklemler içerisinde özellikle de lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümleri için algoritmik simetri metotları geliştirilmiştir. Farklı tipte Lie simetri dönüşümleri ortaya çıkarılmıştır. Bu tipler Lie grup üreteçlerinin katsayılarına bağlı olarak; nokta, contact, Bäcklund ve non_local simetri olmak üzere dörde ayrılmıştır.

Bu çalışmada, Lie grup üreteçlerinin katsayılarının sadece bağımlı ve bağımsız değişkene bağlı olduğu ve türevlerinin içerilmediği nokta simetriler ile ilgileneceğiz.

Bu çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde Lie Teorinin temel kavramları olan grup, grup dönüşümleri, sonsuz küçük üreteçler, değişmez fonksiyonlar, kanonik koordinatlar gibi tanımlar verilmiş ve bunların diferensiyel denklemlerle ilişkilerinin anlatıldığı ikinci bölüme taban oluşturulmuştur.

İkinci bölümde adi diferensiyel denklemlerin Lie grup simetrileri bulunup denklem kanonik koordinatlara indirgenmiştir. İndirgenen denklem orijinal denkleme göre daha kolay şekilde çözülmüştür.

Son bölümde de alt gruplar arasında ilişki kuran bir dönüşümün, karşı gelen değişmez çözümler arasında da ilişki kurulabildiği optimal sistemler ele alınmıştır.

BÖLÜM 1

LİE TEORİ

1.1 Lie Grup Simetrileri ve Sonsuz Küçük Dönüşümler

1.1.1 Grup

Tanım 1.1 G boş olmayan bir küme ve "$\cdot$" sembolü de G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G,$\cdot$) sistemine bir **grup** denir.

1.) Kapalılık özelliği: $\forall a,b \in G$ için $a \cdot b \in G$ dir.

2.) Birleşme özelliği: $\forall a,b,c \in G$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dir.

3.) Birim eleman özelliği: $\forall a \in G$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır.

4.) Ters eleman özelliği: $\forall a \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a = e$ olacak şekilde bir tek $b \in G$ vardır.

Burada 3 deki e elemanına grubun **birim (etkisiz) elemanı** denir. Ayrıca 4 deki b elemanına a nın **tersi** denir ve $b = a^{-1}$ ile gösterilir. Bu 4 şarta ilave olarak eğer;

5.) Değişme özelliği: $\forall a,b \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise bu gruba **Abelyen (değişmeli) grup** denir. (Bilgiç)

Tanım 1.2 G bir grup ve H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan grup işlemi ile grup oluyorsa H ye G nin bir **altgrubu** denir. (Bilgiç)

Tanım 1.3 Analitik fonksiyon yakınsak kuvvet serileri ile verilen bir fonksiyondur. Bir fonksiyonun analitik olabilmesi için gerek ve yeter şart her noktanın civarında Taylor serisine açılabilmesidir.

Tanım 1.4 $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times \{a\} \longrightarrow \mathbb{R},\ \psi : \mathbb{R}^2 \times \{a\} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları x, y değişkenleri ve a parametresinin iki analitik fonksiyonu olsun.

$$\phi(x,y,a) = x_1,\ \psi(x,y,a) = y_1$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} T_a & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longrightarrow & T_a(x,y) = (\phi(x,y,a), \psi(x,y,a)) = (x_1, y_1) \end{array}$$

dönüşümü yazılarak aşağıdaki küme tanımlansın.

$$G = \{T_a : a \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere, eğer bu küme üzerinde bir ikili işlem

$$\begin{array}{rccl} \circ & : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & & (T_a, T_b) & \longrightarrow & T_a \circ T_b \end{array}$$

ile aşağıdaki koşulları sağlıyorsa **bir parametreli Lie Grubu** adını alır.

1.) $T_a(x,y) = (\phi(x,y,a), \psi(x,y,a))$ ve $T_b(x,y) = (\phi(x,y,b), \psi(x,y,b))$ eşitlikleri ile yazılan $\forall T_a, T_b \in G$ için;

$$\begin{aligned} (T_a \circ T_b)(x,y) &= T_a[T_b(x,y)] \\ &= T_a(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b)) \\ &= (\phi(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b), a), \psi(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b), a)) \end{aligned}$$

işlemi sonucunda, $(\phi(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b), a), \psi(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b), a)) = T_c(x,y)$ eşitliğine uyan $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_c \in G$ vardır.

2.) $\forall T_a, T_b, T_c \in G$ için $(T_a \circ T_b) \circ T_c = T_a \circ (T_b \circ T_c)$ dir.

3.) Öyle $\exists T_{a_0} \in G$ özdeşlik dönüşümü vardır ki, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$T_{a_0}(x,y) = (x,y)$$

dir.

4.) $\forall T_a \in G$ için

$$T_a \circ T_{a^{-1}} = T_{a^{-1}} \circ T_a = T_{a_0}$$

sağlayan $\exists T_{a^{-1}} \in G$ vardır. (Özceylan, 2007)

1.1.2 Grup Dönüşümleri

Tanım 1.5 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde olsun. Grup dönüşümleri $\forall x \in D$ için $x^* = X(x;\varepsilon)$ olarak tanımlanır. $\varepsilon \in S \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi(\varepsilon,\delta)$ S bölgesindeki ε ve δ

parametreleri ile tanımlıdır. Bu dönüşüm D bölgesinde aşağıdaki koşulları sağlıyorsa **grup dönüşümüdür** denir.

1.) $\forall \varepsilon \in S$ için dönüşüm D bölgesinde bire-bir dir.

2.) S bölgesi ϕ nin kuralları ile G formunu alır.

3.) $\varepsilon = e$ ise $x^* = x$ dir. Yani $X(x;e) = x$ dir.

4.) Eğer $x^* = X(x;\varepsilon)$ ve $x^{**} = X(x^*;\delta)$ ise $x^{**} = X(x;\phi(\varepsilon,\delta))$ dır. (Bluman and Anco, 2002)

1.1.3 Bir Parametreli Lie Grup Dönüşümleri

Tanım 1.6 Grup dönüşümlerinde verilen aksiyomlara ek olarak bu dönüşüm aşağıdaki aksiyomları da sağlıyorsa bu dönüşüme **bir parametreli Lie grup dönüşümü** denir.

5.) ε sürekli bir parametre ve $\varepsilon \in S$, $\mathbb{R}$ de aralık olsun. $\varepsilon = 0$; e etkisiz elemanına karşılık gelir.

6.) X; x e göre D bölgesinde her mertebeden sürekli türevlere sahip ve S de ε nun analitik fonksiyonudur.

7.) $\varepsilon \in S$, $\delta \in S$ olmak üzere $\phi(\varepsilon,\delta)$, ε ve δ nın analitik fonksiyonudur. (Bluman and Anco, 2002)

1.1.4 Sonsuz Küçük Dönüşümler

$x^* = X(x;\varepsilon)$ Lie grup dönüşümünü $\varepsilon = 0$ için $\varepsilon = 0$ civarında seriye açarsak

$$\begin{aligned} x^* &= X(x;0) + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}X(x;\varepsilon)\ \Big|_{\varepsilon=0}\right) + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x;\varepsilon)\ \Big|_{\varepsilon=0}\right) + \ldots \\ &= x + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}X(x;\varepsilon)\ \Big|_{\varepsilon=0}\right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

ve

$$\xi(x) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}X(x;\varepsilon)\ \Big|_{\varepsilon=0}$$

dersek $x^* = x + \xi(x)\varepsilon$ olur. $\xi(x)$ elemanı $x^* = X(x;\varepsilon)$ ın **sonsuz küçüğü(infinitesimal)** olarak adlandırılır.(Bluman and Anco, 2002)

1.1.5 Lie Birinci Temel Teoremi

Yardımcı Teorem 1.7

$$X(x;\varepsilon+\Delta\varepsilon)=X(X(x;\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon))$$

İspat.

$$\begin{aligned} X(X(x;\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)) &= X(x;\phi(\varepsilon,\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon))) \\ &= X(x;\phi(\phi(\varepsilon,\varepsilon^{-1}),\varepsilon+\Delta\varepsilon))) \\ &= X(x;\phi(0,\varepsilon+\Delta\varepsilon)) \\ &= X(x;\varepsilon+\Delta\varepsilon) \end{aligned}$$

(Bluman and Kumei, 1989) □

Teorem 1.8 *(Lie Birinci Temel Teoremi)* $x^*=X(x;\varepsilon)$ Lie grup dönüşümü olmak üzere

$$\frac{dx^*}{d\tau}=\xi(x^*),\ \tau=0\Rightarrow\ \ x^*=x$$

biçimindeki birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemleri için başlangıç değer probleminin çözümü $x^*=X(x;\varepsilon)$ Lie grup dönüşümlerine eşdeğer olacak şekilde $\tau(\varepsilon)$ parametrezisyonu ile yapılır.

$$\tau(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon^{'})d\varepsilon^{'}\ ,\ \ \Gamma(\varepsilon)=(\frac{\partial}{\partial b}\phi(a,b)\ \Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)})\ ,\ \Gamma(0)=1$$

İspat. $x^*=X(x;\varepsilon)$ olmak üzere Yardımcı Teorem1.7 den dolayı

$$X(x;\varepsilon+\Delta\varepsilon)=X(X(x;\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon))$$

idi. $X(x;\varepsilon+\triangle\varepsilon)$ ifadesini $\Delta\varepsilon=0$ civarında seriye açarsak

$$\begin{aligned} X(x;\varepsilon+\triangle\varepsilon) &= X(x,\varepsilon)+(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}X(x;\varepsilon+\triangle\varepsilon)\ \Big|_{\Delta\varepsilon=0})\Delta\varepsilon+... \\ &= x^*+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}X(x;\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned}$$

ve $\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\triangle\varepsilon)$ ifadesini $\Delta\varepsilon=0$ civarında seriye açarsak

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\triangle\varepsilon) &= \phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon)+(\frac{\partial}{\partial(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)\ \Big|_{\Delta\varepsilon=0})\Delta\varepsilon+... \\ &= \phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2) \\ &= \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}
X(X(x;\varepsilon);\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)) &= X(x^*;\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)) \\
&= X(x^*;\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2)) \\
&= X(x^*;0)+\Delta\varepsilon\Gamma(\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial\delta}X(x^*;\delta)\underset{\delta=0}{|})+O((\Delta\varepsilon)^2) \\
&= x^*+\Delta\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\xi(x^*)+O((\Delta\varepsilon)^2)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu bulunan ifadelerden

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}X(x;\varepsilon)=\Gamma(\varepsilon)\xi(x^*)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon}=\Gamma(\varepsilon)\xi(x^*)\ \ ;\ \ \varepsilon=0\ \Rightarrow x^*=x$$

olur. (Bluman and Anco, 2002) □

Örnek 1.1

$$\begin{aligned}
x^* &= x+\varepsilon \\
y^* &= y
\end{aligned}$$

grup dönüşümleri için

$$\phi(a,b)=a+b\ ,\varepsilon^{-1}=-\varepsilon$$

olsun. O halde

$$\frac{\partial}{\partial b}\phi(a,b)=1\ \Rightarrow\ \Gamma(\varepsilon)=1$$

olur.

$$X(x;\varepsilon)=(x+\varepsilon,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}X(x;\varepsilon)\underset{\varepsilon=0}{|}=(1,0)\Rightarrow\xi(x)=(1,0)$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon} &= \Gamma(\varepsilon)\xi(x^*)=1 \\
\frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon} &= \Gamma(\varepsilon)\xi(y^*)=0
\end{aligned}$$

$$\varepsilon=0\Rightarrow\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon}=1\Rightarrow x^*=x\ ,\ y^*=y$$

dir. (Bluman and Anco, 2002)

Örnek 1.2

$$\begin{aligned} x^* &= (1+\varepsilon)x \\ y^* &= (1+\varepsilon)^2 y, \quad -1 < \varepsilon < \infty \end{aligned}$$

grup dönüşümleri için

$$\phi(a,b) = a + b + ab \;,\; \varepsilon^{-1} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

olsun. O halde

$$\frac{\partial}{\partial b}\phi(a,b) = 1 + a$$

ve

$$\Gamma(\varepsilon) = (\frac{\partial}{\partial b}\phi(a,b) \underset{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}{|}) = 1 + \varepsilon^{-1} = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

dır.

$$x = (x,y)$$

olsun.

$$\begin{aligned} X(x;\varepsilon) &= ((1+\varepsilon)x, (1+\varepsilon)^2 y) \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon}X(x;\varepsilon) &= (x, 2(1+\varepsilon)y) \end{aligned}$$

ve

$$\xi(x) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}X(x;\varepsilon) \underset{\varepsilon=0}{|} = (x, 2y)$$

Sonuç olarak;

$$\frac{dx^*}{d\varepsilon} = \frac{x^*}{1+\varepsilon} \quad , \quad \frac{dy^*}{d\varepsilon} = \frac{2y^*}{1+\varepsilon}$$

ve

$$\varepsilon = 0 \text{ da } x^* = x,\; y^* = y \text{ dir.}$$

parametrezisyon ise

$$\int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon' = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+\varepsilon'}d\varepsilon' = \log(1+\varepsilon)$$

olur. Baştaki grup dönüşümleri

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\tau}x \\ y^* &= e^{2\tau}y, \quad -\infty < \tau < \infty \end{aligned}$$

halini alır ve

$$\phi(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 + \tau_2$$

olur. (Bluman and Anco, 2002)

1.1.6 Sonsuz Küçük Üreteçler

ε parametresiyle $\phi(a,b) = a+b$, $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ ve $\Gamma(\varepsilon) \equiv 1$ olsun. $x^* = X(x;\varepsilon)$ dönüşümü $\xi(x)$ sonsuz küçük üreteçleri ile

$$\frac{dx^*}{d\varepsilon} = \xi(x^*)\varepsilon = 0 \text{ , için } x^* = x$$

biçiminde birinci mertebeden diferensiyel denklem haline gelir. (Bluman and Anco, 2002)

Tanım 1.9 $x^* = X(x;\varepsilon)$ ve ∇ gradient operatörü

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$$

olmak üzere

$$X = X(x) = \xi(x)\nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ve herhangi bir diferensiyellenebilir fonksiyon

$$F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

için

$$XF(x) = \xi(x)\nabla F(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} F(x)$$

dir. (Bluman and Anco, 2002)

Teorem 1.10 $x^* = X(x;\varepsilon)$ için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\varepsilon X} x = (1 + \varepsilon X + \varepsilon^2 X^2 + \varepsilon^3 X^3 + ...)x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x \end{aligned}$$

$$X = X(x) = \xi(x)\nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ve

$$\begin{aligned} X^k &= X.X^{k-1},\ k = 1, 2, ... \\ X^k F(x) &= X(X^{k-1} F(x)),\ k = 1, 2, ... \\ X^0 F(x) &= F(x) \end{aligned}$$

dir. (Bluman and Anco, 2002)

Sonuç 1.11 $F(x)$ her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyon ise

$$F(x^*) = F(e^{\varepsilon X} x) = e^{\varepsilon X} F(x)$$

dir. (Bluman and Kumei, 1989)

Örnek 1.3

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon \\ y^* &= -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \end{aligned}$$

bir parametreli dönme dönüşümü verilsin. (Bluman and Kumei, 1989)

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\varepsilon} &= -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \\ \frac{dy^*}{d\varepsilon} &= -x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (\xi_1(x,y), \xi_2(x,y)) \\ &= (\xi(x,y), \eta(x,y)) \\ &= ((\frac{dx^*}{d\varepsilon}\underset{\varepsilon=0}{|}), (\frac{dy^*}{d\varepsilon}\underset{\varepsilon=0}{|})) \\ &= (y, -x) \end{aligned}$$

Verilen denklem için sonsuz küçük üreteç

$$\begin{aligned} X &= \xi(x)\nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \\ &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

olur.

$(x^*, y^*) = (e^{\varepsilon X}x, e^{\varepsilon X}y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Xx &= y\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial x}{\partial y} = y \\ X^2x &= X(Xx) = y\frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial y}{\partial y} = -x \\ X^3x &= X(X^2x) = y\frac{\partial(-x)}{\partial x} - x\frac{\partial(-x)}{\partial y} = -y \\ X^4x &= X(X^3x) = y\frac{\partial(-y)}{\partial x} - x\frac{\partial(-y)}{\partial y} = x \\ &\vdots \end{aligned}$$

O halde

$$X^{4n}x = x,\ X^{4n-1}x = -y,\ X^{4n-2}x = -x,\ X^{4n-3}x = y,\ n = 1, 2, \ldots$$

dir.

$$
\begin{aligned}
x^{*}=e^{\varepsilon X}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{k}}{k!}X^{k}x &= x+\varepsilon y-\frac{\varepsilon^{2}}{2!}x-\frac{\varepsilon^{3}}{3!}y+...\\
&= x(1-\frac{\varepsilon^{2}}{2!}+\frac{\varepsilon^{4}}{4!}-...)+y(\varepsilon-\frac{\varepsilon^{3}}{3!}+\frac{\varepsilon^{5}}{5!}-...)\\
&= x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Aynı şekilde X operatörünü y ye uygularsak

$$
\begin{aligned}
Xy &= y\frac{\partial y}{\partial x}-x\frac{\partial y}{\partial y}=-x\\
X^{2}y &= X(Xy)=y\frac{\partial(-x)}{\partial x}-x\frac{\partial(-x)}{\partial y}=-y\\
X^{3}y &= X(X^{2}y)=y\frac{\partial(-y)}{\partial x}-x\frac{\partial(-y)}{\partial y}=x\\
X^{4}y &= X(X^{3}y)=y\frac{\partial x}{\partial x}-x\frac{\partial x}{\partial y}=y\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olur. O halde

$$
X^{4n}y=y,\ X^{4n-1}y=x,\ X^{4n-2}x=-y,\ X^{4n-3}x=-x,\ n=1,2,...
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
y^{*}=e^{\varepsilon X}y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{k}}{k!}X^{k}y &= y-\varepsilon x-\frac{\varepsilon^{2}}{2!}y+\frac{\varepsilon^{3}}{3!}x+...\\
&= -x(\varepsilon-\frac{\varepsilon^{3}}{3!}+\frac{\varepsilon^{5}}{5!}-...)+y(1-\frac{\varepsilon^{2}}{2!}+\frac{\varepsilon^{4}}{4!}-...)\\
&= -x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 1.4

$$
X=-x_{2}\frac{\partial}{\partial x_{1}}+x_{1}\frac{\partial}{\partial x_{2}}
$$

sonsuz küçük üreteci ile verilen x_1^* ve x_2^* dönüşümleri nedir? (Bluman and Kumei, 1989)

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
Xx_{1} &= -x_{2}\frac{\partial x_{1}}{\partial x_{1}}+x_{1}\frac{\partial x_{1}}{\partial x_{2}}=-x_{2}\\
X^{2}x_{1} &= X(Xx_{1})=-x_{2}\frac{\partial(-x_{2})}{\partial x_{1}}+x_{1}\frac{\partial(-x_{2})}{\partial x_{2}}=-x_{1}\\
X^{3}x_{1} &= X(X^{2}x_{1})=-x_{2}\frac{\partial(-x_{1})}{\partial x_{1}}+x_{1}\frac{\partial(-x_{1})}{\partial x_{2}}=x_{2}\\
X^{4}x_{1} &= X(X^{3}x_{1})=-x_{2}\frac{\partial x_{2}}{\partial x_{1}}+x_{1}\frac{\partial x_{2}}{\partial x_{2}}=x_{1}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

dır. Yani

$$X^{4n}x_1 = x_1,\ X^{4n-1}x_1 = x_2,\ X^{4n-2}x_1 = -x_1,\ X^{4n-3}x_1 = -x_2,\ n = 1,2,...$$

ve

$$\begin{aligned}
Xx_2 &= -x_2\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = x_1 \\
X^2x_2 &= X(Xx_2) = -x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -x_2 \\
X^3x_2 &= X(X^2x_2) = -x_2\frac{\partial(-x_2)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2} = -x_1 \\
X^4x_2 &= X(X^3x_2) = -x_2\frac{\partial(-x_1)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial(-x_1)}{\partial x_2} = x_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dır. Yani

$$X^{4n}x_2 = x_2,\ X^{4n-1}x_2 = -x_1,\ X^{4n-2}x_1 = -x_2,\ X^{4n-3}x_1 = x_1,\ n = 1,2,...$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler yardımıyla

$$\begin{aligned}
x_1^* = e^{\varepsilon X}x_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^kx_1 &= x_1 - \varepsilon x_2 - \frac{\varepsilon^2}{2!}x_1 + \frac{\varepsilon^3}{3!}x_2 + ... \\
&= x_1(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - ...) - x_2(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - ...) \\
&= x_1\cos\varepsilon - x_2\sin\varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
x_2^* = e^{\varepsilon X}x_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^kx_2 &= x_2 - \varepsilon x_1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}x_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}x_1 + ... \\
&= -x_1(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - ...) + x_2(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - ...) \\
&= -x_1\sin\varepsilon + x_2\cos\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur.

1.2 Değişmez(İnvariant) Fonksiyonlar

Tanım 1.12 $F(x)$ her mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olsun.

$F(x)$ fonsiyonu değişmez fonsiyondur. $\Leftrightarrow$ $x^* = X(x;\varepsilon)$ dönüşümü için $F(x) \equiv F(x^*)$ dir. (Bluman and Anco, 2002)

Teorem 1.13 $F(x)$, $x^* = X(x;\varepsilon)$ dönüşümü altında değişmezdir $\Leftrightarrow$ $XF(x) = 0$

İspat. $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} F(x^*) &= e^{\varepsilon X}F(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^kF(x) \\ &= F(x)+\varepsilon XF(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}X^2F(x)+\ldots \end{aligned}$$

$F(x^*) \equiv F(x)$ olması için eşitliğin sağındaki ifadede 1.terimden sonrası 0 olmalıdır. Yani;

$$XF(x) = 0$$

dır.

$(\Leftarrow)$

$$XF(x) = 0 \Rightarrow X^kF(x) = 0$$

dır.

$$F(x^*) = e^{\varepsilon X}F(x) = F(x)+\varepsilon XF(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}X^2F(x)+\ldots$$

olup buradan $XF(x) = X^2F(x) = \ldots = X^kF(x) = 0$ olduğundan

$$F(x^*) \equiv F(x)$$

olur. (Bluman and Anco, 2002) □

Teorem 1.14 $x^* = X(x;\varepsilon)$ Lie grup dönüşümü için

$$F(x^*) = F(x)+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad XF(x) = 1$$

İspat. $(\Rightarrow)$

$$F(x^*) = e^{\varepsilon X}F(x) = F(x)+\varepsilon XF(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}X^2F(x)+\ldots$$

ve

$$F(x)+\varepsilon = F(x)+\varepsilon XF(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}X^2F(x)+\ldots$$

olup eşitliğin gerçekleşmesi için

$$XF(x) = 1 \text{ ve } X^kF(x) = 0 \text{ , } k = 2,3,\ldots$$

olmalıdır.

($\Leftarrow$)

$$XF(x) = 1 \text{ ise } X^k F(x) = 0 \text{ dır.} \quad k = 2, 3, \ldots$$

ve

$$F(x^*) = e^{\varepsilon X} F(x) = F(x) + \varepsilon X F(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X^2 F(x) + \ldots$$

olur. O halde

$$F(x^*) = F(x) + \varepsilon$$

bulunur. (Bluman and Anco, 2002) □

1.3 Kanonik Koordinatlar

Uygun bir bölgede bire-bir ve sürekli diferensiyellenebilir koordinat değişkenlerini

$$y = Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

olarak seçelim.

$x^* = X(x; \varepsilon)$ ın sonsuz küçük üreteci $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinatlarına göre

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dir ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ koordinatlarına göre de

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

dir. y koordinatlarına göre

$$\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \ldots, \eta_n(y)) = Yy$$

dir. (Bluman and Kumei, 1989)

Teorem 1.15

$$\eta(y) = Xy$$

dir.

İspat.

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

operatörüne zincir kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned}\eta_j(y) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i} \\ &= X y_j, \quad j = 1, 2, ..., n\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}X &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j(y). \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= Y\end{aligned}$$

bulunur. (Bluman and Kumei, 1989) □

Teorem 1.16 y koordinatlarına göre Lie grup dönüşümleri

$$y^* = e^{\varepsilon Y} y$$

dir.

İspat.

$$y^* = Y(x^*) = Y(e^{\varepsilon X} x) = e^{\varepsilon X} Y(x) = e^{\varepsilon X} y = e^{\varepsilon Y} y$$

dir. (Bluman and Kumei, 1989) □

Tanım 1.17 Eğer $x^* = X(x;\varepsilon)$ Lie grup dönüşümü

$$\begin{aligned}y_i^* &= y_i, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ y_n^* &= y_n + \varepsilon\end{aligned}$$

oluyorsa

$$y = Y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$$

koordinat değişimi $x^* = X(x;\varepsilon)$ bir parametreli Lie grup dönüşümleri için **kanonik koordinatlar** tanımlar. (Bluman and Kumei, 1989)

Teorem 1.18 Herhangi bir $x^* = X(x;\varepsilon)$ Lie grup dönüşümünün

$$\begin{aligned}y_i^* &= y_i, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ y_n^* &= y_n + \varepsilon\end{aligned}$$

olacak şekilde $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ kanonik koordinat dönüşümü vardır.

İspat. Teorem 1.13 ten

$$y_i^* = y_i(x^*) = y_i(x) \Leftrightarrow Xy_i(x) = 0, \;\; i = 1,2,...,n-1$$

bulunur.

1. mertebeden homojen lineer diferensiyel denklem

$$Xu(x) = \xi_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \xi_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

$u(x)$ için (n-1) tane fonksiyonel bağımsız çözüme sahiptir.

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x)} = ... = \frac{dx_n}{\xi_n(x)}$$

karakteristik sisteminden n tane birinci mertebeden adi diferensiyel denklem bulunur.

Teorem 1.14 ten de

$$y_n^* = y_n(x^*) = y_n(x) + \varepsilon \Leftrightarrow Xy_n(x) = 1$$

dir.

$$v(x) = y_n(x)$$

ise 1. mertebeden homojen olmayan lineer diferensiyel denklem

$$Xv(x) = \xi_1(x)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \xi_2(x)\frac{\partial v}{\partial x_2} + ... + \xi_n(x)\frac{\partial v}{\partial x_n} = 1$$

olmak üzere

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x)} = ... = \frac{dx_n}{\xi_n(x)} = \frac{dv}{1}$$

karakteristik sisteminden (n+1) tane birinci mertebeden adi diferensiyel denklem bulunur. (Bluman and Kumei, 1989) □

Teorem 1.19

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n}$$

dir.

İspat.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\eta_i(y) = Xy_i = 0, \;\; i = 1,2,...,n-1$$

$$\eta_n(y) = Xy_n = 1$$

dir. O halde
$$Y=\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}+\eta_n(y)\frac{\partial}{\partial y_n}=\frac{\partial}{\partial y_n}$$
bulunur. (Bluman and Kumei, 1989) □

Örnek 1.5

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\varepsilon}x, \\ y^* &= e^{2\varepsilon}y, \end{aligned}$$

dönüşümünün kanonik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm. Öncelikle X sonsuz küçük üretecini bulalım.
$$X=\sum_{i=1}^{2}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}=\xi_1(x)\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}$$
dir. O halde;
$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= \frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=x \\ \xi_2(x) &= \frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=2y \end{aligned}$$
olup
$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}$$
olur. Şimdi X operatörünü $r(x,y)$ ye uygularsak Teorem 1.18 den
$$Xr=x\frac{\partial r}{\partial x}+2y\frac{\partial r}{\partial y}=0$$
dir ve buna karşılık gelen karakteristik diferensiyel denklemler
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dr}{0}=\lambda$$
olur.
$$\frac{dr}{0}=\lambda\Rightarrow r=c_1$$
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2y}\Rightarrow\frac{y}{x^2}=c_2$$
olup $c_1=f_1(c_2)$ olduğundan $r=f_1(\frac{y}{x^2})$ olup
$$r=\frac{y}{x^2}$$

seçilebilir. Şimdi de X operatörünü $s(x,y)$ ye uygularsak

$$Xs = x\frac{\partial s}{\partial x} + 2y\frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

dir ve buna karşılık gelen karakteristik diferensiyel denklemler

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{ds}{1} = \lambda$$

dir ve

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{1} \Rightarrow s = \log x + c_3$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = c_4$$

olup $c_3 = f_2(c_4)$ olduğundan $s = \log x + f_2(\frac{y}{x^2})$ olup

$$s = \log x$$

seçilebilir. O halde

$$(r,s) = (\frac{y}{x^2}, \log x)$$

verilen dönüşümün kanonik koordinatlarıdır. (Bluman and Kumei, 1989) ________________

Örnek 1.6 Grup notasyonları

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \\ y^* &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \end{aligned}$$

ise kanonik koordinatları nedir?

Çözüm. Verilen grup dönüşümünün sonsuz küçük üreteci

$$X = \sum_{i=1}^{2} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = \xi_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

dir. O halde;

$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = (-x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = -y \\ \xi_2(x) &= \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = x \end{aligned}$$

olup buradan

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

elde edilir. Şimdi X operatörünü $r(x,y)$ ye uygularsak

$$Xr = -y\frac{\partial r}{\partial x} + x\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

dir ve buna karşılık gelen karakteristik diferensiyel denklemler

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dr}{0} = \lambda$$

olur.

$$\frac{dr}{0} = \lambda \Rightarrow r = c_1$$

ve

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c_2$$

olup

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

bulunur. Şimdi de X operatörünü $s(x,y)$ ye uygularsak

$$Xs = -y\frac{\partial s}{\partial x} + x\frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

dir ve buna karşılık gelen karakteristik diferensiyel denklemler

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{ds}{1} = \lambda$$

olur ve

$$\frac{dy}{x} = \frac{ds}{1} \Rightarrow \frac{ds}{dy} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

olup

$$s(x,y) = \arcsin\frac{y}{r}$$

bulunur. O halde

$$(r,s) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arcsin\frac{y}{r})$$

verilen dönüşümün kanonik koordinatlarıdır. (Bluman and Kumei, 1989) ___

1.4 Prolangasyon (Uzatma) Formülleri

Tanım 1.20 $F(x,y,y',y'',\ldots,y^l)$ şeklinde verilen bir diferensiyellenebilen fonksiyon için tam(total) türev operatörü şu şekilde tanımlanır.

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + y^{n+1}\frac{\partial}{\partial y^n} + \ldots$$

ve

$$DF(x,y,y',y'',...,y^l) = F_x + y'F_y + y''F_{y'} + ... + y^{l+1}F_{y^l}$$

dir.

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi(x,y;\varepsilon), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \xi(x,y) \\ y^* &= \psi(x,y;\varepsilon), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \eta(x,y) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$y^{*'} = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{D\psi}{D\varphi} = \frac{\psi_x + y'\psi_y}{\varphi_x + y'\varphi_y} \equiv P(x,y,y',\varepsilon)$$

ve

$$y^{*''} = \frac{dy^{*'}}{dx^*} = \frac{DP}{D\varphi} = \frac{P_x + y'P_y + y''P_{y'}}{\varphi_x + y'\varphi_y}$$

(Ibragimov, 1993) dir ve genelleştirecek olursak k-ıncı mertebeden Lie grup dönüşümleri

$$y^{*^i} = \psi_i(x,y,y',...y^i;\varepsilon) = \frac{D\psi_{i-1}}{D\varphi}, \quad i = 1,2,...,k$$

$$\psi_0 = \psi(x,y;\varepsilon)$$

dir. (Bluman and Kumei, 1989)

Örnek 1.7

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi(x,y;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi \\ y^* &= \psi(x,y;\varepsilon) = y + \varepsilon\eta \end{aligned}$$

olsun. Tam(total) türevleri nedir?

Çözüm.

$$y^{*'} = \frac{D\psi}{D\varphi} = \frac{\psi_x + y'\psi_y}{\varphi_x + y'\varphi_y}$$

olup

$$\begin{aligned} y^{*'} &= \frac{y' + \varepsilon D(\eta)}{1 + \varepsilon D(\xi)} \\ &= y' + \varepsilon D(\eta)\frac{1}{1 + \varepsilon D(\xi)} \\ &= [y' + \varepsilon D(\eta)][1 - \varepsilon D(\xi) + \varepsilon^2 D^2(\xi) - \varepsilon^3 D^3(\xi) + ...] \\ &= [y' + \varepsilon D(\eta)][1 - \varepsilon D(\xi) + O(\varepsilon^2)] \\ &= y' - \varepsilon y' D(\xi) + \varepsilon D(\eta) - \varepsilon^2 D(\eta) D(\xi) \\ &= y' + \varepsilon[D(\eta) - y'D(\xi)] \\ &= y' + \varepsilon\zeta_1 \\ &= P \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= \frac{DP}{D\varphi} = \frac{y'' + \varepsilon D(\zeta_1)}{1 + \varepsilon D(\xi)} \\ &= y'' + \varepsilon D(\zeta_1) \frac{1}{1 + \varepsilon D(\xi)} \\ &= [y'' + \varepsilon D(\zeta_1)][1 - \varepsilon D(\xi)] \\ &= y'' - \varepsilon y'' D(\xi) + \varepsilon D(\zeta_1) - \varepsilon^2 D(\zeta_1) D(\xi) \\ &= y'' + \varepsilon [D(\zeta_1) - y'' D(\xi)] \\ &= y'' + \varepsilon \zeta_2 \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial y'} \\ X_2 &= X_1 + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial y''} \end{aligned}$$

dir.(Ibragimov, 1993) ______

1.5 İntegral Çarpanı

Bu metot sadece 1.mertebeden diferensiyel denklemlere uygulanır. 1.mertebeden adi diferensiyel denklemin genel formunu

$$Q(x,y)dx + P(x,y)dy = 0 \tag{1.1}$$

olarak düşünelim. Bu formdaki diferensiyel denklemler için integral çarpanının bulunuşu için aşağıdaki teoremi kullanacağız. (Ibragimov, 1993)

Teorem 1.21 (1.1) diferensiyel denkleminin üreteci

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$$

ve

$$\xi Q + \eta P \neq 0$$

olmak üzere

$$\mu = \frac{1}{\xi Q + \eta P}$$

fonksiyonu denklemin integral çarpanıdır. (Ibragimov, 1993)

Örnek 1.8

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

diferensiyel denkleminin çözümünü integral çarpanını kullanarak bulalım.

$x^* = xe^{\varepsilon}$ ve $y^* = ye^{-\varepsilon}$ olmak üzere

$$\xi(x,y) = \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = x \;\text{ ve } \eta(x,y) = \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -y$$

olup

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteci bulunur. Verilen denklemi

$$dy + (y^2 - \frac{2}{x^2})dx = 0$$

şeklinde yazabiliriz. O halde integral çarpanı

$$\mu = \frac{1}{x(y^2 - \frac{2}{x^2}) - y} = \frac{x^2}{x^3y^2 - 2x - x^2y} = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}$$

bulunur. Denklemi bu ifadeyle çarparsak

$$\frac{xdy + (xy^2 - \frac{2}{x})dx}{x^2y^2 - xy - 2} = 0$$

olur. Eşitliği düzenlersek

$$\frac{xdy}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{x^2y^2 - xy - 2}{x^2y^2 - xy - 2}\frac{dx}{x} + \frac{xy}{x^2y^2 - xy - 2}\frac{dx}{x} = 0$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} \frac{xdy + ydx}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} &= 0 \\ \frac{d(xy)}{(xy)^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{(xy)^2 - xy - 2} = \frac{A}{xy - 2} + \frac{B}{xy + 1}$$

olup buradan $A = \frac{1}{3}$ ve $B = -\frac{1}{3}$ bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{(xy)^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} &= 0 \\ (\frac{1}{3}\frac{1}{xy - 2})d(xy) - (\frac{1}{3}\frac{1}{xy + 1})d(xy) + \frac{dx}{x} &= 0 \\ \frac{1}{3}\ln(xy - 2) - \frac{1}{3}\ln(xy + 1) + \ln x &= \frac{1}{3}\ln c \\ \ln(xy - 2) - \ln(xy + 1) + 3\ln x &= \ln c \end{aligned}$$

$$\frac{xy-2}{xy+1}=\frac{c}{x^3}$$

olup çözüm

$$y=\frac{2x^3+c}{x(x^3-c)}$$

olarak bulunur. (Ibragimov, 1993)

1.6 Determining (Belirleyici) Denklem

Bir parametreli Lie grup dönüşümleri (x,y) uzayında

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\varepsilon)=x+\varepsilon\xi(x,y)+O(\varepsilon^2) \\ y^* &= Y(x,y;\varepsilon)=y+\varepsilon\eta(x,y)+O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

dir ve sonsuz küçüğü

$$\xi(x)=(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

olup buna karşılık gelen sonsuz küçük üreteci

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

dir. k-ıncı mertebeden ise

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\varepsilon)=x+\varepsilon\xi(x,y)+O(\varepsilon^2) \\ y^* &= Y(x,y;\varepsilon)=y+\varepsilon\eta(x,y)+O(\varepsilon^2) \\ y^{*'} &= Y_1(x,y,y';\varepsilon)=y'+\varepsilon\eta^{(1)}(x,y,y')+O(\varepsilon^2) \\ &\vdots \\ y^{*^k} &= Y_k(x,y,y',...,y^{(k)};\varepsilon)=y^{(k)}+\varepsilon\eta^{(k)}(x,y,y',...,y^{(k)})+O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

dir ve sonsuz küçüğü

$$(\xi(x,y),\eta(x,y),\eta^{(1)}(x,y,y'),...,\eta^{(k)}(x,y,y',...,y^{(k)}))$$

dir ve buna karşılık gelen sonsuz küçük üreteç

$$X^{(k)}=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{(1)}(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'}+...+\eta^{(k)}(x,y,y',...,y^{(k)})\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}$$

olarak elde edilir. (Bluman and Kumei, 1989)

Teorem 1.22

$$\eta^{(k)}(x,y,y',...,y^{(k)}) = D\eta^{(k-1)} - y^{(k)}D\xi(x,y) \quad ,k = 1,2,...$$

ve

$$\eta^{(0)} = \eta(x,y)$$

dır.

Açık olarak $\{\eta^{(k)}\}$ lar için

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= D\eta^{(0)} - y'D\xi(x,y) \\
&= D\eta(x,y) - y'D\xi(x,y) \\
&= \eta_x + \eta_y.y' - y'(\xi_x + \xi_y.y') \\
&= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2 \\
\eta^{(2)} &= D\eta^{(1)} - y''D\xi(x,y) \\
&= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y'' - 3\xi_y y' y'' \\
\eta^{(3)} &= D\eta^{(2)} - y'''D\xi(x,y) \\
&= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})(y')^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})(y')^3 \\
&\quad -\xi_{yyy}(y')^4 + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx})y'' + 3(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y'y'' - 6\xi_{yy}(y')^2 y'' \\
&\quad -3\xi_y(y'')^2 + (\eta_y - 3\xi_x)y''' - 4\xi_y y' y'''
\end{aligned}$$

dir. (Bluman and Kumei, 1989)

1.6.1 Birinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemler İçin Belirleyici Denklem

$y' = f(x,y)$, 1.mertebeden adi diferensiyel denklemi için bir parametreli Lie grup dönüşümünün sonsuz küçük üreteci

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \text{ dir.} \Leftrightarrow \eta^{(1)} = \xi f_x + \eta f_y \text{ dir.}$$

Bir önceki bölümde

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2$$

bulmuştuk. O halde bu $\eta^{(1)}$ ler birbirine eşitlenirse

$$\xi f_x + \eta f_y = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2$$

den $y' = f(x,y)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y f^2 - \xi f_x - \eta f_y = 0$$

bulunur. (Bluman and Kumei, 1989)

1.6.2 İkinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemler İçin Belirleyici Denklem

$y'' = f(x,y,y')$ olduğunda

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'}$$

sonsuz küçük üreteci ile

$$\eta^{(2)} = \xi f_x + \eta f_y + \eta^{(1)} f_{y'} = \xi f_x + \eta f_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2].f_{y'}$$

olup bir önceki bölümdeki $\eta^{(2)}$ ye eşitlenirse ve $y'' = f(x,y,y')$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)f$$

$$-[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2].f_{y'} - \xi f_x - \eta f_y = 0$$

olur. (Bluman and Kumei, 1989)

1.6.3 n. Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemler İçin Belirleyici Denklem

$y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ denklemi için

$$X^{(n)}[y^{(n)} - f(x,y,y',...,y^{(n-1)})] = 0$$

ve

$$X^{(n)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + ... + \eta^{(n)}(x,y,y',...,y^{(n)})\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}$$

sonsuz küçük üreteci olup buradanda

$$\eta^{(n)} - [\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'} + ... + \eta^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}] = 0$$

$$D\eta^{(n-1)} - y^{(n)}D\xi(x,y) - [\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial f}{\partial y'} + ... + \eta^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}] = 0$$

bulunur. (Bluman and Kumei, 1989)

Örnek 1.9

$$y'' = 0$$

diferensiyel denklemi için belirleyici denklemi sonsuz küçük üretecini kullanarak bulunuz.

Çözüm.

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olmak üzere belirleyici denklemi yazarsak

$$\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y')^2-\xi_{yy}(y')^3+(\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y)f$$
$$-[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y(y')^2].f_{y'}-\xi f_x-\eta f_y=0$$

olup $y''=0=f(x,y,y')$ olduğundan

$$\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y')^2-\xi_{yy}(y')^3=0$$

dır. y' ifadesinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$(y')^3\ ;\ \xi_{yy}=0 \tag{1.2}$$

$$(y')^2\ ;\ \eta_{yy}-2\xi_{xy}=0 \tag{1.3}$$

$$y'\ ;\ 2\eta_{xy}-\xi_{xx}=0 \tag{1.4}$$

$$(y')^0\ ;\ \eta_{xx}=0 \tag{1.5}$$

olup (1.2) ve (1.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\xi &= a(x)y+b(x)\\ \eta &= c(y)x+d(y)\end{aligned}$$

bulunur. (1.3) ve (1.4) denklemlerinden de

$$\begin{aligned}xc''(y)+d''(y)-2a'(x) &= 0\\ ya''(x)+b''(x)-2c'(y) &= 0\end{aligned}$$

olup ilk terimi x e göre ikinci terimide y ye göre türetirsek

$$\begin{aligned}c''(y)-2a''(x) &= 0\\ a''(x)-2c''(y) &= 0\end{aligned}$$

ve

$$a''(x)=c''(y)=0$$

olduğu görülür. O halde

$$a''(x)=0\Rightarrow a'(x)=a_1\Rightarrow a(x)=a_1x+a_2$$

ve

$$c''(y) = 0 \Rightarrow c'(y) = a_3 \Rightarrow c(y) = a_3 y + a_4$$

olur.

$$\begin{aligned} d''(y) - 2a'(x) &= 0 \\ b''(x) - 2c'(y) &= 0 \end{aligned}$$

olup

$$d''(y) = 2a_1 \Rightarrow d'(y) = 2a_1 y + a_5 \Rightarrow d(y) = a_1 y^2 + a_5 y + a_6$$

ve

$$b''(x) = 2a_3 \Rightarrow b'(x) = 2a_3 x + a_7 \Rightarrow b(x) = a_3 x^2 + a_7 x + a_8$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \xi &= a(x)y + b(x) \\ \xi &= (a_1 x + a_2)y + a_3 x^2 + a_7 x + a_8 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta &= c(y)x + d(y) \\ \eta &= (a_3 y + a_4)x + a_1 y^2 + a_5 y + a_6 \end{aligned}$$

olup

$$X = (a_3 x^2 + a_1 xy + a_2 y a_7 x + a_8)\frac{\partial}{\partial x} + (a_1 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6)\frac{\partial}{\partial y}$$

bulunur. (Bluman and Kumei, 1989) ___

1.7 Lie Cebiri

K bir cisim ve L bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bazı belirleyici denklemlerin çözümlerinin kümesi **Lie Cebiri** diye adlandırılır.

Lie parantez operatörü $[X_1, X_2]$ olup üreteçler ise

$$X_1 = \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olsun. Lie parantez operatörünün formülü

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$$

veya

$$[X_1,X_2] = (X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1))\frac{\partial}{\partial x} + (X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1))\frac{\partial}{\partial y}$$

dir. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L vektör uzayına bir Lie Cebiri denir.

1-) Bi-lineerdir. $c_1, c_2 \in K$ ve $X, X_1, X_2 \in L$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [X, c_1X_1 + c_2X_2] &= c_1[X, X_1] + c_2[X, X_2] \\ [c_1X_1 + c_2X_2, X] &= c_1[X_1, X] + c_2[X_2, X] \end{aligned}$$

2-) Skew simetriktir. $X_1, X_2 \in L$ olmak üzere

$$[X_1,X_2] = -[X_2,X_1]$$

3-) Jakobi özdeşliğini sağlar. $X_1, X_2, X_3 \in L$ olmak üzere

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] \equiv 0$$

dır. Ayrıca $\forall X_1 \in L$ için

$$[X_1,X_1] = 0$$

dır. (Ibragimov, 1993)

Örnek 1.10

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varepsilon_1 - y\sin\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ y^* &= x\sin\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

3 parametreli Lie grup dönüşümleri olsunlar. Lie parantez operatörü bulunuz ve tablo oluşturunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_1=0} = (-x\sin\varepsilon_1 - y\cos\varepsilon_1)\Big|_{\varepsilon_1=0} = -y \\ \eta_1 &= \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_1=0} = (x\cos\varepsilon_1 - y\sin\varepsilon_1)\Big|_{\varepsilon_1=0} = x \\ \xi_2 &= \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2}\Big|_{\varepsilon_2=0} = 1 \\ \eta_2 &= \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2}\Big|_{\varepsilon_2=0} = 0 \\ \xi_3 &= \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_3}\Big|_{\varepsilon_3=0} = 0 \\ \eta_3 &= \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_3}\Big|_{\varepsilon_3=0} = 1 \end{aligned}$$

olup

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$$

olur.

$$\begin{aligned}
[X_1,X_1] &= 0 \\
[X_1,X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= -y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -X_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X_1,X_3] &= X_1X_3 - X_3X_1 \\
&= (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= -y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \\
&= X_2 \\
[X_2,X_1] &= -[X_1,X_2] \\
&= X_3 \\
[X_3,X_1] &= -[X_1,X_3] \\
&= -X_2 \\
[X_2,X_2] &= 0 \\
[X_2,X_3] &= X_2X_3 - X_3X_2 \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= 0 \\
[X_3,X_2] &= 0 \\
[X_3,X_3] &= 0
\end{aligned}$$

dır.

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	$-X_3$	X_2
X_2	X_3	0	0
X_3	$-X_2$	0	0

olur. (Bluman and Kumei, 1989)

BÖLÜM 2

ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Fonksiyon veya fonksiyonların bir veya birden çok değişkene göre türevlerini ilişkilendiren denklemlere **diferensiyel denklemler** denir.

Diferensiyel denklemler temel olarak iki kısıma ayrılır. Eğer diferensiyel denklemdeki bağımsız değişken sayısı bir ise bu tip diferensiyel denklemlere **adi diferensiyel denklemler**, bağımsız değişken sayısı birden fazla ise bu tip diferensiyel denklemlere de **kısmi diferensiyel denklemler** denir.

Bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek türevin basamağına diferensiyel denklemin **basamağı(mertebesi)** denir.

Bilinmeyen fonksiyon ve türevleri polinom formunda olmak üzere bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek basamaktan türevin kuvvetine diferensiyel denklemin **derecesi** denir.

Örneğin;

$$(\frac{d^2y}{dx^2}) - 3x(\frac{dy}{dx})^3 + y = x$$

denklemi 2.basamaktan 1.dereceden bir adi diferensiyel denklemdir.

$$[1+u_t^2]^{\frac{3}{2}} = ku_{xx}$$

denklemi ise 2.basamaktan 2.dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir. (Özer ve Eser, 1996) Biz tezimizde adi diferensiyel denklemler ve çözümleri ile ilgileneceğiz. Dolayısıyla adi diferensiyel denklem ifadesi yerine sadece diferensiyel denklem ifadesini kullanacağız.

Tanım 2.1 Denklemde yerine konulduğunda kendisi ve türevleri denklemi özdeş olarak sağlayan $\forall y = f(x)$ foksiyonuna **diferensiyel denklemin tam çözümü** veya **integrali** denir. Diferensiyel denklemin keyfi sabitlere bağlı çözümlerini içeren bağıntıya **genel çözüm** denir. Keyfi sabitlerden bağımsız çözümlere **özel çözüm** denir.(Özer ve Eser, 1996)

Tanım 2.2 Eğer $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)}) = 0$ n-inci mertebeden türevli denkleminde F; $y,y',y'',...,y^{(n)}$ değişkenlerine göre lineer bir fonksiyon ise denkleme **lineer diferensiyel denklem**, aksi halde **lineer olmayan diferensiyel denklem** diyeceğiz. Buna göre n-inci mertebeden lineer diferensiyel denklemi genel olarak, $a_0(x) \neq 0$ şartıyla;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + \ a_n(x)y = b(x)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer bu denklemde $b(x) = 0$ ise bu denklemlere de **homojen diferensiyel denklem** denir.(Özer ve Eser, 1996)

Biz bu kısımda adi diferensiyel denklemlerin simetrilerini bulup ve bu simetrileri kullanarak denklemleri indirgeyerek genel çözümlerini bulacağız.

2.1 İki Parametreli Grup Dönüşümü Altında Diferensiyel Denklemlerin Değişmezliği

2.1.1 İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Değişmezliği

İkinci mertebeden adi diferensiyel denklemleri

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.1}$$

olarak düşünelim.

Verilen iki parametreli Lie grup dönüşümlerinin Lie cebirinin temel operatörleri X_1 ve X_2 olsun ve $X_i^{(k)}$, k-ıncı genişlemeden X_i $(i = 1, 2)$ nin sonsuz küçük üreteçlerini göstersin.

Herhangi bir λ sabiti için

$$[X_{1,}X_2] = \lambda X_1$$

olduğunu varsayalım.

$u(x, y)$ ve $v(x, y, y')$, $X_1^{(2)}$ nin değişmezleri olsun öyle ki

$$X_1 u = 0, \ X_1^{(1)} v = 0$$

dır.

$\dfrac{dv}{du}$ (2.1) denklemini sağlayacağından

$$X_1^{(2)} \frac{dv}{du} = 0$$

dır. Böylece (2.1) denklemi, $H(u,v)$ herhangi bir fonsiyon için

$$\frac{dv}{du} = H(u,v)$$

haline indirgenir. Komütatör ilişkisinden

$$X_1X_2u = X_2X_1u + \lambda X_1u = 0$$

dır. Bu yüzden herhangi bir $\alpha(u)$ fonksiyonu için

$$X_2u = \alpha(u)$$

olur. Benzer olarak

$$X_1^{(1)}X_2^{(1)}v = 0,\ X_1^{(2)}X_2^{(2)}\frac{dv}{du} = 0$$

olup buradan herhangi bir $\beta(u,v)$ fonksiyonu için

$$X_2^{(1)}v = \beta(u,v)$$

olur. (2.1) denklemi X_2 yi sağladığından dolayı

$$\frac{dv}{du} = H(u,v) \text{ olduğunda } X_2^{(2)}(\frac{dv}{du} - H(u,v)) = 0$$

olur. (u,v) koordinatlarında $X_2^{(1)}$ ifadesi

$$X_2^{(1)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

dir ve $\frac{dv}{du} = H(u,v)$ nin sonsuz küçük üretecidir.

Kanonik koordinatlara $(R(u,v),\, S(u,v))$ geçersek

$$\begin{aligned} X_2^{(1)}R &= 0 \\ X_2^{(1)}S &= 1 \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\begin{aligned} \alpha(u)\frac{\partial R}{\partial u} + \beta(u,v)\frac{\partial R}{\partial v} &= 0 \\ \alpha(u)\frac{\partial S}{\partial u} + \beta(u,v)\frac{\partial S}{\partial v} &= 1 \end{aligned}$$

denklemleri sağlanır. Böylece bir parametreli Lie grup dönüşümleri

$$\begin{aligned} R^* &= R \\ S^* &= S + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan da denklem herhengi bir $I(R)$ fonksiyonu için

$$\frac{dS}{dR} = I(R)$$

haline indirgenir. Bu ifadenin integre edilmesiyle

$$S(u,v) = \int^{R(u,v)} I(R)dR + c_1$$

olup değişkenlerin orijinal haline çevrilmesiyle

$$S(u(x,y), v(x,y,y')) = \int^{R(u(x,y),v(x,y,y'))} I(R)dR + c_1$$

şeklinde çözümü bulunur.

Örnek olarak;

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

ikinci mertebeden homojen olmayan lineer diferensiyel denklemi düşünelim.

$\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ ifadeleri homojen denklemin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. İki parametreli Lie grup dönüşümlerini

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ y^* &= y + \varepsilon_1\phi_1(x) + \varepsilon_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

olarak kabul edelim. Böylece sonsuz küçük üreteç

$$X_1 = \phi_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, X_2 = \phi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

olup $[X_1, X_2] = 0$ dır.

$$X_i^{(1)} = \phi_i(x)\frac{\partial}{\partial y} + \phi_i'(x)\frac{\partial}{\partial y'},\ i = 1,2$$

$X_1 u = 0$ dan

$$\phi_1(x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{0} = \frac{dy}{\phi_1(x)} = \frac{du}{0} \Rightarrow u = x$$

ve $X_1^{(1)} v = 0$ dan

$$\phi_1(x)\frac{\partial v}{\partial y} + \phi_1'(x)\frac{\partial v}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{\phi_1(x)} = \frac{dy'}{\phi_1'(x)} = \frac{dv}{0} \Rightarrow$$

$$v = \frac{y'}{\phi_1'(x)} - \frac{y}{\phi_1(x)}$$

bulunur.

$$X_2 u = X_2 x = \phi_2(x)\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)}v &= \phi_2(x)\frac{\partial v}{\partial y}+\phi_2'(x)\frac{\partial v}{\partial y'} \\
&= \phi_2(x)(-\frac{1}{\phi_1(x)})+\phi_2'(x)(\frac{1}{\phi_1'(x)}) \\
&= \frac{\phi_1(x)\phi_2'(x)-\phi_2(x)\phi_1'(x)}{\phi_1(x)\phi_1'(x)} \\
&= \frac{\phi_1\phi_2'-\phi_2\phi_1'}{\phi_1\phi_1'} \\
&= \frac{W}{\phi_1\phi_1'}
\end{aligned}$$

olup burada $W=\phi_1(x)\phi_2'(x)-\phi_2(x)\phi_1'(x)$ dir ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial v}(-\frac{1}{\phi_1(x)}) \\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\phi_1(x)}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)} &= \phi_2(x)(-\frac{1}{\phi_1(x)})\frac{\partial}{\partial v}+\phi_2'(x)(\frac{1}{\phi_1'(x)})\frac{\partial}{\partial v} \\
&= \frac{\phi_1(x)\phi_2'(x)-\phi_2(x)\phi_1'(x)}{\phi_1(x)\phi_1'(x)}\frac{\partial}{\partial v} \\
&= \frac{W}{\phi_1(x)\phi_1'(x)}\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)}R &= \frac{W}{\phi_1\phi_1'}\frac{\partial R}{\partial v}=0 \\
X_2^{(1)}S &= \frac{W}{\phi_1\phi_1'}\frac{\partial S}{\partial v}=1
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{W}{\phi_1\phi_1'}\frac{\partial R}{\partial v}=0\Rightarrow\frac{du}{0}=\frac{dv}{\frac{W}{\phi_1\phi_1'}}=\frac{dR}{0}\Rightarrow u=c_1,\ R=c_2\Rightarrow R=x$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{W}{\phi_1\phi_1'}\frac{\partial S}{\partial v}=1\Rightarrow\frac{du}{0}=\frac{dv}{\frac{W}{\phi_1\phi_1'}}=\frac{dS}{1}\Rightarrow u=c_3,\ S=\frac{v\phi_1\phi_1'}{W}+c_4\Rightarrow S=\frac{v\phi_1\phi_1'}{W}$$

bulunur.

$$\frac{dS}{dR}=\frac{dS}{dx}=\frac{d(\frac{v\phi_1\phi_1'}{W})}{dx}$$

$$S=\frac{v\phi_1\phi_1'}{W}=\frac{(\frac{y'}{\phi_1'}-\frac{y}{\phi_1})\phi_1\phi_1'}{W}=\frac{y'\phi_1-y\phi_1'}{W} \text{ olup}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} &= \frac{(y''\phi_1+y'\phi_1'-y'\phi_1'-y\phi_1'')W-W'(y'\phi_1-y\phi_1')}{W^2}\\
&= \frac{(y''\phi_1-y\phi_1'')W-W'(y'\phi_1-y\phi_1')}{W^2}\\
&= \frac{(y''\phi_1-y\phi_1'')(\phi_1\phi_2'-\phi_2\phi_1')-(\phi_1\phi_2''-\phi_2\phi_1'')(y'\phi_1-y\phi_1')}{W^2}\\
&= \frac{\phi_1^2\phi_2'y''-\phi_1\phi_1'\phi_2y''-\phi_1\phi_1''\phi_2'y+\phi_1'\phi_1''\phi_2y-\phi_1^2\phi_2''y'+\phi_1\phi_1''\phi_2y'+\phi_1\phi_1'\phi_2''y'-\phi_1'\phi_1''\phi_2y}{W^2}\\
&= \frac{\phi_1((\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2)y''+\phi_1''(\phi_2y'-\phi_2'y)+\phi_2''(\phi_1'y-\phi_1y'))}{W^2}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\phi_1''+p(x)\phi_1'+q(x)\phi_1 &= 0\\
\phi_2''+p(x)\phi_2'+q(x)\phi_2 &= 0
\end{aligned}$$

olup ϕ_1'' ve ϕ_2'' ifadeleri çekilip bir önceki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} &= \frac{\phi_1((\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2)y''+(-p(x)\phi_1'-q(x)\phi_1)(\phi_2y'-\phi_2'y)+(-p(x)\phi_2'-q(x)\phi_2)(\phi_1'y-\phi_1y'))}{W^2}\\
&= \frac{\phi_1(Wy''+p(x)y'(\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2)+q(x)y(\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2))}{W^2}\\
&= \frac{\phi_1(Wy''+p(x)y'W+q(x)yW)}{W^2}\\
&= \frac{\phi_1(y''+p(x)y'+q(x)y)}{W}\\
&= \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(x)}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$S=\frac{y'\phi_1-y\phi_1'}{W}=\int\frac{g\phi_1}{W}dx+c_1$$

$$X_1=\phi_1(x)\frac{\partial}{\partial y} \text{ kanonik koordinatlarda } X_1r=0 \text{ ve } X_1s=1 \text{ olup } r=x \text{ ve } s=\frac{y}{\phi_1(x)} \text{ olur.}$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{y'\phi_1-y\phi_1'}{\phi_1^2}=\frac{WS}{\phi_1^2}=\frac{W}{\phi_1^2}[\int\frac{g\phi_1}{W}dx+c_1]$$

ve $\frac{W}{\phi_1^2}=(\frac{\phi_2}{\phi_1})'$ dir. Böylece

$$\frac{W}{\phi_1^2}\int\frac{g\phi_1}{W}dx=\frac{d}{dx}[\frac{\phi_2}{\phi_1}\int\frac{g\phi_1}{W}dx]-\frac{g\phi_2}{W}$$

olup buradan

$$s=c_1\frac{\phi_2}{\phi_1}+\frac{\phi_2}{\phi_1}\int\frac{g\phi_1}{W}dx-\int\frac{g\phi_2}{W}dx+c_2$$

olur. Buradan orjinal değişkenlerdeki çözüm

$$y = c_1\phi_2 + c_2\phi_1 + \phi_2\int \frac{g\phi_1}{W}dx - \phi_1\int \frac{g\phi_2}{W}dx$$

bulunur. (Bluman and Anco, 2002)

Örnek 2.1

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} z &= \phi_1(x) = e^{2x} \\ z &= \phi_2(x) = e^{x} \end{aligned}$$

olup bu çözümler

$$z'' - 3z' + 2z = 0$$

homojen diferensiyel denklemini sağlarlar. İki parametreli Lie grup dönüşümleri

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ y^* &= y + \varepsilon_1\phi_1(x) + \varepsilon_2\phi_2(x) \\ &= y + \varepsilon_1 e^{2x} + \varepsilon_2 e^{x} \end{aligned}$$

olur. Buradan sonsuz küçük üreteçler

$$X_1 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = e^{x}\frac{\partial}{\partial y}$$

bulunur. $[X_1, X_2] = 0$ dır.

$$X_i^{(1)} = \phi_i(x)\frac{\partial}{\partial y} + \phi_i'(x)\frac{\partial}{\partial y'},\ i = 1, 2, \ldots$$

$X_1 u = 0$ dan

$$e^{2x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{0} = \frac{dy}{e^{2x}} = \frac{du}{0} \Rightarrow u = x$$

ve $X_1^{(1)} v = 0$ dan

$$e^{2x}\frac{\partial v}{\partial y} + 2e^{2x}\frac{\partial v}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{e^{2x}} = \frac{dy'}{2e^{2x}} = \frac{dv}{0} \Rightarrow$$

$$v = \frac{y'}{2e^{2x}} - \frac{y}{e^{2x}}$$

bulunur.

$$X_2 u = X_2 x = e^{x}\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)}v &= \phi_2(x)\frac{\partial v}{\partial y}+\phi_2'(x)\frac{\partial v}{\partial y'} \\
&= e^x(-\frac{1}{e^{2x}})+e^x(\frac{1}{2e^{2x}}) \\
&= \frac{2e^xe^{2x}-e^xe^{2x}}{e^xe^x} \\
&= \frac{-e^{3x}}{e^{2x}} \\
&= -e^x
\end{aligned}$$

olup burada $W=\phi_1(x)\phi_2'(x)-\phi_2(x)\phi_1'(x)=-e^{3x}$ dir ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial v}(-\frac{1}{e^{2x}}) \\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{e^{2x}}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)} &= e^x(-\frac{1}{e^{2x}})\frac{\partial}{\partial v}+e^x(\frac{1}{2e^{2x}})\frac{\partial}{\partial v} \\
&= -e^x\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}$$

dir. Çözüm ise

$$y=c_1\phi_2+c_2\phi_1+\phi_2\int\frac{g\phi_1}{W}dx-\phi_1\int\frac{g\phi_2}{W}dx$$

olup burada ϕ_1, ϕ_2, g, W değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
y &= c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\int\frac{4e^{3x}e^{2x}}{-e^{3x}}dx-e^{2x}\int\frac{4e^{3x}e^x}{-e^{3x}}dx \\
&= c_1e^x+c_2e^{2x}-2e^{3x}+4e^{3x} \\
&= c_1e^x+c_2e^{2x}+2e^{3x}
\end{aligned}$$

bulunur.

2.1.2 n-inci Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Değişmezliği

n-inci mertebeden diferensiyel denklemi $n\geq 3$ için

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

olarak ve iki parametreli Lie grup dönüşümünü X_1, X_2 sonsuz küçük üreteçleri $[X_1,X_2]=\lambda X_1$(λ sabit) ile düşünelim. Önceki bölümde $u(x,y)$ ve $v(x,y,y')$ nin $X_1^{(2)}$ nin değişmezleri olduğunu görmüştük. Bundan sonra $\dot{v} = \dfrac{dv}{du}$ olmak üzere $X_1^{(2)}v = 0$ dır ve (2.2) denklemi

$$\frac{d^{n-1}v}{du^{n-1}} = H(u, v, \frac{dv}{du}, ..., \frac{d^{n-2}v}{du^{n-2}})$$

denklemine indirgenir.

$[X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] = \lambda X_1^{(k)}$, $k = 1, 2, ...$ olduğu için

$$\begin{aligned} X_2 u &= \alpha(u) \\ X_2^{(1)} v &= \beta(u, v) \\ X_2^{(2)} \dot{v} &= \gamma(u, v, \dot{v}) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} &= \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v)\frac{\partial}{\partial v} \\ X_2^{(2)} &= \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v)\frac{\partial}{\partial v} + \gamma(u, v, \dot{v})\frac{\partial}{\partial \dot{v}} \end{aligned}$$

dir. $U(u, v)$ ve $V(u, v, \dot{v})$ ile

$$X_2^{(1)}U = 0,\ X_2^{(2)}V = 0$$

dır. Buradan da

$$X_2^{(3)}\frac{dV}{dU} = 0$$

olur. Sonuç olarak (2.2) denklemi

$$\frac{d^{n-2}V}{dU^{n-2}} = I(U, V, \frac{dV}{dU}, ..., \frac{d^{n-3}V}{dU^{n-3}})$$

haline indirgenir. Eğer $V = \phi(U; c_1, c_2, ..., c_{n-2})$ denklemin genel çözümü ise birinci mertebeden diferensiyel denklem

$$V(u, v, \frac{dv}{du}) = \phi(U(u, v); c_1, c_2, ..., c_{n-2})$$

$X_2^{(1)} = \alpha(u)\dfrac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v)\dfrac{\partial}{\partial v}$ yi sağlar. Böylece bu V çözümü orjinal değişkenlere geçildiğinde

$$v(x, y, y') = \psi(u(x, y); c_1, c_2, ..., c_{n-2})$$

haline dönüşür. Böylece (2.2) denkleminin çözümü bulunur. (Bluman and Anco, 2002)

Örnek 2.2

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0$$

Blasius denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklemin sonsuz küçük üreteçleri

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

olup

$$[X_1, X_2] = X_1$$

dir. $X_1^{(2)}$ nin değişmezleri

$$\begin{aligned}
X_1 u &= 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{0} \Rightarrow u = y \\
X_1^{(1)} v &= 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{0} = \frac{dv}{0} \Rightarrow v = y' \\
\dot{v} &= \frac{dv}{du} = \frac{y''}{y'}
\end{aligned}$$

olur.

$$X_2^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y''}$$

olup

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D(\eta) - y'D(\xi) \\
&= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y (y')^2 \\
&= -2y' \\
\zeta_2 &= D(\zeta_1) - y''D(\xi) \\
&= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'' \\
&= -3y''
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$X_2^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - 2y'\frac{\partial}{\partial y'} - 3y''\frac{\partial}{\partial y''}$$

olur.

$$\begin{aligned}
X_2 u &= X_2 y = x\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial y}{\partial y} = -y = -u \\
X_2^{(1)} v &= X_2^{(1)} y' = x\frac{\partial y'}{\partial x} - y\frac{\partial y'}{\partial y} - 2y'\frac{\partial y'}{\partial y'} = -2y' = -2v \\
X_2^{(2)} v &= X_2^{(2)}(\frac{y''}{y'}) = x\frac{\partial(\frac{y''}{y'})}{\partial x} - y\frac{\partial(\frac{y''}{y'})}{\partial y} - 2y'\frac{\partial(\frac{y''}{y'})}{\partial y'} - 3y''\frac{\partial(\frac{y''}{y'})}{\partial y''} \\
&= -\frac{y''}{y'} = -\dot{v}
\end{aligned}$$

olup genelliği bozmadan

$$X_2^{(2)} = u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v} + \dot{v}\frac{\partial}{\partial \dot{v}}$$

alınır.

$$\begin{aligned} X_2^{(1)}U(u,v) &= 0 \Rightarrow u\frac{\partial U}{\partial u}+2v\frac{\partial U}{\partial v}=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{dv}{2v}=\frac{dU}{0} \Rightarrow U=\frac{v}{u^2} \\ X_2^{(2)}V(u,v,\dot v) &= 0 \Rightarrow u\frac{\partial V}{\partial u}+2v\frac{\partial V}{\partial v}+\dot v\frac{\partial V}{\partial \dot v}=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{dv}{2v}=\frac{d\dot v}{\dot v}=\frac{dV}{0} \Rightarrow V=\frac{\dot v}{u} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dU} &= \frac{D(\frac{y''}{yy'})}{D(\frac{y'}{y^2})} = \frac{-\frac{y''}{y^2y'}y'-\frac{y''}{yy'^2}y''+\frac{1}{yy'}y'''}{-\frac{2y'}{y^3}y'+\frac{1}{y^2}y''} \\ &= \frac{-\frac{y''}{y^2}-\frac{y''^2}{yy'^2}+\frac{y'''}{yy'}}{-\frac{2y'^2}{y^3}+\frac{y''}{y^2}} \\ &= \frac{y^2y'y'''-y^2y''^2-yy'^2y''}{yy'^2y''-2y'^4} \end{aligned}$$

olup buradan

$$[(\frac{dV}{dU})(yy'^2y''-2y'^4)+y^2y''^2+yy'^2y'']\frac{1}{y^2y'}=y'''$$

bulunur. $U=\frac{v}{u^2}=\frac{y'}{y^2}\Rightarrow y'=Uy^2$ ve $V=\frac{\dot v}{u}=\frac{\frac{y''}{y'}}{y}\Rightarrow y''=Vyy'$ olur. Bu ifadeler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y'''+\frac{1}{2}yy'' &= 0 \\ \frac{dV}{dU}(\frac{y'y''}{y}-\frac{2y'^3}{y^2})+\frac{y''^2}{y'}+\frac{y'y''}{y}+\frac{1}{2}yy'' &= 0 \\ \frac{dV}{dU}(\frac{y'^2yV}{y}-\frac{2y'^3}{y^2})+\frac{V^2y^2y'^2}{y'}+\frac{Vyy'^2}{y}+\frac{1}{2}Vy^2y' &= 0 \\ \frac{dV}{dU}(\frac{U^2y^5V}{y}-\frac{2U^3y^6}{y^2})+V^2y^4U+VU^2y^4+\frac{1}{2}Vy^4U &= 0 \\ \frac{dV}{dU}(U^2V-2U^3)+V^2U+VU^2+\frac{1}{2}VU &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{dV}{dU}=\frac{V}{U}\frac{(V+U+\frac{1}{2})}{(2U-V)}$$

nin çözümü

$$\begin{aligned} V &= \phi_1(U,c_1) \\ \frac{\dot v}{u} &= \phi_1(\frac{v}{u^2},c_1) \\ \dot v &= u\phi_1(\frac{v}{u^2},c_1) \end{aligned}$$

bulunur.

$$X_2^{(1)} = u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v}$$

olup

$$X_2^{(1)} r = 0 \Rightarrow u\frac{\partial r}{\partial u} + 2v\frac{\partial r}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dv}{2v} = \frac{dr}{0} \Rightarrow r = \frac{v}{u^2}$$

ve

$$X_2^{(1)} s = 1 \Rightarrow u\frac{\partial s}{\partial u} + 2v\frac{\partial s}{\partial v} = 1 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dv}{2v} = \frac{ds}{1} \Rightarrow s = \ln u$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dr} &= \frac{D(\ln u)}{D(\frac{v}{u^2})} = \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{2v}{u^3} + \frac{1}{u^2}\dot{v}} \\
&= \frac{u^2}{-2v + u\dot{v}} \\
&= \frac{u}{-2\frac{v}{u} + \dot{v}} \\
&= \frac{u}{-2\frac{v}{u} + u\phi_1(\frac{v}{u^2}, c_1)} \\
&= \frac{1}{-2r + \phi_1(r, c_1)}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
ds &= \frac{1}{-2r + \phi_1(r, c_1)} dr \\
s &= \int^r \frac{1}{-2\rho + \phi_1(\rho, c_1)} d\rho + \ln c_2 \\
\ln u &= \int^r \frac{1}{-2\rho + \phi_1(\rho, c_1)} d\rho + \ln c_2 \\
u &= c_2 \exp(\int^r \frac{1}{-2\rho + \phi_1(\rho, c_1)} d\rho) \\
y &= c_2 \exp(\int^r \frac{1}{-2\rho + \phi_1(\rho, c_1)} d\rho)
\end{aligned}$$

bulunur. (Bluman and Anco, 2002)

2.2 Kanonik Değişkenler Metodu

2.2.1 Birinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemler İçin Kanonik Değişkenler Metodu

Lineer veya lineer olmayan birinci mertebeden diferensiyel denklemleri çözmek için kanonik değişkenler metodu uygulanır ve bunun için aşağıdaki adımlar izlenir.

$$y' = f(x,y) \tag{2.3}$$

denklemi ve üreteci de

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olsun.

1.Adım

Verilen üreteç için kanonik değişkenler

$$\begin{aligned} X(t) &= \xi(x,y)\frac{\partial t(x,y)}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial t(x,y)}{\partial y} &= 1 \\ X(u) &= \xi(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

sisteminden bulunur.

2.Adım

(2.3) denklemini tekrar yazıp 1.adımda yapılan işlemlerden sonra yeni bağımlı değişken u ve yeni bağımsız değişken t olup bunları (2.3) denkleminde yerine yazarız. (2.3) denklemi

$$\frac{du}{dt} = g(u)$$

formunu alır. (Bu u ve t değişkenleri kanonik değişkenler olarak adlandırılır.)

3.Adım

$$\frac{du}{dt} = g(u)$$

denklemi çözülür ve $u = \phi(t,c)$ çözüm bulunur. Buradan da $t = t(x,y)$ ve $u = u(x,y)$ ifadeleri çözümde yerlerine yazılarak (2.3) denkleminin çözümü bulunur.

Örnek 2.3

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0 \tag{2.4}$$

Riccati diferensiyel denklemini kanonik değişkenler metodu ile

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

sonsuz küçük üretecini kullanarak çözünüz. (Ibragimov, 1993)

Çözüm. **1.Adım**

$$X(t) = x\frac{\partial t}{\partial x} - y\frac{\partial t}{\partial y} = 1$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dt}{1} = \lambda$$

olup

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1} \Rightarrow t = \ln x + c_1$$

ve

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow xy = c_2$$

bulunur. $c_1 = f_1(c_2)$ olduğundan $t = \ln x + f_1(xy)$ olup

$$t = \ln x$$

seçilebilir ve

$$X(u) = x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{0} = \lambda$$

$$\frac{du}{0} = \lambda \Rightarrow u = c_3$$

ve

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow xy = c_4$$

bulunur. $c_3 = f_2(c_4)$ olduğundan $u = f_2(xy)$ olup

$$u = xy$$

seçilebilir.

2.Adım

$$y = \frac{u}{x}$$

olup

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{u}{x}) \\ &= -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} \\ &= -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{u'}{x^2} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}(u' + u^2 - u - 2) = 0$$

veya

$$u' = -(u^2 + u + 2)$$

diferensiyel denklemine indirgenir. Elde edilen bu diferensiyel denklem u bağımlı, t bağımsız değişken olmak üzere lineer olmayan diferensiyel denklemdir.

3.Adım

$$\frac{du}{dt} = -(u^2 + u + 2)$$

$$\frac{du}{(u^2 + u + 2)} = -dt$$

$\frac{1}{(u^2 + u + 2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+1})$ olup

$$\frac{du}{(u-2)} - \frac{du}{(u+1)} = -3dt$$

$$\ln(\frac{u-2}{u+1}) = -3t + \ln c$$

$$\frac{u-2}{u+1} = ce^{-3t}$$

çözümü elde edilir.

$$u = \frac{2e^{3t} + c}{e^{3t} - c}$$

bulunur.

$$t = \ln x \;\text{ ve }\; u = xy$$

ifadeleri yerine yazılırsa, çözüm

$$xy = \frac{2x^3 + c}{x^3 - c}$$

veya

$$y = \frac{(2x^3 + c)}{x(x^3 - c)}$$

bulunur.

Örnek 2.4

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \tag{2.5}$$

diferensiyel denklemini kanonik değişkenler metodu ile

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

sonsuz küçük üretecini kullanarak çözünüz. (Ibragimov, 1993)

Çözüm. **1.Adım**

$$X(t) = x\frac{\partial t}{\partial x} + y\frac{\partial t}{\partial y} = 1$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{1} = \lambda$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1} \Rightarrow t = \ln x + c_1$$

ve

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = c_2$$

bulunur. $c_1 = f_1(c_2)$ olduğundan $t = \ln x + f_1(\frac{y}{x})$ olup

$$t = \ln x$$

seçilebilir ve

$$X(u) = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0} = \lambda$$

$$\frac{du}{0} = \lambda \Rightarrow u = c_3$$

ve

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = c_4$$

bulunur. $c_3 = f_2(c_4)$ olduğundan $u = f_2(\frac{y}{x})$ olup

$$u = \frac{y}{x}$$

seçilebilir.

2.Adım

$$y = ux$$

olup

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) \\ &= u + x\frac{du}{dx} \\ &= u + x\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= u + u' \end{aligned}$$

olur. Böylece bu ifadeler (2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} = u' + u = u + u^3$$

olup buradan da

$$u' = u^3$$

bulunur.

3.Adım

$$\frac{du}{u^3} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = t + c \Rightarrow$$

$$u = \mp\frac{1}{\sqrt{c-2t}}$$

olup

$$u = \frac{y}{x} \text{ ve } t = \ln x$$

olduğundan

$$\frac{y}{x} = \mp\frac{1}{\sqrt{c-2\ln x}}$$

veya

$$y = \mp\frac{x}{\sqrt{c-\ln x^2}}$$

bulunur.

2.2.2 İkinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemler İçin Kanonik Değişkenler Metodu

İki lineer bağımsız diferensiyel operatör

$$X_1 = \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak verilsin. Bu operatörlerin komütatörlüğü, $[X_1,X_2]$ Lie parantez operatörünün formülü

$$[X_1,X_2] = (X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1))\frac{\partial}{\partial x} + (X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1))\frac{\partial}{\partial y}$$

ile kontrol edilir.

X_1 ve X_2 tarafından gerilen iki boyutlu lineer uzayı L_2 olsun ve c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$X = c_1\, X_1 + c_2 X_2$$

olarak gösterilir. (Ibragimov, 1993)

Tanım 2.3 Eğer $[X_1,X_2] \in L_2$ ise L_2 uzayı iki boyutlu Lie cebiri olarak adlandırılır. (Ibragimov, 1993)

Teorem 2.4

$$X_1 = \xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = \xi_2\frac{\partial}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial}{\partial y}$$

olmak üzere bu operatörlerin skew çarpımı

$$X_1 \vee X_2 = \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2$$

ile tanımlanır.

Herhangi bir iki boyutlu Lie cebiri uygun t ve u kanonik değişkenlerinin seçimiyle aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi 4 tane standart formdan birine dönüştürülebilir.

Tablo 1

Tip	L_2 yapısı	L_2 nin standart formu
1	$[X_1,X_2] = 0 \quad , \quad X_1 \vee X_2 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\; X_2 = \frac{\partial}{\partial u}$
2	$[X_1,X_2] = 0 \quad , \quad X_1 \vee X_2 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u},\; X_2 = t\frac{\partial}{\partial u}$
3	$[X_1,X_2] \neq 0 \quad , \quad X_1 \vee X_2 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u},\; X_2 = t\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial u}$
4	$[X_1,X_2] \neq 0 \quad , \quad X_1 \vee X_2 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u},\; X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}$

Lie bu teoremi iki boyutlu Lie cebirini kabul eden $y'' = f(x,y,y')$ formundaki tüm ikinci mertebeden denklemler için ispatlamıştır. Lie nin metodu bu denklemlerin Tablo 1 e göre 4 tipe göre sınıflandırmasını yapmıştır. L_2 nin Lie cebirinin kabul ettiği t ve u kanonik değişkenleri ile denklemleri Tablo 1 den standart forma indirgenmiştir. Dolayısıyla

$$y'' = f(x, y, y')$$

denklemi kanonik değişkenler cinsinden yazılır ve

$$u'' = g(t, u, u')$$

Tablo 2 de verilen kanonik formlardan birine dönüşür.

Tablo 2

Tip	L_2 nin standart formu	Denklemin kanonik formu
1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = g(u')$
2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $X_2 = t\frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = g(u)$
3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $X_2 = t\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = \frac{1}{t}g(u')$
4	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}$	$u'' = g(t)u'$

Böylece metot aşağıdaki adımlarla takip edilir.

1.Adım

Tablo 1 in ilk sütununa göre L_2 nin tipi belirlenir ve L_2 nin tabanlarının değişimi aşağıdaki tabloya göre yapılır.

Tablo 3

Tip 1	$X_1(t) = 1, X_2(t) = 0$; $X_1(u) = 0, X_2(u) = 1$
Tip 2	$X_1(t) = 0, X_2(t) = 0$; $X_1(u) = 1, X_2(u) = t$
Tip 3	$X_1(t) = 0, X_2(t) = t$; $X_1(u) = 1, X_2(u) = u$
Tip 4	$X_1(t) = 0, X_2(t) = 0$; $X_1(u) = 1, X_2(u) = u$

2.Adım

Verilen diferensiyel denklem t ve u kanonik değişkenleri cinsinden tekrar yazılır. Bu yazım Tablo 2 de verilen formlardan bir tanesidir. Sonrasında ise denklem çözülür.

3.Adım

Elde edilen çözüm x ve y orijinal değişkenleri cinsinden tekrar yazılır.

Örnek 2.5

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} \tag{2.6}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = -x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz. (Ibragimov, 1993)

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}
[X_{1,}X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= (x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y})(-x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}) - (-x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y})(x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= -x^2\frac{\partial}{\partial x} - x^3\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x^2y}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - x^2y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{xy}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{xy^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&\quad +2x^2\frac{\partial}{\partial x} + x^3\frac{\partial^2}{\partial x^2} + xy\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{x^2y}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{xy}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{xy^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \\
&= X_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= x^2(-\frac{y}{2}) - xy(-x) \\
&= \frac{x^2y}{2} \neq 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo 1 den L_2 nin yapısı 3.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t) = 0, X_2(t) = t; \;\; X_1(u) = 1, X_2(u) = u$$

$$X_1(t) = x^2\frac{\partial t}{\partial x} + xy\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_1 \text{ ve } \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} \Rightarrow \frac{y}{x} = c_2 \Rightarrow t = f_1(\frac{y}{x})$$

ve

$$X_2(t) = -x\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial t}{\partial y} = t \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{-x}=\frac{2dy}{-y}=\frac{dt}{t}=\lambda$$

$$\frac{dx}{-x}=\frac{2dy}{-y}\Rightarrow\frac{y^2}{x}=c_3 \text{ ve } \frac{dx}{-x}=\frac{dt}{t}\Rightarrow xt=c_4\Rightarrow t=\frac{1}{x}f_2(\frac{y^2}{x})$$

olur.

$$X_1(u)=x^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=1\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{du}{1}=\lambda$$

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{xy}\Rightarrow\frac{y}{x}=c_5 \text{ ve } \frac{dx}{x^2}=\frac{du}{1}\Rightarrow u=-\frac{1}{x}+c_6$$

ve

$$u+\frac{1}{x}=f_3(\frac{y}{x})\Rightarrow$$

$$u=-\frac{1}{x}+f_3(\frac{y}{x})$$

olup

$$X_2(u)=-x\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{y}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=u\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{-x}=\frac{2dy}{-y}=\frac{du}{u}=\lambda$$

$$\frac{dx}{-x}=\frac{2dy}{-y}\Rightarrow\frac{y^2}{x}=c_7$$

ve

$$\frac{dx}{-x}=\frac{du}{u}\Rightarrow xu=c_8$$

$$u=\frac{1}{x}f_4(\frac{y^2}{x})$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 3.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t=\frac{y^2}{x^2} \text{ ve } u=-\frac{1}{x}$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned}
X_1 &= x^2(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x})+xy(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\
&= x^2(\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{2y^2}{x^3})+\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{x^2})+xy(\frac{\partial}{\partial t}\frac{2y}{x^2}+\frac{\partial}{\partial u}0) \\
&= -\frac{2y^2}{x}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u}+\frac{2y^2}{x}\frac{\partial}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_2 &= -x(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{y}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\
&= -x(\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{2y^2}{x^3})+\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{x^2})-\frac{y}{2}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{2y}{x^2}+\frac{\partial}{\partial u}0) \\
&= \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial t} \\
&= \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u} \\
&= t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$u'=\frac{Du}{Dt}=\frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{2y^2}{x^3}+\frac{2y}{x^2}y'}=\frac{x}{2y(xy'-y)}$$

ve buradan

$$y'=\frac{1}{2yu'}+\frac{y}{x}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
u'' &= \frac{Du'}{Dt}=\frac{-\frac{2y^2}{(2y(xy'-y))^2}+\frac{-2x^2y'+4xy}{(2y(xy'-y))^2}y'+\frac{-2x^2y}{(2y(xy'-y))^2}y''}{-\frac{2y^2}{x^3}+\frac{2y}{x^2}y'} \\
&= \frac{-2y^2-2x^2y'^2+4xyy'-2x^2yy''}{4y^2(xy'-y)^2}\frac{x^3}{-2y^2+2xyy'} \\
&= \frac{-y^2-x^2y'^2+2xyy'-x^2yy''}{4y^3(xy'-y)^3}x^3 \\
&= \frac{-y^2-x^2(\frac{1}{2yu'}+\frac{y}{x})^2+2xy(\frac{1}{2yu'}+\frac{y}{x})-x^2yy''}{4y^3(x(\frac{1}{2yu'}+\frac{y}{x})-y)^3}x^3 \\
&= \frac{-y^2-\frac{x^2}{4y^2u'^2}-\frac{x}{u'}-y^2+\frac{x}{u'}+2y^2-x^2yy''}{\frac{x^3}{2u'^3}}x^3 \\
&= \frac{-\frac{x^2}{4y^2u'^2}-x^2yy''}{\frac{1}{2u'^3}} \\
&= \frac{-x^2-4x^2y^3y''u'^2}{4y^2u'^2}2u'^3 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}u'-2x^2yu'^3y''
\end{aligned}$$

ve buradan

$$y'' = -\frac{1}{4y^3u'^2} - \frac{u''}{2x^2yu'^3}$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{4y^3u'^2} - \frac{u''}{2x^2yu'^3} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2yu'} + \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{xy}$$

ve değişkenler değiştirilirse

$$\begin{aligned}
\frac{u^3}{4t\sqrt{t}u'^2} + \frac{u^3}{2\sqrt{t}u'^3}u'' &= \frac{u^2}{\sqrt{t}} - \frac{u^3}{2t\sqrt{t}u'} - \frac{u^2}{\sqrt{t}} \\
\frac{1}{u'^2}u'' + \frac{1}{2tu'} &= -\frac{1}{t} \\
u'' &= -\frac{1}{t}u'(u' + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt}) \text{ olur.}$$

O halde denklem

$$p' = -\frac{1}{2t}(2p^2 + p)$$

olur.

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{2p^2 + p} &= -\frac{dt}{2t} \\
\frac{dp}{p} - \frac{2dp}{2p+1} &= -\frac{dt}{2t} \\
-2(\ln p - \ln(2p+1)) &= \ln t + \ln c_1^2 \\
\frac{2p+1}{p} &= c_1\sqrt{t} \\
p &= \frac{1}{c_1\sqrt{t} - 2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = p$$

idi. Yani

$$u' = \frac{1}{c_1\sqrt{t} - 2}$$

olup

$$du = \frac{dt}{c_1\sqrt{t} - 2}$$

$$u = \frac{2\sqrt{t}}{c_1} + \frac{4}{c_1^2}\ln(c_1\sqrt{t} - 2) + c_2$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$-\frac{1}{x} = \frac{2y}{c_1 x} + \frac{4}{c_1^2}\ln(c_1\frac{y}{x} - 2) + c_2$$

bulunur.

Örnek 2.6

$$y'' = y(y')^2 - x(y')^3 \tag{2.7}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= (y\frac{\partial}{\partial x})(x\frac{\partial}{\partial x}) - (x\frac{\partial}{\partial x})(y\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= y\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&= y\frac{\partial}{\partial x} \\
&= X_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= y.0 - 0.x \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo 1 den L_2 nin yapısı 4.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t) = 0, X_2(t) = 0; \;\; X_1(u) = 1, X_2(u) = u$$

$$X_1(t) = y\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_1 \text{ ve } \frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_2 \Rightarrow t = f_1(y)$$

ve

$$X_2(t) = x\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_3 \text{ ve } \frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_4 \Rightarrow t = f_2(y)$$

olur.

$$X_1(u) = y\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{1} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_5 \text{ ve } \frac{du}{1} = \frac{dx}{y} \Rightarrow u = \frac{x}{c_5} + c_6 \Rightarrow u = \frac{x}{y} + f_3(y)$$

ve

$$X_2(u) = x\frac{\partial u}{\partial x} = u \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{u} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_7 \text{ ve } \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow u = \frac{x}{c_8} \Rightarrow u = \frac{x}{f_4(y)}$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 4.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t = y \text{ ve } u = \frac{x}{y}$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned}
X_1 &= y\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= y\left(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial u}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \\
X_2 &= x\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= x\left(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial u}\right) \\
&= \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial u} \\
&= u\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = \frac{Du}{Dt} = \frac{\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y'}{y'} = \frac{1}{yy'} - \frac{x}{y^2}$$

olup

$$y' = \frac{y}{x + y^2u'}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{Du'}{Dt} = \frac{-\frac{1}{y^2} + (-\frac{1}{y^2y'} + \frac{2x}{y^3})y' - \frac{1}{yy'^2}y''}{y'} \\ &= -\frac{2}{y^2y'} + \frac{2x}{y^3} - \frac{y''}{yy'^3} \end{aligned}$$

olup

$$y'' = \frac{2xy'^3}{y^2} - \frac{2y'^2}{y} - yy'^3u''$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.7) denkleminde yerine yazılırsa ve

$$t = y \text{ ve } u = \frac{x}{y}$$

olduğu göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned} \frac{2xy'^3}{y^2} - \frac{2y'^2}{y} - yy'^3u'' &= yy'^2 - xy'^3 \\ \frac{2xy'}{y^2} - \frac{2}{y} - yy'u'' &= y - xy' \\ \frac{2x\frac{y}{x+y^2u'}}{y^2} - \frac{2}{y} - y\frac{y}{x+y^2u'}u'' &= y - x\frac{y}{x+y^2u'} \\ \frac{2x}{y(x+y^2u')} - \frac{2}{y} - \frac{y^2}{x+y^2u'}u'' &= y - \frac{xy}{x+y^2u'} \\ \frac{2ut}{t(ut+t^2u')} - \frac{2}{t} - \frac{t^2}{ut+t^2u'}u'' &= t - \frac{ut^2}{ut+t^2u'} \\ \frac{2u - t^2u'' + ut^2}{t(u+tu')} &= \frac{t^2+2}{t} \\ 2u - t^2u'' + ut^2 &= ut^2 + 2u + t^3u' - 2tu' \\ tu'' &= t^2u' - 2u' \\ u'' &= -(t + \frac{2}{t})u' \end{aligned}$$

diferensiyel denklemine indirgenir. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt})$$

olur. O halde denklem

$$p' = -(t + \frac{2}{t})p$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -(t + \frac{2}{t})dt \\ p &= \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}c_1 \end{aligned}$$

olur. $u' = p$ idi. Yani

$$u = c_2 - c_1 \int \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$\frac{x}{y} = c_2 - c_1 \int \frac{1}{y^2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

bulunur.

Örnek 2.7

$$yy'' + (y')^2 + (y')^3 = 0 \tag{2.8}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) - (x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \\
&= X_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= y \neq 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo1 den L_2 nin yapısı 3.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t) = 0, X_2(t) = t; \;\; X_1(u) = 1, X_2(u) = u$$

$$X_1(t) = \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dt}{0}=\lambda$$

$$\frac{dt}{0}=\lambda \Rightarrow t=c_1 \text{ ve } \frac{dy}{0}=\lambda \Rightarrow y=c_2 \Rightarrow t=f_1(y)$$

ve

$$X_2(t)=x\frac{\partial t}{\partial x}+y\frac{\partial t}{\partial y}=t \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t}=\lambda$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=c_3 \text{ ve } \frac{dx}{x}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{t}{x}=c_4 \Rightarrow t=xf_2(\frac{y}{x})$$

olur.

$$X_1(u)=\frac{\partial u}{\partial x}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{du}{1}=\lambda$$

$$\frac{dy}{0}=\lambda \Rightarrow y=c_5 \text{ ve } \frac{dx}{1}=\frac{du}{1} \Rightarrow u=x+c_6 \Rightarrow u=x+f_3(y)$$

ve

$$X_2(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}=\lambda$$

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{du}{u} \Rightarrow u=x+y+c_7 \text{ ve } \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=c_8 \Rightarrow u=x+y+f_4(\frac{y}{x})$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo3 deki 3.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t=y \text{ ve } u=x+y$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \\
X_2 &= x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x})+y(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\
&= x\frac{\partial}{\partial u}+y\frac{\partial}{\partial t}+y\frac{\partial}{\partial u} \\
&= y\frac{\partial}{\partial t}+(x+y)\frac{\partial}{\partial u} \\
&= t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

olur.

$$u' = \frac{Du}{Dt} = \frac{1+y'}{y'} = \frac{1}{y'} + 1$$

ve buradan

$$y' = \frac{1}{u'-1}$$

bulunur.

$$u'' = \frac{Du'}{Dt} = \frac{-\frac{1}{(y')^2}y''}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}$$

ve buradan

$$y'' = (y')^3 u'' = -\frac{u''}{(u'-1)^3}$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$-y\frac{u''}{(u'-1)^3} + \frac{1}{(u'-1)^2} + \frac{1}{(u'-1)^3} = 0$$

ve değişkenler değiştirilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} -tu'' + u' - 1 + 1 &= 0 \\ tu'' &= u' \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt}) \text{ olur.}$$

O halde denklem

$$tp' = p$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{dt}{t} \\ p &= c_1 t \end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = p$$

idi. Yani

$$u' = c_1 t$$

olup

$$u = c_1 \frac{t^2}{2} + c_2$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$x+y=c_1\frac{y^2}{2}+c_2$$

bulunur. ___

Örnek 2.8

$$2yy''-2(y')^2-3yy'=0 \tag{2.9}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } X_2=y\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}[X_1,X_2] &= X_1X_2-X_2X_1\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial}{\partial y})-(y\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial x}\\ &= y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}X_1\vee X_2 &= \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2\\ &= y\neq 0\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo1 den L_2 nin yapısı 1.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t)=1,X_2(t)=0;\;\; X_1(u)=0,X_2(u)=1$$

$$X_1(t)=\frac{\partial t}{\partial x}=1\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dt}{1}\Rightarrow$$

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{1}\Rightarrow t=x+c_1 \text{ ve } \frac{dy}{0}\Rightarrow y=c_2\Rightarrow t=x+f_1(y)$$

ve

$$X_2(t)=y\frac{\partial t}{\partial y}=0\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{0}=\lambda$$

$$\frac{dx}{0}=\lambda\Rightarrow x=c_3 \text{ ve } \frac{dt}{0}=\lambda\Rightarrow t=c_4\Rightarrow t=f_2(x)$$

olur.

$$X_1(u)=\frac{\partial u}{\partial x}=0\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{du}{0}=\lambda$$

$$\frac{dy}{0}=\lambda\Rightarrow y=c_5 \text{ ve } \frac{du}{0}=\lambda\Rightarrow u=c_6\Rightarrow u=f_3(y)$$

ve

$$X_2(u)=y\frac{\partial u}{\partial y}=1\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{1}=\lambda$$

$$\frac{dx}{0}=\lambda\Rightarrow x=c_7 \text{ ve } \frac{du}{1}=\frac{dy}{y}\Rightarrow u=\ln y+c_8\Rightarrow u=\ln y+f_4(x)$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo3 deki 1.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t=x \text{ ve } u=\ln y$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\\
X_2 &= y\frac{\partial}{\partial y}\\
&= y(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y})\\
&= y(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial u})\\
&= \frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

olur.

$$u'=\frac{Du}{Dt}=\frac{\frac{y'}{y}}{1}=\frac{y'}{y}$$

ve buradan

$$y'=yu'$$

bulunur.

$$u'' = \frac{Du'}{Dt} = \frac{-\frac{(y')^2}{y^2} + \frac{y''}{y}}{1} = -\frac{(y')^2}{y^2} + \frac{y''}{y}$$

ve buradan

$$y'' = yu'' + \frac{(y')^2}{y} = yu'' + y(u')^2$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$2y^2u'' + 2y^2(u')^2 - 2y^2(u')^2 - 3y^2u' = 0$$

ve değişkenler değiştirilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$2u'' - 3u' = 0$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt}) \text{ olur.}$$

O halde denklem

$$2p' = 3p$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{3}{2}dt \\ p &= c_1 e^{\frac{3}{2}t} \end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = p$$

idi. Yani

$$u' = c_1 e^{\frac{3}{2}t}$$

olup

$$u = \frac{2}{3}c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$\ln y = \frac{2}{3}c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2$$

bulunur.

Örnek 2.9

$$(1-x^2)y''+2xy'-2y=0 \tag{2.10}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}
[X_1,X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= x\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial}{\partial y}) - y\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= x\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial^2}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= x\frac{\partial}{\partial y} \\
&= X_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo1 den L_2 nin yapısı 4.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t)=0, X_2(t)=0;\;\; X_1(u)=1, X_2(u)=u$$

$$X_1(t) = x\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{x} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_1 \text{ ve } \frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_2 \Rightarrow t = f_1(x)$$

ve

$$X_2(t) = y\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_3 \text{ ve } \frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_4 \Rightarrow t = f_2(x)$$

olur.

$$X_1(u) = x\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{1} = \lambda$$

$$\frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_5 \text{ ve } \frac{dy}{x} = \frac{du}{1} \Rightarrow u = \frac{y}{x} + c_6 \Rightarrow u = \frac{y}{x} + f_3(x)$$

ve

$$X_2(u) = y\frac{\partial u}{\partial y} = u \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} = \lambda$$

$$\frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_7 \text{ ve } \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \Rightarrow u = c_8 y \Rightarrow u = yf_4(x)$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 4.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t = x \text{ ve } u = \frac{y}{x}$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= x\frac{\partial}{\partial y} \\ &= x(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\ &= x(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= y\frac{\partial}{\partial y} \\ &= y(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\ &= \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial u} \\ &= u\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

olur.

$$u' = \frac{Du}{Dt} = \frac{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}y'}{1} = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}y'$$

ve buradan

$$y' = xu' + \frac{y}{x}$$

bulunur.

$$u'' = \frac{Du'}{Dt} = \frac{\frac{2y}{x^3} - \frac{y'}{x^2} - \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{x}y''}{1} = \frac{2y}{x^3} - \frac{y'}{x^2} - \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{x}y''$$

ve buradan

$$y'' = \frac{x^3u'' + 2xy' - 2y}{x^2} = xu'' + 2u'$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (1-x^2)(xu''+2u') + 2x(xu' + \frac{y}{x}) - 2y &= 0 \\ xu'' + 2u' - x^3u'' - 2x^2u' + 2x^2u' + 2y - 2y &= 0 \\ (x-x^3)u'' + 2u' &= 0 \\ (t-t^3)u'' + 2u' &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt}) \text{ olur.}$$

O halde denklem

$$(t-t^3)p' = -2p$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{2dt}{t^3 - t} \\ \frac{dp}{p} &= (-\frac{2}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1})dt \\ \ln p &= -2\ln t + \ln(t-1) + \ln(t+1) + \ln c_1 \\ p &= \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}c_1 \\ p &= (1 - \frac{1}{t^2})c_1 \end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = p$$

idi. Yani

$$u' = (1 - \frac{1}{t^2})c_1$$

olup

$$u = (t + \frac{1}{t})c_1 + c_2$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$\frac{y}{x} = (x + \frac{1}{x})c_1 + c_2$$

bulunur.

Örnek 2.10

$$2x^2yy'' + y^2 - x^2(y')^2 = 0 \tag{2.11}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= x\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial}{\partial y}) - y\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= xy\frac{\partial}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial x\partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= xy \neq 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo 1 den L_2 nin yapısı 1.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t) = 1, X_2(t) = 0; \;\; X_1(u) = 0, X_2(u) = 1$$

$$X_1(t) = x\frac{\partial t}{\partial x} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{1} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_1 \text{ ve } \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1} \Rightarrow t = \ln x + c_2 \Rightarrow t = \ln x + f_1(y)$$

ve

$$X_2(t) = y\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{0}=\lambda$$

$$\frac{dt}{0}=\lambda \Rightarrow t=c_3 \text{ ve } \frac{dx}{0}=\lambda \Rightarrow x=c_4 \Rightarrow t=f_2(x)$$

olur.

$$X_1(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{0}=\frac{du}{0}=\lambda$$

$$\frac{dy}{0}=\lambda \Rightarrow y=c_5 \text{ ve } \frac{du}{0}=\lambda \Rightarrow u=c_6 \Rightarrow u=f_3(y)$$

ve

$$X_2(u)=y\frac{\partial u}{\partial y}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{1}=\lambda$$

$$\frac{dx}{0}=\lambda \Rightarrow x=c_7 \text{ ve } \frac{dy}{y}=\frac{du}{1} \Rightarrow u=\ln y+c_8 \Rightarrow u=\ln y+f_4(x)$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 1.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t=\ln x \text{ ve } u=\ln y$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned}
X_1 &= x\frac{\partial}{\partial x}\\
&= x(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x})\\
&= x(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t})\\
&= \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= y\frac{\partial}{\partial y}\\
&= y(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y})\\
&= y(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial u})\\
&= \frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

olur.

$$u'=\frac{Du}{Dt}=\frac{\frac{1}{y}y'}{\frac{1}{x}}=\frac{x}{y}y'$$

ve buradan

$$y' = \frac{y}{x}u'$$

bulunur.

$$u'' = \frac{Du'}{Dt} = \frac{\frac{y'}{y} - \frac{x}{y^2}(y')^2 + \frac{x}{y}y''}{\frac{1}{x}} = \frac{xy'}{y} - \frac{x^2}{y^2}(y')^2 + \frac{x^2}{y}y''$$

ve buradan

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y}{x^2}u'' - \frac{y'}{x} + \frac{(y')^2}{y} \\ &= \frac{y}{x^2}u'' - \frac{y}{x^2}u' + \frac{y}{x^2}(u')^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2x^2y(\frac{y}{x^2}u'' - \frac{y}{x^2}u' + \frac{y}{x^2}(u')^2) + y^2 - x^2(\frac{y}{x}u')^2 &= 0 \\ 2y^2u'' - 2y^2u' + 2y^2(u')^2 + y^2 - y^2(u')^2 &= 0 \\ 2u'' + (u')^2 - 2u' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt}) \text{ olur.}$$

O halde denklem

$$2p' + p^2 - 2p + 1 = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} -\frac{2dp}{(p-1)^2} &= dt \\ \frac{2}{p-1} &= t + c_1 \\ p - 1 &= \frac{2}{t+c_1} \\ p &= \frac{2}{t+c_1} + 1 \end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = p$$

idi. Yani

$$u' = \frac{2}{t+c_1} + 1$$

olup

$$u = 2\ln(t+c_1) + t + \ln c_2$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} \ln y &= 2\ln(\ln x + c_1) + \ln x + \ln c_2 \\ y &= (\ln x + c_1)^2 x c_2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.11

$$yy'' - (y')^2 - y^2 \ln y = 0 \tag{2.12}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = xy\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned} [X_1,X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\ &= y\frac{\partial}{\partial y}(xy\frac{\partial}{\partial y}) - xy\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial}{\partial y}) \\ &= xy\frac{\partial}{\partial y} + xy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - xy\frac{\partial}{\partial y} - xy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo 1 den L_2 nin yapısı 2.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t) = 0, X_2(t) = 0; \;\; X_1(u) = 1, X_2(u) = t$$

$$X_1(t) = y\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{0} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} \Rightarrow x = c_1 \text{ ve } \frac{dt}{0} \Rightarrow t = c_2 \Rightarrow t = f_1(x)$$

ve

$$X_2(t) = xy\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{xy} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_3 \text{ ve } \frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_4 \Rightarrow t = f_2(x)$$

olur.

$$X_1(u) = y\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{1} = \lambda$$

$$\frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_5 \text{ ve } \frac{dy}{y} = \frac{du}{1} \Rightarrow u = \ln y + c_6 \Rightarrow u = \ln y + f_3(x)$$

ve

$$X_2(u) = xy\frac{\partial u}{\partial y} = t \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{t} = \lambda$$

$$\frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_7 \text{ ve } \frac{dy}{xy} = \frac{du}{t} \Rightarrow$$

$$x = c_7 \text{ ve } t = x$$

olduğundan

$$u = \ln y + f_4(x)$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 2.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t = x \text{ ve } u = \ln y$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= y\frac{\partial}{\partial y} \\ &= y\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= y\left(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= xy\frac{\partial}{\partial y} \\ &= xy(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\ &= xy(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial u}) \\ &= t\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

olur.

$$u' = \frac{Du}{Dt} = \frac{\frac{1}{y}y'}{1} = \frac{1}{y}y'$$

ve buradan

$$y' = yu'$$

bulunur.

$$u'' = \frac{Du'}{Dt} = \frac{-\frac{1}{y^2}(y')^2 + \frac{1}{y}y''}{1} = -\frac{1}{y^2}(y')^2 + \frac{1}{y}y''$$

ve buradan

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(y')^2 + y^2u''}{y} \\ &= yu'' + y(u')^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(yu'' + y(u')^2) - y^2(u')^2 - y^2\ln y &= 0 \\ u'' - \ln y &= 0 \\ u'' - u &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u'' - u = 0$$

olup

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

bulunur. Yani

$$u = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

olur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$\ln y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

bulunur.

Örnek 2.12

$$xyy'' - y'(2xy' + xy) = 0 \tag{2.13}$$

diferensiyel denklemini

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçlerini kullanarak çözünüz.

Çözüm. **1.Adım**

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial}{\partial y}) - (y\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial x} \\
&= y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= y \neq 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece Tablo 1 den L_2 nin yapısı 1.tip olur.

2.Adım

$$X_1(t) = 1, X_2(t) = 0; \;\; X_1(u) = 0, X_2(u) = 1$$

$$X_1(t) = \frac{\partial t}{\partial x} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{1} = \lambda$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} \Rightarrow t = x + c_1 \text{ ve } \frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_2 \Rightarrow t = x + f_1(y)$$

ve

$$X_2(t) = y\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_3 \text{ ve } \frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_4 \Rightarrow t = f_2(x)$$

olur.

$$X_1(u) = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{0} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_5 \text{ ve } \frac{du}{0} = \lambda \Rightarrow u = c_6 \Rightarrow u = f_3(y)$$

ve

$$X_2(u) = y\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{1} = \lambda$$

$$\frac{dx}{0} = \lambda \Rightarrow x = c_7 \text{ ve } \frac{du}{1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow u = \ln y + c_8 \Rightarrow u = \ln y + f_4(x)$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 1.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t = x \text{ ve } u = \ln y$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= y\frac{\partial}{\partial y} \\ &= y(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}) \\ &= y(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial u}) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

olur.

$$u' = \frac{Du}{Dt} = \frac{\frac{y'}{y}}{1} = \frac{y'}{y}$$

ve buradan

$$y' = yu'$$

bulunur.

$$u'' = \frac{Du'}{Dt} = \frac{-\frac{(y')^2}{y^2} + \frac{y''}{y}}{1} = -\frac{(y')^2}{y^2} + \frac{y''}{y}$$

ve buradan

$$y'' = yu'' + \frac{(y')^2}{y} = yu'' + y(u')^2$$

bulunur. Burada bulunan y' ve y'' ifadeleri (2.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} xy(yu'' + y(u')^2) - 2x(yu')^2 - xy(yu') &= 0 \\ xy^2u'' + xy^2(u')^2 - 2xy^2(u')^2 - xy^2u' &= 0 \\ u'' - (u')^2 - u' &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu denklemi çözelim.

$$u' = p \text{ dersek } u'' = p', (p' = \frac{dp}{dt}) \text{ olur.}$$

O halde denklem

$$p' - p^2 - p = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p^2+p} &= dt \\ \ln p - \ln(p+1) &= \ln e^t + \ln c_1 \\ \frac{p}{p+1} &= c_1 e^t \\ p &= \frac{c_1 e^t}{1 - c_1 e^t} \end{aligned}$$

bulunur.

$$u' = p$$

idi. Yani

$$u' = \frac{c_1 e^t}{1 - c_1 e^t}$$

olup

$$u = -\ln(1 - c_1 e^t) + \ln c_2$$

bulunur.

3.Adım

u ve t ifadeleri x ve y cinsinden yazılırsa

$$\ln y = -\ln(1 - c_1 e^x) + \ln c_2$$

veya

$$y = \frac{c_2}{1 - c_1 e^x}$$

bulunur. ____ ____

2.3 İkinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemlerin Grup Sınıflandırması

Adi diferensiyel denklemlerin grup sınıflandırması (x,y) düzlemindeki uygun tüm Lie cebiri operatörlerinin sayısına göre yapılır. Herbir cebirin taban operatörleri uygun değişken değiştirme ile basitleştirilir. Değişken değiştirme ile bağlantılı olan cebirler benzer olarak adlandırılır. Sınıflandırma 2.mertebeden denklemlerin basit formlarına göre olur. Bu durumda kabul edilen en büyük cebirin boyutu sadece 1,2,3 ve 8 olabilir.

1 ve 2 boyutlu kısımlar önceki kısımlarda ele alınmıştı. Şimdi 3 boyutlu cebiri kabul eden 2. mertebeden denklemleri ele alacağız.

L_3 üç boyutlu cebirleri için invaryant denklemlerin yapılandırılması $f(x,y,y')$ bilinmeyen fonksiyonlarına göre belirleyici denklemin çözülebilmesiyle bulunur.

Aşağıda verilen X_1, X_2, X_3 tarafından gerilen bu yapılandırma örneklenebilir.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

ve $y'' = f(x,y,y')$ için belirleyici denklemimiz

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)f$$
$$-[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2].f_{y'} - \xi f_x - \eta f_y = 0$$

idi.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \text{ için } \xi = 1 \text{ ve } \eta = 1 \text{ dir.}$$

Bu ξ ve η değerleri belirleyici denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

halini alır. Bu denklemin çözümü ise

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{df}{0}$$

sisteminden

$$f = x - y$$

veya

$$f = f(x - y, y')$$

bulunur.

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \text{ için } \xi = x \text{ ve } \eta = y \text{ dir.}$$

Bu ξ ve η değerleri belirleyici denklemde yerine yazılırsa

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -f$$

halini alır. $z = x - y$ seçilirse denklem

$$z\frac{\partial f}{\partial z} = -f$$

olup

$$\frac{dz}{z} = \frac{df}{-f}$$

sisteminden

$$f = \frac{c}{z}$$

veya

$$f = \frac{g(y')}{x - y}$$

bulunur.

$$X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} \text{ için } \xi = x^2 \text{ ve } \eta = y^2 \text{ dir.}$$

Bu ξ ve η değerleri belirleyici denklemde yerine yazılırsa ve

$$f = \frac{g(y')}{x - y}$$

olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}
-2y' + 2(y')^2 + (2y - 4x)f - (2y - 2x)y' f_{y'} - x^2 f_x - y^2 f_y &= 0 \\
-2y' + 2(y')^2 + 2(y - x)\frac{g(y')}{x - y} - 2x\frac{g(y')}{x - y} - (2y - 2x)y'\frac{g'(y')}{x - y} & \\
+x^2\frac{g(y')}{(x - y)^2} - y^2\frac{g(y')}{(x - y)^2} &= 0 \\
-2y' + 2(y')^2 - 2g(y') + (x^2 - y^2)\frac{g(y')}{(x - y)^2} - 2x\frac{g(y')}{x - y} + 2y'g'(y') &= 0 \\
2y'\frac{dg}{dy'} - 3g(y') + 2((y')^2 - y') &= 0 \\
\frac{dg}{dy'} - \frac{3}{2y'}g &= 1 - y'
\end{aligned}$$

lineer diferensiyel denklemine dönüşür. O halde

$$\mu = e^{\int -\frac{3}{2y'}dy'}$$

olup μ integral çarpanı

$$\mu = \frac{1}{(y')^{3/2}}$$

olarak bulunur.

$$\frac{1}{(y')^{3/2}}g = \int \frac{1}{(y')^{3/2}}(1-y')dy'$$

olup çözüm ise

$$g = -2(y' + (y')^2 + c(y')^{3/2}),\ c = \text{sabit}$$

şeklindedir. Böylece L_3 cebiri

$$y'' + 2\frac{y' + (y')^2 + c(y')^{3/2}}{x-y} = 0$$

denklemi tarafından içerilir. (Ibragimov, 1993)

2.4 Lineerleştirme

Bir $y'' = f(x,y,y')$ ikinci mertebeden diferensiyel denklem, değişken değiştirme ile lineer hale getirilebilir. Yani

$$t = \varphi(x,y) \quad u = \psi(x,y)$$

değişken değiştirmesi ile denklem

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)\frac{du}{dt} + B(t)u + C(t)$$

lineer denklem haline dönüşür. Bu denklemlerin daha geniş bir sınıfı ise

$$y'' + F_3(x,y)(y')^3 + F_2(x,y)(y')^2 + F_1(x,y)y' + F(x,y) = 0 \tag{2.14}$$

dır.

Teorem 2.5 (2.14) denkleminin lineerleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart bu denklemin katsayılarının aşağıdaki denklemleri sağlamalarıdır. (Ibragimov, 1993)

$$\begin{aligned} 3(F_3)_{xx} - 2(F_2)_{xy} + (F_1)_{yy} &= (3F_1F_3 - F_2^2)_x - 3(FF_3)_y - 3F_3F_y + F_2(F_1)_y \qquad (2.15) \\ 3F_{yy} - 2(F_1)_{xy} + (F_2)_{xx} &= (F_1^2 - 3FF_2)_y + 3(FF_3)_x + 3F(F_3)_x - F_1(F_2)_x \end{aligned}$$

Örnek 2.13

$$y'' = f(y')$$

denklemi lineerleştirilebilir midir?

Çözüm. Yukarıdaki teorem gereğince $f(y')$ fonksiyonu 3. dereceden polinom fonksiyonu olmalıdır. Yani, denklem A_i ,$(i = 0,1,2,3)$ ler sabit katsayılar olmak üzere

$$y'' + A_3(y')^3 + A_2(y')^2 + A_1 y' + A_0 = 0 \tag{2.16}$$

formundadır. (2.16) denklemi (2.15) şartlarını sağlar. O halde

$$y'' = f(y')$$

denklemi lineerleştirilebilirdir.(Ibragimov, 1993)

Örnek 2.14

$$y'' = \frac{1}{x} f(y')$$

denklemi lineerleştirilebilir midir?

Çözüm.

$$y'' + \frac{1}{x}(A_3(y')^3 + A_2(y')^2 + A_1 y' + A_0) = 0$$

olup

$$F_3 = \frac{1}{x}A_3, F_2 = \frac{1}{x}A_2, F_1 = \frac{1}{x}A_1, F = \frac{1}{x}A_0$$

katsayıları vardır. O halde (2.15) sisteminde ilk eşitlikten

$$\begin{aligned}
\frac{6}{x^3}A_3 &= -\frac{2}{x^3}(3A_1A_3 - A_2^2) \Rightarrow \\
6A_3 &= -6A_1A_3 + 2A_2^2 \Rightarrow \\
3A_3(1 + A_1) - A_2^2 &= 0,
\end{aligned}$$

ve 2. eşitlikten de

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^3}A_2 &= -\frac{6}{x^3}A_0A_3 - \frac{3}{x^3}A_0A_3 + \frac{1}{x^3}A_1A_2 \Rightarrow \\
2A_2 &= A_1A_2 - 9A_0A_3 \Rightarrow \\
A_2(2 - A_1) + 9A_0A_3 &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer

$$A_3 = -a \text{ ve } A_2 = -b$$

seçilirse

$$A_1 = -(1+\frac{b^2}{3a}) \text{ ve } A_0 = -(\frac{b}{3a}+\frac{b^3}{27a^2})$$

olarak bulunur. Denklemin lineerleştirilmiş hali ise

$$y'' = \frac{1}{x}[a(y')^3 + b(y')^2 + (1+\frac{b^2}{3a})y' + \frac{b}{3a} + \frac{b^3}{27a^2}]$$

formundadır. Şimdi $a = 1$ ve $b = 0$ kabul edelim. O halde denklem

$$y'' = \frac{1}{x}((y')^3 + y')$$

olur. Bu denklemi kanonik değişkenler metodu ile çözelim. Denklemin sonsuz küçük üreteçleri

$$X_1 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } X_2 = \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

olup

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= (\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x})(\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}) - (\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x})(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= -\frac{y}{x^3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y}{x^3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_1 \vee X_2 &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 \\
&= \frac{1}{x}0 - 0\frac{y}{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Tablo1 den L_2 nin yapısı 2.tip olur. Yani

$$X_1(t) = 0, X_2(t) = 0; \;\; X_1(u) = 1, X_2(u) = t$$

$$X_1(t) = \frac{1}{x}\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{x}} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0} = \lambda \Rightarrow y = c_1 \text{ ve } \frac{dt}{0} = \lambda \Rightarrow t = c_2 \Rightarrow t = f_1(y)$$

olup ve

$$X_2(t) = \frac{y}{x}\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \lambda$$

$$\frac{dy}{0}=\lambda\Rightarrow y=c_3 \text{ ve } \frac{dt}{0}=\lambda\Rightarrow t=c_4\Rightarrow t=f_2(y)$$

olur.

$$X_1(u)=\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=1\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{x}}=\frac{dy}{0}=\frac{du}{1}=\lambda$$

$$\frac{dy}{0}=\lambda\Rightarrow y=c_5 \text{ ve } \frac{du}{1}=\frac{dx}{\frac{1}{x}}\Rightarrow u=\frac{x^2}{2}+c_6\Rightarrow u=\frac{x^2}{2}+f_3(y)$$

ve

$$X_2(u)=\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=t\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\frac{y}{x}}=\frac{dy}{0}=\frac{du}{t}=\lambda$$

$$\frac{dy}{0}=\lambda\Rightarrow y=c_7 \text{ ve } \frac{du}{t}=\frac{dx}{\frac{y}{x}}\Rightarrow u=t\frac{x^2}{2c_7}+c_8\Rightarrow$$

$$t=y \text{ ve } y=c_7$$

olduğundan

$$u=\frac{x^2}{2}+c_8\Rightarrow u=\frac{x^2}{2}+f_4(y)$$

bulunur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde bulunan f_i keyfi fonksiyonları Tablo 3 deki 2.Tip deki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$t=y \text{ ve } u=\frac{x^2}{2}$$

olarak seçilebilir.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{x}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}) \\ &= \frac{1}{x}(x\frac{\partial}{\partial u}) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{y}{x}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}) \\ &= \frac{y}{x}(x\frac{\partial}{\partial u}) \\ &= t\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

bulunur.

$$u'=\frac{Du}{Dt}=\frac{x}{y'}\Rightarrow y'=\frac{x}{u'}$$

ve

$$u''=\frac{Du'}{Dt}=\frac{\frac{1}{y'}-\frac{x}{(y')^2}y''}{y'}=\frac{y'-xy''}{(y')^3}\Rightarrow y''=\frac{y'-(y')^3u''}{x}$$

bulunur.

$$y'' = \frac{1}{x}((y')^3 + y')$$

olarak verilmişti. Şimdi bulduğumuz y' ve y'' ifadelerini denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\frac{y' - (y')^3 u''}{x} &= \frac{1}{x}((y')^3 + y') \Rightarrow \\
y' - (y')^3 u'' &= (y')^3 + y' \Rightarrow \\
u'' + 1 &= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \mp i$$

olup

$$u = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

bulunur. Şimdi orijinal değişkenlerimiz x ve y cinsinden yazarsak

$$\frac{x^2}{2} = c_1 \cos y + c_2 \sin y$$

çözümüne ulaşılır. (Ibragimov, 1993)

Örnek 2.15

$$y'' + F(x,y) = 0$$

denklemi lineerleştirilebilir midir?

Çözüm.

$$y'' + F(x,y) = 0$$

denkleminde

$$F_3 = F_2 = F_1 = 0$$

olup lineerleştirmenin şartlarından

$$F_{yy} = 0$$

bulunur. O halde

$$y'' + F(x,y) = 0$$

denklemi lineerleştirilemezdir. (Ibragimov, 1993)

BÖLÜM 3

OPTİMAL SİSTEMLER

3.1 Değişmez Çözümlerin Optimal Sistemleri

Şimdiye kadar sadece bir parametreli Lie cebiri (L_1) ile verilen değişmez çözümleri ele alındı. Eğer diferensiyel denklem $r > 1$ boyutlu L_r Lie cebirini kabul ediyorsa, L_r nin bir, iki,... boyutlu alt cebirlerine dayanan değişmez çözümler ele alınır. Fakat sonsuz sayıda alt cebirler vardır. Bu problem iki alt cebirin benzer olması durumunda aşılmıştır. Yani, alt gruplar arasında bir dönüşüm ile ilişki kurulabiliyorsa aynı dönüşüm ile bunlara karşı gelen değişmez çözümler arasında da ilişki kurulabilir. Dolayısıyla verilen s boyutlu Lie cebirinin bütün benzer alt cebirlerini sınıflandırmak ve herbir sınıflandırmadan bir temsilci seçmek yeterlidir. Tüm bu sınıflandırmalardaki temsilcilerin kümesine s**-boyutlu optimal sistem** denir.

Bunu açıklamak için bir örnek ele alınırsa

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy}$$

diferensiyel denklemi için üreteçler

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

idi. Bir boyutlu cebirlerle ilgilendiğimiz için L_2 cebirinin

$$X = \sum_{\mu=1}^{2} C_\mu X_\mu$$

keyfi operatörünün G_2 grubu altında neye dönüştüğünü belirleyeceğiz. G_2 grubunun dönüşümlerini, biri X_1 den diğeride X_2 den üretilecek olan iki tane bir parametreli grupların birleşimi olarak elde edilebiliriz. Bundan dolayı; X operatörünün X_1 ve X_2 bir parametreli grup işlemleri altında dönüşümlerine ihtiyaç duyarız.

X_1 operatöründen a_1 bir parametre olmak üzere

$$x^* = e^{a_1X_1}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_1^k}{k!}X_1^k x = x + a_1X_1x + \frac{a_1^2}{2!}X_1^2x + \frac{a_1^3}{3!}X_1^3x + \frac{a_1^4}{4!}X_1^4x...$$

açılımından

$$\begin{aligned}
X_1x &= x^2\frac{\partial x}{\partial x}+xy\frac{\partial x}{\partial y}=x^2\\
X_1^2x &= X_1(X_1x)=x^2\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+xy\frac{\partial(x^2)}{\partial y}=2x^3\\
X_1^3x &= X_1(X_1^2x)=x^2\frac{\partial(2x^3)}{\partial x}+xy\frac{\partial(2x^3)}{\partial y}=6x^4\\
X_1^4x &= X_1(X_1^3x)=x^2\frac{\partial(6x^4)}{\partial x}+xy\frac{\partial(6x^4)}{\partial y}=24x^5\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
x^* &= x+a_1x^2+\frac{a_1^2}{2}2x^3+\frac{a_1^3}{6}6x^4+\frac{a_1^4}{24}24x^5+\ldots\\
&= x(1+a_1x+a_1^2x^2+a_1^3x^3+a_1^4x^4+\ldots)\\
&= \frac{x}{1-a_1x}
\end{aligned}$$

dönüşüm grubu bulunur ve benzer yolla

$$y^*=e^{a_1X_1}y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_1^k}{k!}X_1^ky=y+a_1X_1y+\frac{a_1^2}{2!}X_1^2y+\frac{a_1^3}{3!}X_1^3y+\frac{a_1^4}{4!}X_1^4y\ldots$$

açılımından

$$\begin{aligned}
X_1y &= x^2\frac{\partial y}{\partial x}+xy\frac{\partial y}{\partial y}=xy\\
X_1^2y &= X_1(X_1y)=x^2\frac{\partial(xy)}{\partial x}+xy\frac{\partial(xy)}{\partial y}=2x^2y\\
X_1^3y &= X_1(X_1^2y)=x^2\frac{\partial(2x^2y)}{\partial x}+xy\frac{\partial(2x^2y)}{\partial y}=6x^3y\\
X_1^4y &= X_1(X_1^3y)=x^2\frac{\partial(6x^3y)}{\partial x}+xy\frac{\partial(6x^3y)}{\partial y}=24x^4y\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y^* &= y+a_1xy+\frac{a_1^2}{2}2x^2y+\frac{a_1^3}{6}6x^3y+\frac{a_1^4}{24}24x^4y+\ldots\\
&= y(1+a_1x+a_1^2x^2+a_1^3x^3+a_1^4x^4+\ldots)\\
&= \frac{y}{1-a_1x}
\end{aligned}$$

dönüşüm grubu bulunur.

$$x^*=\frac{x}{1-a_1x}\ \text{ve}\ y^*=\frac{y}{1-a_1x}$$

ifadelerinden

$$x = \frac{x^*}{1+a_1x^*} \text{ ve } y = \frac{y^*}{1+a_1x^*}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
X_1^* &= x^{*2}\frac{\partial}{\partial x^*} + x^*y^*\frac{\partial}{\partial y^*} \\
&= x^{*2}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^*}) + x^*y^*(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y^*}) \\
&= \frac{x^2}{(1-a_1x)^2}(\frac{1}{(1+a_1x^*)^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2}\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{xy}{(1-a_1x)^2}(\frac{1}{1+a_1x^*}\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= \frac{x^2}{(1-a_1x)^2}\frac{1}{(1+a_1x^*)^2}\frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{x^2}{(1-a_1x)^2}\frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} \\
&\quad + \frac{xy}{(1-a_1x)^2}\frac{1}{1+a_1x^*})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{x^2}{(1-a_1x)^2}\frac{1}{(1+\frac{a_1x}{1-a_1x})^2}\frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{x^2}{(1-a_1x)^2}\frac{\frac{a_1y}{1-a_1x}}{(1+\frac{a_1x}{1-a_1x})^2} \\
&\quad + \frac{xy}{(1-a_1x)^2(1+\frac{a_1x}{1-a_1x})})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{x^2}{(1-a_1x)^2}(1-a_1x)^2\frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{x^2}{(1-a_1x)^2}a_1y(1-a_1x) + \frac{xy}{(1-a_1x)})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x^2\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{-a_1yx^2+xy}{1-a_1x})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x^2\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{xy(1-a_1x)}{1-a_1x})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \\
&= X_1
\end{aligned}$$

olarak ve

$$\begin{aligned}
X_2^* &= x^*\frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{y^*}{2}\frac{\partial}{\partial y^*} \\
&= x^*(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^*}) + \frac{y^*}{2}(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y^*}) \\
&= \frac{x}{1-a_1x}(\frac{1}{(1+a_1x^*)^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2}\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{y}{2(1-a_1x)}(\frac{1}{1+a_1x^*}\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= \frac{x}{1-a_1x}\frac{1}{(1+a_1x^*)^2}\frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{x}{1-a_1x}\frac{a_1y^*}{(1+a_1x^*)^2} \\
&\quad + \frac{y}{2(1-a_1x)}\frac{1}{1+a_1x^*})\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{1-a_1x}\frac{1}{(1+\frac{a_1x}{1-a_1x})^2}\frac{\partial}{\partial x}+(-\frac{x}{1-a_1x}\frac{\frac{a_1y}{1-a_1x}}{(1+\frac{a_1x}{1-a_1x})^2} \\
&\quad +\frac{y}{2(1-a_1x)(1+\frac{a_1x}{1-a_1x})})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{x}{1-a_1x}(1-a_1x)^2\frac{\partial}{\partial x}+(-a_1xy+\frac{y}{2})\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x(1-a_1x)\frac{\partial}{\partial x}-a_1xy\frac{\partial}{\partial y}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}-a_1(x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= X_2-a_1X_1
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece

$$X_1^* = X_1 \text{ ve } X_2^* = X_2 - a_1X_1$$

olduğundan

$$X^* = \sum_{\mu=1}^{2} C_\mu X_\mu^*$$

yazılabilir. Bu ifade orjinal tabanda tekrar yazılırsa

$$X^* = \sum_{\mu=1}^{2} C_\mu^* X_\mu$$

olur. Bu iki ifadeden

$$\sum_{\mu=1}^{2} C_\mu X_\mu^* = \sum_{\mu=1}^{2} C_\mu^* X_\mu$$

veya

$$\begin{aligned}
C_1X_1^*+C_2X_2^* &= C_1^*X_1+C_2^*X_2 \\
C_1X_1+C_2(X_2-a_1X_1) &= C_1^*X_1+C_2^*X_2 \\
(C_1-a_1C_2)X_1+C_2X_2 &= C_1^*X_1+C_2^*X_2
\end{aligned}$$

olup katsayılar birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned}
C_1^* &= C_1-a_1C_2 \\
C_2^* &= C_2
\end{aligned}$$

bulunur.

X_2 operatöründen a_2 bir parametre olmak üzere

$$x^* = e^{a_2X_2}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_2^k}{k!}X_2^kx = x+a_2X_2x+\frac{a_2^2}{2!}X_2^2x+\frac{a_2^3}{3!}X_2^3x+\ldots$$

açılımından

$$\begin{aligned}
X_2x &= x\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial x}{\partial y}=x\\
X_2^2x &= X_2(X_2x)=x\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial x}{\partial y}=x\\
X_2^3x &= X_2(X_2^2x)=x\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial x}{\partial y}=x\\
X_2^4x &= X_2(X_2^3x)=x\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial x}{\partial y}=x\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
x^* &= x+a_2x+\frac{a_2^2}{2}x+\frac{a_2^3}{6}x+\frac{a_2^4}{24}x+\ldots\\
&= x(1+a_2+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_2^3}{6}+\frac{a_2^4}{24}+\ldots)\\
&= e^{a_2}x
\end{aligned}$$

dönüşüm grubu bulunur ve benzer yolla

$$y^*=e^{a_2X_2}y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_2^k}{k!}X_2^ky=y+a_2X_2y+\frac{a_2^2}{2!}X_2^2y+\frac{a_2^3}{3!}X_2^3y+\frac{a_2^4}{4!}X_2^4y\ldots$$

açılımından

$$\begin{aligned}
X_2y &= x\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial y}{\partial y}=\frac{y}{2}\\
X_2^2y &= X_2(X_2y)=x\frac{\partial(y/2)}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial(y/2)}{\partial y}=\frac{y}{4}\\
X_2^3y &= X_2(X_2^2y)=x\frac{\partial(y/4)}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial(y/4)}{\partial y}=\frac{y}{8}\\
X_2^4y &= X_2(X_2^3y)=x\frac{\partial(y/8)}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial(y/8)}{\partial y}=\frac{y}{16}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y^* &= y+a_2\frac{y}{2}+\frac{a_2^2}{2}\frac{y}{4}+\frac{a_2^3}{6}\frac{y}{8}+\frac{a_2^4}{24}\frac{y}{16}+\ldots\\
&= y(1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_2^2}{8}+\frac{a_2^3}{48}+\frac{a_2^4}{384}+\ldots)\\
&= e^{\frac{a_2}{2}}y
\end{aligned}$$

dönüşüm grubu bulunur.

$$x^*=e^{a_2}x \text{ ve } y^*=e^{\frac{a_2}{2}}y$$

ifadelerinden

$$x = e^{-a_2} x^* \text{ ve } y = e^{-\frac{a_2}{2}} y^*$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
X_1^* &= x^{*^2} \frac{\partial}{\partial x} + x^* y^* \frac{\partial}{\partial y} \\
&= x^{*^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^*} \right) + x^* y^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y^*} \right) \\
&= e^{2a_2} x^2 \left(e^{-a_2} \frac{\partial}{\partial x} \right) + e^{a_2} x e^{\frac{a_2}{2}} y \left(e^{-\frac{a_2}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= e^{a_2} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= e^{a_2} X_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_2^* &= x^* \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{y^*}{2} \frac{\partial}{\partial y^*} \\
&= x^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^*} \right) + \frac{y^*}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y^*} \right) \\
&= e^{a_2} x \left(e^{-a_2} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{e^{\frac{a_2}{2}} y}{2} \left(e^{-\frac{a_2}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\
&= X_2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$X_1^* = e^{a_2} X_1 \text{ ve } X_2^* = X_2$$

dir.

$$\sum_{\mu=1}^{2} C_\mu X_\mu^* = \sum_{\mu=1}^{2} C_\mu^* X_\mu$$

veya

$$\begin{aligned}
C_1 X_1^* + C_2 X_2^* &= C_1^* X_1 + C_2^* X_2 \\
e^{a_2} C_1 X_1 + C_2 X_2 &= C_1^* X_1 + C_2^* X_2
\end{aligned}$$

olup katsayılar birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned}
C_1^* &= e^{a_2} C_1 \\
C_2^* &= C_2
\end{aligned}$$

bulunur.

1 boyutun optimal sistemini inşa etmek için

$$X = \sum_{\mu=1}^{2} C_\mu X_\mu$$

operatörlerini ayırmalıyız veya koordinat vektörlerini

$$C = (C_1, C_2)$$

şeklinde

$$C_1^* = C_1 - a_1 C_2,\ C_2^* = C_2 \text{ ve } C_1^* = e^{a_2} C_1,\ C_2^* = C_2$$

dönüşümleri yardımıyla benzer sınıflara ayırmalıyız.

Öncelikle $C_1^* = C_1 - a_1 C_2$, $C_2^* = C_2$ ve $C_1^* = e^{a_2} C_1$, $C_2^* = C_2$ dönüşümleriyle birlikte C_2 nin değişmez olduğuna dikkat etmeliyiz. Ayrıca $C_1^* = C_1 - a_1 C_2$, $C_2^* = C_2$ dönüşümündeki C_1 koordinat dönüşümü, $C_2 = 0$ ve $C_2 \neq 0$ durumlarını ayırt etmemizi gerektirir.

$C_2 = 0$ ile verilen bütün $C = (C_1, C_2)$ tipindeki vektörler $(1,0)$ vektörü tarafından içerilir.

$C_2 \neq 0$ ile verilen her vektör $a_1 = C_1/C_2$ ile verilen $C_1^* = C_1 - a_1 C_2$, $C_2^* = C_2$ dönüşümünün eklenmesiyle $(0, C_2)$ formuna dönüştürülebilir. Bu vektörlerde $(0,1)$ vektörü tarafından içerilir.

Buradan her $X = \sum\limits_{\mu=1}^{2} C_\mu X_\mu$ operatörünün X_1 yada X_2 ile benzer olduğunu bulmuş oluruz. Böylece bir boyutun optimal sistemi

$$\{X_1, X_2\}$$

dir.

Değişmez çözümlerin benzer optimal sistemlerini bulmak için yalnızca X_1 ve X_2 için değişmez çözümleri aramalıyız. Bu çözümler ayrıca $x^* = e^{a_2} x$ ve $y^* = e^{\frac{a_2}{2}} y$ in genişlemesi ve denklemdeki $y \to -y$ yansıması kullanılarak basitleştirilebilir. Sonuç olarak

$$y_1 = x\ ,\ y_2 = \sqrt{2x}$$

değişmez çözümün optimal sistemini elde ederiz.

$x^* = \dfrac{x}{1 - a_1 x}$, $y^* = \dfrac{y}{1 - a_1 x}$ ve $x^* = e^{a_2} x$, $y^* = e^{\frac{a_2}{2}} y$ dönüşümlerinin uygulaması ve $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{2x}$ çözümünün yansıması denklemin değişmez çözümünün bütünü olan

$$y = Cx$$

denklemini içerir ve

$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2}$$

elde edilir. (Ibragimov, 1993)

3.2 Sonuç ve Öneriler

Bu tezde bir parametreli Lie grup dönüşümleri ele alınmıştır. Burada kullanılan parametre sürekli bir parametre olması nedeniyle ele alınan dönüşümler sürekli Lie grup dönüşümleridir. Parametrenin özel değerler alması durumunda ise Lie grup dönüşümü kesikli Lie grup dönüşümleridir. Bu çalışmamızda sadece sürekli Lie grup dönüşümleri ele alındı. Bu formdaki Lie grup dönüşümleri kullanılarak lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerin simetrileri bulundu. Bulunan bu simetriler yardımıyla kanonik değişkenlere geçildi. Böylece verilen lineer olmayan denklemler daha basit forma indirgenerek çözümleri bulundu.

Bundan sonraki lisansüstü çalışmalarda bu tezde ele alınmamış lineer olmayan diferensiyel denklemler ve diferensiyel denklem sistemleri incelenebilir. Bu denklemlerin simetrileri elde edilerek kanonik koordinatlar yardımıyla daha basite indirgenip indirgenemediği kontrol edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahmad, A. , 2005, Symmetry Solutions of Some Nonlinear PDE's, King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran 31261 Saudi Arabia

Bilgiç, H. , MT301 Soyut Cebir I Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Bluman, G.W., Anco, S.C. , 2002, Symmetry and Integration Methods for Differential Equations, with 18 Illustrations.

Bluman, G.W., Kumei, S. , 1989, Symmetries and Differential Equations, with 21 Illustrations.

Eskal C. , 2006, Lie Cebiri Otomorfizmaları ve Test Elemenları, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi.

Ibragimov, N.H. , 1993, Crc Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume1 Symmetries Exact Solutions and Conservation Laws.

Özceylan M. , 2007, Bir Parametreli Lie Gruplarının Diferensiyel Denklemlere Uygulanması, Trakya Üniversitesi.

Özer, M.N., Eser, D.,1996, Diferensiyel Denklemler(Teori ve Uygulamaları).

Stephani, H. , 1989, Differential Equations(Their Solution Using Symmetries)

Gilmore, R. , 1974, Lie Group, Lie Algebras, and Some of Their Applications, New York, Wiley.

Gilmore, R. , 2008, Lie Group, Physics and Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, UK.