Düzlemsel Lineer Uzaylar Üzerine:

Şerif Mercan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2009

On The Planar Linear Spaces:

Şerif Mercan

MASTER THESIS

Department of Mathematics

June 2009

Düzlemsel Lineer Uzaylar Üzerine:

Şerif Mercan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd.Dç.Dr. İbrahim GÜNALTILI

Haziran 2009

ONAY

MATEMATİK Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Şerif Mercan'ın **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak hazırladığı "**Düzlemsel Lineer Uzaylar Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Yrd.Doç.Dr.İbrahim GÜNALTILI

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye : Doç. Dr. Münevver ÖZCAN

Üye : Doç. Dr. Pınar ANAPA

Üye : Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Lineer uzaylar, üzerinde bulunma geometrisinin temel objeleridir. Projektif ve afin uzaylar lineer uzayların en belirgin örneklerindendir. Bunların bilinen birçok karakterizasyonu vardır. F.Buekenhout ve P. Cameron tarafından bazı karakterizasyonlar yapılmıştır. Yeni bir karakterizasyon olarak Biondi ve Durante tarafından da afin 3-uzaylar düzlemsel uzaylar olarak karakterize edilmiştir. Düzlemsel uzayların en belirgin örnekleri projektif ve afin uzaylardır. Düzlemsel uzaylarda projektif ve afin uzayların birçok karakterizasyonu elde edilmiştir. Örneğin Veblen-Young tarafından yapılan karakterizasyonda eğer bütün düzlemler projektif düzlem ise projektif uzay elde edilmekte veya bütün düzlemler afin düzlemler ve doğrularında mertebesi en azından 4 ise afin uzay elde edilmektedir.

Biz bu tezde yeni örnekler ve çalışmalarla afin3-uzayları düzlemsel uzaylar olarak karakterize ettik.

İlk bölümde, bir sonraki bölümde gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir; ilk olarak lineer uzaylarla ve ikinci olarak da afin ve projektif uzaylarla ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde ilk olarak düzlemsel lineer uzaylarla ilgili temel sonuçlar verilmiştir. İkinci olarak sonlu 3 boyutlu afin uzayları

(1) Her doğrusu $n \geq 2$ olmak üzere n noktalı

(2) Doğrudaş olmayan her nokta üçlüsü Ω nın bir tek elemanı içinde

(3) Ω nın elemanlarının çakışık ya da ayrık olması Ω üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Her denklik sınıfı bütün noktalarını kapsayan bir denklik bağıntısıdır.

özelliklerine sahip has alt uzaylarının Ω kümesi ile belirli lineer uzaylar olarak karakterize edildi.

Daha sonra bu sonuç en az üç boyutlu ve en az 3 doğru dereceli bütün afin uzayların karakterizasyonlarına genelleştirildi.

Anahtar Kelimeler: Düzlemsel uzaylar, Projektif uzaylar, Afin uzaylar, Lineer uzaylar.

SUMMARY

Linear spaces are the fundamental objects of the incidence geometry. Projective and affine spaces are the prominent examples of linear spaces. They have been extensively studied and a lot of characterizations are known. Some characterizations were done by F.Buekenhout and P. Cameron. Affine 3-spaces were also characterized as planar linear spaces by Biondi and Durante. The most prominent examples of planar spaces are the projective and affine spaces. Many characterizations of projective and affine spaces in terms of planar spaces have been obtained. For instance, if all planes are projective planes, then we have a projective space or if all planes are affine planes and lines have size at least four, then we have an affine space in the characterizations made by Veblen-Young.

Affine 3-spaces are characterized as planar linear spaces by investigating relations between affine 3-spaces and planar linear spaces in this thesis.

In the first chapter, some definitions and theorems needed in the next chapters are given. First of all, some definitions and theorems about linear spaces and second affine and projective spaces are given.

In the second chapter, main results about planar linear spaces are given. Second, we characterize finite three-dimensional affine spaces as the only linear spaces endowed with the set Ω of proper subspaces having the properties

(1) Every line contains a constant number of points, say n, with $n \geq 2$
(2) Every triple of noncollinear points is contained in a unique member of Ω
(3) Disjoint or coincide is an equivalence relation in Ω with the additional property that every equivalence class covers all points.

We generalize our result in the case of dimension greater than three to obtain a characterization of all finite affine spaces of dimension at least 3 with the lines of size at least 3.

Keywords: Planar spaces, Projektif spaces, Affine spaces, Linear spaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım sayın

Yrd.Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI'ya,

ve her zaman desteğini benden esirgemeyen eşim

Esra MERCAN'a

en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2009 Şerif MERCAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
b	Toplam doğru sayısı
$b(p)$	Bir p noktasından geçen doğru sayısı
b_i	p_i noktasından geçen toplam doğru sayısı
$b_\alpha(p)$	α düzlemine ait bir p noktasından geçen doğru sayısı
d	Toplam düzlem sayısı
$d(p)$	Bir p noktasından geçen toplam düzlem sayısı
$d(L)$	Bir L doğrusundan geçen toplam düzlem sayısı
v	Toplam nokta sayısı
$v(L)$	L doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı
v_i	L_i üzerindeki toplam nokta sayısı
$v_\alpha(L)$	α düzlemine ait bir L doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı
$< X >$	X in örtüsü
Ω	Has altuzayların bir ailesi
P_α	α düzlemine ait noktaların kümesi
$S(P,L,I)$	Uzay
$S(P,L,I,\Omega)$	Ω ailesinin katılması ile elde edilen uzay

BÖLÜM 1

Temel Kavramlar

Bu bölümdeki temel kavramlar ve sonuçlar L.M.Batten [2] ve R.Kaya [3] dan alınmıştır. Şimdi bu temel kavramları verelim.

1.1 Lineer Uzaylar

Tanım 1.1.1 *$\mathcal{P}$ noktalar kümesi, $\mathcal{L}$ elemanları doğrular olan $\mathcal{P}$ nin alt kümelerinin ailesi ve $\mathcal{I}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{L}$ üzerinde "$(p,L) \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow p \in L$" şeklinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ yapısına üzerinde bulunma yapısı(incidence structure) denir. Eğer $\mathcal{S}$ aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\mathcal{S}$ ye yaklaşık lineer uzay denir.*

($YL1$) *Herhangi bir doğrunun en az iki noktası vardır*

($YL2$) *İki nokta en çok bir doğru üzerindedir.*

Tanım 1.1.2 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ yapısı üzerinde bulunma yapısı olsun. Eğer $\mathcal{S}$ aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\mathcal{S}$ ye lineer uzay denir.*

(L_1) *Farklı iki nokta bir tek nokta doğru belirtir*

(L_2) *Her doğru en az iki nokta kapsar*

Her lineer uzay bir yaklaşık lineer uzaydır ama her yaklaşık lineer uzay bir lineer uzay değildir.

Burada$(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ yerine $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ notasyonuda kullanılabilir.

Bir $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ yaklaşık lineer uzayında eğer $|\mathcal{P}| = v$ sonlu ise $|\mathcal{L}| = b$ de sonludur. Bu durumda $\mathcal{S}$ sonlu v noktalı, b doğrulu yaklaşık lineer uzay olarak da adlandırılabilir.

$\mathcal{S}$ nin her p noktası için $b(p)$ ile p noktasından geçen doğru sayısı, her $L \in \mathcal{L}$ doğrusu için $v(L)$ ile L doğrusu üzerindeki nokta sayısı gösterilir.

Ayrıca i - nokta ve i - doğru terimleri sırasıyla derecesi i olan nokta ve doğruyu gösterir.

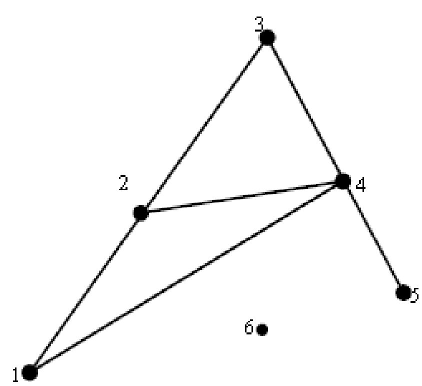
$\mathcal{S}$ sonlu bir yaklaşık lineer uzay olmak üzere $\mathcal{P}$ nin elemanları $1 \leq i \leq v$, p_i ve $\mathcal{L}$ nin elemanları $1 \leq i \leq b$, L_j ile gösterilebilir. Bu durumda

$$b(p_i) = b_i, v(L_j) = v_j$$

dir.

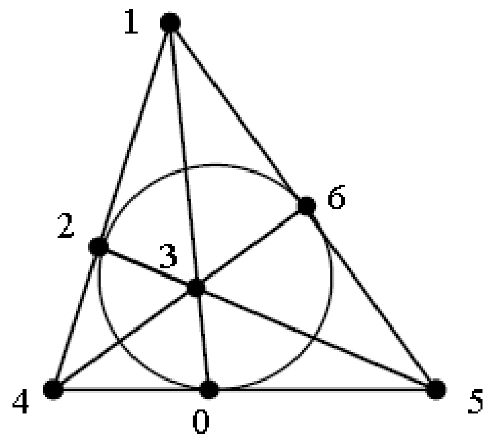
v_j, L_j doğrusu üzerindeki nokta sayısını gösteriyor. b_i, p_i noktasından geçen doğru sayısı olup p_i den geçip L_j yi kesmeyen doğrular bulmak mümkün olduğu için $b_i \geq v_j$ ifadesi geçerlidir. Ayrıca v, b, $b(p)$, $v(L)$ değerlerine bir yaklaşık lineer uzayın parametreleri denir.

Örnek 1.1.3 $\mathcal{P} = \{1,2,3,4,5,6\}$ *ve* $\mathcal{L} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{1,4\},\{2,4\}\}$



Şekil 1

Şekil 1 de $YL1$ aksiyomunun sağlandığı aşikârdır. Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır. Doğrular üzerindeki noktalara bakıldığında iki noktanın en çok bir doğru üzerinde olduğu görülür. Dolayısıyla bu uzay bir yaklasık lineer uzaydır. Şekil 2 de gösterilen ve Fano düzlemi olarak adlandırılan yapı ise bir lineer uzaydır.



Şekil 2

Tanım 1.1.4 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *yaklaşık lineer uzay ve* $X \subseteq \mathcal{P}$ *olun.* $\forall p, q \in X$ *ve* $p \neq q$ *olmak üzere* pq *doğrusunun tamamı* X *de ise* X *e* $\mathcal{S}$ *nin bir* ***alt uzayı*** *denir.* $\varnothing$ ***ve*** $\mathcal{S}$ *ye* $\mathcal{S}$ *nin* ***has (öz) alt uzayları*** *denir.* $\mathcal{S}$ *nin diğer alt uzaylarına da* ***has olmayan alt uzaylar*** *denir.*

Tanım 1.1.5 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *yaklaşık lineer uzay ve* $X \subseteq \mathcal{P}$ *olun.* X *i içeren en küçük alt uzaya* X *in örtüsü denir ve* $< X >$ *ile gösterilir.*

Yardımcı teorem 1.1.6 ([2]) $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *yaklaşık lineer uzay ve* $X \subseteq \mathcal{P}$ *olun.* X *in örtüsü* X *i içeren bütün alt uzayların arakesitidir.*

$\mathcal{S}$ yaklaşık lineer uzayında $< \mathcal{S} >= \mathcal{S}$, $< \varnothing >= \varnothing$ ve $\forall\, p \in \mathcal{P}$ için $< p >= p$ dir.

Şekil 2 deki uzayda $< \{5, 6\} >= \{1, 5, 6\}$ ve $< \{0, 3, 4\} >= \{0, 3, 1, 4, 2, 5, 6\} = \mathcal{S}$ olur.

Şekil 1 deki uzayda $< \{1, 2, 5\} >= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dir.

Tanım 1.1.7 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *yaklaşık lineer uzay ve* $X \subseteq \mathcal{P}$ *olun.* $\forall x \in X$ *için* $x \notin < X \backslash \{x\} >$ *ise* X *kümesine bağımsız küme denir.*

Yukarıdaki tanım aşağıdaki şekilde de verilebilmektedir.

Bir X kümesi bağımsız küme öyleki örtüsünü üretecek yeterli noktalardan oluşur.

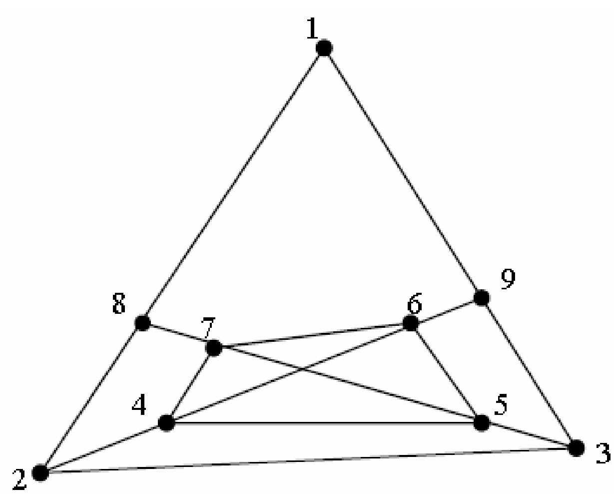
Şekil 2 deki yaklaşık lineer uzayda $X = \{1, 5, 6\}$ kümesi bağımsız küme değildir. Çünkü kendi örtüsünü üretmek için gerekli olandan fazla nokta kapsamaktadır. Aslında 1 ve 5 noktaları yeterlidir.

Tanım 1.1.8 *Bir $\mathcal{S}$ yaklaşık lineer uzayının noktalarının $\mathcal{S}$ yi üreten bir bağımsız alt kümesine $\mathcal{S}$ nin bir bazı denir.*

Şekil 2 deki yaklaşık lineer uzayın $\{1,2,0\}$ ve $\{3,5,6\}$ iki bazıdır. Daha başka bazları da vardır.

Bir uzayı üreten bir çok baz bulunabilir. Verilen bir uzayın bütün bazlarının eleman sayıları aynı olması gerekmez.

Örnek 1.1.9 *Şekil 3 teki yaklaşık lineer uzay için* $\{4,5,6,7\}, \{1,8,3\}, \{1,2,3\}$ *birer bazdır ve bunların eleman sayıları farklıdır.*



Şekil 3

Tanım 1.1.10 *$\mathcal{S}$ bir yaklaşık lineer uzay olsun. $min\{|B| : B, \mathcal{S}$ nun bir bazı$\} - 1$ sayısına $\mathcal{S}$ yaklasık lineer uzayının boyutu denir. Böylece*

$$boy\mathcal{S} = min\{|B| : B, \mathcal{S} \text{ nin bir bazı}\} - 1$$

olduğu açıktır.

Boyutu bulmak için mümkün olan en az sayıda elemana sahip baz bulunur. Bu bazın eleman sayısından 1 çıkarılır

Bir doğru, bir nokta, $\varnothing$ den ibaret uzayların boyutları sırasıyla 1, 0, -1 dir.

Tanım 1.1.11 *$\mathcal{S}$ sonlu lineer uzayında her noktadan sabit k tane doğru geçiyorsa $\mathcal{S}$ ye noktasal regüleritesi k, her doğru üzerinde de sabit r tane nokta varsa $\mathcal{S}$ ye $r-$ doğrusal regüler ya da doğrusal regüleritesi r dir denir. Doğrusal regüleritesi r, noktasal regüleritesi k olan lineer uzaya $(k,r)-$regüler denir.*

Tanım 1.1.12 *$\mathcal{S}$ sonlu bir lineer uzay ve A pozitif tamsayılar kümesinin bir sonlu kümesi olsun. Eğer $\mathcal{S}$ nin her L doğrusu için $v(L) \in A$ ise $\mathcal{S}$ ye A - doğru dereceli lineer uzay denir. Eğer $\mathcal{S}$ nin her p noktası için $b(p) \in A$ ise $\mathcal{S}$ ye A - nokta dereceli lineer uzay denir.*

Teorem 1.1.13 ([2]) *$\mathcal{S}$ sonlu bir lineer uzayı doğrusal regüler ise noktasal regülerdir.*

Tanım 1.1.14 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ bir lineer uzay ve $X \subseteq \mathcal{P}$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $x \notin < X >$ ve $x \in < X \cup \{y\} >$ iken $y \in < X \cup \{x\} >$ ise $\mathcal{S}$ lineer uzayı değiştirme özelliğine sahiptir denir.*

Yardımcı teorem 1.1.15 ([2]) *$\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ değiştirme özelliğine sahip bir lineer uzay olsun. Eğer $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bağımsız bir küme ve $x_{n+1} \notin < X >$ise $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ de bağımsız bir kümedir.*

Yardımcı teorem 1.1.16 ([2]) *$\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ değiştirme özelliğine sahip sonlu bir lineer uzay ise bu uzayın herhangi iki bazı aynı sayıda elemana sahiptir.*

Tanım 1.1.17 *Bir $\mathcal{S}$ sonlu lineer uzayında iki doğru çakışık ya da hiç ortak noktaya sahip değilse bu iki doğruya paralel doğrular denir. Eğer L_1 ve L_2 paralel doğrular ise bu doğruların paralelliği $L_1 \parallel L_2$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 1.1.18 *Bir $\mathcal{S}$ lineer uzayının aşikar olmayan maksimal alt uzayına $\mathcal{S}$ nin bir **hiperdüzlemi** denir.*

Reel 5-uzayın hiperdüzlemleri reel 4-uzaylardır. Reel 2-uzayın hiperdüzlemleri reel 1-uzaylardır. Reel 1-uzayın hiperdüzlemlerin herbiri bir noktadır. Diğer bir ifadeyle bir doğrunun hiperdüzlemleri noktalar, bir noktanın hiperdüzlemleri boş kümedir. Boş kümenin hiperdüzlemi yoktur.

Fano düzleminin her bir doğrusu hiperdüzlemdir. Mertebesi 3 olan afin düzlemlerde de her bir doğru bir hiperdüzlem olarak ifade edilebilir.

Tanım 1.1.19 *Herbir hiperdüzlemi 2 boyutlu olan bir lineer uzaya 3 boyutlu lineer uzay denir.*

Bu tezde, 3-boyutlu bir lineer uzay için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

Bir 3-boyutlu lineer uzayda toplam düzlem sayısı d, bir p noktasından geçen toplam düzlem sayısı $d(p)$ ve bir L doğrusundan geçen toplam düzlem sayısı $d(L)$ ile gösterilecektir. Ayrıca 3-boyutlu lineer uzayda bir α düzlemine ait bir p noktasından geçen ve bu düzleme ait toplam doğru sayısı $b_\alpha(p)$, α düzlemine ait bir L doğrusu üzerindeki α ya ait toplam nokta sayısı $v_\alpha(L)$ ile gösterilecektir.

1.2 Sonlu Lineer Uzayın Temel Özellikleri

Tanım 1.2.1 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_v\}$, $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_b\}$ ve*

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 \;\; ; \;\; p_i \notin L_j \\ 1 \;\; ; \;\; p_i \in L_j \end{cases}$$

olsun. Buradaki r_{ij} değerlerine p_i noktasının L_j doğrusu üzerinde bulunma değeri denir ve $\mathcal{A} = [r_{ij}]_{vxb}$matrisine de üzerinde bulunma matrisi denir.

Bir lineer uzayı temsil eden matrise bakıldığında uzay hakkında bazı bilgiler elde edilebilir. Örneğin herhangi bir satırdaki birlerin sayısı bu satıra eşlenen noktadan geçen doğru sayısıdır. Ayrıca herhangi bir sütundaki birlerin sayısı bu sütuna eşlenen doğru üzerindeki nokta sayısıdır.

Yardımcı teorem 1.2.2 ([2]) *Bir $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ sonlu lineer uzayın doğrusal regüleritesi s ve noktasal regüleritesi t ise $vt = bs$ dir.*

İspat Üzerinde bulunma matrisi ile ispat kolayca yapılmaktadır.

Teorem 1.2.3 ([2]) *Eğer $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ sonlu lineer uzay ise*

$$\sum_{i=1}^{v} b(p_i) = \sum_{j=1}^{b} v(L_j)$$

dır.

İspat $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzayını temsil eden bir üzerinde bulunma matrisi vardır. Bu matrisin satırlarındaki birlerin satır-satır toplanması, sütunlarındaki birlerin sütun-sütun toplanması ile istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 1.2.4 ([2]) *$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzay olsun. $\forall\ p_i \in \mathcal{P}$ için*

$$v-1=\sum_{j=1}^{b}(v_j-1)\cdot r_{ij}$$

dır. Üstelik ;

$$v\cdot(v-1)=\sum_{j=1}^{b}v_j\cdot(v_j-1)$$

dır.

İspat $\mathcal{S}$ sonlu lineer uzayın tüm noktaları bir p_i noktasından geçen doğru demeti üzerindedir. Bu demetteki herhangi bir L_j doğrusu üzerindeki p_i noktası hariç v_j-1 adet nokta vardır. Böylece $\mathcal{S}$ nin toplam nokta sayısı

$$v-1=\sum_{j=1}^{b}(v_j-1)\cdot r_{ij}$$

dır. Aynı zamanda $\mathcal{S}$ nin tüm noktalarını sayarken; $\mathcal{S}$ nin her doğrusu üzerindeki nokta ikililerini saymak, $\mathcal{S}$ nin tüm nokta ikililerini saymak ile eşit olduğundan

$$\binom{v}{2}=\sum_{j=1}^{b}\binom{v_j}{2}$$

dir. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$v\cdot(v-1)=\sum_{j=1}^{b}v_j\cdot(v_j-1)$$

elde edilir.

Teorem 1.2.5 ([2]) *$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ sonlu lineer uzay olsun. Eğer $p_i\notin L_j$ ise $b(p_i)\geq v_j$ dir. Eğer p_i noktasından geçen tüm doğrular L_j doğrusunu kesiyorsa $b(p_i)=v_j$ dir.*

İspat: $\mathcal{S}$ bir sonlu lineer uzay olduğundan, lineer uzay aksiyomu L_1 den ispat açıktır.

Teorem 1.2.6 ([2]) *$\mathcal{S}$ sonlu lineer uzayının maksimum dereceli paralel iki doğrusu L_1 ve L_2 ise*

$$b \geq v(L_1) \cdot v(L_2) + 2$$

dir.

İspat: $\mathcal{S}$ sonlu lineer uzayının maksimum dereceli paralel iki doğrusu L_1 ve L_2 olduğundan L_1 ve L_2 doğrularının her ikisinide kesen doğru sayısı $v(L_1) \cdot v(L_2)$ dir. O halde $\mathcal{S}$ nin toplam doğru sayısı $b \geq v(L_1) \cdot v(L_2) + 2$ dır.

Teorem 1.2.7 ([2]) *$\mathcal{S}$ sonlu lineer uzayının maksimum dereceli herhangi iki doğrusu L_1 ve L_2 olsun. Eğer $L_1 \cap L_2 := w$ olacak şekilde bir w noktası mevcut ise*

$$b \geq (v(L_1) - 1) \cdot (v(L_2) - 1) + b(w)$$

dır.

İspat: $\mathcal{S}$ nin maksimum dereceli iki doğrusu L_1, L_2 ve $w := L_1 \cap L_2$ olsun. L_1 ve L_2 doğrularının her ikisini kesen doğru sayısı

$$(v(L_1) - 1) \cdot (v(L_2) - 1) + b(w)$$

dır. O halde $\mathcal{S}$ nin toplam doğru sayısı b ise

$$b \geq (v(L_1) - 1) \cdot (v(L_2) - 1) + b(w)$$

dir.

Teorem 1.2.8 ([2]) *(De Brujin-Erdös) $\mathcal{S}$, $b > 1$ özelliğinde herhangi bir sonlu lineer uzay olsun. Bu takdirde*

i) *$b \geq v$ dir*

ii) *Eğer $b = v$ ise $\mathcal{S}$ ya yaklaşık demet ya da bir projektif düzlemdir.*

1.3 Afin ve Projektif Uzaylar

Tanım 1.3.1 $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ *bir lineer uzay olmak üzere aşağıdaki* A_1, A_2 *aksiyomlarını sağlarsa* $\mathcal{S}$ *ye afin düzlem denir.*

A_1 : $p \notin L_1$ *olamk üzere her* $p \in \mathcal{P}$ *ve her* $L_1 \in \mathcal{L}$ *için* $p \in L_2$ *ve* $L_1 \parallel L_2$ *olacak şekilde bir tek* $L_2 \in \mathcal{L}$ *doğrusu vardır.*

A_2 : *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

A_1 aksiyomu paralellik aksiyomu olarak bilinir.

En az iki doğrulu ve paralellik aksiyomunu sağlayan lineer uzayların afin düzlem olduğu açıktır. Çünkü en az iki doğru varsa doğrudaş olmayan üç nokta her zaman vardır.

Teorem 1.3.2 ([5]) $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ *v noktalı b doğrulu sonlu bir lineer uzay ise aşağıdakiler denktir.*

(i) $\mathcal{S}$ *bir afin düzlemdir*

(ii) *Her* $p \in \mathcal{P}$ *ve* $L \in \mathcal{L}$ *için* $b(p) = n+1, v(L) = n$ *olacaka şekilde* $n \geq 2$ *tam sayısı vardır.*

(iii) $v = n^2$ *ve her* $L \in \mathcal{L}$ *için* $v(L) = n$ *olacak şekilde* $n \geq 2$ *tam sayısı vardır.*

(iv) $b = n^2 + n$ *ve her* $L \in \mathcal{L}$ *için* $v(L) = n$ *olacak şekilde* $n \geq 2$ *tam sayısı vardır.*

Teorem 1.3.2 den bir sonlu afin düzlem, nokta sayısı $v = n^2$, toplam doğru sayısı $b = n^2 + n$, $\forall L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olan $(n+1)-$ regüler bir lineer uzaydır.

Tanım 1.3.3 *L ve L' bir afin düzlemin iki doğrusu olsun.* $L = L'$ *veya* $L \cap L' = \emptyset$ *ise L ve L' ye paralel doğrular denir ve* $L \parallel L'$ *ile gösterilir.*

Bir afin düzlemdeki doğrular cümlesi üzerinde yukarıda tanımlı " $\parallel$, *paralellik bağıntısı* " nın bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Böylece mertebesi n olan bir afin düzlemde $n+1$ tane *denklik sınıfı* vardır.

Herbir denklik sınıfı afin düzlemin tüm noktalarını kapsadığından denklik sınıfları *paralel sınıf* olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.4 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ *bir lineer uzay olmak üzere aşağıdaki* P_1, P_2 *aksiyomlarını sağlarsa* $\mathcal{S}$ *ye projektif düzlem denir*

P_1 *Herhangi farklı iki doğru ortak bir noktaya sahiptir,*

P_2 *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

P_1 aksiyomunu sağlayan fakat P_2 aksiyomunu sağlamayan bir sonlu lineer uzaya bozulmuş (dejenere) projektif düzlem denir.

En küçük projektif düzlem yedi noktalı olup Fano düzlemi olarak adlandırılır.

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ bir afin düzlem olmak üzere bu düzlemde birbirine paralel bütün doğrular cümlesine bir *paralel doğru demeti* denir. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularının üzerinde bulunan ama $\mathcal{P}$ de bulunmayan yeni bir nokta göz önüne alalım. Böylece düzleme her doğrultuda bir yeni (*ideal*) nokta katılmış olur ve genişletilmiş nokta cümlesi $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{ \textit{ ideal noktalar} \}$ bulunur. Afin düzleme ideal noktalar katılırken afin düzlemin her L doğrusu bir nokta ile genişletildi. L doğrusu ve L ye paralel olan tüm doğrular üzerine koyulan bu ideal nokta D_∞ ile gösterilsin. Tüm ideal noktaların üzerinde bulunduğu ideal doğruyu da L_∞ ile göstererek afin düzleme katalım. Böylece $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ sistemi elde edilir. Bu sisteme *afin düzlemin tamamlanmışı* denir.

Teorem 1.3.5 ([5]) $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ *v noktalı b doğrulu sonlu bir lineer uzay ise aşağıdakiler denktir.*

(i) $\mathcal{S}$ *bir projektif düzlemdir*

(ii) *Her* $p \in \mathcal{P}$ *ve* $L \in \mathcal{L}$ *için* $b(p) = n + 1$, $v(L) = n + 1$ *ve* $n \geq 2$ *olacaka şekilde tam sayısı vardır.*

(iii) $v = n^2 + n + 1$ *ve her* $L \in \mathcal{L}$ *için* $v(L) = n + 1$ *ve* $n \geq 2$ *olacaka şekilde tam sayısı vardır.*

(iv) $b = n^2 + n + 1$ *ve her* $L \in \mathcal{L}$ *için* $v(L) = n + 1$ *ve* $n \geq 2$ *olacaka şekilde tam sayısı vardır.*

Teorem 1.3.1 den bir sonlu projektif düzlem, toplam nokta ve doğru sayısı $b = v = n^2 + n + 1$, $\forall\ L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n + 1$ olan $(n + 1) -$ regüler bir lineer uzaydır.

Teoremde geçen n tamsayısına ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.

Teorem 1.3.6 ([3]) *Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir.*

Bir projektif düzlem aykırı bir F cismi üzerinde tanımlı V vektör uzayından da elde edilebilmektedir. V nin orijinden geçen her doğrusuna bir nokta ve orijinden geçen her düzlemine bir doğru diyelim. Böylece düzlemdeki her doğru V uzayındaki bir düzleme ve bu yeni inşaadaki her noktada da V uzayındaki bir doğruya karşılık gelir. Bu V vektör uaayından inşaa edilen sistemi $\pi(V)$ ile gösterelim.

Yardımcı teorem 1.3.7 ([2]) $\pi(V)$ *yapısı bir projektif düzlemdir.*

İspat $\pi(V)$ deki herhangi iki doğru V vektör uzayında orijinden geçen iki doğruya karşılık gelir ve bu iki doğruda V vektör uzayında bir düzlem belirtir. Bu düzleme karşılık gelen doğru $\pi(V)$ sisteminde bu iki noktayı birleştiren doğrudur. $\pi(V)$ sistemindeki her doğru V vektör uzayının orijinden geçen bir düzlemi olduğundan orijinden geçen $n+1$ tane nokta kapsar. Dolayısıyla $\pi(V)$ sisteminde her doğru üzerinde en az iki nokta vardır. $\pi(V)$ sisteminin herhangi iki doğrusu V vektör uzayının orijinden geçen iki düzlemine karşılık gelir ve bu düzlemlerde bir doğru boyunca kesiştiklerinden $\pi(V)$ de herhangi iki doğru bir noktada kesişir. Son olarak V vektör uzayında herhangi üçü aynı düzlem üçünde bulunmayan dört doğruyu daima bulabiliriz. Mesela F cisminin 0 ve 1 elemanlarını kullanarak

$$\{(0,0,0),(1,0,0)\},\{(0,0,0),(0,1,0)\}$$
$$\{(0,0,0),(0,0,1)\},\{(0,0,0),(1,1,1)\}$$

şeklindedir. Bunların herhangi üçü aynı düzlem üzerinde değildir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Tanım 1.3.8 $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ *n.mertebeden bir projektif düzlem ve* $\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}$ *olsun.* $\mathcal{S}$ *den* X *in atılması ile elde edilen* $\mathcal{S}-X$ *yapısına* X *in* $\mathcal{S}$ *de komplementi denir.*

Eğer X, $\mathcal{S}$ *nin herbir doğrusunun en fazla* $n-1$ *noktasını kapsar ise* $\mathcal{S}-X$ *bir lineer uzaydır.*

n.mertebeden bir projektif düzlemde bir doğrunun komplementi nokta regüleritesi $n+1$, doğru regüleritesi n olan, n^2 noktalı ve n^2+n doğrulu bir sonlu lineer uzaydır. O halde n.mertebeden bir projektif düzlemde bir doğrunun komplementi n.mertebeden bir afin düzlemdir.

Teorem 1.3.9 ([3]) *Bir $\mathcal{S}'$ afin düzlemi bir $\mathcal{S}$ projektif düzlemi içine $\mathcal{S}'$ nün noktaları, d $\mathcal{S}$ nin doğrusu olmak üzere $\mathcal{S}-d$ nin noktaları olacak şekilde yerleştirilebilir. Eğer $\mathcal{S}'$ nün mertebesi n ise bu takdirde $\mathcal{S}$ nin mertebesi de n dir.*

Tanım 1.3.10 *Bir $\mathcal{S}(t,k,v)$ Steiner sistemi, aşağıdaki şartları sağlayan, blok denilen noktaların alt cümlelerinden oluşan v noktalı sonlu $\mathcal{S}$ lineer uzayıdır.*

i) Farklı t nokta $(t \geq 2)$ tam olarak bir blok tarafından kapsanır.

ii) Her blokta tam olarak k tane nokta vardır.

Bloklar lineer uzayın doğrularına karşılık gelir.

Örneğin Fano düzlemi bir $S(2,3,7)$ Steiner sistemidir. Genel olarak n.mertebeden bir projektif düzlem aynı zamanda $S(2,n+1,n^2+n+1)$ steiner sistemidir.

Tanım 1.3.11 *Herhangi iki boyutlu her alt uzayı bir projektif düzlem olan bir $\mathcal{S}$ lineer uzayına bir projektif uzay denir.*

V bir F aykırı cismi üzerine kurulan $n+1$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. $1 \leq i \leq n+1$ olmak üzere V nin noktaları $a_i \in V$ olmak kaydıyla $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ şeklindeki $(n+1)$ lilerdir. $(0,0,...,0)$ den geçen doğrular nokta ve buradan geçen düzlemler birer doğru olarak alınsın. Elde edilen sistemi $\mathcal{S}(V)$ ile gösterelim.

Yardımcı teorem 1.3.12 ([2]) *Yukarıda kurulan $\mathcal{S}(V)$ bir projektif uzaydır.*

İspat Bir aykırı cisimde tanımlı bir vektör uzayından projektif düzlem edilebilmektedir. Aykırı cisme çarpmanın değişme özelliğinide ilave edersek $\mathcal{S}(V)$ nin bir projektif uzay olduğu kolayca görülür.

Yardımcı teorem 1.3.13 ([2]) *Bir projektif uzayın herhangi bir alt uzayı bir projektif uzaydır.*

$\emptyset$, bir nokta, bir doğru aşikâr projektif alt uzay örnekleridir.

Yardımcı teorem 1.3.14 ([2]) *Bir projektif uzayın herhangi iki doğrusu aynı sayıda noktaya sahiptir.*

İspat L' ve L bir *projektif uzayın iki* farklı doğrusu olsun. Eğer L' ve L projektif düzlemin içinde iseler aynı sayıda nokta kapsarlar.

Eğer L' ve L aynı projektif düzlemin içinde değillerse L üzerinde bir p noktası, L' üzerinde bir nokta q noktası seçelim ve bu noktalardan geçen doğruya da L'' diyelim. L ile L'' aynı projektif düzlem içinde olup aynı sayıda nokta kapsayacaktır. Bununla birlikte L' ile L'' de bir projektif düzlemin içindedir. Dolayısıyla bu iki doğruda aynı sayıda nokta kapsayacaktır. Buradan L ile L' ynı sayıda nokta kapsayacaktır.

Yardımcı teorem 1.3.15 ([2]) *$\mathcal{S}$ projektif uzayının herhangi bir alt uzayı $\mathcal{S}'$ ve $p \notin \mathcal{S}'$ olsun. Bu takdirde $\langle \mathcal{S}' \cup \{p\} \rangle$ alt uzayı $q \in \mathcal{S}'$ olmak üzere bütün pq doğruları üzerindeki noktaların kümesidir.*

İspat $\mathcal{X}$, p den geçen $\mathcal{S}'$ yü kesen doğruların kapsadığı noktaların kümesi olsun. $\mathcal{X}$ in bir alt uzayı olduğunu gösterelim. $\mathcal{X}$ in $\mathcal{S}'$ ve p üzerindeki en küçük alt uzay olduğu kolayca görülebilmektedir. Kabul edelim ki $\mathcal{S}' \neq \varnothing$ olsun. q ve r, $\mathcal{X}$ in noktaları olsun. $qr \subseteq \mathcal{X}$ olduğunu gösterelim.

Eğer p, q ve r doğrudaş ise $\mathcal{X}$ in tanımından $qr = pq \subseteq \mathcal{X}$ dir. p, q ve r nin doğrudaş olmadığı farz edilsin. $pq \cap \mathcal{X} = q'$ ve $pr \cap \mathcal{X} = r'$ olsun ($p = q'$ veya $r = r'$ hallerinin mümkün olduğuna dikkat edilsin). Şimdi $\Pi = \langle \{p\} \cup \{q\} \cup \{r\} \rangle$ farklı olan q' ve r' noktalarını kapsayan bir düzlemdir. Dolayısıyla $q'r'$ doğrusu Π dedir. Aynı zamanda $\mathcal{X}$ dedir. Son olarak s, qr nin herhangi bir noktası olsun, ps doğrusu Π dedir. Π bir projektif düzlem $s \in qr$ olup ps doğrusu $q'r'$ doğrusunu bir s' noktasında keser. Dolayısıyla $s' \in \mathcal{X}$ olur ve böylece $s \in \mathcal{X}$ olur.

Yardımcı teorem 1.3.16 ([2]) *Bir $\mathcal{S}$ projektif uzayı değiştirme özelliğine sahiptir.*

Sonuç 1.3.17 ([2]) *n boyutlu bir projektif uzayın hiperdüzlemleri tam olarak $(n-1)$ boyutlu alt uzaylardır.*

İspat Yardımcı teoremler 1.3.16 ve 1.1.16 dan ispat açıktır.

Yardımcı teorem 1.3.18 ([2]) *$n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere mertebesi k olan n boyutlu bir projektif uzayın noktalarının sayısı*

$$k^n + k^{n-1} + \cdots + k^2 + k + 1$$

dir.

İspat $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}$ projektif uzayının bir hiperdüzlemi olsun. Yardımcı teorem 1.3.13 den $\mathcal{S}'$ bir projektif uzaydır.

Şimdi n boyutlu k.mertebeden bir projektif uzayın noktalarının sayısını belirlemek mümkündür. İki boyutlu bir projektif uzayın mertebesi k iken nokta sayısının $k^2 + k + 1$ olduğu hatırlanırsa üç boyutlu bir projektif $\mathcal{S}$ uzayı, yani hepsi aynı düzlemde olmayan dört nokta ile üretilen projektif uzayı düşünülsün. Bu noktalar p, q, r ve s olsun. $\mathcal{S}'' = \langle \{p\} \cup \{q\} \cup \{r\} \rangle$ bir düzlem olsun. Yardımcı teoremler 1.3.15 ve 1.3.16 bize $\mathcal{S} = \langle \mathcal{S}'' \cup \{s\} \rangle$ nün $t \in \mathcal{S}''$ olmak üzere st doğruları üzerindeki tüm noktaların kümesi olduğunu söyler. $\mathcal{S}''$ de $k^2 + k + 1$ nokta bulunduğundan $\mathcal{S}$ de toplam

$$\left(k^2 + k + 1\right) k + 1 = k^3 + k^2 + k + 1$$

nokta vardır.

$\mathcal{S} = \langle \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup ... \{p_{n+1}\} \rangle$ olsun ve $\mathcal{S}' = \langle \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup ... \{p_n\} \rangle$ $n-1$ boyutlu $\mathcal{S}$ nin bir alt uzayı olsun. Yardımcı teorem 1.3.16 gereği tümevarımı kullanarak $\mathcal{S}'$ nün nokta sayısı

$$k^{n-1} + \cdots + k^2 + k + 1$$

bulunur. Bu takdirde yardımcı teorem 1.3.13 gereğince $\mathcal{S}$ nin nokta sayısı

$$\left(k^{n-1} + \cdots + k^2 + k + 1\right) k + 1 = k^n + k^{n-1} + \cdots + k^2 + k + 1$$

dir.

Yardımcı teorem 1.3.19 ([2]) *n boyutlu bir $\mathcal{S}$ projektif uzayının herhangi iki hiperdüzlemi $(n-2)$ boyutlu bir alt uzayda kesişir.*

Yardımcı teorem 1.3.20 ([2]) *Bir $\mathcal{S}$ projektif uzayının bir H has olmayan alt uzayının bir hiperdüzlem olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}$ nin her doğrusunun H ı en az bir noktada kesmesidir.*

İspat Kabul edelim ki $\mathcal{S}$ nin her doğrusu H ı en az bir noktada kessin. O zaman kabulümüzden dolayı $\forall p \notin H$, $q \neq p$ olmak üzere bütün qp doğruları H ı en az bir noktada keser. Böylece $\mathcal{S} \subseteq \langle H \cup \{p\} \rangle$ ya da $\mathcal{S} = \langle H \cup \{q\} \rangle$ dir. Eğer H bir hiperdüzlem değilse $H \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ olacak şekilde bir $\mathcal{V}$ alt uzayı vardır.

$p \in \mathcal{V}-H$ seçilirse $\langle H \cup \{p\} \rangle \subseteq \mathcal{V} \subsetneq \mathcal{S}$ dir. Bu ise çelişkidir. Böylece H bir hiperdüzlemdir.

H bir hiperdüzlem olsun. Yardımcı teorem 1.3.15 ten dolayı $q \in H$ ve $p \notin H$ için $\langle pq, p \rangle$ bir alt uzaydır. H bir hiperdüzlem olduğundan $\langle H, \{p\} \rangle = \mathcal{S}$ dir. Dolayısıyla bütün doğrular H ı keser.

Yardımcı teorem 1.3.21 ([2]) *Bir $\mathcal{S}$ projektif $3-$uzayının herhangi iki düzlemi bir doğru boyunca kesişir.*

İspat π ve π' $\mathcal{S}$ nin herhangi farklı iki projektif düzlemi olsun. π projektif düzleminde bir p noktası alalım ve p den geçen L_1 ile L_2 gibi iki doğru alalım. π' $\mathcal{S}$ nin bir hiperdüzlemi olduğundan L_1 ile L_2 birbirini kesecektir. Yardımcı teorem 1.3.20 gereğince L_1 ile L_2 π' yü en az bir noktada keser. Bu noktalara q ve r dersek q ve r bir doğru üretir ve bu doğru hem π hemde π' dedir. q ve r π ve π' nün ortak noktasıdır. Düzlemler farklı iken doğrunun dışında 3. nokta bulunamaz.

Tanım 1.3.22 ([5]) *$\mathcal{S}$ n.mertebeden bir lineer uzay olsun. Eğer $\mathcal{S}$ nin herbir doğrusu bir tek paralel sınıfa aitse $\mathcal{S}$ nin pararlel sınıflarının kümesine* ***paralelism*** *denir. $n \geq 3$ olmak üzere eğer*

(i) $\mathcal{S}$ bir paralelisme sahiptir.

(ii) L ve L' ortak bir pararlel sınıfın farklı doğruları ve $p \notin L \cup L'$, M ile M' de p den geçen doğrular, M hem L ve L' yü kessin ve M' de L yi keserse M', L' üyüde keser. Yani paralel iki doğrudan birini kesen diğerinide kesmek zorundadır.

(iii) Her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) \leq n$

ise $\mathcal{S}$ ye **n.mertebeden afin uzay** denir. Burada $\mathcal{S}$ yerine $\mathbb{A}$ kullanılabilir.

Bu tanımdan her $L \in \mathcal{L}$ için $v(L) = n$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Yardımcı teorem 1.3.23 ([4]) *Bir hiperdüzlemi atılan bir projektif uzay bir afin uzaydır.*

Yardımcı teorem 1.3.24 ([2]) *Bir afin uzayda bütün doğrular aynı sayıda nokta kapsar.*

Yardımcı teorem 1.3.25 ([2]) *Bir n boyutlu k mertebeli projektif uzaydan elde edilen $\mathbb{A}$ afin uzayının toplam nokta sayısı k^n dir.*

İspat yardımcı teorem 1.3.23 ten bir hiperdüzlemi atılan bir projektif uzay bir afin uzaydır. Buradan $\mathbb{A}$ afin uzayının toplam nokta sayısı

$$k^n + k^{n-1} + \cdots\cdot + k^2 + k + 1 - \left(k^{n-1} + \cdots\cdot + k^2 + k + 1\right) = k^n$$

dir.

Yardımcı teorem 1.3.26 ([2]) *Eğer $\mathbb{A}$ afin uzayı n boyutlu bir $\mathcal{S}$ projektif uzayından elde edilmişse ve eğer $\mathcal{S}$ nin mertebesi 2 değil ise bu takdirde $\mathbb{A}$ nın boyutu n dir.*

Teorem 1.3.27 ([5]) *$\mathcal{S}$ n.mertebeden v noktalı b doğrulu d düzleme sahip 3 boyutlu projektif uzay ise aşağıdakiler geçerlidir:*

i) *Herbir p noktası için,* $b(p) = d(p) = n^2 + n + 1$

ii) $b_\alpha(p) = v(L) = n + 1$ *ve* $v = n^3 + n^2 + n + 1$

iii) $d(L) = n + 1$

iv) $d = n^3 + n^2 + n + 1$, $b = n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1$

Teorem 1.3.27 den dolayı 3-boyutlu bir projektif uzay noktasal regüleritesi $n^2 + n + 1$ doğrusal regüleritesi $n + 1$ olan 3 boyutlu lineer uzay olduğu açıktır.

İspat:

i) 3-boyutlu projektif uzayda bir α düzlemi bu uzayın hiperdüzlemi olup toplam nokta sayısı $v(\alpha) = n^2 + n + 1$ dir.

α, $\mathcal{S}$ de bir düzlem ve p de α dışında bir nokta olmak üzere, $v(\alpha) = n^2+n+1$ ve yardımcı teorem 1.3.21 gereğince farklı iki düzlem bir doğru boyunca kesiştiğinden p den n^2+n+1 tane doğru geçer.

Bu durumda $b(p) = n^2+n+1$ dir.

p noktası α düzlemine ait doğruların dışında olduğundan bu doğruların herbiri ile p nin gerdiği alt uzay hiperdüzlemdir. Bundan dolayı $d(p) = n^2+n+1$

ii) α herhangi bir düzlem olsun. α n.mertebeden bir projektif düzlem olduğundan

$$b_\alpha(p) = v(L) = n+1$$

dir.

Bir p noktası için $v-1 = b(p)(v(L)-1) = (n^2+n+1)n$ olduğundan

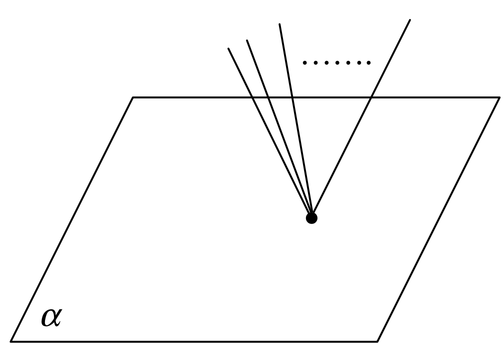
$$v = n^3+n^2+n+1$$

dir.

iii) L herhangi bir doğru olsun. $v(L) = n+1$ olduğundan L ye ait olmayan n^3+n^2 tane nokta vardır. L nin ait olduğu düzlemi α ile belirtirsek, α düzleminde L ye ait olmayan $n^2+n+1-(n+1) = n^2$ tane nokta vardır.

$$d(L) = \frac{n^3+n^2}{n^2} = n+1$$

iv)



Şekil 4

n.mertebeden 3 boyutlu projektif uzayda α bir düzlem olsun.

$p \in \alpha$ için $d(p) = n^2+n+1$ ve $b_\alpha(p) = n+1$ olduğundan p noktasından α düzlemine ait olmayan $(n^2+n+1)-(n+1)=n^2$ tane doğru geçer. $v(\alpha)=n^2+n+1$ gereğince α düzlemine ait olmayan doğru sayısı

$$\left(n^2+n+1\right)n^2$$

dir. α düzlemine ait doğru sayısıda n^2+n+1 olduğundan

$$b=\left(n^2+n+1\right)n^2+n^2+n+1=n^4+n^3+2n^2+n+1$$

dir. Aynı zamanda $\forall L\in\mathcal{L}$ için

$$b=\frac{\binom{v}{2}}{\binom{v(L)}{2}}$$

dir.

$L\in\alpha$, $v(L)=n+1$ ve $d(p)=n^2+n+1$ olduğu diğer şıklarda gösterildi. $(d(L)-1)(v(L))+v(L)=n^3+n^2+n+1$ olup

$$d=n^3+n^2+n+1$$

bulunur.

Teorem 1.3.28 ([5]) $\mathbb{A}$ *n.mertebeden v noktalı b doğrulu d düzleme sahip* 3 *boyutlu afin uzay ise aşağıdakiler geçerlidir:*

i) $b_\alpha(p)=n+1$, $v(L)=n$ ve $v=n^3$

ii) *Herbir p noktası için,* $b(p)=n^2+n+1$, $d(p)=n^2+n+1$

iii) $d(L)=n+1$

iv) $d=n^3+n^2+n$, $b=n^4+n^3+n^2$

İspat $\mathcal{S}$ n.mertebeden 3 boyutlu bir projekif uzay, α da $\mathcal{S}$ nin bir hiperdüzlemi ve $\mathcal{S}$ den bir π düzleminin atılması ile oluşan yapı $\mathcal{S}'$ olsun. yardımcı teorem 1.3.23 ten $\mathcal{S}'=\mathbb{A}$ dır.

i) α, n.mertebeden bir projektif düzlem olduğundan $\mathbb{A}$ nın bir hiperdüzlemi α' bir afin düzlem olduğundan $b_{\alpha'}(p)=n+1$, $v(L)=n$ dir.

$\mathcal{S}$ de $v=n^3+n^2+n+1$ ve $|\pi|=n^2+n+1$ olup $\mathbb{A}$ toplam nokta sayısı

$$n^3+n^2+n+1-\left(n^2+n+1\right)=n^3$$

tür.

$\mathcal{S}$ nin herhangi bir doğrusu ait olmadığı düzlemlerle bir tek noktada kesiştiğinden $\mathbb{A}$ nın herbir L doğrusu ile α nın ortak bir tek noktası olduğundan $v(L) = n$ dir.

ii) Bir p noktası için

$$v - 1 = b(p)(v(L) - 1) \Longrightarrow n^3 - 1 = b(p)(n-1) \Longrightarrow b(p) = n^2 + n + 1$$

dir.

p noktası α düzlemine ait olmadığından

$$d(p) = n^2 + n + 1$$

dir

iii) $\mathbb{A}$ nın herbir L doğrusu α ya ait olmadığından $d(L) = n + 1$dir.

iv) $\mathcal{S}$ 3 boyutlu projektif uzay ve $\mathbb{A}$ da 3 boyutlu afin uzay olduğundan

$$b = n^4 + n^3 + 2n^2 + n + 1 - \left(n^2 + n + 1\right) = n^4 + n^3 + n^2$$

dir. Aynı yolla

$$d = n^3 + n^2 + n + 1 - 1 = n^3 + n^2 + n$$

dir.

BÖLÜM 2

Düzlemsel Lineer Uzaylar

Lineer uzaylar üzerinde bulunma(incidence) geometrisinin temel objeleridir. Afin ve projektif uzaylar lineer uzayların belirgin örneklerindendir. Bu uzaylar üzerinde birçok geniş kapsamlı çalışma ve karakterizasyon yapılmıştır. Bunlardan biri olarak en az 3 boyutlu afin uzaylar n.mertebeden bir cisim üzerinde verilen en az 3 boyutlu vektör uzaylarından doğrulari vektör uzayının bir boyutlu alt uzaylarının ötelemelerinin kümesi olarak alınarak elde edilen lineer uzaylardır. $(n-1)$.mertebeden $d > 2$ boyutlu projektif uzaylarda noktalar olarak, $(n-1)$ elemanlı cisim üzerinde verilen $d+1$ boyutlu vektör uzayının bir boyutlu alt uzayları noktalar, 2 boyutlu alt uzayları doğrular olarak alınarak oluşturulan lineer uzaylardır.

Bu bölümde yeni bir karakterizasyon olarak afin 3 uzaylar ile düzlemsel lineer uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi. Afin 3 uzaylar düzlemsel lineer uzaylar olarak karakterize edildi. Örnegin bütün düzlemler projektif düzlem ise projektif uzay elde edilmekte veya bütün düzlemler afin düzlemler ve doğrularda en azından 4 noktalı ise afin uzay elde edilmektedir.

2.1 Düzlemsel Lineer Uzaylarla İlgili Temel Sonuçlar

Tanım 2.1.1 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *bir lineer uzay ve bu lineer uzay,* $\mathcal{S}$ *nin oluşturduğu has alt uzayların bir ailesi* Ω *ve* l *sabit pozitif bir tamsayı olsun. Eğer* $\mathcal{S}$ *de doğrudaş olmayan her üç noktadan* Ω *nın* l *tane elemanı geçerse* $\mathcal{S}$ *lineer uzayına* ***l-hiperdüzlemsel uzay*** *denir. Bu uzay* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ *olarakta gösterilebilir. Eğer* $l = 1$ *ise* $l-$*hiperdüzlemsel lineer uzayına* ***düzlemsel uzay*** *denir.*

Düzlemsel lineer uzayda Ω kümesinin düzlemlerden oluştuğu açıktır.

Kısacası, $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ bir düzlemsel uzay ve Ω nın elamanları da düzlemler veya hiperdüzlemler olarak adlandırılır.

Projektif uzaylar ve afin uzaylar birer düzlemsel uzay örnekleridir.

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ hiperdüzlemsel uzaylarda düzlemlerin paralellik aksiyomları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Bir α düzleminin noktalar kümesi $\mathcal{P}_\alpha$ ile gösterilecektir.

$\alpha, \beta \in \Omega$ için $\mathcal{P}_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$ ise α, β ayrık alt uzaylar denir.

[düzlemsel paralellik] ; Her $\alpha, \beta \in \Omega$ için

$$P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing \ yada \ P_\alpha = P_\beta \Longleftrightarrow \alpha \ parallel \ \beta$$

Bu bölümde aşağıdaki (*) aksiyomunu sağlayan düzlemsel uzaylar incelendi.

(*) Her $x \in \mathcal{P}$, Ω nın x i içermeyen her α elemanı için Ω nın x den geçen α ya paralel bir tek β elemanı vardır.

(*) aksiyomunu sağlayan düzlemsel uzaylarda düzlemsel paralellik düzlemler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Boyutu 3 e eşit veya 3 ten büyük afin uzaylardan bir doğrunun en az iki noktası hariç belli sayıda noktasını atarak oluşturulan yapı (*) aksiyomunu sağlayan düzlemsel uzaydır. Çünkü atılan noktalardan geçen doğru yeni yapıda en az iki noktalıdır.

Bu bölümde (*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, $n > 2$ olan düzlemsel uzaylar incelenecektir.

Bu bölüm boyunca aksi söylenmedikçe (*) aksiyomunu sağlayan düzlemsel lineer uzaylar yerine kısaca düzlemsel uzaylar ifadesi kullanılacak.

Yardımcı teorem 2.1.2 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ düzlemsel uzay ise $\Omega \cap \mathcal{L} = \varnothing$ dir.*

İspat Kabul edelim ki $\Omega \cap \mathcal{L} \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda $\alpha \in \Omega \cap \mathcal{L}$ olacak şekilde en az bir α elemanı vardır. Bu durumda α hem hiperdüzlem hem de doğrudur. Her düzlem bir has alt uzay olduğundan L nin dışında bir x noktası vardır.

$L = \alpha$ ve x den geçen tek düzlem π ve π' de π ye paralel π den farklı bir düzlem olsun.

Bu durumda π ve L, π' üne paralel olurlar ama ne aynıdır ne de ayrıktırlar. Bu ise paralellikle çelişir. O halde $\Omega \cap \mathcal{L} = \varnothing$ dir.

$n = 2$ durumunda düzlemsel uzay örneklerini verelim. Burada $n = 2$ için düzlemsel lineer uzayların düzlemleri farklı sayıda noktalardan oluşabilir.

Örnek 2.1.3 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *bir lineer uzay,* $\mathcal{P}$ *altı elemandan oluşan bir küme* $\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{P}$ *nin bütün* 2 *lilerinin oluşturduğu küme ve* Ω *da* $\mathcal{P}$ *nin* 3 *elemanlı alt kümelerinin tamamı olsun. Bu durumda* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ *düzlemsel uzaydır.*

Örnek 2.1.4 $\Pi = (\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ *Fano düzlemi olsun.* $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, $\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{P}$ *nin bütün ikililerinin oluşturduğu küme ve üzerinde bulunma bağıntısı Fano düzlemindeki gibi olsun. Bu durumda* $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ 7 *noktalı* 21 *doğrulu bir* 6 *regüler lineer uzaydır.* Ω *bu lineer uzayın has alt uzaylarının bir ailesi olsun. Bu durumda* Ω *nın elemanları ya Fano düzleminin doğruları tarafından üretilen alt uzaylardır ya da Fano düzleminde herbir doğrunun komplementi tarafından üretilen alt uzaylardır. Burada* Ω *nın elemanları ya üçgenlerdir ya da dörtgenlerdir. Dolayısıyla düzlemler farklı sayıda noktaya sahiptir. Gerçektende Fano düzleminin bir doğrusunu alırsak onun komplementi dört noktadan ibaret olup bir dörtgen belirtir. Doğru bir üçgen ve komplementi dört noktadan oluşur.* $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L},\Omega\ )$ *düzlemsel lineer uzaydır. Çünkü* α *düzlemi bir* ABC *üçgeni ise bu üçgenin dışında* $\mathcal{P}$ *nin dört tane noktası vardır. Bu noktalar* D, E, F, G *olsun. Bu* D, E, F, G *noktaları Fano düzleminde* $l = \{A, B, C\}$ *doğrusunun dışındaki noktalar olup bu noktaların* $\mathcal{S}$ *de gerdiği alt uzay* $DEFG$ *dörtgenidir.*

Örnek 2.1.5 2.*mertebeden* 3 *boyutlu afin uzay bir düzlemsel uzaydır.*

Örnek 2.1.6 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *bir lineer uzay* $\mathcal{P}$, $2k$ *tane elamandan oluşan bir küme* $\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{P}$ *nin bütün ikililerinin oluşturduğu küme ve* Ω *da* $\mathcal{P}$ *nin* k *elamanlı alt kümelerinin tamamı olsun.*

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ ise $l = \binom{2k-3}{k-3}$ olmak üzere bir l - hiperdüzlemsel uzaydır.

Çözüm $2k$ tane elamandan oluşan bir kümede A, B, C noktalarını içeren k noktalı alt kümelerin sayısı

$$\binom{2k-3}{k-3}$$

dır. Dolayısıyla doğrudaş olmayan 3 noktadan Ω nın

$$l = \binom{2k-3}{k-3}$$

tane elemanı geçer. Böylelilekle $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ bir l - hiperdüzlemsel uzaydır.

Örnek 2.1.7 *π 2.mertebeden d boyutlu bir projektif uzay ve $2 \leq d \leq 3$ olsun. $\mathcal{P}$, π projektif uzayın noktalarının kümesi ve $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P}$ nin bütün ikililerinin oluşturduğu küme, Ω da π nin hiperdüzlemleri ve komplementlerinin kümesi olmak üzere $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ yapısı l - hiperdüzlemsel uzaydır. Burada hiperdüzlemler farklı mertebelere sahiptir ve*

$$l = 2^{d-1} - 1$$

dir.

Çözüm

$d = 2$ durumunda π bir Fano düzlemidir. Bu durumda $\mathcal{S}$ düzlemsel uzaydır π nin herbir doğrusu $\mathcal{S}$ de üç noktalı bir düzlemdir. Fakat π de bu doğrunun komplementi olan alt uzay bu doğrunun hiçbir noktasını kapsamaz. Dolayısıyla Ω nın elemanları üçgenler ve dörtgenlerden oluşur. Ayrıca $\mathcal{S}$ nin doğruları iki noktalı olduğundan farklı üç nokta doğrudaş değildir. Böylece $\mathcal{S}$ nin herbir doğrusundan Ω nın farklı iki elemanı bulunur. O halde $l = 2^{2-1} - 1 = 1$ ve $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ düzlemsel lineer uzaydır.

$d = 3$ durumunda kabul edelim ki π 2.mertebeden 3 boyutlu projektif uzay olsun. Bu durumda Ω nın elemanları π de bir doğrunun $\mathcal{S}$ de belirttiği 3 noktalı düzlem ile π deki 2 boyutlu alt uzaylar ve bunların komplementlerinden oluşur. π de bir doğrunun komplementi olan alt uzay ile doğrunu arakesiti boş olduğundan $\mathcal{S}$ nin herbir doğrusuna karşılık Ω nın farklı üç tane elemanı vardır. O halde

$$l = 2^{3-1} - 1 = 3$$

tür.

Örnek 2.1.8 *$\mathcal{S}= (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ 3 boyutlu 2.mertebeden afin uzay ve Ω da $\mathcal{S}$ nin 2 boyutlu alt uzaylarının kümesi olmak üzere $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Omega)$ düzlemsel lineer uzaydır.*

Örnek 2.1.9 $\mathcal{S}= (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ 3 *boyutlu* 2.*mertebeden afin uzay ve* Ω *da* $\mathcal{S}$ *nin* 2 *boyutlu alt uzaylarının kümesi olsun. Bu durumda* $\mathcal{S}= (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},\Omega)$ *düzlemsel uzaydır. Ortak bir düzlem tarafından içerilmeyen iki ayrık doğru* L_1, L_2 *olsun.* σ *da* $\mathcal{P}$ *de* 4 *farklı noktayı sabit tutarak* L_1 *in iki noktasını ve* L_2 *nin iki noktasını değiştiren bir involusyon olsun. Bu durumda* $\mathcal{S}' = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},\Omega\cup\Omega^{\sigma})$ *doğru derecesi* 2 *olan* $2-$ *hiperdüzlemsel uzaydır.*

Çözüm $\mathcal{S}$ de doğrudaş olmayan üç nokta A,B,C olsun. A,B,C noktalarından bir tek α_1 afin düzlemi geçer. Kabul edelimki σ involusyonu α_1 de A ve B yi invaryant bıraksın. $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$ A ve B noktalarını kapsayan farklı bir afin düzlemdir. σ bu afin düzlemin sadece iki noktasını invaryant bırakır. Dolayısıyla $\mathcal{S}$ de doğrudaş olmayan A,B,C noktasından iki tane afin düzlem geçer.

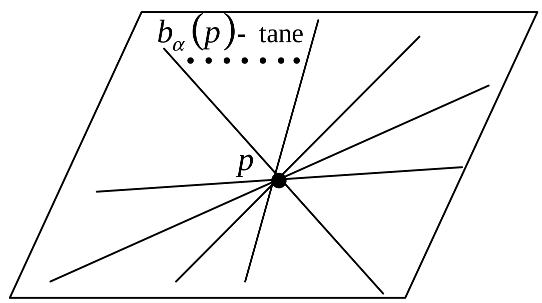
Örnek 2.1.10 π 2.*mertebeden* 3 *boyutlu bir projektif uzay olsun.* $\mathcal{P}$, π *projektif uzayın noktalarının kümesi ve* $\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{P}$ *nin bütün ikililerinin oluşturduğu küme,* Ω *da* π *nin hiperdüzlemleri ve komplementlerinin kümesi olmak üzere örnek* 2.1.7 *deki gibi* $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},\Omega)$ *yapısı* $3-$*hiperdüzlemsel uzay olsun.* π *projektif uzayının* L_1 *ve* L_2 *gibi iki farklı doğrusunu ele alalım(her iki doğruda üç noktaya sahiptir).* σ *da* $L_1\cup L_2$ *nin bütün noktalarını birleştiren,* L_1 *ve* L_2 *nin üzerinde üçgen gibi davranan* P *nin keyfi bir permütasyonu olsun. Bu durumda* $\mathcal{S}' = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},\Omega\cup\Omega^{\sigma})$ *doğru derecesi* 2 *olan bir* $6-$*hiperdüzlemsel uzayıdır ve* $\mathcal{S}'' = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I},\Omega\cup\Omega^{\sigma}\cup\Omega^{\sigma^2})$ *doğru derecesi* 2 *olan bir* $9-$*hiperdüzlemsel uzaydır.*

2.2 Doğrusal regüleritesi en az 3 olan Düzlemsel Lineer Uzaylar

Bu alt bölümde (*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzayın 3 boyutlu afin uzay olduğu ispatlanacaktır. Bu sonuç ilave yardımcı teoremler yardımıyla ispatlanacaktır. Şimdi bu yardımcı teoremler verilecektir.

Yardımcı teorem 2.2.1 $\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ *(*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun. Her bir düzlemdeki noktaların* *sayısı* $(n-1)$ *in herhangi bir katından* 1 *fazladır.*

İspat $\mathcal{S}$ doğrusal regüler olduğundan $\mathcal{S}$ deki her π düzleminde doğrusal regülerdir. Teorem 1.1.13 ten π aynı zamanda noktasal regülerdir. p π düzleminde keyfi bir nokta olsun. Dolayısıyla p noktasından geçen doğru sayısı $b_\alpha(p)$ dir. Herbir doğru üzerinde p hariç $(n-1)$ tane nokta vardır.



Şekil 5

Buradan

$$v(\alpha) = b_\alpha(p)(n-1)+1$$

dir.

Yardımcı teorem 2.2.2 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *(*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun. Bir* π_1 *düzlemini bir noktada kesen her doğru,* π_1 *e paralel olan her düzlemi de bir noktada keser.*

İspat π_1 ve π_2 farklı paralel iki düzlem olsun. L_1, π_1 i bir noktada kesen bir doğru olsun.

Kabul edelim ki L_1, π_2 yi kesmesin ve π_1', L_1 i içeren bir düzlem ve π_2' de π_1' üne paralel ve π_1' ünden farklı olsun.

L_1 den tam olarak k tane düzlem geçsin. Bu k tane düzlemin tamamı π_2 yi keser ve tam olarak $(k-1)$ tanesi π_2' ünü keser.

Kabul edelim ki bu düzlemlerin l tanesi bir doğru boyunca π_2 yi kessin. Bu takdirde π_2, $l \cdot n + k - l$ tane nokta içerir ve $l \cdot n + k - l \equiv k \bmod (n-1)$ dir. Ayrıca yardımcı teorem 2.2.1 den dolayı $k \equiv 1 \bmod (n-1)$ dir.

Daha önce ele alınan (L_1 den geçip π'_2 yi kesenler) $(k-1)$ tane düzlemin l' tanesi π'_2 yü bir doğru boyunca kesssin. Dolayısıyla π'_2 nün noktalarının sayısı

$$l' \cdot n + (k-1- \ l') \equiv (k-1) \bmod (n-1)$$

dir.

Yardımcı Teorem 2.2.1 gerektirir ki $(k-1) \equiv 1 \bmod (n-1)$ dir. Buradan

$$k \equiv 2 \bmod (n-1)$$

dir. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 2.2.3 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *(*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun.* π $\mathcal{S}$ *de bir düzlem ve onu kesmeyen bir doğru L verilsin. Bu takdirde L yi içeren ve* π *ye paralel bir tek* π' *düzlemi vardır.*

İspat Eğer π' düzlemi π ye paralel ve x L üzerinde bir nokta, L π' tarafından içerilmeyen bir doğru ise bir önceki yardımcı teoremden L, π yi kesecektir.

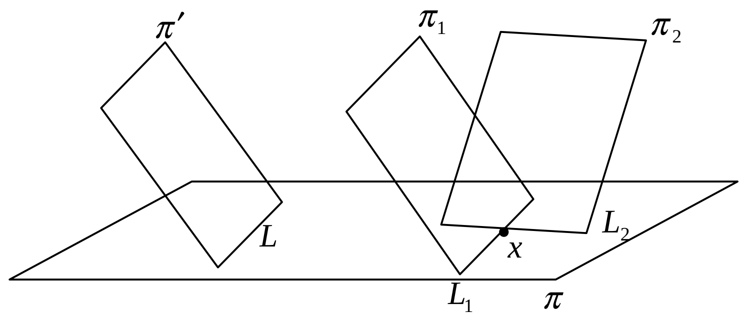
Yardımcı teorem 2.2.4 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *(*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun.* $\mathcal{S}$ *de her düzlem ya n.mertebeden bir afin düzlemdir ya da*
$(n-1)$*.mertebeden bir projektif düzlemdir.*

İspat

π bir düzlem ve L de π ye ait bir doğru olsun. Verilen bir $x \in \pi - L$ noktası için "bu noktadan geçen ve L ye paralel en fazla bir doğru vardır."ifadesini ispat etmek yeterlidir.

Kabul edelimki x den geçen L ye paralel farklı L_1 ve L_2 gibi iki doğru olsun.

π' L yi içeren π den farklı bir düzlem olsun. Açıkça görülür ki L_1 ve L_2, π' düzlemini kesmez ve sonuç 2.2.3 ten L_1, L_2 yi içeren π' üne paralel π_1 ve π_2 gibi farklı iki düzlem vardır. Bu ise (*) aksiyomu ile çelişir.



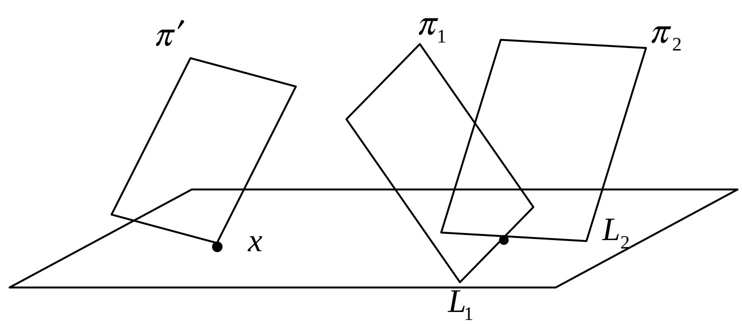
Şekil 6

Yardımcı teorem 2.2.5 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *(*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun.* $\mathcal{S}$ *de iki farklı düzlem ya paraleldir ya da bir doğru boyunca kesişir.*

İspat

İki farklı düzlem ya paraleldir ya bir doğru boyunca kesişir ya da bir noktada kesişir. Farklı kesişen iki düzlemin arakesitinin tek noktadan ibaret olmadığını göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki kesişen iki düzlem π', π ve $\pi \cap \pi' = \{x\}$ olsun. x noktasını içermeyen kesişen farklı L_1 ve L_2 gibi iki doğru vardır. sonuç 2.2.3 ten L_1, L_2 yi içeren π' üne paralel π_1 ve π_2 gibi farklı iki düzlem vardır.



Şekil 7

Bu ise (*) aksiyomu ile çelişir. Dolayısıyla iki farklı düzlem bir noktada kesişmezler.

Yardımcı teorem 2.2.6 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *(*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun.* $\mathcal{S}$ *de bütün düzlemler afin* *düzlemlerdir.*

İspat

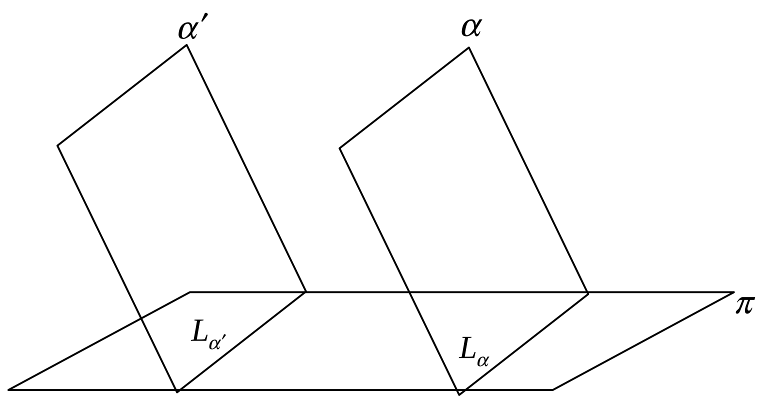
Kabul edelim ki π bir projektif düzlem olsun. π ye paralel olmayan ama birbirine paralel olan α ve α' gibi iki düzlem ele alalım.

Yardımcı teorem 2.2.5 e göre;

α ve α' düzlemleri π düzlemini, kesişmeyen birer doğru boyunca keserler.

Bu doğrulara L_α ve $L_{\alpha'}$ diyelim.

π düzlemindeki bu doğrular, π nin projektif düzlem olmasından dolayı L_α ve $L_{\alpha'}$ kesişmek zorundadırlar. Buda kabulümüzle çelişir.



Şekil 8

Tanım 2.2.7 *(Doğru paralelliği) L, L' aynı düzleme ait herhangi iki doğru olsun. L ve L' doğruları $\mathcal{S}$ de paraleldir $\Leftrightarrow$ L ve L' aynı bir düzlemde paraleldir*

Bu tanımdan L ile L' nün paralel olması, L ile L' nün aynı düzleme ait ve $L \cap L' = \varnothing$ veya $L = L'$ anlamında olduğu açıktır.

Yardımcı teorem 2.2.8 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ (*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun. $\mathcal{S}$ de doğrular üzerindeki paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

İspat

Doğrular üzerindeki paralellik bağıntısının yukrıdaki tanımdan dolayı yansıyan ve simetrik olduğu açıktır. Sadece geçişken olduğu ispatlanması yeterlidir.

Kabul edelim ki L, L', $L'' \in \mathcal{L}$ ve $L \neq L''$ olmak üzere ;

L, L' üne paralel ve L', L'' üne paralel olsun.

π ve π' sırasıyla L, L' ile L', L'' boyunca farklı iki düzlem olsun. Bu kabulümüz $L \cap L'' = \varnothing$ olmasını gerektirir.

Dolayısıyla L ile L'' kesişmez. Aksi halde L, L', L'' noktadaş olurlardı.

x, L üzerinde bir nokta ve L'' ile x den geçen düzlem α olsun. Açıkca görülür ki L', α yı kesmez. Aksi halde $\pi = \alpha = \pi'$ dür.

Sonuç 2.2.3 ten dolayı ;

L' ünü içeren α ya paralel olan bir α' düzlemi vardır.

Eğer L, α' nü keserse $\alpha' = \pi = \alpha = \pi'$ olurdu ki bu bir çelişkidir.

Dolayısıyla yardımcı teorem 2.2.2 den dolayı L ve L'', α düzlemindedir. Buradan L ve L'' paraleldir.

Eğer L, L'' doğruları α düzleminde paralel olmasaydı π ve π' düzlemleri L' ve $L \cap L''$ nün gerdiği alt uzayı olan düzlem ile çakışır. Bu ise çelişkidir.

Böylece L ve L'' paraleldir.

Yardımcı teorem 2.2.9 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ (*) aksiyomunu sağlayan doğrusal regüleritesi n, n>2 olan düzlemsel bir lineer uzay olsun. $\mathcal{S}$ de n^3 tane nokta vardır.*

İspat

α ve α' bir L doğrusu boyunca kesişen düzlemler olsun. L ye paralel α düzlemindeki her doğru α' üne paralel bir tek düzlem içindedir ve α' ünde L ye paralel n tane doğru olduğundan α' üne paralel n tane düzlem vardır. Dolayısıyla $\mathcal{S}$ de paralel düzlem sınıfı n tane düzlemden oluşur ve bu düzlemlerin herbiri n^2 tane nokta içerdiğinden $\mathcal{S}$ de toplam $n \cdot n^2 = n^3$ tane nokta vardır.

Teorem 2.2.10 *Doğrusal regüleritesi $n, n > 2$ olan düzlemsel lineer uzay n.mertebeden 3 boyutlu afin uzaydır.*

İspat Yukarıda verilen 2.2 inci bölümde ki yardımcı teoremlerden dolayı $\mathcal{S}$ nin iki boyutlu her alt uzayı afin düzlemdir. Dolayısıyla $\mathcal{S}$ n.mertebeden 3 boyutlu afin uzaydır.

2.3 Doğrusal regüleritesi 2 olan düzlemsel lineer uzaylar

Bu alt bölümde doğrusal regüleritesi 2 olan düzlemsel lineer uzayların örnek 2.1.3, 2.1.4 veya 2.1.5 den biri olduğu gösterilecektir.

Yardımcı teorem 2.3.1 *Doğru mertebesi* 2 *olan, düzlem paralellik aksiyomunu sağlayan ve düzlem mertebesi sabit olan düzlemsel uzaylar ya örnek* 2.1.3 *ya da örnek* 2.1.5 *de verilen düzlemsel uzaylardır.*

İspat $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \mathbf{\Omega})$ paralellik aksiyomlarını sağlayan ve doğru derecesi 2 olan bir düzlemsel uzay ve ν de $\mathcal{S}$ nin toplam nokta sayısı olsun.

Kabul edelim ki ; Ω nın bütün elemanları k tane noktadan oluşsun.

Aşikar durumlardan sakınmak için $k \geq 3$ alalım.

Çünkü $k = 0$ veya $k = 1$ için, Ω boş kümeden ibaret olup $k = 2$ durumunda da Ω doğrulardan oluşacaktır.

Burada düzlemlerin sayısı

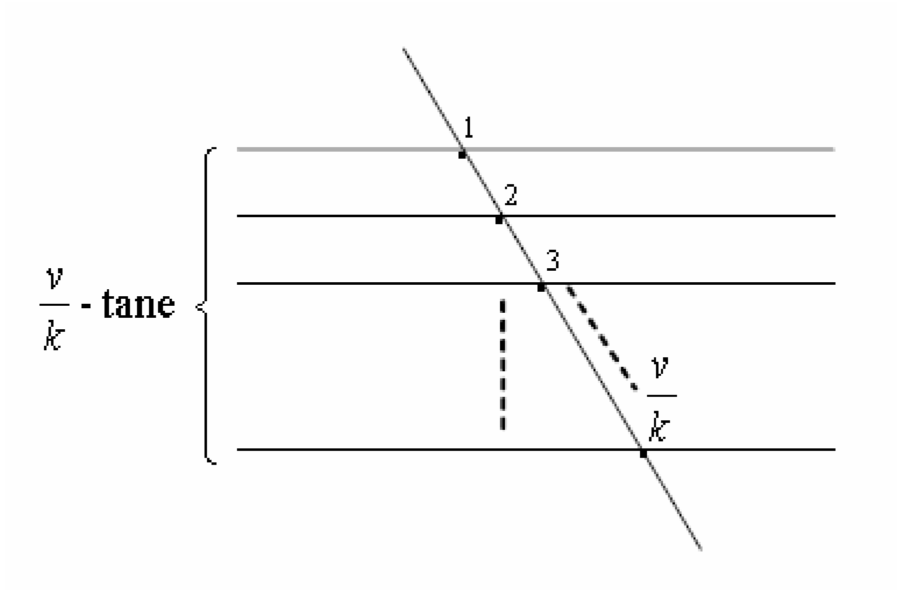
$$|\Omega| = \frac{\binom{\nu}{3}}{\binom{k}{3}} = \frac{\nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2)}{k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2)}$$

dir.

İddia ederiz ki $k^2 > \nu$ dir. Gerçektende $k^2 \leq \nu$ olsa idi ;

Bu takdirde $k \leq \frac{\nu}{k}$ olurdu. (Burada $\frac{\nu}{k}$, paralel sınıflardaki düzlemlerin sayısı)

Eğer $\frac{\nu}{k} \geq k$ ise ;



Şekil *9*

şekil (9) da gösterildiği gibi düzlemleri doğrularla sembolize edecek olursak ve paralel olmayan iki düzlem aldığımızda, bu düzlemlerden biri diğer düzlemin ait olduğu paralel sınıftaki düzlemleri kesecektir.

Paralel sınıftaki düzlemlerin sayısı $\frac{\nu}{k}$, düzlem üzerindeki nokta sayısıda k olmak üzere;

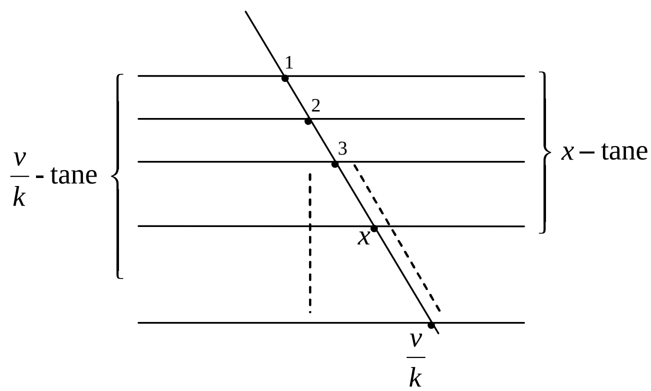
$\frac{v}{k} = k$ ise paralel sınıftaki düzlemleri kesen düzlemin üzerindeki nokta sayısı, paralel sınıftaki düzlem sayısına eşit demektir. Buda paralel olmayan her iki düzlemin bir noktada kesiştiğini gösterir. Bu ise en az iki noktada kesişen düzlemler olduğundan çelişki oluşturur.

$\frac{v}{k} > k$ ise paralel sınıfın dışındaki bir düzlem paralel sınıftaki herbir düzlemi keseceğinden ve en azından bir noktada kestiğini bildiğimizden, bu durumda paralel sınıfta kesen düzlem ile kesişmeyen düzlemler mevcut olacaktır. Buda çelişki oluşturur.

Şimdi $C \subseteq \Omega$ olmak üzere C bir sabit paralel sınıf olsun. Dolayısıyla C, $\frac{\nu}{k}$ tane eleman içerir.

π, C 'nin içinde olmayan herhangi bir düzlem olsun.

Bütün düzlem dereceleri sabit olduğundan π, k tane nokta içerir ve π, C nin herbir elemanını *bir* veya *iki* noktada keser.



Şekil *10*

π nin, C nin tam olarak kaç tane elemanını iki noktada ve kaç tane elemanını bir noktada kestiğini hesaplamak için şekil (10) a bakalım.

Kabul edelim ki π, C nin tam olarak x tane elemanını iki noktada kessin.

Bu takdirde $\frac{\nu}{k} - x$ tane elemanınında bir noktada keser.

Toplam nokta sayılarını iki yolla hesaplayıp eşitlersek ;

$$\left(\frac{v}{k} - x\right) + 2 \cdot x = k \implies x = k - \frac{v}{k} = \frac{k^2 - v}{k}$$

dir. Bir noktada kesenlerin sayısıda ;

$$\frac{\nu}{k} - x = \frac{v}{k} - \left(\frac{k^2 - v}{k}\right) = \frac{2v - k^2}{k}$$

bulunur.

π, C nin tam olarak $\frac{k^2-v}{k} > 0$ tane elemanını iki noktada ve $\frac{2v-k^2}{k}$ tane elemanınıda bir noktada keser.

C nin dışındaki her düzlem en azından C nin bir elemanını iki noktada keser.

C nin bir α elemanını iki sabit noktada kesen C nin dışındaki düzlemlerin sayısı

$$\frac{v - k}{k - 2}$$

dir.

Sonuç olarak C nin bir α düzleminin iki sabit noktada kesen C ye ait olmayan düzlemlerin sayısı

$$\binom{k}{2} \cdot \frac{v-k}{k-2} = \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot \frac{v-k}{k-2}$$

dir. Eğer α yı C üzerinde değiştirirsek ve her düzlemi $\frac{k^2-v}{k}$ kez sayarsak, C ye ait olmayan düzlemlerin sayısı

$$\frac{\frac{k\cdot(k-1)}{2} \cdot \frac{v-k}{k-2} \cdot \frac{v}{k}}{\frac{k^2-v}{k}} = \frac{v \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{2 \cdot (k-2) \cdot (k^2-v)}$$

dir. C ye ait olmayan düzlemlerin sayısına C ye ait düzlem sayısınıda eklersek toplam düzlem sayısını verir.

$$\frac{v \cdot k \cdot (k-1 \cdot (v-k))}{2 \cdot (k-2) \cdot (k^2-v)} + \frac{v}{k} = |\Omega|$$

$$\frac{v \cdot k \cdot (k-1 \cdot (v-k))}{2 \cdot (k-2) \cdot (k^2-v)} + \frac{v}{k} = \frac{\nu \cdot (\nu-1) \cdot (\nu-2)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}$$

Basit cebirsel işlemlerden sonra

$$2v^2 - 2 \cdot \left(k^2 - k\right) \cdot v + \left(k^4 - 4k^3 + 7k^2\right) = 0$$

elde edilir. *Başta* $k^2 > v$ *almıştık ve bu kabul, bir* α *düzlemi her paralel sınıftaki düzlemleri iki noktada kesenler içindir. Aksi takdirde bir noktada kesiyordu.* $\frac{k^2-v}{k} > 0$ *ise iki noktada kesenlerin sayısını verir.*

v, bir pozitif tamsayı olduğundan son denklemin(v ' ye göre) diskriminantı D, sıfırdan büyük ve ayrıca tam kare olmalıdır.

$$D = -k^4 + 6k^3 - 7k^2 - 6k + 9$$

dur. D, $k = 3, 4$ için pozitiftir.

Eğer $k = 3$ ise $D = 9$ olup $v \in \{3, 6\}$ dir. Burada $v = 3$ durumuda bir tek düzlem söz konusu olduğundan $v = 6$ alırız. Buda örnek 2.1.3 ü ifade eder.

Eğer $k = 4$ ise $D = 1$ olup $v \in \{7, 8\}$ dir. Burada $v = 7$ durumunda k, v yi bölmeyeceğinden dolayı $v = 8 = 2^3$ dir. Buda 2.mertebeden affin 3-uzay olan örnek 2.1.5 i ifade eder.

Yardımcı teorem 2.3.2 *Paralellik aksiyomlarını sağlayan, doğru mertebesi* 2 *olan ve noktalar kümesi iki paralel düzlemin birleşimi olan düzlemsel lineer uzaylar örnek* 2.1.3*, örnek* 2.1.4 *ve örnek* 2.1.5 *de verilen düzlemsel uzaylardan biridir.*

İspat

α_1, α_2 iki paralel düzlem ve $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \mathcal{P}$ olsun. Burada $\mathcal{P}$, doğru derecesi 2 olan $\mathcal{S}$ düzlemsel uzayın noktalarının kümesidir.

Kabul edelim ki $v(\alpha_1) \geq 5$ olsun. Bu durumda iddia ederiz ki $v(\alpha_2) > 3$ tür.

Çünkü, $v(\alpha_2) \leq 3$ durumunda $v(\alpha_2) = 3$ tür. $\pi \neq \alpha_2$ olacak şekilde α_2 nin iki noktasını içeren bir π düzlemi mevcut olacaktır ve bu π düzlemi α_1 düzlemini en fazla iki noktada kesecektir.

π ye paralel her düzlem α_1, α_2 yi keser. Ama π de olmayıp α_2 de olan yalnız bir nokta mevcuttur. Bu nedenle π den farklı π ye paralel yalnız bir $\pi' \neq \pi$, $\pi^{'}$ düzlemi mevcuttur.

Açıkca, π' α_1 i en fazla iki noktada keser ve $\pi \cup \pi' = \mathcal{P}$ olduğundan α_1 en fazla 4 nokta içerir. Buda $v(\alpha_1) = 5$ ile çelişir.

Buradan $v(\alpha_2) \geq 4$ tür. Kabul edelim ki π, α_2 yi x, x' gibi iki noktada kesişen bir düzlem ve y, y' de x, x' den farklı α_2 nin iki noktası olsun.

α_1 en azından 5 noktaya sahip olduğundan ve y, y' boyunca olan her düzlem α_1 i en fazla 2 noktada keseceğinden, burada y, y' boyunca en az 3 tane düzlem vardır.

α_1 in π ile arakesiti için en fazla iki aday olduğundan (*yani* π*,* α_1 *i en fazla iki noktada keser*) y, $y^{'}$ boyunca olan düzlemler π yi kesmeyebilir. Dolayısıyla π ye paralel y, $y^{'}$ boyunca olan bazı $\pi^{'}$ düzlemleri vardır.

y sabit tutulup y' yü değiştirirsek ve y noktası boyunca olan paralelliğin tekliğinide kullanırsak, $\alpha_2 = \{x, x', y, y'\}$ olur. Ama burada görürüz ki π ve π' kendi paralel sınıflarında tek düzlemlerdirler ve onların birleşimi $\mathcal{P}$ olmak zorundadır. Ama onlar α_1 in tüm noktalrını örtmezler. Buda çelişkidir.

Bu nedenle $v(\alpha_1) \leq 4$ ve aynı şekilde $v(\alpha_2) \leq 4$ tür. Buradan $|\mathcal{P}| \in \{6, 7, 8\}$ dir. Çünkü α_1 ve α_2 düzlemler olduğundan en az 3 noktalıdırlar ki

$$v(\alpha_1) = 3 \;\; ve \;\; v(\alpha_2) = 3$$

veya

$$v(\alpha_1) = 4 \ ve \ v(\alpha_2) = 3, v(\alpha_1) = 3 \ ve \ v(\alpha_2) = 4$$

ya da

$$v(\alpha_1) = 4 \ ve \ v(\alpha_2) = 4$$

dür.

i) Eğer $|\mathcal{P}| = 8$ ise kolayca görülür ki her paralel sınıf tam olarak 4.mertebeden iki düzlem içerir. Bu nedenle bütün düzlemler aynı mertebeye sahiptir. Dolayısıyla örnek 2.1.5 e modeldir. Yardımcı teorem 2.3.1 den sonuç kolayca görülür.

ii) Eğer $|\mathcal{P}| = 6$, kolayca görülür ki her paralel sınıf tam olarak 3.mertebeden iki düzlem içerir. Bu nedenle bütün düzlemler aynı mertebedendir. Yardımcı teorem 2.3.1 den yine sonuç kolayca görülür ki örnek 2.1.3 e modeldir.

iii) Eğer $|\mathcal{P}| = 7$, düzlemlerin herbir paralel sınıfı 4.ve 3.mertebeden birer düzlem içerir. Buradan üçüncü mertebeden bütün düzlemler birbirini keser. Kabul edelim ki böyle iki düzlem iki noktada kesişsinler. O zaman 4 noktalı paralel düzlemler 3 noktada kesişmek zorundadır. Bu ise çelişkidir. Böylece 3 noktalı düzlemler bir projektif düzlem belirtir ki bu projektif düzlem 2.mertebeden tek projektif düzlemdir. Buda örnek 2.1.4 için modeldir

Yardımcı teorem 2.3.3 *Paralellik aksiyomlarını sağlayan, doğru mertebesi sabit ve* 2 *olan bir düzlemsel uzaydaki düzlemlerin oluşturduğu her paralel sınıf en azından* 3 *elemana sahipse her düzlemin derecesi* k *ya da* $k+1$ *olacak şekilde bir* k *sayısı vardır.*

İspat

Kabul edelim ki doğru derecesi 2 olan $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \mathbf{\Omega})$ düzlemsel uzayında, farklı mertebeden iki düzlem π ve π' olsun.

Kabul edelim ki $|\pi| > |\pi'| = k$ olsun.

π' ünü iki noktada kesen her düzleme paralel bir tek düzlem olduğundan $k > 3$ tür.

Buradan, π de olmayıp π' de olan x, x' gibi iki nokta seçilebilir.

$\pi \cup \pi'$ de olmayan y gibi bir nokta mevcuttur.

Çünkü π, π' üne paralel ise kabulümüzden bu aşikar. Eğer π, π' üne paralel değilse π ye paralel herhangi bir düzlem π' ünde olmayan bir nokta içerir.

π',π ye paralel değilse buradan π', en azından $\pi \cup \alpha$ tarafından içerilmeyen x'' gibi bir nokta içermek zorundadır. x'' noktası, α ve π ye paralel üçüncü bir düzlem üzerindedir.

Dolayısıyla α yı x, x'', y boyunca olan düzlem yerine alınabilir ve böylece π ye paralel olmayan x, x', y noktalarından geçen bir α düzlemi vardır.

Buradan α, π yi en azından y' gibi bir noktada keser ve y, y' boyunca olan düzlemlerin kümesini $\mathcal{S}$ olarak alınabilir.

π' düzlemi $\mathcal{S}$ nin π' üne paraelel olmayan herbir elemanını en az bir noktada keser ve en az bir α elemanınıda iki noktada keser.

Bu nedenle $|\mathcal{S}| \leq k$ dir.

π düzlemi $\mathcal{S}$ nin her bir elemanının y 'den farklı en çok bir noktada keser ve böylece $|\pi| - 1 \leq |\mathcal{S}|$

Eşitsizlikleri birleştirirsek

$$|\pi| - 1 \leq |\mathcal{S}| \leq k \Longrightarrow |\pi| \leq k + 1$$

dir. Buradan iddia gözükür.

Teorem 2.3.4 *Paralellik aksiyomlarını sağlayan doğru mertebesi* 2 *olan düzlemsel lineer uzaylar örnek* 2.1.3*, örnek* 2.1.4 *ve örnek* 2.1.5 *ten biridir.*

İspat İspat yardımcı teorem 2.3.1 in ispatında kullanılan benzer bir yaklaşım ile tamamlanabilir. Fakat burada yardımcı teorem 2.3.1 in ispatındaki yaklaşımdan farklı diğer bir ihtimal daha vardır. Şimdi bunu gösterelim.

Yardımcı teorem 2.3.3 ün ispatındaki gibi aynı notasyon ile $|\mathcal{S}| = k$ sonucuna varılır. Buradan eğer $\mathcal{S}$ de k inci mertebeden tam olarak a tane düzlem varsa, $\mathcal{S}$ de $k - a$ tane $k + 1$ inci mertebeden düzlem vardır ve

$$|\mathcal{P}| = v = a \cdot (k-2) + (k-a) \cdot (k-1) + 2 = k^2 - k - a + 2$$

dir. Kolayca şöyle bir sonuca varılabilir ki, düzlemlerin her paralel sınıfı en az $k - 2$ tane, en fazla $k - 1$ eleman içerir. Yani α $\mathcal{S}$ de bir düzlem ve α nın ait olduğu paralel sınıfın eleman sayısıda $|\pi(\alpha)|$ olmak üzere

$$k-2 \leq |\pi(\alpha)| \leq k-1$$

dir. Çünkü;

$|\pi(\alpha)| \leq k-3$ ise $\mathcal{S}$ nin toplam nokta sayısı en fazla

$$(k-3)\cdot(k+1) = k^2-2k-3 \leq k^2-k-a-3 < v$$

dir. Bu ise bir çelişki oluşturur.

$|\pi(\alpha)| \geq k$ ise $\mathcal{S}$ nin k ayrık düzleminin toplam nokta sayısı en az

$$k^2 = k^2-k+k > k^2-k+2-a$$

dır. Bu ise bir çelişki oluşturur.

Eğer $|\pi(\alpha)| = k-2$ ise bu paralel sınıfta k inci mertebeden $a-4$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $k-a+2$ tane düzlem vardır.

Çünkü k inci mertebeden $x-$tane düzlem varsa $k+1$ inci mertebeden $(k-2-x)$ tane düzlem vardır. Buradan toplam nokta sayısını iki yolla hesaplarsak;

$$x\cdot k+[k-2-x]\cdot(k+1) = k^2-k-a+2$$

$$x\cdot k+k^2+k-2k-2-x\cdot k-x = k^2-k-a+2$$

$$k^2-k-x = k^2-k-a+2$$

dir. Polinomların eşitliğinden;

$$-2-x = -a+2 \implies x = a-4$$

$$k-2-x = k-2-a+4 = k-a+4$$

dir. Bu durumda $a \geq 4$ tür.

Eğer $|\pi(\alpha)| = k-1$, bu paralel sınıfta k inci mertebeden $k+a-3$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $2-a$ tane düzlem vardır.

Çünkü k inci mertebeden $y-$tane düzlem varsa $k+1$ inci mertebeden $(k-1-y)$ tane düzlem vardır. Buradan toplam nokta sayısını iki yolla hesaplarsak;

$$y \cdot k + [k-1-y] \cdot (k+1) = k^2 - k - a + 2$$

$$y \cdot k + k^2 - 1 - y \cdot k - y = k^2 - k - a + 2$$

$$k^2 - y - 1 = k^2 - k - a + 2$$

dir. Polinomların eşitliğinden;

$$y = k + a - 3 \ ve \ k - 1 - y = k - 1 - k - a + 3 = 2 - a$$

dir. Bu durumda $a \leq 2$ dir.

Böylelikle bütün düzlemlerin paralel sınıfları tam olark ya $k-2$ tane eleman ya da tam olarak $k-1$ tane eleman içerir.

Sonuç olarak ispatı iki kısıma ayırabiliriz. Bunlardan birine durum A, diğerinede durum B diyelim.

Durum A : Düzlemlerin bütün paralel sınıfları tam olarak $k-2$ tane eleman içerir.

Bu durum yukarıda belirtildiği gibi $a \geq 4$ olmasını gerektirir. Öncelikle burada, $k-1$ tane düzlem tarafından içerilen iki nokta olmak zorundadır.

$\mathcal{S}'$, z ve z' gibi iki nokta boyunca düzlemlerin kümesi olsun. Kabul edelim ki;

b, bir tamsayı olmak üzere $\mathcal{S}'$ ünde k inci mertebeden $a+b$ tane düzlem olsun.

Bu takdirde $\mathcal{S}'$ ünde $k+1$ inci mertebeden düzlemlerin sayısı

$$\frac{(v-2)-(a+b)\cdot(k-2)}{k-1} = k - a - \frac{b\cdot(k-2)}{k-1}$$

olup bu $k-1$ in b yi bölmesini gerektirir ve

$$\frac{b}{k-1} \leq \frac{k-a}{k-2} \leq \frac{k-4}{k-2} < 1$$

dir.

$\frac{(v-2)-(a+b)\cdot(k-2)}{k-1}$ formülünde;

$(v-2)$; toplam nokta sayısından z ve z' noktalarının çıkarılmasını ifade eder.

$(a+b)$; $\mathcal{S}'$ ünde k inci mertebeden düzlem sayısı

$(a+b)\cdot(k-2)$; k inci mertebeden düzlemler üzerindeki z ve z' noktaları hariç toplam nokta sayısı

$(v-2)-(a+b)\cdot(k-2)$; z ve z' hariç, toplam nokta sayısı ile k inci mertebeden düzlemler üzerindeki toplam nokta sayısı farkını ifade eder.

$\frac{(v-2)-(a+b)\cdot(k-2)}{k-1}$ formülüde $\mathcal{S}'$ ünde $k+1$ inci mertebeden düzlemlerin sayısı olup $v=k^2-k-a+2$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{(v-2)-(a+b)\cdot(k-2)}{k-1} &= \frac{\left(k^2-k-a+2\ -2\right)-(a+b)\cdot(k-2)}{k-1}\\ &= \frac{k^2-k-a-a\cdot k+2a-b\cdot(k-2)}{k-1}\\ &= \frac{k\cdot(k-a)-(k-a)-b\cdot(k-2)}{k-1}\\ &= \frac{(k-a)\cdot(k-1)-b\cdot(k-2)}{k-1}\\ &= k-a-\frac{b\cdot(k-2)}{k-1}\end{aligned}$$

dir. Buradan $b\in\{1-k\ ,\ 0\}$ dır.

Eğer $b=1-k$ ise z ve z' noktalarını içeren k inci mertebeden $a-k+1$ tane düzlem ve z ve z' boyunca $(k+1)$ inci metebeden $2k-a-2$ tane düzlem vardır.

Gerçektende yukarıda belirtildiği gibi; b, bir tamsayı olmak üzere $\mathcal{S}'$ ünde k inci mertebeden $a+b$ tane düzlem vardır ve $a+b=k-1$ dir. Eğer

$$b=1-kise1-k+a=k-1\Longrightarrow a=2k-a-2$$

olur.

Buradan, toplamda z ve z' boyunca $k-1$ tane düzlem vardır.

Böylelikle şöyle bir sonuca varılabilir ki; Eğer iki nokta boyunca tam olarak $k-1$ tane düzlem yoksa burada her zaman a tane k inci mertebeden ve kalan kısmıda $k+1$ inci mertebeden olmak üzere tam olarak k tane düzlem vardır.

Bu nedenle iki nokta boyunca her zaman k tane düzlem olduğu tahmin edilebilir. Kabul edelim ki X, k inci mertebeden düzlemlerin sayısı ve Y de $k+1$ inci mertebeden düzlemlerin sayısı olsun.

π, k inci ve $k+1$ inci mertebeden düzlemler $p,\ p' \in \pi$ ve $p \neq p'$ olmak üzere (π, p, p') sıralı üçlüleri iki farklı yoldan sayılırsa

$$X = \frac{v \cdot (v-1) \cdot a}{k \cdot (k-1)}; Y = \frac{v \cdot (v-1) \cdot (k-a)}{(k+1) \cdot k}$$

elde edilir. Gerçekten toplam nokta sayılarının ikili kombinasyonlarının, k nın ikili kombinasyonlarına bölümünün a katı X i verir. Yani

$$X = \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}} \cdot a$$

dir. Benzer şekilde

$$Y = \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k+1}{2}} \cdot (k-a)$$

dır.

Düzlemlerin her paralel sınıfı tam olarak k inci mertebeden $a-4$ tane ve $k+1$ inci mertebeden $k-a+2$ tane düzlem içerir. Buradan paralel sınıfların sayısı

$$\frac{X}{(a-4)} = \frac{Y}{(k-a+2)}$$

dir. Yukarıdaki X, Y ifadeleri yerine yazılırsa;

$$\frac{\frac{v \cdot (v-1) \cdot a}{k \cdot (k-1)}}{(a-4)} = \frac{\frac{v \cdot (v-1) \cdot (k-a)}{(k+1) \cdot k}}{(k-a+2)}$$

elde edilir. Bu ifade de düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{a}{a-4} = \frac{k-a}{k-a+2} \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{(k+1) \cdot k}$$

ifadesinde

$$\frac{k-a}{k-a+2} < 1 ve \frac{k-1}{k+1} < 1$$

olduğundan

$$\frac{k-a}{k-a+2} \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{(k+1) \cdot k} < 1$$

olur. Aynı zamanda $1 < \frac{a}{a-4}$ olduğundan iki eşitsizliğin birleşimi ile

$$1 < \frac{a}{a-4} = \frac{k-a}{k-a+2} \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{(k+1) \cdot k} < 1$$

olur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak; k inci mertebeden $a-k+1$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $2k-a-2$ tane düzlem tarafından içerilen z, z' gibi iki nokta olmak zorundadır.

$0 \leq a \leq k$ olduğundan $a \in \{k-1, k\}$ durumu elde edilir. Gerçekten k inci mertebeden a tane düzlem varsa $k-a$ tane $k+1$ inci mertebeden düzlem olduğu bulunmuştu.

Burada da k inci mertebeden $a-k+1$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $2k-a-2$ tane düzlem bulundu. Bu nedenle $a = k-1$ veya $a = k$ olabilir.

Çünkü $a = k-b$, $b \geq 2$ olsa;

k inci mertebeden $a-k+1$ tane düzlem olduğundan

$$a-k+1 = k-b-k+1 = -b+1$$

olur ki $b \geq 2$ kabülünden dolayı bir çelişki oluşur.

Birinci olarak $a = k-1$ durumunu kabul edelim.

k inci mertebeden $a-k+1$ tane düzlem olduğunda

$$a-k+1 = k-1-k+1 = 0$$

olur ki z, $z^{'}$ boyunca k inci mertebeden düzlem yoktur.

Bu nedenle k inci mertebeden x ve x' gibi iki nokta boyunca $a = k-1$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $k-a = 1$ tane düzlem olmak zorundadır.

z'', z ve z' den farklı bir nokta olsun. z, z', z'' boyunca olan düzlem $k+1$ inci mertebedendir.

Kabul edelim ki π, z' ünü içermeyen z ve z'' boyunca bir düzlem olsun. π düzlemi z ve z' boyunca olan her düzlemi z den farklı en fazla bir noktada keseceğinden

$$|\pi| \leq 1 + (k-1) = k$$

olduğu görülür.

Buradan z ve z' boyunca k inci mertebeden tam olarak $k-1$ tane düzlem vardır. Daha önce sayıldığından z boyunca k inci mertebeden her düzlem z ve z' boyunca olan $k+1$ inci mertebeden her düzlemi z ve z' den farklı yanlız bir noktada keser. Böylelikle z boyunca k inci mertebeden tam olarak $(k-1)^2$ tane düzlem olduğu görülür.

Yukarıda belirledik ki

$$v - 2 = (k-1)^2 \Longrightarrow v = k^2 - 2k + 3$$

tür.

Şimdi kabul edelim ki y bir nokta olsun. Daha önceki bilgilerden y ve y' boyunca k inci mertebeden hiç bir düzlemin olmadığı en az bir y' noktası vardır. Olmayana ergi metoduyla bu kolayca gösterilebilir.

Kabul edelim ki böyle bir y' noktası olmasın. $y'' \neq y$ olacak şekilde her y'' noktası y noktası ile birlikte $k+1$ inci mertebeden bir tek düzlem tarafından içerilirler.

Böyle düzlemlerin sayısı $\frac{v-1}{k}$ ya eşit olup bu da $k = 2$ olmasını gerektirir ki çelişkidir.

Buradan her nokta, z noktası gibi davranıp her nokta boyunca tam olarak $k+1$ inci mertebeden $k-1$ tane düzlem ve k inci mertebeden $(k-1)^2$ tane düzlem vardır.

k inci mertebeden düzlemlerin sayısı X ve $k+1$ inci mertebeden düzlemelrin sayısı Y olsun. $p \in \pi$ olmak üzere k inci ve $k+1$ inci mertebeden p noktaları ve π düzlemlerinin sıralı ikilileri iki farklı yolla sayılırsa;

$$X = \frac{v \cdot (k-1)^2}{k}; Y = \frac{v \cdot (k-1)}{k+1}$$

elde edilir. Buradan görülmektedir ki v, k tarafından bölünmektedir. Bu nedenle $k = 3$ tür. Ama bir paralel sınıf yanlızca bir eleman içerir. Bu da çelişki oluşturur.

Şimdi ikinci olarak $a = k$ olsun. z ve z' boyunca $k+1$ inci mertebeden tam olarak $k-2$ tane düzlem ve k inci mertebeden tam olarak bir düzlem vardır.

Buradan $v = (k-2) \cdot k + 2$ dir.

Kabul edelim ki z'', k inci mertebeden z ve z' boyunca bir tek düzlem tarafından içerilmeyen z ve z' ünden farklı bir nokta olsun. Yukarıda ki gibi z, z'' boyunca bir düzlem hariç her düzlem k inci mertebeden olmak zorundadır.

Aksi halde o düzlem z yi içeren z, z' boyunca en az üç noktada bazı düzlemleri kesmek zorunda olur. Bu da çelişkidir. Fakat z, z'' boyunca düzlemlerin sayısı

$$\frac{((v-2)-(k-1))}{(k-2)+1} = \frac{k-1}{k-2}$$

dir.

Bu da $k = 3$ olmasını gerektirir ki çelişki demektir.

Bu nedenle yukarıda gösterdik ki Durum A ortaya çıkmıyor.

Durum B: *Düzlemlerin bütün paralel sınıfları tam olarak* $k-1$ *eleman içerir.*

Burada düzlemlerin her paralel sınıfı içinde, k inci mertebeden $a+k-3$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $2-a$ tane düzlem vardır.

Eğer $a = 2$ ise burada yanlızca k inci mertebeden düzlemler olacaktı ve yardımcı teorem 2.3.1 den $k = 3$ olacaktır. Bu bizim "*her paralel sınıf en az 3 eleman içerir.*" kabulümüzle çelişecektir. Buradan $a \in \{0, 1\}$ dir.

Kabul edelim ki z ve z' iki farklı nokta olsun.

Durum A nın başındakine benzer olarak burada da iki durum ihtimali vardır. z ve z' *ya tam olarak* k *inci mertebeden bir düzlem ve* $k+1$ *inci mertebeden* $k-a$ *tane düzlem tarafından içerilmektedir* ya da k *inci mertebeden* $a+k-1$ tane *düzlem ve* $k+1$ *inci mertebeden* $2-a$ *tane düzlem tarafından içerilmektedir.*

Birinci durumun var olduğu kabul edilirse; daha sonraki ihtimal asla ortaya çıkmaz. Daha önce kullanılan aynı notasyon ile

$$X = \frac{v \cdot (v-1) \cdot a}{k \cdot (k-1)}; Y = \frac{v \cdot (v-1) \cdot (k-a)}{(k+1) \cdot k}$$

olur ki buradan paralel sınıfların sayısı;

$$\frac{X}{a+k-3} = \frac{Y}{2-a} \Longrightarrow k^3 - 4k^2 + (3+a) \cdot k + 2a^2 - 5a = 0$$

$$a = 0 \Longrightarrow k \in \{1, 3\} \;\; ve \;\; a = 1 \Longrightarrow k = 3$$

dir.

Buda; " bir paralel sınıfta her zaman iki tane eleman olduğunu " gösterir ki bu bir çelişkidir.

Buradan z ve z' k inci mertebeden $a+k-1$ tane düzlem ve $k+1$ inci mertebeden $2-a$ tane düzlem tarafından içerilmektedir.

$a + k - 1 \neq 0$ ve $k \geq 4$ olduğundan $\{z, z'\} \cap \{y, y'\} = \emptyset$ olmak üzere z ve z' boyunca k inci mertebeden bir α düzlemi içinde y ve y' gibi iki nokta alınabilir.

Eğer y ve y' boyunca k inci mertebeden ikinci bir α' düzlemi olsaydı, bu düzlem α dan farklı z ve z' boyunca olan k tane düzlemin herbirini en fazla bir noktada keseceğinden, burada α' ünden farklı z ve z' boyunca en az iki tane düzlem olacaktı ki bu bir çelişkidir.

Buradan $a = 1$ dir. Çünkü $k + a - 1 > 1$ olduğundan kolayca görülmektedir.

z ve z' boyunca $k+1$ inci mertebeden bir α düzlemi yerleştirilirse, benzer şekilde $a = 0$ sonucuna varılır ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak durum B gerçekleşmez ve ispat tamamlanmış olur.

2.4 Doğrusal regüleritesi n, n>2 olan $l-$hiperdüzlemsel uzaylar

Bundan sonra $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ uzayı doğru mertebesi n olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir $l-$ *hiperdüzlemsel uzaydır.*

Yardımcı teorem 2.4.1 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *uzayı doğru mertebesi* n *olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir l-hiperdüzlemseluzay olsun.* $\mathcal{S}$ *de herbir hiperdüzlemdeki noktaların sayısı* $(n-1)$ *in herhangi bir katından bir fazladır. Paralel olmayan iki hiperdüzlemin arakesitindeki noktaların sayısı da* $(n-1)$ *in herhangi bir katından bir fazladır.*

İspat İspat yardımcı teorem 2.2.1 dekine benzer yapılabilir.

Yardımcı teorem 2.4.2 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *uzayı doğru mertebesi* n *olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir l-hiperdüzlemseluzay olsun.* $\mathcal{S}$ *de bir* ξ_1 *hiperdüzlemini bir noktada kesen her doğru,* ξ_1 *e paralel her* ξ_2 *hiperdüzlemini bir noktada keser.*

İspat

Kabul edelim ki ξ_1, ξ_2 paralel ama farklı iki hiperdüzlem ve L_1 de ξ_1 i x gibi bir noktada kesen bir doğru olsun. Kabul edelim ki L_1, ξ_2 i kesmesin.

Kabul edelim ki ξ_1', L_1 i içeren bir hiperdüzlem ve ξ_2' üde ξ_1' üne paralel ama farklı bir hiperdüzlem olsun.

L_1 boyunca tam olara k tane hiperdüzlem olduğunu kabul edelim.

Bu k tane hiperdüzlemin tamamı ξ_2 nin herhangi bir π_2 düzlemini keser ve tam olarak $k-1$ tanesi ξ_2' nün bir π_2' ü düzlemini keser.

(ξ, y) çiftlerini iki yolla sayalım öyle ki ξ, L_1 boyunca olan hiperdüzlemler ve y de ξ ve ξ_2 içinde bir nokta.

Yardımcı teorem 2.4.1 gerektirir ki $l \equiv k \bmod(n-1)$ olmak üzere

$$l \cdot |\xi_2| = \sum_{i=1}^{k} \{c_i \in Z \; : \; c_i \equiv 1 \bmod(n-1)\}$$

dir.

Benzer olarak

$$l \cdot |\xi_2'| = \sum_{i=1}^{k-1} \{c_i \in Z \; : \; c_i \equiv 1 \bmod(n-1)\}$$

dir. Böylece $l \equiv (k-1) \bmod(n-1)$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde bir ξ_1 hiperdüzlemini x gibi bir noktada kesen her doğru, her paralel ξ_2 hiperdüzleminide bir noktada keser.

Tanım 2.4.3 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *uzayı doğru mertebesi* n *olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir l-hiperdüzlemseluzay olsun.* $\mathcal{S}$ *de* x_1, x_2, x_3 *doğrusal olmayan üç nokta olsun.* x_1, x_2 *ve* x_3 *ü içeren bütün hiperdüzlemlerin arakesiti düzlem olarak adlandırılır..*

Bu düzlemlerin arakesitini Δ ile gösterelim.

Yardımcı teorem 2.4.4 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *uzayı doğru mertebesi* n *olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir l-hiperdüzlemseluzay olsun.*
$\mathcal{S}' = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \Delta)$ *yapısı bir düzlemsel uzaydır.*

İspat

Kabul edelim ki π bir düzlem olsun. π nin doğrusal olmayan her x_1, x_2, x_3 noktası için x_1, x_2 ve x_3 boyunca olan bütün hiperdüzlemlerin arakesitinin tam olarak π ye eşit olduğunu ispat etmek yeterlidir.

π bir düzlem ve düzlemin yukarıdaki tanımından π nin bazı y_1, y_2, y_3 noktaları için yardımcı teorem sağlanır.

$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ uzayı doğru derecesi n olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir $l-$ *hiperdüzlemsel uzay* olduğundan y_1, y_2, y_3 boyunca tam olarak $l-$ tane hiperdüzlem vardır.

y_1, y_2, y_3 boyunca tam olarak $l-$ tane hiperdüzlem ve bütün hiperdüzlemlerde x_1, x_2, x_3 ü içerdiğinden bu $l-$ tane hiperdüzlem tam olarak x_1, x_2 ve x_3 boyunca olan hiperdüzlemlerin kümesidir ve π de x_1, x_2, x_3 boyunca olan bütün hiperdüzlemlerin arakesitidir.

Yardımcı teorem 2.4.5 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ uzayı doğru mertebesi n olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir l-hiperdüzlemseluzay olsun. $\mathcal{S}$ de bütün düzlemler afin düzlemlerdir.*

İspat

π herhangi bir düzlem ve L de π tarafından içerilen bir doğru olsun.

π en azından doğrusal olmayan üç nokta içereceğinden en azından üç doğru içerir.

İlk olarak L yi içeren bütün hiperdüzlemlerin π yi kapsamadığı gösterilecektir. Yani L yi içerip π yi içermeyen en az bir hiperdüzlemin var olduğu gösterilecektir.

Açıkca görülür ki π, $\mathcal{P}$ ile çakışmaz ve π nin dışında $x \in \mathcal{P}$ olan bazı noktalar vardır. L ve x i içeren yanlızca bir tek π' düzlemi vardır ve bu π den farklıdır. Yoksa π nin doğrusal olmayan üç noktası boyunca en azından iki düzlem olurdu.

L ve x i içeren bütün hiperdüzlemlerin arakesiti π' olduğundan π yi içermeyen L ve x boyunca bir tane hiperdüzlem olmak zorundadır. Bu hiperdüzlemi ξ ile gösterelim. Dolayısıyla iddia buradan görülür.

İkinci olarak iddia ederiz ki ξ hiperdüzlemi π yi L de keser. Bununla birlikte zaten L, $\xi \cap \pi$ tarafından içerilmektedir.

Kabul edelim ki y, $y \in \xi \cap \pi$ olmak üzere L ile alakalı olmayan bir nokta olsun. Buradan L ve y boyunca olan düzlem π ile çakışır ama düzlemlerin tanımından dolayı ξ tarafından içerilmek zorundadır. Buda ξ nin seçimi ile çelişir.

Burada şöyle birşeyi not olarak belirtebiliriz ki hiperdüzlemlerle düzlemler ya bir noktada ya da bir doğru boyunca kesişirler veya arakesitleri boştur.

Şimdi L doğrusu üzerinde bir z noktası alalım.

$n > 2$ olduğundan π de L doğrusundan farklı z boyunca en azından L_1, L_2 gibi en azından iki doğru olduğu kolayca görülür.

ξ a paralel her ξ' hiperdüzlemi bu iki doğruyu farklı iki noktada keser ve buradan π yi bir L' boyunca keser.

Sonuç olarak ξ nin paralel sınıfında tam olarak n tane hiperdüzlem vardır ve onların herbiri π yi n tane noktada keser. Doğru derecesi n olan n^2 dereceli bir lineer uzay afin düzlemdir.

Şimdi $l = 1$ durumunda doğrular arasındaki paralelliği tanımlayalım.
Eğer L ve L' doğruları $\mathcal{S}$ nin bazı düzlemlerinde pararlel iseler L ve L' paraleldir denir.

Yardımcı teorem 2.4.6 *$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ uzayı doğru mertebesi n olan ve hiperdüzlemlerin paralellik aksiyomlarını sağlayan bir l-hiperdüzlemseluzay olsun. $\mathcal{S}$ deki doğrular kümesinde paralellik bir denklik bağıntısıdır.*

İspat

Kabul edelim ki L, L', $L'' \in \mathcal{L}$ ve $L \neq L''$ olmak üzere L, L' üne paralel, L' üde L'' üne paralel olsun.

Burada L ve L' doğruları ile L' ve L'' doğruları boyunca olan düzlemleri sırasıyla π ve π' olarak alırsak bunların farklı olduğu kolayca görülür. Buda L ve L'' ünün kesişmemesini gerektirir.

L üstünde bir x noktası seçelim ve ξ de π yi içermeyen L'' ve x boyunca bir hiperdüzlem olsun. Böyle bir hiperdüzlemin varlığı aşikardır. Çünkü böyle bir hiperdüzlem olmasaydı L'' ve x boyunca olan düzlem π yi içerecekti ki buda bir çelişki oluştururdu.

Birinci olarak ξ nun π yi bir doğru boyunca kestiğini iddia edelim.

Gerçekten yardımcı teorem 2.4.5 te olduğu gibi burada da görürüz ki hiperdüzlemlerin paralel sınıfı tam olarak n tane eleman içerir ama paralel sınıfın her elemanı π yi en fazla n tane noktada keser ve bu arakesitlerin birleşimi π yi vermek zorundadır ki n^2 tane nokta içerir.

Buradan arakesitler n tane nokta içermek zorundadır. Dolayısıyla ξ, π yi bir doğru boyunca keser.

Eğer bu doğru L ile çakışmaz ise ξ, L' üyü keser ve ξ, π' ünü kesecekti ve bundan dolayı π yi de kesmek zorunda kalacaktı ki bu bir çelişkidir.

Şimdide L'' ve x i içeren her hiper düzlem L yi içerir. Bu nedenle L'' ve x boyunca olan düzlem L yi içerir ve açıkça görülür ki L ve L'' düzlemde paraleldirler.

Buradan L ve L'' paraleldirler.

Teorem 2.4.7 *Paralellik aksiyomunu sağlayan doğru mertebesi sabit* n, $n > 2$ *olan her* $l-$ *hiperdüzlemsel uzay* $d \geq 3$ *olmak üzere* n*.mertebeden* d *boyutlu bir afin uzaydır.*

İspat

Bu alt bölümdeki yardımcı teoremler kullanılarak teoremin ispatı yapılır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] P.Anapa, İ. Günaltılı and H. V. Maldeghem, Planar and affine spaces, Discrete Mathematics 309(2009)2897 − 2904.

[2] L.M Batten, Combinatorics of finite geometries, Cambridge University Press, (1986)

[3] R.Kaya, Projektif geometri,Anadolu Ünv. Fen-Ede. Fak. Yayınları, (1992)

[4] F.Buekenhout, Une caracterisation des espaces affins basee sur la notion de dorite, Math. Z. 11(1969)367 − 371.

[5] L.M Batten and A.Beutelspacher, The theory of finite linear spaces, Cambridge University Press, New-York-Melbourne, (1993)

[6] P. Biondi, Projective planar spaces, J.Geom. 83(2005)1 − 4.

[7] A.Beutelspacher, Embedding linear spaces with two line degrees in finite projective planes, J. Geometry 26, 43 − 61, (1986)

[8] F.Buekenhout, P. Cameron, Projective and affine geometry over division rings, in: Handbook of Incidence Geometry, Buildings and Foundations, North-Holland, Elesevier, 1995 (Chapter 2).

[9] J. Doyen, X. Hubaut, Finite regular locally projective spaces, Math. Z. 119(1971)83 − 88.

[10] N.Durante, P.M. Lo Re, D. Olanda, On regular planar spaces of type (k, n). Discrete Math. 301(2005)66 − 73

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

[11] C. Green, A rank inequality in finite geometric lattice, J. Combin. Theory Ser. A 9(1960)357 − 364.

[12] L. Teirlinck, Combinatorial properties of planar spaces and embeddability. J. Combin. Theory Ser. A 43(1986)291 − 302

[13] O. Veblen. J.W.Young. Projective Geometry, Blaisdell, New York, 1910.

[14] P de Witte, and L.M. Batten, Finite linear spaces with two consecutive line degrees, Geom. Ded.14, 225 − 235, (1983)

[15] A.Beutelspacher, Embedding finite planar spaces in projective spaces, in: C.A Baker, L.M. Batten (Eds.), Finite Geometries (Winnipeg, Man., 1984), in: Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 103, Dekker, New York, 1985, pp. 9 − 17.

[16] İ. Günaltılı and S. Olgun, On the embedding of some linear spaces in finite projective planes, J.Geom. 68(2000)96 − 99.

[17] P.Anapa, İ. Günaltılı, and S. Olgun, On the embedding of complements of some hyperbolic planes, Ars Combinatoria 80(2006), 205 − 214.

[18] P.Anapa, İ. Günaltılıand S. Olgun, On the embedding of complements of some hyperbolic planes II, (Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, V 57, number 1(2008), 23 − 32.

[19] İ. Günaltılı, Pseudo-semicomplements in finite projective planes, (accepted in Ars Combinatoria).

[20] R.Kaya and S.Olgun, Construction of some hyperbolic planes using Baer subplanes, Combinatoric's 88. Verlang : Mediterranean Press, 105 − 112.

[21] R.Kaya and E.Ozcan, On the construction of Bolyai-Lobachevsky planes from projective planes, Rendiconti del Semianario Mathematico di Brescia 7(1984), 427−434.

[22] T.Ralston, On the embeddability of complement of a complete triangle in a finite projective plane. Ars Combinatoria 11(1981)271 − 274.

[23] T.G.Ostrom, Ovals and finite Bolyai-Lobachevsky Planes, Amer. Math. Monthly, 69(1962), 899 − 901.