

**KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN B-SPLİNE
KOLOKEYŞİN METODLARI İLE ÇÖZÜMÜ**

Ahmet BOZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Kasım 2006

**SOLUTION OF KLEIN-GORDON EQUATION
USING B-SPLINE COLLOCATION METHODS**

Ahmet BOZ

Ph.D. THESIS

Department of Mathematics

November 2006

**KLEİN-GORDON DENKLEMİNİN B-SPLİNE KOLOKEYŞİN
METODLARI İLE ÇÖZÜMÜ**

Ahmet BOZ

**Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır**

Danışman: Prof. Dr. İdris DAĞ

Kasım 2006

Ahmet BOZ ' un DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Klein-Gordon denkleminin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümü” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İdris DAĞ

.....

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

.....

Üye : Doç. Dr. Haluk HÜSEYİN

.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa TOMBUL

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14 / 11 / 2006 tarih ve 2006-21 / 2 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, spline fonksiyonların tanım ve özellikleri ile kübik B-spline, kuartik B-spline ve kuintik B-spline interpolasyon fonksiyonları verildi. Ayrıca, Klein-Gordon denklemi başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte tanıtıldı.

İkinci bölümde, zamana göre parçalanmış Klein-Gordon denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metodu ile çözümleri yapıldı. Ayrıca bu denklem, parçalanmadan kübik B-spline kolokeyşin metodu ile üçüncü bölümde çözüldü. Bu metodlar, üçer test problemi ile test edildi. L_2 ve L_∞ hata normları ve Klein-Gordon denkleminin enerji ve momentum değerleri hesaplandı.

Dördüncü bölümde, Klein-Gordon denkleminin sayısal çözümlerini elde edebilmek için kuartik B-spline kolokeyşin metodu ve son bölümde de, yine Klein-Gordon denkleminin sayısal çözümlerini bulabilmek için kuintik B-spline kolokeyşin metodu verildi.

Klein-Gordon denklemini çözmek için kullanılan metodların Fourier kararlılık analizi yapıldı.

Anahtar Kelimeler : Sonlu Elemanlar Metodu, Spline Fonksiyonlar, Kolokeyşin Metodu, Klein-Gordon Denklemi.

SUMMARY

This Ph. D. thesis consist of five chapters. In the first chapter, definition and properties of spline functions are outlined. Cubic B-spline, quartic B-spline and quintic B-spline interpolation functions are given. Klein-Gordon equation is introduced together with initial and boundary conditions.

The cubic B-spline collocation solution of the time splitted Klein-Gordon equation is set up in the second chapter. The equation is also solved numerical by using the cubic B-spline collocation method in the third chapter. Those methods are tested by three test problems. The L_2 and L_∞ error norms and the values of energy and momentum are computed for the Klein-Gordon equation.

In the fourth chapter, a finite element method based on quartic B-spline as trial functions is given to find numerical solutions of the Klein-Gordon equation. The quintic collocation method is designed to have the numerical solution of the Klein-Gordon equation in the last chapter.

Fourier stability analysis is done for methods which are given to solve the Klein-Gordon equation.

Keywords: Finite Element Method, Spline Functions, Collocation Method, Klein-Gordon Equation.

TEŞEKKÜR

Doktora alıőmalarım süresince en yoğun olduğu dönemlerde bile gerek derslerimde ve gerekse tez alıőmalarımda, bana danıőmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danıőmanım **Prof. Dr. İdris DAĞ** 'a sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Akademik alıőmalarım süresince desteğini her zaman yanımda hissettiğim sevgili eőim **Fecriye** 'ye en içten teőekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük destek ve fedakarlıkları olan **aileme** de en içten teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Spline Fonksiyonlar	1
1.2. B-spline Fonksiyonlar.....	3
1.2.1. Kübik B-spline fonksiyonlar	3
1.2.2. Kuartik B-spline fonksiyonlar.....	5
1.2.3. Kuintik B-spline fonksiyonlar	7
1.3. Klein-Gordon (KG) Denklemi.....	9
1.3.1. Test Problemleri	12
2. ZAMANA GÖRE PARÇALANMIŞ KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	15
2.1. Giriş.....	15
2.2. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	15
2.3. Başlangıç Durumu.....	22
2.4. Kararlılık Analizi.....	24
2.5. Test Problemleri.....	27
2.5.1. Birinci test problemi	27
2.5.2. İkinci test problemi	30
2.5.3. Üçüncü test problemi.....	36

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3. KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	43
3.1. Giriş.....	43
3.2. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	43
3.3. Başlangıç Durumu.....	48
3.4. Kararlılık Analizi.....	50
3.5. Test Problemleri.....	51
3.5.1. Birinci test problemi	51
3.5.2. İkinci test problemi	55
3.5.3. Üçüncü test problemi.....	60
4.KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	66
4.1. Giriş.....	66
4.2. Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	66
4.3. Başlangıç Durumu.....	71
4.4. Kararlılık Analizi.....	73
4.5. Test Problemleri.....	76
4.5.1. Birinci test problemi	76
4.5.2. İkinci test problemi	79
4.5.3. Üçüncü test problemi.....	85
5.KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	91
5.1. Giriş.....	91
5.2. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	91
5.3. Başlangıç Durumu.....	97
5.4. Kararlılık Analizi.....	99
5.5. Test Problemleri.....	101
5.5.1. Birinci test problemi	101

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.5.2. İkinci test problemi	103
5.5.3. Üçüncü test problemi.....	109
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	115
KAYNAKLAR DİZİNİ	117
ÖZGEÇMİŞ.....	120

Bölüm 1

Giriş

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak bazı B-spline fonksiyonlar kısaca tanıtılacaktır. Sayısal çözümleri elde edilecek Klein-Gordon (KG) denklemini ve bu denklemin önceden bulunmuş sayısal çözümlerinden kısaca söz edilecektir.

1.1 Spline Fonksiyonlar

Yüksek dereceden polinomlarla interpolasyon sürecinde işlemlerin artışı sonucu gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Yani birçok durumda bölünme noktalarının sayısının artması yakınsamanın artması yerine ıraksaması anlamına gelebilir. Ayrıca istenilen fonksiyon $[a, b]$ aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa, fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmeyebilir. Bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyonlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda art arda gelen iki

veri arasında birinci, ikinci yada üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda, birbirini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır (Davies, 1980).

Genellikle $s(x)$ ile gösterilen spline fonksiyon,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

sonlu parçalamışında her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k -inci dereceden uygun bir polinom olup, tanımlanan her aralıkta $(k-1)$ -inci mertebeden türevlenebilen sürekli bir fonksiyondur.

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir :

- 1) Spline fonksiyonlar, uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- 2) Spline fonksiyonlar, düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- 3) Spline fonksiyonlar, elde yada bilgisayarda yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlar.
- 4) Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de bir spline fonksiyondur.
- 5) Yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması ile doğal matrisler ortaya çıkar ve bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir.
- 6) Alt aralıklara ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde her sürekli fonksiyona k -mci dereceden spline fonksiyonlar ile iyi yaklaşımlar elde edilebilir.
- 7) Spline fonksiyonlar kullanılarak sadece fonksiyona değil aynı zamanda bu fonksiyonun türevlerine de iyi yaklaşımlar yapılabilir.

1.2 B-spline Fonksiyonlar

Bu kısımda, KG denkleminin sayısal çözümlerinde kullanılacak yöntemlerde ağırlık ve yaklaşım fonksiyonu olarak seçeceğimiz B-spline fonksiyonlar verilecektir.

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (1.1)$$

olarak alınacaktır.

1.2.1 Kübik B-spline Fonksiyonlar

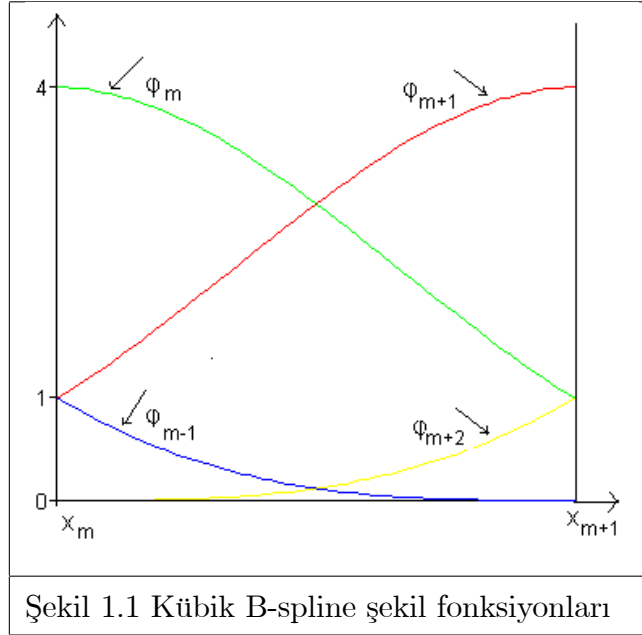
x_m bölünme noktalarında ve ilave $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$ bölünme noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N+1$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m], \\ \frac{1}{h^3} \left\{ \begin{array}{l} h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 \\ (x_{m+2} - x)^3 \end{array} \right. & [x_m, x_{m+1}], \\ & [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0 & \text{D.D.} \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Burden et al., 1985; Prenter, 1975; Alexander et al., 1979)

(D.D.: diğer durumlarda). $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kübik B-spline şekil -

fonksiyonları Şekil 1.1 deki gibidir.



$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için kübik B-spline fonksiyonları bir tabandır.

$$X_N = \{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$$

$[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışındaki kübik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonları ve türevlerinin tamamı sıfırdır. $\phi_m(x)$ ve onun ikinci mertebeye kadar olan $\phi'_m(x), \phi''_m(x)$ türevlerinin Tablo 1.1 ile verilen bölüm noktalarındaki değerleri kolayca elde edilebilir (Prenter,1975).

Tablo 1 .1					
x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
ϕ'_m	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
ϕ''_m	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

U_N yaklaşık çözümü, B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x)$$

U_m yaklaşık çözümünü ve ikinci mertebeye kadar olan türevleri, parametreler cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U''_{m+1} &= U''(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned}$$

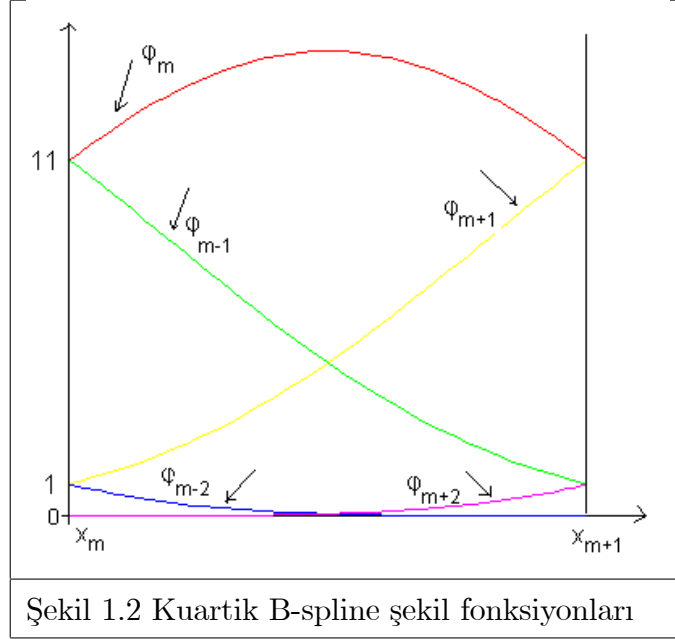
biçiminde yazılabilir.

1.2.2 Kuartik B-spline Fonksiyonlar

x_m bölünme noktalarına ilave olarak $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, x_{N+4}$ noktalarında $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonları, $m = -2, \dots, N+1$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{D. D.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kuartik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.2 deki gibidir.



$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için kuartik B-spline fonksiyonları bir tabandır .

$$X_N = \{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$$

$[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında kuartik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve onun türevlerinin tamamı sıfırdır. $\phi_m(x)$ ve onun $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x)$ türevlerinin bölüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.2 ile verilmiştir (Segerlind, 1976).

Tablo 1 .2						
x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi''_m$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m$	0	24	-72	72	-24	0

U_N yaklaşık çözümü, B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \delta_{-2}(t)\phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \cdots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x)$$

U_m yaklaşık çözümü ve üçüncü mertebeye kadar olan türevleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) &= \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) &= \frac{4}{h}(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U''_m &= U''(x_m) &= \frac{12}{h^2}(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ U'''_m &= U'''(x_m) &= \frac{24}{h^3}(\delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \end{aligned}$$

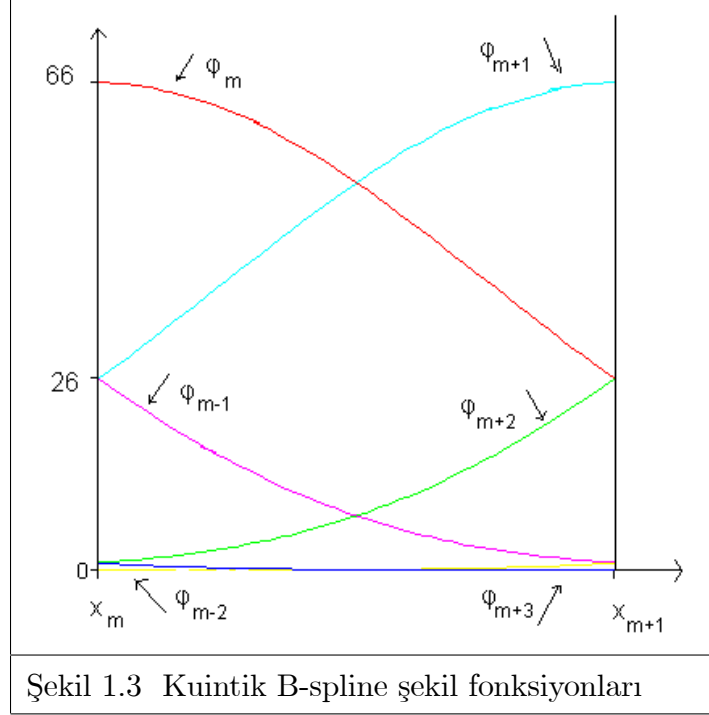
biçiminde yazılabilir.

1.2.3 Kuintik B-spline Fonksiyonlar

x_m bölünme noktaları ve $x_{-5}, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, x_{N+4}, x_{N+5}$ bölünme noktaları yardımıyla $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $m = -2, \dots, N + 2$ olmak üzere

$$\phi_m(x) = \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 & [x_m, x_{m+1}] \\ \frac{1}{h^5} \left\{ \begin{aligned} &(x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + \\ &\quad + 15(x - x_{m+1})^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ &(x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + \\ &\quad + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \end{aligned} \right. \\ 0 & \text{D.D.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kuintik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.3 deki gibidir (Sanz-Serna et al., 1981; Clough, 1960).



$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için kuintik B-spline fonksiyonları bir tabandır (Prenter, 1975).

$$X_N = \{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}\}$$

$[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında kuintik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve onun türevlerinin tamamı sıfırdır. $\phi_m(x)$ ve onun dördüncü mertebeye kadar olan türevlerinin bölüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.3 ile verilmiştir.

Tablo 1.3

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi^{(4)}_m$	0	120	-480	720	-480	120	0

U_N yaklaşık çözümü, B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \delta_{-2}(t)\phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \dots \\ + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) + \delta_{N+2}(t)\phi_{N+2}(x)$$

U_m yaklaşık çözümü ve dördüncü mertebeye kadar olan türevleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \\ U'_m &= U'(x_m) &= \frac{5}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U''_m &= U''(x_m) &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ U'''_m &= U'''(x_m) &= \frac{60}{h^3}(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U''''_m &= U''''(x_m) &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

1.3 Klein-Gordon (KG) Denklemini

Tez boyunca

$$U_{tt} - U_{xx} = f(U) \quad (1.2)$$

formundaki lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışacağız. Bu denklemdeki x ve t indisleri, sırasıyla konuma ve zaman

göre kısmi türevleri göstermektedir. (1.2) ile verilen denklem KG denkleminin genel halidir. Denklemdaki $f(U)$ fonksiyonunun yerine farklı ifadeler alınarak lineer olmayan Klein-Gordon denklemi, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^3 + \gamma U^5 &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^3 &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^n &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^n + \gamma U^{2n-1} &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^{1-n} + \gamma U^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde farklı formlarda yazılabilir (Polyanin et al.,2004; Infeld et al., 2000).

Denklemin sayısal çözümlerinde sınır koşulları olarak

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \alpha_1 \\ U(b, t) &= \alpha_2 \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

ve başlangıç koşulları olarak da

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= f(x), \quad a \leq x \leq b \\ U_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

kullanılacaktır. Burada $f(x)$ daha sonra seçilecektir.

KG denklemi relativistik dalga denklemi olarak bilinir. 1926 da Klein, Fock, Schrödinger ve Broglie nin de aralarında bulunduğu birkaç fizikçi bu denklemi, alışılmış Schrödinger denkleminin genelleştirmesi haline getirmişlerdir. KG denkleminin ilk versiyonları relativistik teoriyle bağlantılıdır (Kragh, 1984).

Wang (Wang et al.,2004) lineer olmayan KG denklemi için multi-symplectic yapı oluşturarak nümerik çözüm elde etmiştir. Khalifa (Khalife et al.,2005) yaptığı çalışmada lineer olmayan KG denkleminin çözümü için varlık ve teklik şartını göstermiştir. Maccari (Maccari, 2003) çalışmasında KG denklemi için lineer olmayan terimi kuadratik ve kübik alarak nümerik çözüm elde etmiştir.

Kaya (Kaya et al.,2004) Adomian decomposition metodunu kullanarak KG denklemi için yaklaşık analitik çözüm elde etmiştir. Jiminez (Jiminez et al.,1990) KG denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için dört sonlu fark yapısı oluşturmuştur. Lynch (Lynch, 1999) ikinci mertebeden sonlu farklar yöntemini kullanarak KG denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuştur. Zaki (Zaki, 1990) KG denkleminin yaklaşık çözümünü, leap-frog yaklaşımıyla bulmuştur.

Biz bu çalışmada, fizikte, phi-four denklemi olarak da bilinen KG denkleminin bir özel halinin sayısal çözümlerini çalışacağız. Bu sayısal çözümleri çalışırken temel olarak sonlu elemanlar yöntemini kullanacağız (Gardner et al., 1991; Gardner et al., 1990). Bu denklemin (Kudryavtsev, 1975; Dodd et al.,1982) soliton çözümü elde edilmiştir. Kudryavtsev ilk nümerik çözümü elde etmiş ve dalga hızını 0.1 olarak kıvrım (kink) ve ters kıvrım (anti-kink) tek dalga hareketlerini çalışmıştır. Kudryavtsev, sınır bölgesinde iki kıvrım oluştuğunu göstermiştir. Böylece enerji yayılımının yavaş yavaş bozulduğunu ifade etmiştir. Daha yüksek çarpışma hızında kıvrım diğerlerini söndürür ve onların enerjilerinin bir kısmı yayılmayla kaybolur. Aubry (Aubry,1976) sınır bölgelerindeki kıvrım-ters kıvrım hareketlerinin oluşumunun gerçek hızlarına bağlı olarak daha karmaşık bir hareket sergilediğini göstermiştir. Ablowitz, Kruskal ve Ladik (Ablowitz et al.,1979), dalga hızları 0.25 den daha küçük olduğunda kıvrım-ters kıvrım çiftlerinin çarpışmasının esnek olmadığını, 0.25 den büyük olduğunda kıvrım-ters kıvrım çiftlerinin etkileşiminin 0.2 nin çok yakını dışında salınım ile sonuçlandığını, bu durumda yine esnek olmayan çarpışma gözlendiğini göstermiştir. Mitchell ve Schoombie (Mitchell et al.,1984) benzer yapılar üzerinde soliton çözümü elde etmek için çalışmışlardır. Dodd ve Eilbeck (Dodd et al.,1982) de dördüncü mertebeden sonlu farklar metodunu kullanarak dalga çarpışmaları üzerinde kap-

samlı bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada da çarpışma hızı 0.193 den küçük olduğunda sınır bölgesinde salımm düzenli, hızı 0.258 den büyük olduğunda esnek olmayan çarpışma olduğunu ve bölge için değişim aralıklarında çift çarpışma içerdiğini ifade etmiştir.

Biz burada KG denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için B-spline sonlu elemanlarını kullanarak kolokeyşin metodunu uygulayacağız.

1.3.1 Test Problemleri

Lineer olmayan KG denkleminin çözümü için verilen nümerik metodun doğruluğu üç problemle test edilmiştir. Test problemi olarak aşağıda verilen analitik çözümler, belirtilen başlangıç ve sınır şartları altında kullanılmıştır.

Birinci test problemi olarak KG denkleminin

$$U(x, t) = \tanh\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x - ct)}{\sqrt{(1 - c^2)}}\right] \quad (1.4)$$

şeklinde verilen analitik çözümü dikkate alınmıştır. Burada c dalga hızını göstermektedir. (1.4) denkleminin zamana göre türevi alınırsa

$$V(x, t) = U_t(x, t) = -\frac{c}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - c^2)}} \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x - ct)}{\sqrt{(1 - c^2)}}\right] \quad (1.5)$$

elde edilir.

Bu test probleminde $[a, b]$ tanım aralığı olmak üzere

$$U(x, 0) = \tanh\left[\frac{x}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right], \quad a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.6)$$

$$U_t(x, 0) = 0$$

başlangıç şartları ve

$$\begin{aligned} U(a, t) &= -1, & U(b, t) &= 1 \\ U_x(a, t) &= 0, & U_x(b, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

sınır şartları kullanılacaktır.

İkinci test probleminde $[a, b]$ tanım aralığı olmak üzere KG denkleminin

$$U(x, t) = \tanh\left[\frac{(x + x_0 - ct)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - \tanh\left[\frac{(x - x_0 + ct)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - 1 \quad (1.8)$$

ile verilen çözümü kullanılacaktır. Bu denklemin zamana göre türevi alınırsa

$$V(x, t) = -\frac{c}{\sqrt{2(1 - c^2)}} \left\{ \operatorname{sech}^2\left[\frac{(x + x_0 - ct)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] + \operatorname{sech}^2\left[\frac{(x - x_0 + ct)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] \right\} \quad (1.9)$$

bulunur. Yapılan çözümlerde x_0 değeri $x_0 = 6$ olarak alınacaktır. Problemin başlangıç şartı, (1.8) denkleminde $t = 0$ alınarak

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= \tanh\left[\frac{(x + x_0)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - \tanh\left[\frac{(x - x_0)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - 1, \quad a \leq x \leq b, t \geq 0 \\ U_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

şeklinde elde edilir. Sınır şartı olarak da

$$\begin{aligned} U(a, t) &= -1, \quad U(b, t) = -1 \\ U_x(a, t) &= 0, \quad U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

sınır şartları kullanılacaktır.

$[a, b]$ problemin tanım aralığı olmak üzere KG denkleminin bir analitik çözümü

$$U(x, t) = \tanh\left[\frac{(x + x_0 - ct)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - \tanh\left[\frac{(x - x_0)}{\sqrt{2}}\right] - 1 \quad (1.12)$$

$$V(x, t) = -\frac{c}{\sqrt{2(1 - c^2)}} \left\{ \operatorname{sech}^2\left[\frac{(x + x_0 - ct)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] \right\} \quad (1.13)$$

şeklindedir. Burada $x_0 = 6$ olarak alınacaktır. Analitik çözümünde $t = 0$ alınarak başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \tanh\left[\frac{(x + x_0)}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - \tanh\left[\frac{(x - x_0)}{\sqrt{2}}\right] - 1 \quad , a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.14)$$

$t = 0$ da zamana göre türev

$$U_t(x, 0) = 0$$

koşulu kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} U(a, t) &= U(b, t) = -1 \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

sınır şartlarıdır.

Bölüm 2

Zamana Göre Parçalanmış Klein-Gordon Denkleminin Kübik B-spline Kolokeyşin Metoduyla Çözümü

2.1 Giriş

Bu bölümde zamana göre parçalanmış Klein-Gordon denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecek, elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılacak ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi verilecektir.

2.2 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda

$$U_{tt} - U_{xx} = U(1 - U^2) \quad (2.1)$$

formunda verilen Klein-Gordon (KG) denkleminin zamana göre parçalanması olan

$$\begin{aligned} V_t - U_{xx} - U(1 - U^2) &= 0, \\ U_t - V &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

denklemin sisteminin nümerik çözümleri elde edilecektir. Verilen denklem konum değişkenine göre ikinci mertebeden türev içerdiğinden nümerik çözümler için kübik B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır. Böylece fonksiyonun ikinci mertebeden türevlerinin sürekliliği sağlanacaktır.

$[a, b]$ aralığının bölünme noktalarını $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olarak seçelim ve $\phi_m(x)$, $m = -1, \dots, N + 1$ fonksiyonları bölünme noktalarında tanımlı kübik B-spline fonksiyonlar olsun. Parçalı KG denklemindeki $U(x, t)$ ve $V(x, t)$ fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin $U_N(x, t)$ ve $V_N(x, t)$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözümler B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) \quad (2.3)$$

$$V_N(x, t) = \sigma_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \sigma_0(t)\phi_0(x) + \dots + \sigma_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) \quad (2.4)$$

ifadelerdeki δ_m ve σ_m , (2.2) denkleminin kübik kolokeyşin formundan ve

$$U(a, t) = \alpha_1, \quad U(b, t) = \alpha_2, \quad t \in (0, T]$$

$$V(a, t) = 0, \quad V(b, t) = 0$$

sınır koşullarından elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık dört aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı dört ardışık B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Böylece U ve V nin yaklaşık çözümleri $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kübik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j,$$

$$V_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \sigma_j \phi_j$$

biçiminde yazılabilir. Burada Tablo 1.1 ile verilen bölünme noktalarındaki fonksiyon değerlerinin de kullanılması ile U_m ve V_m yaklaşık çözümleri eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U_{m+1} &= U(x_{m+1}) = \delta_m + 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \\ V_m &= V(x_m) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1} \\ V_{m+1} &= V(x_{m+1}) = \sigma_m + 4\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir ve bu yaklaşık çözümlerin ikinci dereceye kadarki türevleri ise

$$\begin{aligned} U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U''_{m+1} &= U''(x_{m+1}) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \\ V'_m &= V(x_m) = \frac{3}{h}(\sigma_{m+1} - \sigma_{m-1}) \\ V''_{m+1} &= V''(x_{m+1}) = \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak bulunabilir.

U_m ve V_m in bölüm noktalarındaki (2.5) değerleri ile (2.6) türevleri (2.2) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa, $2N + 2$ tane birinci mertebeden diferensiyel denklemden oluşan

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\sigma}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\sigma}_m + \overset{\circ}{\sigma}_{m+1}) - \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) - \\ z_m(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}) &= 0, \\ (\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 4\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1}) - (\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}) &= 0, \\ m &= 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$z_m = 1 - (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^2$$

denklem sistemi elde edilir. Burada "o" zamana bağlı türevdir. (2.7) denklemindeki δ_m ve σ_m eleman parametrelerinin iki ardışık zaman adımı n ve $n + 1$ arasında Crank-Nicholson formülünü yardımıyla

$$\begin{aligned}\delta_m &= \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n), \\ \sigma_m &= \frac{1}{2}(\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n)\end{aligned}\quad (2.7)$$

ve bunların zamana göre türevleri sonlu farklar yaklaşımıyla

$$\begin{aligned}\delta_m^\circ &= \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \\ \sigma_m^\circ &= \frac{1}{\Delta t}(\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n)\end{aligned}\quad (2.8)$$

diskretize edilirse

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n + 4\sigma_m^{n+1} - 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n) - \\ &\frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n - 2\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) - \\ &\frac{z_m}{2}(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^{n+1} + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) = 0,\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^{n+1} - 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) - \\ &\frac{1}{2}(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n + 4\sigma_m^{n+1} + 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) = 0\end{aligned}$$

elde edilebilir. Bu sistemin düzenlenmesiyle $2N + 2$ denklem ve $2N + 6$ bilinmeyenden oluşan

$$\begin{aligned}&-(6 + h^2 z_m)\Delta t \delta_{m-1}^{n+1} + 2h^2 \sigma_{m-1}^{n+1} + (12 - 4h^2 z_m)\Delta t \delta_m^{n+1} + 8h^2 \sigma_m^{n+1} \\ &-(6 + h^2 z_m)\Delta t \delta_{m+1}^{n+1} + 2h^2 \sigma_{m+1}^{n+1} \\ &= (6 + h^2 z_m)\Delta t \delta_{m-1}^n + 2h^2 \sigma_{m-1}^n - (12 - 4h^2 z_m)\Delta t \delta_m^n + 8h^2 \sigma_m^n \\ &+(6 + h^2 z_m)\Delta t \delta_{m+1}^n + 2h^2 \sigma_{m+1}^n,\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}&2\delta_{m-1}^{n+1} - \Delta t \sigma_{m-1}^{n+1} + 8\delta_m^{n+1} - 4\Delta t \sigma_m^{n+1} + 2\delta_{m+1}^{n+1} - \Delta t \sigma_{m+1}^{n+1} \\ &= 2\delta_{m-1}^n + \Delta t \sigma_{m-1}^n + 8\delta_m^n + 4\Delta t \sigma_m^n + 2\delta_{m+1}^n + \Delta t \sigma_{m+1}^n\end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi bulunur. (2.10) denklem sisteminin içerdiği z_m ifadesindeki δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} parametreleri yerine δ_{m-1}^n , δ_m^n , δ_{m+1}^n alınır. Böylece

(2.10) denklem sistemi lineerleştirilir. Bu denklem sisteminin çözülebilir olması için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden sistemde yer alan dört tane bilinmeyen yok edilmelidir. Buradan δ_{-1}^{n+1} , σ_{-1}^{n+1} , δ_{N+1}^{n+1} ve σ_{N+1}^{n+1} parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece $(2N + 2) \times (2N + 2)$ boyutlu 7 bantlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} U_{xx}(a, t) &= 0, & V(a, t) &= \alpha_1, & , & t \in (0, T] \\ U_{xx}(b, t) &= 0 & V(b, t) &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta_{-1}^n - 2\delta_0^n + \delta_1^n &= 0 \\ \sigma_{-1}^n + 4\sigma_0^n + \sigma_1^n &= \alpha_1 \\ \delta_{N-1}^n - 2\delta_N^n + \delta_{N+1}^n &= 0 \\ \sigma_{N-1}^n + 4\sigma_N^n + \sigma_{N+1}^n &= \alpha_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} F_1 &= (6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_{-1}^n + 2h^2 \sigma_{-1}^n - (12 - 4h^2 z_m) \Delta t \delta_0^n + 8h^2 \sigma_0^n \\ &+ (6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_1^n + 2h^2 \sigma_1^n \\ F_2 &= 2\delta_{-1}^n + \Delta t \sigma_{-1}^n + 8\delta_0^n + 4\Delta t \sigma_0^n + 2\delta_1^n + \Delta t \sigma_1^n \\ F_{2N+1} &= (6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_{N-1}^n + 2h^2 \sigma_{N-1}^n - (12 - 4h^2 z_m) \Delta t \delta_N^n \\ &+ 8h^2 \sigma_N^n + (6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_{N+1}^n + 2h^2 \sigma_{N+1}^n \\ F_{2N+2} &= 2\delta_{N-1}^n + \Delta t \sigma_{N-1}^n + 8\delta_N^n + 4\Delta t \sigma_N^n + 2\delta_{N+1}^n + \Delta t \sigma_{N+1}^n \end{aligned} \tag{2.12}$$

olmak üzere (2.10) denklem sisteminde $m = 0$ alındığında

$$\begin{aligned} -(6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_{-1}^{n+1} + 2h^2 \sigma_{-1}^{n+1} + (12 - 4h^2 z_m) \Delta t \delta_0^{n+1} + \\ 8h^2 \sigma_0^{n+1} - (6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_1^{n+1} + 2h^2 \sigma_1^{n+1} = F_1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$2\delta_{-1}^{n+1} - \Delta t \sigma_{-1}^{n+1} + 8\delta_0^{n+1} - 4\Delta t \sigma_0^{n+1} + 2\delta_1^{n+1} - \Delta t \sigma_1^{n+1} = F_2$$

$m = N$ alındığında

$$\begin{aligned} & -(6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_{N-1}^{n+1} + 2h^2 \sigma_{N-1}^{n+1} + (12 - 4h^2 z_m) \Delta t \delta_N^{n+1} + \\ & 8h^2 \sigma_N^{n+1} - (6 + h^2 z_m) \Delta t \delta_{N+1}^{n+1} + 2h^2 \sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$2\delta_{N-1}^{n+1} - \Delta t \sigma_{N-1}^{n+1} + 8\delta_N^{n+1} - 4\Delta t \sigma_N^{n+1} + 2\delta_{N+1}^{n+1} - \Delta t \sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+2}$$

yazılır. (2.11) sınır parametre değerleri (2.13) ve (2.14) denklemlerinde yerlerine yazılıp denklemler düzenlenirse ilk iki denklem

$$\begin{aligned} (2\beta_{m1} + \beta_{m2}) \delta_0^{n+1} + 0\sigma_0^{n+1} + 0\delta_1^{n+1} + 0\sigma_1^{n+1} &= F_1 - 2h^2 \alpha_1, \\ 12\delta_0^{n+1} + 0\sigma_0^{n+1} + 0\delta_1^{n+1} + 0\sigma_1^{n+1} &= F_2 + \Delta t \alpha_1 \end{aligned}$$

ve son iki denklem

$$\begin{aligned} 0\delta_{N-1}^{n+1} + 0\sigma_{N-1}^{n+1} + (2\beta_{m1} + \beta_{m2}) \delta_N^{n+1} + 0\sigma_N^{n+1} &= F_{2N+1} - 2h^2 \alpha_2, \\ 0\delta_{N-1}^{n+1} + 0\sigma_{N-1}^{n+1} + 12\delta_N^{n+1} + 0\sigma_N^{n+1} &= F_{2N+2} + \Delta t \alpha_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \beta_{m1} &= -(6 + z_m h^2) \Delta t, \\ \beta_{m2} &= (12 - 4z_m h^2) \Delta t \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$d^{n+1} = [\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}]^T$$

olarak tanımlanırsa, cebirsel denklem sistemi matris formunda

$$Ad^{n+1} = Bd^n + S \quad (2.15)$$

yazılabilir. Sırasıyla

$$A = \begin{bmatrix} (2\beta_{m1} + \beta_{m2}) & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ \beta_{m1} & 2h^2 & \beta_{m2} & 8h^2 & \beta_{m1} & 2h^2 & & & & & \\ 2 & -\Delta t & 8 & -4\Delta t & 2 & -\Delta t & & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\ & & 0 & \beta_{m1} & 2h^2 & \beta_{m2} & 8h^2 & \beta_{m1} & 2h^2 & & \\ & & & 2 & -\Delta t & 8 & -4\Delta t & 2 & -\Delta t & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & (2\beta_{m1} + \beta_{m2}) & 0 & \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\beta_{m1} & 2h^2 & -\beta_{m2} & 8h^2 & -\beta_{m1} & 2h^2 & & & & & \\ 2 & \Delta t & 8 & 4\Delta t & 2 & \Delta t & 0 & & & & \\ & 0 & -\beta_{m1} & 2h^2 & -\beta_{m2} & 8h^2 & -\beta_{m1} & 2h^2 & & & \\ & & 2 & \Delta t & 8 & 4\Delta t & 2 & \Delta t & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & -\beta_{m1} & 2h^2 & -\beta_{m2} & 8h^2 & -\beta_{m1} & 2h^2 \\ & & & & & & 2 & \Delta t & 8 & 4\Delta t & 2 & \Delta t \end{bmatrix}$$

ve

$$S = \begin{bmatrix} -2h^2\alpha_2 \\ \Delta t\alpha_1 \\ \vdots \\ -2h^2\alpha_2 \\ \Delta t\alpha_1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. δ_{-1}^n , σ_{-1}^n , δ_{N+1}^n ve σ_{N+1}^n parametreleri her zaman adımında (2.11) denklemlerinden hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}\delta^0 &= [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T, \\ b &= [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_N)]^T, \\ \sigma^0 &= [\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_N^0]^T, \\ c &= [U_t(x_0), U_t(x_1), \dots, U_t(x_N)]^T\end{aligned}$$

olmak üzere, her iki eleman parametreleri için matris formunda

$$\begin{aligned}A \delta^0 &= b \\ A \sigma^0 &= c\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla her iki eleman parametreleri için de ayrı ayrı $(N+1) \times (N+1)$ tipinde köşegenel denklem sistemi bulunmuş olur. Bu sistemlerin çözümü Thomas algoritması ile bulunabilir.

(2.10) sisteminin lineerleştirilmesinden dolayı çözümler, aşağıdaki iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileştirilebilir:

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \quad (2.20)$$

(2.15) sistemi kullanılarak, Thomas algoritması yardımıyla, δ^{n+1} ve σ^{n+1} yaklaşımları bulunur. Yeni zaman adımına geçmeden önce δ^{n+1} ve σ^{n+1} değerlerini iyileştirmek için bu değerlere (2.20) ile verilen iterasyon iki yada üç defa uygulanır. Böylece δ^{n+1} ve σ^{n+1} yaklaşımlarının yeni değerleri elde edilmiş olur.

2.4 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığının araştırılması, Fourier kararlılık analizine dayanır.

Bu teoriye göre, çözümü

$$\begin{aligned}\delta_m^n &= A q^n e^{im\theta} \\ \sigma_m^n &= B q^n e^{im\theta}\end{aligned} \quad (2.21)$$

formunda araştıracağız (Shaskov, 1996). Burada i , birim imajiner sayı, q tanımlanması gereken kompleks sayı ve θ keyfi reel sayıdır. A ve B ise harmoniklerin genlikleridir.

(2.23) eşitlikleri (2.11) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \beta_{m_1} A q^{n+1} e^{i\theta(m-1)} + 2h^2 B q^{n+1} e^{i\theta(m-1)} + \beta_{m_2} A q^{n+1} e^{i\theta m} + 8h^2 B q^{n+1} e^{i\theta m} \\ & + \beta_{m_1} A q^{n+1} e^{i\theta(m+1)} + 2h^2 B q^{n+1} e^{i\theta(m+1)} \\ & = -\beta_{m_1} A q^n e^{i\theta(m-1)} + 2h^2 B q^n e^{i\theta(m-1)} - \beta_{m_2} A q^n e^{i\theta m} + 8h^2 B q^n e^{i\theta m} \\ & - \beta_{m_1} A q^n e^{i\theta(m+1)} + 2h^2 B q^n e^{i\theta(m+1)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & 2A q^{n+1} e^{i\theta(m-1)} - \Delta t B q^{n+1} e^{i\theta(m-1)} + 8A q^{n+1} e^{i\theta m} - 4\Delta t B q^{n+1} e^{i\theta m} \\ & + 2A q^{n+1} e^{i\theta(m+1)} - \Delta t B q^{n+1} e^{i\theta(m+1)} \\ & = 2A q^n e^{i\theta(m-1)} + \Delta t B q^n e^{i\theta(m-1)} + 8A q^n e^{i\theta m} + 4\Delta t B q^n e^{i\theta m} \\ & + 2A q^n e^{i\theta(m+1)} + \Delta t B q^n e^{i\theta(m+1)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. Bu sistem $q^n e^{i\theta m}$ ortak çarpanı ile bölünüp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & (\beta_{m_1} q e^{-i\theta} + \beta_{m_2} q + \beta_{m_1} q e^{i\theta} + \beta_{m_1} e^{-i\theta} + \beta_{m_2} + \beta_{m_1} e^{i\theta}) A + \\ & (2h^2 q e^{-i\theta} + 8h^2 q + 2h^2 q e^{i\theta} - 2h^2 e^{-i\theta} - 8h^2 - 2h^2 e^{i\theta}) B = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & (2q e^{-i\theta} + 8q + 2q e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} - 8 - 2e^{i\theta}) A + \\ & (-\Delta t q e^{-i\theta} - 4\Delta t q - \Delta t q e^{i\theta} - \Delta t e^{-i\theta} - 4\Delta t - \Delta t e^{i\theta}) B = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ eşitliği kullanılarak bu sistem

$$\begin{aligned} aA + bB &= 0 \\ cA + dB &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

formunda yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} a &= 2\beta_{m1}q \cos \theta + 2\beta_{m1} \cos \theta + \beta_{m2}q + \beta_{m2} \\ b &= 4h^2q \cos \theta - 4h^2 \cos \theta + 8h^2q - 8h^2 \\ c &= 4q \cos \theta - 4 \cos \theta + 8q - 8 \\ d &= -2\Delta tq \cos \theta - 2\Delta t \cos \theta - 4\Delta tq - 4\Delta t \end{aligned}$$

şeklindedir. (2.26) denklem sisteminin A ve B ye göre aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Bu şart q için aşağıdaki denklemi verir :

$$Xq^2 + Yq + Z = 0 \quad (2.25)$$

Burada

$$\begin{aligned} X &= (2\beta_{m1} \cos \theta + \beta_{m2})(-2\Delta t \cos \theta - 4\Delta t) - (4h^2 \cos \theta + 8h^2)(4 \cos \theta + 8) \\ Y &= 2(2\beta_{m1} \cos \theta + \beta_{m2})(-2\Delta t \cos \theta - 4\Delta t) - (-4h^2 \cos \theta - 8h^2)(4 \cos \theta + 8) - \\ &\quad (4h^2 \cos \theta + 8h^2)(-4 \cos \theta - 8) \\ Z &= (2\beta_{m1} \cos \theta + \beta_{m2})(-2\Delta t \cos \theta - 4\Delta t) - (4h^2 \cos \theta + 8h^2)(4 \cos \theta + 8) \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklindedir. Kararlılığın sağlanabilmesi için ya $|q| \leq 1$ yada q kompleks olmalıdır (Zaki et al.,1997).

q nun kompleks olması durumunda (2.27) denklemi için $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre $Y^2 - 4XZ < 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} Y^2 - 4XZ &= 1024\Delta t^2 h^2 (\cos \theta + 2)^3 (6 \cos \theta + z_m h^2 \cos \theta + 2z_m h^2 - 6) < 0 \\ &\quad z_m h^2 (\cos \theta + 2) + 6(\cos \theta - 1) < 0 \end{aligned}$$

$-2 < \cos \theta - 1 < 0$ ve $1 < \cos \theta + 2 < 3$ olduğundan $\cos \theta + 2 = 1$ ve $\cos \theta - 1 = -2$ alındığında eşitsizlik değişmeyeceğinden

$$z_m h^2 - 12 < 0$$

$$h^2 < \frac{12}{z_m}$$

olur. Bu şarta göre kararlılık sağlandığından denklem koşullu kararlıdır.

2.5 Test Problemleri

Klein-Gordon denkleminin çözümlerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan enerji

$$E = \frac{1}{2} \int_a^b [V^2 - U_x^2 - U^2 + \frac{1}{2}U^4] dx \quad (2.27)$$

ve momentumun

$$P = \frac{1}{2} \int_a^b V U_x dx \quad (2.28)$$

korunması gereklidir. Çalışmalarımızda bu değerlerin korunduğunu göstereceğiz. Sayısal çözümlerle analitik çözümleri karşılaştırırken L_2 ve L_∞ hata normlarını kullanacağız.

L_2 ortalama hata normu

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (U_N)_j|^2} \quad (2.29)$$

ve L_∞ maksimum hata normu

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j| \quad (2.30)$$

şeklindedir.

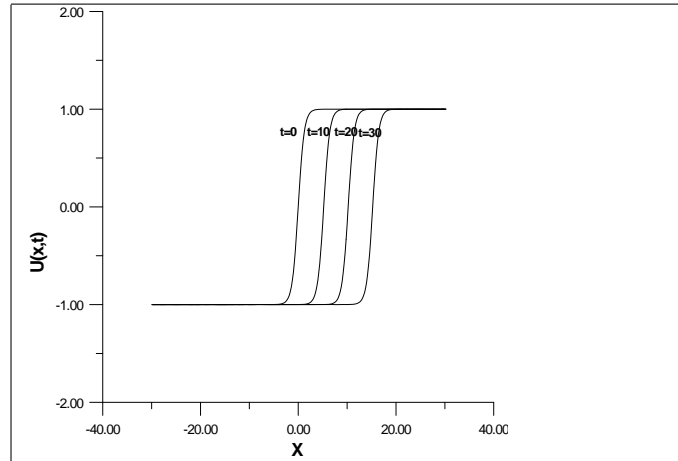
2.5.1 Birinci Test Problemi

Birinci test probleminde, tek dalga hareketi oluşmaktadır. Tek dakga hareketi farklı zamanlarda aynı salınımı yaparak ilerlemektedir. Hareketli

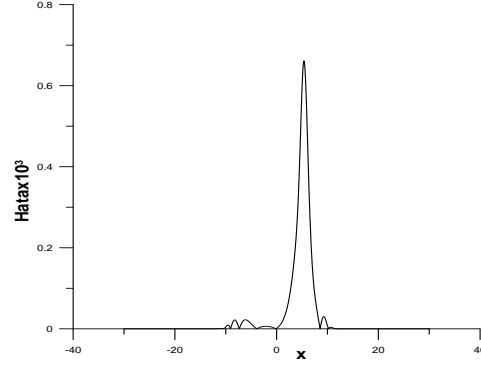
dalga çözümünde U analitik çözümü ve onun zamana göre türevi (1.4) ve (1.5) formundadır. KG denkleminin analitik çözümünde c , $|c| < 1$ olacak şekilde tanımlanan dalga hızıdır. c nin farklı değerleri için bu tek dalga salınıminin başlangıç koşulları (1.4) ve (1.5) denklemlerinde $t = 0$ alınarak elde edilir.

Hesaplama $c = 0.5$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde $t = 10$ zamana kadar yapıldı. $t = 10$ zamanında farklı h ve Δt değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 2.1 de verilmiştir.

Tablo 2 .1 : $c = 0.5, t = 10, -30 \leq x \leq 30$					
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	P	E
0.2	0.05	14.291066619	11.015555382	-0.272163105	13.961333652
0.1	0.02	3.637415657	2.827508688	-0.272165375	13.936337806
0.05	0.01	0.848178966	0.661198080	-0.272165519	13.923838094
0.02	0.005	0.055507116	0.046607804	-0.272165527	13.916337556

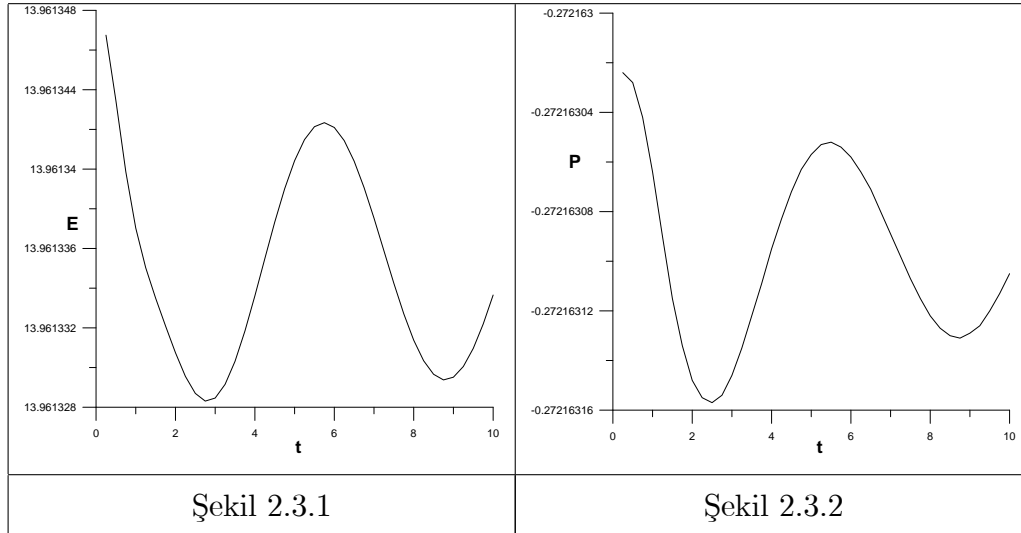


Şekil 2.1 Farklı zamanlardaki tek dalga çözümü



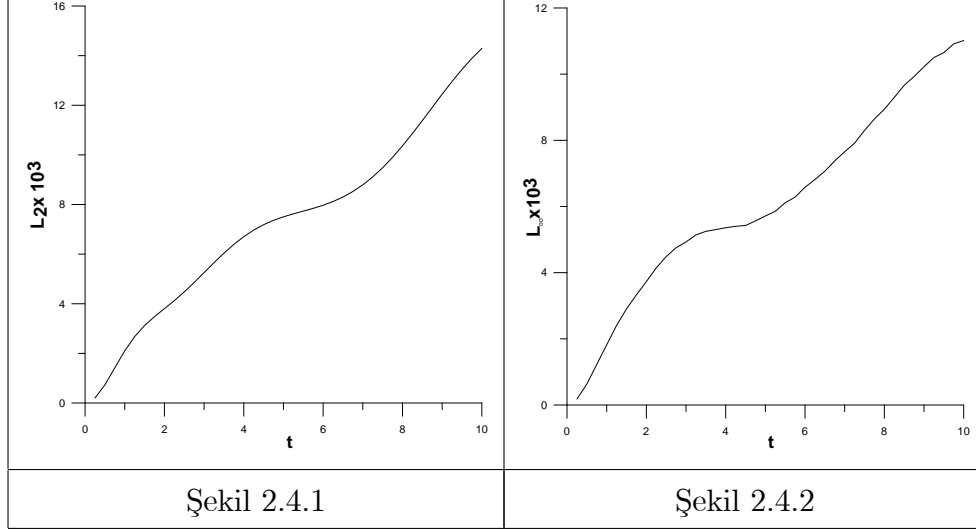
Şekil 2.2 $|\text{Analitik-nümerik}| \times 10^3, t = 10$
 $c = 0.5, \Delta t = 0.01, h = 0.05$

Şekil 2.2 de $t = 10$ zamanında $-30 \leq x \leq 30$ aralığında analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki fark çizilmiştir. Buradan anlaşılmaktadır ki $t = 10$ zamanında maksimum hata binde 0.7 oramdadır.



Şekil 2.3.1 de enerji değerleri 13.96132 ile 13.96134 arasında değişmiştir. Buna göre enerji değeri 2×10^{-5} kadar bir değişim göstermiştir. Şekil 2.3.2 de momentum değerleri -0.2721631 ile -0.27216300 arasında değişmiştir. Momentum değeri 10^{-7} oranında bir değişim göstermiştir. Şekil 2.3.1 ve Şekil 2.3.2 için Tablo 2.1 de verilen diğer h ve Δt değerleri alındığında değişim

aralığı daha da küçülmektedir. Buna göre her iki özellik de iyi korunumludur.



L_2 ve L_∞ hata normlarının zamana göre değişimi Şekil 2.4.1 ve Şekil 2.4.2 de çizilmiştir. Diğer h ve Δt değerleri incelendiğinde L_2 ve L_∞ hata normlarının daha küçük değerlerde olduğu görülür. Yani h değerleri küçüldükçe hata oranları küçülmektedir.

2.5.2 İkinci Test Problemi

İkinci test probleminde iki dalga hareketi oluşmaktadır. Bu dalgalardan birincisi sol taraftan hareket ederek ilerlerken ikinci dalga da sağ taraftan ilerlemektedir. Daha sonra bu iki dalga çarpışmakta, sağa doğru ilerlemekte ve yön değiştirdiği gözlemlenmektedir. Yön değiştiren dalgalar tekrar yön değiştirerek, yaklaşık olarak çarpışmadan önceki konumuna gelir. Bu test probleminde denklemin analitik çözümü olarak (1.8) ve (1.9) kullanılacaktır. Başlangıç koşulu (1.8) de $t = 0$ alınarak bulunan

$$U(x, 0) = \tanh\left[\frac{x + x_0}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - \tanh\left[\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - 1 \quad (2.31)$$

fonksiyonu kullanılmıştır.

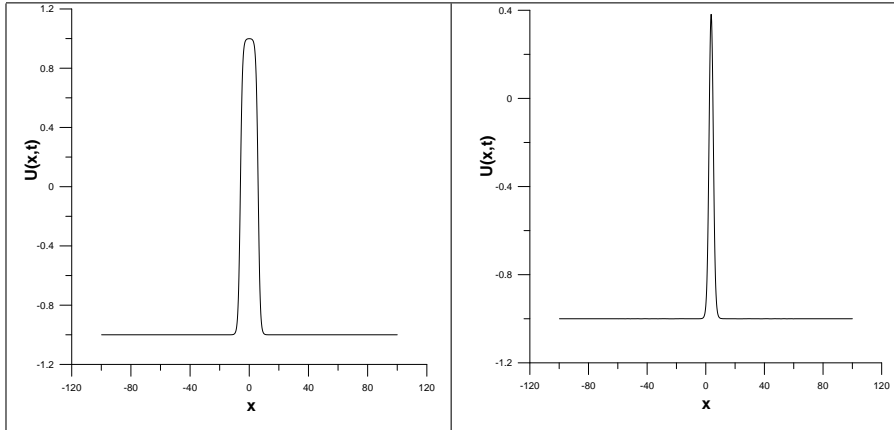
Hesaplama farklı c değerleri alınarak $-60 \leq x \leq 60$ aralığı içinde $t = 120$ oluncaya kadar yapıldı. $t = 120$ anında $h = 0.05$, $x_0 = 6$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 2.2 de verilmiştir.

Tablo 2.2		
c	E_0	E_{120}
0.1	29.994264603	30.106082916
0.15	29.970304489	30.082145691
0.175	29.954561234	30.066421509
0.195	29.940103531	30.052001953
0.2	29.936239243	30.048131943
0.22	29.919651031	30.031576157
0.25	29.891496658	30.003440857
0.26	29.881204605	29.993171692
0.3	29.835309982	29.947351456
0.5	29.468843460	29.581243515
0.7	28.719320297	28.833150864
0.9	26.508951187	26.710460663

Tablo 2.2 de, E_0 ifadesi $t = 0$ zamanında elde edilen enerji değerini, E_{120} ifadesi de $t = 120$ zamanında elde edilen enerji değerini göstermektedir. Tablo 2.2 ye gre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, c dalga hızı 0.15 ile 0.3 arasında iken fark 0.11182 kadardır. Dalga hızı 0.5 ve daha byk alındığında bu fark artmaktadır. Buna gre kk dalga hızları iin daha iyi enerji korunumu sağlanmaktadır.

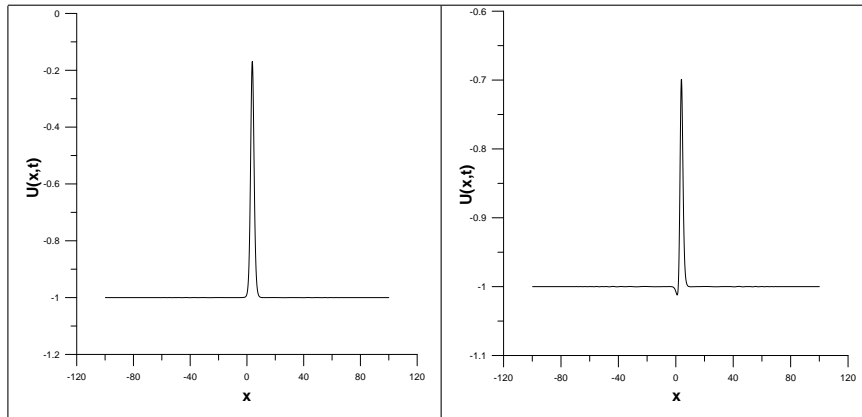
şimdi $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga

hareketleri Şekil 2.5.1-6 da verilmiştir.



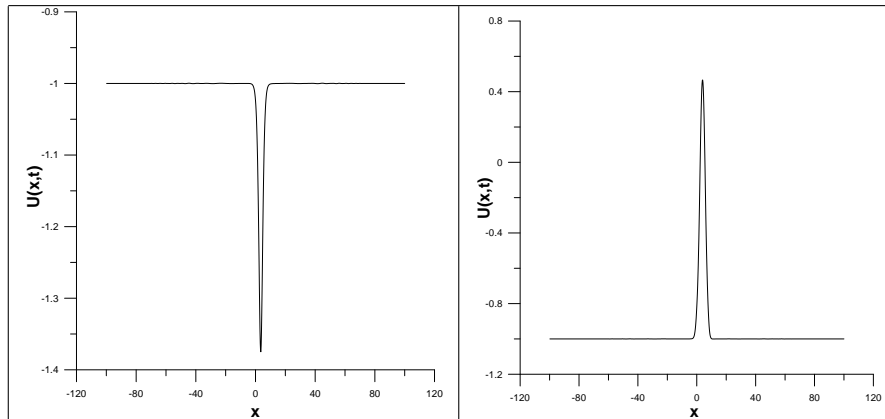
Şekil 2.5.1 $t = 0$

Şekil 2.5.2 $t = 69$



Şekil 2.5.3 $t = 70$

Şekil 2.5.4 $t = 70.5$

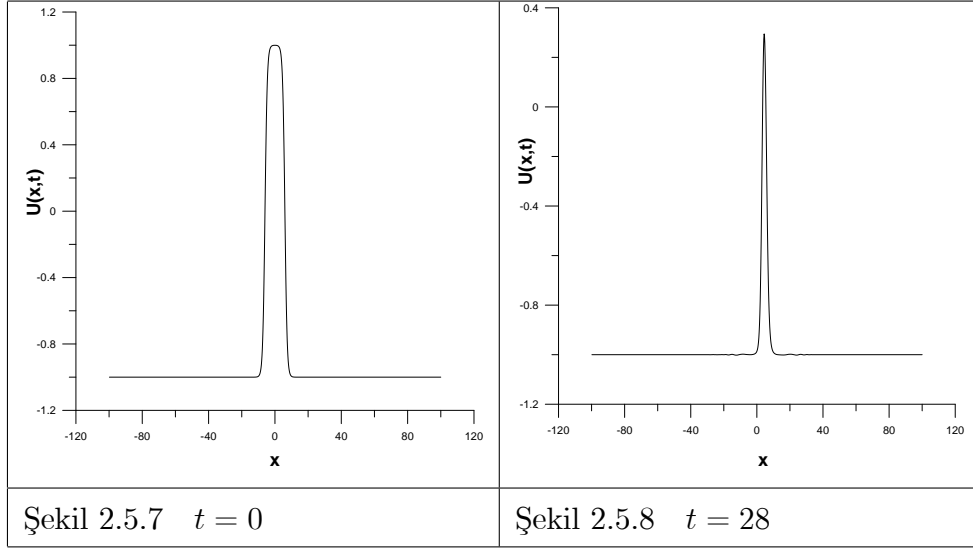


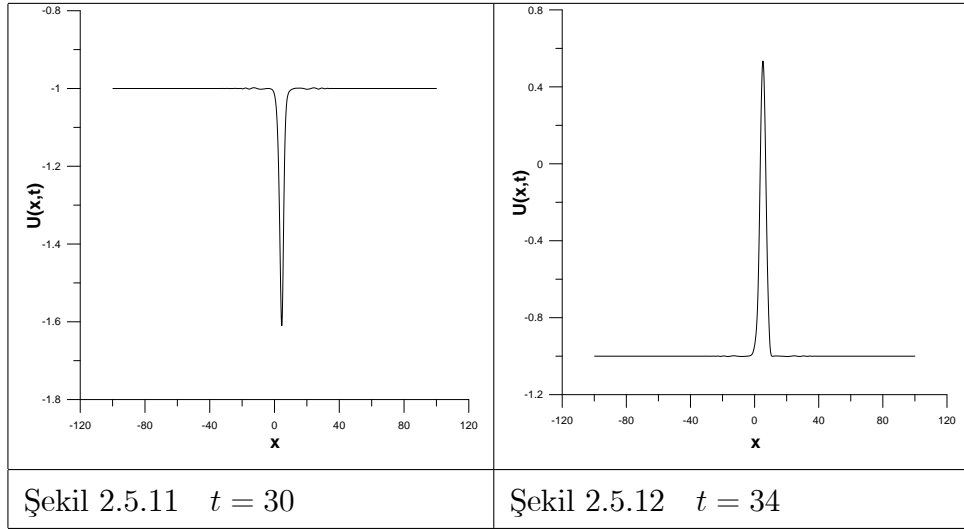
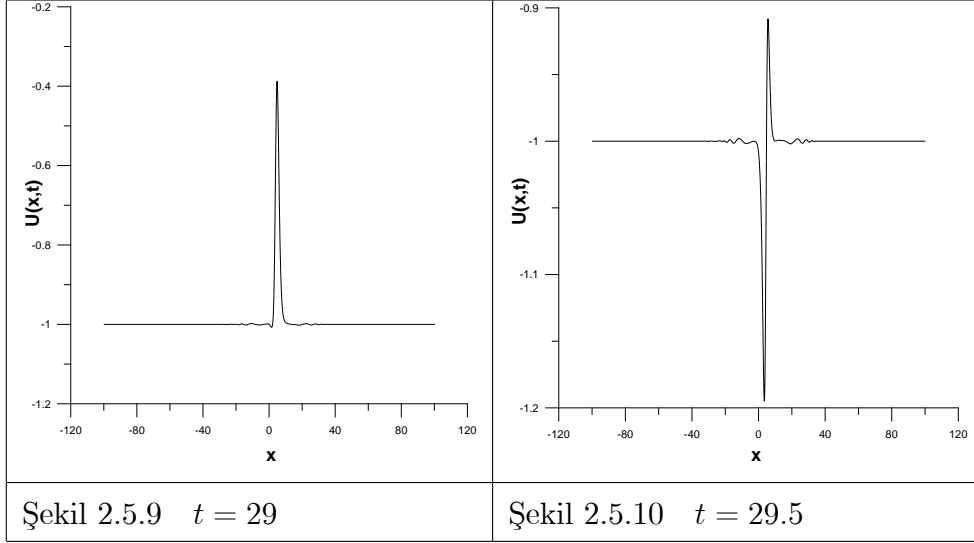
Şekil 2.5.5 $t = 71$

Şekil 2.5.6 $t = 75$

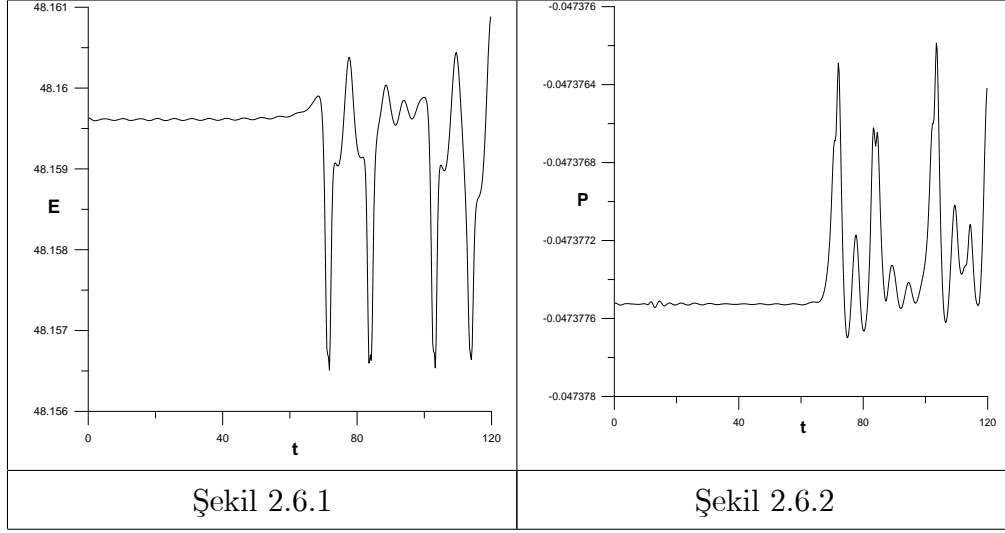
Şekil 2.5.1 de $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi verilmiştir. $t = 69$ ve $t = 70$ zamanlarında dalga çiftleri, dalga boyları küçülerek harekete devam etmekte, $t = 70.5$ zamanında dalgalar çarpışmaktadır. Şekil 2.5.5 de $t = 71$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 2.5.6 da $t = 75$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlamıştır. İncelediğimiz zaman aralığındaki bu hareket salınımlı olarak tekrarlanmaktadır. Bu tekrarlamalar esnasında, her çarpışma öncesinde dalgaların dalga boyunda küçük bir azalma meydana gelmektedir.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim ;



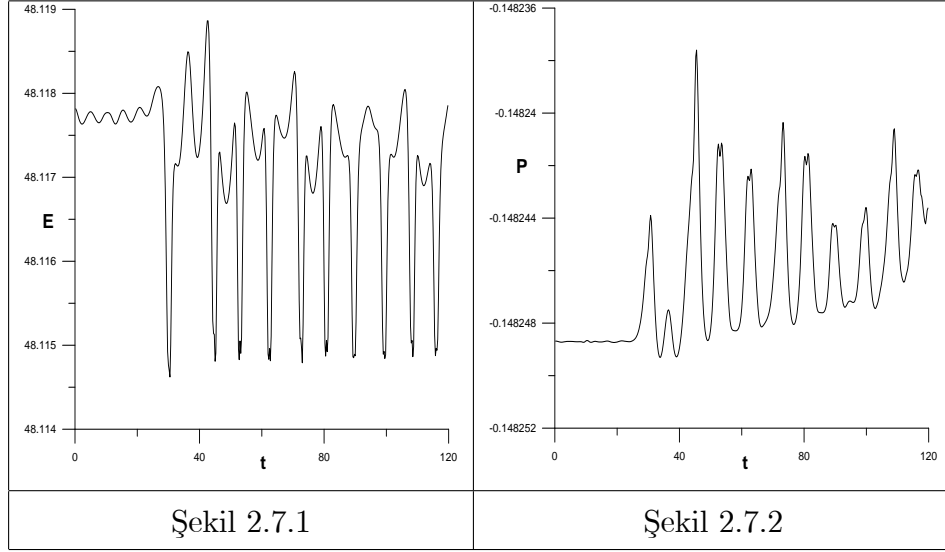


$t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi ile başlayan değişim, $t = 28$ ve $t = 29$ zamanlarında dalga boyları küçülerek devam etmiştir. Şekil 2.5.10 da $t = 29.5$ zamanında dalgalar çarpışmaktadır. Şekil 2.5.11 de $t = 30$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirir. Şekil 2.5.12 de $t = 34$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek yeni bir çarpışma işlemine hazır konuma gelir.



Enerji ve momentum davranışları Şekil 2.6.1 ve Şekil 2.6.2 de gösterilmiştir. Korunumlar $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak hesaplanmıştır. Enerjinin değeri 48.1605 ile 48.1565 arasında değişmektedir. Buna göre 4×10^{-3} civarında bir değişim gerçekleşmiştir. Aynı şartlarda momentum ise -0.0473776 ile -0.04737650 arasındadır. Buna göre 11×10^{-7} civarında bir değişim gerçekleşmiştir. Değişim oranı oldukça küçüktür.

Ayrıca, $t = 70$ zamanında dalga hareketinde meydana gelen değişiklikler, enerji ve momentumda değişikliklere sebep olmaktadır. Bu enerji ve momentum değişiklikleri $t = 70$ zamanında başlar ve $t = 120$ zamanına kadar devam eder. Tüm bu etkiler Şekil 2.6.1 ve Şekil 2.6.2 de gösterilmiştir.



$c = 0.3$ alınarak elde edilen enerji ve momentum davranışları Şekil 2.7.1 ve Şekil 2.7.2 de gösterilmiştir. Korunumlar için $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri kullanılmıştır. Enerjinin değeri 48.1187 ile 48.1146 arasında değişmektedir. Buna göre 4×10^{-3} civarında bir değişim gerçekleşmiştir. Aynı şartlarda momentum ise -0.148249 ile -0.148238 arasındadır. Buna göre 11×10^{-6} civarında bir değişim gerçekleşmiştir. Değişim oranı oldukça küçüktür.

Ayrıca, $t = 30$ zamanında dalga hareketinde meydana gelen değişiklikler, enerji ve momentumda değişikliklere sebep olmaktadır. Bu enerji ve momentum değişiklikleri $t = 30$ zamanında başlar ve $t = 120$ zamanına kadar devam eder. Tüm bu etkiler Şekil 2.7.1 ve Şekil 2.7.2 de gösterilmiştir.

2.5.3 Üçüncü Test Problemi

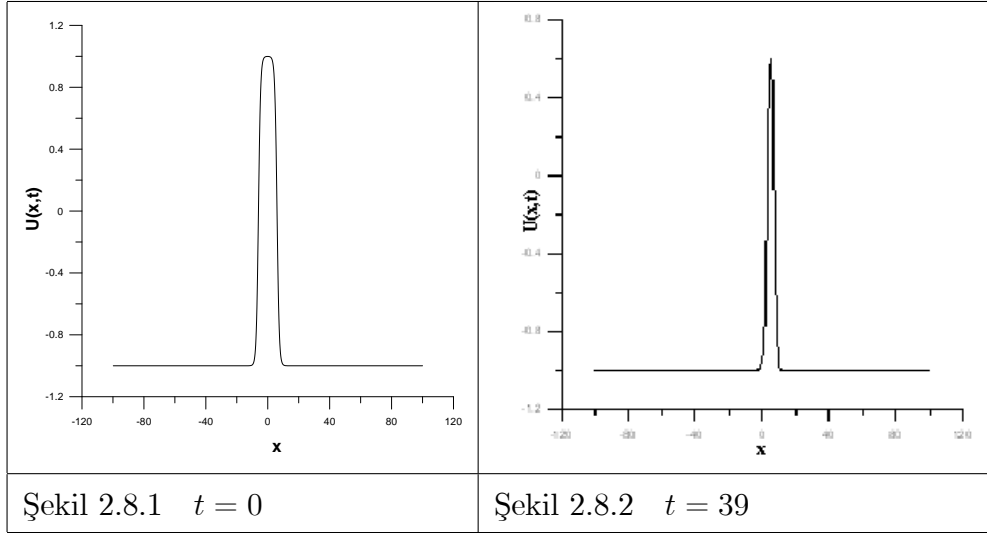
Üçüncü test probleminde de iki dalganın etkileşimi söz konusudur. İkinci test probleminden farklı olarak burada, sağ taraftaki dalga sabit kalmakta, sol taraftaki dalga hareket ederek durağan dalga ile çarpışma meydana getirmektedir. Çarpışmanın etkisiyle dalgalar yön değiştirmektedir. Daha

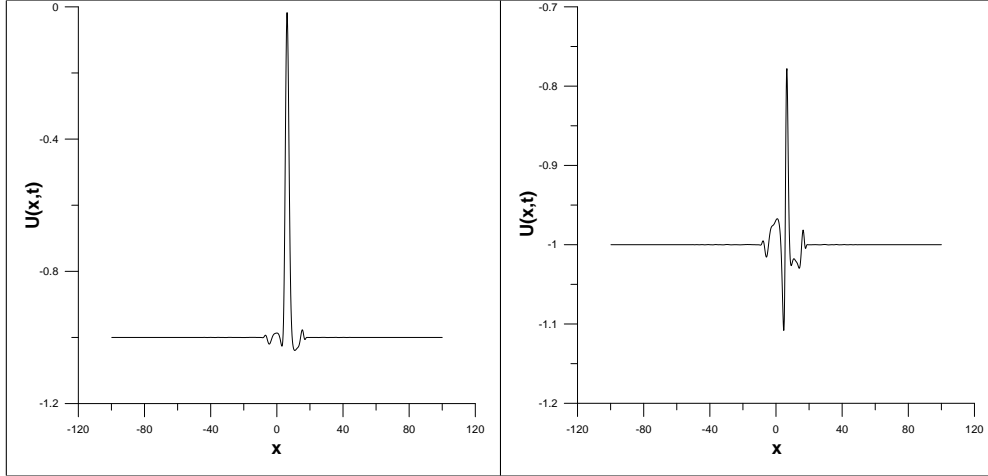
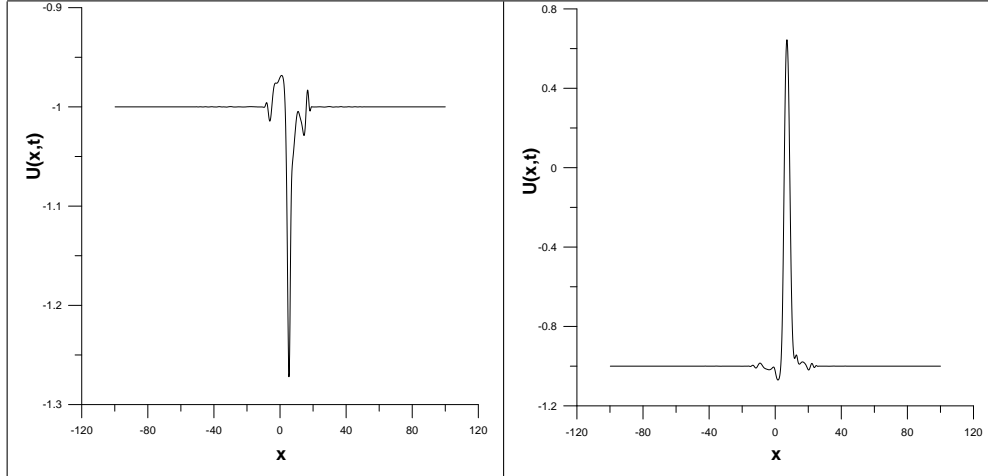
sonra dalgalar tekrar yön değiştirerek hareket devam etmektedir. Bu test probleminde denklemin analitik çözümlü olarak (1.12) ve (1.13) kullanılacaktır. Başlangıç koşulu da (1.12) de $t = 0$ alınarak bulunan

$$U(x, 0) = \tanh\left[\frac{x + x_0}{\sqrt{2(1 - c^2)}}\right] - \tanh\left[\frac{x - x_0}{\sqrt{2}}\right] - 1 \quad (2.32)$$

başlangıç koşulu alınarak çözümlü elde edilecektir.

$c = 0.25$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak $-100 \leq x \leq 100$ aralığında (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim.;

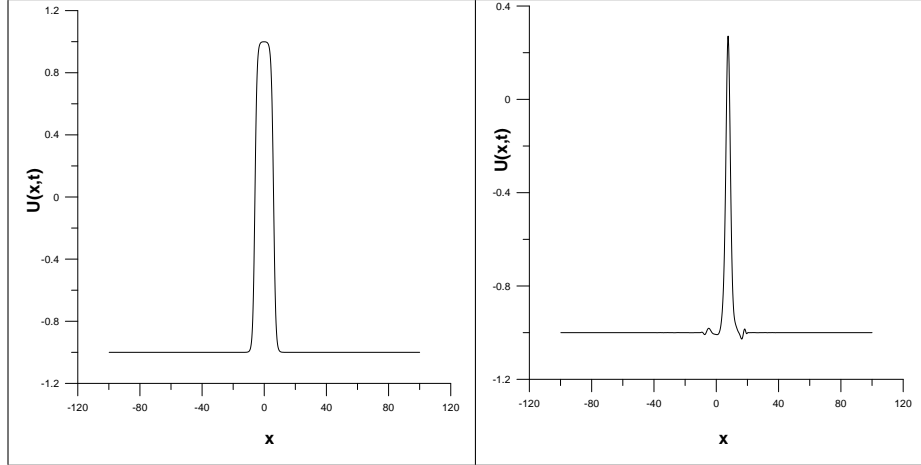


Şekil 2.8.3 $t = 47$ Şekil 2.8.4 $t = 47.75$ Şekil 2.8.5 $t = 48$ Şekil 2.8.6 $t = 55$

Şekil 2.8.1 de $t = 0$ zamanındaki başlangıç dalga çifti hareketleri görülmektedir. Şekil 2.8.2 de $t = 39$ zamanındaki dalgaların hareketi verilmiştir. Bu hareketler incelendiğinde dalga boyu 1 den 0.6 ya düşmüştür. Şekil 2.8.3 de dalga boyları küçülerek hareket devam etmektedir. Şekil 2.8.4 de $t = 47.75$ zamanında dalgaların çarpışması meydana gelmiştir. Şekil 2.8.5 de $t = 48$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 2.8.6 da $t = 55$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlamıştır. İncelediğimiz zaman aralığındaki bu hareket sürekli olarak

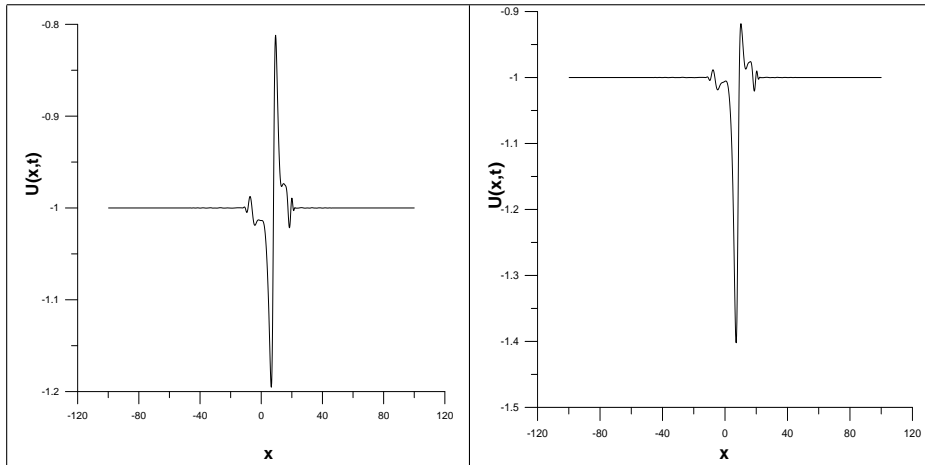
tekrarlanmaktadır.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim.;



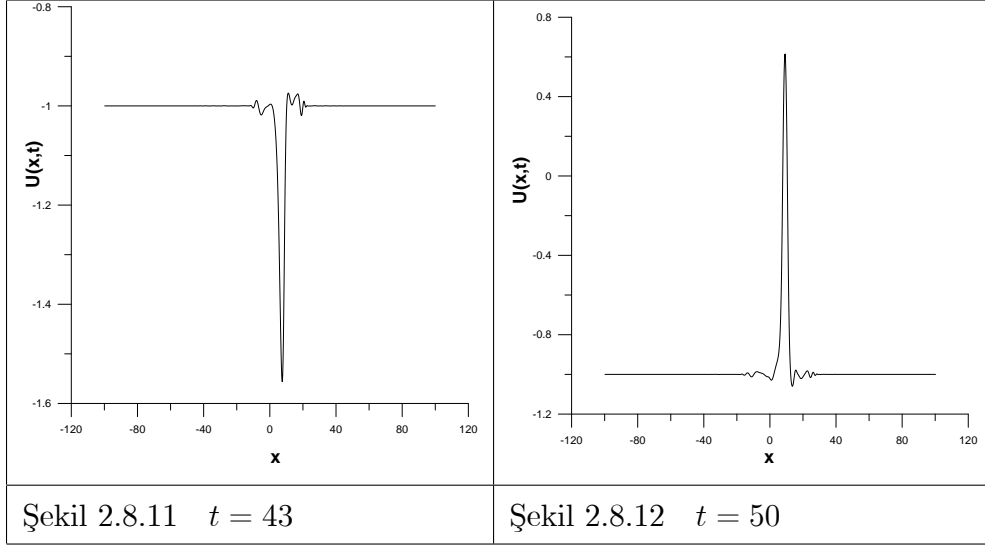
Şekil 2.8.7 $t = 0$

Şekil 2.8.8 $t = 41$

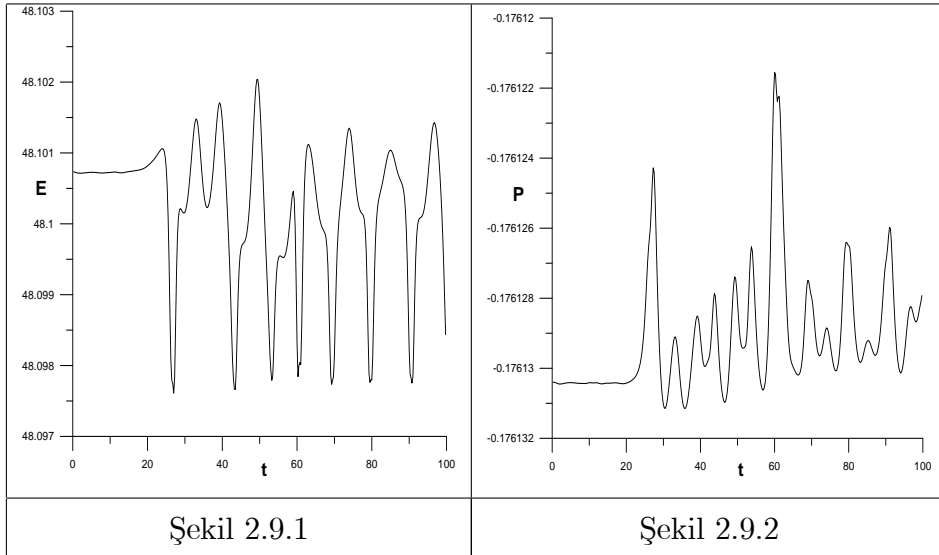


Şekil 2.8.9 $t = 42.5$

Şekil 2.8.10 $t = 42.75$



Üçüncü test problemi için $c = 0.35$ alınarak elde edilen dalga çifti hareketleri $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketleri ile başlar. Şekil 2.8.8 de $t = 41$ zamanındaki dalga çifti hareketleri incelendiğinde dalga boyları 1 den 0.3 e düşmüştür. Şekil 2.8.9 da $t = 42.5$ zamanında dalgalar çarpışmaktadır. Şekil 2.8.10 ve Şekil 2.8.11 de $t = 42.75$ ve $t = 43$ zamanlarında dalgalar yön değiştirir. Şekil 2.8.12 de $t = 50$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlar.



$c = 0.35$ alınarak elde edilen enerji ve momentum davranışları Şekil 2.9.1 ve Şekil 2.9.2 de gösterilmiştir. Buradaki salınım $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak gerçekleştirilmiştir. Enerjinin değeri 48.102 ile 48.0976 arasında değişmektedir. Buna göre 4×10^{-3} civarında bir değişim gerçekleşmiştir. Aynı şartlarda momentum ise -0.176132 ile -0.176121 arasındadır. Buna göre 11×10^{-6} civarında bir değişim gerçekleşmiştir. Değişim oranı oldukça küçüktür. Buna göre her iki özellik de iyi korunumludur.

Ayrıca, $t = 43$ zamanında dalga hareketinde meydana gelen değişiklikler, enerji ve momentumda değişikliklere sebep olmaktadır. Bu enerji ve momentum değişiklikleri $t = 27$ zamanında başlar ve $t = 120$ zamanına kadar devam eder. Tüm bu etkiler Şekil 2.9.1 ve Şekil 2.9.2 de gösterilmiştir.

Tablo 2.3		
c	E_0	E_{120}
0.1	28.122133182	28.122180623
0.15	28.116093864	28.116058132
0.175	28.112105821	28.112015398
0.195	28.108429756	28.108463731
0.2	28.107441463	28.107462881
0.22	28.103203786	28.103110374
0.25	28.095962915	28.095877764
0.26	28.093303518	28.093161039
0.3	28.081359473	28.081304364
0.5	27.981029755	27.981022214
0.7	27.749495157	27.749505831
0.9	26.906740845	26.907231350
$-60 \leq x \leq 60, h = 0.05, \Delta t = 0.01, x_0 = 6$		

Tablo 2.3 e göre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, c dalga hızı 0.15 ile 0.3 arasında iken fark 2×10^{-5} kadardır. Dalga hızı 0.5 ve daha büyük alındığında bu fark artmaktadır. Buna göre küçük dalga hızları için daha iyi enerji korunumu sağlanmaktadır.

Tablo 2.4 Farklı dalga hızlarında enerji ve momentum		
c	<i>Enerji</i>	<i>Momentum</i>
0.1	48.159860925825	-0.047377341849
0.35	48.098090193178	-0.176127632392
0.4	48.078352232711	-0.205730736770
0.55	47.978597771456	-0.310437006945
0.7	47.786907251479	-0.462020612464
0.8	47.536749065876	-0.627762072105
0.9	46.950769884715	-0.941365200944
$-100 \leq x \leq 100, h = 0.2, \Delta t = 0.05, x_0 = 6, t = 100$		

Tablo 2.4 de farklı dalga hızları için elde edilen enerji ve momentum değerleri verilmiştir. Tablo incelendiğinde küçük dalga hızları için elde edilen enerji ve momentum değerleri arasındaki fark çok düşüktür. Dalga hızı arttıkça enerji ve momentum değerleri arasındaki fark artmaktadır. Buna göre küçük dalga hızlarında enerji ve momentum korunumu daha tutarlıdır.

Bölüm 3

Klein-Gordon Denkleminin Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümü

3.1 Giriş

Bu bölümde KG denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri verilecektir.

3.2 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ çözüm aralığını

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_N = b$$

olacak şekilde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $\phi_m(x)$, $m = -1, 0, \dots, N+1$ fonksiyonları bölüm noktalarında tanımlı kübik B-spline fonksiyonlar olsun. KG denklemindeki $U(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x, t)$

olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözüm B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_N(x, t) = \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) \quad (3.1)$$

Bu ifadedeki zamana bağlı δ_m parametreleri (2.1) denkleminin kübik B-spline kolokeyşin formundan ve

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \alpha_1, & U(b, t) &= \alpha_2, & t &\in (0, T] \\ U_x(a, t) &= 0, & U_x(b, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

sınır koşullarından elde edilecektir.

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık dört aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı dört ardışık kübik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Böylece U yaklaşık çözümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kübik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j$$

biçiminde yazılabilir. Tablo 1.1 kullanılarak bölünme noktalarında eleman parametreleri cinsinden U_m yaklaşık çözümü ve bu yaklaşık çözümlerin ikinci dereceye kadarki türevleri

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U''_m &= U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

olarak bulunabilir.

(3.3) ile verilen değerler (2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta_{m-1}^{\infty} + 4\delta_m^{\infty} + \delta_{m+1}^{\infty} - \frac{6}{h^2}(\delta_{m+1} - 2\delta_m + \delta_{m-1}) \\ + z_m(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$z_m = (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^2 - 1$$

şeklinde birinci mertebeden $N + 1$ denklemden oluşan diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada "°°" zamana bağlı ikinci mertebeden türevdir. δ_m eleman parametresinin iki ardışık zaman adımı n ve $n + 1$ arasında değeri Crank-Nicholson formülü yardımıyla

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n), \quad (3.5)$$

şeklinde ve bunun zamana göre türevi sonlu farklar yaklaşımıyla

$$\begin{aligned} \delta_m^\circ &= \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \\ \delta_m^{\circ\circ} &= \frac{1}{\Delta t^2}(\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^n + \delta_m^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olarak bulunur. Bu değerlerin (3.5) denklem sisteminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{3}{h^2} + \frac{z_m}{2}\right)\delta_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{4}{\Delta t^2} + \frac{6}{h^2} + 2z_m\right)\delta_m^{n+1} \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{3}{h^2} + \frac{z_m}{2}\right)\delta_{m+1}^{n+1} = \left(\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{3}{h^2} - \frac{z_m}{2}\right)\delta_{m-1}^n + \\ & \left(\frac{8}{\Delta t^2} - \frac{6}{h^2} - 2z_m\right)\delta_m^n + \left(\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{3}{h^2} - \frac{z_m}{2}\right)\delta_{m+1}^n + \\ & \left(-\frac{1}{\Delta t^2}\right)\delta_{m-1}^{n-1} + \left(-\frac{4}{\Delta t^2}\right)\delta_m^{n-1} + \left(-\frac{1}{\Delta t^2}\right)\delta_{m+1}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

bulunur. Bu sistemin yeniden düzenlenmesiyle, $m = 0, \dots, N$ olmak üzere $N + 3$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_m^{n+1} + \beta_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} = \\ & \beta_{m3}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^n - \frac{1}{\Delta t^2}\delta_{m-1}^{n-1} - \frac{4}{\Delta t^2}\delta_m^{n-1} - \frac{1}{\Delta t^2}\delta_{m+1}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

cebirsal denklem sistemi elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned} \beta_{m1} &= \frac{1}{\Delta t^2} - \frac{3}{h^2} + \frac{z_m}{2} \\ \beta_{m2} &= \frac{4}{\Delta t^2} + \frac{6}{h^2} + 2z_m \\ \beta_{m3} &= \frac{1}{\Delta t^2} - \frac{3}{h^2} - \frac{z_m}{2} \\ \beta_{m4} &= \frac{8}{\Delta t^2} - \frac{6}{h^2} - 2z_m \end{aligned}$$

dir. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısını eşitlemek için δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri sınır koşullarının kullanılmasıyla yokedilerek $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu 3 bandlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(3.2) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = \alpha_1 \\ U_x(a, t) &= \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned} \delta_{-1} &= \alpha_1 - 4\delta_0 - \delta_1 \\ \delta_{N+1} &= \delta_{N-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir. Bu değerler (3.8) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen yok etme işlemi yapılmış olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_{m3}\delta_{-1}^n + \beta_{m4}\delta_0^n + \beta_{m3}\delta_1^n - 2h^2\delta_{-1}^{n-1} - 8h^2\delta_0^{n-1} - 2h^2\delta_1^{n-1} \\ F_{N+1} &= \beta_{m3}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^{n+1} - 2h^2\delta_{m-1}^{n-1} - 8h^2\delta_m^{n-1} - 2h^2\delta_{m+1}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olmak üzere (3.8) denklem sisteminde $m = 0$ için

$$\beta_{m1}\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_0^{n+1} + \beta_{m1}\delta_1^{n+1} = F_1 \quad (3.12)$$

ve $m = N$ için

$$\beta_{m1}\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_N^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{N+1}^{n+1} = F_{N+1} \quad (3.13)$$

eşitlikleri bulunur. (3.10) eleman parametreleri (3.12) ve (3.13) denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.12) denklemi,

$$\beta_{m2}\delta_0^{n+1} + 2\beta_{m1}\delta_1^{n+1} = F_1 - \alpha_1 \quad (3.14)$$

ve (3.13) denklemi

$$2\beta_{m1}\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_N^{n+1} = F_{N+1} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre (3.8) denklem sistemi,

$$F = Bd^n + Cd^{n-1} + S$$

olmak üzere

$$Ad^{n+1} = F \quad (3.16)$$

olarak matris formunda yazılabilir. Burada,

$$d^n = [\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n]^T$$

olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} \beta_{m2} & 2\beta_{m1} & & & & & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m1} & & & & \\ & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m1} & \\ & & & & 2\beta_{m1} & \beta_{m2} & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m3} & & & & \\ & \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m3} & & & \\ & & \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m3} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m3} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t^2} & \frac{4}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & & & & \\ & -\frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{4}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

ve

$$S = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.16) sistemini kullanarak, Thomas algoritması yardımıyla, δ^{n+1} yaklaşımı bulunur. Yeni zaman adımına geçmeden önce, δ^{n+1} değerini iyileştirmek için bu değerlere (2.20) ile verilen iterasyon iki veya üç defa uygulanır. Böylece δ^{n+1} yaklaşımının yeni değeri elde edilmiş olur.

3.3 Başlangıç Durumu

δ_m^n parametrelerini (3.16) denklem sisteminden ardışık olarak elde edebilmek için δ_m^0 ve δ_m^1 başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için $U(x, 0)$ başlangıç koşulundan (3.1) yaklaşık fonksiyonu yardımıyla δ_m^0 ve sonlu fark yaklaşımından

$$\delta_m^1 = \delta_m^0 \Delta t + \delta_m^0$$

formülü yardımıyla başlangıç parametreleri belirlenebilir.

Bölünme noktalarında

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0), \quad m = 0, \dots, N$$

olduğundan, başlangıç durumu için

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 \\
&\vdots \\
U(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2}^0 + 4\delta_{N-1}^0 + \delta_N^0 \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

yazılabilir. Böylece $N + 3$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri yok edilirse, $N + 1$ bilinmeyenli $N + 1$ denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü Thomas algoritması ile elde edilir. Bunun için

$$\begin{aligned}
U'_N(a, 0) &= 0 \\
U'_N(b, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

sınır koşullarını kullanacağız. Bu sınır koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{3}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) &= 0 \\
\frac{3}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

yazılır. Buradan δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri

$$\begin{aligned}
\delta_{-1}^0 &= \delta_1^0 \\
\delta_{N+1}^0 &= \delta_{N-1}^0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (3.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\delta^0 &= [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T, \\ b &= [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{N-1}), U(x_N)]^T\end{aligned}$$

olmak üzere, her iki eleman parametresi için matris formunda

$$A \delta^0 = b \quad (3.21)$$

denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla eleman parametresi için $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde üç bantlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur.

3.4 Kararlılık Analizi

$$\begin{aligned}\beta_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_m^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{m+1}^{n+1} = \\ \beta_{m3}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^n - \frac{1}{\Delta t^2}\delta_{m-1}^{n-1} - \frac{4}{\Delta t^2}\delta_m^{n-1} - \frac{1}{\Delta t^2}\delta_{m+1}^{n-1}\end{aligned} \quad (3.22)$$

denkleminde $\delta_m^n = q^n e^{im\theta}$ alınarak kararlılık analizine başlanır. Bu değer (3.22) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\beta_{m1}q^{n+1}e^{i(m-1)\theta} + \beta_{m2}q^{n+1}e^{im\theta} + \beta_{m1}q^{n+1}e^{i(m+1)\theta} = \\ \beta_{m3}q^n e^{i(m-1)\theta} + \beta_{m4}q^n e^{im\theta} + \beta_{m3}q^n e^{i(m+1)\theta} - \\ \frac{1}{\Delta t^2}q^{n-1}e^{i(m-1)\theta} - \frac{4}{\Delta t^2}q^{n-1}e^{im\theta} - \frac{1}{\Delta t^2}q^{n-1}e^{i(m+1)\theta}\end{aligned} \quad (3.23)$$

elde ettiğimiz bu denklemi $q^n e^{im\theta}$ ile bölersek ;

$$\begin{aligned}\beta_{m1}qe^{-i\theta} + \beta_{m2}q + \beta_{m1}qe^{i\theta} = \\ \beta_{m3}e^{-i\theta} + \beta_{m4} + \beta_{m3}e^{i\theta} - \frac{1}{\Delta t^2}q^{-1}e^{-i\theta} - \frac{4}{\Delta t^2}q^{-1} - \frac{1}{\Delta t^2}q^{-1}e^{i\theta}\end{aligned} \quad (3.24)$$

bu denklemde gerekli açılımlar ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}(2\beta_{m1}\text{Cos}\theta + \beta_{m2})q^2 - (-(2\beta_{m1}\text{Cos}\theta + \beta_{m2}) + \\ 3(\frac{2}{\Delta t^2}\text{Cos}\theta + \frac{4}{\Delta t^2}))q + (\frac{2}{\Delta t^2}\text{Cos}\theta + \frac{4}{\Delta t^2}) = 0 \\ q^2 - (3\frac{Y}{X} - 1)q + \frac{Y}{X} = 0 \\ Xq^2 - (3Y - X)q + Y = 0\end{aligned} \quad (3.25)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} X &= 2\beta_{m1}\cos\theta + \beta_{m2} \\ Y &= \frac{2}{\Delta t^2}\cos\theta + \frac{4}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

şeklinindedir. Kararlılığın sağlanabilmesi için ya $|q| \leq 1$ yada q kompleks olmalıdır.

q nun kompleks olması durumunda (3.25) denklemi için $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre $9Y^2 - 10XY + X^2 < 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} 9Y^2 - 10XY + X^2 &= \frac{1}{h^4\Delta t^2}[(-6\cos\theta + z_m h^2 \cos\theta + 2z_m h^2 - 6) \\ &(z_m h^2 \Delta t^2 \cos\theta + 2z_m h^2 \Delta t^2 - 16h^2 \cos\theta - 32h^2 - 6\Delta t^2 \cos\theta + 6\Delta t^2)] < 0 \end{aligned}$$

$$[z_m h^2(\cos\theta + 2) - 6(\cos\theta - 1)]$$

$$[\Delta t^2(z_m h^2(\cos\theta + 2) - 6(\cos\theta - 1) - 16h^2(\cos\theta + 2))] < 0$$

$-2 < \cos\theta - 1 < 0$ ve $1 < \cos\theta + 2 < 3$ olduğundan $\cos\theta + 2 = 1$ ve $\cos\theta - 1 = -2$ alındığında eşitsizlik değişmeyeceğinden

$$(\cos\theta + 2)(z_m h^2 \Delta t^2 - 16h^2) - 6\Delta t^2(\cos\theta - 1) < 0$$

$$\Delta t < \frac{4h}{\sqrt{z_m h^2 + 12}}$$

olur. Bu şarta göre kararlılık sağlandığından denklem koşullu kararlıdır.

3.5 Test Problemleri

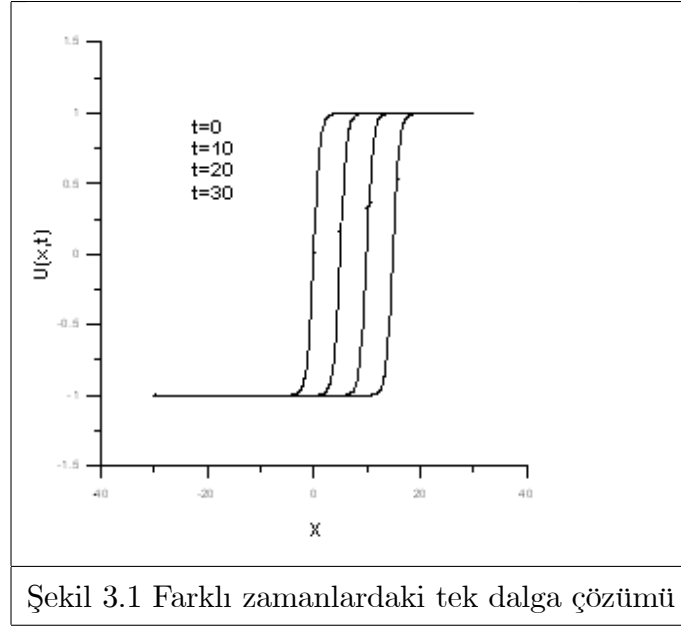
3.5.1 Birinci Test Problemi

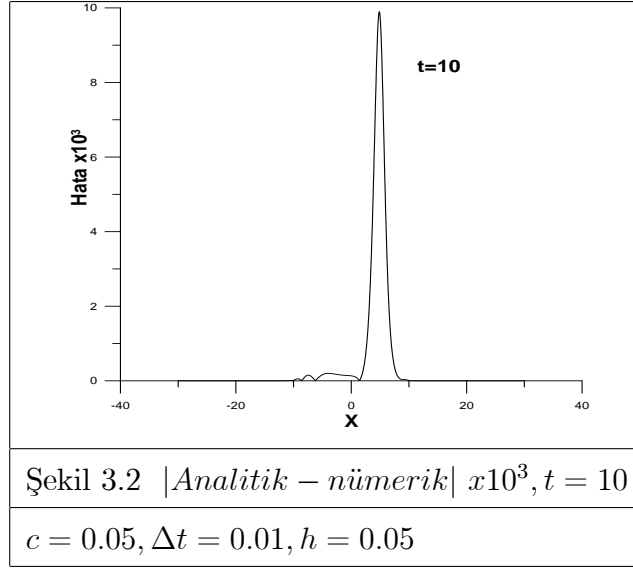
Bu test problemi için farklı zamanlarda dalga hareketleri incelendiğinde, tek dalgadan oluşan bir dalga hareketi görülecektir. Bu dalga hareketinin

başlangıç noktası -1 , bitiş noktası 1 dir. Hareketli dalga çözümünde analitik çözüm (1.4) ve (1.5) formunda alınacaktır.

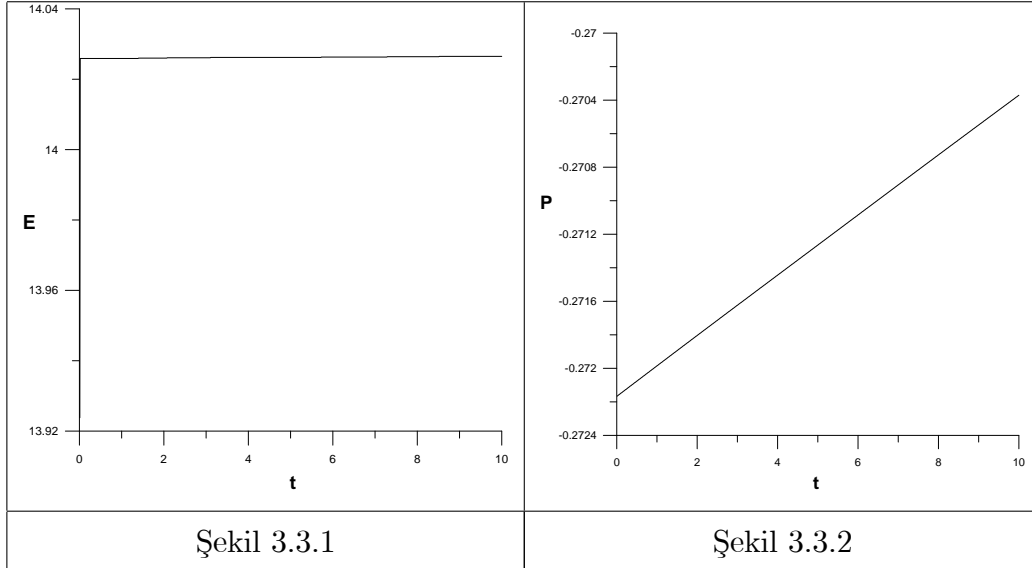
Hesaplama $c = 0.5$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde $t = 10$ oluncaya kadar yapıldı. $t = 10$ anında farklı h ve Δt değerleri için elde edilen sonuçlar Tablo 3.1 'de verildi.

Tablo 3.1: $c = 0.5, t = 10, -30 \leq x \leq 30$					
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	P	E
0.2	0.05	26.8686	22.3913	-0.263557	14.0666
0.1	0.02	12.9278	10.5616	-0.26861	14.0397
0.05	0.01	7.35833	5.91472	-0.270369	14.0265
0.02	0.005	3.98635	3.17503	-0.271263	14.0187



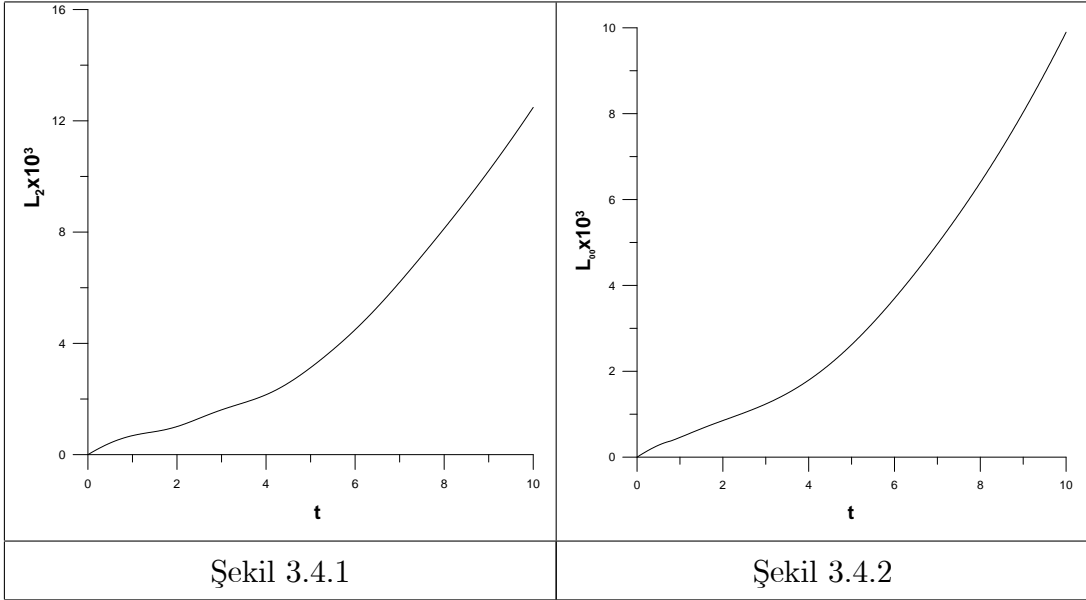


Şekil 3.2 de $t = 10$ zamanında $-30 \leq x \leq 30$ aralığında analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki fark çizilmiştir. $t = 10$ zamanında hata binde on seviyesindedir.



Şekil 3.3.1 incelendiğinde enerji değerinin çok küçük bir aralıkta değiştiği görülmüştür. Sayısal değerlere göre enerji değerleri 14.0259 ile 14.0265

arasındadır. Buna göre enerji değeri 6×10^{-4} kadar bir değişim göstermiştir. Şekil 3.3.2 de momentumdaki değişiklik verilmiştir. Buna göre momentum değeri -0.272164 ile -0.270371 arasında değişmiştir. Momentum değeri 17×10^{-4} oranında bir değişim göstermiştir. Şekil 3.3.1 ve Şekil 3.3.2 için Tablo 5.1 de verilen diğer h ve Δt değeri alındığında değişim aralığı daha da küçülmektedir. Buna göre her iki özellik için çözüm oldukça iyi sonuç vermiştir.



Şimdi birinci test problemi için L_2 ve L_∞ hata normlarını inceleyelim. Şekil 3.4.1 ve Şekil 3.4.2 de $c = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.01$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde L_2 ve L_∞ hata normlarının hareketleri gösterilmiştir. Her iki norm da monoton artandır. En yüksek değer $t = 10$ zamanında 10^{-3} değerindedir. Bu da sayısal çözümün iyi olduğunu gösterir.

3.5.2 İkinci Test Problemi

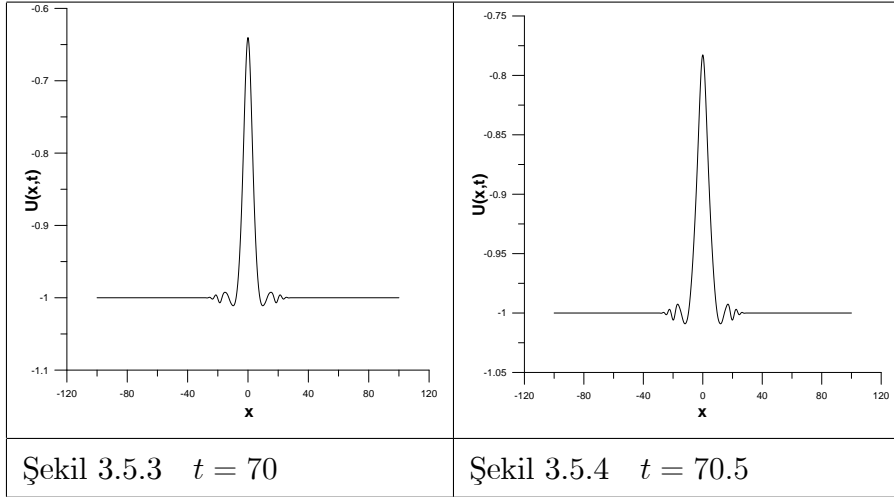
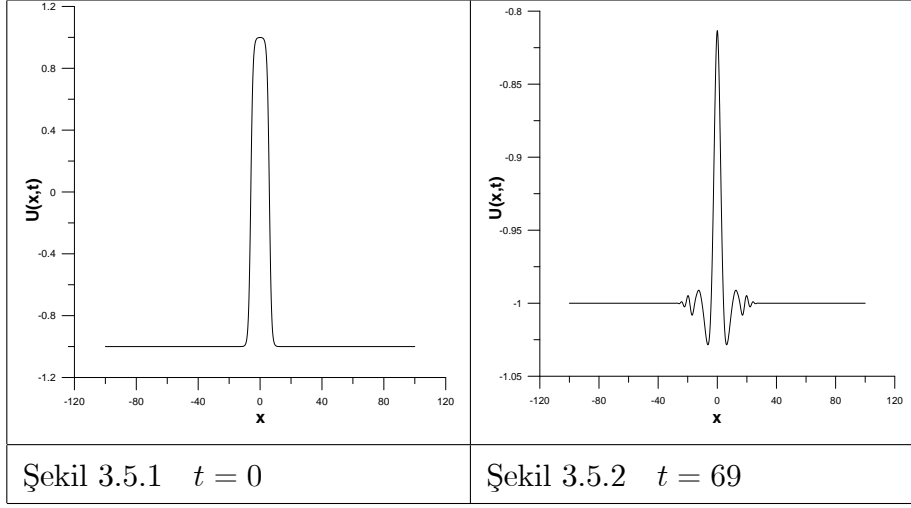
Bu test probleminde (1.8) ve (1.9) analitik çözümlerini kullanılacaktır. Test probleminde başlangıçta ters yönlü iki dalga mevcuttur. Zaman ilerledikçe bu iki dalga birbirine yaklaşır ve belli bir zaman sonra birbirine yapışmış dalgaların sağa doğru ilerlediği gözlemlenecektir. İkinci test problemini uygulamak için problemin algoritmasında farklı c değerleri alınarak $-60 \leq x \leq 60$ aralığında çeşitli çalışmalar yapıldı. Bu çalışmalardan birinde $t = 120$ anında $h = 0.05$, $x_0 = 6$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 3.2 ile verildi.

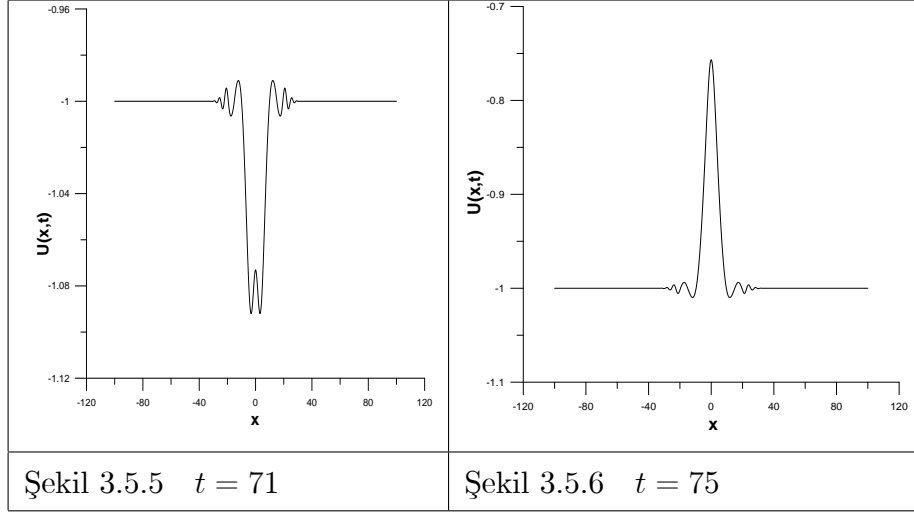
Tablo 3.2		
c	E_0	E_{120}
0.1	28.1174	29.631
0.15	28.1053	29.295
0.175	28.0973	29.7619
0.195	28.09	29.2313
0.2	28.088	29.4574
0.22	28.0795	29.3875
0.25	28.065	29.4493
0.26	28.0597	29.664
0.3	28.0358	29.5271
0.5	27.8352	28.069
0.7	27.3721	28.0332
0.9	25.6866	27.8798

Tablo 3.2 ye göre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, en iyi enerji korunumu 0.5 ve 0.7 dalga hızlarında gerçekleşmektedir. Diğer dalga hızlarına bakıldığında belirtilen iki zaman

arasında enerjinin yeterince korunduğu gözlenebilir.

Şimdi $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim;

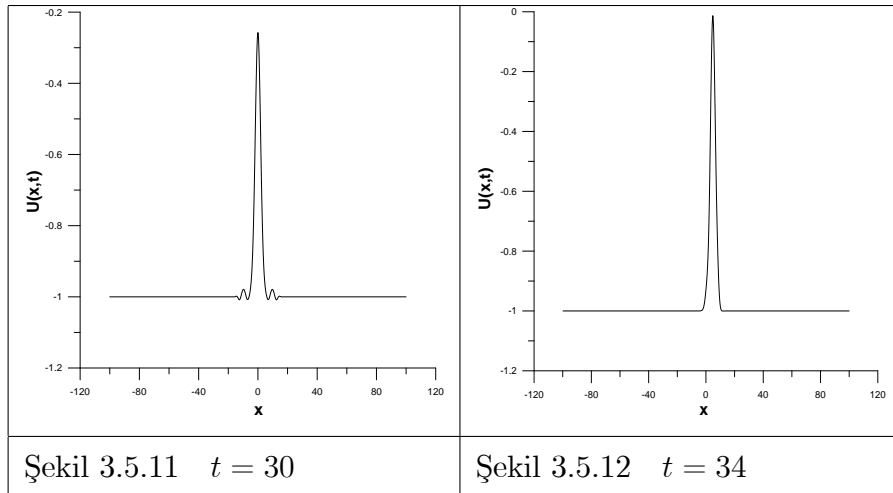
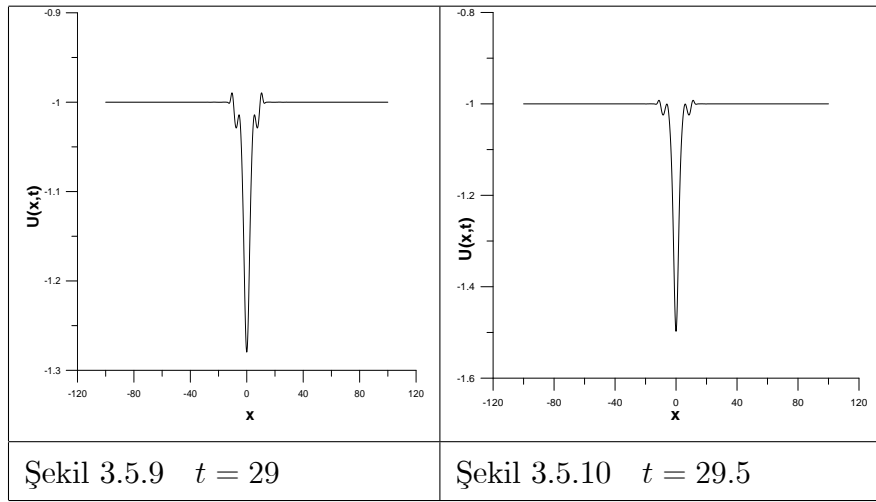
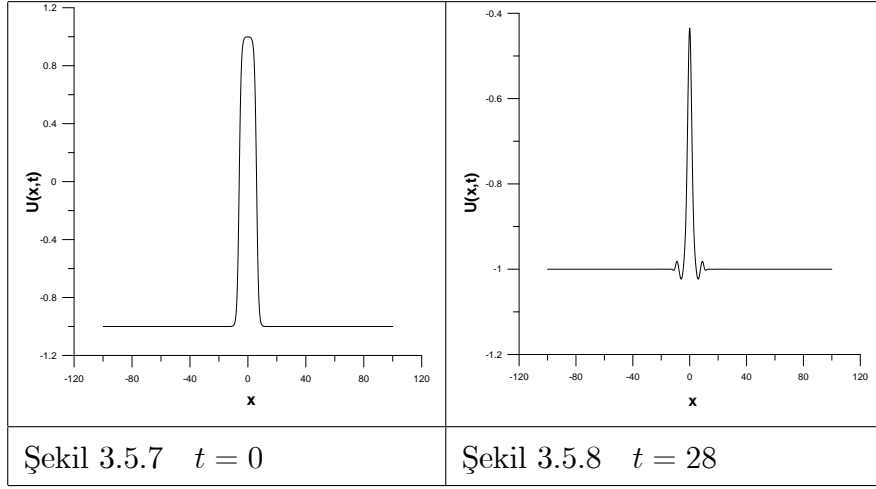




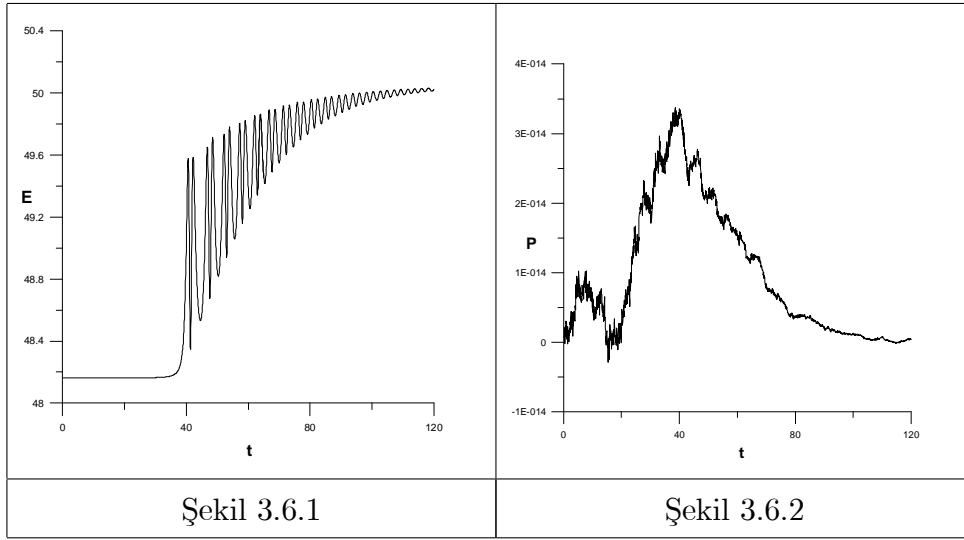
İkinci test problemi için farklı zamanlardaki dalga çifti hareketlerini inceleyelim. Burada amacımız, elde ettiğimiz sayısal çözümün, analitik çözüm ile aynı dalga çifti hareketi oluşturduğunu göstermektir. Şekil 3.5.1 de $t = 0$ zamanında meydana gelen başlangıç dalga çifti hareketi verilmiştir. $t = 69$ zamanında oluşan dalga hareketinde dalga ilerlemeye devam ederken, dalga boyu küçülmüştür. Şekil 3.5.5 de $t = 71$ civarında dalgalar çarpışarak yön değiştirmiştir. Şekil 3.5.6 da $t = 75$ civarında dalga eski haline dönmeye başlamıştır.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga

çifti hareketlerini inceleyelim.;

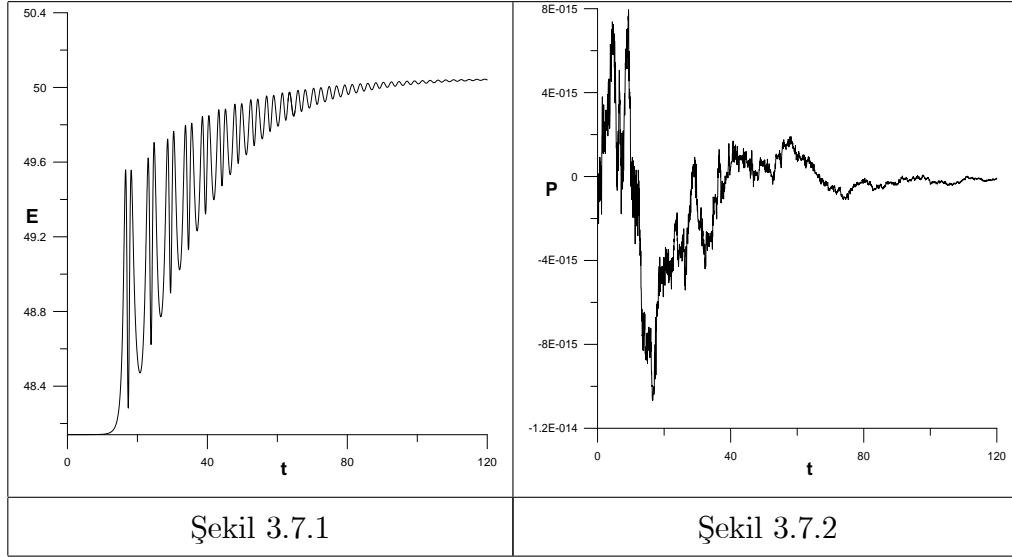


Şekil 3.5.7-12 arasında $c = 0.3$ alınarak elde edilen dalga çifti hareketleri verilmiştir. $t = 0$ zamanında başlangıç dalgası ile başlayan dalga çifti hareketleri, bir zaman aralığında değişime uğramaktadır. Bu değişim incelendiğinde $t = 28$ zamanında dalga çiftinin boyları küçülmekte, $t = 29$ da dalgalar çarpışıp yön değiştirmekte ve Şekil 3.5.11 de $t = 30$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek hareketine devam etmektedir.



Enerji ve momentum korunum değerleri $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak incelenmiştir. Şekil 3.6.1 de enerji değerleri 48.1620 ile 50.0252 arasında değişmektedir. $t = 40$ zamanına kadar dalga hareketi devam ederken $t = 40$ zamanından sonra dalga çarpışmaları başladığından enerji değerinde değişimler meydana gelmiştir. Şekil 3.6.2 ye göre momentum ise -6.96×10^{-16} ile $-4.25 \times$

10^{-16} arasındadır. Değişim oranı oldukça küçüktür.



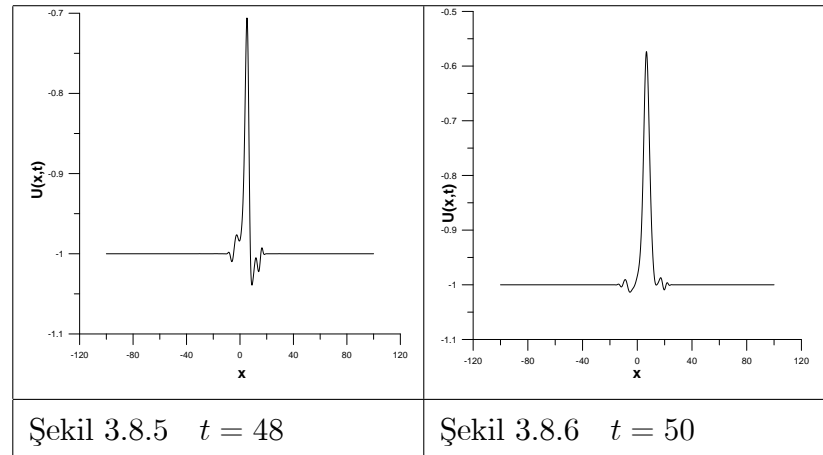
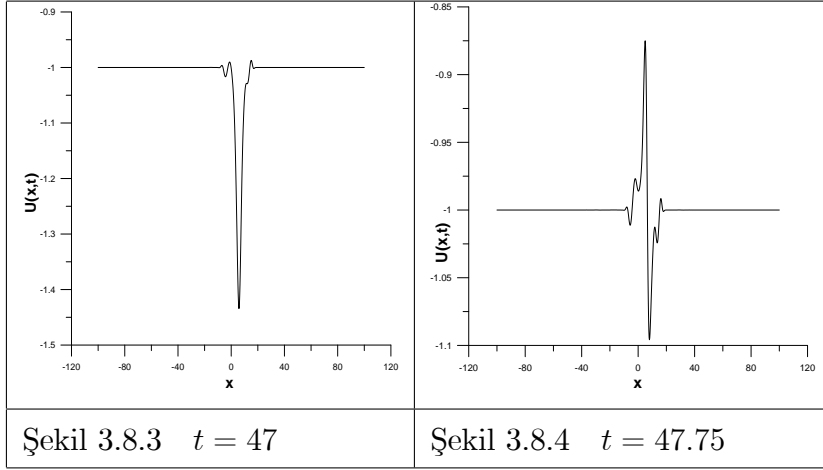
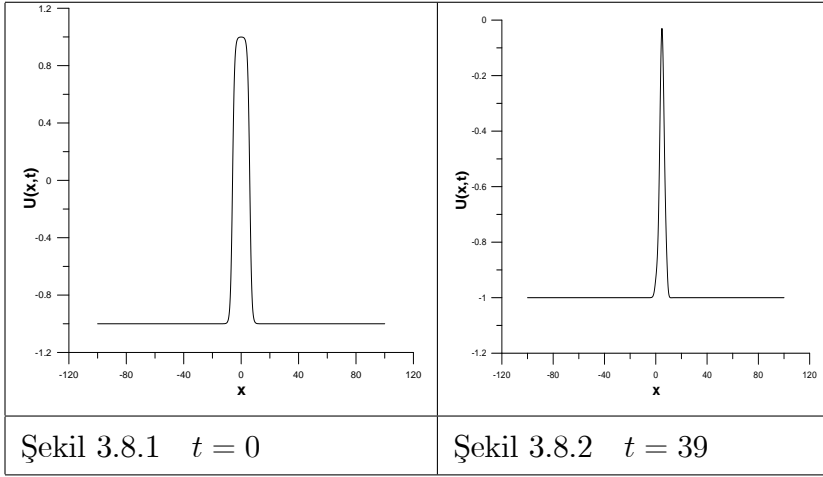
Şekil 3.7.1 ve Şekil 3.7.2 de korunumlar $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak hesaplanmıştır. Burada çarpışmadan önce enerji değeri 48.1401 ile 50.0402 arasında değişmektedir. Momentum değerleri ise -4.69×10^{-16} ile -1.18×10^{-16} arasında değişmektedir. Enerji ve momentum hareketleri incelendiğinde $t = 20$ zamanına kadar dalgalar harekete devam ederken, $t = 20$ den $t = 120$ ye kadar dalga çarpışmalarının etkisi görülmektedir. Buna göre enerji ve momentum değerleri korunmaktadır.

3.5.3 Üçüncü Test Problemi

Bu test probleminde (1.12) ve (1.13) analitik çözümleri kullanılacaktır. Bu test probleminin özelliği, iki dalgadan birinin hareketli diğerinin durağan olmasıdır.

Şimdi $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.25$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu

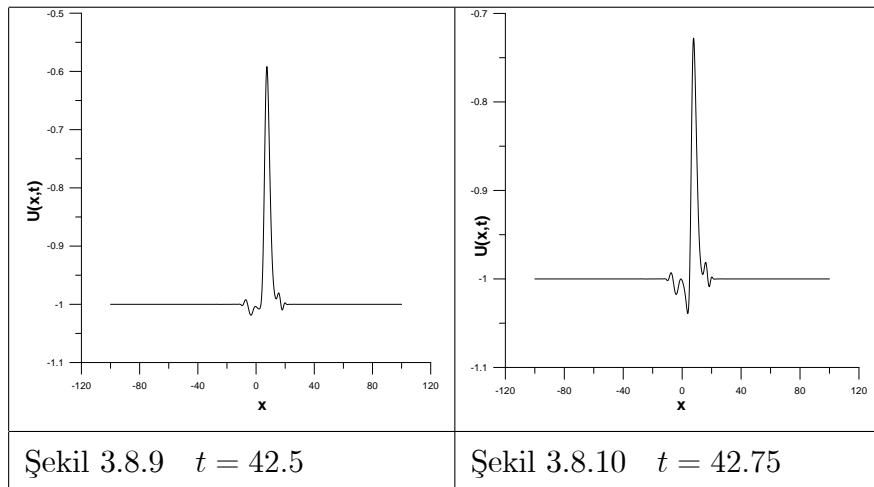
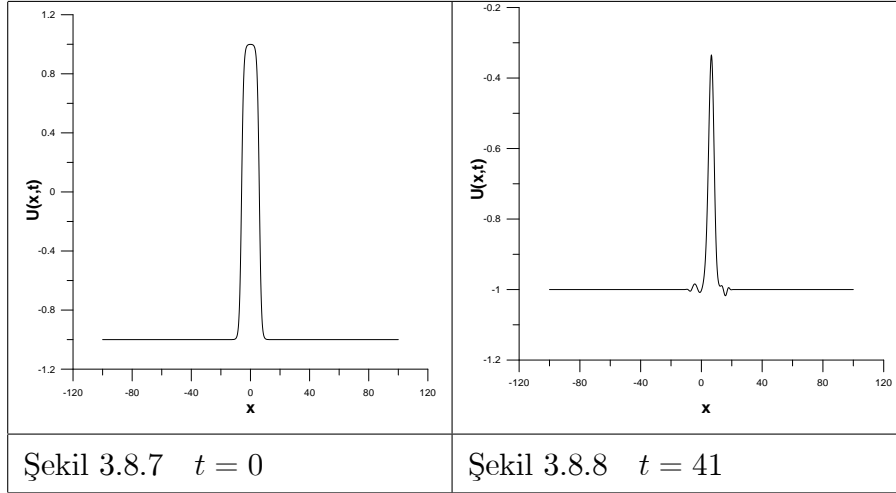
dalga çifti hareketlerini inceleyelim.;

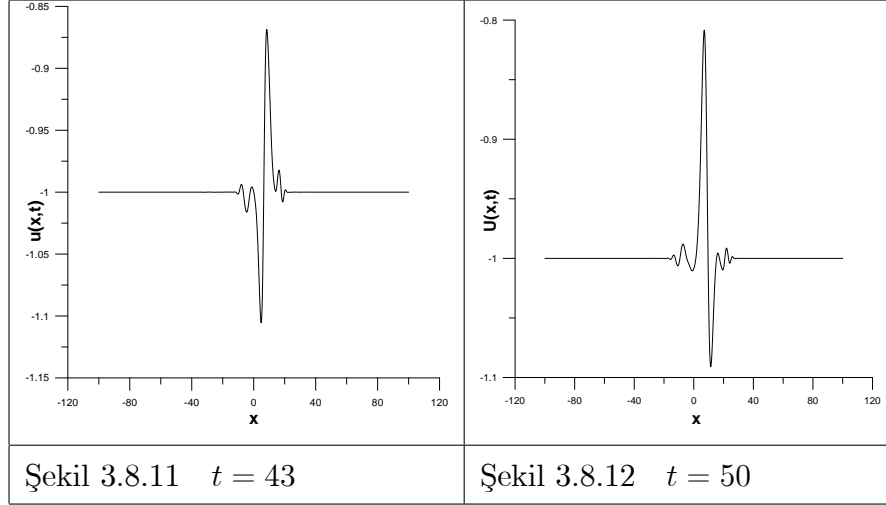


Belli bir zaman aralığında iki dalgadan oluşan hareket durumu Şekil 3.8.1-6 da verilmiştir. Üçüncü test probleminde $c = 0.25$ ve $c = 0.35$ için farklı

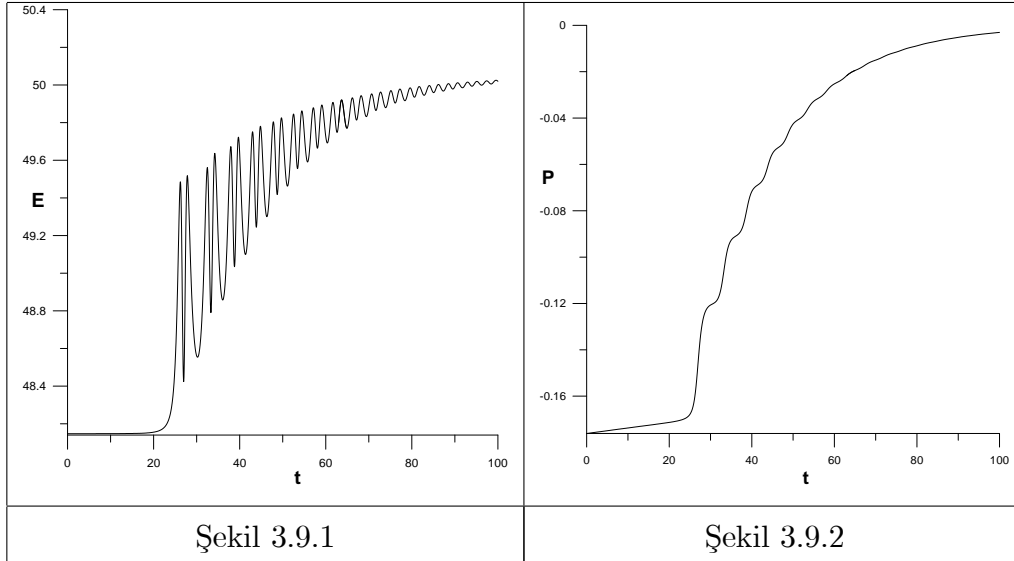
zamanlardaki dalga hareketlerine bakalım. Şekil 3.8.1 de $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi ile başlayan hareket $t = 39$ zamanına kadar devam etmiştir. Şekil 3.8.3 de $t = 47$ zamanında dalgaların çarpışması meydana gelmiş ve dalga yön değiştirmiştir. Şekil 2.8.4 de $t = 47.75$ zamanında dalgaların çarpışmasının etkisi devam etmektedir. Şekil 2.8.5 ve Şekil 2.8.6 da $t = 48$ ve $t = 55$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlamıştır.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim.;





Şekil 3.8.7 de $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi ile başlayan hareket $t = 50$ zamanına kadar incelenmiştir. $t = 41$ ile $t = 50$ zamanları arasındaki hareket çok önemlidir. Çünkü bu aralıkta dalga, değişim hareketini gerçekleştirmektedir. Şekil 3.8.8 de $t = 41$ zamanında dalga boyları küçülmekte, $t = 43$ zamanında dalgaların çarpışması gerçekleşmekte, $t = 50$ ye kadar olan zaman içinde, dalga tekrar yön değiştirerek yeni bir çarpışma için ilerlemeye devam etmektedir.



Bu test problemi için $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak enerji ve momentum korunum-

larına bakılmıştır. Buna göre Şekil 3.9.1 de enerjinin değeri 48.1470 ile 50.0197 arasında değişmiştir. Şekil 3.9.1 incelendiğinde dalgaların çarpışma zamanında enerjide bir artış meydana gelmiştir. Bu artış $t = 27$ zamanında başlamış ve $t = 120$ zamanına kadar devam etmiştir. Yaptığımız çalışmada $t = 43$ zamanında oluşan çarpışma gösterilmiştir. Aynı şartlarda momentum ise -0.17611 ile -0.00303 arasındadır. Şekil 3.9.2 incelendiğinde momentumdaki değişim hareketinin, enerji değişimi ile aynı olduğu görülmektedir.

Tablo 3.3

c	E_0	E_{120}
0.1	28.1221	28.7743
0.15	28.1161	29.6893
0.175	28.1121	29.4168
0.195	28.1084	29.0511
0.2	28.1074	29.6597
0.22	28.1032	29.5767
0.25	28.0960	29.1375
0.26	28.0933	29.3237
0.3	28.0814	29.5262
0.5	27.9810	29.2177
0.7	27.7495	29.4171
0.9	26.9067	28.0320

$-60 \leq x \leq 60, h = 0.05, \Delta t = 0.01, x_0 = 6$

Tablo 3.3 e göre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, c dalga hızı 0.1 ile 0.195 arasında iken iki zaman arasındaki fark düşüktür. Dalga hızı 0.2 ve daha büyük alındığında bu fark artmaktadır. Buna göre en iyi enerji korunumu 0.1 ile 0.195 arasındaki dalga hızları için sağlanmaktadır.

Tablo 3.4 :Farklı dalga hızlarında enerji ve momentum		
c	<i>Enerji</i>	<i>Momentum</i>
0.1	49.5669	-0.00930013
0.35	50.0207	-0.00304497
0.4	50.0192	-0.00299469
0.55	50.0277	-0.00294579
0.7	50.0353	-0.00286642
0.8	50.0379	-0.00272089
0.9	50.0413	-0.00239254
$-100 \leq x \leq 100, h = 0.2, \Delta t = 0.05, x_0 = 6, t = 100$		

Farklı dalga hızları için elde edilen enerji ve momentum değerleri Tablo 3.4 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde dalga hızları 0.4 ile 0.9 arasında alındığında elde edilen enerji ve momentum değerleri arasındaki fark çok düşüktür. Dalga hızları 0.1 ve 0.35 arasında iken enerji ve momentum değerleri arasındaki fark artmaktadır. Buna göre bu metod için 0.4 den büyük dalga hızlarında enerji ve momentum korunumu daha tutarlıdır.

Bölüm 4

Klein-Gordon Denkleminin Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümü

4.1 Giriş

Bu bölümde KG denkleminin kuartik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri verilecektir.

4.2 Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ çözüm aralığını bölünme noktaları

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_N = b$$

olacak şekilde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $\phi_m(x)$, $m = -2, -1, 0, \dots, N+1$ fonksiyonları bölünme noktalarında tanımlı kuartik B-spline fonksiyonlar olsun. KG denklemindeki $U(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x, t)$

olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözüm kuartik B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_N(x, t) = \delta_{-2}(t)\phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) \quad (4.1)$$

Bu ifadedeki δ_m parametreleri, (2.1) denkleminin kuartik kolokeyşin formundan ve

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \alpha_1, U(b, t) = \alpha_2, \quad t \in (0, T] \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

sınır koşullarından elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kuartik B-spline fonksiyonlar ardışık beş aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı beş ardışık B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Böylece U yaklaşık çözümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kuartik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-2}^{m+1} \delta_j \phi_j$$

biçiminde yazılabilir. U_m yaklaşık çözümü ve bu çözümün üçüncü mertebeye kadarki türevleri bölünme noktalarında eleman parametreleri cinsinde

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) &= \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) &= \frac{4}{h}(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U''_m &= U''(x_m) &= \frac{12}{h^2}(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ U'''_m &= U'''(x_m) &= \frac{24}{h^3}(\delta_{m+1} - 3\delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak bulunabilir. U_N in bölünme noktalarındaki (4.3) değerleri (2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{m-2} + 11\ddot{\delta}_{m-1} + 11\ddot{\delta}_m + \ddot{\delta}_{m+1} - \frac{12}{h^2}(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ - z_m(\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$z_m = 1 - (\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1})^2$$

şeklinde $N + 1$ denklemden oluşan birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada "oo" zamana bağlı ikinci mertebeden türevdir. δ_m eleman parametresinin iki ardışık zaman adımı n ve $n + 1$ deki değerleri Crank-Nicholson formülü yardımıyla

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n), \quad (4.5)$$

ve bunun zamana göre türevleri sonlu farklar yaklaşımıyla

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\delta}_m &= \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \\ \overset{\circ\circ}{\delta}_m &= \frac{1}{\Delta t^2}(\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^n + \delta_m^{n-1}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

diskritize edilebilir. Böylece bu değerler (4.4) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &(2h^2 - z_m h^2 \Delta t^2 - 12\Delta t^2)\delta_{m-2}^{n+1} + (22h^2 - 11z_m h^2 \Delta t^2 + 12\Delta t^2)\delta_{m-1}^{n+1} \\ &+ (22h^2 - 11z_m h^2 \Delta t^2 + 12\Delta t^2)\delta_m^{n+1} + (2h^2 - z_m h^2 \Delta t^2 - 12\Delta t^2)\delta_{m+1}^{n+1} \\ &= (4h^2 + z_m h^2 \Delta t^2 + 12\Delta t^2)\delta_{m-2}^n + (44h^2 + 11z_m h^2 \Delta t^2 - 12\Delta t^2)\delta_{m-1}^n \\ &+ (44h^2 + 11z_m h^2 \Delta t^2 - 12\Delta t^2)\delta_m^n + (4h^2 + z_m h^2 \Delta t^2 + 12\Delta t^2)\delta_{m+1}^n \\ &- 2h^2\delta_{m-2}^{n-1} - 22h^2\delta_{m-1}^{n-1} - 22h^2\delta_m^{n-1} - 2h^2\delta_{m+1}^{n-1}, \\ &m = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Bu sistemin yeniden düzenlenmesi ile $N + 4$ bilinmeyenli $N + 1$ cebirsel denklem sistemi bulunur.

$$\begin{aligned} &\beta_{m1}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_m^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{m+1}^{n+1} = \\ &\beta_{m3}\delta_{m-2}^n + \beta_{m4}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^n \\ &- 2h^2\delta_{m-2}^{n-1} - 22h^2\delta_{m-1}^{n-1} - 22h^2\delta_m^{n-1} - 2h^2\delta_{m+1}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Burada

$$\begin{aligned} \beta_{m1} &= 2h^2 - z_m h^2 \Delta t^2 - 12\Delta t^2 \\ \beta_{m2} &= 22h^2 - 11z_m h^2 \Delta t^2 + 12\Delta t^2 \\ \beta_{m3} &= 4h^2 + z_m h^2 \Delta t^2 + 12\Delta t^2 \\ \beta_{m4} &= 44h^2 + 11z_m h^2 \Delta t^2 - 12\Delta t^2 \end{aligned}$$

dir. Bu denklemdeki δ_{-2} , δ_{-1} ve δ_{N+1} parametrelerinin sınır koşulları kullanılarak yok edilmesiyle $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu 4 bandlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(4.2) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_0 &= \delta_{-2}^n + 11\delta_{-1}^n + 11\delta_0^n + \delta_1^n &= \alpha_1 \\ U'_0 &= \frac{4}{h}(\delta_1^n + 3\delta_0^n - 3\delta_{-1}^n - \delta_{-2}^n) &= 0 \\ U_N &= \delta_{N-2}^n + 11\delta_{N-1}^n + 11\delta_N^n + \delta_{N+1}^n &= \alpha_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned} \delta_{-1} &= \frac{1}{8}\alpha_1 - \frac{7}{4}\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_1 \\ \delta_{-2} &= -\frac{3}{8}\alpha_1 + \frac{33}{4}\delta_0 + \frac{7}{4}\delta_1 \\ \delta_{N+1} &= \alpha_2 - \delta_{N-2} - 11\delta_{N-1} - 11\delta_N \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Bu değerler (4.8) denklem sisteminde yerine yazılır ve

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_{m3}\delta_{-2}^n + \beta_{m4}\delta_{-1}^n + \beta_{m4}\delta_0^n + \beta_{m3}\delta_1^{n+1} \\ &\quad - 2h^2\delta_{-2}^{n-1} - 22h^2\delta_{-1}^{n-1} - 22h^2\delta_0^{n-1} - 2h^2\delta_1^{n-1}, \\ F_{N+1} &= \beta_{m3}\delta_{m-2}^n + \beta_{m4}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^n \\ &\quad - 2h^2\delta_{m-2}^{n-1} - 22h^2\delta_{m-1}^{n-1} - 22h^2\delta_m^{n-1} - 2h^2\delta_{m+1}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

alınırsa (4.8) denklem sisteminde $m = 0$ için

$$\beta_{m1}\delta_{-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_0^{n+1} + \beta_{m1}\delta_1^{n+1} = F_1, \quad (4.12)$$

$m = 1$ için

$$\beta_{m1}\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_0^{n+1} + \beta_{m2}\delta_1^{n+1} + \beta_{m1}\delta_2^{n+1} = F_2, \quad (4.13)$$

$m = N$ için

$$\beta_{m1}\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_N^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{N+1}^{n+1} = F_{N+1} \quad (4.14)$$

eşitlikleri bulunur. (4.10) eleman parametreleri (4.12), (4.13) ve (4.14) denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.12) denklemi,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{33}{4}\beta_{m1} - \frac{3}{4}\beta_{m2}\right)\delta_0^{n+1} + \left(\frac{11}{4}\beta_{m1} - \frac{1}{4}\beta_{m2}\right)\delta_1^{n+1} = \\ & F_1 - \beta_{m1}\left(-\frac{3}{8}\alpha_1\right) - \beta_{m2}\left(\frac{1}{8}\alpha_1\right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.13) denklemi,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{7}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2}\right)\delta_0^{n+1} + \left(-\frac{1}{4}\beta_{m1} + \beta_{m2}\right)\delta_1^{n+1} = \\ & F_2 - \beta_{m1}\left(\frac{1}{8}\alpha_1\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

ve (4.14) denklemi

$$(\beta_{m2} - 11\beta_{m1})\delta_{N-1}^{n+1} + (\beta_{m2} - 11\beta_{m1})\delta_N^{n+1} = F_{N+1} - \beta_{m1}\alpha_2 \quad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre (4.8) denklem sistemi,

$$d^n = [\delta_{-2}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n]^T$$

olmak üzere

$$F = Bd^n + Cd^{n-1} + S$$

olarak alındığında

$$Ad^{n+1} = F \quad (4.18)$$

olarak matris formunda bulunmuş olur. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} \beta_{m2} & \beta_{m1} & & & & & & & & & \\ \beta_{m2} & \beta_{m2} & \beta_{m1} & & & & & & & & \\ & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m2} & \beta_{m1} & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m2} & \beta_{m1} & & & \\ & & & & & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m2} & & & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m4} & \beta_{m3} & & & \\ & \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m4} & \beta_{m3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{m3} & \beta_{m4} & \beta_{m4} & \beta_{m3} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2h^2 & -22h^2 & -22h^2 & -2h^2 & & & \\ & -2h^2 & -22h^2 & -22h^2 & -2h^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -2h^2 & -22h^2 & -22h^2 & -2h^2 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}\beta_{m1}\alpha_1 - \frac{1}{8}\beta_{m2}\alpha_1 \\ -\frac{1}{8}\beta_{m1}\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\beta_{m1}\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Eleman parametresi için $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde dört bandlı köşegen sel denkle m sistemi bulunmuş olur. Lineer hale getirilmiş (2.1) denkleminin çözü mü, (2.20) iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileşt irilebilir.

(4.18) sistemini kullanarak δ^{n+1} yaklaşımını bulduktan sonra, δ^{n+1} değ er ine yeni yaklaşım (2.20) işlemi ile elde edilir. Yeni zaman adımına geçmeden önce δ^{n+1} değerini iyileştirmek için iterasyon iki veya üç kez tekrarlanır.

4.3 Başlangıç Durumu

δ_m^n parametresini (4.18) denkle m sisteminden elde edebilmek için δ_m^0 ve δ_m^1 başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için $U(x, 0)$

başlangıç koşulundan (4.1) yaklaşık fonksiyonu yardımıyla δ_m^0 ve sonlu fark yaklaşımından

$$\delta_m^1 = \delta_m^0 \Delta t + \delta_m^0$$

formülü yardımıyla başlangıç parametreleri belirlenebilir.

Bölünme noktalarında, yaklaşık çözüm ile analitik çözüm aynı olacağından

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0),$$

$$m = 0, \dots, N$$

yazılır. Buradan $N + 4$ bilinmeyenli $N + 1$ denklemden oluşan

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-2}^0 + 11\delta_{-1}^0 + 11\delta_0^0 + \delta_1^0 \\ U(x_1, 0) &= \delta_{-1}^0 + 11\delta_0^0 + 11\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ &\vdots \\ U(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-3}^0 + 11\delta_{N-2}^0 + 11\delta_{N-1}^0 + \delta_N^0 \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-2}^0 + 11\delta_{N-1}^0 + 11\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler sisteminde δ_{-2}^0 , δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 parametreleri başlangıç koşulları kullanılarak yok edilir. Bunun için

$$\begin{aligned} U'_N(a, 0) &= 0 \\ U''_N(a, 0) &= 0 \\ U'_N(b, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

sınır koşullarını kullanacağız. Bu sınır koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{4}{h}(\delta_1^0 + 3\delta_0^0 - 3\delta_{-1}^0 - \delta_{-2}^0) &= 0 \\ \frac{12}{h^2}(\delta_1^0 - \delta_0^0 - \delta_{-1}^0 - \delta_{-2}^0) &= 0 \\ \frac{4}{h}(\delta_{N+1}^0 + 3\delta_N^0 - 3\delta_{N-1}^0 - \delta_{N-2}^0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

yazılır. Buradan $\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0$ ve δ_{N+1}^0 parametreleri

$$\begin{aligned} \delta_{-2}^0 &= 3\delta_0^0 - 2\delta_1^0 \\ \delta_{-1}^0 &= 2\delta_0^0 - \delta_1^0 \\ \delta_{N+1}^0 &= \delta_{N-2}^0 + 3\delta_{N-1}^0 - 3\delta_N^0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (4.19) denklemine yerine yazılırsa

$$A = \begin{bmatrix} 36 & -23 & & & & \\ 13 & 10 & 1 & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & & 2 & 14 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$b = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{N-1}), U(x_N)]^T$$

olmak üzere, (4.19) denklem sistemi matris formunda

$$A \delta^0 = b \quad (4.23)$$

şeklinde bulunur. Burada A matrisi $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde dört bandlı köşgensel bir matristir.

Lineerleştirmeden kaynaklanan hatayı azaltmak için (2.22) iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileştirilebilir.

(4.18) sistemini kullanarak δ^{n+1} yaklaşımını bulduktan sonra, δ^{n+1} değerine yeni yaklaşım (2.22) işlemi ile elde edilir. Yeni zaman adımına geçmeden önce δ^{n+1} değerini iyileştirmek için iterasyon iki veya üç kez tekrarlanır.

4.4 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığını araştırmak için aşağıdaki eşitlikleri kullanacağız.

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imk\theta}, \quad \hat{\delta}^{n+1} = q \hat{\delta}^n \quad (4.24)$$

Burada i , birim imajiner sayı, q tanımlanması gereken kompleks sayı ve θ keyfi reel sayıdır.

$$\begin{aligned}
& \beta_{m1}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_m^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{m+1}^{n+1} = \\
& \beta_{m3}\delta_{m-2}^n + \beta_{m4}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m3}\delta_{m+1}^n \quad (4.25) \\
& -2h^2\delta_{m-2}^{n-1} - 22h^2\delta_{m-1}^{n-1} - 22h^2\delta_m^{n-1} - 2h^2\delta_{m+1}^{n-1}
\end{aligned}$$

(4.24) eşitliği (4.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \beta_{m1}\hat{\delta}^{n+1}e^{i(m-2)k\theta} + \beta_{m2}\hat{\delta}^{n+1}e^{i(m-1)k\theta} + \beta_{m2}\hat{\delta}^{n+1}e^{imk\theta} + \beta_{m1}\hat{\delta}^{n+1}e^{i(m+1)k\theta} = \\
& \beta_{m3}\hat{\delta}^ne^{i(m-2)k\theta} + \beta_{m4}\hat{\delta}^ne^{i(m-1)k\theta} + \beta_{m4}\hat{\delta}^ne^{imk\theta} + \beta_{m3}\hat{\delta}^ne^{i(m+1)k\theta} \\
& -2h^2\hat{\delta}^{n-1}e^{i(m-2)k\theta} - 22h^2\hat{\delta}^{n-1}e^{i(m-1)k\theta} - 22h^2\hat{\delta}^{n-1}e^{imk\theta} - 2h^2\hat{\delta}^{n-1}e^{i(m+1)k\theta} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. $e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ eşitliği kullanılarak bu denklem

$$\begin{aligned}
& \hat{\delta}^{n+1}\{[\beta_{m1}\cos(2k\theta) + \beta_{m2}\cos(k\theta) + \beta_{m2} + \beta_{m1}\cos(k\theta)] \\
& + [-\beta_{m1}\sin(2k\theta) - \beta_{m2}\sin(k\theta) + \beta_{m1}\sin(k\theta)]i\} = \\
& \hat{\delta}^n\{[\beta_{m3}\cos(2k\theta) + \beta_{m4}\cos(k\theta) + \beta_{m4} + \beta_{m3}\cos(k\theta)] \\
& + [-\beta_{m3}\sin(2k\theta) - \beta_{m4}\sin(k\theta) + \beta_{m3}\sin(k\theta)]i\} \quad (4.27) \\
& -\hat{\delta}^{n-1}\{[2h^2\cos(2k\theta) + 22h^2\cos(k\theta) + 22h^2 + 2h^2\cos(k\theta)] \\
& + [-2h^2\sin(2k\theta) - 22h^2\sin(k\theta) + 2h^2\sin(k\theta)]i\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
A &= \beta_{m1}\cos(2k\theta) + \beta_{m2}\cos(k\theta) + \beta_{m2} + \beta_{m1}\cos(k\theta) \\
B &= -\beta_{m1}\sin(2k\theta) - \beta_{m2}\sin(k\theta) + \beta_{m1}\sin(k\theta) \\
C &= \beta_{m3}\cos(2k\theta) + \beta_{m4}\cos(k\theta) + \beta_{m4} + \beta_{m3}\cos(k\theta) \\
D &= -\beta_{m3}\sin(2k\theta) - \beta_{m4}\sin(k\theta) + \beta_{m3}\sin(k\theta) \\
E &= 2h^2\cos(2k\theta) + 22h^2\cos(k\theta) + 22h^2 + 2h^2\cos(k\theta) \\
F &= -2h^2\sin(2k\theta) - 22h^2\sin(k\theta) + 2h^2\sin(k\theta) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

olarak alındığında denklem

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}^{n+1}(A + iB) &= \hat{\delta}^n(C + iD) - \hat{\delta}^{n-1}(E + iF) \\
\hat{\delta}^{n+1}(A + iB) &= \hat{\delta}^n(C + iD) - \frac{1}{q}\hat{\delta}^n(E + iF) \\
q\hat{\delta}^n(A + iB) &= \hat{\delta}^n[(C - \frac{1}{q}E) + (D - \frac{1}{q}F)i] \\
q(A + iB) &= (C - \frac{1}{q}E) + (D - \frac{1}{q}F)i \\
q^2A - qC + E &= 0 \\
q^2B - qD + F &= 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

haline gelir. Kararlılığın sağlanabilmesi için ya $|q| \leq 1$ yada q kompleks olmalıdır.

q nun kompleks olması durumunda (4.39) denklemi için $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre $C^2 - 4AE < 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
C^2 - 4AE &= 4\Delta t^2(\cos \theta + 1)^2[(12 \cos \theta + z_m h^2 \cos \theta + 5z_m h^2 - 12) \\
&(z_m h^2 \Delta t^2 \cos \theta + 5z_m h^2 \Delta t^2 + 16h^2 \cos \theta + 80h^2 + 12\Delta t^2 \cos \theta - 12\Delta t^2)] < 0
\end{aligned}$$

$$[z_m h^2(\cos \theta + 5) + 12(\cos \theta - 1)]$$

$$[\Delta t^2(z_m h^2(\cos \theta + 5) + 12(\cos \theta - 1)) + 16h^2(\cos \theta + 5)] < 0$$

$-2 < \cos \theta - 1 < 0$ ve $4 < \cos \theta + 5 < 6$ olduğundan $\cos \theta + 5 = 4$ ve $\cos \theta - 1 = -2$ alındığında eşitsizlik değişmeyeceğinden

$$4(4z_m h^2 \Delta t^2 - 24\Delta t^2 + 64h^2)(z_m h^2 - 6) < 0$$

$$\Delta t < \frac{4h}{\sqrt{6 - z_m h^2}}$$

olur. Bu şarta göre kararlılık sağlandığından denklem koşullu kararlıdır.

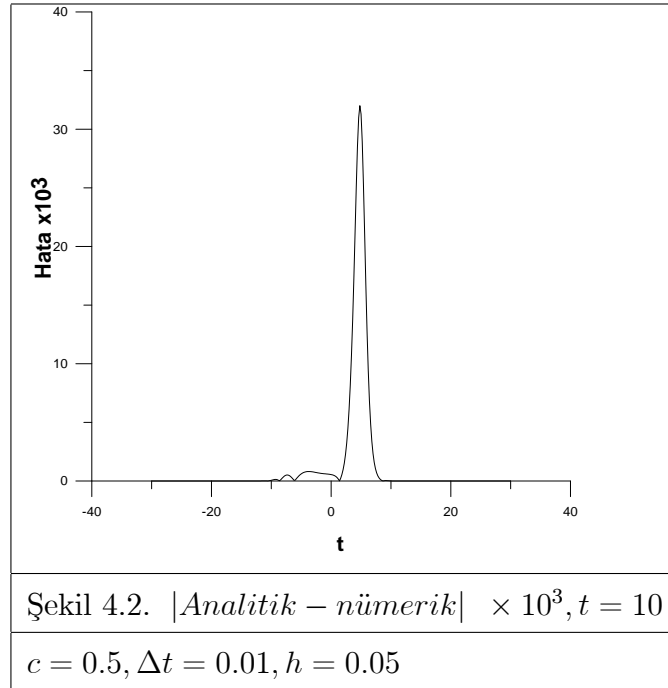
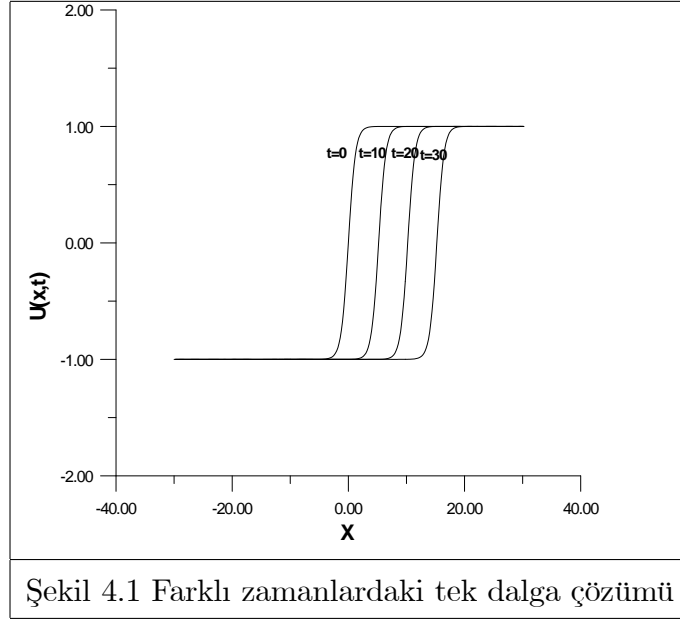
4.5 Test Problemleri

4.5.1 Birinci Test Problemi

Bu test problemini fiziksel olarak incelediğimizde, hareketin tek dalgadan oluştuğunu görülür. Hareketli dalga çözümü (1.4) ve (1.5) formundadır.

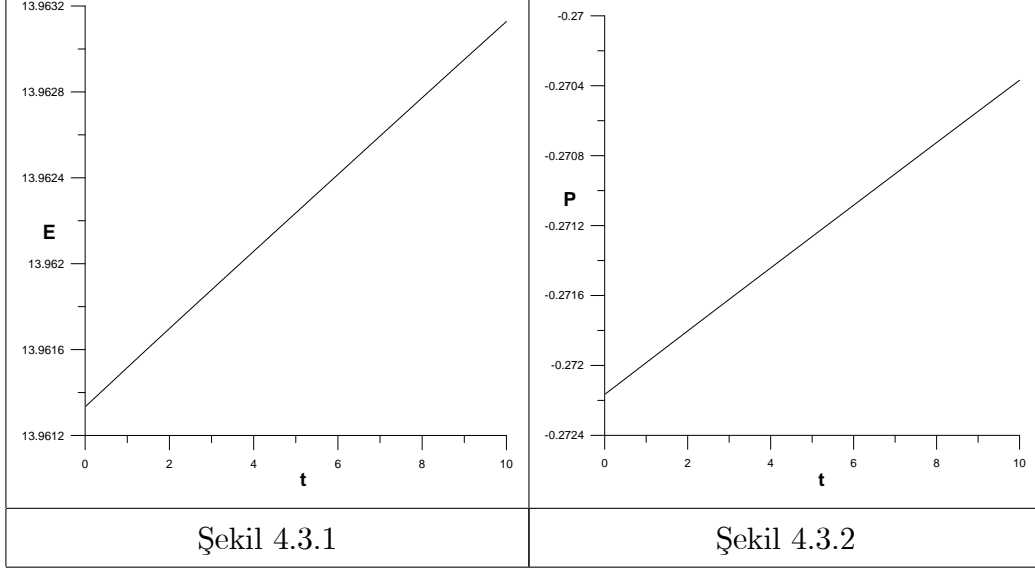
Hesaplama $c = 0.5$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde $t = 10$ oluncaya kadar yapıldı. $t = 10$ anında farklı h ve Δt değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. $c = 0.5, t = 10, -30 \leq x \leq 30$					
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	P	E
0.2	0.05	40.39069	32.00866	-0.26351	13.96988
0.1	0.02	16.38021	12.98879	-0.26860	13.93988
0.05	0.01	8.23193	6.52831	-0.27037	13.92563
0.02	0.005	4.12707	3.27426	-0.27126	13.91724



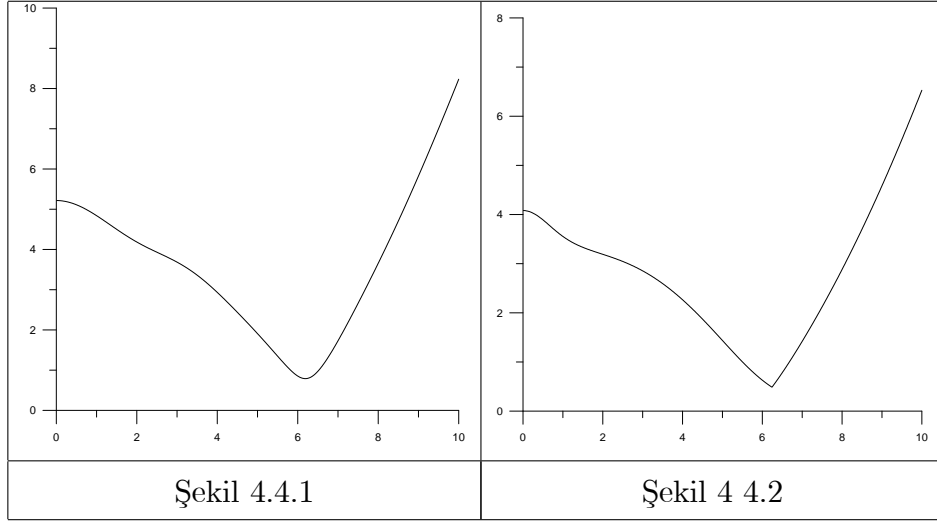
Şekil 4.2 de $t = 10$ zamanında $-30 \leq x \leq 30$ aralığında analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki fark çizilmiştir. Elde edilen verilere göre hata

oranı binde 30 oranındadır.



Birinci test problemi için enerji ve momentum değerlerinde ortaya çıkan değişimi inceleyelim. Şekil 4.3.1 de enerji değerlerindeki değişim verilmiştir. Enerji değerlerinin değişim aralığı 13.96133 ile 13.96312 dir. Buradan anlıyoruz ki enerji değerlerinde 17×10^{-4} kadar bir değişim gerçekleşmiştir. Şekil 4.3.2 de ise momentumdaki değişim görülmektedir. Momentum değerleri -0.272163 ile -0.270369 arasında değişmiştir. Momentum değeri 18×10^{-4} oranında bir değişim göstermiştir. Bu değişim değerlerine bakıldığında, enerji ve momentumdaki değişiklikler oldukça küçüktür. Şekil 4.3.1 ve Şekil 4.3.2 için Tablo 4.1 de verilen diğer h ve Δt değerleri alındığında değişim aralığı daha da küçülmektedir. Buna göre çözüm yöntemimiz iyi sonuç ver-

miştir.



Birinci test problemi için L_2 ve L_∞ hata normlarını inceleyelim. $c = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.01$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde L_2 ve L_∞ hata normlarının hareketleri Şekil 4.4.1 ve Şekil 4.4.2 de gösterilmiştir. Her iki norm da önce azalmış daha sonra bir miktar artmıştır. Buna göre $t = 6$ zamanında en iyi hata oranı elde edilmiştir. En yüksek değer $t = 10$ zamanında 10^{-3} civarındadır. Bu da sayısal çözümün $t = 6$ zamanında en iyi sonuç verdiğini gösterir.

4.5.2 İkinci Test Problemi

İkinci test problemi iki dalganın hareketinden oluşmaktadır. İki dalga birbirine doğru hareket ederek çarpışırlar. Biz de çalışmamızda bu çarpışmanın nasıl oluştuğunu ve dalgaların ne gibi bir seyir izlediğini göstereceğiz. Bu test probleminde (1.8) ve (1.9) analitik çözümleri kullanılacaktır.

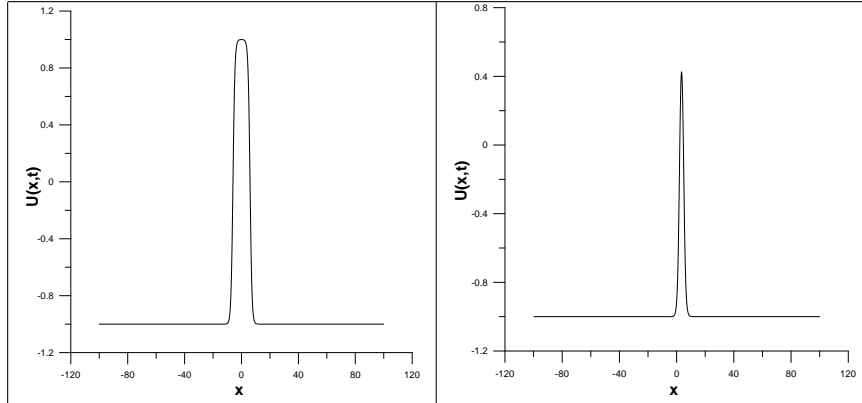
Hesaplama farklı c değerleri alınarak $-60 \leq x \leq 60$ aralığı içinde $t = 120$ oluncaya kadar yapıldı. $h = 0.05$, $x_0 = 6$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri kullanılarak $t = 120$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.2 de verilmiştir.

Tablo 4.2		
c	E_0	E_{120}
0.1	28.12212	28.69120
0.15	28.11603	28.89500
0.175	28.11199	28.93829
0.195	28.10825	28.93269
0.2	28.10725	28.95473
0.22	28.10291	28.89482
0.25	28.09547	28.84059
0.26	28.09273	28.74375
0.3	28.08031	28.83251
0.5	27.97126	28.39832
0.7	27.69554	27.90868
0.9	26.56244	26.84473

Farklı c dalga hızları için ikinci test problemi uygulanmıştır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen veriler Tablo 4.2 de incelendiğinde, $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerleri arasındaki fark c dalga hızına göre değişmektedir. Bu metod için c dalga hızı 0.3 den büyük alındığında enerji değeri azalmaktadır. Buna göre küçük dalga hızları için daha iyi enerji korunumu sağlanmaktadır.

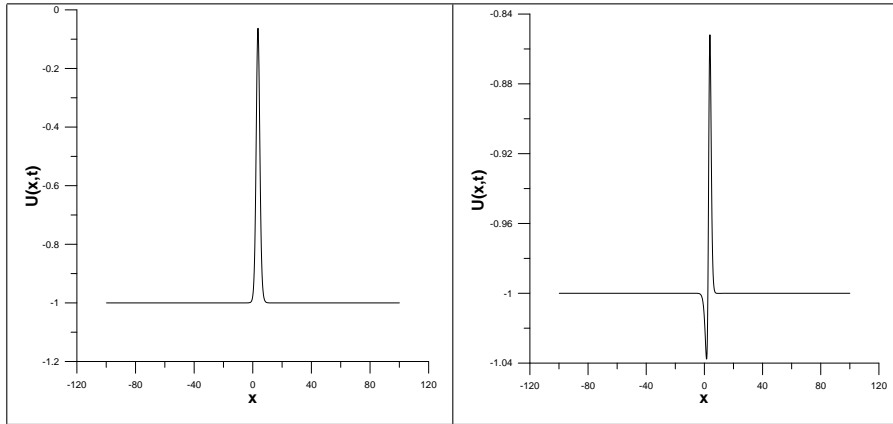
$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga

çifti hareketlerini inceleyelim;



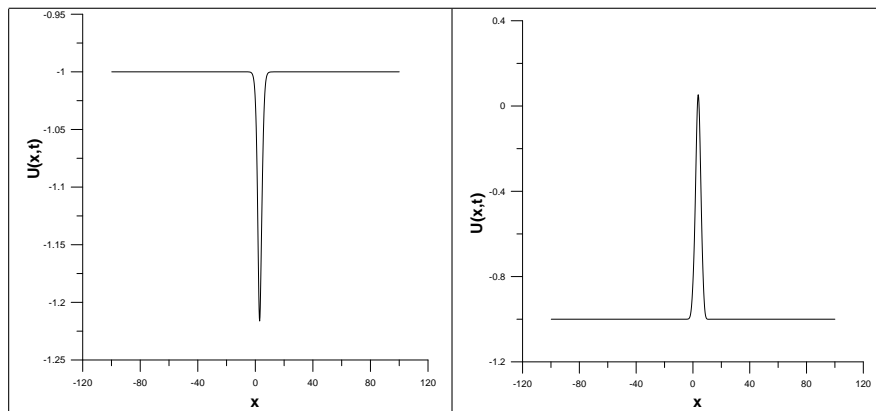
Şekil 4.5.1 $t = 0$

Şekil 4.5.2 $t = 69$



Şekil 4.5.3 $t = 70$

Şekil 4.5.4 $t = 70.5$

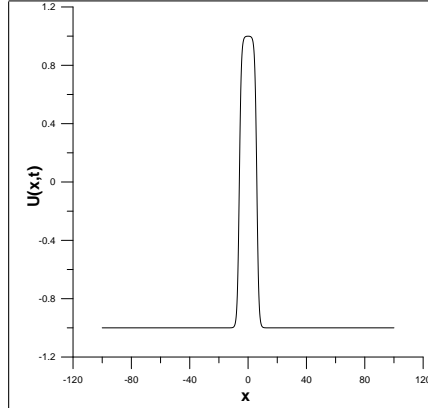
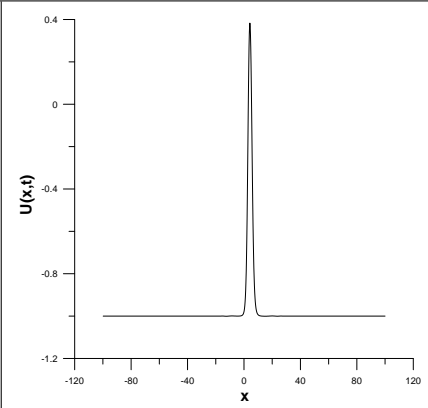
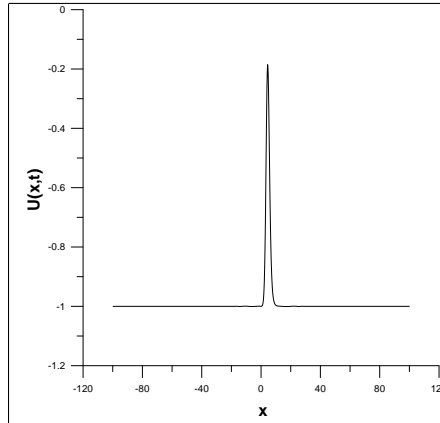
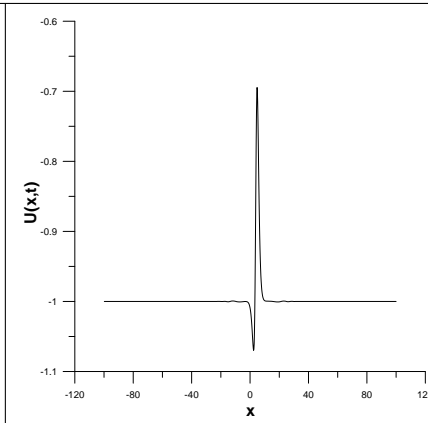


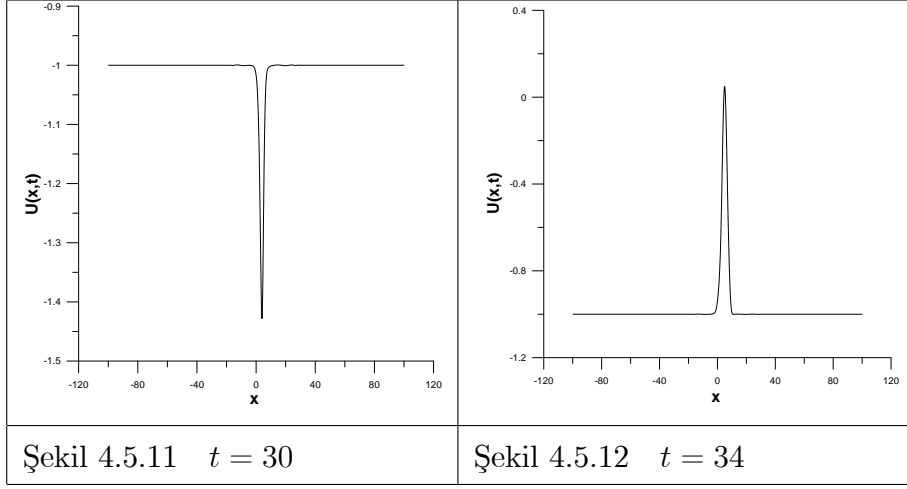
Şekil 4.5.5 $t = 71$

Şekil 4.5.6 $t = 75$

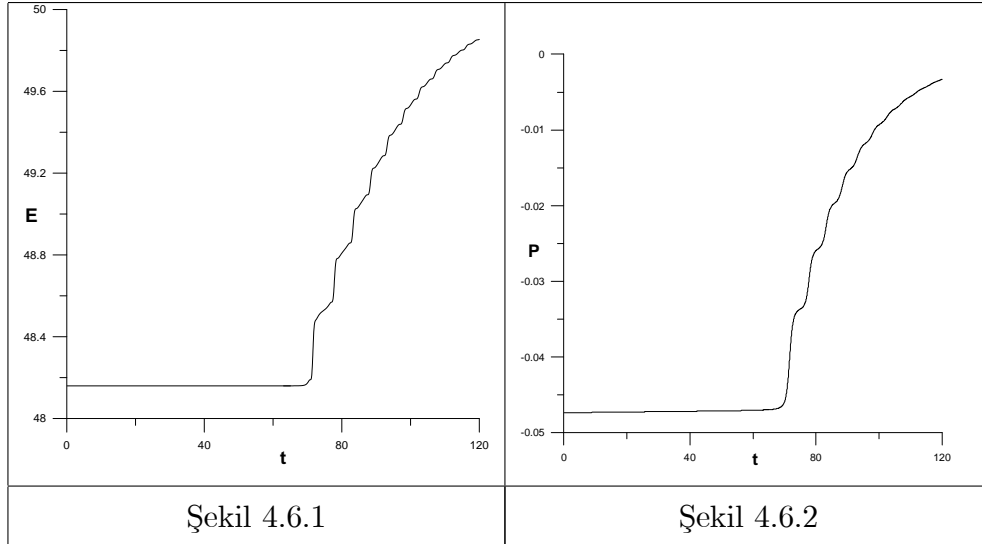
İkinci test problemi için dalga çiftlerinin hareketlerindeki değişimler Şekil 4.4.1-6 da verilmiştir. Buna göre $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi ile başlayan hareket belli bir süreçte devam ederek değişime uğrar. $t = 69$ ve $t = 70$ de ilerleyen dalgalar $t = 70.5$ da çarpışır ve $t = 71$ de yön değiştirir. Şekil 4.5.6 da $t = 75$ zamanında dalga tekrar yön değiştirerek bir sonraki çarpışma hareketi için hazır konuma gelmeye başlar.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim;

Şekil 4.5.7 $t = 0$ Şekil 4.5.8 $t = 28$ Şekil 4.5.9 $t = 29$ Şekil 4.5.10 $t = 29.5$

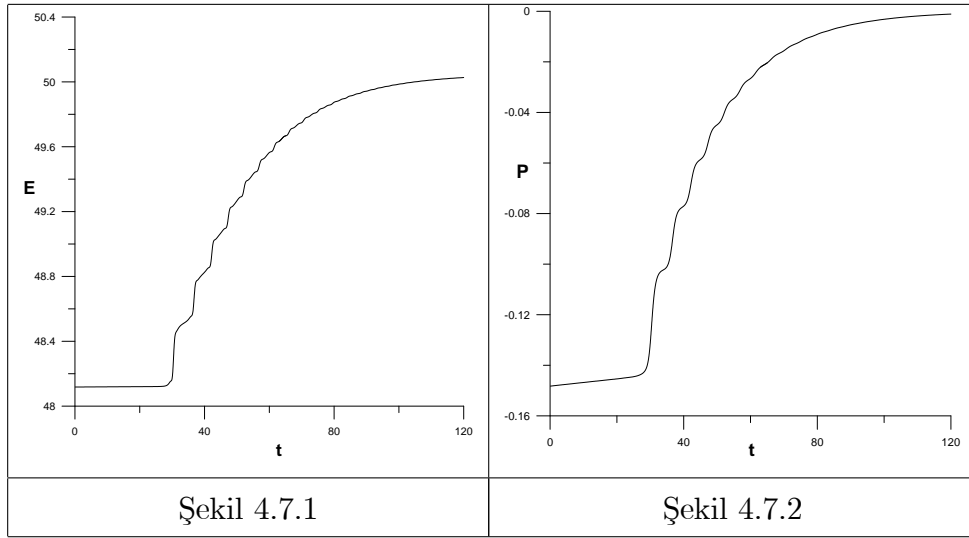


Şekil 4.5.7-12 de, farklı zamanlarda dalga çiftlerinin oluşturduğu hareketlerde ortaya çıkan değişiklikler verilmiştir. Şekil 4.5.7 de başlangıç dalga çifti ile başlayan hareket $t = 28$ ve $t = 29$ da devam eder. Şekil 4.5.10 da $t = 29.5$ zamanında dalgalar çarpışmaktadır. Çarpışmanın etkisiyle Şekil 4.5.11 de $t = 30$ zamanında dalga çifti yön değiştirir. Şekil 4.5.12 de $t = 34$ zamanında dalga çifti tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlar.



Dalga çarpışmaları sonucunda ortaya çıkan enerji ve momentum davranışları Şekil 4.6.1 ve Şekil 4.6.2 de verilmiştir. Buradaki hareket $-100 \leq x \leq 100$

aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan hesaplamalar sonucunda enerjinin değeri 48.15962 ile 49.85391 arasında değişmektedir. Şekil 4.6.1 incelendiğinde $t = 70$ civarında yani dalgaların çarpışma zamanında enerjide bir artış meydana gelmektedir. Bu artış $t = 120$ zamanına kadar devam etmektedir. Aynı durumda momentum ise -0.04738 ile -0.00331 arasındadır. Şekil 4.6.2 incelendiğinde momentumdaki değişimin, enerji değişimi ile aynı olduğu görülmektedir.

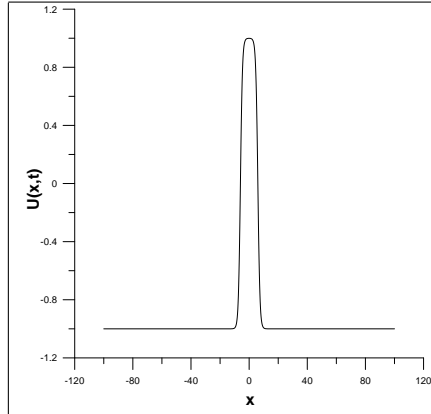


$c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak $-100 \leq x \leq 100$ aralığında enerji ve momentum değerleri hesaplanmıştır. Bu hesaplama sonucunda elde edilen değerler grafiğe aktarılarak Şekil 4.7.1 ve Şekil 4.7.2 de gösterilmiştir. Enerjinin değeri 48.11782 ile 50.02706 arasında değişmektedir. Şekil 4.7.1 incelendiğinde $t = 30$ civarında yani dalgaların çarpışma zamanında enerjide bir artış meydana gelmektedir. Bu artış $t = 120$ zamanına kadar devam etmektedir. Aynı şartlarda momentum ise -0.14824 ile -0.0011 arasındadır. Şekil 4.6.2 incelendiğinde momentumdaki değişim hareketinin, enerji değişimi ile aynı olduğu görülmektedir.

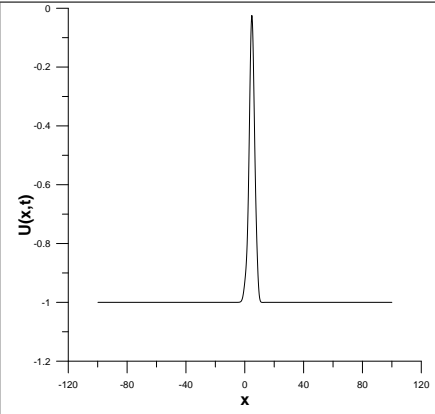
4.5.3 Üçüncü Test Problemi

Üçüncü test problemi fiziksel olarak iki dalga hareketinden oluşur. İkinci test probleminden farklı olarak bu kez dalgalardan biri hareketsizdir. Bu test probleminde (1.12) ve (1.13) analitik çözümleri kullanılacaktır. Başlangıç koşulu olarak da (1.12) de $t = 0$ alınarak çözüm elde edilecektir.

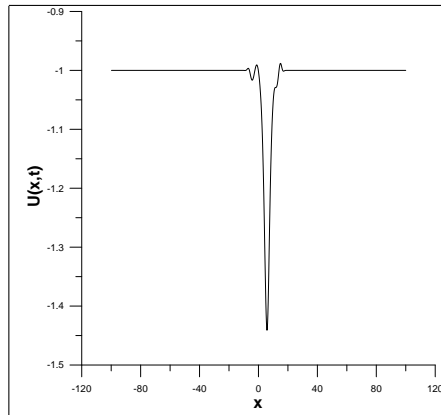
Şimdi $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.25$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim;



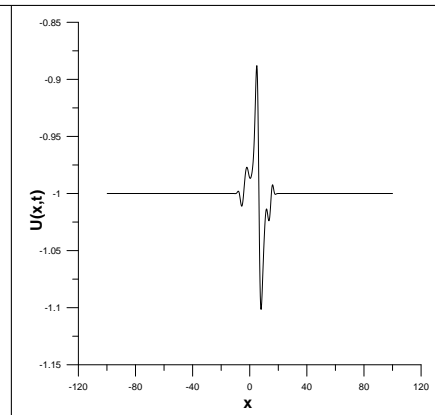
Şekil 4.8.1 $t = 0$



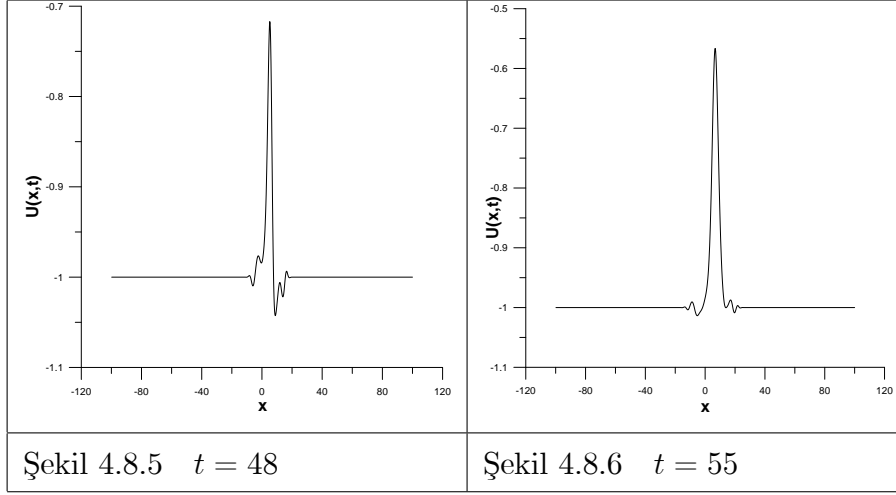
Şekil 4.8.2 $t = 39$



Şekil 4.8.3 $t = 47$



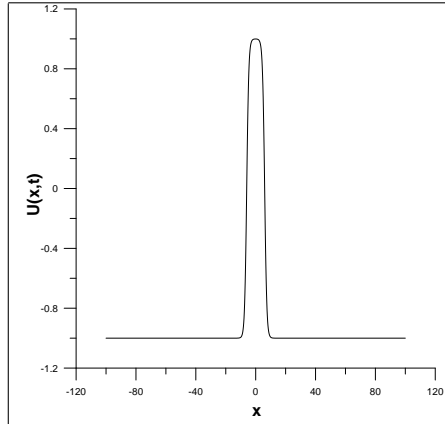
Şekil 4.8.4 $t = 47.75$



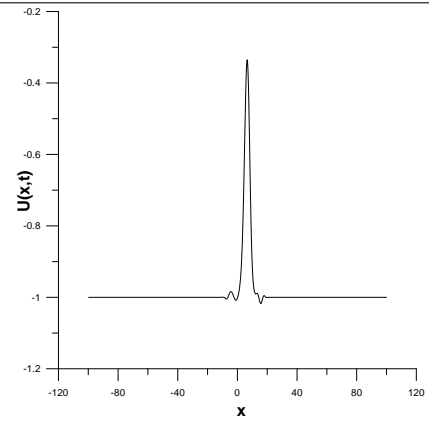
Üçüncü test problemine, verilen değerler uygulandığında dalga çifti için ortaya çıkan dalga hareketleri Şekil 4.8.1-6 da gösterilmiştir. Şekil 4.8.1 de $t = 0$ zamanındaki başlangıç dalga hareketi verilmiştir. Şekil 4.8.2 de $t = 39$ zamanındaki dalga hareketi incelendiğinde dalga boyu azalmıştır. Şekil 4.8.3 de $t = 47$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 4.8.4 de $t = 47.75$ zamanında çarpışan dalgalar tekrar yön değiştirme hazırlığındadır. Şekil 4.8.5 de $t = 48$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 4.8.6 da $t = 55$ zamanında dalga tekrar yön değiştirerek yeni bir çarpışma hareketi için hazır konuma gelmiştir.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu

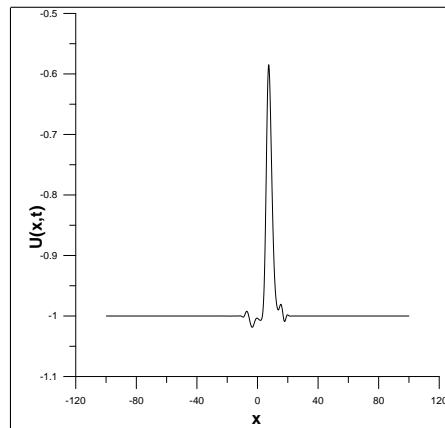
dalga çifti hareketlerini inceleyelim;



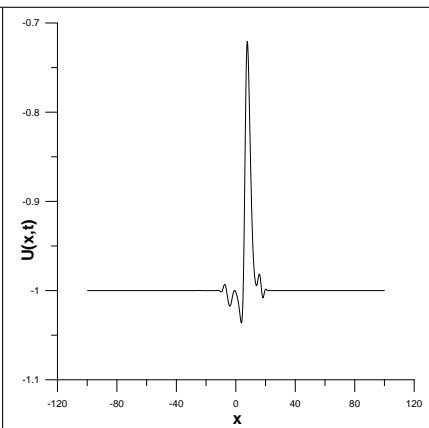
Şekil 4.8.7 $t = 0$



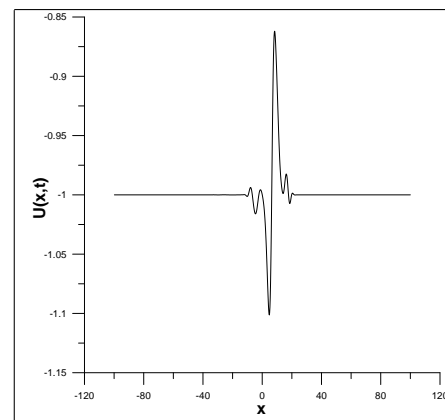
Şekil 4.8.8 $t = 41$



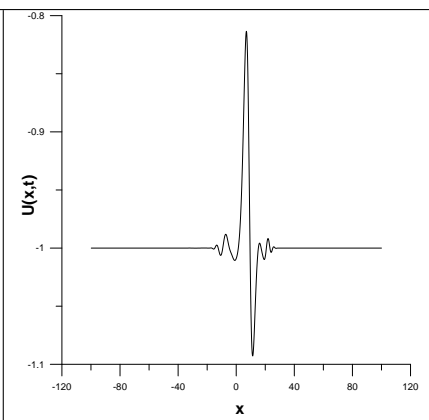
Şekil 4.8.9 $t = 42.5$



Şekil 4.8.10 $t = 42.75$

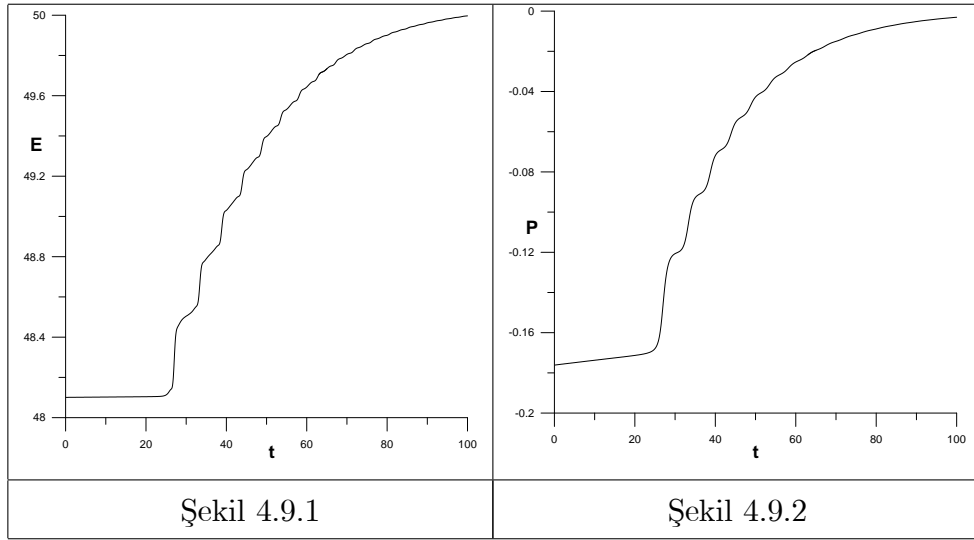


Şekil 4.8.11 $t = 43$



Şekil 4.8.12 $t = 50$

Üçüncü test problemi için $c = 0.35$ alındığında ortaya çıkan değişiklikler Şekil 4.8.7-12 de verilmiştir. Şekil 4.8.7 de $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi, Şekil 4.8.8 de $t = 41$ zamanındaki dalga çifti hareketi verilmiştir. Şekil 4.8.9 ve Şekil 4.8.10 da $t = 42.5$ ve $t = 42.75$ zamanlarında dalga çifti hareketi devam etmiştir. Şekil 4.8.11 de $t = 43$ zamanında dalgaların çarpışması gerçekleşmiştir. Şekil 4.8.12 de $t = 50$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek başlangıç konumuna yakın bir hal almıştır.



Şekil 4.9.1 ve Şekil 4.9.2 de $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ alınarak $-100 \leq x \leq 100$ aralığı içinde enerji değerleri 48.10073 ile 49.99681 arasındadır. Momentum -0.17611 ile -0.00305 arasında değişmektedir. Buna göre her iki özellik de iyi korunumludur. Enerji ve momentum değerleri dalga çarpışması esnasında artmaya başlar ve bu artış $t = 100$ zamanına kadar devam etmektedir.

Tablo 4.3

c	E_0	E_{120}
0.1	28.1221	28.6914
0.15	28.1161	28.8980
0.175	28.1121	28.9481
0.195	28.1084	28.9773
0.2	28.1074	28.9922
0.22	28.1032	29.0082
0.25	28.0960	29.0420
0.26	28.0933	29.0481
0.3	28.0814	29.0809
0.5	27.9810	29.1346
0.7	27.7495	29.0491
0.9	26.9067	27.8124

$-60 \leq x \leq 60, h = 0.05, \Delta t = 0.01, x_0 = 6, t = 120$

İki zaman arasında enerji ve momentum değerlerindeki değişimi görmek için bir uygulama yapılmıştır. Bu uygulamaya göre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında enerji ve momentum değerleri hesaplanmış ve Tablo 4.3 e aktarılmıştır. $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, c dalga hızı 0.1 ile 0.195 arasında iken fark 0.70 civarındadır. Dalga hızı 0.2 ve daha büyük alındığında bu fark artmaktadır. Buna göre en iyi enerji korunumu 0.1 ile 0.195 arasındaki dalga hızları için sağlanmaktadır.

Tablo 4.4: Farklı dalga hızlarında enerji ve momentum		
c	<i>Enerji</i>	<i>Momentum</i>
0.1	49.5334	-0.00932
0.35	49.9968	-0.00305
0.4	50.0040	-0.00300
0.55	50.0177	-0.00295
0.7	50.0260	-0.00288
0.8	50.0306	-0.00274
0.9	50.0356	-0.00243
$-100 \leq x \leq 100, h = 0.2, \Delta t = 0.05, x_0 = 6, t = 100$		

Farklı dalga hızları için enerji ve momentumdaki değişim hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.4 e aktarılmıştır. Tablo incelendiğinde dalga hızları 0.4 ile 0.9 arasında alındığında elde edilen enerji ve momentum değerleri arasındaki fark çok düşüktür. Dalga hızları 0.1 ve 0.35 arasında iken enerji ve momentum değerleri arasındaki fark artmaktadır. Buna göre bu metod için 0.4 den büyük dalga hızlarında enerji ve momentum korunumu daha tutarlıdır.

Bölüm 5

Klein-Gordon Denkleminin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümü

5.1 Giriş

Bu bölümde KG denkleminin kuintik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri verilecektir.

5.2 Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ çözüm aralığının bölünme noktalarında

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_N = b$$

alt aralıklara bölünme ve $\phi_m(x)$, $m = -2, -1, \dots, N + 1, N + 2$ fonksiyonları bölüm noktalarında tanımlı kuintik B-spline fonksiyonlar olsun. KG denkle-

mindeki $U(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x, t)$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözüm kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_N(x, t) = \delta_{-2}(t)\phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \cdots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) + \delta_{N+2}(t)\phi_{N+2}(x) \quad (5.1)$$

Bu ifadedeki δ_m (2.1) denkleminin kuintik kolokeyşin formundan ve

$$\begin{aligned} U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0 \quad , \quad t \in (0, T] \\ U_{xx}(a, t) = 0, \quad U_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

sınır koşullarından elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kuintik B-spline fonksiyonlar ardışık altı aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı altı ardışık kuintik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür. Böylece U yaklaşık çözümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kuintik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-2}^{m+3} \delta_j \phi_j$$

biçiminde yazılabilir. Tablo 1.3 kullanılarak bölünme noktalarında eleman parametreleri cinsinden U_m yaklaşık çözümü

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \quad (5.3)$$

ve bu yaklaşık çözümün dördüncü dereceye kadarki türevleri

$$\begin{aligned} U'_m &= U'(x_m) = \frac{5}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U''_m &= U''(x_m) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ U'''_m &= U'''(x_m) = \frac{60}{h^3}(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ U''''_m &= U''''(x_m) = \frac{120}{h^4}(\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

olarak bulunabilir. U_N in bölüm noktalarındaki (5.3) değerleri ve (5.4) türevleri (2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \ddot{\delta}_{m-2} + 26\ddot{\delta}_{m-1} + 66\ddot{\delta}_m + 26\ddot{\delta}_{m+1} + \ddot{\delta}_{m+2} \\ & - \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ & - z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) = 0, \\ & z_m = (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2 - 1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$N + 1$ denklemlilik diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada "oo" zamana bağlı ikinci mertebeden türevdir. δ_m eleman parametresinin iki ardışık zaman adımı n ve $n + 1$ arasında değerleri Crank-Nicholson formülü yardımıyla

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n), \quad (5.6)$$

ve bunun zamana göre ikinci türevi sonlu farklar yaklaşımıyla

$$\delta_m^{\circ\circ} = \frac{1}{\Delta t^2}(\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^n + \delta_m^{n-1}) \quad (5.7)$$

olarak bulunur. Bu değerler (5.5) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (2 + (z_m - \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-2}^{n+1} + (52 + (26z_m - \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-1}^{n+1} + \\ & (132 + (66z_m + \frac{120}{h^2})\Delta t^2)\delta_m^{n+1} + (52 + (26z_m - \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+1}^{n+1} + \\ & (2 + (z_m - \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+2}^{n+1} = \\ & (4 + (-z_m + \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-2}^n + (104 + (-26z_m + \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-1}^n + \\ & (264 + (-66z_m - \frac{120}{h^2})\Delta t^2)\delta_m^n + (104 + (-26z_m + \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+1}^n + \\ & (4 + (-z_m + \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+2}^n - 2\delta_{m-2}^{n-1} - 52\delta_{m-1}^{n-1} - 132\delta_m^{n-1} - 52\delta_{m+1}^{n-1} - 2\delta_{m+2}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. Bu sistem yeniden düzenlenirse $N + 1$ denklem $N + 5$ bilinmeyenden oluşan cebirsel denklem sistemi bulunur.

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m3}\delta_m^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{m+2}^{n+1} = \\ & \beta_{m4}\delta_{m-2}^n + \beta_{m5}\delta_{m-1}^n + \beta_{m6}\delta_m^n + \beta_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m4}\delta_{m+2}^n - \\ & 2\delta_{m-2}^{n-1} - 52\delta_{m-1}^{n-1} - 132\delta_m^{n-1} - 52\delta_{m+1}^{n-1} - 2\delta_{m+2}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Burada

$$\begin{aligned}
\beta_{m1} &= 2 + (z_m - \frac{20}{h^2})\Delta t^2 \\
\beta_{m2} &= 52 + (26z_m - \frac{40}{h^2})\Delta t^2 \\
\beta_{m3} &= 132 + (66z_m + \frac{120}{h^2})\Delta t^2 \\
\beta_{m4} &= 4 + (-z_m + \frac{20}{h^2})\Delta t^2 \\
\beta_{m5} &= 104 + (-26z_m + \frac{40}{h^2})\Delta t^2 \\
\beta_{m6} &= 264 + (-66z_m - \frac{120}{h^2})\Delta t^2
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemdeki δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} ve δ_{N+2} parametreleri sınır koşulları kullanılarak yokedilecektir. Böylece $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 5 bandlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(5.2) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\frac{5}{h}(\delta_2 + 10\delta_1 - 10\delta_{-1} - \delta_{-2}) &= 0 \\
\frac{20}{h^2}(\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2}) &= 0 \\
\frac{5}{h}(\delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) &= 0 \\
\frac{20}{h^2}(\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) &= 0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerden sınır parametrelerinin değeri

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{165}{4}\delta_0 + \frac{65}{2}\delta_1 + \frac{9}{4}\delta_2 \\
\delta_{-1} &= -\frac{1}{8}\delta_2 - \frac{9}{4}\delta_1 - \frac{33}{8}\delta_0 \\
\delta_{N+1} &= -\frac{1}{8}\delta_{N-2} - \frac{9}{4}\delta_{N-1} - \frac{33}{8}\delta_N \\
\delta_{N+2} &= \frac{9}{4}\delta_{N-2} + \frac{65}{2}\delta_{N-1} + \frac{165}{4}\delta_N
\end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklinde elde edilir.

Bulunan bu değerler (5.9) denklem sisteminde yerine yazılır. Buna göre

(5.9) denklem sisteminde $m = 0, 1$ alarak

$$\begin{aligned}
F_1 &= \beta_{m4}\delta_{-2}^n + \beta_{m5}\delta_{-1}^n + \beta_{m6}\delta_0^n + \beta_{m5}\delta_1^{n+1} + \beta_{m4}\delta_2^n - \\
&2\delta_{-2}^{n-1} - 52\delta_{-1}^{n-1} - 132\delta_0^{n-1} - 52\delta_1^{n-1} - 2\delta_2^{n-1}, \\
F_2 &= \beta_{m4}\delta_{-1}^n + \beta_{m5}\delta_0^n + \beta_{m6}\delta_1^n + \beta_{m5}\delta_2^{n+1} + \beta_{m4}\delta_3^n - \\
&2\delta_{-1}^{n-1} - 52\delta_0^{n-1} - 132\delta_1^{n-1} - 52\delta_2^{n-1} - 2\delta_3^{n-1}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$m = N - 1, N$ alarak

$$\begin{aligned}
F_N &= \beta_{m4}\delta_{N-3}^n + \beta_{m5}\delta_{N-2}^n + \beta_{m6}\delta_{N-1}^n + \beta_{m5}\delta_N^{n+1} + \beta_{m4}\delta_{N+1}^n - \\
&2\delta_{N-3}^{n-1} - 52\delta_{N-2}^{n-1} - 132\delta_{N-1}^{n-1} - 52\delta_N^{n-1} - 2\delta_{N+1}^{n-1}, \\
F_{N+1} &= \beta_{m4}\delta_{N-2}^n + \beta_{m5}\delta_{N-1}^n + \beta_{m6}\delta_N^n + \beta_{m5}\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m4}\delta_{N+2}^n - \\
&2\delta_{N-2}^{n-1} - 52\delta_{N-1}^{n-1} - 132\delta_N^{n-1} - 52\delta_{N+1}^{n-1} - 2\delta_{N+2}^{n-1}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

yazılır. (5.11) eleman parametreleri (5.12) ve (5.13) denklemlerinde yerine yazılıp denklemler düzenlenirse ilk iki denklem

$$\begin{aligned}
&(\frac{165}{4}\beta_{m1} - \frac{33}{8}\beta_{m2} + \beta_{m3})\delta_0^{n+1} + (\frac{65}{2}\beta_{m1} - \frac{5}{4}\beta_{m2})\delta_1^{n+1} \\
&+ (\frac{13}{4}\beta_{m1} - \frac{1}{8}\beta_{m2})\delta_2^{n+1} = F_1, \\
&(-\frac{33}{8}\beta_{m1} + \beta_{m2})\delta_0^{n+1} + (-\frac{9}{4}\beta_{m1} + \beta_{m3})\delta_1^{n+1} \\
&+ (-\frac{1}{8}\beta_{m1} + \beta_{m2})\delta_2^{n+1} + \beta_{m1}\delta_3^{n+1} = F_2
\end{aligned}$$

ve son iki denklem

$$\begin{aligned}
&(-\frac{33}{8}\beta_{m1} + \beta_{m2})\delta_N^{n+1} + (-\frac{9}{4}\beta_{m1} + \beta_{m3})\delta_{N-1}^{n+1} \\
&+ (-\frac{1}{8}\beta_{m1} + \beta_{m2})\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{N-3}^{n+1} = F_N \\
&(\frac{165}{4}\beta_{m1} - \frac{33}{8}\beta_{m2} + \beta_{m3})\delta_N^{n+1} + (\frac{65}{2}\beta_{m1} - \frac{5}{4}\beta_{m2})\delta_{N-1}^{n+1} \\
&+ (\frac{13}{4}\beta_{m1} - \frac{1}{8}\beta_{m2})\delta_{N-2}^{n+1} = F_{N+1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre denklem sistemi,

$$d^n = [\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+1}^n]^T$$

ve

$$F = Bd^n + Cd^{n-1}$$

olmak üzere

$$Ad^{n+1} = F \tag{5.14}$$

şeklindedir. $\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_{N+1}^n$ ve δ_{N+2}^n sınır parametreleri her zaman adımında (5.11) denklemlerinden hesaplanabilir.

5.3 Başlangıç Durumu

δ_m^n parametresini (5.13) denklem sisteminden elde edebilmek için δ_m^0 ve δ_m^1 başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için $U(x, 0)$ başlangıç koşulundan (5.1) yaklaşık fonksiyonu yardımıyla δ_m^0 ve sonlu fark yaklaşımından δ_m^1 ,

$$\delta_m^1 = \delta_m^0 \Delta t + \delta_m^0$$

formülü yardımıyla başlangıç parametreleri belirlenebilir.

Bölünme noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0), \quad m = 0, \dots, N$$

değerleri kullanılarak δ parametresi için,

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-2}^0 + 26\delta_{-1}^0 + 66\delta_0^0 + 26\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ U(x_1, 0) &= \delta_{-1}^0 + 26\delta_0^0 + 66\delta_1^0 + 26\delta_2^0 + \delta_3^0 \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-2}^0 + 26\delta_{N-1}^0 + 66\delta_N^0 + 26\delta_{N+1}^0 + \delta_{N+2}^0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$N + 5$ bilinmeyen $N + 1$ denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde $\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0$ ve δ_{N+2}^0 parametreleri yok edilirse, $N + 1$ bilinmeyenli $N + 1$ denklem sistemi elde edilir. Yoketme işlemi için

$$\begin{aligned} U'_N(a, 0) &= 0, \quad U'_N(b, 0) = 0 \\ U''_N(a, 0) &= 0, \quad U''_N(b, 0) = 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

sınır koşullarını kullanacağız. Bu sınır koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{5}{h}(\delta_2^0 + 10\delta_1^0 - 10\delta_{-1}^0 - \delta_{-2}^0) &= 0 \\
\frac{20}{h^2}(\delta_2^0 + 2\delta_1^0 - 6\delta_0^0 + 2\delta_{-1}^0 + \delta_{-2}^0) &= 0 \\
\frac{5}{h}(\delta_{N+2}^0 + 10\delta_{N+1}^0 - 10\delta_{N-1}^0 - \delta_{N-2}^0) &= 0 \\
\frac{20}{h^2}(\delta_{N+2}^0 + 2\delta_{N+1}^0 - 6\delta_N^0 + 2\delta_{N-1}^0 + \delta_{N-2}^0) &= 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

yazılır. Buradan $\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0$ ve δ_{N+2}^0 parametreleri

$$\begin{aligned}
\delta_{-2}^0 &= \frac{15}{2}\delta_0^0 - 5\delta_1^0 - \frac{3}{2}\delta_2^0 \\
\delta_{-1}^0 &= -\frac{3}{4}\delta_0^0 + \frac{3}{2}\delta_1^0 + \frac{1}{4}\delta_2^0 \\
\delta_{N+1}^0 &= \frac{1}{4}\delta_{N-2}^0 + \frac{3}{2}\delta_{N-1}^0 - \frac{3}{4}\delta_N^0 \\
\delta_{N+2}^0 &= -\frac{3}{2}\delta_{N-2}^0 - 5\delta_{N-1}^0 + \frac{15}{2}\delta_N^0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (5.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$A = \begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & & \\ 25.25 & 67.5 & 26.25 & 1 & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & 1 & 26.25 & 67.5 & 25.25 \\ & & & & 6 & 60 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$b = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{N-1}), U(x_N)]^T$$

olmak üzere, δ eleman parametresi için matris formunda

$$A \delta^0 = b$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla $(N+1) \times (N+1)$ tipinde beş sütun elemanlı band matris sistemi bulunmuş olur. Bu sistemin çözümü Thomas algoritması ile elde edilir.

Lineer hale getirdiğimiz (2.1) denkleminin çözümü, (2.20) iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileştirilebilir:

(5.13) sistemi kullanılarak, Thomas algoritması yardımıyla, δ^{n+1} yaklaşımları bulunur. Yeni zaman adımına geçmeden önce, δ^{n+1} değerlerini iyileştirmek için bu değerlere (2.20) ile verilen iterasyon iki veya üç kez tekrarlanır. Böylece δ^{n+1} yaklaşımlarının yeni değerleri elde edilmiş olur.

5.4 Kararlılık Analizi

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m3}\delta_m^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m1}\delta_{m+2}^{n+1} = \\ & \beta_{m4}\delta_{m-2}^n + \beta_{m5}\delta_{m-1}^n + \beta_{m6}\delta_m^n + \beta_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m4}\delta_{m+2}^n - \\ & 2\delta_{m-2}^{n-1} - 52\delta_{m-1}^{n-1} - 132\delta_m^{n-1} - 52\delta_{m+1}^{n-1} - 2\delta_{m+2}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

denkleminde $\delta_m^n = q^n e^{im\theta}$ alınarak kararlılık analizine başlanır. Bu değer (5.18) denkleminde yerine yazıldığında ;

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}q^{n+1}e^{i(m-2)\theta} + \beta_{m2}q^{n+1}e^{i(m-1)\theta} + \beta_{m3}q^{n+1}e^{im\theta} \\ & + \beta_{m2}q^{n+1}e^{i(m+1)\theta} + \beta_{m1}q^{n+1}e^{i(m+2)\theta} = \\ & \beta_{m4}q^n e^{i(m-2)\theta} + \beta_{m5}q^n e^{i(m-1)\theta} + \beta_{m6}q^n e^{im\theta} + \beta_{m5}q^n e^{i(m+1)\theta} \\ & + \beta_{m4}q^n e^{i(m+2)\theta} - 2q^{n-1}e^{i(m-2)\theta} - 52q^{n-1}e^{i(m-1)\theta} \\ & - 132q^{n-1}e^{im\theta} - 52q^{n-1}e^{i(m+1)\theta} - 2q^{n-1}e^{i(m+2)\theta} \end{aligned} \quad (5.20)$$

elde ettiğimiz bu denklemi $q^n e^{im\theta}$ ile bölersek ;

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}qe^{-2i\theta} + \beta_{m2}qe^{-i\theta} + \beta_{m3}q + \beta_{m1}qe^{i\theta} + \beta_{m2}qe^{i\theta} + \beta_{m1}qe^{2i\theta} = \\ & \beta_{m4}e^{-2i\theta} + \beta_{m5}e^{-i\theta} + \beta_{m6} + \beta_{m5}e^{i\theta} + \beta_{m4}e^{2i\theta} - \\ & 2q^{-1}e^{-2i\theta} - 52q^{-1}e^{-i\theta} - 132q^{-1} - 52q^{-1}e^{i\theta} - 2q^{-1}e^{2i\theta} \end{aligned} \quad (5.21)$$

bu denklemde gerekli açılımlar ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & (2\beta_{m1}Cos2\theta + 2\beta_{m2}Cos\theta + \beta_{m3})q^2 - (3(4Cos2\theta + 104Cos\theta + 132) \\ & - (2\beta_{m1}Cos2\theta + 2\beta_{m2}Cos\theta + \beta_{m3}))q + (4Cos2\theta + 104Cos\theta + 132) = 0 \\ & Xq^2 - (3Y - X)q + Y = 0 \end{aligned}$$

$$q^2 - \left(3\frac{Y}{X} - 1\right)q + \frac{Y}{X} = 0 \quad (5.22)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} X &= 2\beta_{m1}\text{Cos}2\theta + 2\beta_{m2}\text{Cos}\theta + \beta_{m3} \\ Y &= 4\text{Cos}2\theta + 104\text{Cos}\theta + 132 \end{aligned}$$

şeklindedir . Kararlılığın sağlanabilmesi için ya $|q| \leq 1$ yada q kompleks olmalıdır.

q nun kompleks olması durumunda (5.21) denklemini için $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre $9Y^2 - 10XY + A^2 < 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} 9Y^2 - 10XY + A^2 &= \frac{1}{h^4}[16\Delta t^2(-20\cos^2\theta + z_m h^2 \cos^2\theta \\ &-20\cos\theta + 13z_m h^2 \cos\theta + 16z_m h^2 + 40) \\ &(16z_m h^2 \Delta t^2 + 13z_m h^2 \Delta t^2 \cos\theta + z_m h^2 \Delta t^2 \cos^2\theta - 16h^2 \cos^2\theta \\ &-208h^2 \cos\theta - 256h^2 - 20\Delta t^2 \cos^2\theta - 20\Delta t^2 \cos\theta + 40\Delta t^2)] < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &16\Delta t^2[\cos^2\theta(z_m h^2 - 20) + \cos\theta(13z_m h^2 - 20) + (16z_m h^2 + 40)] \\ &[\cos^2\theta(z_m h^2 \Delta t^2 - 16h^2 - 20\Delta t^2) + \cos\theta(13z_m h^2 \Delta t^2 - 208h^2 - 20\Delta t^2) \\ &+ (16z_m h^2 \Delta t^2 - 256h^2 + 40\Delta t^2)] < 0 \end{aligned}$$

$-1 < \cos\theta < 1$ ve $0 < \cos^2\theta < 1$ olduğundan $\cos\theta = -1$ ve $\cos^2\theta = 0$ alındığında eşitsizlik değişmeyeceğinden

$$3(z_m h^2 + 20)(3\Delta t^2(z_m h^2 + 20) - 48h^2) < 0$$

$$\Delta t < \frac{4h}{\sqrt{z_m h^2 + 20}}$$

olur. Bu şarta göre kararlılık sağlandığından denklem koşullu kararlıdır.

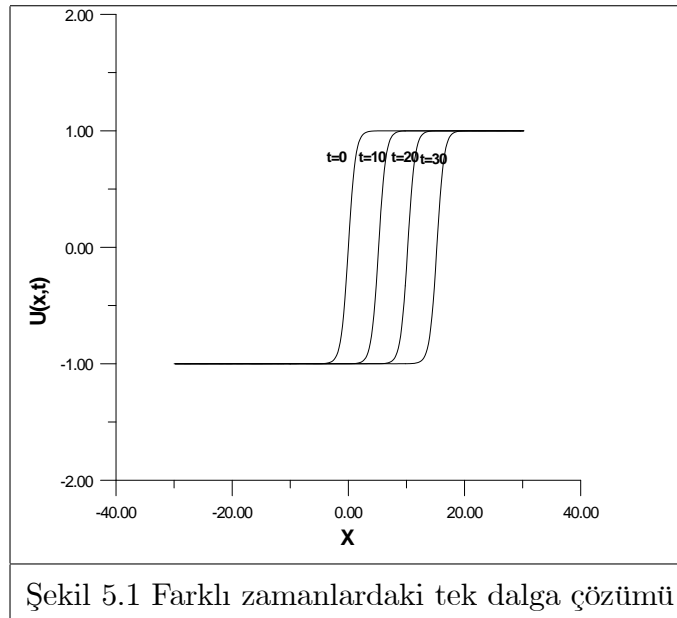
5.5 Test Problemleri

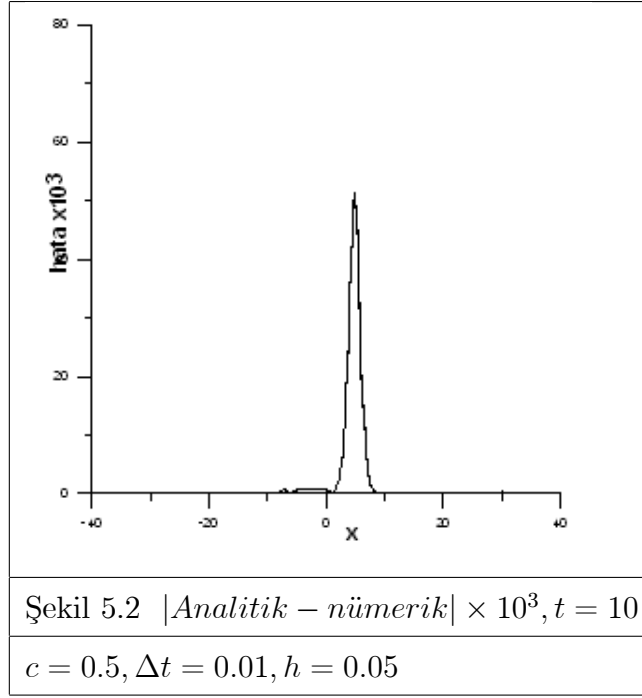
5.5.1 Birinci Test Problemi

Bu test probleminde tek dalga harekete gözlenmektedir. Bu kısımda analitik çözüm olarak (1.4) ve (1.5) değerleri alınacaktır.

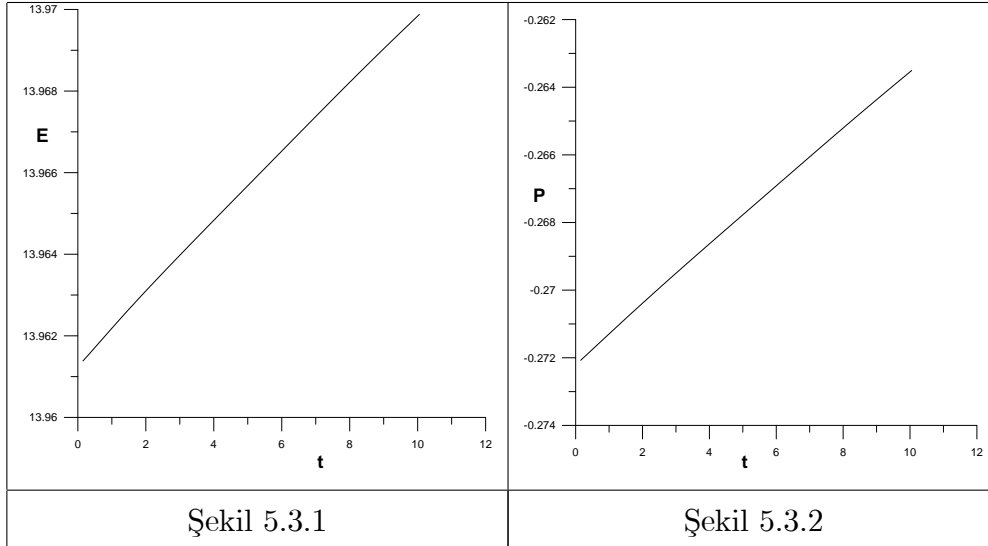
Hesaplama $c = 0.5$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde $t = 10$ oluncaya kadar yapıldı. $t = 10$ anında farklı h ve Δt değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 5.1'de verilmiştir.

Tablo 5.1 $c = 0.5, t = 10, -30 \leq x \leq 30$					
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	P	E
0.2	0.05	65.4799174	51.376700184	-0.2635468	13.9698379
0.1	0.02	26.6108888	20.955694435	-0.2686114	13.9398717
0.05	0.01	13.3765984	10.538031019	-0.2703700	13.9256284
0.02	0.005	6.7061667	5.2842065096	-0.2712630	13.9172387



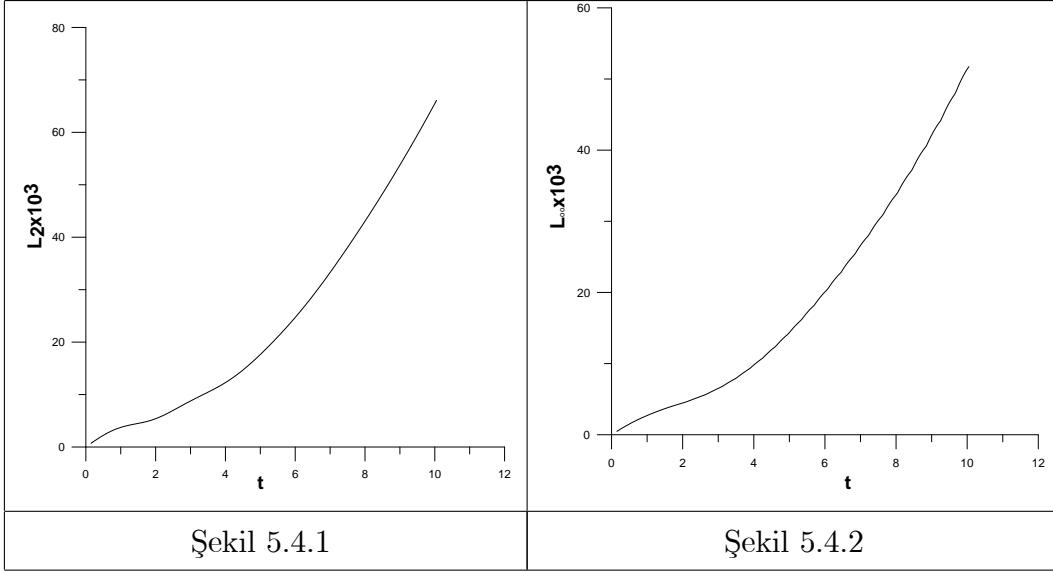


Şekil 5.2 de $t = 10$ zamanında $-30 \leq x \leq 30$ aralığında analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki fark çizilmiştir. Bu grafiğe göre maksimum hata oranı binde 50 civarındadır.



Bu test problemi için $t = 10$ zamanına kadar enerji ve momentumda meydana gelen değişiklikler Şekil 3.5.1 ve Şekil 3.5.2 de verilmiştir. Şekil 5.3.1 de enerji

değerleri 13.96138 ile 13.96983 arasında değişmiştir. Enerjide meydana gelen maksimum değişim 84×10^{-4} kadardır. Şekil 5.3.2 de momentum değerleri -0.272074 ile -0.263546 arasında değişmiştir. Momentum değeri 84×10^{-4} oranında bir değişim göstermiştir. Şekil 5.3.1 ve Şekil 5.3.2 için Tablo 5.1 de verilen diğer h ve Δt değerleri alındığında değişim aralığı daha da küçülmektedir. Buna göre her iki özellik de iyi korunumludur.



Şekil 5.4.1 ve Şekil 5.4.2 de $c = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.01$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığı içinde L_2 ve L_∞ hata normları verilmiştir. Her iki norm da monoton artandır. En yüksek değer $t = 10$ zamanında 10^{-3} civarındadır. Bu da sayısal çözümün iyi olduğunu gösterir.

5.5.2 İkinci Test Problemi

İkinci test probleminde, iki hareketli dalga mevcuttur. Bu dalgalar, zıt yönlerden birbirine doğru hareket ederek çarpışma gerçekleştirir. Biz de bu çarpışma olayının nasıl gerçekleştiğini gözlemleyeceğiz. Bu test probleminde analitik çözüm olarak (1.8) ve (1.9) alınacaktır.

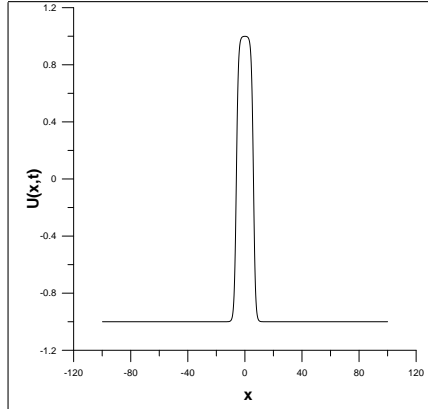
Hesaplama farklı c değerleri alınarak $-60 \leq x \leq 60$ aralığı içinde $t = 120$ oluncaya kadar yapıldı. $t = 120$ anında $h = 0.05$, $x_0 = 6$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 5.2 de verilmiştir.

Tablo 5.2		
c	E_0	E_{120}
0.1	28.12212	28.6915
0.15	28.11603	28.8971
0.175	28.11199	28.9476
0.195	28.10825	28.9687
0.2	28.10725	28.9891
0.22	28.10291	29.0096
0.25	28.09547	29.0464
0.26	28.09273	29.0542
0.3	28.08031	29.0792
0.5	27.97126	29.0735
0.7	27.69554	27.9430
0.9	26.56244	27.7702

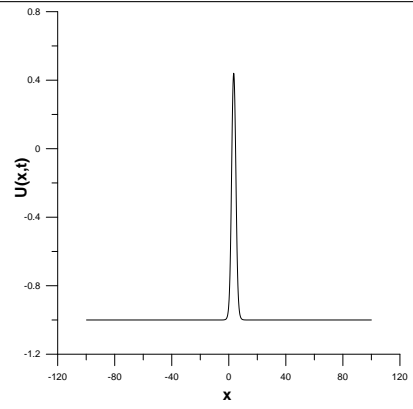
Tablo 5.2 ye göre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, c dalga hızı $c = 0.1$ den başlamak tizere 0.9 a doğru ilerledikçe, iki zaman iin enerji değerleri arasındaki fark giderek artmaktadır. Buna göre ktik dalga hızları iin daha iyi enerji korunumu sağlanmaktadır.

şimdi $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga

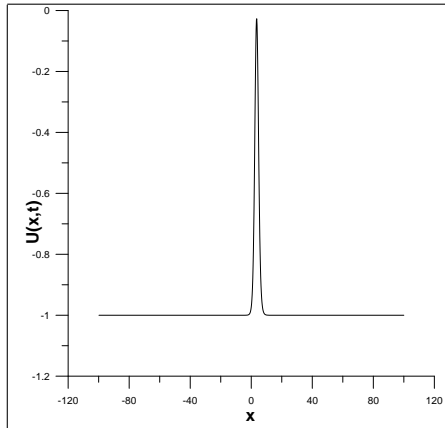
çifti hareketlerini inceleyelim;



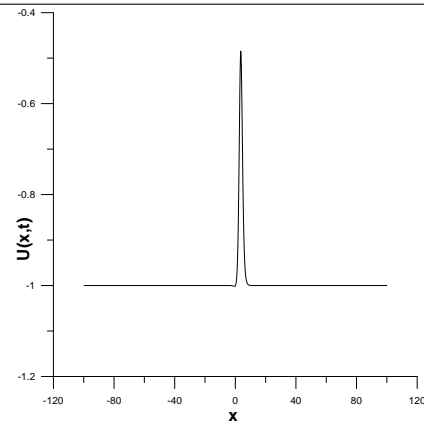
Şekil 5.5.1 $t = 0$



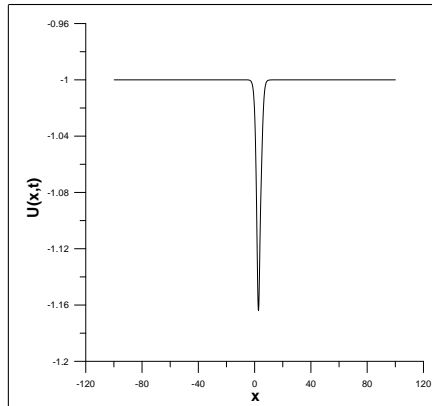
Şekil 5.5.2 $t = 69$



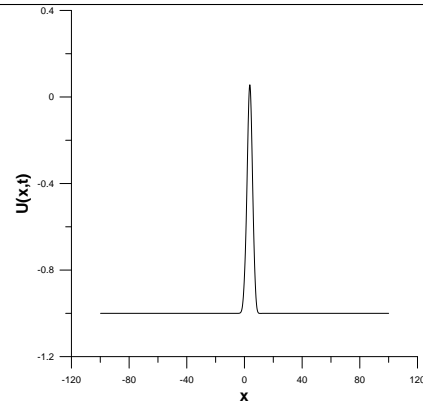
Şekil 5.5.3 $t = 70$



Şekil 5.5.4 $t = 70.5$



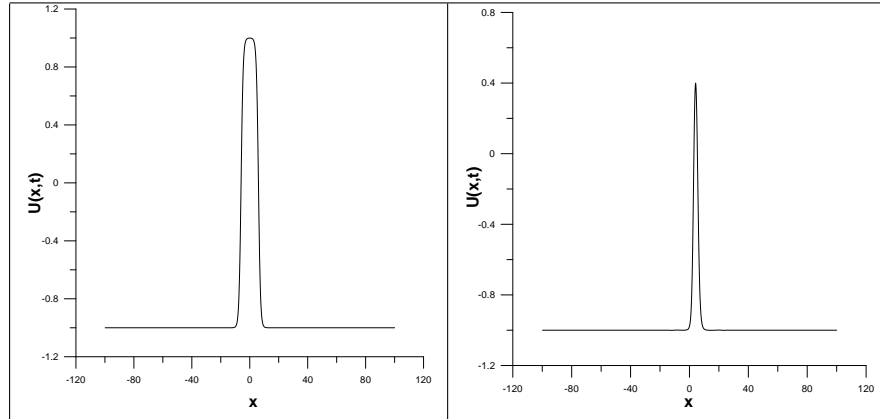
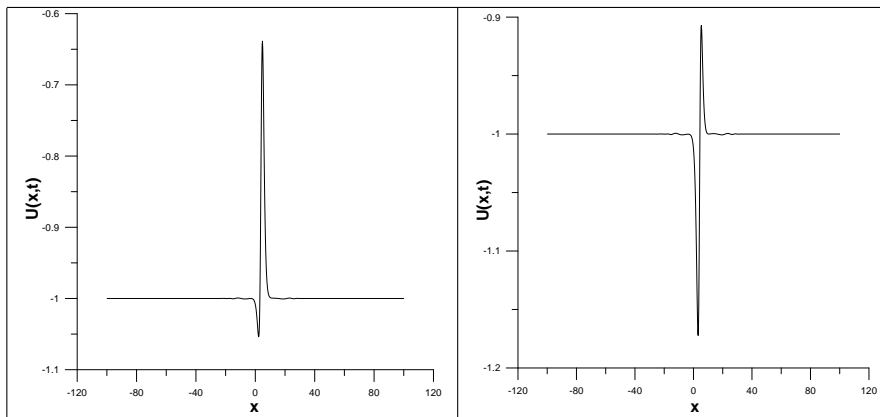
Şekil 5.5.5 $t = 71$

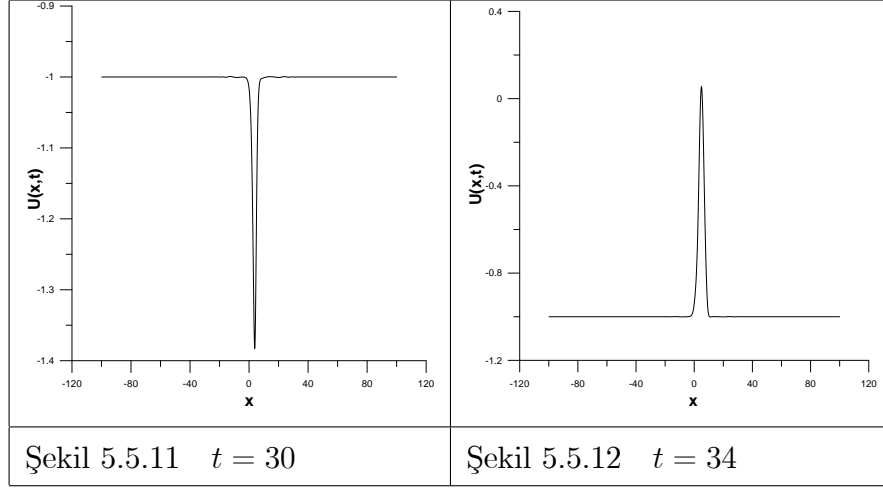


Şekil 5.5.6 $t = 75$

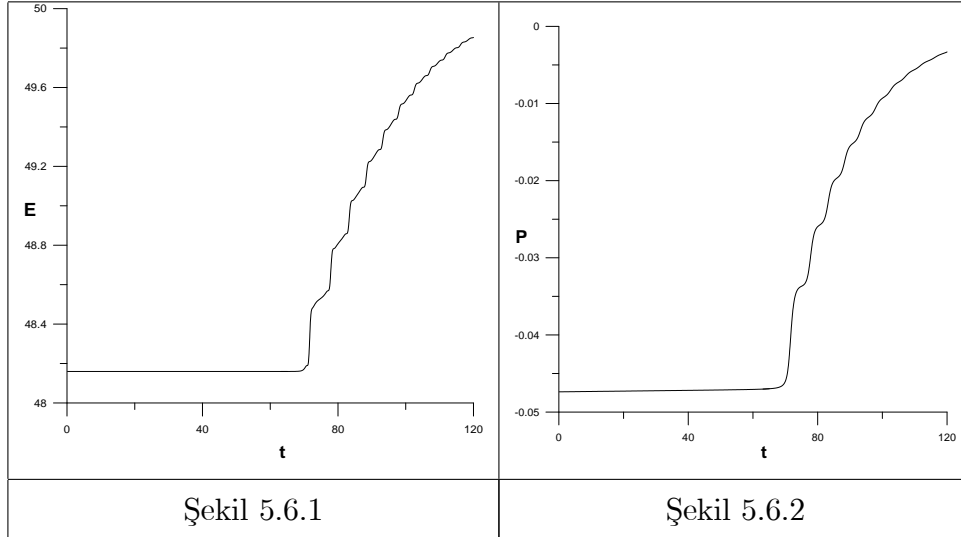
Şekil 5.5.1 de $t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi verilmiştir. Şekil 5.5.2 de $t = 69$ zamanındaki dalga hareketi incelendiğinde dalga boyu 1 den 0.4 e düşmüştür. Şekil 5.5.3 ve Şekil 5.5.4 de dalga boyu küçülerek hareket devam etmiştir. Şekil 5.5.5 de $t = 71$ zamanında çarpışma oluşmuş ve dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 5.5.6 da $t = 75$ zamanında dalga tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlamıştır.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.8) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim;

Şekil 5.5.7 $t = 0$ Şekil 5.5.8 $t = 28$ Şekil 5.5.9 $t = 29$ Şekil 5.5.10 $t = 29.5$

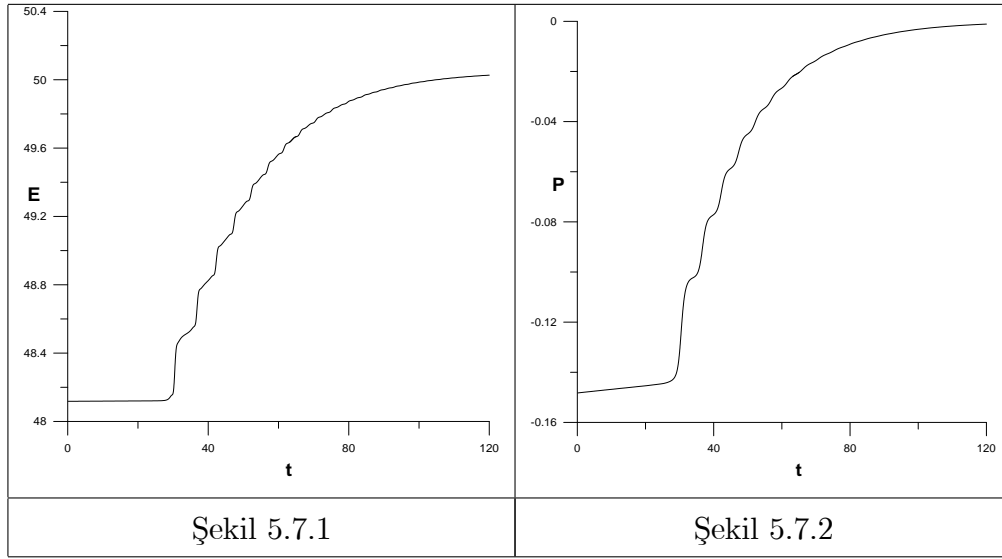


Şekil 5.5.7 de $t = 0$ zamanındaki başlangıç dalga çifti hareketi ile başlayan hareket, Şekil 5.5.8 de ve Şekil 5.5.9 da dalga boyu küçülerek devam etmiştir. Şekil 5.5.10 da $t = 29.5$ zamanında dalgalar çarpışmıştır. Şekil 5.5.11 de $t = 30$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 5.5.12 de $t = 34$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek bir sonraki çarpışma için hazır konuma gelmiştir.



Enerji ve momentum davranışları Şekil 5.6.1 ve Şekil 5.6.2 de verilmiştir. Buradaki hareket $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$

ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak gerçekleştirilmiştir. Enerjinin değişimi incelendiğinde, enerji değerinin 48.15962 ile 49.85352 arasında değiştiği görülür. Şekil 5.6.1 e baktığımızda $t = 70$ civarında yani dalgaların çarpışma anında enerjide bir artış meydana gelmektedir. Bu artış $t = 120$ zamanına kadar devam etmektedir. Aynı şartlarda momentum ise -0.04737 ile -0.00332 arasındadır. Şekil 5.6.2 incelendiğinde momentumdaki değişimin, enerji değişimi ile aynı olduğu görülmektedir.

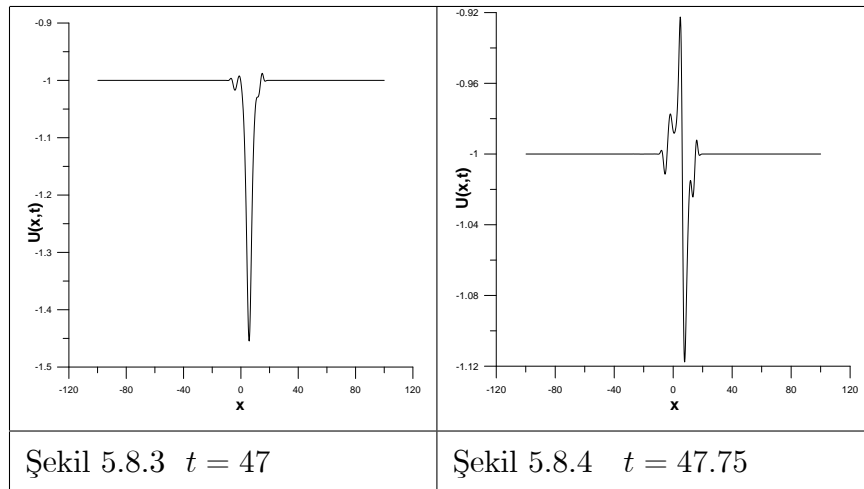
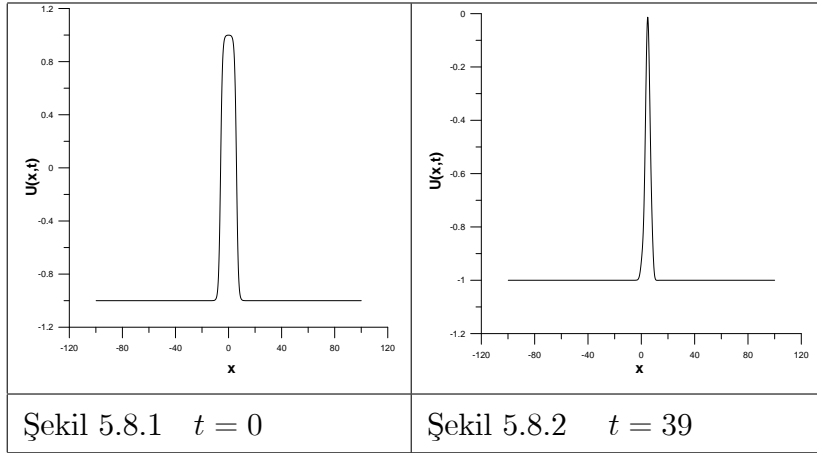


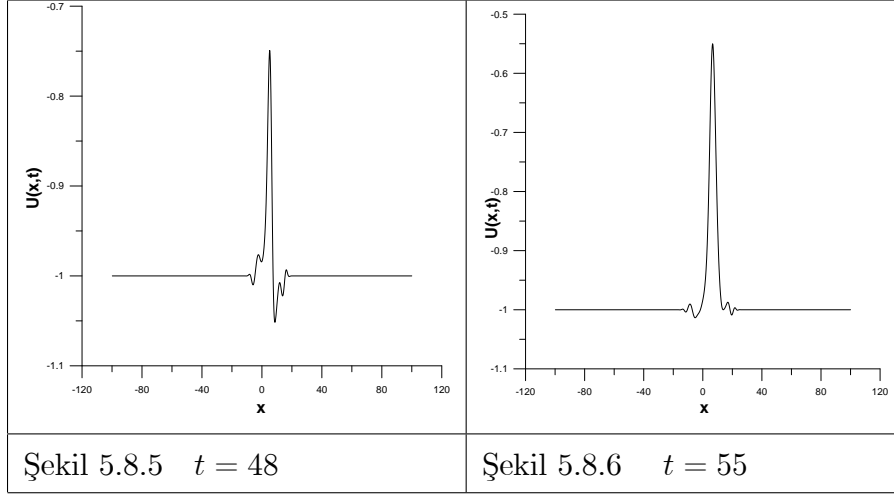
Enerji ve momentum davranışları Şekil 5.7.1 ve Şekil 5.7.2 de gösterilmiştir. Çözüm $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak hesaplama yapılmıştır. Enerjinin değeri 48.11782 ile 50.02698 arasında değişmektedir. Şekil 5.7.1 incelendiğinde $t = 30$ civarında yani dalgaların çarpışma zamanında enerjide bir artış meydana gelmektedir. Bu artış $t = 120$ zamanına kadar devam etmektedir. Momentum ise -0.14824 ile -0.0011 arasındadır. Şekil 5.6.2 incelendiğinde momentumdaki değişim hareketinin, enerji değişimi ile aynı olduğu görülmektedir. Bu sonuca göre uyguladığımız yöntem iyi sonuç vermiştir.

5.5.3 Üçüncü Test Problemi

Bu test probleminde iki dalga çiftinin çarpışması söz konusudur. Dalgalardan biri sol taraftan hareket ederken diğer dalga sağ tarafta hareketsiz olarak durmaktadır. Hareket devam ettiğinde çarpışma meydana gelmektedir. Biz de bu çarpışmayı inceleyeceğiz. Bu kısımda analitik çözüm olarak (1.12) ve (1.13) değerleri alınacaktır.

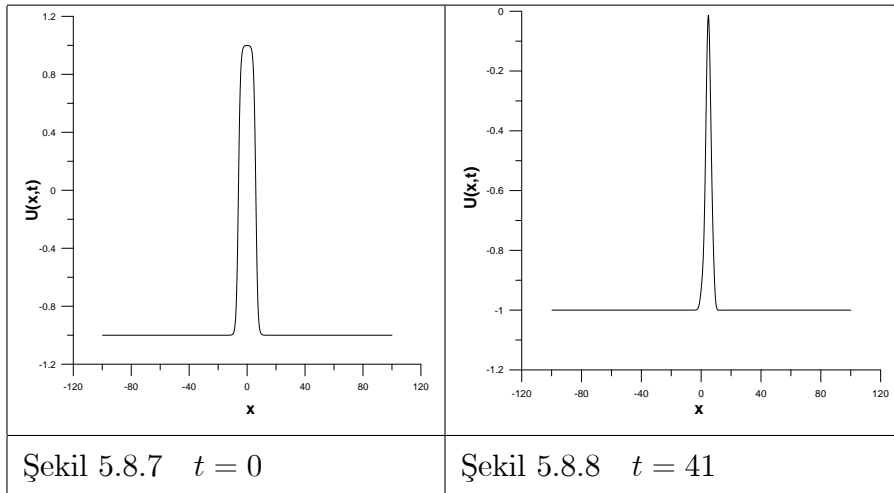
Şimdi $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.25$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.12) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim;

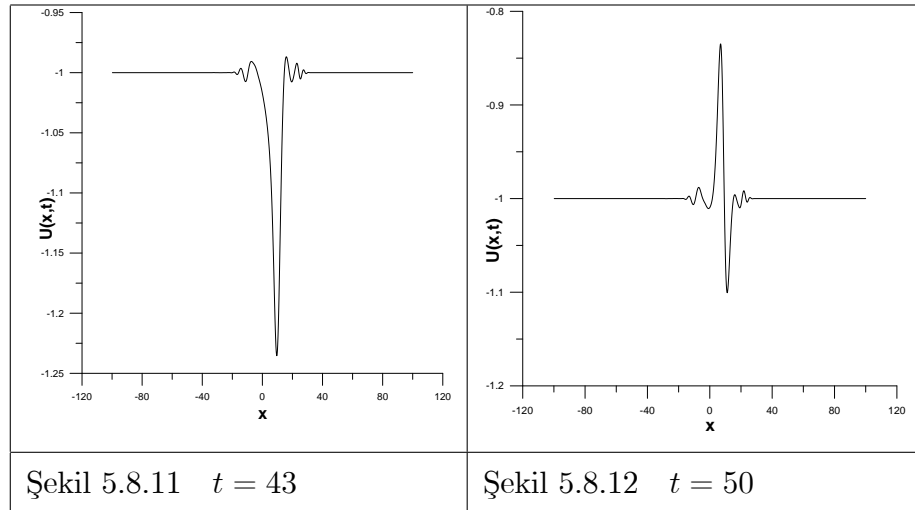
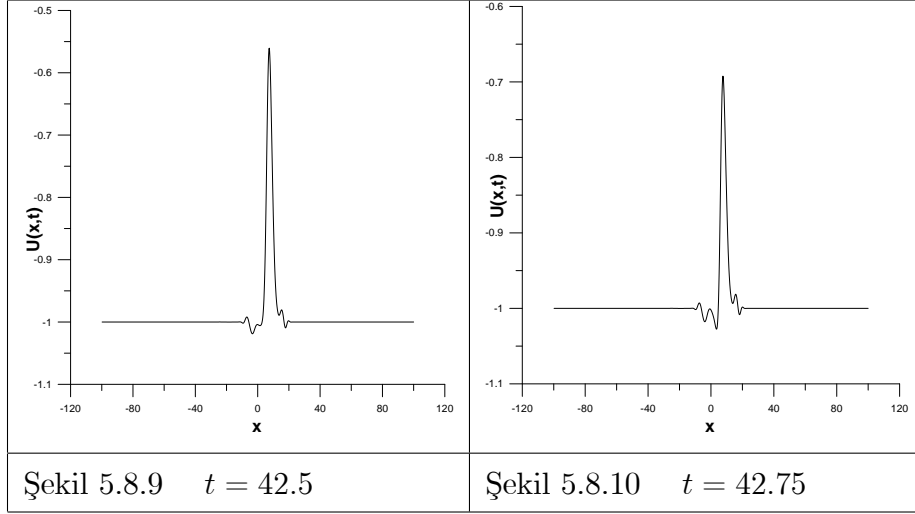




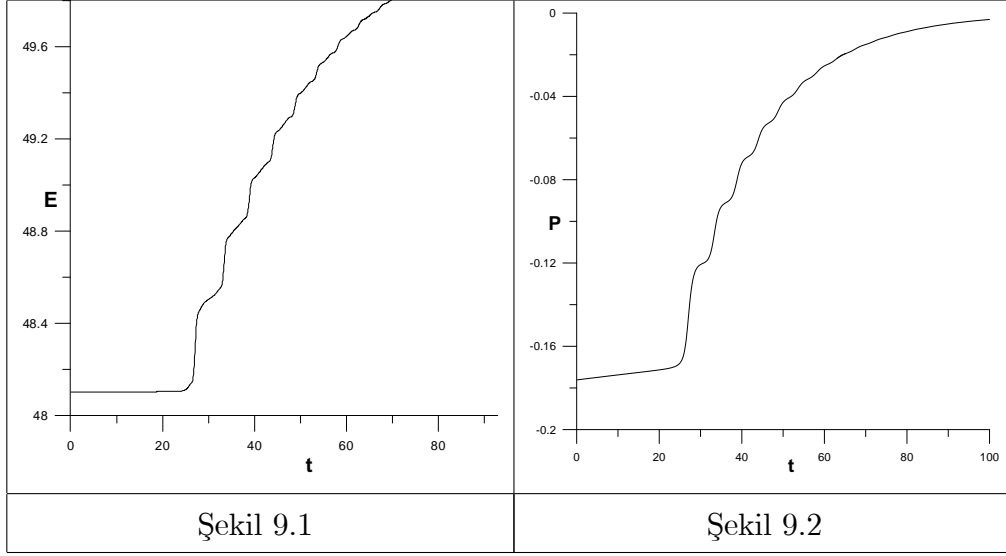
$t = 0$ zamanında başlangıç dalga çifti hareketi verilmiştir. Şekil 5.8.2 de $t = 39$ zamanındaki dalga hareketi incelendiğinde dalga boyu azalmıştır. Şekil 5.8.3 de $t = 47$ zamanında çarpışan dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 5.8.4 de $t = 47.75$ zamanında çarpışan dalgalar tekrar yön değiştirme hazırlığındadır. Şekil 5.8.5 de $t = 48$ zamanında çarpışan dalgalar tekrar yön değiştirmiştir. Şekil 5.8.6 da $t = 55$ zamanında dalga tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlamıştır.

$-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerlerini kullanarak (1.11) denkleminin farklı zamanlarda oluşturduğu dalga çifti hareketlerini inceleyelim;





Test probleminin $c = 0.35$ dalga hızı için uygulaması yapılmış ve elde edilen sonuçlar Şekil 5.8.7-12 ile verilmiştir. Şekil 5.8.7 de $t = 0$ zamanındaki dalga çifti hareketi verilmiştir. Şekil 5.8.8 de $t = 41$ zamanındaki dalga hareketi incelendiğinde dalga boyunun küçüldüğü görülmüştür. Şekil 5.8.9 ve Şekil 5.8.10 da $t = 42.5$ ve $t = 42.75$ zamanlarında dalga hareketi devam etmiştir. Şekil 5.8.11 de $t = 43$ zamanında dalga çiftinin çarpışması gerçekleşmiş ve dalgalar yön değiştirmiştir. Şekil 4.8.12 de $t = 50$ zamanında dalgalar tekrar yön değiştirerek $t = 0$ konumuna dönmeye başlamıştır.



Enerji ve momentum davranışları Şekil 9.1 ve Şekil 9.2 de gösterilmiştir. Buradaki salınım $-100 \leq x \leq 100$ aralığında $c = 0.35$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.05$ ve $x_0 = 6$ değerleri alınarak gerçekleştirilmiştir. Enerjinin değeri 48.10073 ile 49.99670 arasında değişmektedir. Şekil 9.1 incelendiğinde dalgaların çarpışma zamanında enerjide bir artış meydana gelmektedir. Bu artış $t = 120$ zamanına kadar devam etmektedir. Aynı şartlarda momentum ise -0.17610 ile -0.00305 arasındadır. Şekil 9.2 incelendiğinde momentumdaki değişim

hareketinin, enerji değişimi ile aynı olduğu görölmektedir.

Tablo 5.3		
c	E_0	E_{120}
0.1	28.1221	28.6914
0.15	28.1161	28.8979
0.175	28.1121	28.9483
0.195	28.1084	28.9775
0.2	28.1074	28.9923
0.22	28.1032	29.0085
0.25	28.0960	29.0439
0.26	28.0933	29.0507
0.3	28.0814	29.0822
0.5	27.9810	29.1389
0.7	27.7495	29.0494
0.9	26.9067	27.8155

$-100 \leq x \leq 100, h = 0.2, \Delta t = 0.05, x_0 = 6$

Tablo 5.3 e göre $t = 0$ ve $t = 120$ zamanlarında elde edilen enerji değerlerine bakıldığında, c dalga hızı 0.1 ile 0.195 arasında iken fark 0.70 civarındadır. Dalga hızı 0.2 ve daha büyük alındığında bu fark artmaktadır. Buna göre en iyi enerji korunumu 0.1 ile 0.195 arasındaki dalga hızları için sağlanmaktadır.

Tablo 5.4: Farklı dalga hızlarında enerji ve momentum		
c	Enerji	Momentum
0.1	49.5322	-0.00933
0.35	49.9967	-0.0030
0.4	50.0039	-0.0030
0.55	50.0176	-0.00296
0.7	50.0259	-0.00288
0.8	50.0306	-0.00274
0.9	50.0355	-0.00243
$-100 \leq x \leq 100, h = 0.2, \Delta t = 0.05, x_0 = 6, t = 100$		

Tablo 5.4 de farklı dalga hızları için elde edilen enerji ve momentum değerleri verilmiştir. Tablo incelendiğinde dalga hızları 0.4 ile 0.9 arasında alındığında elde edilen enerji ve momentum değerleri arasındaki fark çok düşüktür. Dalga hızları 0.1 ve 0.35 arasında iken enerji ve momentum değerleri arasındaki fark artmaktadır. Buna göre bu metod için 0.4 den büyük dalga hızlarında enerji ve momentum korunumu daha tutarlıdır.

Bölüm 6

Sonuç ve Öneriler

Deneme fonksiyonları olarak kübik B-spline fonksiyonları kullandığımız kübik kolokeyşin metodunu, KG denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için zamana göre parçalayarak ve parçalamadan uyguladık. KG denkleminin sayısal çözümlerini bulduktan sonra her iki yöntem için farklı dalga hızlarında enerji ve momentum değerlerini elde ettik. Elde edilen sonuçlar için bu yöntemin kullanılması bize farklı konum ve zaman artımları için tutarlı hata vermiştir. Ayrıca farklı konum ve zamanlarda ortaya çıkan enerji ve momentum değerlerinin yeterince korunduğu görülmüştür. Tez boyunca en iyi hata sonuçları zamana göre parçalanmış KG denkleminin sayısal çözümünden elde edilmiştir. Algoritmanın güvenilirliğini göstermek için üç test problemi çalıştık. Birinci test probleminde tek dalga hareketini, ikinci test probleminde iki dalganın da hareketli olması halini, üçüncü test probleminde bir hareketli bir durağan dalga hareketini inceledik.

Deneme fonksiyonları olarak kuartik B-spline fonksiyonları kullandığımız dördüncü bölümde kuartik kolokeyşin metodunu, KG denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için uyguladık. Daha sonra algoritmanın güvenilirliğini göstermek için daha önceki test problemleri ile çalıştık. Zamana göre

parçalara ayırdığımız kübik B-spline kolokeyşin çözümü ile elde ettiğimiz hata değerlerine yakın değerler elde edilmiştir.

Son bölümde deneme fonksiyonları olarak kuintik B-spline fonksiyonları kullandığımız kuintik kolokeyşin metodu, KG denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için uyguladık. Daha önce uyguladığımız üç yöntemde elde edilen hata değerleriyle tutarlı değerler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde bu yöntemin kullanılması, farklı konum ve zaman artımları için iyi sonuç vermiştir. Ayrıca farklı konum ve zamanlarda ortaya çıkan enerji ve momentum değerlerinin yeterince korunduğu görülmüştür.

Yapılan bu çalışmalar sonucunda anlaşılmaktadır ki c dalga hızına bağlı olarak, dalga çarpışmalarında ortaya çıkan enerji ve momentum, değişiklikler göstermiştir. Önemli olan bu enerji ve momentum değerlerinin korunmasıdır. Çalışma boyunca hangi dalga hızlarında enerji ve momentumun korunduğu gösterilmiştir.

Kaynaklar

- Ablowitz, M.J., Kruskal, M.D. and Ladik, J.F., 1979, Solitary wave collisions, SIAM J. Appl. Math., 36, 428.
- Alexander, M.E. and Morris J.L., 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, J.Comput. Physics., 30, 428-451.
- Aubry, S., 1976, A unified approach to the interpretation of dispersive and order-disorder systems. II. Dispersive systems., J.Chem.Phys., 64, 3392.
- Burden, R.L. and Faires, J.D., 1985, Numerical Analysis, Prindle, Weber&Schmidt.
- Clough, R.W., 1960, The finite element method in plane stress analysis, J.Struct.Div., ASCE, Proc. 2nd Conf. Electronic Computation, 345-378.
- Davies, A.J., 1980, The Finite Element Method : A First Approach, Clarendon Press Oxford.
- Dodd, R., Eilbeck, C., Gibson, J. and Morris H., 1982, Solitons and Non-linear Wave Equations, Academic Press.
- Gardner, G.A., Gardner, L.R.T. and Ali A.H.A., 1991, Modelling non-linear waves with B-spline finite elements, Mathematical&Numerical Aspects of Wave propagation Phenomena, SIAM Philadelphia, 533p.
- Gardner, L.R.T. and Gardner, G.A., 1990, Solitary waves of the RLW equation, J.Comp.Phys., 91, 441.

- Infeld, A., Rowlands, G., 2000, Non-linear waves, solitons and chaos, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Jiminez, B.S., Vazques, L., 1990, Analysis of four numerical schemes for a non-linear Klein-Gordon equation, *Appl. Math.Comput.*, 35, 61-94.
- Kaya, D., El-Sayed, S.M., 2004, A numerical solution of the Klein-Gordon equation and convergence of the decomposition method, *Applied Math.and Comput.*, 156, 341-353
- Khalife, M.E., Elgamal, M., 2004, A numerical solution to Klein-Gordon equation with Dirichlet boundary condition, *Appl.Math. and Comput.*, 160, 451-475.
- Kragh, H., 1984, Equation with many fathers : The Klein-Gordon equation in 1926, *American Journal of Physics*, 52, 1024-1033.
- Kudryavtsev, A.E., 1975, Solitonlike solutions for a Higgs scalar field, *JEPT Lett.*, 22, 82.
- Lynch, M.A.M., 1999, Large amplitude instability in finite difference approximation to the Klein-Gordon equation, *Appl.Numer.Math.*, 31, 173-182.
- Maccari, A., 2003, Solitons trapping for the non-linear Klein-Gordon equation with an external excitation, *Chaos Solitons and Fractals*, 17, 145-154.
- Mitchell, A.R. and Schoombie, 1984, S.W., Finite element studies of solitons, *Numerical Methods for Coupled Systems*, J.Wiley, 465-488

- Polyanin, A.D., Zaitsev V.E., 2004, Handbook of non-linear partial differential equations, Chapman&Hall / CRC.
- Prenter, P.M., 1975, Splines and variational methods, Wiles, New York.
- Sanz -Serna, J.M. and Christie, I., 1981, Petrov Galerkin methods for non-linear dispersive waves, J.Comp.Phys., 39, 94-102.
- Segerlind, L.J., 1976, Applied finite element methods, J.Wiley, New York.
- Shashkov, M., 1996, Conservative finite difference methods on general grids, CRC, USA.
- Wang, Y., Wang, B., 2004, High-order multi-symplectic schemes for the non-linear Klein-Gordon equation, Applied Math.and Comput., in press.
- Zaki, S.I., 1990, Proceedings of the International AMSE Conference, Signals and Systems, Centinje, Yugoslavia, 3-5 September, 3, 17-26.
- Zaki, S.I., Gardner L.R.T., Gardner G.A., 1997, Numerical simulations of Klein-Gordon solitary wave interactions, Il Nuovo Cimento, 112B, N.7.

Özgeçmiş

25.09.1975 tarihinde Kütahya'nın Tavşanlı ilçesinde doğan yazar, ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamlamıştır. Lisans (1993-1997) ve Yüksek Lisans (1997-2000) eğitimini Dumlupınar Üniversitesinde bitirmiştir. 2006 yılında ise Eskişehir Osmangazi Üniversitesinde doktora eğitimini tamamlamıştır. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri konusunda aktif olarak çalışmaları devam etmektedir.