s – Metrik Geometrisi Üzerine

Serhan Eker

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2009

On The s – Metric Geometry

Serhan Eker

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics

June - 2009

# s – Metrik Geometrisi Üzerine

Serhan Eker

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Rüstem Kaya

Haziran 2009

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Serhan Eker'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**s- Metrik Geometrisi Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Danışman Üye :** Prof. Dr. Rüstem Kaya

**Üye :** Prof. Dr. Şükrü Olgun

**Üye :** Prof. Dr. Mehmet Üreyen

**Üye :** Doç.Dr. Ziya Akça

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ............................ tarih ve ........................ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

# ÖZET

$\mathbb{R}^2{}_S$ düzlemi lineer yapı olarak hemen hemen Öklid düzlemi ile aynıdır. Şöyle ki $\mathbb{R}^2{}_S$ deki noktalar, doğrular Öklid düzlemi ile aynıdır ve açılar aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Bundan dolayı $\mathbb{R}^2{}_S$ de uzaklıkla ilgili kavramların nasıl değiştiğini incelemek ilginçtir. Öncelikle, Öklid geometrisinde $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ile hesaplanırken;

$\mathbb{R}^2{}_S$ düzleminde $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2,y_2)$ noktaları arasındaki $d_s$ uzaklığı

$$d_s(P,Q) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , x_1 = x_2 \ ise \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & , x_1 \neq x_2 \ ise \end{cases}$$

uzaklık fonksiyonu ile hesaplanır.

İlk bölümde, gerekli olan bazı tanımlar verilmiş olarak s – Metrik geometri kavramı açıklandı. Öklidyen geometri aksiyomları ifade edildi.

İkinci bölümde, s – Metrik geometrisinde çemberler çalışıldı ve örneklendirildi.

Üçüncü bölümde, s – Metrik geometrisinde $A = (x_0, y_0)$ noktasının verilen $y = mx + n$ doğrusuna olan uzaklığı ifade edildi.

Son bölümde, s – Metrik geometrisinde bazı orta kümeler çalışıldı.

Anahtar Kelimeler: s – Metrik geometrisi, Öklidyen olmayan geometri

## SUMMARY

$\mathbb{R}^2{}_S$ plane is almost the same as the linear structure of the Euclidean analytical plane. In the $\mathbb{R}^2{}_S$, the points are the same, the lines as like in the Euclidean, and the angles are measured in the same way. However, the distance function is different. Because of this examining how the distance change in $\mathbb{R}^2{}_S$ is interesting. First of all, in Euclid geometry the distance between two points $P = (x_1, y_1)$ and $Q = (x_2, y_2)$, is calculated by:

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

In the $\mathbb{R}^2{}_S$ plane the distance between two points $P = (x_1, y_1)$ and $Q = (x_2, y_2)$, is calculated by:

$$d_s(P, Q) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , if\ x_1 = x_2 \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & , if\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First of all, the concept of s – Metric geometry is explained. Axioms of Euclidean geometry are expressed.

In the second chapter s – circles are studied and exemplified the circles which are in the s – metric geometry.

In the third chapter and the distance of a point $A = (x_0, y_0)$ to a given line $y = mx + n$ in the s – Metric geometry, is examined.

In the last chapter some the midsets in the s – Metric geometry are studied.

Keywords: s – Metric geometry, Non-Euclidean geometry

# TEŞEKKÜR

Akademik kariyerimin başlangıcından itibaren Yüksek lisans eğitimi boyunca, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım sayın

Prof. Dr. Rüstem KAYA'ya,

tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen her kararımda yanımda olan babam

Mücteba EKER' e

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen

Yrd. Doç. Dr. Özcan Gelişgen'e

en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR 2009 Serhan EKER

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

ÖZET ........................................ v
SUMMARY ........................................ vi
TEŞEKKÜR........................................ vii
ŞEKİLLER DİZİNİ........................................ ix
TABLOLAR DİZİNİ ........................................ xviii

1. TEMEL KAVRAMLAR ........................................ 1
    1.1 Geometrik Yapılar ve s – Metrik Geometrisi........................................ 1
    1.2 s – Metrik Geometrisi ........................................ 5

2. s – ÇEMBERLERİ ........................................ 11

3. Bir Noktanın Bir Doğruya Olan $d_s$ – Uzaklığı ........................................ 36

4. ORTA KÜMLER ........................................ 44
    4.1 İki Noktanın $d_S$ – Orta Kümesi ........................................ 44
    4.2 Bir Nokta İle Doğrunun Orta Kümesi: $d_S$ PARABOL ........................................ 93

KAYNAKLAR DİZİNİ........................................ 148

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Şekil** **Sayfa**

1.1 ....................................................5
1.2 ....................................................6
1.3 ....................................................6
1.4 ....................................................6
1.5 ....................................................6
1.6 ....................................................6
1.7 ....................................................7
1.8 ....................................................7
1.9 ....................................................10
1.10 ....................................................10
2.1 ....................................................12
2.2 ....................................................12
2.3 ....................................................12
2.4 ....................................................13
2.5 ....................................................14
2.6 ....................................................15
2.7 ....................................................15
2.8 ....................................................15
2.9 ....................................................16
2.10 ....................................................17
2.11 ....................................................18
2.12 ....................................................18
2.13 ....................................................19
2.14 ....................................................19
2.15 ....................................................20
2.16 ....................................................21
2.17 ....................................................21
2.18 ....................................................22
2.19 ....................................................22

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**

**Şekil** **Sayfa**

2.20 ....................................................................................................23
2.21 ....................................................................................................23
2.22 ....................................................................................................24
2.23 ....................................................................................................25
2.24 …..................................................................................................25
2.25 .... ...............................................................................................26
2.26 ....................................................................................................26
2.27 ... ................................................................................................27
2.28 ..... ..............................................................................................27
2.29 .... ...............................................................................................27
3.1 .. ..................................................................................................30
3.2 .. ..................................................................................................32
3.3 ....................................................................................................34
3.4 .. ..................................................................................................36
3.5 ... .................................................................................................38
3.6 .. ..................................................................................................39
3.7 .. ..................................................................................................43
3.8 .. ..................................................................................................43
3.9 ....................................................................................................43
4.1.1 ..................................................................................................46
4.1.2 . ................................................................................................46
4.1.3 …..............................................................................................46
4.1.4 ..................................................................................................47
4.1.5 ..................................................................................................48
4.1.6 ..................................................................................................48
4.1.7 ..................................................................................................49
4.1.8 ..................................................................................................49
4.1.9 ..................................................................................................50
4.1.10 ................................................................................................50

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**


| Şekil | Sayfa |
|---|---|
| 4.1.11 | 51 |
| 4.1.12 | 51 |
| 4.1.13 | 52 |
| 4.1.14 | 53 |
| 4.1.15 | 53 |
| 4.1.16 | 54 |
| 4.1.17 | 55 |
| 4.1.18 | 55 |
| 4.1.19 | 56 |
| 4.1.20 | 57 |
| 4.1.21 | 58 |
| 4.1.22 | 58 |
| 4.1.23 | 59 |
| 4.1.24 | 60 |
| 4.1.25 | 61 |
| 4.1.26 | 61 |
| 4.1.27 | 62 |
| 4.1.28 | 62 |
| 4.1.29 | 63 |
| 4.1.30 | 64 |
| 4.1.31 | 65 |
| 4.1.32 | 65 |
| 4.1.33 | 66 |
| 4.1.34 | 67 |
| 4.1.35 | 68 |
| 4.1.36 | 69 |
| 4.1.37 | 69 |
| 4.1.38 | 70 |
| 4.1.39 | 70 |

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**


| Şekil | Sayfa |
|---|---|
| 4.1.40 | 71 |
| 4.1.41 | 71 |
| 4.1.42 | 72 |
| 4.1.43 | 72 |
| 4.1.44 | 73 |
| 4.1.45 | 73 |
| 4.1.46 | 74 |
| 4.1.47 | 75 |
| 4.1.48 | 76 |
| 4.1.49 | 76 |
| 4.1.50 | 77 |
| 4.1.51 | 77 |
| 4.1.52 | 78 |
| 4.1.53 | 78 |
| 4.1.54 | 79 |
| 4.1.55 | 79 |
| 4.1.56 | 79 |
| 4.1.57 | 79 |
| 4.1.58 | 80 |
| 4.1.59 | 80 |
| 4.1.60 | 80 |
| 4.1.61 | 85 |
| 4.1.62 | 85 |
| 4.1.63 | 85 |
| 4.1.64 | 86 |
| 4.1.65 | 86 |
| 4.1.66 | 86 |
| 4.1.67 | 87 |
| 4.1.68 | 87 |

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**


| Şekil | | Sayfa |
|---|---|---|
| 4.1.69 | .... | 87 |
| 4.1.70 | ..... | 88 |
| 4.1.71 | ..... | 88 |
| 4.1.72 | ..... | 89 |
| 4.1.73 | ..... | 89 |
| 4.1.74 | | 89 |
| 4.1.75 | | 89 |
| 4.1.76 | | 90 |
| 4.1.77 | | 90 |
| 4.1.78 | | 90 |
| 4.1.79 | | 91 |
| 4.1.80 | | 91 |
| 4.1.81 | | 91 |
| 4.1.82 | | 91 |
| 4.1.83 | | 92 |
| 4.1.84 | | 92 |
| 4.2.1 | .... | 93 |
| 4.2.2 | ..... | 94 |
| 4.2.3 | ..... | 94 |
| 4.2.4 | ..... | 95 |
| 4.2.5 | ..... | 95 |
| 4.2.6 | .. | 96 |
| 4.2.7 | .. | 96 |
| 4.2.8 | .. | 96 |
| 4.2.9 | .. | 97 |
| 4.2.10 | .. | 97 |
| 4.2.11 | ... | 98 |
| 4.2.12 | .. | 99 |
| 4.2.13 | . | 100 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)


**Şekil** **Sayfa**

4.2.14 . ...........................................................................................................101
4.2.15 . ...........................................................................................................102
4.2.16 . ...........................................................................................................102
4.2.17 . ...........................................................................................................103
4.2.18 ... .........................................................................................................103
4.2.19 ............................................................................................................104
4.2.20 ............................................................................................................105
4.2.21 ............................................................................................................105
4.2.22 ............................................................................................................105
4.2.23 ............................................................................................................106
4.2.24 ............................................................................................................107
4.2.25 ............................................................................................................107
4.2.26 ............................................................................................................107
4.2.27 ............................................................................................................108
4.2.28 .. ..........................................................................................................108
4.2.29 .. ..........................................................................................................108
4.2.30 ... .........................................................................................................108
4.2.31 ... .........................................................................................................108
4.2.32 ... .........................................................................................................109
4.2.33 ... .........................................................................................................109
4.2.34 .. ..........................................................................................................109
4.2.35 . ...........................................................................................................110
4.2.36 . ...........................................................................................................110
4.2.37 . ...........................................................................................................110
4.2.38 . ...........................................................................................................110
4.2.39 .. ..........................................................................................................111
4.2.40 . ...........................................................................................................112
4.2.41 . ...........................................................................................................113
4.2.42 . ...........................................................................................................114

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**

**Şekil** **Sayfa**

4.2.43 . ....................................................................................................115
4.2.44 . ....................................................................................................116
4.2.45 . ....................................................................................................116
4.2.46 ... ..................................................................................................117
4.2.47 ......................................................................................................117
4.2.48 ......................................................................................................118
4.2.49 ......................................................................................................118
4.2.50 ......................................................................................................119
4.2.51 ......................................................................................................120
4.2.52 ......................................................................................................120
4.2.53 ......................................................................................................121
4.2.54 ......................................................................................................121
4.2.55 ......................................................................................................122
4.2.56 .. ...................................................................................................122
4.2.57 .. ...................................................................................................123
4.2.58 ... ..................................................................................................124
4.2.59 ... ..................................................................................................124
4.2.60 ... ..................................................................................................124
4.2.61 ......... ............................................................................................125
4.2.62 . ....................................................................................................125
4.2.63 . ....................................................................................................126
4.2.64 . ....................................................................................................126
4.2.65 . ....................................................................................................126
4.2.66 . ....................................................................................................126
4.2.67 .. ...................................................................................................126
4.2.68 . ....................................................................................................127
4.2.69 . ....................................................................................................128
4.2.70 . ....................................................................................................128
4.2.71 . ....................................................................................................128

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**


| **Şekil** | **Sayfa** |
|---|---|
| 4.2.72 . ................................................................................................. | 128 |
| 4.2.73 . ................................................................................................. | 129 |
| 4.2.74 ... .............................................................................................. | 129 |
| 4.2.75 ................................................................................................... | 129 |
| 4.2.76 ................................................................................................... | 129 |
| 4.2.77 ................................................................................................... | 130 |
| 4.2.78 ................................................................................................... | 131 |
| 4.2.79 ................................................................................................... | 132 |
| 4.2.80 ................................................................................................... | 133 |
| 4.2.81 ................................................................................................... | 134 |
| 4.2.82 ................................................................................................... | 135 |
| 4.2.83 ................................................................................................... | 135 |
| 4.2.84 ................................................................................................... | 136 |
| 4.2.85 ................................................................................................... | 136 |
| 4.2.86 …................................................................................................ | 136 |
| 4.2.87 …................................................................................................ | 137 |
| 4.2.88 …................................................................................................ | 137 |
| 4.2.89 …................................................................................................ | 138 |
| 4.2.90 . ................................................................................................. | 138 |
| 4.2.91 . ................................................................................................. | 138 |
| 4.2.92 . ................................................................................................. | 138 |
| 4.2.93 . ................................................................................................. | 139 |
| 4.2.94 . ................................................................................................. | 139 |
| 4.2.95 .. ................................................................................................ | 139 |
| 4.2.96 . ................................................................................................. | 139 |
| 4.2.97 . ................................................................................................. | 140 |
| 4.2.98 . ................................................................................................. | 140 |
| 4.2.99 . ................................................................................................. | 140 |
| 4.2.100 . ................................................................................................ | 140 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

**Şekil** **Sayfa**

4.2.101 . ....................................................................141
4.2.102 ..... ................................................................141
4.2.103 ......................................................................141
4.2.104 ......................................................................141
4.2.105 ......................................................................142
4.2.106 ......................................................................143
4.2.107 ......................................................................143
4.2.108 ......................................................................143
4.2.109 ......................................................................143
4.2.110 ......................................................................143
4.2.111 ......................................................................144
4.2.112 ......................................................................145
4.2.113 ......................................................................145
4.2.114 …...................................................................145
4.2.115 …...................................................................145
4.2.116 …...................................................................145
4.2.117 …...................................................................146

# TABLOLAR DİZİNİ

**Tablo** Sayfa

3.1 ........................................................................................................40

3.2 ........................................................................................................41

4.1.1 ……………………………………………........................................................ 84

# BÖLÜM 1

# TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde üzerinde çalışacağımız s – metrik geometrisi tanıtılmıştır. Ancak daha önce düzlemsel Öklid geometri için verilen bir aksiyomlar kümesinin çağımızda indirgenmiş son – *belki de en kullanışlı* – şekli olan on üç aksiyom ifade edilmiştir. Buradaki amacımız, $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminin verilen on üç aksiyomdan hangilerini sağlayıp sağlamadığını belirtmektir.

## 1.1 Geometrik Yapılar

$\mathbb{P}$, elemanları *noktalar* olan bir küme; $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları *doğrular* olan küme; $d_E$ $\mathbb{P}$ üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu ve $m$ de [ $\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $d_E$] üzerinde tanımlı bir açı ölçüm fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki on üç aksiyomu sağlayan [$\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $d_E, m$ ] sistemine *Öklidyen düzlem geometri* denir.

[**E1**] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[**E2**] Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

[**E1**] ve [**E2**] aksiyomları *üzerinde olma* aksiyomları olarak bilinir.

Bunları izleyen dört aksiyomun ilk üçü uzaklık fonksiyonunun sırasıyla *pozitif tanımlılık, simetrik ve üçgen eşitsizliğini* sağlamasıyla ilgilidir. Ayrıca *cetvel aksiyomu* denilen aksiyomu da sağlar. $d_E$ için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir.

[**E3**] Her sıralı $(A,\ B)$ nokta çifti için $d_E(A, B)$ ile gösterdiğimiz negatif olmayan bir genel sayı vardır. Ayrıca $d_E(A,\ B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[**E4**] $d_E(A,\ B) = d_E(B,\ A)$ dır.

[**E5**] $d_E(A,\ B) +\ d_E(B,\ C) \geq d_E(A,\ C)$ dir.

[**E6**] Verilen bir l doğrusu için bir $f_l : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyle ki tüm $A$, $B$ noktaları için;

$$|f_l(A) -\ f_l\,(B)| =\ d_E(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom düzlem ayırma aksiyomu olarak bilinir.

[**E7**] Verilen bir $l$ doğrusu için $\mathbb{P}$ nin $H_1$ ve $H_2$ gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır öyleki,

I) $H_1$ ve $H_2$ konvekstir.
II) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ ( $\mathbb{P}$ den $l$ nin atılmışı demektir).
III) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$

olur.

Şimdi vereceğimiz dört özellik *açı ölçüm aksiyomu* diye anılır:

[**E8**] $m$, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] $H$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\ \angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer $D$ noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,

$$m\ \angle ABD + m\ \angle DBC = m\ \angle ABC$$

olur.

[**E11**] Eğer $B$, $A$, $C$ arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,

$$m\ \angle ABD + m\ \angle DBC = 180^0$$

olur.

$\mathbf{E12}$ aksiyomu $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sisteminin "*kenar – açı – kenar*" aksiyomudur.

$[\mathbf{E12}]$ İki üçgenin köşe noktaları arasında bire – bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eşittir.

Son olarak $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sistemi için ünlü *paralellik aksiyomunu* ifade edelim:

$[\mathbf{E13}]$ $l$ doğrusu ve $l$ doğrusunun dışında bir $P$ noktası verilsin. Bu durumda $P$ noktasından geçen ve $l$ doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Şimdi geometrik yapıların incelenmesinde izlenen yolu takiple, daha basit yapılı geometriler üzerinde durarak $d_s$ metrik geometrisine geçişi sağlayan bilgiler (Martin, 1998) ve (Millmann and Parker, 1991) den özetle verilmektedir.

**Tanım 1.1** $\mathbb{P}$ elemanları noktalar olan bir küme ve $\mathbb{L}$ de $\mathbb{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemin de *soyut geometri* adı verilir.

**I)** Her $A, B \in \mathbb{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in \mathbb{L}$ doğrusu vardır.

**II)** Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

**Tanım 1.2** $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ soyut geometri olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\mathcal{A}$ sistemine *incidence geometri* denir.

**I)** Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

**II)** $\mathbb{P}$ de doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Buna göre bir $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sisteminin incidence geometri olması için aşağıdaki üç aksiyomu sağlamalıdır:

**I)** Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

**II)** Her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

**III)** Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Öklid geometrisine metrik yaklaşım "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor [1932]" isimli çalışmasıyla George David Birkhoff

(1884 – 1944) a dayanır. Yukarıdaki E1 – E13 aksiyomları düzlemsel Öklid geometrisini metrik yaklaşımla düzenlemektedir. Bir incidence geometrinin metrik yaklaşımla incelenebilir olması için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç vardır:

**Tanım 1.3** $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ üzerinde tanımlanmış aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $d$ fonksiyonuna $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *metrik*tir denir. ∀ x, y, z ε $\mathcal{X}$ için,

$m_1$) x ≠ y için $d$ (x, y) > 0 (Pozitif tanımlılık özelliği )

$m_2$) $d$ (x, y) = 0 ⇔ x =y

$m_3$) $d$ (x, y) = $d$ (y, x) (Simetri özelliği )

$m_4$) $d$ (x, y) ≤ $d$(x, z) + $d$(z, y) (Üçgen eşitsizliği)

Diğer bir ifadeyle $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ şartlarını sağlayan $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna *metrik* denir.

**Tanım 1.4** $l$, [$\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$] incidence geometrinin bir doğrusu olsun. $d$ de $\mathbb{P}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa $f : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $l$ için *cetveldir* denir.

**i)** $f$ fonksiyonu 1 : 1 ve örtendir.

**ii)** $l$ üzerindeki her $P, Q$ nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. **ii)** şıkkındaki eşitliğe *cetvel denklemi* ve $f(P)$ ye de $P$ nin $f$ ye bağlı *koordinatı* denir.

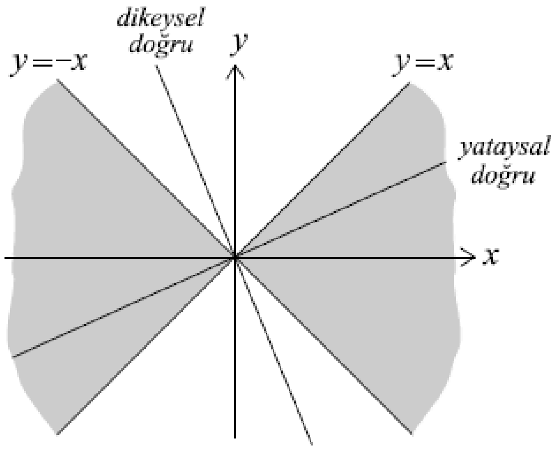
**Tanım 1.5 [**$\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$] incidence geometri olmak üzere $d$ uzaklık fonksiyonu cetvel aksiyomunu sağlarsa ve her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse $\mathcal{M}$ = [ $\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $d$] sistemine *metrik geometri* denir.

**Tanım 1.6** Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye bir *Pasch geometrisi* denir.

**Tanım 1.7** [ $\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $d$] Pasch geometrisi ile birlikte $m$ açı ölçüm fonksiyonu ile oluşturulan [$\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $d_E, m$ ] sistemine *Protractor* (*Açı ölçer veya iletki*) *geometri* denir. Kenar – Açı – Kenar aksiyomunu sağlayan Protractor geometriye *Absolute (mutlak) geometri* denir.

**Analitik Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması ve Düzlemin Bölgelere Ayrılması**

Analitik düzlemde $l...ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. $l$ doğrusuna, $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ ise, *dikeysel doğru*; $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ ise, *yataysal doğru* ; $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ ise, *ayıraç doğru* denir (Krause, 1975) (Şekil 1.9).




Şekil 1.1

## 1.2 s – Metrik Geometrisi

$\mathbb{R}^2{}_S$ düzlemi lineer yapı olarak hemen hemen Öklid düzlemi ile aynıdır. Şöyle ki $\mathbb{R}^2{}_S$ deki noktalar, doğrular Öklid düzlemi ile aynıdır ve açılar aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Bundan dolayı $\mathbb{R}^2{}_S$ de uzaklıkla ilgili kavramların nasıl değiştiğini incelemek ilginçtir. Öncelikle, Öklid geometrisinde $P = (x_1, y_1)$ , $Q = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

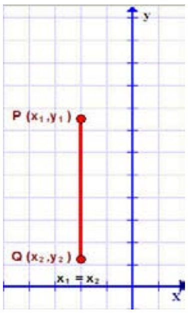
ile hesaplanırken ;

$\mathbb{R}^2{}_S$ düzleminde $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki $d_s$ uzaklığı

$$d_s(P,Q) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , x_1 = x_2 \text{ ise} \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & , x_1 \neq x_2 \text{ ise} \end{cases}$$

uzaklık fonksiyonu ile hesaplanır.

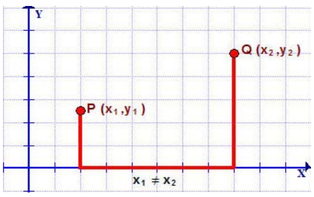
$\mathbb{R}^2{}_S$ düzlem geometrisinde uzaklık fonksiyonunu iki nokta arasında belirlediği yolları bir kaç örnekle açıklayalım:



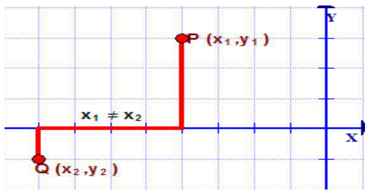
Şekil 1.2

Yandaki şekil $x_1 = x_2$ iken $P\ (x_1,\ y_1)$ ve $Q(x_2,\ y_2)$ arasındaki uzaklığın $|y_2 - y_1|$ olduğunu yani $P$ ve $Q$ noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu olduğunu ifade eder. O halde dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta arasındaki $d_s$ – uzaklığı bu noktaları birleştiren doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur.

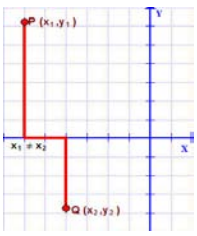
Aşağıdaki şekiller $x_1 \neq x_2$ iken $P\ (x_1,\ y_1)$ ve $Q(x_2,\ y_2)$ arasındaki $d_s$ – uzaklığın $|x_2 - x_1| + |y_1| + |y_2|$ yani $P$ ve $Q$ noktalarının $x$ – eksenine uzaklıkları ve $x$ – ekseni üzerindeki iz düşüm uzaklığının toplamı olduğunu ifade eder. O halde $P$ ve $Q$ noktalarını birleştiren doğrunun eğimi $m \in$ P ise bu iki nokta arasındaki $d_s$ – uzaklığı bu noktalardan $x$ – eksenine inilen dikmeler ile $x$ – ekseni üzerindeki dikme ayakları arasındaki Öklidyen uzunlukların toplamıdır.



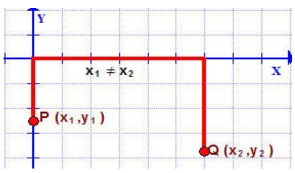
Şekil 1.3



Şekil 1.4

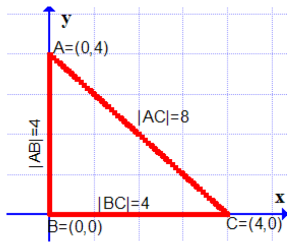


Şekil 1.5

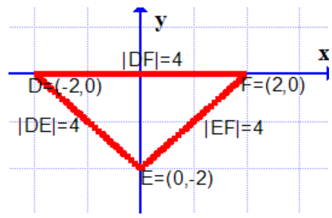


Şekil 1.6

$\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde noktalar ve doğrular Öklidyen düzlemin noktaları ve doğruları olduğundan üzerinde olma aksiyomları ve düzlem ayırma aksiyomu sağlanır. Metrik aksiyomlarının gerçeklendiği ise aşağıda gösterilmiştir. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla ölçüldüğünden açı ölçümü ile ilgili aksiyomlar da gerçeklenmektedir. Ayrıca paralellik aksiyomunun da sağlandığı kolaylıkla görülebilir. s – düzlemi bölümün başında bahsedilen on üç aksiyomdan sadece eşlik aksiyomunu yani *kenar-açı-kenar* (KAK) aksiyomunu sağlamaz. Bu aksiyomun sağlanmadığına dair bir örnek aşağıda verilmiştir. (Bkz Şekil 1.7, Şekil 1.8)



Şekil 1.7



Şekil 1.8

Yukarıdaki şekilde görülen $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ üçgenleri için $|AB| = |BC| = |DE| = |EF| = 4$ ve $m(B) = m(E) = 90^0$ dir. $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ üçgenlerinin karşılıklı iki kenarı ve bu kenarlar arasındaki açı eş olmasına rağmen $|AC| = 8 \neq 4 = |DF|$ olduğundan bu üçgenler *kenar – açı – kenar* (*KAK*) aksiyomunu sağlamaz.

**Önerme 1.1** Analitik düzlemde tanımlanan $d_s$ uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

**İspat:** Metrik tanımı gereğince $d_s$ uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.

$X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $d_S: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için

$$d_s(X,Y) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , x_1 = x_2 \ ise \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & , x_1 \neq x_2 \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştı.

$\mathbf{m_1}$) $X \neq Y$ için $d_s(X, Y) > 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $x_1 = x_2$ ise,

$d_S(X,\ Y) = |y_1\ - y_2|$ olup, $|y_1\ - y_2| > 0$ olduğundan $d_S(X,\ Y) > 0\ dır.$

Eğer $x_1 \neq x_2$ ise,

$d_S(X,\ Y) = |x_1 - x_2| + |y_1| + \ |y_2|$olarak tanımlı olup , $|\ x_1 - x_2| > 0$, $|y_1| > 0$, $|y_2| > 0$ olduğundan $d_S(X,\ Y) > 0$ dır.

**$m_2$** ) $d_s(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $x_1 = x_2$ ise,

$d_S(X,Y) = |y_1\ - y_2| = 0$ olup $\Rightarrow$ $y_1 = y_2 \Leftrightarrow X = Y$ dir.

Eğer $x_1 \neq x_2$ ise,

$|x_1 - x_2| + |y_1| + \ |y_2| = 0$ olup, $|x_1 - x_2| = 0, |y_1| = 0 = \ |y_2| = 0$ olduğundan $x_1 = x_2$ olmalıdır ve $y_1 = 0 = y_2$ olmalıdır. O halde $X = Y$ dir.

**$m_3$**) $d_s(X, Y) = d_s(Y, X)$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $x_1 = x_2$ ise,

$d_S(X,\ Y)\ =\ |y_1\ - y_2|\ =\ |y_2\ - y_1|\ = d_S(Y,\ X)$ dir.

Eğer $x_1 \neq x_2$ ise,

$d_S(X,\ Y) = |x_1 - x_2| + |y_1| + \ |y_2| = \ |x_2 - x_1| + |y_2| + \ |y_1| = d_S(Y,\ X)$ dir.

Yani $d_S$ – simetri özelliğini sağlar.

**$m_4$** ) $d_S(X,Y) \leq d_S(X,Z) + d_S(Z,Y)$ olarak ifade edilen üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.

$X = (x_1, y_1)$ , $Y = (x_2, y_2)$ , $Z = (x_3, y_3)\ \varepsilon\ \mathbb{R}^2$ olsun.

Eğer $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ ise,

$$d_S(X,\ Y) = |x_1 - x_2| + |y_1| + \ |y_2|$$

$$\leq |x_1 - x_3| + |y_1| + \ |y_3| + |x_3 - x_2| + |y_2| + \ |y_3|$$

$= d_S(X,\ Z)$ $+ d_S(Z,\ Y)$ olduğu gösterilmelidir.

$|x_1 - x_2|$ $=|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$ olduğu biliniyor.

$|y_1| + |y_2| = |y_1 + (-y_3) + y_3| + |y_2| \leq |y_1| + |-y_3| + |y_3| + |y_2|$

$= |y_1| + |y_3| + |y_3| + |y_2|$ yazılabilir.

O halde;

$d_S(X,\ Y) = |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2|$

$\leq |x_1 - x_3| + |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_2| + |y_2| + |y_3|$

$= d_S(X,\ Z)$ $+ d_S(Z,\ Y)$ olduğundan $d_s(X, Y) \leq d_s(X, Z) + d_s(Z, Y)$ dir.

$x_1 = x_2 \neq x_3$ veya $x_1 \neq x_2 = x_3$ alınması genelliği bozmayacağından;

$x_1 = x_2 \neq x_3$ için $d_S(X, Y) \leq d_S(X, Z) + d_S(Z, Y)$ olduğu gösterilecektir.

$d_s(X,\ Y) = |y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_2| + |y_2| + |y_3|$

$= d_S(X, Z) + d_S(Z, Y)$ olduğu gösterilmelidir.

$$|y_1 - y_2| = |y_1 + (-y_3) + y_3 + (-y_2)| \leq |y_1| + |-y_3| + |y_3| + |-y_2|$$
$$= |y_1| + |y_3| + |y_3| + |y_2|$$

$|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_1| + |y_3|$ ve

$|y_1 - y_2| \leq |x_3 - x_2| + |y_2| + |y_3|$ tür.

$d_s(X,\ Y) = |y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_2| + |y_2| + |y_3|$

$\leq d_S(X, Z) + d_S(Z, Y)$ dir.

Eğer $x_1 = x_2 = x_3$ ise,

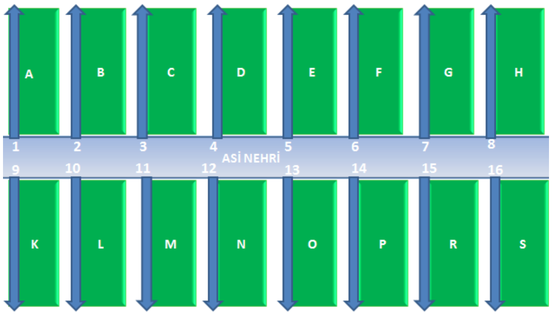
$d_s(X,\ Y) = |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$

$= d_S(X, Z) + d_S(Z, Y)$ dir.

Metriğin dört şartı da sağlandığından dolayı $d_s$ bir metriktir.

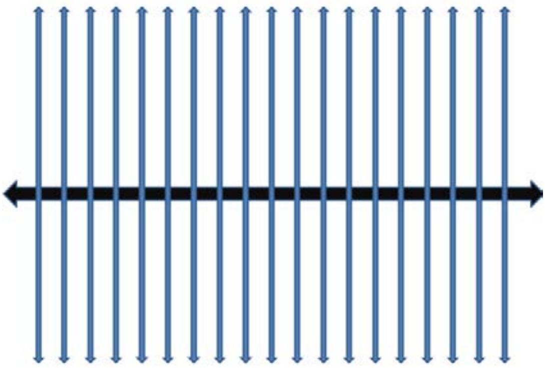
$\mathbb{R}^2{}_S$ metriği tezlerde, söyleşilerde ve seminerlerde tartışılabilecek bir metriktir. Aynı zamanda $d_S$ metriği teorik geometri çalışmaları için ilginç bir geometridir. Sentetik yaklaşımlarla analiz edilebileceği gibi metrik yaklaşımlarla da analiz edilmesi mümkündür.

$\mathbb{R}^2{}_S$ geometrinin uygulamaları kentsel yaklaşım problemlerini, şehir planlamasını ve benzerlerini kapsar.




Şekil 1.9

Yandaki şekil Asi Nehri' nin kenarında bulunan A dan S ye harflendirilmiş tarlaların 1 den 16 ya kadar numaralandırılmış sulama kanalları ile verilen tarlalara eşit uzaklıkta nasıl su taşınabileceğini ifade etmektedir.



Şekil 1.10

Yandaki şekil $\mathbb{R}^2{}_S$ geometrisinin uygulamaları olabilecek bir şehir (*site*) planlamasında *su – elektrik – iletişim – ulaşım* …v.s ağlarına ait bir tasarıdır.

# BÖLÜM 2

## s – ÇEMBERLERİ

Bilindiği üzere analitik düzlemde verilen sabit bir noktadan sabit uzaklıktaki noktaların kümesi çember olarak adlandırılır. Burada sabit noktaya merkez, sabit uzaklığa ise yarıçap denir. Buna göre, $\mathbb{R}^2{}_s$ de verilen $M\,(m_1, m_2)$ merkezli $r$ yarıçaplı $d_s$ çemberi $\{X|\; d_s(M,\; X) = \; r\,\}$ denklemini sağlayan $X = (x, y)$ noktalar kümesidir. Dolayısıyla bu s – çemberleri

$$d_s(M,X) = \begin{cases} |y - m_2| = r & , x = m_1 \\ |x - m_1| + |y| + |m_2| = r & , x \neq \; m_1 \end{cases}$$

denklemine sahiptir. s – çemberlerini $M(m_1, m_2)$ merkezinin $x$ – eksenine olan uzaklığına göre beş temel durumda inceleyelim.

**1.Hal** : $m_2$ = 0 olsun. Yani $M$ merkezi $x$ – ekseninin üzerinde olsun. Buna göre aşağıdaki üç alt durum söz konusudur.

**i )** $x = m_1$

**ii )** $x > m_1,\; y \geq 0$

$x > m_1,\; y < 0$

**iii )** $x < m_1, y \geq 0$

$x < m_1, y < 0$

Şimdi bu kısıtlar altında s – çemberlerini araştıralım.

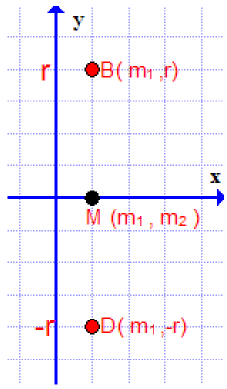
**i)** $x = m_1$ için

$|y| = r$ olduğunda

⇨ $y = r$ veya $y = -r$

⇨ $y_1 = r$ ve $y_2 = -r$ dir.

⇨ $\{(m_1, r)$ ve $(m_1, -r)\}$ çembere ait iki noktadır. (Bkz. Şekil 2. 1)




Şekil 2. 1

**ii )** $x > m_1,\ y \geq 0$ için uzaklık fonksiyonu gereğince,

$|x - m_1| + |y| = r$

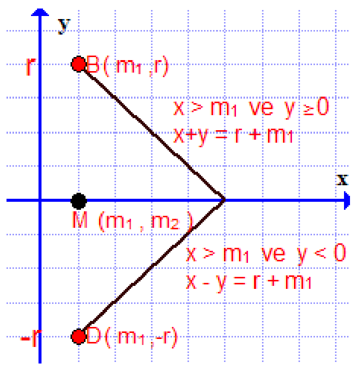
⇨ $x - m_1 + y = r$

⇨ $x + y = r + m_1$ elde edilir.

Eğer $x > m_1, y < 0$ ise,

⇨ $x - m_1 - y = r$

⇨ $x - y = r + m_1$ elde edilir (Bkz. Şekil 2.2).




Şekil 2.2

iii) $x < m_1$ , $y \geq 0$ olmak üzere $d_s$ metriğine göre,

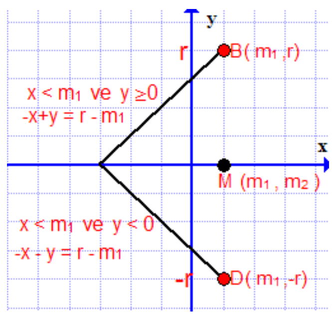
⇨ $-x + m_1 + y = r$

⇨ $-x + y = r - m_1$ olur.

Eğer $x < m_1, y < 0$ ise,

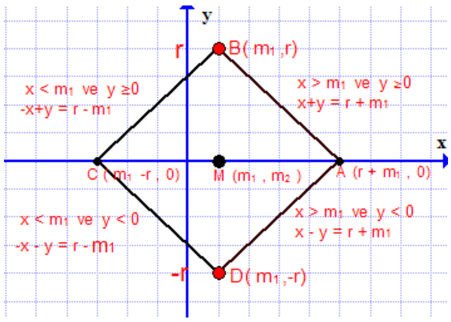
⇨ $-x + m_1 - y = r$

⇨ $-x - y = r - m_1$ elde edilir. (Bkz. Şekil 2.3)




Şekil 2. 3

i, ii, iii hallerinin çözüm kümelerinin bileşiminden elde edilen s – çemberinin grafiği yandaki şekilde görüldüğü gibidir (Bkz. Şekil 2.4).

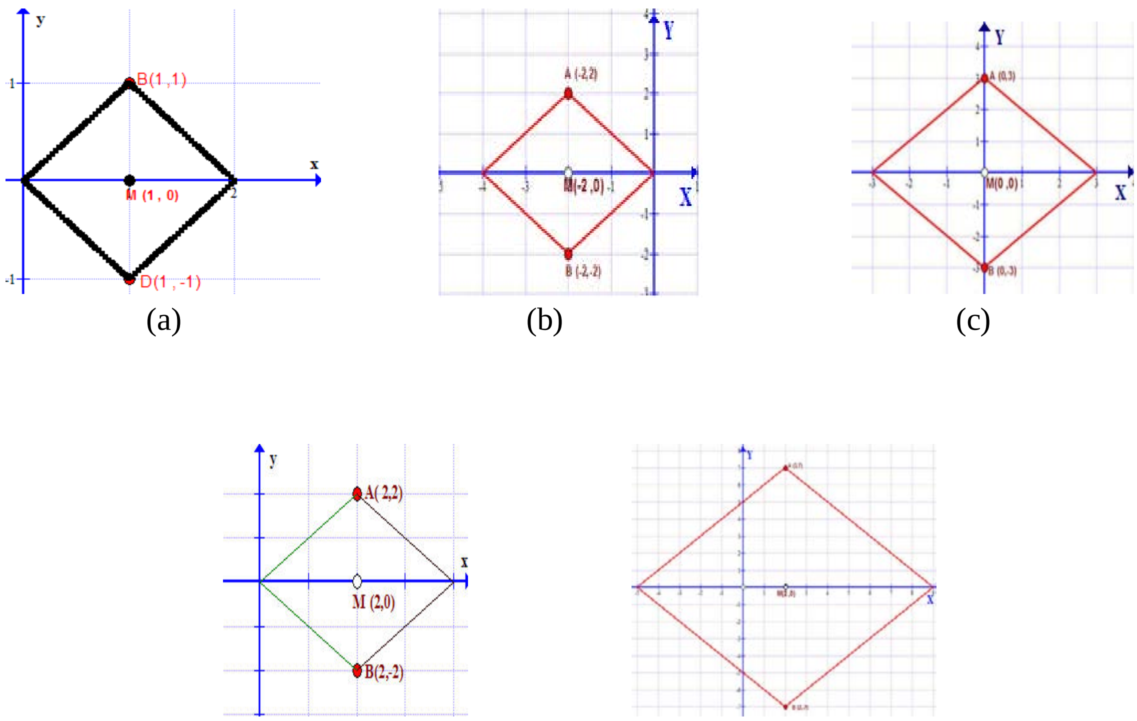



Şekil 2.4

**Sonuç 2.1** : $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde $M\ (m_1,\ 0\ )$ merkezli $r$ yarıçaplı s – çemberleri köşeleri sırasıyla A ( $r + m_1$ , 0), B ($m_1,\ r$), C ($m_1 - r,\ 0$) ve D ($m_1,\ -r$) olan Öklidyen karedir. Bu karenin kenarları ±1 eğimli doğru parçalarıdır.

**Örnekler:**

Aşağıdaki şekillerde sırasıyla $(1,0)$ merkezli ve $r=1$ yarıçaplı ; $(-2,0)$ merkezli ve $r=2$ yarıçaplı: $(0,0)$ merkezli ve $r=3$ yarıçaplı; $(2,0)$ merkezli ve $r=2$ yarıçaplı; $(2,0)$ merkezli ve $r=7$ yarıçaplı, s – çemberlerinin grafikleri görülmektedir.




(a) (b) (c)

(d) (e)

Şekil 2.5

**2.Hal** : $0 < m_2 < r$ olsun. Yani $M$ merkezinin $x$ – eksenine olan uzaklığı yarıçaptan küçük olsun. Bu durumda 1. Hale benzer şekilde aşağıdaki üç durum incelenmelidir.

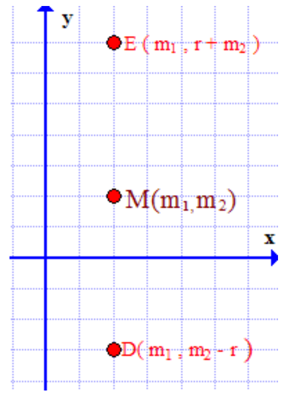
i) $x = m_1$ için

$|y - m_2| = r$ olduğundan

⇨ $y = r + m_2$ veya $y = -r + m_2$

⇨ $y_1 = r + m_2$ ve $y_2 = -r + m_2$ elde edilir.

Bu durumda $\{(m_1, r + m_2)$ ve $(m_1, -r + m_2)\}$ çembere ait iki noktadır (Bkz. Şekil 2.6).




Şekil 2.6

ii) $x > m_1$ , $y \geq 0$ için uzaklık tanımı gereğince

$|x - m_1| + |y| + |m_2| = r$ olur. Buradan da

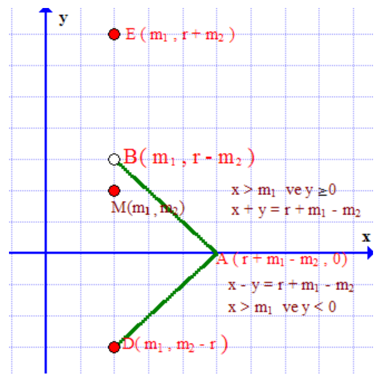
⇨ $x - m_1 + y + m_2 = r$

⇨ $x + y = r + m_1 - m_2$ elde edilir.

$x > m_1$ , $y < 0$ içinde benzer şekilde,

⇨ $x - m_1 - y + m_2 = r$

⇨ $x - y = r + m_1 - m_2$ bulunur (Bkz. Şekil 2.7).




Şekil 2.7

iii) $x < m_1, y \geq 0$ için

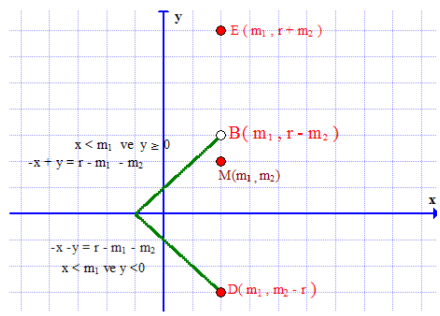
⇨ $-x + m_1 + y + m_2 = r$

⇨ $-x + y = r - m_1 - m_2$ olur.

$x < m_1$ , $y < 0$ ise

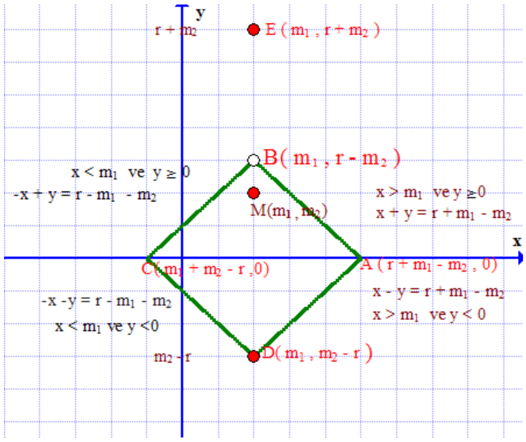
⇨ $-x + m_1 - y + m_2 = r$

⇨ $-x - y = r - m_1 - m_2$ elde edilir (Bkz. Şekil 2.8).




Şekil 2.8

i, ii, iii hallerinin çözüm kümelerinin bileşiminden elde edilen s – çemberinin grafiği yandaki şekilde görüldüğü gibidir. (Bkz. Şekil 2.9)

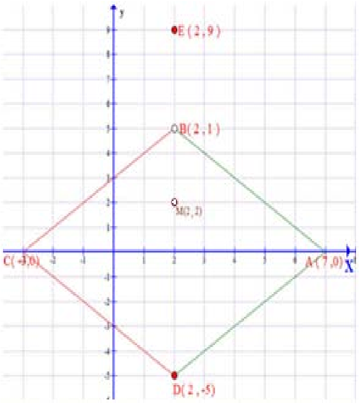



Şekil 2.9

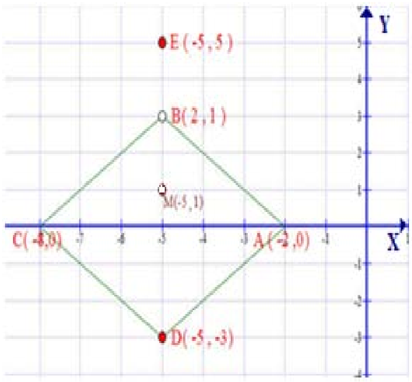
**Sonuç 2.2** : s – düzleminde $0 < m_2 < r$ koşulunu sağlayan $M\ (m_1,\ m_2)$ merkezli, $r$ yarıçaplı ve s – çemberleri köşeleri sırasıyla A (r $+ m_1 - m_2$, 0), B $(m_1,\ r - m_2)$, C $(m_1 + m_2 - r$, 0), D $(m_1,\ m_2 - r)$ olan ve B $(m_1,\ r - m_2)$ köşesi delikli olan Öklidyen kare ve delikli E $(m_1,\ r\ +\ m_2)$ noktasından oluşur. Bu karenin kenarları ±1 eğimli doğru parçalarıdır.

**Örnekler**

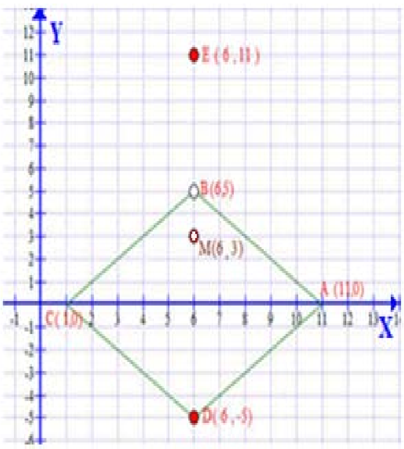
Aşağıdaki şekillerde sırasıyla $(2,2)$ merkezli ve $r=7$ yarıçaplı; (-5, 1) merkezli ve $r=4$ yarıçaplı; $(6,3)$ merkezli ve $r=8$ yarıçaplı; $(-7,4)$ merkezli ve $r=9$ yarıçaplı, s – çemberlerinin grafikleri görülmektedir.



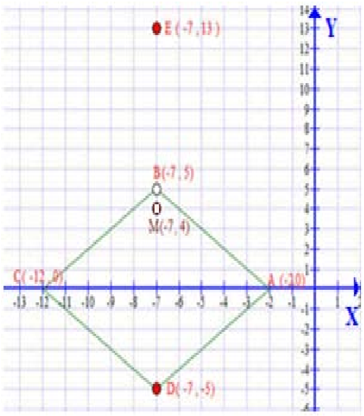

(a)




(b)




(c)




(d)

Şekil 2.10

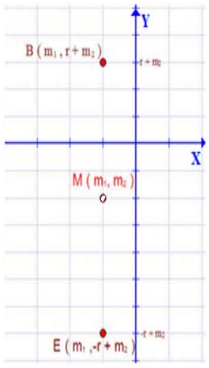
**3. Hal** : $-r < m_2 < 0$ olsun. Yani $M$ merkezinin $x$ – eksenine olan uzaklığı yarıçaptan küçük olsun. Buradan da aşağıdaki üç alt durum söz konusudur.

i) $x = m_1$ için uzaklık fonksiyonu gereğince

$|y - m_2| = r$ olup

⇨ $y = r + m_2$ veya $y = -r + m_2$

⇨ $y_1 = r + m_2$ ve $y_2 = -r + m_2$ bulunur ki
$\{(m_1,\ r + m_2)$ ve $(m_1,\ -r + m_2)\}$ çembere ait iki noktadır.
(Bkz. Şekil 2.11)




Şekil 2.11

ii) $x > m_1, y \geq 0$ için de

$|x - m_1| + |y| + |m_2 = r$ bağıntısından

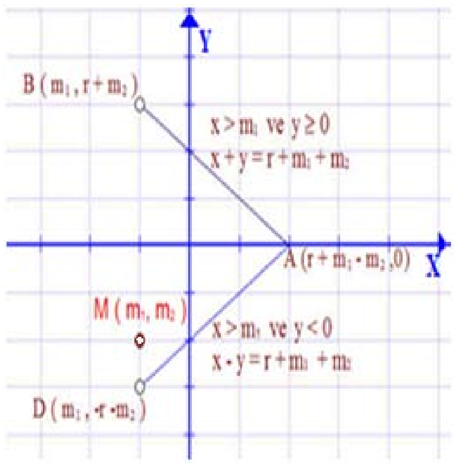
⇨ $x - m_1 + y - m_2 = r$

⇨ $x + y = r + m_1 + \mathrm{m}_2$ elde edilir.

Eğer $x > m_1,\ y < 0$ ise,

⇨ $x - m_1 - y - \mathrm{m}_2 = r$

⇨ $x - y = r + m_1$ $+\mathrm{m}_2$ olur (Bkz. Şekil 2.12).




Şekil 2.12

iii) $x < m_1$ , $y \geq 0$ olmak üzere,

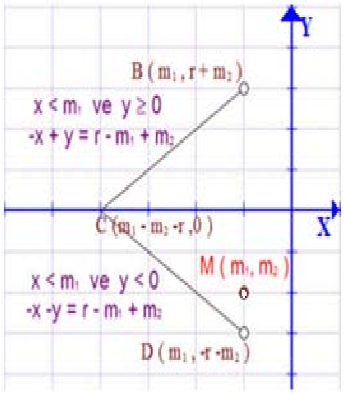
⇨ $-x + m_1 + y - m_2 = r$

⇨ $-x + y = r - m_1 + m_2$ dir.

Eğer $x < m_1, y < 0$ ise,

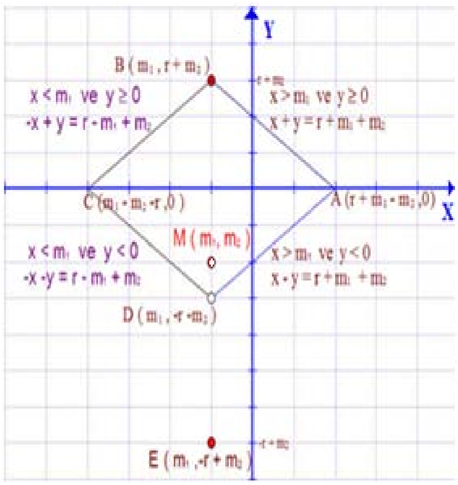
⇨ $-x + m_1 - y - \mathrm{m}_2 = \mathrm{r}$

⇨ $-x - y = r - m_1 + \mathrm{m}_2$ elde edilir. (Bkz. Şekil 2.13)




Şekil 2.13

i, ii, iii hallerinin çözüm kümelerinin bileşiminden elde edilen s – çemberinin grafiği yandaki şekilde görüldüğü gibidir. (Bkz. Şekil 2.14)

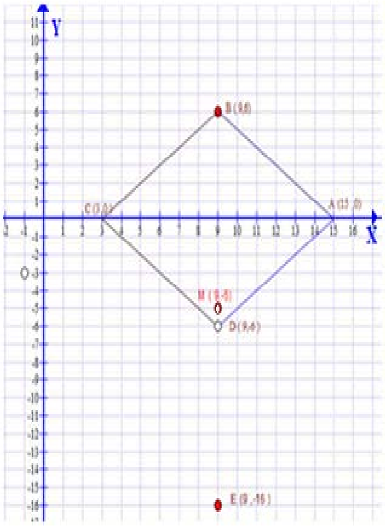



Şekil 2.14

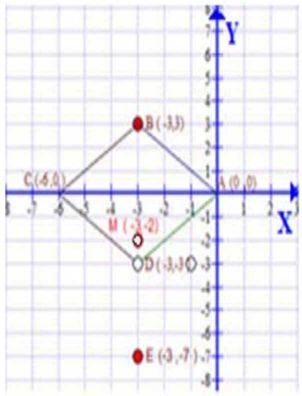
**Sonuç 2.3** : s – düzleminde $-r < m_2 < 0$ koşulunu sağlayan $M\ (m_1,\ m_2)$ merkezli $r$ yarıçaplı s – çemberleri köşeleri sırasıyla A (r $+m_1 - m_2,\ 0$), B $(m_1,\ r + m_2)$, C $(m_1 - m_2 - r$, 0), D $(m_1,\ -m_2 - r)$ olan ve D $(m_1,\ -m_2 - r)$ köşesi delikli olan Öklidyen kare ve E $(m_1,\ -r + m_2)$ noktasından oluşur. Bu karenin kenarları ±1 eğimli doğru parçalarıdır.

**Örnekler**

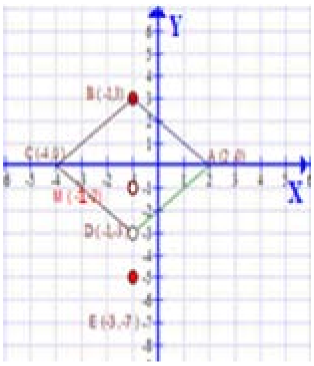
Aşağıdaki şekiller de sırasıyla $(9,\ -5)$ merkezli ve $r = 11$ yarıçaplı; $(-3,\ -2)$ merkezli ve $r = 5$ yarıçaplı; $(-1, -1)$ merkezli ve $r = 4$ yarıçaplı; $(4, -3)$ merkezli ve $r = 7$ yarıçaplı, s – çemberlerinin grafikleri görülmektedir.



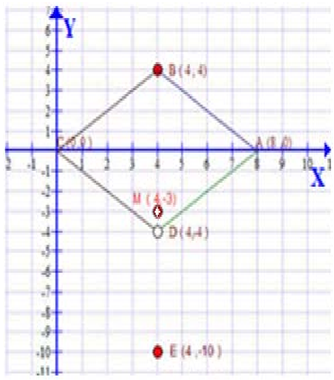

(a)




(b)



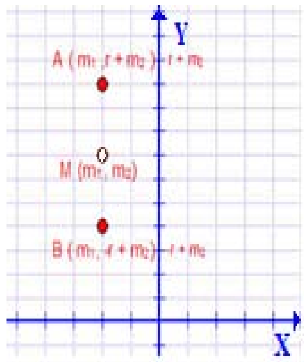

(c)




(d)

Şekil 2.15

**4.Hal** : $m_2 > r$ olsun. Yani $M$ merkezinin $x$ – eksenine olan uzaklığı $r$ yarıçapından da daha büyüktür.



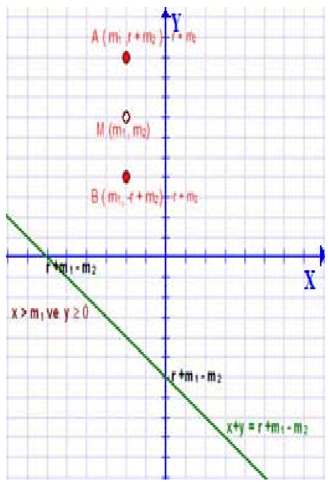

Şekil 2.16

i) $x = m_1$ iken

$|y - m_2| = r \Rightarrow y = r + m_2$ veya $y = -r + m_2$

$y_1 = r + m_2$ ve $y_2 = -r + m_2$ dir ve

$\{(m_1,\ r + m_2)$ ve $(m_1,\ -r + m_2)\}$ çembere ait iki noktadır. (Bkz. Şekil 2.16)




Şekil 2.17

ii) Eğer $x > m_1,\ y \geq 0$ ise,

$|x - m_1| + |y| + |m_2| = r$ olup

$x - m_1 + y + m_2 = r$

$\Rightarrow x + y = (r - m_2) + m_1$ bulunur.

(Bkz. Şekil 2.17)

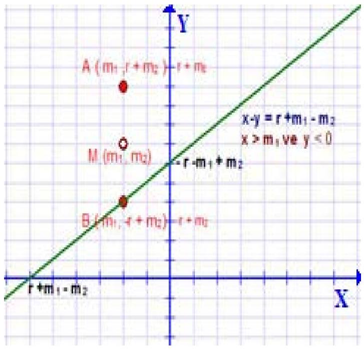
Yukarıdaki şekilde yer alan $x - y = (r - m_2) + m_1$ doğrusu üzerinde $x > m_1$, y $\geq$ 0 koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme) dir.

Eğer $x > m_1$, $y < 0$ ise,

⇨ $x - m_1 - y + m_2 = r$

⇨ $x - y = (r - m_2) + m_1$ dir.

(Bkz. Şekil 2.18)




Şekil 2.18

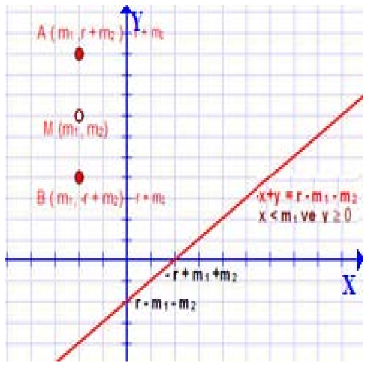
Yukarıdaki şekilde yer alan $x - y = (r - m_2) + m_1$ doğrusu üzerinde $x > m_1, y < 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme ) dir.

iii) $x < m_1, y \geq 0$ için

⇨ $-x + m_1 + y + \mathrm{m}_2 = r$

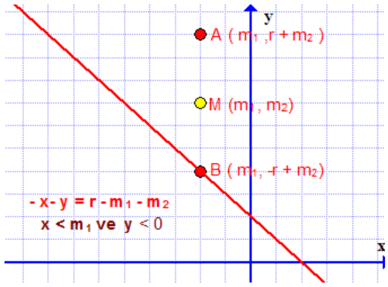
⇨ $-x + y = r - m_1 - \mathrm{m}_2$ olur.

(Bkz. Şekil 2.19)




Şekil 2.19

Yukarıdaki şekilde yer alan $x + y = r - m_1 - m_2$ doğrusu üzerinde $x < m_1,\ y \geq 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme ) dir.




Şekil 2.20

Eğer $x < m_1, \; y < 0$ ise,

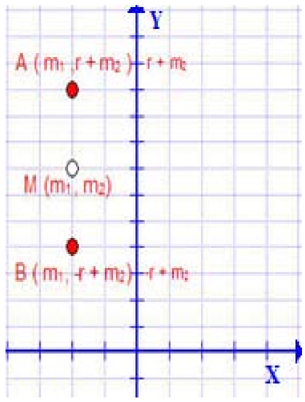
⇨ $-x + m_1 - y + m_2 = r$

⇨ $-x - y = r - m_1 - m_2$ bulunur.

(Bkz. Şekil 2.20)

Yukarıdaki şekilde yer alan $-x - y = r - m_1 - m_2$ doğrusu üzerinde $x < m_1, \; y < 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi ∅ (boş küme ) dir.

i, ii, iii çözüm kümelerinin bileşiminden elde edilen s- çemberi iki noktadan ibarettir. (Bkz. Şekil 2.21)

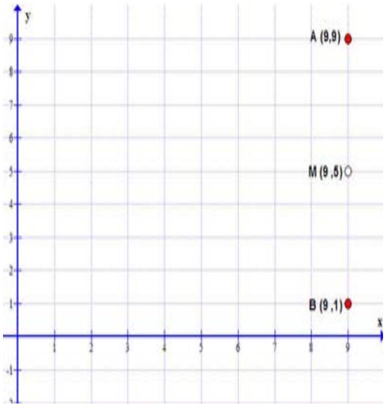



Şekil 2.21

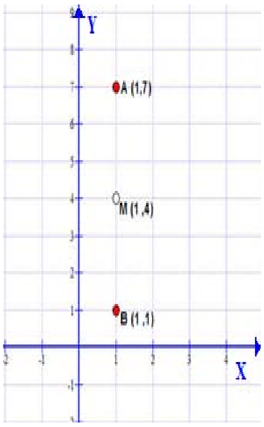
**Sonuç 2.4** :s – düzleminde $m_2 > r$ koşulunu sağlayan $M\,(m_1, \; m_2)$ merkezli $r$ yarıçaplı s – çemberleri A $(m_1, \; r + m_2)$ ve B $(m_1, \; -r + m_2)$ noktadan ibarettir.

**Örnekler**

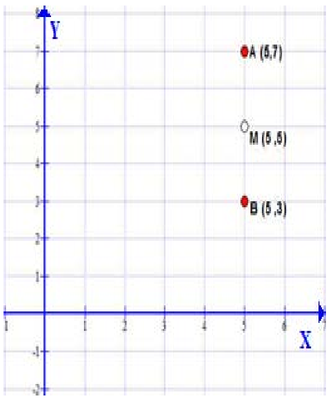
Aşağıdaki şekillerde sırasıyla $(1,4)$ merkezli $r=3$ yarıçaplı; $(5,5)$ merkezli $r=2$ yarıçaplı; $(7,\ -2)$ merkezli ve $r=1$ yarıçaplı; $(9,5)$ merkezli ve $r=4$ yarıçaplı, s – çemberlerinin grafikleri görülmektedir.



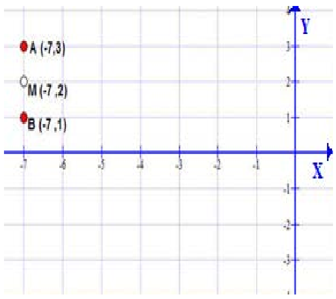

(a)




(b)




(c)




(d)

Şekil 2.22

**5.Hal** : $-m_2 > r$ olsun. Yani $M$ merkezinin $x$ – eksenine olan uzaklığı $r$ yarıçapından da daha büyük olsun.

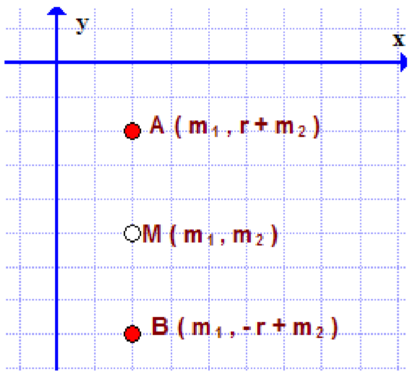
i) $x = m_1$ iken

$|y - m_2| = r$ ⇨ $y = r + m_2$ veya

y = $-r + m_2$ ⇨ $y_1 = r + m_2$ ve

$y_2 = -r + m_2$ olup

$\{(m_1, r + m_2)$ ve $(m_1, -r + m_2)\}$ çembere ait iki noktadır. (Bkz. Şekil 2.23)




Şekil 2.23

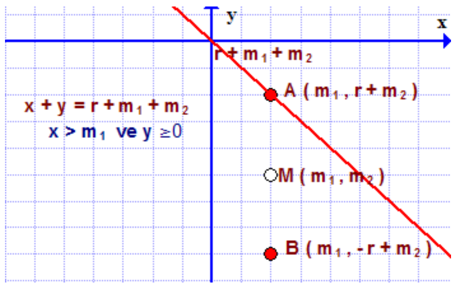
ii) Eğer $x > m_1,\ y \geq 0$ ise,

$|x - m_1| + |y| + |m_2| = r$ olduğundan

⇨ $x - m_1 + y - m_2 = r$

⇨ $x + y = r + m_1 + m_2$ bulunur.

(Bkz. Şekil 2.24)



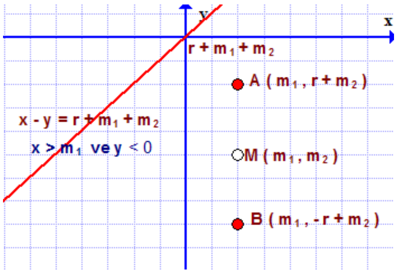

Şekil 2.24

Yukarıdaki şekilde yer alan $x + y = r + m_1 + m_2$ doğrusu üzerinde $x > m_1,\ y \geq 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme ) dir.

Eğer $x > m_1,\ y < 0$ ise,

⇨ $x - m_1 - y + m_2 = r$

$x - y = r + m_1 - m_2$ olur. (Bkz. Şekil 2.25)



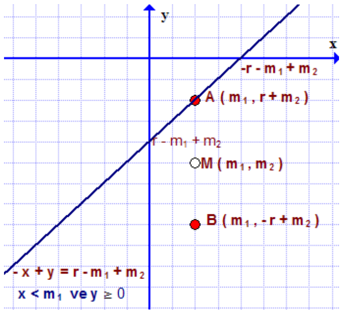

Şekil 2.25

Yukarıdaki şekilde yer alan $x - y = r + m_1 - m_2$ doğrusu üzerinde $x > m_1$ ve $y < 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi ∅ (boş küme ) dir.

iii) $x < m_1,\ y \geq 0$ için

⇨ $-x + m_1 + y - m_2 = r$ olup

$-x + y = r - m_1 + m_2$ dir. (Bkz. Şekil 2.26)




Şekil 2.26

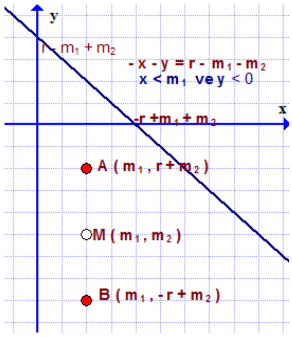
Yukarıdaki şekilde yer alan $-x + y = r - m_1 + m_2$ doğrusu üzerinde $x < m_1$ ve $y \geq 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi ∅ (boş küme ) dir.

Eğer $x < m_1, y < 0$ ise,

⇨ $-x + m_1 - y + m_2 = r$ olduğundan

⇨ $-x - y = r - m_1 - m_2$ bulunur.

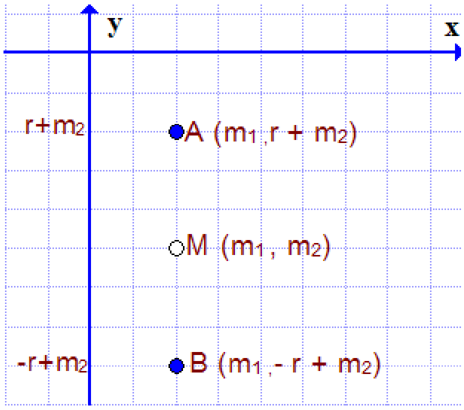
(Bkz. Şekil 2.27)




Şekil 2.27

Yukarıdaki şekilde yer alan $-x - y = r - m_1 - m_2$ doğrusu üzerinde $x < m_1$ ve $y < 0$ kısıtları sağlayan bir nokta olmadığından çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme ) dir.

i, ii, iii çözüm kümelerinin bileşiminden elde edilen s- çemberi iki noktadan ibarettir. (Bkz. Şekil 2.28)

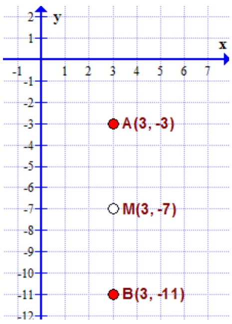



Şekil 2.28

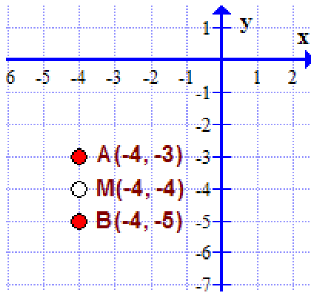
**Sonuç 2.5** : s – düzleminde $-m_2 > r$ koşulunu sağlayan $M\ (m_1\ ,\ m_2)$ merkezli $r$ yarıçaplı s– çemberleri A $(\ m_1,\ r + m_2)$ ve $B\ (m_1, -r + m_2)$ noktadan ibarettir.

## Örnekler

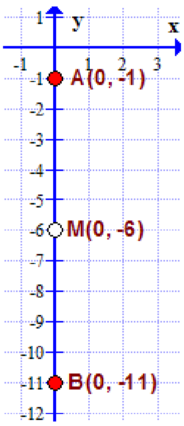
Aşağıdaki şekillerde sırasıyla $(3, -7)$ merkezli $r = 4$ yarıçaplı; $(-4, -4)$ merkezli $r = 1$ yarıçaplı; $(0, -6)$ merkezli $r = 5$ yarıçaplı; $(8, -5)$ merkezli $r = 2$ yarıçaplı, s – çemberlerinin grafikleri görülmektedir.



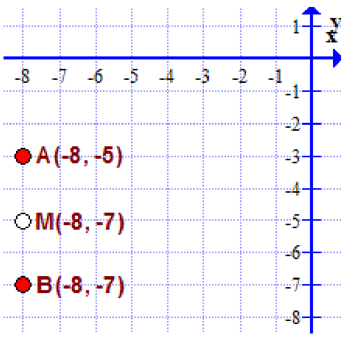

(a)




(b)




(c)




(d)

Şekil 2.29

**Teorem 2.1:**

i. $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde $(m_1,\ 0\ )$ merkezli r yarıçaplı s – çemberleri köşeleri sırasıyla A $(r + m_1\ ,\ 0)$, B $(m_1,\ r\ )$, C $(m_1 - r,\ 0)$ ve D $(m_1,\ -r)$ olan Öklidyen karedir. Bu karenin kenarları ±1 eğimli doğru parçalarıdır.

ii. $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde $(m_1,\ m_2)$ merkezli r yarıçaplı ve $0 < m_2 < r$ kısıtlarına uyan s – çemberleri köşeleri sırasıyla A $(r + m_1 - m_2,\ 0)$, B $(m_1,\ r - m_2)$, C $(m_1 + m_2 - r, 0)$, D $(m_1,\ m_2 - r)$ olan B $(m_1,\ r - m_2)$ köşesi delikli olan Öklidyen kare ve delikli Öklidyen karenin dışında E $(m_1,\ r + m_2)$ noktasından oluşur. Bu karenin kenarları ±1 eğimli doğru parçalarıdır.

iii. $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde $(m_1,\ m_2)$ merkezli r yarıçaplı ve $-r < m_2 < 0$ kısıtlarına uyan s – çemberleri köşeleri sırasıyla A $(r + m_1 - m_2,\ 0)$, B $(m_1,\ r + m_2)$, C $(m_1 - m_2 - r, 0)$, D $(m_1,\ -m_2 - r)$ olan D $(m_1,\ -m_2 - r)$ köşesi delikli olan Öklidyen kare ve delikli Öklidyen karenin dışında E $(m_1,\ -r + m_2)$ noktasından oluşur. Bu karenin kenarları ±1 eğimli doğru parçalarıdır.

iv. $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde $(m_1,\ m_2)$ merkezli r yarıçaplı ve $|m_2| \geq r$ kısıtına uyan s – çemberleri A $(m_1,\ r + m_2)$ ve B $(m_1,\ -r + m_2)$ gibi iki noktadan ibarettir.

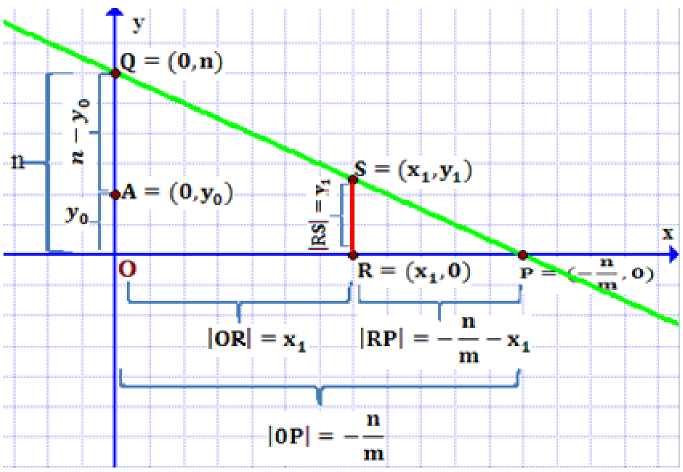
# BÖLÜM 3

## Bir Noktanın Bir Doğruya Olan $d_s$ – Uzaklığı

**Tanım 3.1** $\mathbb{R}^2{}_s$ de bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası ve $l \ldots y = mx + n$ doğrusu verilsin. $d_s\ (A,\ l) = min_{P \in l}\ \{d_s(A,\ P) | P \in \mathbb{R}^2{}_s\ \}$ sayısına $A$ noktasının $l$ doğrusuna olan $d_s$ – uzaklığı denir. $d_s\ (A, l)$ sayısı $l$ doğrusunun eğimine bağlıdır.

Şimdi $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna olan uzaklığını $l$ doğrusunun eğimine bağlı olarak genelleştireceğiz.

1. $|m| < 1$ olsun.




Şekil 3.1

Düzlemde verilen bir $l\ \ldots\ y = mx + n$ doğrusu ve $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için $-1 < m < 0,\ x_0 = 0\ \ (x_0 = 0\ \ \textit{olarak alınması genelliği bozmaz}\ )\ \ 0 \leq y_0 < n,$ $x_1 \geq 0$ ve $y_1 \geq 0$ olmak üzere $|OQ| = n,\ |OA| = y_0,\ |AQ| = n - y_0,\ |OP| = -\frac{n}{m},$ $|OR| = x_1,\ |RS| = y_1\ ,\ |RP| = -\frac{n}{m} - x_1$ olsun.

Bu durumda $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l\ \ldots\ y = mx + n$ doğrusuna olan uzaklığı için aşağıda ifade edilen üç farklı yolu inceleyeceğiz.

i. $d_s(A,\ Q) = |AQ| = n - y_0$

ii. $d_s(A,\ S) = |AO| + |OR| + |RS| = y_0 + x_1 + y_1$

iii. $d_s(A,\ P) = |AO| + |OR| + |RP| = y_0 - \frac{n}{m}$

a) $d_s(A,\ Q)$ ve $d_s(A,\ S)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$y_1 = mx_1 + n \Rightarrow n = y_1 - mx_1$ dir.

$d_s(A,\ Q) = n - y_0 = y_1 - mx_1 - y_0 = y_1 - (mx_1 + y_0)$

$-1 < m < 0$ olduğundan $-mx_1 < x_1$ dir.

$(x_1 + y_0) > -(mx_1 + y_0)$

$\Rightarrow (x_1 + y_0) + y_1 > y_1 - (mx_1 + y_0) \Rightarrow |AQ| < |AO| + |OR| + |RS|$

$\Rightarrow d_s(A,\ Q) < d_s(A,\ S)$ dir.

b) $d_s(A,\ Q)$ ve $d_s(A,\ P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

(Bkz. Şekil 3.1) $0 > m > -1$ olduğundan $-\frac{n}{m} > n$ dir.

$y_0 - \frac{n}{m} > n + y_0 > n - y_0$

$|AO| + |OR| + |RP| > |AQ|$

$\Rightarrow d_s(A,\ P) > d_s(A,\ Q)$ dir.

c) $d_s(A,\ S)$ ve $d_s(A,\ P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$0 > m > -1$ olduğundan $-\frac{n}{m} - x_1 > y_1$ dir. Buna göre

$y_0 + x_1 + y_1 < y_0 + x_1 + (-\frac{n}{m} - x_1)$

$|AO| + |OR| + |RS| < |AO| + |OR| + |RP|$

$\Rightarrow d_s(A,\ S) < d_s(A,\ P)$ dir.

**Sonuç 3.1 :** s – düzlemdeki bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $|m| < 1$ olmak üzere $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna uzaklığı $d_s\,(A, l) = |\, mx_0 + n - y_0|$ dır.

**2.** $|m| \geq 1$ olsun.

**2.1)** $y_0 - mx_0 - n < 0$ $(y = mx + n$ *doğrusu* $m < -1,\ n > y_0 \geq 0$ *için* $y_0 - mx_0 - n < 0$ *koşulu doğrunun altını gösteriyor.*$)$ için $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının apsisi $l \ldots y = mx + n$ doğrusunun x eksenini kestiği $P = (-\frac{n}{m},\ 0)$ noktasından mutlak değerce küçük yani $|x_0| < |\frac{-n}{m}|$ ise $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna olan minimum uzaklığı için aşağıda bahsedilen üç farklı yolu inceleyelim. (Bkz. Şekil 3.2)

$|AR| = y_0$

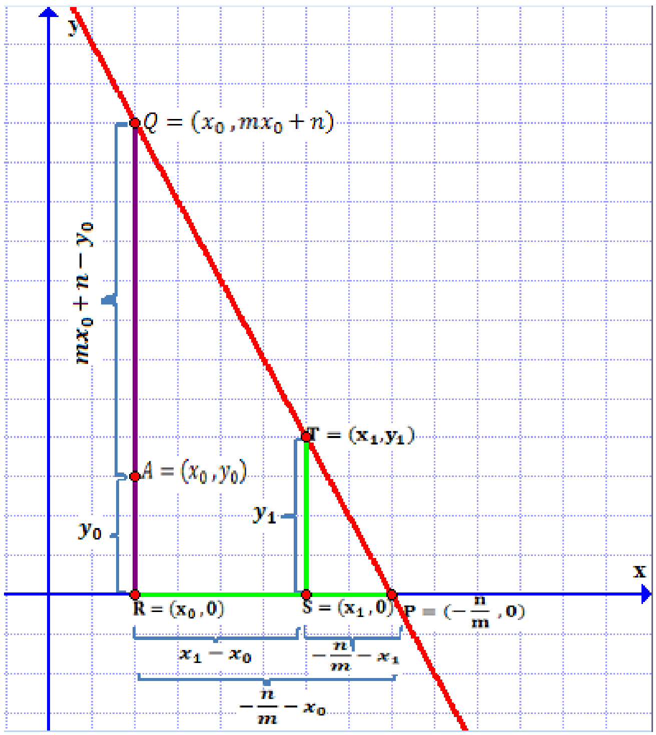
$|AQ| = mx_0 + n - y_0$

$|RP| = -\frac{n}{m} - x_0$

$|RS| = x_1 - x_0$

$|ST| = y_1$

$|SP| = -\frac{n}{m} - x_1$




Şekil 3.2

i. $d_s(A,\ Q) = |AQ| = mx_0 + n - y_0$

ii. $d_s(A,\ P) = |AR| + |RP| = y_0 - (\frac{n}{m} + x_0)$

iii. $d_s(A,\ T) = |AR| + |RS| + |ST| = y_0 + x_1 - x_0 + y_1$

a) $d_s(A,\ Q)$ ve $d_s(A,\ P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$m < -1$ olduğundan $|RQ| > |RP|$ dir. Bu sonuca bağlı olarak

$mx_0 + n - y_0 = y_0 - x_0 - \frac{n}{m}$ şartını sağlayan $A = (x_0,\ y_0)$ gibi bir nokta vardır.

Yukarıdaki eşitlikte $y_0$ yalnız bırakılırsa :

$y_0 = \frac{(m+1)\ (\frac{n}{m} + x_0)}{2}$) elde edilir. Buna göre,

A. $y_0 = \frac{(m+1)\ (\frac{n}{m} + x_0)}{2}$ $\mapsto d_s(A,\ Q) = d_s(A,\ P)$

B. $y_0 > \frac{(m+1)\ (\frac{n}{m} + x_0)}{2}$ $\mapsto d_s(A,\ Q) < d_s(A,\ P)$

C. $y_0 > \frac{(m+1)\ (\frac{n}{m} + x_0)}{2}$ $\mapsto d_s(A,\ Q) > d_s(A,\ P)$ dir.

b) $d_s(A,\ Q)$ ve $d_s(A,\ T)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$|m| > 1$ olduğundan $|RQ| > |RP|$ dir. Bu sonuca bağlı olarak

$mx_0 + n - y_0 = y_0 + x_1 - x_0 + y_1$ şartını sağlayan $A = (x_0,\ y_0)$ gibi bir nokta vardır. Yukarıdaki eşitlikte $y_0$ yalnız bırakılırsa :

$y_0 = \frac{x_0(m+1) + n - (x_1 + y_1)}{2}$ elde edilir.

A. $y_0 = \frac{x_0(m+1) + n - (x_1 + y_1)}{2}$ $\mapsto d_s(A,\ Q) = d_s(A,\ T)$

B. $y_0 > \frac{x_0(m+1) + n - (x_1 + y_1)}{2}$ $\mapsto d_s(A,\ Q) < d_s(A,\ T)$

C. $y_0 < \frac{x_0(m+1) + n - (x_1 + y_1)}{2}$ $\mapsto d_s(A,\ Q) > d_s(A,\ T)$ dir.

c) $d_s(A,\ P)$ ve $d_s(A,\ T)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$|m| > 1$ olduğundan $|ST| > |SP|$ dir. Bu sonuca bağlı olarak $y_1 > -\frac{n}{m} - x_1$ dir.

$y_0 + x_1 - x_0 + y_1 > y_0 + x_1 - x_0 + (\frac{-n}{m} - x_1)$

$\mapsto d_s(A,\ T) > d_s(A,\ P)$ dir.

**Sonuç 3.2 :** Analitik düzlemde verilen $A = (x_0,\ y_0)$noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna olan $d_s$ uzaklığı $|m| \geq 1,\ y - mx + n < 0$ ve $|x_0| < |\frac{-n}{m}|$ iken

$$d_s\ (A,\ l) = \min\ \{|mx_0 + n - y_0|,\ \ |y_0| + \left|x_0 + \frac{n}{m}\right|\}$$

dir.

**2.2)** $y_0 - mx_0 - n < 0$ için $A = (x_0, y_0)$ noktasının apsisi $l \ldots y = mx + n$ doğrusunun x eksenini kestiği $P = \left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ noktasından mutlak değerce büyük veya eşit yani $|x_0| \geq |\frac{-n}{m}|$ ise $A = (x_0, y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna uzaklığı için üç farklı yolu inceleyelim. (Bkz. Şekil 3.3)

$|AQ| = y_0$

$|QR| = mx_0 + n$

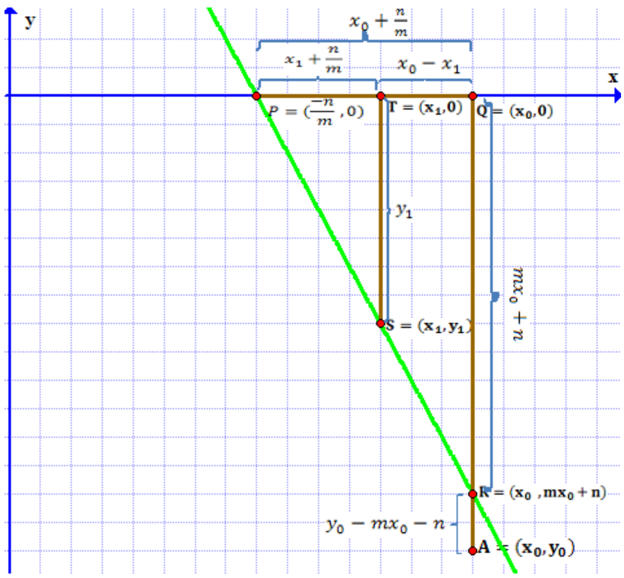
$|AR| = y_0 - mx_0 - n$

$|QP| = x_0 + \frac{n}{m}$

$|QT| = x_0 - x_1$

$|TS| = y_1$

$|PT| = x_1 + \frac{n}{m}$




Şekil 3.3

Bu yollar,

i. $d_s(A, R) = |AR| = y_0 - mx_0 - n$

ii. $d_s(A, P) = |AQ| + |QP| = y_0 + x_0 + \frac{n}{m}$

iii. $d_s(A, S) = |AQ| + |QT| + |TS| = y_0 + x_0 - x_1 + y_1$

dir.

a) $d_s(A, R)$ ve $d_s(A, P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$|m| \geq 1$ ve $|x_0| \geq |-\frac{n}{m}|$ olduğundan $y_0 - mx_0 - n < y_0 + x_0 - \frac{n}{m}$ olduğu şekilden açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $d_s(A, R) < d_s(A, P)$ dir.

b) $d_s(A,\ R)$ ve $d_s(A,\ S)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$mx_0 + n > 0$ ve $x_0 - x_1 + y_1 > 0$ olduğundan

$y_0 - mx_0 - n < y_0 + x_0 - x_1 + y_1$ olduğu şekilden açıkça görülmektedir.

Dolayısıyla $d_s(A,\ R) < d_s(A,\ S)$ dir.

c) $d_s(A,\ P)$ ve $d_s(A,\ S)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$m > 1$ olduğundan $|TS| > |TP|$ yani $y_1 > x_1 + \frac{n}{m} \Rightarrow y_1 - x_1 > \frac{n}{m}$

$y_0 + x_0 + y_1 - x_1 > y_0 + x_0 + \frac{n}{m}$

$d_s(A,\ S) > d_s(A,\ P)$ dir.

**Sonuç 3.3:** Analitik düzlemde verilen $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna olan $d_s$ uzaklığı $|m| \geq 1$, $y_0 - mx_0 - n < 0$ ve $|x_0| \geq \left|-\frac{n}{m}\right|$ iken

$$d_s\,(A,\ l) = |\,mx_0 + n - y_0|$$

dir.

**2.3)** $y_0 - mx_0 - n > 0$ için $A = (x_0, y_0)$ noktasının apsisi $l \ldots y = mx + n$ doğrusunun x eksenini kestiği $P = (-\frac{n}{m}, 0)$ noktasından mutlak değerce küçük yani $|x_0| < |\frac{-n}{m}|$ ise $A = (x_0, y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna uzaklığı için aşağıda ifade edilen üç farklı yolu inceleyelim. (Bkz Şekil 3.4)

$|RA| = y_0$

$|RQ| = mx_0 + n$

$|QA| = y_0 - mx_0 - n$

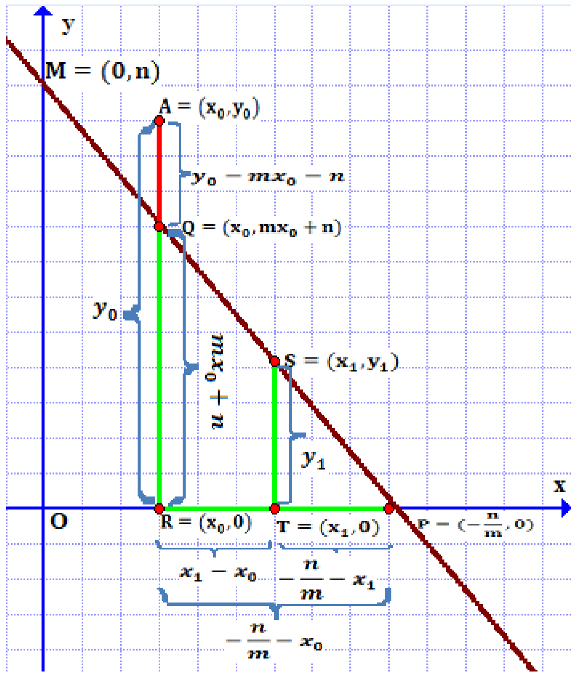
$|OR| = x_0$

$|OP| = -\frac{n}{m}$

$|RP| = -\frac{n}{m} - x_0$

$|RT| = x_1 - x_0$

$|TS| = y_1$, $|TP| = -\frac{n}{m} - x_1$




Şekil 3.4

Bu yollar,

i. $d_s(A, Q) = |AQ| = y_0 - mx_0 - n$

ii. $d_s(A, S) = |AR| + |RT| + |TS| = y_0 + x_1 - x_0 + y_1$

iii. $d_s(A, P) = |AR| + |RP| = y_0 - \frac{n}{m} - x_0$

dir.

Bu durumda $A = (x_0, y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna uzaklığı için üç farklı yolu inceleyeceğiz.

a) $d_s(A,\ Q)$ ve $d_s(A,\ S)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$d_s\ (A,\ Q) = |AQ|$ ve $d_s(A,\ S) = |AQ| + |QR| + |RT| + |TS|$ olduğundan

$d_s\ (A,\ Q) < d_s(A,\ S)$ dir.

b) $d_s(A,\ Q)$ ve $d_s(A,\ P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$d_s\ (A,\ Q) = |AQ|$ ve $d_s(A,\ P) = |AQ| + |QR| + |RT| + |TP|$ olduğundan

$d_s\ (A,\ Q) < d_s(A,\ P)$ dir.

c) $d_s(A,\ S)$ ve $d_s(A,\ P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$d_s\ (A,\ S) = |AQ| + |QR| + |RT| + |TS|,\ d_s(A,\ P) = |AQ| + |QR| + |RT| + |TP|$

için $|m| \geq 1$ olduğundan $|TS| > |TP|$ dir. Dolayısıyla

$d_s\ (A,\ Q) < d_s(A,\ S)$ dir.

**Sonuç 3.4:** Analitik düzlemde verilen $A = (x_0, y_0)$ noktasının $l\ \ldots y = mx + n$ doğrusuna olan $d_s$ – uzaklığı $|m| \geq 1$ , $y_0 - mx_0 - n > 0$ ve $|x_0| < \left|\frac{-n}{m}\right|$ iken

$$d_s\ (A, l) = |\ mx_0\ + n - y_0|$$

dir.

**2.4)** $y_0 - mx_0 - n > 0$ için $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının apsisi $l \ldots y = mx + n$ doğrusunun x eksenini kestiği $P$=$(-\frac{n}{m}, 0)$ noktasından mutlak değerce büyük veya eşit yani $|x_0| \geq |\frac{-n}{m}|$ ise $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna uzaklığı için üç farklı yolu inceleyelim. (Bkz. Şekil 3.5)

$|AQ| = y_0$

$|AR| = y_0 - mx_0 - n$

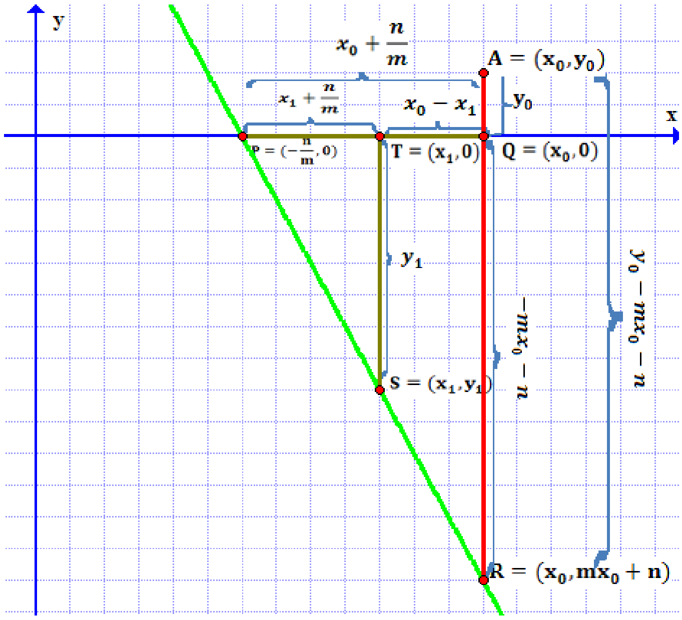
$|OQ| = x_0$

$|PQ| = x_0 + \frac{n}{m}$

$|TQ| = x_0 - x_1$

$|PT| = \ x_1 + \frac{n}{m}$

$|TS| = y_1$




Şekil 3.5

Bahsedilen bu yollar,

i. $d_s(A,\ R) = |AR| = y_0 - mx_0 - n$

ii. $d_s(A,\ P) = |AQ| + |PQ| = y_0 + x_0 + \frac{n}{m}$

iii. $d_s(A,\ S) = |AQ| + |TQ| + |TS| = y_0 + x_0 - x_1 + y_1$

dir.

a) $d_s(A,\ R)$ ve $d_s(A,\ P)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$d_s\,(A,\ R) = |AQ| + |QR|$ ve $d_s(A,\ P) = |AQ| + |QP|$ için $|m| \geq 1$ olduğundan $|QR| > |QP|$ dir. Dolayısıyla $d_s\,(A,\ P) < d_s(A,\ R)$ dir.

b) $d_s(A,\ R)$ ve $d_s(A,\ S)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$d_s\,(A,\ R) = |AQ| + |QR|$ve $d_s(A,\ S) = |AQ| + |QT| + |TS|$ için $|QT| = 0$ alınması durumunda $|TS| = |QR|$ olur diğer durumlarda $|m| \geq 1$ olduğundan $|TS| < |QR|$ olur. Bundan dolayı $d_s(A,\ R)\ \geq\ d_s(A,\ S)$

c) $d_s(A,\ P)$ ve $d_s(A,\ S)$ uzaklıklarını kıyaslayalım.

$d_s\,(A,\ S) = |AQ| + |QT| + |TS|,\ d_s(A,\ P) = |AQ| + |QT| + |TP|$ için $|m| \geq 1$ olduğundan $|TS| > |TP|$ dir. Dolayısıyla $d_s\,(A,\ P) < d_s(A,\ S)$ dir.

**Sonuç 3.5 :** Analitik düzleminde verilen $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna olan $d_s$ uzaklığı $|m| \geq 1$ , $y_0 - mx_0 - n > 0$ ve $|x_0| \geq \left|-\frac{n}{m}\right|$ iken

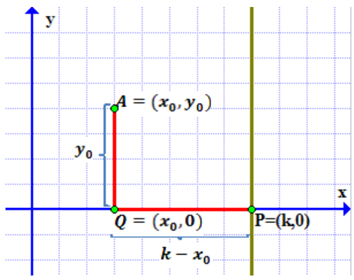
$$d_s\,(A, l) = |y_0| + |x_0 + \tfrac{n}{m}|$$

dir.

**3.** $|m| = \infty$ iken $A\ =\ (x_0,\ y_0)$ noktasının $l : x = k$ doğrusuna uzaklığı

$d_s(\text{A}, l)\ = |\text{AQ}| + |\text{AP}| = y_0\ +\ k\ -\ x_0\ \left(k = \frac{-n}{m}\right)$

$\Rightarrow d_s(\text{A}, l) = \{(|y_0|\ + |x_0\ +\ \frac{n}{m}|)\}$ dir. (Bkz. Şekil 3.6)




Şekil 3.6

Bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının verilen $l\ \ldots\ y = mx + n$ doğrusuna uzaklığı için genel sonuçlar:

| Eğim | $d_s(A, l)$ | Açıklama |
|---|---|---|
| $\lvert m\rvert < 1$ | $\lvert mx_0 + n - y_0\rvert$ | Yollar ↑ veya ↓ şeklindedir. |
| $\lvert m\rvert \geq 1$ | $min\left\{\lvert mx_0 + n - y_0\rvert, \lvert y_0\rvert + \lvert x_0 + \frac{n}{m}\rvert\right\}$ | • $y_0 - mx_0 - n < 0$ iken<br>$\lvert x_0\rvert < \lvert\frac{-n}{m}\rvert$ ise<br>yollar ↲, ↳, ↱, ↰,<br>↓, ↑, →, ← şeklindedir.<br><br>• $y_0 - mx_0 - n < 0$ iken<br>$\lvert x_0\rvert \geq \lvert\frac{-n}{m}\rvert$ ise<br>veya $y_0 - mx_0 - n > 0$ iken<br>$\lvert x_0\rvert < \lvert\frac{-n}{m}\rvert$ ise<br>yollar ↑ veya ↓ şeklindedir.<br><br>• $y_0 - mx_0 - n > 0$ iken<br>$\lvert x_0\rvert \geq \lvert\frac{-n}{m}\rvert$ ise<br>yollar ↲, ↳, ↱, ↰,<br>↓, ↑, →, ← şeklindedir. |
| $\lvert m\rvert \to \infty$<br>$l$: x=k | $\begin{cases} \lvert y_0\rvert + \lvert k - x_0\rvert & ,(x_0, y_0) \notin l \\ 0 & ,(x_0, y_0) \in l \end{cases}$ | yollar ↲, ↳, ↱,<br>↰, →, ← şeklindedir.<br>. |

**Tablo 3.1**

Bir $A=(x_0,\ y_0)$ noktasının verilen $l\ \ldots ax+by+c=0$ doğrusuna uzaklığı için genel sonuçlar:

| Eğim | $d_s(\mathrm{A},\ l)$ | Açıklama |
|---|---|---|
| $\|m\|<1$ | $\left\|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right\|$ | Yollar ↑ veya ↓ şeklindedir. |
| $\|m\|\geq 1$ | $min\left\{\left\|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right\|,\ \left\|\frac{ax_0+c}{a}\right\|+\|y_0\|\right\}$ | • $ax_0+by_0+c<0$ iken $\|x_0\|<\left\|\frac{-c}{a}\right\|$ ise Yollar ↵, ↳, ↱, ↰, ↓, ↑, →, ← şeklindedir.<br>• $ax_0+by_0+c<0$ iken $\|x_0\|\geq\left\|\frac{-c}{a}\right\|$ ise veya $ax_0+by_0+c>0$ iken $\|x_0\|<\left\|\frac{-c}{a}\right\|$ ise yollar ↑ veya ↓ şeklindedir.<br>• $ax_0+by_0+c>0$ iken $\|x_0\|\geq\left\|\frac{-c}{a}\right\|$ ise yollar ↵, ↳, ↱, ↰, ↓, ↑, →, ← şeklindedir. |
| $\|m\|\to\infty$<br>$ax+c=0$ | $\begin{cases}\left\|\frac{ax_0+c}{a}\right\|+\|y_0\| & ,(x_0,y_0)\notin l\\ 0 & ,(x_0,y_0)\in l\end{cases}$ | yollar ↵, ↳, ↱, ↰, →, ← şeklindedir.<br>. |

**Tablo 3.2**

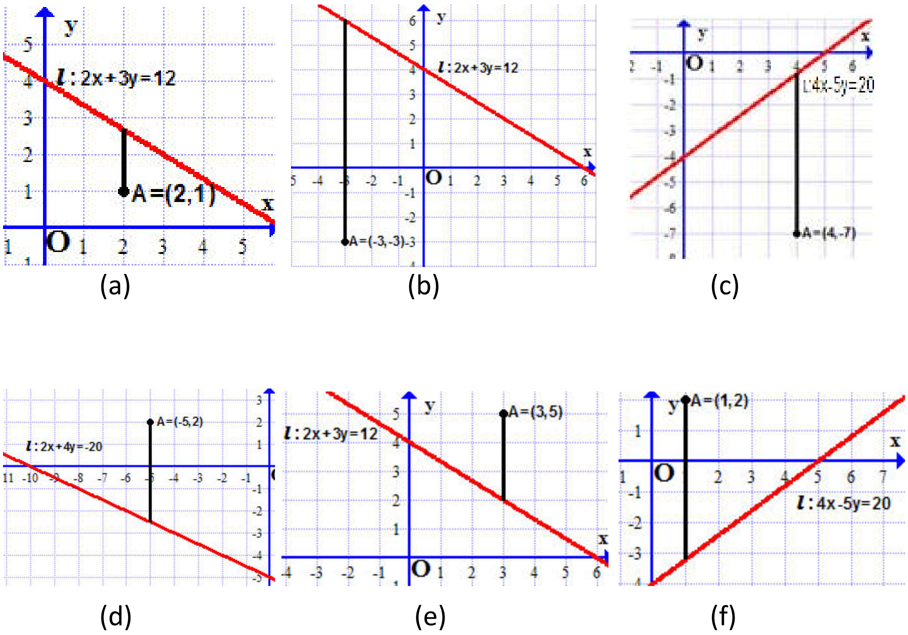
**Sonuç 3.6:** s – düzleminde bir $A = (x_0, y_0)$ noktasının verilen $l \ldots ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı,

$$d_s(A, l) = \begin{cases} \left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right| & , \quad |m| < 1 \; ise \\ min\left\{\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|, \left|\frac{ax_0+c}{a}\right| + |y_0|\right\} & , \quad |m| \geq 1 \; ise \\ \begin{cases} \left|\frac{ax_0+c}{a}\right| + |y_0|, & (x_0, y_0) \notin l \quad ise \\ 0 \quad , & (x_0, y_0) \in l \quad ise \end{cases} & , \quad |m| = \infty \; ise \end{cases}$$

dir.

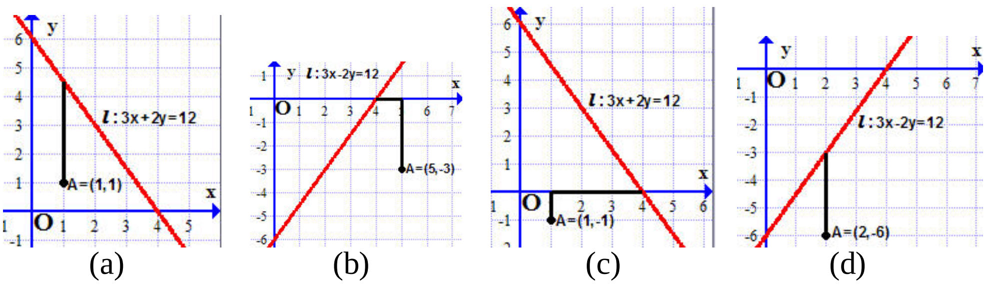
**Bir Noktanın Verilen Bir Doğruya Olan Uzaklığı İçin Örnekler:**

1. |m|<1 için



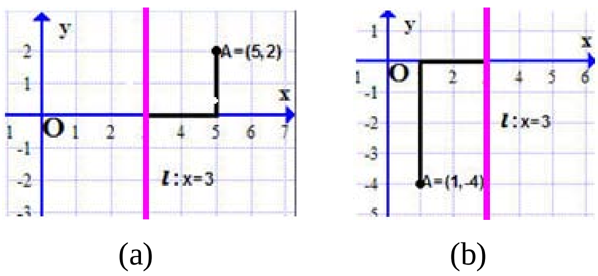

Şekil 3.7

2. |m|≥1 için




Şekil 3.8

3. | m|→∞ için




Şekil 3.9

# BÖLÜM 4

# ORTA KÜMELER

## 4.1 İki Noktanın $d_S$ – Orta Kümesi

$$d_s(A,B) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , x_1 = x_2 \ ise \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & , x_1 \neq x_2 \ ise \end{cases}$$

metriği ile döşenmiş analitik düzlemi yani s – düzlemini göz önüne alalım. $\mathbb{R}^2{}_s$ de $A = (x_1,\ y_1),\ B\ =\ (x_2,\ y_2)$ farklı iki nokta olmak üzere $A$ ve $B$ noktalarına eşit uzaklıktaki tüm noktaları bulmak istiyoruz.

**Tanım 4.1:** s – düzleminde $A = (x_1,\ y_1),\ B = (x_2,\ y_2)$ farklı iki nokta olmak üzere

$$\mathcal{O} = \{P = (x\,, y) \epsilon\, \mathbb{R}^2{}_s\ |d_s(P,\ A)\ =\ d_s(P,\ B)\}$$

kümesine $A$ ve $B$ noktalarının orta kümesi adı verilir.

$\mathcal{O}$ ile göstereceğimiz bu geometrik yere ait genel noktayı $P = (x,\ y)$ olarak gösterelim. Buna göre

$$d_s(P,A) = \begin{cases} |y - y_1| & , x = x_1 \text{ ise} \\ |x - x_1| + |y| + |y_1| & , x \neq x_1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$d_s(P,B) = \begin{cases} |y - y_2| & , x = x_2 \text{ ise} \\ |x - x_2| + |y| + |y_2| & , x \neq x_2 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Bundan dolayı, $A$, $B$ nin orta kümesi $\{P \,\big|\, d_s(P,\ A)\ =\ d_s(P,\ B)\}$ olacağından $A$, $B$ noktalarının orta kümesine ilişkin $x_1 = x_2$ ve $x_1 \neq x_2$ olmak üzere başlıca 2 durum vardır.

**I. Durum:** $x_1 = x_2$ olsun. Bu durumda $x = x_1$ve $x \neq x_1$ göre iki alt durum vardır.

**a)** x= $x_1$ olsun. Buna göre, $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ B)$ için $|y - y_1| = |y - y_2|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i) $y - y_1 \geq 0$ ve $y - y_2 \geq 0 \mapsto y - y_1 = y - y_2$ ise

$\mapsto y_1 = y_2$

$\mapsto A = B$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir.

$A \neq B$ olmalıdır. Çözüm kümemiz $\emptyset$ dir.

ii) $y - y_1 \geq 0$ ve $y - y_2 < 0 \mapsto y - y_1 = -y + y_2$

$\mapsto y = \frac{y_1 + y_2}{2} \mapsto (x, y) = (x_1, \frac{y_1 + y_2}{2}) \in \mho$ olarak elde edilir.

iii) $y - y_1 < 0$ ve $y - y_2 \geq 0 \mapsto -y + y_1 = y - y_2$ ise

$\mapsto -y + y_1 = y - y_2$

$\mapsto 2y = y_1 + y_2$

$\mapsto y = \frac{y_1 + y_2}{2} \mapsto (x, y) = (x_1, \frac{y_1 + y_2}{2}) \in \mho$ olarak elde edilir.

iv) $y - y_1 < 0$ ve $y - y_2 < 0 \mapsto -y + y_1 = -y + y_2$ ise

$\mapsto y_1 = y_2$

$\mapsto A = B$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir.

$A \neq B$ olmalıdır. Çözüm kümemiz $\emptyset$ dir.

**b)** $x \neq x_1$ olsun. Buna göre, $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ B)$ için $|x - x_1| + |y_1| + |y| = |x - x_2| + |y_2| + |y|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

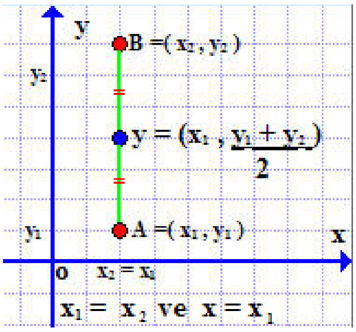
$\mapsto |y_1| = |y_2| \mapsto y_1 = \pm y_2$ dir.

**Açıklama 4.1.1 :** $y_1 = \pm y_2 \mapsto y_1 = y_2$ olduğunda $A = B$ olur ki bu bir çelişkidir. $y_1 = -y_2$ ise çözüm kümemiz $\{(x\ ,\ y) |\ x > x_1 \cup x_1 > x,\ y \epsilon\, \mathbb{R}\} \epsilon\, \mho$ olur.

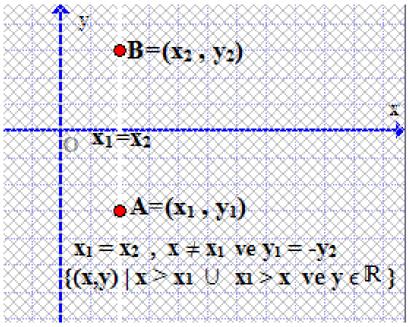
**Sonuç 4.1.1 :** s – düzleminde farklı iki $A = (x_1\, , y_1)$ ve $B = (x_1\, , y_2)$ noktalarına eşit uzaklıktaki noktaların kümesi,

$$\{P | d_s(P,\ A) = d_s(P,\ B)\} = \begin{cases} (x_1\, , \frac{y_1 + y_2}{2})\quad , & x = x_1\ ise \\ \{(x,\ y)\ |\ x > x_1 \cup x_1 > x\ ,\ y \epsilon\, \mathbb{R}\}, & x \neq x_1\ ise \end{cases}$$

dir.




Şekil 4.1.1




Şekil 4.1.2

**II. Durum:** $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu durumda $x = x_1$ ve $x_1 \neq x \neq x_2$ göre iki alt durum vardır. Bununla birlikte $x_1 \neq x \neq x_2$ durumununda $y_1 = y_2$ ve $y_1 \neq y_2$ göre iki alt durumu vardır.

**a)** $x = x_1$ olsun. Buna göre, $d_s(P, A) = d_s(P, B)$ için $|y - y_1| = |x_1 - x_2| + |y_2| + |y|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i) $y - y_1 \geq 0$ , $x_1 - x_2 > 0$ , $y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ iken

$\Rightarrow y - y_1 = x_1 - x_2 + y_2 + y$

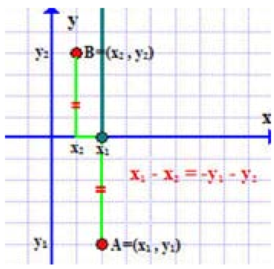
$\Rightarrow x_1 = x_2 - y_1 - y_2$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.2 :** $y - y_1 \geq 0$, $x_1 - x_2 > 0$, $y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $-y_1 - y_2 > 0$ dır. Aynı zamanda $-y_1 - y_2 > 0$ kısıtından $y_2 \geq 0$ olduğundan $-y_1 > y_2 \geq 0$ ve $-y_2 > y_1$ dır.

**Sonuç 4.1.2 :** $x_1 \neq x_2$, $x = x_1$ ve $y_1 < -y_2 \leq 0$ iken $y - y_1 \geq 0$, $x_1 - x_2 > 0$, $y_2 \geq 0$, ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun $x$ ekseni üzerinde kalan kısmıdır. Yani $\{(x, y) | x = x_1,\ y \geq 0\} \subseteq$ Ɵ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.3)




Şekil 4.1.3

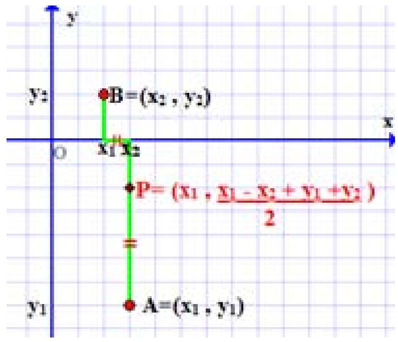
ii) $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ ise

$\Rightarrow y - y_1 = x_1 - x_2 + y_2 - y$

$\Rightarrow x_1 - 2y = x_2 - y_1 - y_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.3 :** $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = 2y - y_1 - y_2$ ‘ den $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $2y - y_1 - y_2 > 0$ dir. $2y - y_1 - y_2 > 0$ kısıtından $y > \frac{y_1+y_2}{2}$ dır. Aynı zamanda $2y - y_2 > y_1$ kısıtından $y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ olduğundan $y_1 < 0$ dır. $x_1 - 2y = x_2 - y_1 - y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.3 :** $x_1 \neq x_2, x = x_1$ ve $y > \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0, x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1, \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2))\epsilon$ Ʊ noktası vardır. Bu noktayı $P = (x_1, \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2))$ ile göstereceğiz. (Bkz. Şekil 4.1.4)




Şekil 4.1.4

iii) $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ iken

$\Rightarrow y - y_1 = x - x_2 - y_2 + y$

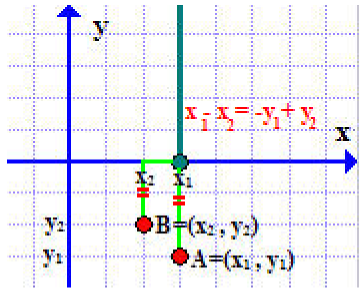
$\Rightarrow x_1 = x_2 - y_1 + y_2$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.4 :** $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $-y_1 + y_2 > 0$ dır. $-y_1 + y_2 > 0$ kısıtına bağlı olarak $0 > y_2 > y_1$ dir.

**Sonuç 4.1.4 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $0 > y_2 > y_1$ iken $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun x ekseni üzerinde kalan kısmıdır.
Yani $\{(x, y) | x = x_1,\ y \geq 0\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.5)




Şekil 4.1.5

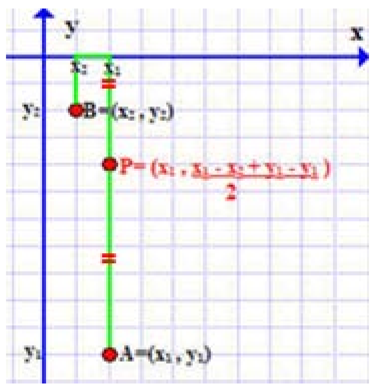
iv) $y - y_1 \geq 0\,, x_1 - x_2 > 0, y_2 < 0$ ve $y < 0$ iken

$\Rightarrow y - y_1 = x_1 - x_2 - y_2 - y$

$\Rightarrow x_1 - 2y = x_2 - y_1 + y_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.5** : $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = 2y - y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $2y - y_1 + y_2 > 0$ dir. $2y - y_1 + y_2 > 0$ kısıtından $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ dir. Aynı zamanda $2y + y_2 > y_1$ kısıtından $y_2 < 0$ ve $y < 0$ olduğundan $y_1 < 0$ ve $2y + y_2 > y_1$ dir. $x_1 - 2y = x_2 - y_1 - y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.5 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 > 0, y_2 < 0\,,\ y < 0,$ $y_1 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)) \in \mho$ noktası vardır. Bu nokta $P = (x_1,\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2))$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.6)




Şekil 4.1.6

v) $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ iken

$\Rightarrow y - y_1 = -x + x_2 + y_2 + y$

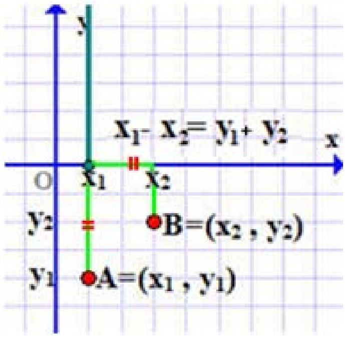
$\Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 + y_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.6 :** $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $y_1 + y_2 < 0$ dır. $y_1 + y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $y_1 < -y_2$ dir.

**Sonuç 4.1.6 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 < -y_2 \leq 0$ iken $y - y_1 \geq 0,\ -x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun $x$ ekseni üzerinde kalan kısmıdır. Yani $\{(x,y) |\ x = x_1,\ y \geq 0\ \ x,\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ ℧ yarı doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.1.7)




Şekil 4.1.7

vi) $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ iken

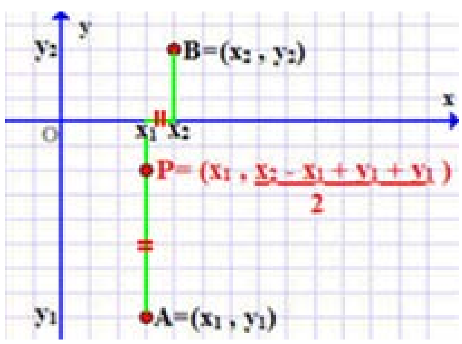
$\Rightarrow y - y_1 = -x_1 + x_2 + y_2 - y$

$\Rightarrow x_1 + 2y = x_2 + y_1 + y_2 \ \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.7 :** $y - y_1 \geq 0\ ,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -2y + y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $-2y + y_1 + y_2 < 0$ dır. Aynı zamanda $-2y + y_1 + y_2 < 0$ kısıtından $y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ olduğundan $y_1 < 0$ ve $2y - y_2 > y_1$ dir. $-2y + y_1 + y_2 < 0$ kısıtından $y > \frac{y_1 + y_2}{2}$ dir. $x_1 + 2y = x_2 + y_1 + y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.7 :** $x_1 \neq x_2\ ,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 + y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0\ ,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ ) \in$ ℧ noktası vardır. Bu nokta $P = (x_1,\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ )$ dir.

(Bkz. Şekil 4.1.8)




Şekil 4.1.8

vii) $y - y_1 \geq 0\,, x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ iken

$\Rightarrow y - y_1 = -x_1 + x_2 - y_2 + y$

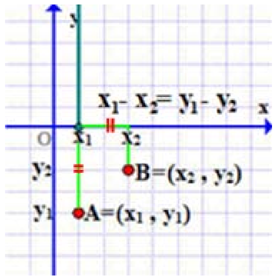
$\Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.8:** $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $y_1 - y_2 < 0$ dır. $y_1 + y_2 < 0$ $k$ısıtına bağlı olarak $y_1 < -y_2$ dir.

**Sonuç 4.1.8 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 < y_2 < 0$ iken $y - y_1 \geq 0\,,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun x ekseni üzerinde kalan kısmıdır.Yani $\{(x, y) |\ \mathrm{x} = \mathrm{x}_1,\ y \geq 0\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ Ꝺ yarı doğrusudur.

(Bkz. Şekil4.1.9)




Şekil 4.1.9

viii) $\mathrm{y} - \mathrm{y}_1 \geq 0\,,\ x_1 - x_2 < 0,\ \mathrm{y}_2 < 0$ ve $y < 0$ ise

$\Rightarrow y - y_1 = -x_1 + x_2 - y_2 - y$

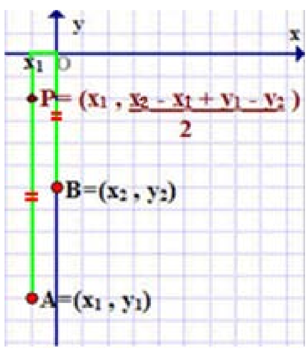
$\Rightarrow x_1 + 2y = x_2 + y_1 - y_2 \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.9 :** $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -2y + y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $-2y + y_1 - y_2 < 0$ dır. Aynı zamanda $-2y + y_1 - y_2 < 0$ kısıtından $y_2 < 0$ ve $y < 0$ olduğundan $y_1 < 0$ ve $2y + y_2 > y_1$ dir. $-2y + y_1 + y_2 < 0$ kısıtından $y < \frac{y_1 + y_2}{2}$ dir. $x_1 + 2y = x_2 + y_1 - y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.9 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1,\ y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0$, $x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)\,) \in$ Ꝺ noktası vardır.

Bu nokta $P = (x_1,\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\,)$ dir.

(Bkz. Şekil 4.1.10)




Şekil 4.1.10

ix) $y - y_1 < 0\,,\ x_1 - x_2\ \geq 0,\ y_2 \geq 0$ ve $\mathrm{y} \geq 0$ ise

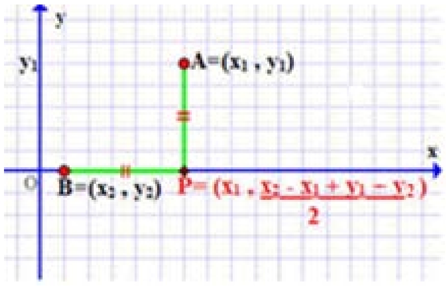
$\mapsto -y + y_1 = x_1 - x_2 + y_2 + y$

$\mapsto x_1 + 2y = x_2 + y_1 - y_2\ \ \mapsto y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.10 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -2y + y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $-2y + y_1 - y_2 > 0$ dır. Aynı zamanda $-2y + y_1 - y_2 > 0$ kısıtından $y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ olduğundan $y_1 > 2y + y_2 \geq 0$ dir. $-2y + y_1 - y_2 < 0$ kısıtından $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ dir . $x_1 + 2y = x_2 + y_1 - y_2$ eşitliğinden

$y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.10 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0\,,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\,) \in \mho$ noktası vardır. Bu nokta $P = (x_1,\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\,)$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.11)




Şekil 4.1.11

x) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2\ \geq 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ iken

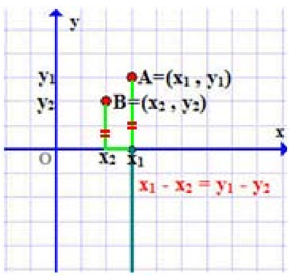
$\mapsto -y + y_1 = x_1 - x_2 + y_2 - y$

$\mapsto x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.11 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $y_1 - y_2 > 0$ dır. Aynı zamanda $y_1 - y_2 > 0$ kısıtından $y_2 \geq 0$ olduğundan $y_1 > y_2 \geq 0$ dır.

**Sonuç 4.1.11 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > y_2 \geq 0$ iken $y - y_1 < 0\,,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun $x$ ekseni altında kalan kısmıdır. Yani $\{(x, y)|x = x_1,\ y < 0\ \ x,\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.12)




Şekil 4.1.12

xi) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ ise

$\mapsto -y + y_1 = x_1 - x_2 - y_2 + y$

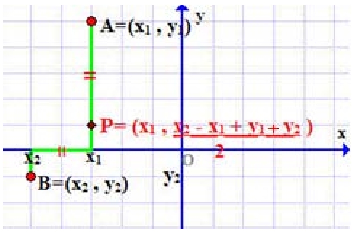
$\mapsto x_1 + 2y = x_2 + y_1 + y_2 \mapsto \mathrm{y} = \frac{1}{2}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 + \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.12 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -2y + y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $-2y + y_1 + y_2 > 0$ dır. Aynı zamanda $-2y + y_1 + y_2 > 0$ kısıtından $y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ olduğundan $y_1 > 0$ ve $y_1 > 2y + y_2$ dir. $-2y + y_1 + y_2 > 0$ kısıtından $y < \frac{y_1 + y_2}{2}$ dir . $x_1 + 2y = x_2 + y_1 + y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.12 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > 0$ ve $y < \frac{y_1 + y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0$, $x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)) \in \mathcal{O}$ noktası vardır.

Bu nokta $P = (\mathrm{x}_1,\ \frac{1}{2}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 + \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2))$ dir.

(Bkz. Şekil 4.1.13)




Şekil 4.1.13

xii) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ iken

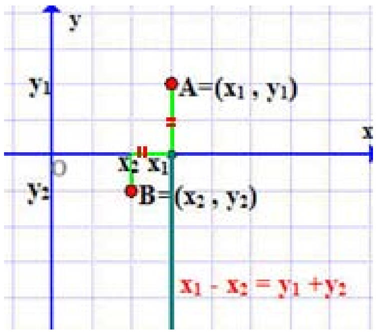
$\mapsto -y + y_1 = x_1 - x_2 - y_2 - y$

$\mapsto x_1 - x_2 = y_1 + y_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.13 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 > 0$ olduğundan $y_1 + y_2 > 0$ dır. Aynı zamanda $y_1 + y_2 > 0$ kısıtından $y_2 < 0$ olduğundan $y_1 > -y_2 > 0$ dır.

**Sonuç 4.1.13 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > -y_2 > 0$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun $x$ ekseni altında kalan kısmıdır. Yani $\{(x,\ y) | x = x_1,\ y < 0\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.14)




Şekil 4.1.14

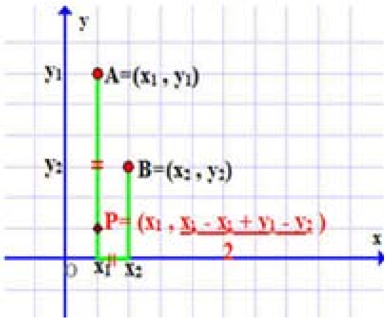
xiii) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise

$$\Rightarrow -y + y_1 = -x_1 + x_2 + y_2 + y$$

$$\Rightarrow x_1 - 2y = x_2 - y_1 + y_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2) \text{ dir.}$$

**Açıklama 4.1.14 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = 2y - y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $2y - y_1 + y_2 < 0$ dır. Aynı zamanda $2y - y_1 + y_2 < 0$ kısıtında $y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ olduğundan $y_1 > 2y + y_2 \geq 0$ dir. $2y - y_1 + y_2 > 0$ kısıtından $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ dir . $x_1 - 2y = x_2 - y_1 + y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.14 :** $x_1 \neq x_2, x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0\,,\ x_1 - x_2 < 0\,,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)) \in \mho$ noktası vardır. Bu nokta P= $(x_1,\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2))$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.15)




Şekil 4.1.15

xiv) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ olmak üzere

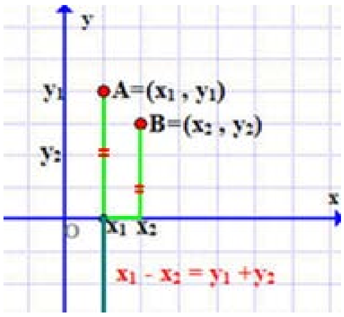
$$\Rightarrow -y + y_1 = -x_1 + x_2 + y_2 - y$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 + y_2$$

bulunur.

**Açıklama 4.1.15 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $-y_1 + y_2 < 0$ dır. Aynı zamanda $-y_1 + y_2 < 0$ kısıtından $y_2 \geq 0$ olduğundan $y_1 > y_2 \geq 0$ dır.

**Sonuç 4.1.15 :** $x_1 \neq x_2, x = x_1$ ve $y_1 > y_2 \geq 0$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun $x$ ekseni altında kalan kısmıdır. Yani $\{(x,\ y) \mid x = x_1,\ y < 0\ x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.16)




Şekil 4.1.16

xv) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ ise

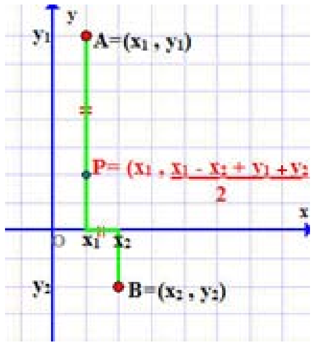
$$\Rightarrow -y + y_1 = -x_1 + x_2 - y_2 + y$$

$$\Rightarrow x_1 - 2y = x_2 - y_1 - y_2 \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2) \text{ dir.}$$

**Açıklama 4.1.16 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = 2y - y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $2y - y_1 - y_2 < 0$ dır. Aynı zamanda $2y - y_1 - y_2 < 0$ kısıtından $y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ olduğundan ve $y_1 > 2y - y_2 > 0$ dir. $2y - y_1 - y_2 < 0$ kısıtından $y < \frac{y_1 + y_2}{2}$ dir.

$x_1 - 2y = x_2 - y_1 - y_2$ eşitliğinden $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Sonuç 4.1.16 :** $x_1 \neq x_2$ , $x = x_1$ ve $y < \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0$ , $x_1 - x_2 < 0$, $y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yere ait bir tek $(x_1 , \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\,)\, \epsilon$ Ʊ noktası vardır. Bu nokta $P = (\mathrm{x}_1,\ \frac{1}{2}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)\,)$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.17)




Şekil 4.1.17

xvi) $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ olmak üzere

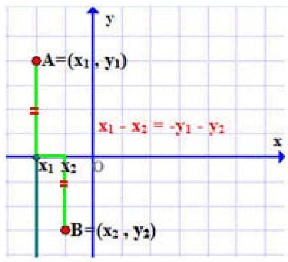
$$\Rightarrow -y + y_1 = -x_1 + x_2 - y_2 - y$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$$

elde edilir.

**Açıklama 4.1.17 :** $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$ eşitliğinde $x_1 - x_2 < 0$ olduğundan $-\ y_1 - y_2 < 0$ dır. Aynı zamanda $-y_1 - y_2 < 0$ kısıtından $y_2 < 0$ olduğundan $y_1 > -y_2 > 0$ dır.

**Sonuç 4.1.17 :** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > -y_2 > 0$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $x = x_1$ doğrusunun $x$ ekseni altında kalan kısmıdır. Yani $\{(x,\ y)|x = x_1,\ y < 0\ x,\ y\ \epsilon\ \mathbb{R}\} \subseteq$ Ʊ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.18)




Şekil 4.1.18

- $x = x_2$ iken $x_1$ ve $x_2$ nin rollerinin simetrik olması nedeniyle benzer durumlar söz konusudur.

**b)** $x_1 \neq x$ ve $x_2 \neq x$ olsun. Bu durumda $y_1 \neq y_2$ ve $y_1 = y_2$ olmak üzere iki alt durum vardır.

**A.** $y_1 \neq y_2$ olsun. Buna göre, $d_s(P,A) = d_s(P,B)$ için

$|x - x_1| + |y_1| + |y| = |x - x_2| + |y_2| + |y|$ ve gerekli sadeleştirmelerden sonra $|x - x_1| + |y_1| = |x - x_2| + |y_2|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i) $x - x_1 > 0, y_1 \geq 0, x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ ise

$\mapsto x - x_1 + y_1 = x - x_2 + y_2$

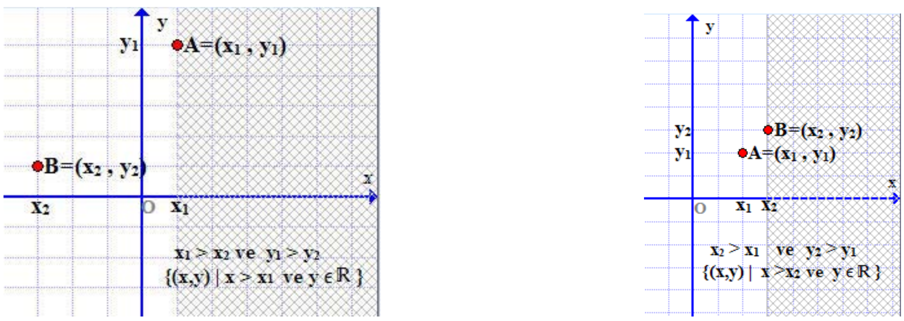
$\mapsto y_1 - y_2 = x_1 - x_2$

bulunur.

**Açıklama 4.1.18 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$ eşitliğinde $x_1 \geq x_2$ ise $y_1 \geq y_2$ dir. Ya da $x_2 \geq x_1$ ise $y_2 \geq y_1$ dir.

**Sonuç 4.1.18 :** $x_1 \neq x$, $x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 > x_2$ ise $y_1 > y_2$ için $\{(x,y) | x > x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \circlearrowright$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. Ya da $x_2 > x_1$ ise $y_2 > y_1$ için $\{(x,y) | x > x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \circlearrowright$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_1 = x_2$ ise $y_1 = y_2$, $A = B$ olurdu oysaki $A \neq B$ dir. Dolayısıyla çözüm kümemiz $\emptyset$ dir.

Aşağıdaki şekilde bu durumlar sırasıyla görülmektedir.




(a) (b)

Şekil 4.1.19

ii) $\quad x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ ise

$$\mapsto x - x_1 + y_1 = x - x_2 - y_2$$

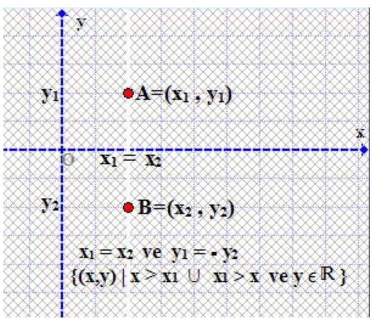
$$\mapsto x_2 - x_1 = -y_2 - y_1$$

olur.

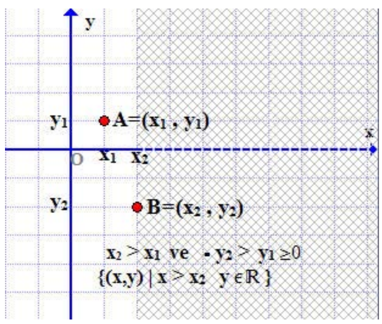
**Açıklama 4.1.19 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0, x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_2 - x_1 = -y_2 - y_1$ eşitliğinde $x_2 \geq x_1$ ise $-y_2 \geq y_1 \geq 0$ dir. Ya da $x_1 \geq x_2$ ise $y_1 \geq -y_2 \geq 0$ dir.

**Sonuç 4.1.19 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 = x_2$ ise $y_1 = -y_2$ için $\{(x,\ y) |\ x > x_1 \cup x_1 > x$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_2 > x_1$ ise $-y_2 > y_1 \geq 0$ için $\{(x,\ y) |\ x > x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölge - sidir. $x_1 > x_2$ ise $y_1 > -y_2 > 0$ için $\{(x,\ y) |\ x > x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

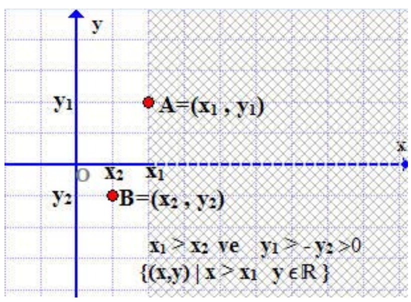
Aşağıdaki şekilde bu durumlar sırasıyla görülmektedir.




(a)




(b)




(c)

Şekil 4.1.20

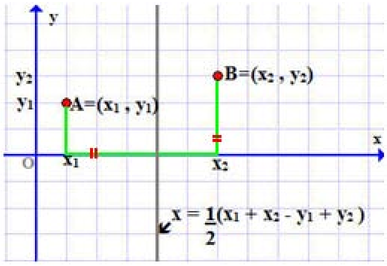
iii) $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ olmak üzere

$\mapsto x - x_1 + y_1 = -x + x_2 + y_2$

$\mapsto 2x = x_1 + x_2 - y_1 + y_2 \mapsto x = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2 - y_1 + y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.20 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$ eşitliğinde $x = \frac{1}{2}(\,x_1 + x_2 - y_1 + y_2)$ dir. Yukarıda yer alan kısıtlardan $x_2 > x > x_1$ olduğu açıktır.

**Sonuç 4.1.20 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0\,, y_1 \geq 0, x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.21)




Şekil 4.1.21

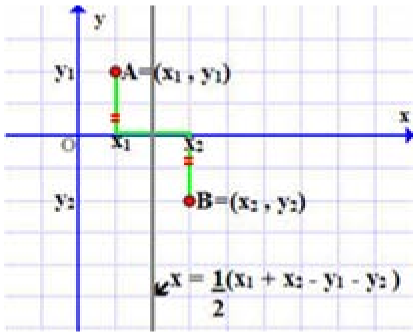
iv) $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0, x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ ise

$\mapsto x - x_1 + y_1 = -x + x_2 - y_2$

$\mapsto 2x = x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \mapsto x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.21 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$ eşitliğinden $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$ dir. Yukarıda yer alan kısıtlardan açıkça $x_2 > x > x_1$ dir

**Sonuç 4.1.21 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0\,, y_1 \geq 0, x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.22)




Şekil 4.1.22

v) $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0, x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ için

$\Rightarrow x - x_1 - y_1 = x - x_2 + y_2$

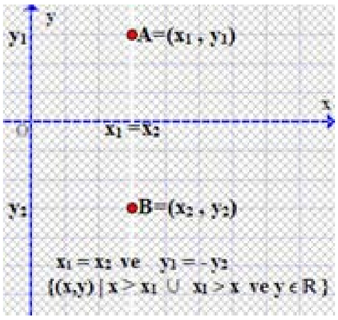
$\Rightarrow x_2 - x_1 = y_1 + y_2$

bulunur.

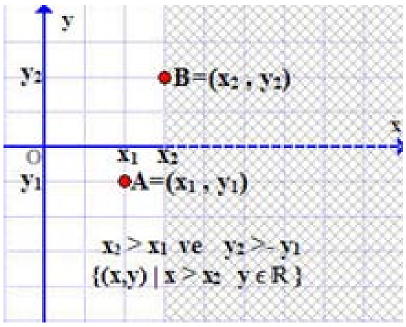
**Açıklama 4.1.22 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_2 - x_1 = y_1 + y_2$ eşitliğinde $x_2 \geq x_1$ ise $y_2 \geq -y_1$ dir. Ya da $x_1 \geq x_2$ ise $-y_1 \geq y_2$ dir.

**Sonuç 4.1.22 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 = x_2$ ise $y_1 = -y_2$ için $\{(x,\ y)|x > x_1 \cup x_1 > x$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ Ʊ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_2 > x_1$ ise $y_2 > -y_1 > 0$ için $\{(x,\ y)|x > x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ Ʊ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_1 > x_2$ ise $y_1 < -y_2 \leq 0$ için $\{(x,\ y)|x > x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ Ʊ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

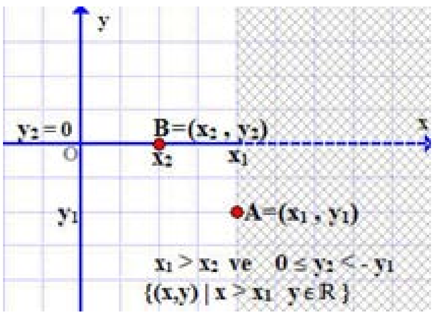
Bu durumlar aşağıdaki şekilde sırasıyla görülmektedir.




(a)




(b)




(c)

Şekil 4.1.23

vi) $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ ise

$\mapsto x - x_1 - y_1 = x - x_2 - y_2$

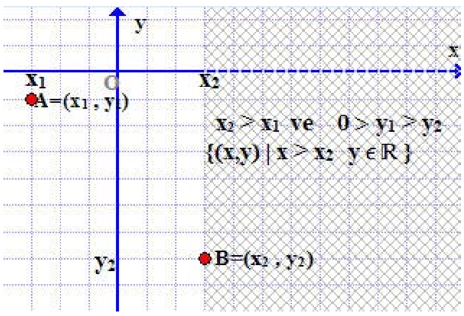
$\mapsto x_2 - x_1 = y_1 - y_2$

olur.

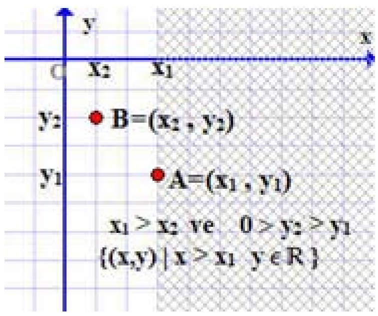
**Açıklama 4.1.23 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_2 \geq x_1$ ise $y_1 \geq y_2$ dir. Ya da $x_1 \geq x_2$ ise $y_2 \geq y_1$ dir.

**Sonuç 4.1.23 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 = x_2$ ise $y_1 = y_2$ için $A = B$ olurdu. Oysaki $A \neq B$ dir. Dolayısıyla çözüm kümemiz $\emptyset$ dir. $x_2 > x_1$ ise $0 > y_1 > y_2$ için $\{(x,\ y) |\ x > x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_1 > x_2$ ise $y_1 < y_2 < 0$ için $\{(x,\ y) |\ x > x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

Bu durumlar aşağıdaki şekilde sırasıyla görülmektedir.




(a)




(b)

Şekil 4.1.24

vii) $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ ise

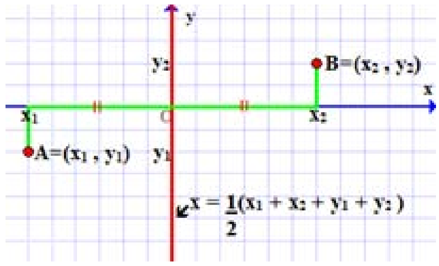
$\Rightarrow x - x_1 - y_1 = -x + x_2 + y_2$

$\Rightarrow 2x = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.24 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = y_1 + y_2$ eşitliğinden $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

Yukarıda yer alan kısıtlardan $x_2 > x > x_1$ olduğu açıkça görülür.

**Sonuç 4.1.24 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2), y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.25)




Şekil 4.1.25

viii) $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$

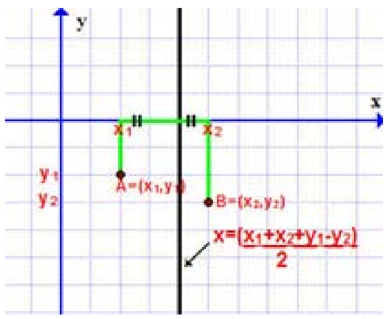
$\Rightarrow x - x_1 - y_1 = -x + x_2 - y_2$

$\Rightarrow 2x = x_1 + x_2 + y_1 - y_2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.25 :** $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinde $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

Yukarıda yer alan kısıtlardan $x_2 > x > x_1$ dir.

**Sonuç 4.1.25 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.26)




Şekil 4.1.26

ix) $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ olmak üzere

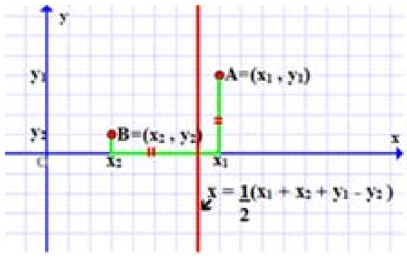
$\mapsto -x + x_1 + y_1 = x - x_2 + y_2$

$\mapsto 2x = x_1 + x_2 + y_1 - y_2 \mapsto x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.26 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2)$ dir.

Yukarıda yer alan kısıtlardan dolayı açıkça $x_1 > x > x_2$ dir.

**Sonuç 4.1.26 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.27)




Şekil 4.1.27

x) $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ ise

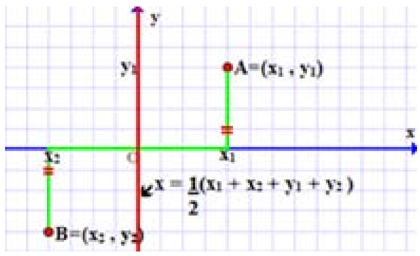
$\mapsto -x + x_1 + y_1 = x - x_2 - y_2$

$\mapsto 2x = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \mapsto x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.27 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ dir.

Yukarıda yer alan kısıtlardan $x_1 > x > x_2$ dir.

**Sonuç 4.1.27 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0, x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.28)




Şekil 4.1.28

xi) $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ ise

$\mapsto -x + x_1 + y_1 = -x + x_2 + y_2$

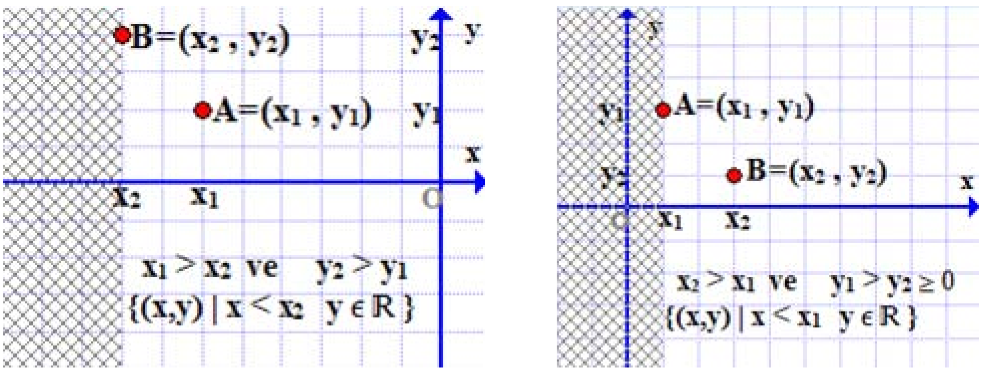
$\mapsto x_1 - x_2 = y_2 - y_1$

elde edilir.

**Açıklama 4.1.28 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$ eşitliğinden $x_1 \geq x_2$ ise $y_2 \geq y_1$ dir. Ya da $x_2 \geq x_1$ ise $y_1 \geq y_2$ dir.

**Sonuç 4.1.28 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 = x_2$ ise $y_1 = y_2$ olduğundan $A$=$B$ olurdu oysaki $A \neq B$ dir. Dolayısıyla çözüm kümemiz $\emptyset$ dir. $x_1 > x_2$ ise $y_2 > y_1 \geq 0$ için $\{(x,\ y) | x < x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \circlearrowright$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_2 > x_1$ ise $y_1 > y_2 \geq 0$ için $\{(x,\ y) | x < x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \circlearrowright$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

Bu durumlar aşağıdaki şekilde sırasıyla görülmektedir.




(a) (b)

Şekil 4.1.29

xii) $x - x_1 < 0\,, y_1 \geq 0,\; x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ ise

$\mapsto - x + x_1 + y_1 = -x + x_2 - y_2$

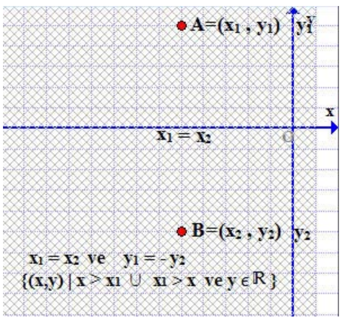
$\mapsto x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$

olur.

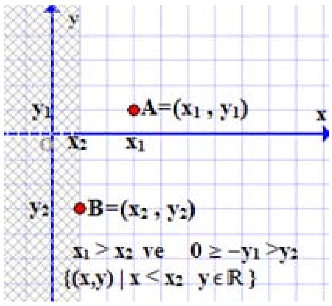
**Açıklama 4.1.29 :** $x - x_1 < 0,\; y_1 \geq 0,\; x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = -y_2 - y_1$ eşitliğinde $x_1 \geq x_2$ ise $-y_2 \geq y_1$ dir. Ya da $x_2 \geq x_1$ ise $y_1 \geq -y_2$ dir.

**Sonuç 4.1.29 :** $x_1 \neq x,\;\; x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\; y_1 \geq 0,$ $\mathrm{x} - \mathrm{x}_2 < 0$ ve $\mathrm{y}_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ ise $\mathrm{y}_1 = -\mathrm{y}_2$ için $\{(x,\; y)|x > x_1 \cup\; x_1 > x$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_1 > x_2$ ise $0 \geq -y_1 > y_2$ için $\{(x,\; y)|x < x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_2 > x_1$ ise $0 > y_2 > -y_1$ için $\{(x,\; y)|x < x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

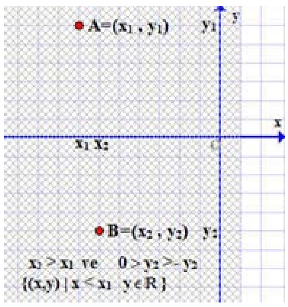
Bu durumlar aşağıdaki şekilde sırasıyla görülmektedir.




(a)




(b)




(c)

Şekil 4.1.30

xiii) $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ ise

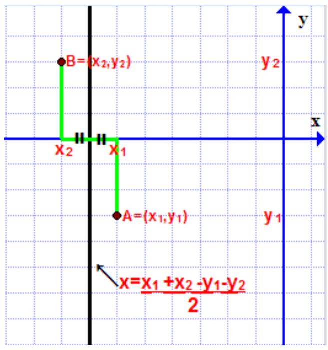
$\mapsto -x + x_1 - y_1 = x - x_2 + y_2$

$\mapsto 2x = x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \mapsto x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$ dir.

**Açıklama 4.1.30 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$ eşitliğinden $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$ dir.

Yukarıda yer alan kısıtlardan $x_1 > x > x_2$ olduğu açıkça görülür..

**Sonuç 4.1.30 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$iken $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtna bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ Ʊ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.31)




Şekil 4.1.31

xiv) $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0, x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$

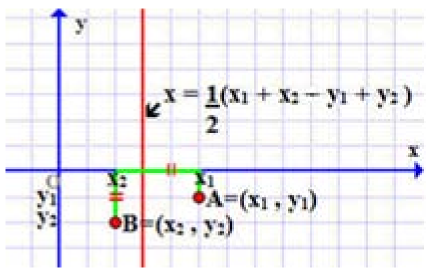
$\mapsto -x + x_1 - y_1 = x - x_2 - y_2$

$\mapsto 2x = x_1 + x_2 - y_1 + y_2 \mapsto x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2)$dir.

**Açıklama 4.1.31 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $2x - x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$ eşitliğinden $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2)$dir.

Yukarıda yer alan kısıtlardan açıkça $x_1 > x > x_2$ dir.

**Sonuç 4.1.31 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz geometrik yer $\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2),\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq$ Ʊ doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.1.32)




Şekil 4.1.32

xv) $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ olmak üzere

$$\Rightarrow - x + x_1 - y_1 = -x + x_2 + y_2$$

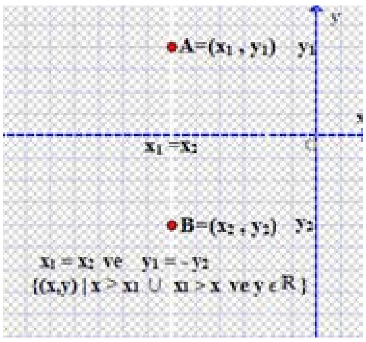
$$\Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 + y_2$$

elde edilir.

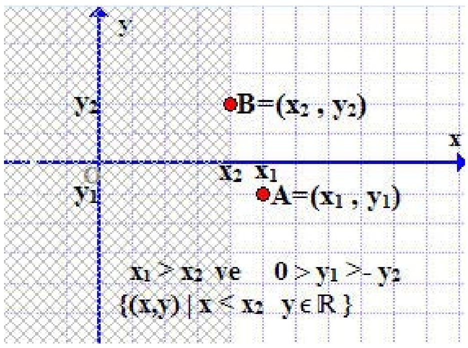
**Açıklama 4.1.32 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_2 + y_1$ eşitliğinden $x_1 \geq x_2$ ise $y_1 \geq -y_2$ dir. Ya da $x_2 \geq x_1$ ise $-y_2 \geq y_1$ dir.

**Sonuç 4.1.32 :** $x_1 \neq x$ , $x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 = x_2$ ise $y_1 = -y_2$ için $\{(x,\ y)|x > x_1 \cup x_1 > x$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_1 > x_2$ ise $y_1 > -y_2$ için $\{(x,\ y)|x < x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_2 > x_1$ ise $y_1 < -y_2 \leq 0$ için $\{(x,\ y)|x < x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

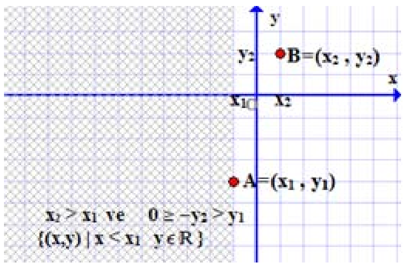
Aşağıdaki şekilde bu durumlar sırası ile gösterilmektedir.




(a)




(b)




(c)

Şekil 4.1.33

xvi) $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ ise

$\Rightarrow -x + x_1 - y_1 = -x + x_2 - y_2$

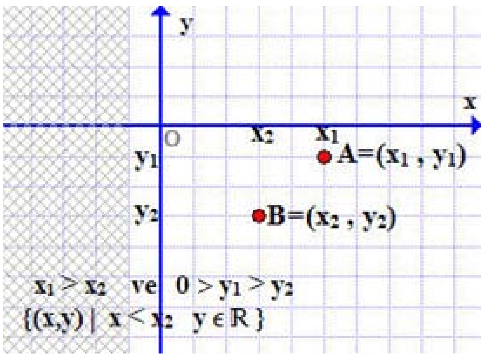
$\Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

olur.

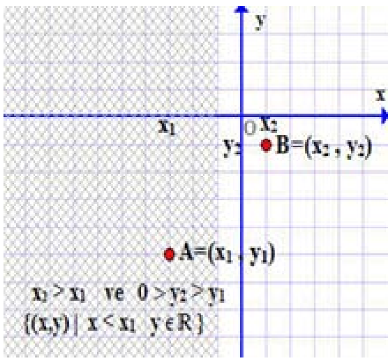
**Açıklama 4.1.33 :** $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0, x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_1 \geq x_2$ ise $y_1 \geq y_2$ dir. Ya da $x_2 \geq x_1$ ise $y_2 \geq y_1$ dir.

**Sonuç 4.1.33 :** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0, x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak $x_1 = x_2$ ise $y_1 = y_2$ olduğundan $A=B$ olurdu oysaki $A \neq B$ dir. Dolayısıyla çözüm kümemiz $\emptyset$ dir. $x_1 > x_2$ ise $y_1 > y_2$ için $\{(x,\ y) | x < x_2$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir. $x_2 > x_1$ ise $y_1 < y_2 < 0$ için $\{(x,\ y) | x < x_1$ ve $y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ koşulunu sağlayan taralı bölgesidir.

Aşağıdaki şekilde bu durumlar sırası ile gösterilmektedir.




(a)




(b)

Şekil 4.1.34

**B.** $y_1 = y_2$ olsun. Buna göre, $d_s(P,A) = d_s(P,B)$ için

$|x - x_1| + |y_1| + |y| = |x - x_2| + |y_2| + |y|$ dir. Verilen kısıtlar altında

$|x - x_1| = |x - x_2|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i) $x - x_1 \geq 0$ ve $x - x_2 \geq 0 \;\Rightarrow x - x_1 = x - x_2$ ise

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow A = B$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir.

$A \neq B$ olmalıdır. Çözüm kümemiz $\emptyset$ dır.

ii) $x - x_1 \geq 0$ ve $x - x_2 < 0 \;\Rightarrow x - x_1 = -x + x_2$

$\Rightarrow x = \frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow (x,y) = (\frac{x_1+x_2}{2},\; y) \in \mho$ bulunur.

iii) $x - x_1 < 0$ ve $x - x_2 \geq 0 \;\Rightarrow -x + x_1 = x - x_2$

$\Rightarrow x = \frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow (x,y) = (\frac{x_1+x_2}{2},\; y) \in \mho$ olur.

iv) $x - x_1 < 0$ ve $x - x_2 < 0 \;\Rightarrow x - x_1 = x - x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

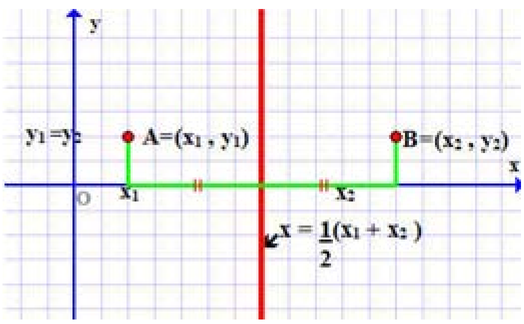
$\Rightarrow A = B$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir.

$A \neq B$ olmalıdır. Çözüm kümemiz $\emptyset$ dir.

**Sonuç 4.1.34 :** $x_1 \neq x,\; x_2 \neq x$ ve $y_1 = y_2$ iken

$\{(x,\; y)|\; x_1 \neq x \neq x_2$ ve $y_1 = y_2,\; \frac{x_1+x_2}{2} = x,\; y\in \mathbb{R}\} \subseteq \mho$ doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.1.35)




Şekil 4.1.35

# İki Noktanın $d_s$ – Orta Kümesi ile ilgili Genel sonuçlar

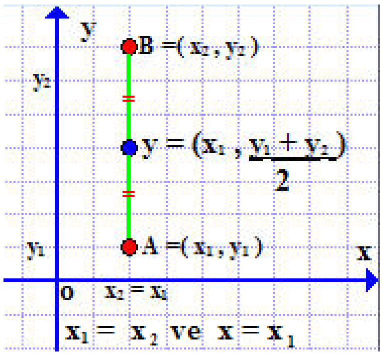
$x_1 = x_2$ iken $x = x_1$ veya $x \neq x_1$ halleri ile $x_1 \neq x_2$ iken $x = x_1$ veya $x_1 \neq x$ ve $x_2 \neq x$ kısıtı altında $y_1 \neq y_2$ veya $y_1 = y_2$ hallerinin çözüm kümelerinin birleşiminden elde edilen s – orta kümelerinin grafikleri şöyledir.

**1.** $x_1 = x_2$ ve $x = x_1$

$y_1$ ve $y_2$ aynı işaretli olduğunda

$\{(x_1,\ \frac{y_1+y_2}{2})\} \in$ Ʊ dir. s – orta kümesi

Ʊ $=\{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{y_1+y_2}{2}\}$ ve grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.36)




Şekil 4.1.36

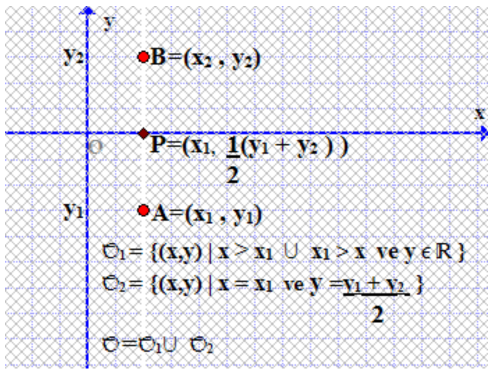
**2.** $x_1 = x_2$ ve $x \neq x_1$ iken $y_1 = -y_2$ ise s – orta kümesi

Ʊ$_1 = \{(x,\ y) \mid x > x_1 \cup x_1 > x,\ y \in \mathbb{R}\}$

**çözüm kümesi** ile $x_1 = x_2$ ve $x = x_1$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz

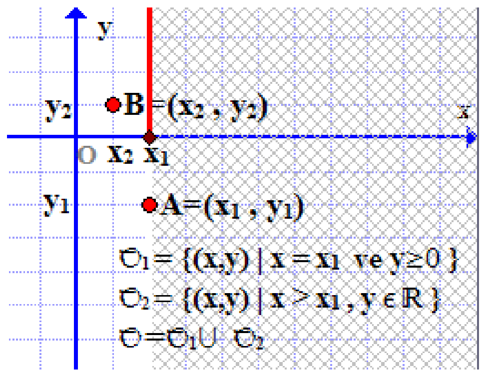
Ʊ$_2 = \{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{y_1+y_2}{2}\}$

**çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi Ʊ = Ʊ$_1$ ∪ Ʊ$_2$ ve grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.37)




Şekil 4.1.37

**3.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 < -y_2 \leq 0$ iken $y - y_1 \geq 0, x_1 - x_2 > 0, y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise s – orta kümesi Ʊ$_1 = \{(x,\ y) \mid x = x_1,\ y \geq 0\}$ **çözüm kümesi** ile $x_1 \neq x, x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_1 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_2 - x_1 = y_1 + y_2$ eşitliğinden $x_1 > x_2$ ve $y_1 < -y_2 \leq 0$ ise s – orta kümesi Ʊ$_2 = \{(x,\ y) \mid x > x_1\ , y \epsilon \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s- orta kümesi Ʊ = Ʊ$_1 \cup$ Ʊ$_2$ ve grafiğide aşağıdaki gibidir. (Bkz Şekil 4.1.38)

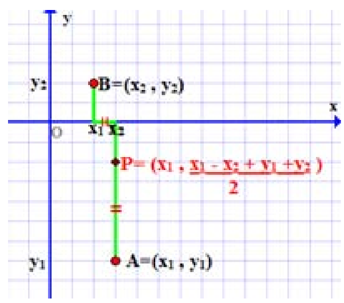



Şekil 4.1.38

**4.** $x_1 \neq x_2, x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 + y_2}{2}$ iken $y - y_2\ \geq 0$ , $x_1 - x_2 > 0, y_2 \geq 0, y_1 < 0$ ve $y < 0$ ise s – orta kümesi

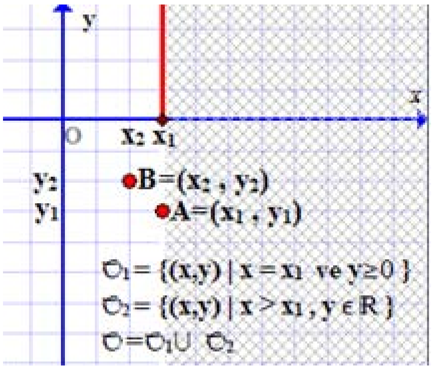
Ʊ $= \{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\}$

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz Şekil 4.1.39)




Şekil 4.1.39

**5.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $0 > y_2 > y_1$ iken $y - y_1 \geq 0$ , $x_1 - x_2 > 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ ise s – orta kümesi $\mho_1$ = {$(x, y)$ | $x = x_1$, y ≥ 0 } **çözüm kümesi** ile $x_1 \neq x$ , $x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 < 0, x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$ eşitliğinden $x_1 > x_2$ ise $y_1 < y_2 < 0$ ise s – orta kümesi $\mho_2 = \{(x,\ y) |\ x > x_1,\ y \epsilon\ \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s - orta kümesi $\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ ve grafiğide aşağıdaki gibidir. (Bkz Şekil 4.1.40)

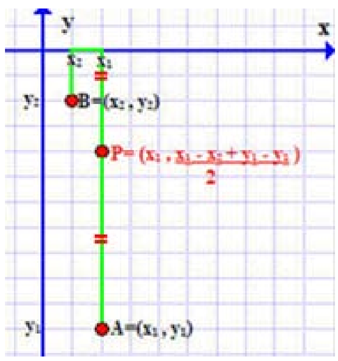



Şekil 4.1.40

**6.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0$, $x_1 - x_2 > 0, y_2 < 0, y_1 < 0$ ve $y < 0$ ise s– orta kümesi

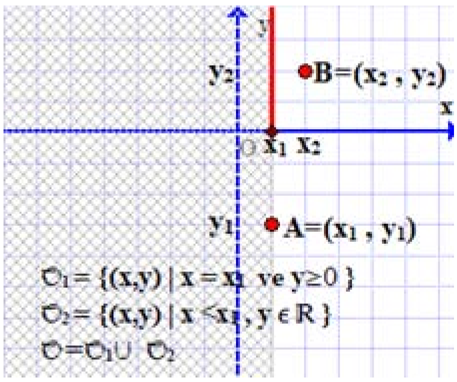
$\mho$ ={$(x,\ y)$ | $x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)$ }

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.41)



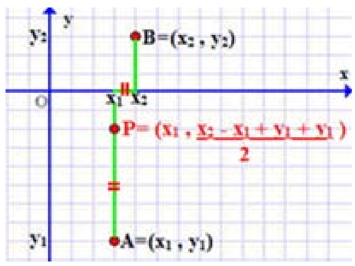

Şekil 4.1.41

**7.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 < -y_2 \leq 0$ iken $y - y_1 \geq 0,\ \ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_1 = \{(x, y) | \ x = x_1, y \geq 0\ \}$ **çözüm kümesi** ile $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 < 0, x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = y_1 + y_2$ eşitliğinden $x_2 > x_1$ ise $y_1 < -\ y_2 \leq 0$ ise s– orta kümesi $Ʊ_2 = \{(x,\ y) |\ x < x_1,\ y \epsilon\ \mathbb{R}\ \}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi $Ʊ = Ʊ_1 \cup Ʊ_2$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.42)



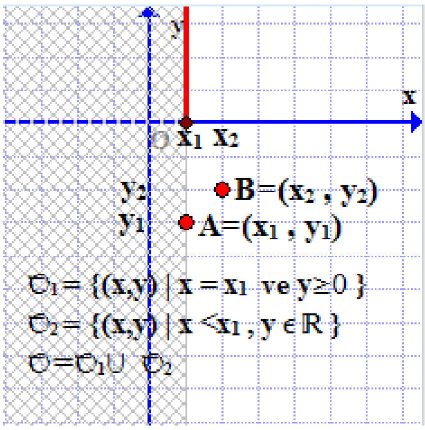

Şekil 4.1.42

**8.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0, x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ = \{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ \}$ grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.43)



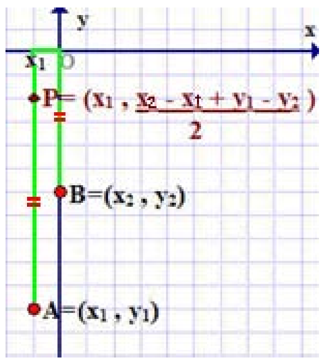

Şekil 4.1.43

**9.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 < \ y_2 < 0$ iken $y - y_1 \geq 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y \geq 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_1$ = $\{(x,\ y) |\ x = x_1,\ y \geq 0\}$ **çözüm kümesi** ile $x_1 \neq x$, $x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0$ , $y_1 < 0$, $x - x_2 < 0$ ve $y_2 <$ 0 kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_2 > x_1$ ise $y_1 < y_2 < 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_2$ = $\{(x,\ y) |\ x < x_1,\ y \epsilon\ \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi Ʊ = $Ʊ_1 \cup Ʊ_2$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.44)



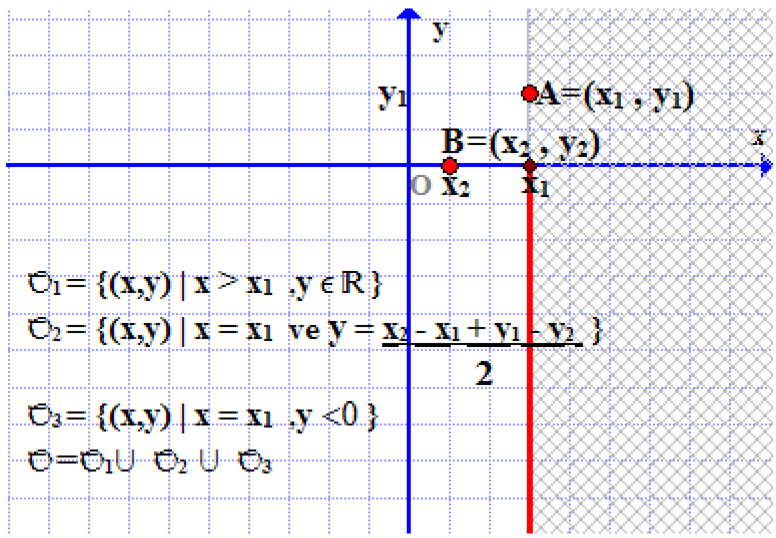

Şekil 4.1.44

**10.** $x_1 \neq x_2, x = x_1, y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 \geq 0$, $x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ise s – orta kümesi Ʊ =$\{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\}$ grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.45)



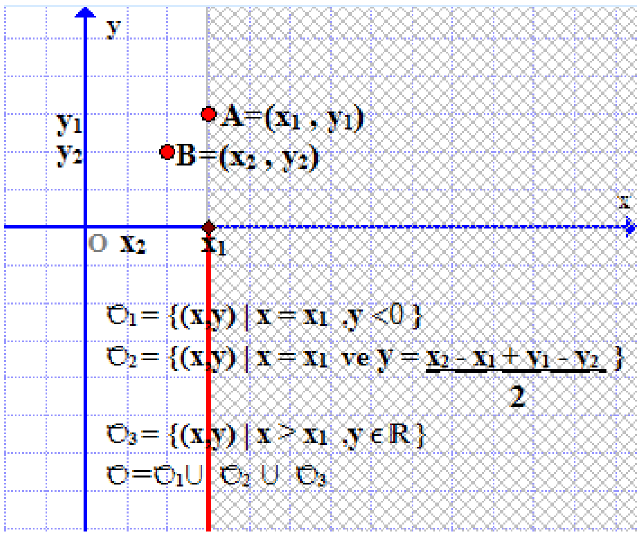

Şekil 4.1.45

**11.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y = 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_1$ $=\{(x,\ y) |\ x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\}$ **çözüm kümesi**, $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_1 > x_2$ ise $y_1 > y_2$ ise s– orta kümesi $Ʊ_2 = \{(x,\ y) |\ x > x_1,\ y \epsilon \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesi** ve $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > y_2 \geq 0$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_3 = \{(x,\ y) |\ x = x_1,\ y < 0\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi $Ʊ = Ʊ_1 \cup Ʊ_2 \cup Ʊ_3$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.46)




Şekil 4.1.46

**12.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > y_2 \geq 0$ iken $y - y_1 < 0,\ \ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_1 = \{(x,\ y)|\ x = x_1,\ y < 0\}$ **çözüm kümesi** , $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y = 0$ ise s – orta kümesi $Ʊ_2$ $=\{(x,\ y)\ |\ x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\}$ **çözüm kümesi** ve $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_1 > x_2$ ise $y_1 > y_2$ ise s – orta kümesi $Ʊ_3 = \{(x,\ y)|\ x > x_1,\ y \epsilon \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi $Ʊ = Ʊ_1 \cup Ʊ_2 \cup Ʊ_3$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.47)



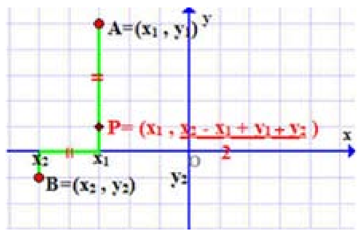

Şekil 4.1.47

**13.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ iken $y_1 > 0,\ y < \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 > 0,$

$y_2 < 0$ ve $y > 0$ ise s– orta kümesi

Ծ$=\{(x,\ y) |\ x = x_1,\ y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\}$

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.48)




Şekil 4.1.48

**14.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > -y_2 > 0$ iken $y - y_1 < 0,\ \ x_1 - x_2 > 0,\ \ y_2 < 0$

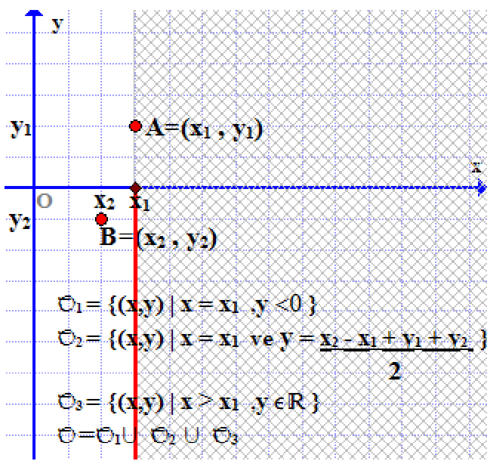
ve $y < 0$ ise s – orta kümesi Ծ$_1 = \{(x,\ y) |\ x = x_1, y < 0)$ **çözüm kümesi**,

$x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > 0$ ve $y < \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0,\ \ x_1 - x_2 > 0,$

$y_2 < 0$ ve $y = 0$ ise s – orta kümesi

Ծ$_2$ $=\{(x,\ y) |\ x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ \}$ **çözüm kümesi** ve

$x_1 \neq x\ ,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 > 0,\ \ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_2 - x_1 = -y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_1 > x_2$ ise $y_1 > -y_2 > 0$ ise s– orta kümesi Ծ$_3 = \{(x,\ y) |\ x > x_1,\ y \epsilon\ \mathbb{R}\ \}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi Ծ = Ծ$_1$ ∪ Ծ$_2$ ∪ Ծ$_3$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.49)




Şekil 4.1.49

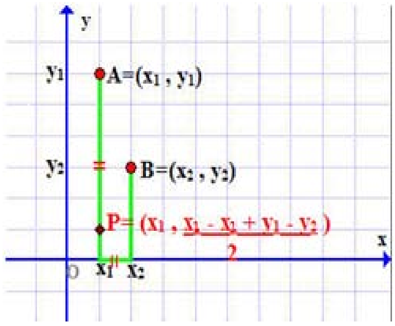
**15.** $x_1 \neq x_2$ , $x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken

$y - y_1 < 0$ , $x_1 - x_2 < 0$ , $y_2 \geq 0$ ve $y > 0$

ise s– orta kümesi

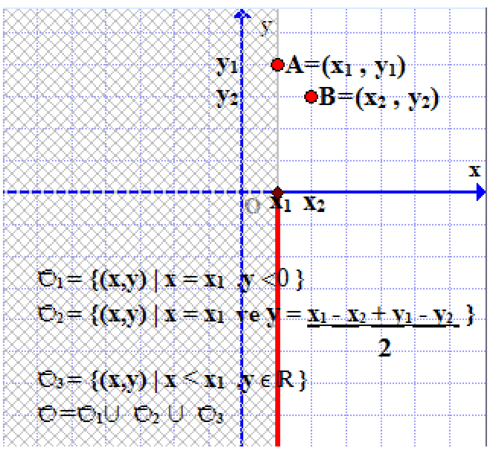
Ʊ $=\{(x,\ y) \mid x = x_1,\ y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)\}$

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.50)




Şekil 4.1.50

**16.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > y_2 \geq 0$ iken $y - y_1 < 0,\ \ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y < 0$ ise s – orta kümesi Ʊ$_1 = \{(x,\ y) \mid x = x_1,\ y < 0\}$ **çözüm kümesi**, $x_1 \neq x_2$, $x = x_1$ ve $y > \frac{y_1 - y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0,\ \ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 \geq 0$ ve $y = 0$ ise s – orta kümesi Ʊ$_2 = \{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)\}$ **çözüm kümesi** ve $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 \geq 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$ eşitliğinden $x_2 > x_1$ ve $y_1 > y_2 \geq 0$ ise s – orta kümesi Ʊ$_3 = \{(x,\ y) \mid x < x_1,\ y \epsilon \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi Ʊ = Ʊ$_1$ ∪ Ʊ$_2$ ∪ Ʊ$_3$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.51)



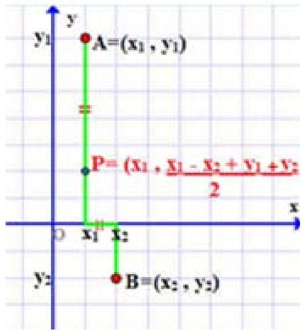

Şekil 4.1.51

**17.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y < \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0$,

$x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y >\ 0$ ise s – orta kümesi

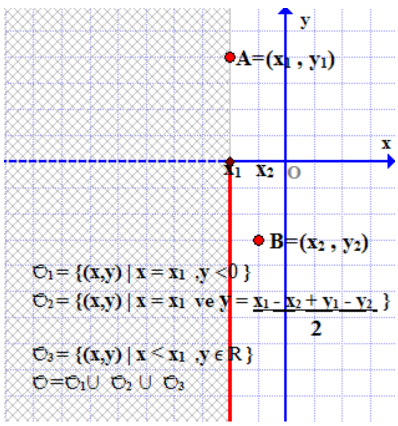
$\mho = \{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\ \}$

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.52)



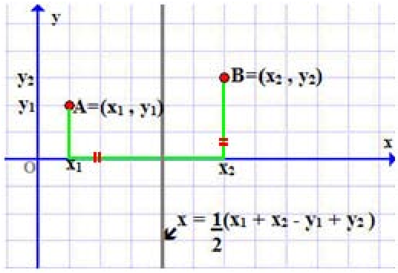

Şekil 4.1.52

**18.** $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y_1 > -y_2 > 0$ iken $y - y_1 < 0,\ \ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ise s– orta kümesi $\mho_1 = \{(x,\ y) \mid x = x_1, y < 0\}$ **çözüm kümesi**, $x_1 \neq x_2,\ x = x_1$ ve $y < \frac{y_1+y_2}{2}$ iken $y - y_1 < 0,\ x_1 - x_2 < 0,\ y_2 < 0$ ve $y =\ 0$ ise s – orta kümesi $\mho_2 = \{(x,\ y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\ \}$ **çözüm kümesi** ve $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 < 0$ ve $y_2 < 0$ kısıtına bağlı olarak elde ettiğimiz $x_1 - x_2 = -y_1 - y_2$ eşitliğinden $x_2 > x_1$ ve $0 > y_2 > -y_1$ ise s – orta kümesi $\mho_3 = \{(x,\ y) \mid x < x_1,\ y \in \mathbb{R}\}$ **çözüm kü - mesinin** bileşiminden elde edilen s – orta kümesi $\mho = \mho_1 \cup \mho_2 \cup \mho_3$ ve grafiği de aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.53)



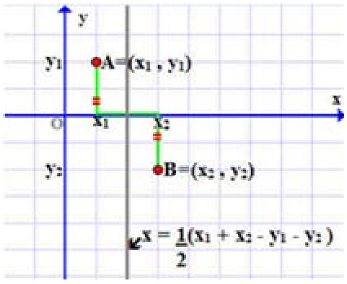

Şekil 4.1.53

**19.** $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq\ y_2$ iken $x - x_1\ > 0,$
$y_1 \geq 0,\ \ x - x_2\ < 0$ ve $y_2\ \geq 0$ ise
s – orta kümesi
Ơ = $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2),\ \ y \in \mathbb{R}\}$
grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.54)



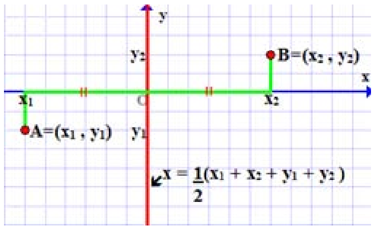

Şekil 4.1.54

**20.** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $\ x - x_1\ > 0, y_1 \geq 0,$
$x - x_2\ < 0$ ve $y_2 < 0$ ise s – orta kümesi
Ơ= $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2),\ \ y \in \mathbb{R}\}$
grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.55)



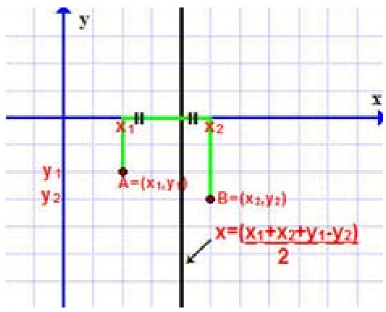

Şekil 4.1.55

**21.** $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $\ x - x_1\ > 0,$
$y_1 < 0,\ \ x - x_2\ < 0$ ve $y_2\ \geq 0\ $ ise s – orta kümesi
Ơ = $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2),\ \ y \in \mathbb{R}\}$
grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.56)




Şekil 4.1.56

**22.** $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1\ > 0,$
$y_1 < 0,\ \ x - x_2\ < 0$ ve $y_2 < 0$ ise
s – orta kümesi
Ơ = $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2),\ \ y \in \mathbb{R}\}$
grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.57)




Şekil 4.1.57

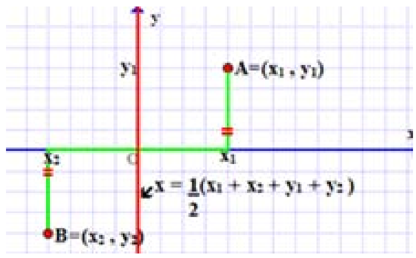
**23.** $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken

$x - x_1 < 0,\ y_1 \geq 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 < 0$ ise

s – orta kümesi

Ơ $= \{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2),\ y \in \mathbb{R}\}$

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.58)



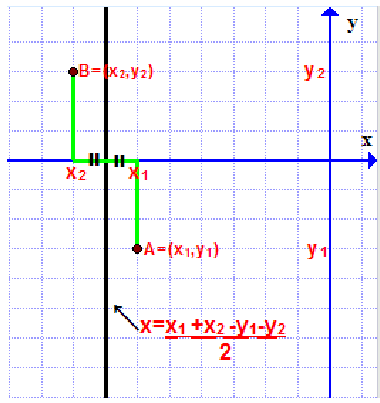

Şekil 4.1.58

**24.** $x_1 \neq x,\ \ x_2 \neq x$ ve $y_1 \neq y_2$ iken $x - x_1 < 0,$

$y_1 < 0,\ x - x_2 > 0$ ve $y_2 \geq 0$ ise s – orta kümesi

Ơ$= \{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2),\ y \in \mathbb{R}\}$

grafiği de yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.59)



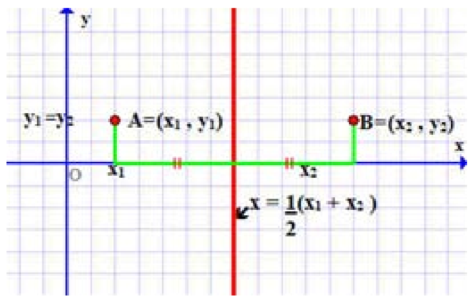

Şekil 4.1.59

**25.** $x_1 \neq x,\ x_2 \neq x$ iken $y_1 = y_2$ ise

s – orta kümesi

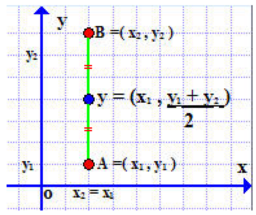
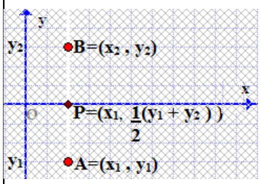
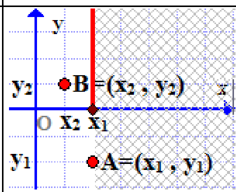
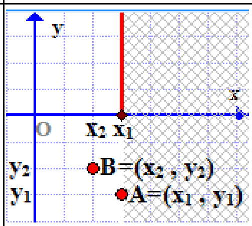
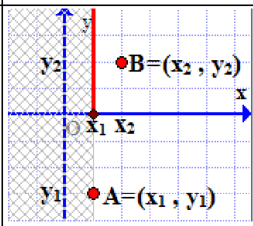
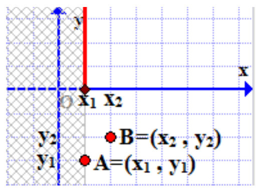
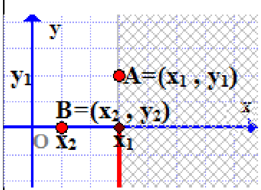
Ơ $= \{(x,\ y) \mid x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y \in \mathbb{R}\}$ grafiği de

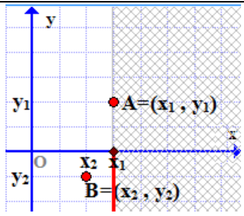
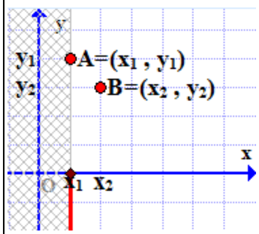
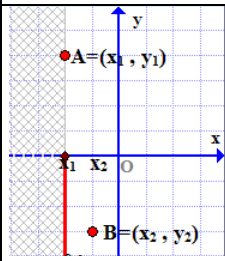
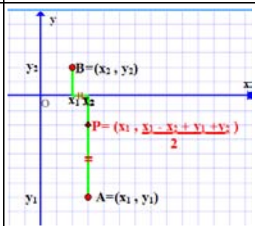
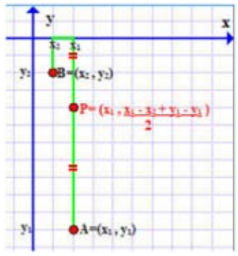
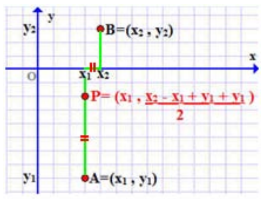
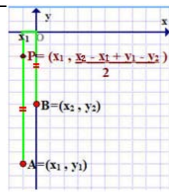
yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.1.60)

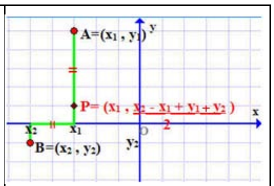
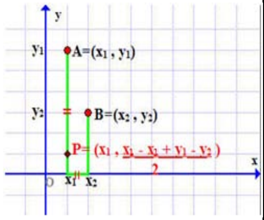
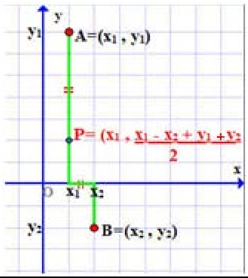
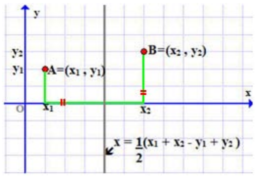
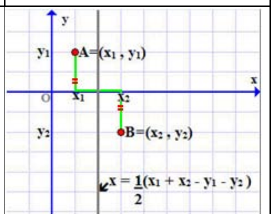
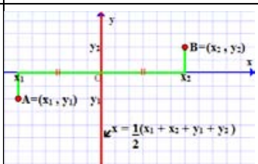
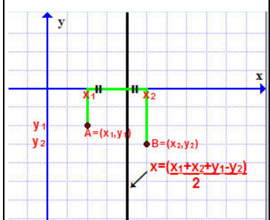


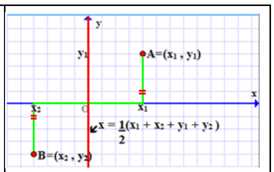
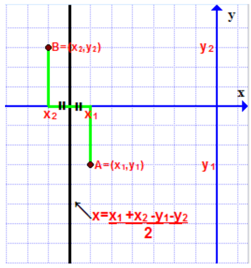
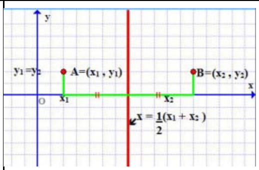

Şekil 4.1.60

**İki Noktanın Orta kümesi İçin Genel Sonuçlar:**

| Koşullar | | $\mho$ | Grafik |
|---|---|---|---|
| $x_1 = x_2$ | $y_1.y_2 \geq 0$ | $\mho=\{(x,y) \mid x = x_1 \text{ ve } y = \frac{y_1+y_2}{2}\}$ |  |
| | $y_1.y_2 < 0$ ve $y_1 \neq -y_2$ | | |
| | $y_1.y_2 < 0$ ve $y_1 = -y_2$ | $\mho_1 = \{(x,y) \mid x > x_1$ veya $x_1 > x\,,\ y \in \mathbb{R}\}$<br>$\mho_2 = \{(x,y) \mid x = x_1$ ve $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}\}$<br>$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ |  |
| $x_1 \neq x_2$ | $x_1 > x_2\,,\ y_1 < -y_2 \leq 0$ ve $x_2 - x_1 = y_1 + y_2$ | $\mho_1 = \{(x,y) \mid x = x_1\,, y \geq 0\}$<br>$\mho_2 = \{(x,y) \mid x > x_1,\ y \in \mathbb{R}\}$<br>$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ |  |
| | $x_1 > x_2\,,\ y_1 < y_2 < 0$ ve $x_1 - x_2 = -y_1 + y_2$ | $\mho_1 = \{(x,y) \mid x = x_1,\ y \geq 0\}$<br>$\mho_2 = \{(x,y) \mid x > x_1,\ y \in \mathbb{R}\}$<br>$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ |  |
| | $x_2 > x_1,\ y_1 < -y_2 \leq 0$ ve $x_1 - x_2 = y_1 + y_2$ | $\mho_1 = \{(x,y) \mid x = x_1, y \geq 0\}$<br>$\mho_2 = \{(x,y) \mid x < x_1,\ y \in \mathbb{R}\}$<br>$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ |  |
| | $x_2 > x_1,\ y_1 < y_2 < 0$ ve $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ | $\mho_1 = \{(x,y) \mid x = x_1, y \geq 0\}$<br>$\mho_2 = \{(x,y) \mid x < x_1,\ y \in \mathbb{R}\}$<br>$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ |  |
| | $x_1 > x_2,\ y_1 > y_2 \geq 0$ ve $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ | $\mho_1 = \{(x,y) \mid x = x_1 \text{ve } y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\}$<br>$\mho_2 = \{(x,y) \mid x > x_1,\ y \in \mathbb{R}\}$<br>$\mho_3 = \{(x,y) \mid x = x_1,\ y < 0\}$<br>$\mho = \mho_1 \cup \mho_2 \cup \mho_3$ |  |

<table>
<tr>
<td rowspan="7">$x_1 \neq x_2$</td>
<td>$x_1 > x_2,\ y_1 > -y_2 \geq 0$ ve<br>$x_2 - x_1 = -y_1 - y_2$</td>
<td>Ơ$_1$ = $\{(x,\ y)\ |x = x_1,\ y < 0\ \}$<br>Ơ$_2$ =$\{(x, y)\ |\ x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ \}$<br>Ơ$_3$ = $\{(x,\ y)|\ x > x_1,\ y \in \mathbb{R}\ \}$<br>Ơ = Ơ$_1$ ∪ Ơ$_2$ ∪ Ơ$_3$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_2 > x_1,\ y_1 > y_2 \geq 0$ ve<br>$x_1 - x_2 = y_2 - y_1$</td>
<td>Ơ$_1$ = $\{(x, y)\ |x = x_1,\ y < 0\ \}$<br>Ơ$_2$ =$\{(x, y)\ |\ x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)\ \}$<br>Ơ$_3$ = $\{(x,\ y)|\ x < x_1,\ y \in \mathbb{R}\ \}$<br>Ơ = Ơ$_1$ ∪ Ơ$_2$ ∪ Ơ$_3$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_2 > x_1,\ y_1 > -y_2 \geq 0$ ve<br>$x_1 - x_2 = -y_2 - y_1$</td>
<td>Ơ$_1$ = $\{(x, y)\ |x = x_1,\ y < 0\ \}$<br>Ơ$_2$ =$\{(x, y)\ |\ x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\}$<br>Ơ$_3$ = $\{(x, y)\ |\ x < x_1, y \in \mathbb{R}\ \}$<br>Ơ = Ơ$_1$ ∪ Ơ$_2$ ∪ Ơ$_3$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 > x_2\ ,\ y_1 < 0$ ve $y_2 \geq 0$<br>$x_1 - x_2 + y_1 + y_2 < 0$</td>
<td>Ơ =$\{(x, y)\ |x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 > x_2\ ,\ y_1 < 0$ ve $y_2 < 0$<br>$x_1 - x_2 + y_1 - y_2 < 0$</td>
<td>Ơ =$\{(x, y)\ |x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 < x_2, y_1 < 0 \leq y_2$ ve<br>$x_2 - x_1 + y_1 + y_2 < 0$</td>
<td>Ơ =$\{(x, y)\ |x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 < x_2,\ y_1 < y_2 < 0$ ve<br>$x_2 - x_1 + y_1 - y_2 < 0$</td>
<td>Ơ =$\{(x, y)\ |x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 - y_2)\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $x_1 > x_2, y_1 \geq 0$ , $y_2 < 0$ ve $x_2 - x_1 + y_1 + y_2 > 0$ | Ơ$=\{(x,\ y) \mid x = x_1,\ y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2)\ \}$ |  |
| | $x_1 < x_2$ , $y_1 \geq 0$ , $y_2 \geq 0$ ve $x_1 - x_2 + y_1 - y_2 > 0$ | Ơ $=\{(x,\ y) \mid x = x_1,\ y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)\ \}$ |  |
| | $x_1 < x_2, y_1 \geq 0,\ y_2 < 0$ ve $x_1 - x_2 + y_1 + y_2 > 0$ | Ơ $=\{(x,y) \mid x = x_1$ ve $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2)\}$ |  |
| $x_1 \neq x_2$ | $x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2) < x_2$ ve $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ | Ơ $=\{(x,y) \mid x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 + y_2),\ y \in \mathbb{R}\ \}$ |  |
| | $x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) < x_2$ ve $y_1 \geq 0$ , $y_2 < 0$ | Ơ$=\{(x,y) \mid x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2), y \in \mathbb{R}\ \}$ |  |
| | $x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) < x_2$ ve $y_1 < 0$ , $y_2 \geq 0$ | Ơ $= \{(x,y) \mid x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2),\ y \in \mathbb{R}\ \}$ |  |
| | $x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2) < x_2$ ve $y_1 < 0$ , $y_2 < 0$ | Ơ $= \{(x, y) \mid x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2)\ ,\ y \in \mathbb{R}\ \}$ |  |

<table>
<tr>
<td rowspan="3">$x_1 \neq x_2$</td>
<td>$x_1 > \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) > x_2$ ve<br>$y_1 \geq 0$, $y_2$ <0</td>
<td>$Ơ = \{(x, y) \mid x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2)\ ,\ y \in \mathbb{R}\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$x_1 > \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) > x_2$ ve<br>$y_1 < 0$ , $y_2 \geq 0$</td>
<td>$Ơ = \{(x,y) \mid x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2),\ y \in \mathbb{R}\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$y_1 = y_2$</td>
<td>$Ơ = \{(x, y) \mid x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y \in \mathbb{R}\ \}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

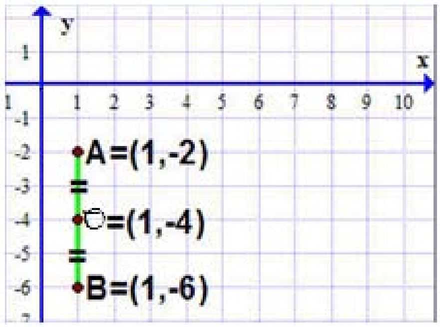
**Tablo 4.1.1**

**İki Noktanın $d_s -$ Orta Kümesi ile İlgili Örnekler**

**1.** $A = (1, -2)$ ve $B = (1, -6)$ noktalarının orta kümesi $P = (1, -4)$ tür.

Ʊ $= \{(x,\ y) |\ x = 1, y = \frac{-2+(-6)}{2}\}$ olur.

(Bkz. Şekil 4.1.61)



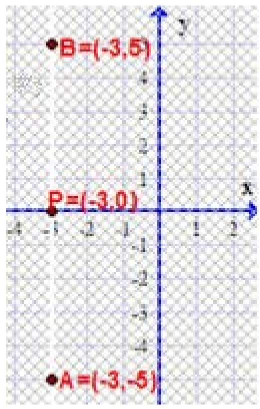

Şekil 4.1.61

**2.** $A = (-3, -5)$ ve $B = (-3, 5)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir.

$Ʊ_1 = \{(x, y)\ |x > -3$ veya $x < -3,\ y \varepsilon \mathbb{R}\}$

$Ʊ_2 = \{(x,\ y)\ |\ x = -3,\ y = \frac{1}{2}(5 + (-5))\}$ = P olup,

Ʊ $= Ʊ_1 \cup Ʊ_2$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.62)

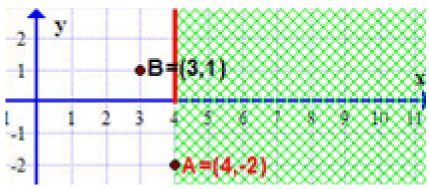



Şekil 4.1.62

**3.** $A = (4, -2)$ ve $B = (3,\ 1)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir. $Ʊ_1 = \{(x, y)\ |\ x = 4,\ y \geq 0\}$

$Ʊ_2 = \{(x,\ y)\ |\ x > 4,\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ olduğundan

Ʊ $= Ʊ_1 \cup Ʊ_2$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.63)

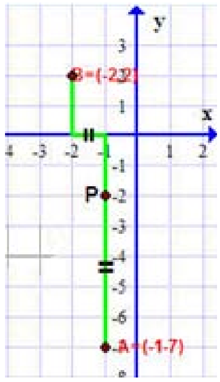



Şekil 4.1.63

**4.** $A = (-1, -7)$ ve $B = (-2,\ 2)$ noktalarının orta kümesi $P = (-1, -2)$ dir.

$\mho = \{(x,\ y) |\ x = -1$ ve $y = \frac{1}{2}(-1 - (-2) + (-7) + 2)\ \}$

bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.64)

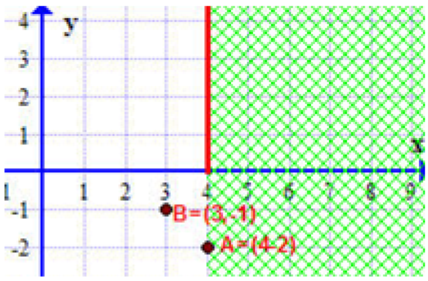



Şekil 4.1.64

**5.** $A = (4, -2)$ ve $B = (3, -1)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir. $\mho_1 = \{(x, y)\,|\, x = 4,\ y \geq 0\}$

$\mho_2 = \{(x,\ y)\ |\ x > 4,\ y \in \mathbb{R}\}$ olup

$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ dır. (Bkz. Şekil 4.1.65)

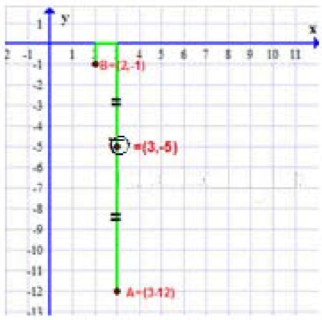



Şekil 4.1.65

**6.** $A = (3, -12)$ ve $B = (2, -1)$ noktalarının orta kümesi yandaki şekildeki gibi $P = (3, -5)$ noktasından ibarettir.

$\mho = \{(x, y) |\ x = -1$ ve $y = \frac{1}{2}(3 - 2 - 1 - (-12)\ )\ \}$

elde edilir. (Bkz. Şekil 4.1.66)



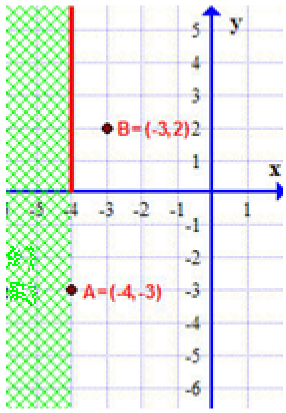
Şekil 4.1.66

**7.** $A = (4, -3)$ ve $B = (-3,2)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir.

$\mho_1 = \{(x, y) \mid x = -4,\ y \geq 0\}$ ve

$\mho_2 = \{(x,\ y) \mid x < -4,\ y \ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ olduğundan

$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.67)

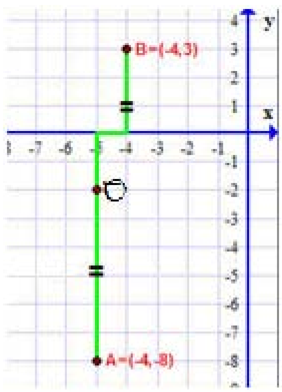



Şekil 4.1.67

**8.** $A = (-4, -8)$ ve $B = (-4, 3)$ noktalarının orta kümesi yandaki şekildeki gibi $P = (-2, -5)$ noktasıdır.

$\mho = \{(x, y) \mid x = -5 \text{ ve } y = \frac{1}{2}(-4 - (-5) + 3 + (-8)\ )\ \}$

bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.68)

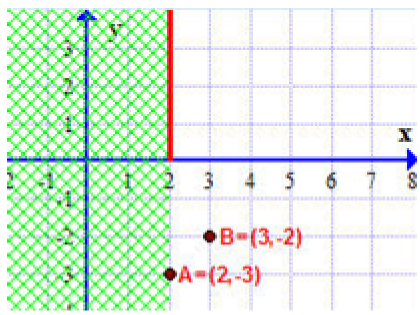



Şekil 4.1.68

**9.** $A = (2, -3)$ ve $B = (3, -2)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir. $\mho_1 = \{(x, y) \mid x = 2,\ y \geq 0\}$ ve

$\mho_2 = \{(x\ , y) \mid x < 2,\ y \ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ olup

$\mho = \mho_1 \cup \mho_2$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.69)

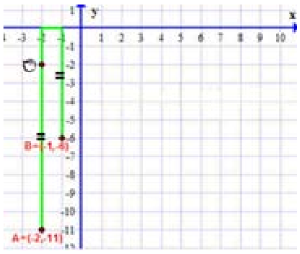



Şekil 4.1.69

**10.** $A = (-2, -11)$ ve $B = (-1, -6)$ noktalarının orta kümesi $P = (-2, -2)$ dir.

$\mho = \{(x,\ y) |\ x = -2$ ve $y = \frac{1}{2}(-1 - (-2) + (-11) - (-6)\ )\ \}$

olur. (Bkz. Şekil 4.1.70)



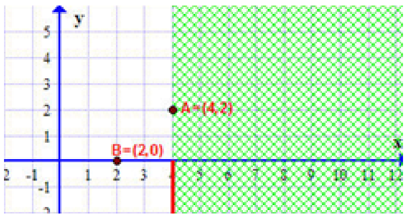

Şekil 4.1.70

**11.** $A = (4, 2)$ ve $B = (2, 0)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir. $\mho_1 = \{(x,\ y)\ |\ x = 4,\ y < 0\ \}$ ,

$\mho_2 = \{(x, y)\ |x = 4,\ y = \frac{1}{2}(2 - 4 + 2 - 0)\} =$P

ve $\mho_3 = \{(x,\ y)\ |\ x > 4,\ y \ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$ olduğundan

$\mho = \mho_1 \cup \mho_2 \cup \mho_3$ bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.71)




Şekil 4.1.71

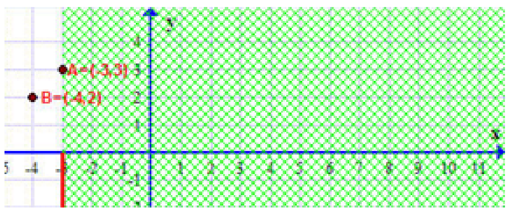
**12.** $A = (-3, 3)$ ve $B = (-4,\ 2)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir. $\mho_1 = \{(x,\ y)\ |\ x = -3,\ y < 0\ \}$

$\mho_2 = \{(x, y)\ |x = -1,\ y = \frac{1}{2}(-4 - (-3) + 3 - 2)\} =$P

$\mho_3 = \{(x,\ y)\ |\ x > -3,\ y \ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$ için

$\mho = \mho_1 \cup \mho_2 \cup \mho_3$ dür.

(Bkz. Şekil 4.1.72)



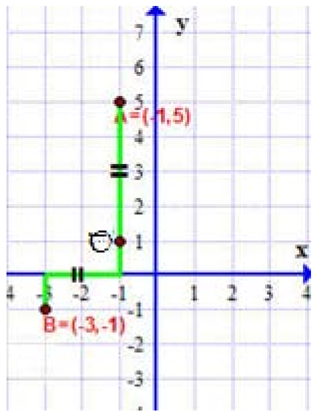

Şekil 4.1.72

**13.** $A=(-1,\ 5)$ ve $B=(-3,-1)$ noktalarının orta kümesi

$P=(-1,\ 1)$ noktasıdır.

$\mho=\{(x,\ y)|\ x=-1$ ve $y=\frac{1}{2}(-3-(-1)+5-1\ )\ \}$

bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.73)



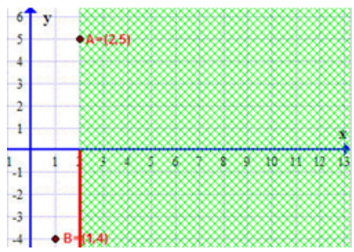

Şekil 4.1.73

**14.** $A=(2,\ 5)$ ve $B=(1,-4)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir. $\mho_1=\{(x,\ y)\ |\ x=2,\ y<0\}$,

$\mho_2=\{(x,y)\ |x=2,\ y=\frac{1}{2}(1-2+5+(-4))\}$ =P,

$\mho_3=\{(x,\ y)\ |\ x>2,\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ olup

$\mho=\mho_1\cup\mho_2\cup\mho_3$ dir. (Bkz. Şekil 4.1.74)

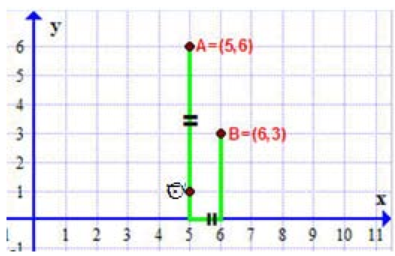


Şekil 4.1.74

**15.** $A=(5,6)$ ve $B=(6,\ 3)$ noktalarının orta kümesi $P=(1,\ 5)$ tir.

$\mho=\{(x,y)|\ x=-1$ ve $y=\frac{1}{2}(5-6+6-3\ )\ \}$

elde edilir. (Bkz. Şekil 4.1.75)




Şekil 4.1.75

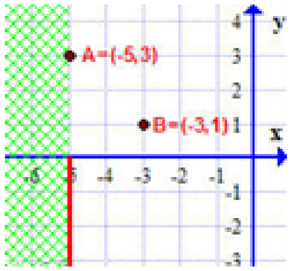
**16.** $A=(-5,\ 3)$ ve $B=(-3\,,1)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir.

$\mho_1=\{(x,\ y)\mid x=-5,\ y<0\}$ ,

$\mho_2=\{(x,y)\mid x=-5,\ y=\frac{1}{2}(-5-(-3)+3-1)\}=P$ ve

$\mho_3=\{(x,\ y)\mid x<-5,\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ için

$\mho=\mho_1\cup\mho_2\cup\mho_3$ olur. (Bkz. Şekil 4.1.76)

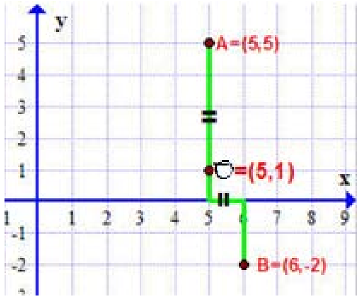



Şekil 4.1.76

**17.** $A=(5,\ 5)$ ve $B=(6,-2)$ noktalarının orta kümesi $P=(5,\ 1)$ noktasıdır.

$\mho=\{(x,\ y)\mid x=-1$ ve $y=\frac{1}{2}(5-6+5+(-2))\}$

bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.77)




Şekil 4.1.77

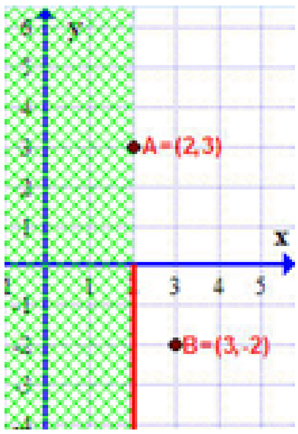
**18.** $A=(2,\ 3)$ ve $B=(3,-2)$ noktalarının orta kümesi kısıtları ile birlikte yandaki şekildeki gibidir.

$\mho_1=\{(x,\ y)\mid x=2,\ y<0\}$,

$\mho_2=\{(x,y)\mid x=2,\ y=\frac{1}{2}(2-3+3-2)\}=P$,

$\mho_3=\{(x,\ y)\mid x<2,\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ olduğundan dolayı

$\mho=\mho_1\cup\mho_2\cup\mho_3$ olur. (Bkz. Şekil 4.1.78)

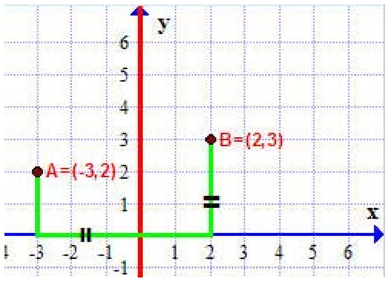



Şekil 4.1.78

**19.** $A = (-3,\ 2)$ ve $B = (2,\ 3)$ noktalarının orta kümesi $x = 0$ doğrusudur.

Ơ = $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(-3 + 2 - 2 + 3)\ ),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$

bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.79)

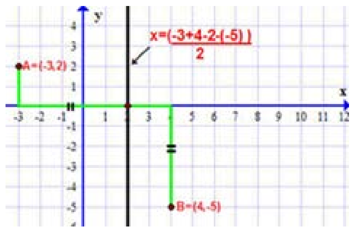



Şekil 4.1.79

**20.** $A = (-3, 2)$ ve $B = (4, -5)$ noktalarının orta kümesi $x = 2$ doğrusudur.

Ơ = $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(-3 + 4 - 2 - (-5)\ \ ),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$

olur. (Bkz. Şekil 4.1.80)

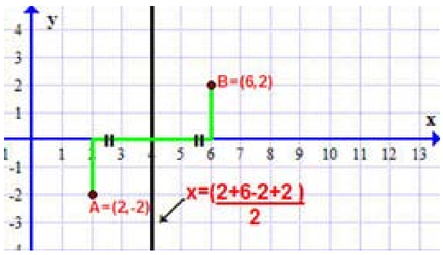



Şekil 4.1.80

**21.** $A = (2\ , -2)$ ve $B = (6, 2)$ noktalarının orta kümesi $x = 4$ doğrusudur.

Ơ = $\{(x,\ y) |\ x = \frac{1}{2}(2 + 6 - 2 + 2\ \ ), y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$

elde edilir. (Bkz. Şekil 4.1.81)

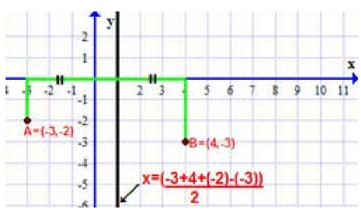



Şekil 4.1.81

**22.** $A = (-3, -2)$ ve $B = (4,\ 3)$ noktalarının orta kümesi $x = 1$ doğrusudur.

Ơ = $\{(x, y) |\ x = \frac{1}{2}(-3 + 4 + (-2) - (-3)),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$

dir. (Bkz. Şekil 4.1.82)



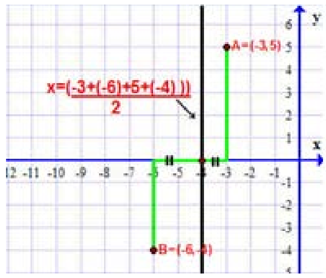

Şekil 4.1.82

**23.** $A = (-3\,,\ 5)$ ve $A = (-6, -4)$ noktalarının

orta kümesi $x = -4$ doğrusudur.

Ɵ = $\{(x\,, y) |\ x = \frac{1}{2}(-3 + (-6) + 5 + (-4)),\ y \in \mathbb{R}\ \}$

olur. (Bkz. Şekil 4.1.83)



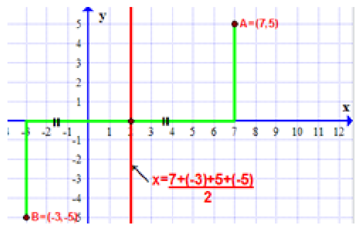

Şekil 4.1.83

**24.** $A = (7,\ 5)$ ve $B = (-3, -5)$ noktalarının

orta kümesi $x = 2$ doğrusudur.

Ɵ = $\{(x, y) |\ x = \frac{1}{2}(7 + (-3) + 5 + (-5)), y \in \mathbb{R}\ \}$

bulunur. (Bkz. Şekil 4.1.84)




Şekil 4.1.84

## 4.2 Bir Nokta İle Doğrunun $d_S$ −Orta Kümesi: $d_S$ PARABOL

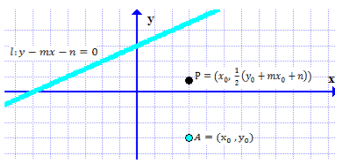
Analitik düzlemde sabit bir nokta ve doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine parabol adı verilmektedir. Bu bölümde s – düzleminde paraboller incelenecektir. Buna göre, $\mathbb{R}^2{}_s$ düzleminde verilen $A = (x_0,\ y_0)$ sabit noktasını ve $l \ldots y - mx - n = 0$ sabit doğrusunu ele alalım. $A = (x_0\ ,\ y_0)$ noktasına ve $y - mx - n = 0$ doğrusuna eşit uzaklıktaki tüm noktaları bulmak istiyoruz. $\mathcal{P}$ ile göstereceğimiz bu geometrik yere ait genel noktayı $P = (x,\ y)$ olarak gösterelim. $A$ noktası l doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olmak üzere A=$(x_0\ , y_0)$ ve $l \ldots y - mx - n = 0$ nin orta kümesi { P | $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)\}$ dir.
Buna göre, $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusunun eğimi $|m| < 1$, $|m| \geq 1$ ve $|m| \to \infty$ olmak üzere başlıca üç durum vardır.

**I. Durum:** $|m| < 1$ olsun . Bu taktirde iki alt durum söz konusudur.

**a.** $x = x_0$ olsun. Buna göre, $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için $|y - y_0| = |y - mx_0 - n|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ ise
$y - y_0 = y - mx_0 - n \ \Rightarrow y_0 = mx_0 + n$ dır . Oysaki kabülümüzde $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusu üzerinde alınamıyacağını belirttik. Çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

ii. $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ ise
$y - y_0 = -y + mx_0 + n \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$
$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.1)



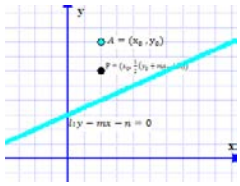
Şekil 4.2.1

iii. $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ ise

$-y + y_0 = y - mx_0 - n \mapsto y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$

$\mathcal{P} = \{(x,y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ tek bir nokta belirtir.

(Bkz. Şekil 4.2.2)



Şekil 4.2.2

iv. $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ ise

$-y + y_0 = -y + mx_0 + n \mapsto y_0 = mx_0 + n$ dır . Oysaki kabulümüzde $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusu üzerinde alınamıyacağını belirttik. Çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

**b.** $x \neq x_0$ olsun. Buna göre $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için $|x - x_0| + |y| + |y_0| = |y - mx - n|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 + y + y_0 = y - mx - n \mapsto (m+1)x + y_0 + n - x_0) = 0$

$\{(x,\ y) | (m+1)x + y_0 + n - x_0) = 0,\ y \,\varepsilon\, \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak doğru üstünde alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

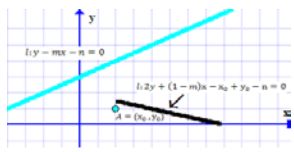
ii. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 + y + y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto 2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y) | 2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\} \,\varepsilon\, \mathcal{P}$

doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.3)



Şekil 4.2.3

iii. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 + y - y_0 = y - mx - n \ \mapsto x - x_0 + mx - y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(m+1)x - x_0 - y_0 + n) = 0, \text{y} \ \varepsilon\ \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

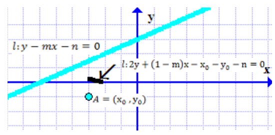
iv. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0\,,\ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 + y - y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto 2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$

doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.4)



Şekil 4.2.4

v. $x - x_0 > 0\,,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0\ \ ,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 - y + y_0 = y - mx_0 - n \ \mapsto x - 2y = (1-m)\,x_0 - y_0 - n$

$\{(x,\ y)|\ x - 2y = (1-m)\,x_0 - y_0 - n\ \} \notin \mathcal{P}$ dir.

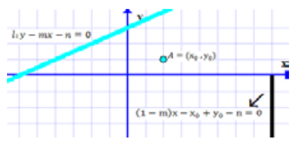
Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A=(x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

vi. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 - y + y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|(1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.2.5)



Şekil 4.2.5

vii. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 - y - y_0 = y - mx - n \ \mapsto (1+m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(1+m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

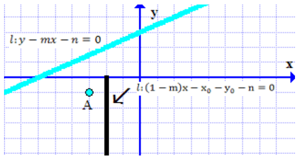
Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

viii. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 - \ y - y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\Rightarrow (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$ yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.2.6)




Şekil 4.2.6

ix. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 + \ y + \ y_0 \ = \ \ y - mx - n \ \Rightarrow (m - 1)x + x_0 + y_0 + n = 0$

$\{(x, y)|(m - 1)x + x_0 + y_0 + n = 0$, y ε ℝ } $\notin \mathcal{P}$ dir.

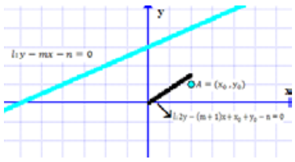
Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

x. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 + \ y + \ y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\Rightarrow 2y - (m + 1)x + x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y - (m + 1)x + x_0 + y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$ doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.7)




Şekil 4.2.7

xi. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $\ y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 + \ y - y_0 \ = \ \ y - mx - n \ \Rightarrow (m - 1)x + x_0 - y_0 + n$

$\{(x,\ y)|(m - 1)x + x_0 - y_0 + n$, y ε ℝ } $\notin \mathcal{P}$ dir.

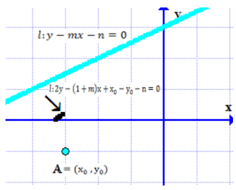
Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

xii. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 + \ y - \ y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\Rightarrow 2y - (1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y - (1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$ doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.8)




Şekil 4.2.8

xiii. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 - y + \ y_0 = y - mx - n \Rightarrow 2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

xiv. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 - \ y + \ y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\Rightarrow (1 + m)x - x_0 - y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 + m)x - x_0 - y_0 + n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$

doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.9)

Şekil 4.2.9

xv. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 - \ y - \ y_0 = y - mx - n \Rightarrow 2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

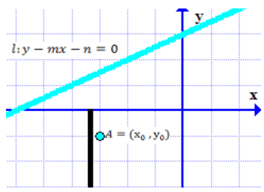
xvi. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 - \ y - \ y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\Rightarrow -(1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)| -(1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$

doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.10)



Şekil 4.2.10

**SONUÇ 4.2.1:**

s – parabolü yani verilen sabit bir $A = (x_0, y_0)$ noktası ile $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri,

**1.**

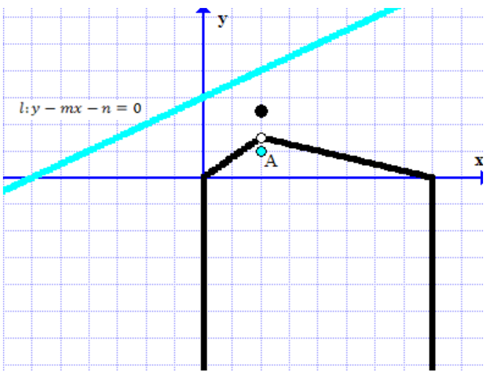
**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası** ,

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi**,

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|(1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesi**,

**d)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y)|2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi ile**

**e)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_5 = \{(x,\ y)|(1+m)x - x_0 - y_0 + n = 0\ ,y \in \mathbb{R}\}$ çözüm kümesinin bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4 \cup \mathcal{P}_5$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.11)




Şekil 4.2.11

**2.**

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ kısıtları altında

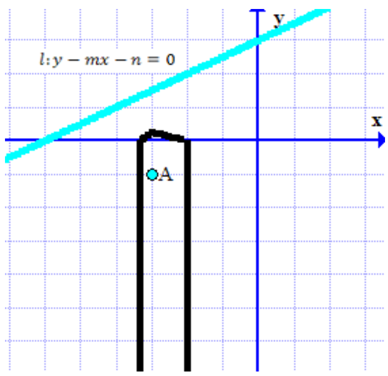
$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası** ,

**b)** $x = x_0$ iken $x - x_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi**,

**c)** $x = x_0$ iken $x - x_0 \geq 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|(1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi**,

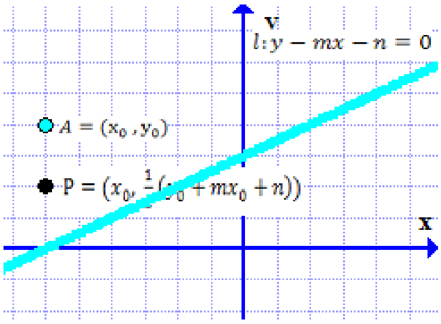
**d)** $x = x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0$ , $y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y)|2y - (1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0\ \}$ **çözüm kümesi**,

**e)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_5 = \{(x,\ y)| - (1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0, y \varepsilon \mathbb{R}\}$ çözüm kümesinin bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4 \cup \mathcal{P}_5$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.12)




Şekil 4.2.12

**3.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n > 0$ kısıtları altında $\mathcal{P} = \{(x,\ y) |\ x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktasından ibarettir.** Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.13)




Şekil 4.2.13

**II. Durum:** $|m| \geq 1$ olsun. Bu durumda $m \geq 1$ $ve$ $m \leq -1$ olmak üzere başlıca iki durum vardır. Aşağıda $m \geq 1$ iken belirtilen kısıtlar altında $P = (x,\ y)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusuna göre uzaklığı ifade edilmiştir.

**A.** $m \geq 1$ ve $y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olsun.

**a.** $x = x_0$ iken $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için

$|y - y_0| = |y - mx_0 - n|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

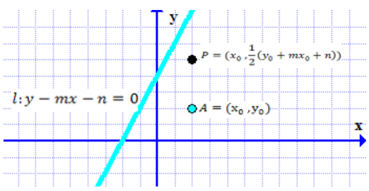
i. $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ ise

$y - y_0 = y - mx_0 - n \;\; \Rightarrow \;\; y_0 = mx_0 + n$ dır. Oysaki kabülümüzde $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusu üzerinde alınamıyacağını belirttik. Çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

ii. $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ ise

$y - y_0 = -y + mx_0 + n \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$ olup

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.14)



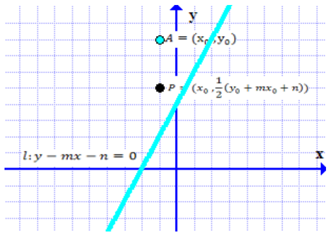

Şekil 4.2.14

iii. $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ ise

$-y + y_0 = y - mx_0 - n \mapsto y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$ olduğundan

$\mathcal{P} = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ tek bir nokta belirtir.

(Bkz. Şekil 4.2.15)



Şekil 4.2.15

iv. $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ ise

$-y + y_0 = -y + mx_0 + n \mapsto y_0 = mx_0 + n$ dır. Oysaki kabülümüzde $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusu üzerinde alınamayacağını belirttik. Çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

**b.** $x \neq x_0$ olsun. Buna göre $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için $|x - x_0| + |y| + |y_0| = |y - mx - n|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 + y + y_0 = y - mx - n \mapsto (\mathrm{m} + 1)\mathrm{x} + \mathrm{y}_0 + \mathrm{n} - \mathrm{x}_0) = 0$

$\{(x,\ y)|(m + 1)x + y_0 + n - x_0) = 0,\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak doğru üstünde alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

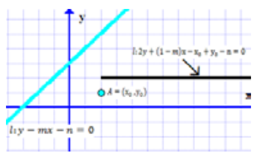
ii. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 + y + y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto 2\mathrm{y} + (1 - \mathrm{m})\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 + \mathrm{y}_0 - \mathrm{n} = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\} \in \mathcal{P}$

yarı doğrusudur. (Bkz. Şekil 4.2.16)



Şekil 4.2.16

iii. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 + y - y_0 = y - mx - n \Rightarrow x - x_0 + mx - y_0 + n = 0$

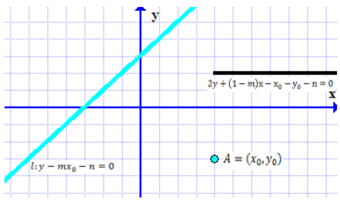
$\{(x,\ y) | (m + 1)\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 - \mathrm{y}_0 + \mathrm{n}) = 0,\ \mathrm{y}\ \varepsilon\ \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

iv. $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 + y - y_0 = -y + mx + n \Rightarrow 2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y) | 2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}\ \varepsilon \mathcal{P}$ dir. (Bkz. Şekil 4.2.17)



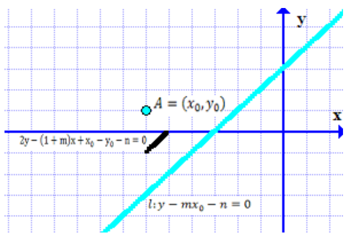

Şekil 4.2.17

v. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 - y + y_0 = y - mx - n \Rightarrow 2y - (1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y) |\ 2y - (1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.18)




Şekil 4.2.18

vi. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 - y + y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

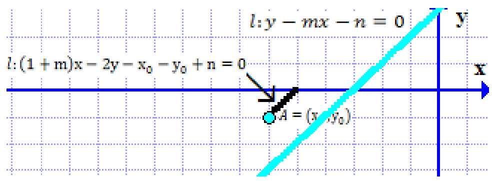
$\{(x,\ y)|(1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

vii. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 - y - y_0 = y - mx - n \ \mapsto (1 + m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 + m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir. (Bkz. Şekil 4.2.19)




Şekil 4.2.19

viii. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 - y - y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

ix. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 + y + y_0 = y - mx - n \ \mapsto (m - 1)x + x_0 + y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(m - 1)x + x_0 + y_0 + n = 0,\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

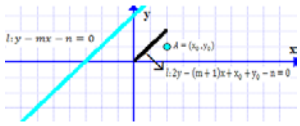
x. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 + \ y + \ y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\mapsto 2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0\}\ \varepsilon \mathcal{P}$

doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.20)



Şekil 4.2.20

xi. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 + \ y - y_0 \ = \ \ y - mx - n \ \mapsto (m-1)x + x_0 - y_0 + n$

$\{(x,\ y)|(m-1)x + x_0 - y_0 + n,$ y $\varepsilon\, \mathbb{R}\ \} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

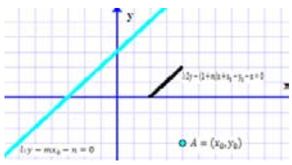
xii. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 + \ y - \ y_0 \ = \ -y + mx + n$

$\mapsto 2y - (1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0$ olduğundan

$\{(x,\ y)|2y - (1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ doğru parçasıdır.

(Bkz. Şekil 4.2.21)

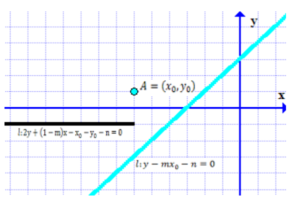


Şekil 4.2.21

xiii. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 - \ y + \ y_0 = y - mx - n \mapsto 2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0\,\}\ \varepsilon\, \mathcal{P}$dir. (Bkz. Şekil 4.2.22)



Şekil 4.2.22

xiv. $\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 < 0,\ \mathrm{y} < 0$ ve $\mathrm{y}_0 \geq 0,\ \mathrm{y} - \mathrm{mx} - \mathrm{n} < 0$ ise

$-\mathrm{x} + \mathrm{x}_0 - \mathrm{y} + \mathrm{y}_0 = -\mathrm{y} + \mathrm{mx} + \mathrm{n}$

$\Rrightarrow (1 + \mathrm{m})\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 - \mathrm{y}_0 + \mathrm{n} = 0$

$\{(x,\ y) | (1 + m)x - x_0 - y_0 + n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

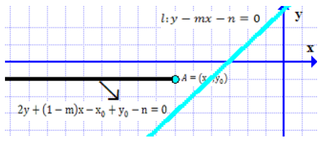
xv. $\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 < 0,\ \mathrm{y} < 0$ ve $\mathrm{y}_0 < 0,\ \mathrm{y} - \mathrm{mx} - \mathrm{n} \geq 0$ ise

$-\mathrm{x} + \mathrm{x}_0 - \mathrm{y} - \mathrm{y}_0 = \mathrm{y} - \mathrm{mx} - \mathrm{n} \Rrightarrow$

$2y + (1 - \mathrm{m})\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 + \mathrm{y}_0 - \mathrm{n} = 0$

$\{(x,\ y) |\ 2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\ \} \in \mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.23)




Şekil 4.2.23

xvi. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 - y - y_0 = -y + mx + n$

$\Rrightarrow -(1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0$ olduğundan

$\{(x,\ y) | -(1 + m)x + x_0 - y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

**B.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olsun.

**a.** $x = x_0$ iken $d_s(P, A) = d_s(P, l)$ için

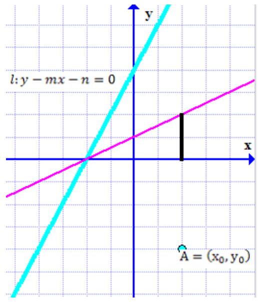
$|y - y_0| = |y| + |x_0 + \frac{n}{m}|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $y - y_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

$y - y_0 = y + x_0 + \frac{n}{m} \mapsto y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ dir.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.24)



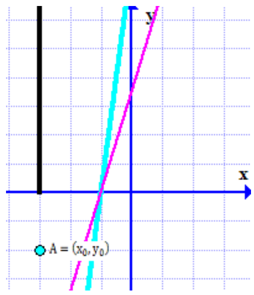

Şekil 4.2.24

ii. $y - y_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$y - y_0 = y - x_0 - \frac{n}{m} \mapsto y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.25)



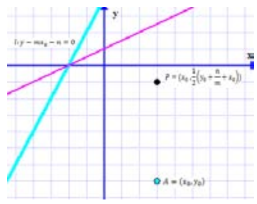

Şekil 4.2.25

iii. $y - y_0 \geq 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

$y - y_0 = -y + x_0 + \frac{n}{m} \mapsto y = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{n}{m} + x_0)$

$\{(x,\ y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{n}{m} + x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$ olur.

(Bkz. Şekil 4.2.26)



Şekil 4.2.26

iv. $y - y_0 \geq 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$y - y_0 = -y - \ x_0 - \frac{n}{m} \mapsto y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)$

$\{(x,\ y)|x = x_0, y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.27)

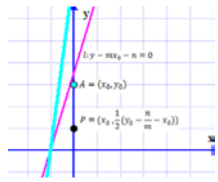
Şekil 4.2.27

v. $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

$-y + y_0 = y + \ x_0 + \frac{n}{m} \mapsto y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)$

$\{(x,\ y)|x = x_0, y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} - x_0\right)\}$ ε$\mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.28)



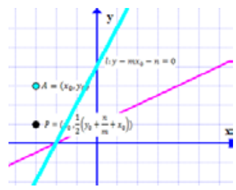
Şekil 4.2.28

vi. $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$-y + y_0 = y - \ x_0 - \frac{n}{m} \mapsto y = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{n}{m} + x_0)$

$\{(x,\ y)|x = x_0, y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{n}{m} + x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.29)



Şekil 4.2.29

vii. $y - y_0 < 0, y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

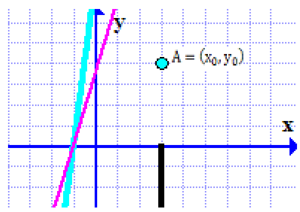
$-y + y_0 = -y + \ x_0 + \frac{n}{m} \mapsto y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ dir.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$

noktasının ordinatının yani $y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$

şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.230)




Şekil 4.2.30

viii. $y - y_0 < 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

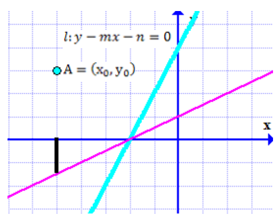
$-y + y_0 = -y - x_0 - \frac{n}{m} \mapsto y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ dir.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$

noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$

şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.31)



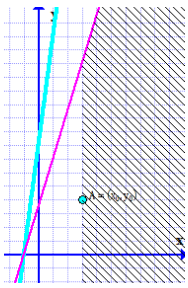

Şekil 4.2.31

**b.** $x \neq x_0$ olsun. Buna göre $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için $|x - x_0| + |y| + |y_0| = |y| + |x + \frac{n}{m}|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $x - x_0 > 0\,, y_0 \geq 0\,, x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$x - x_0 + y_0 = x + \frac{n}{m} \Rightarrow\ y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0, y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir. (Bkz. Şekil 4.2.32)



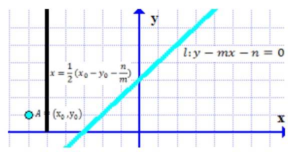
Şekil 4.2.32

ii. $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0, x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$x - x_0 + y_0 = -x - \frac{n}{m} \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x, y) | x = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{n}{m} - y_0\right), y \,\varepsilon\, \mathbb{R}\}\ \ \varepsilon\, \mathcal{P}$dir.

(Bkz. Şekil 4.2.33)



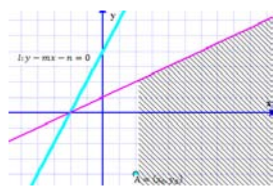

Şekil 4.2.33

iii. $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$x - x_0 - y_0 = x + \frac{n}{m} \Rightarrow\ y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ dir.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.34)



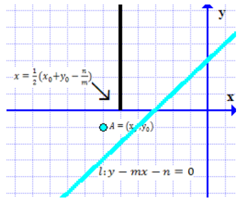
Şekil 4.2.34

iv. $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$x - x_0 - y_0 = -x - \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.35)



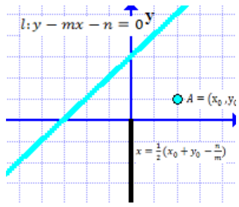

Şekil 4.2.35

v. $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0, x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$-x + x_0 + y_0 = x + \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir.

Bkz. Şekil 4.2.36



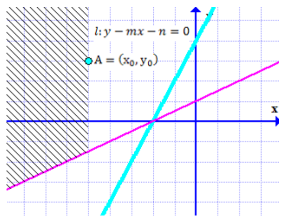

Şekil 4.2.36

vi. $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0, x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$-x + x_0 + y_0 = -x - \frac{n}{m} \mapsto\ y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$

dir. Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.37)



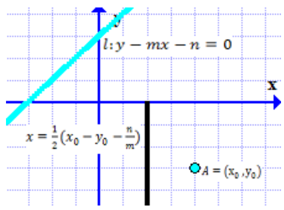

Şekil 4.2.37

vii. $x - x_0 < 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$-x + x_0 - y_0 = x + \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(-y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right), y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.38)




Şekil 4.2.38

viii. $x - x_0 < 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$-x + x_0 - y_0 = -x - \frac{n}{m} \Rightarrow\ y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.39)


Şekil 4.2.39

**SONUÇ 4.2.2 :**

s – parabolü yani verilen sabit bir $A = (x_0, y_0)$ noktası ile $l \dots y = mx + n$ doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri,

**1.**

**A.** $m \geq 1$ ve $y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y) | 2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y) | 2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

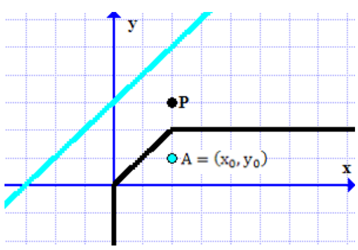
**B.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ için

**a)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right), y \in \mathbb{R}\}$ } çözüm kümesinin

bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.40)




Şekil 4.2.40

**2.**

**A.** $m \geq 1$ ve $y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ $ve\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y)|x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|(1+m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0\}$ **çözüm kümesi**,

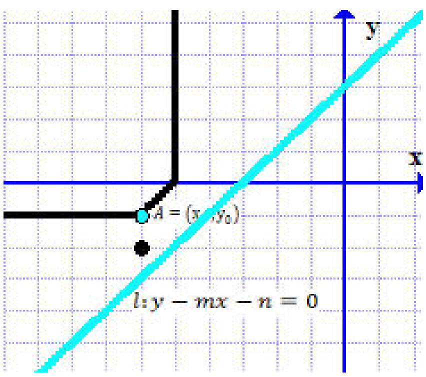
**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi**,

**B.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

$x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0, x + \frac{n}{m} < 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right),\ y \in \mathbb{R}\}$ çözüm kümesinin bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.41)




Şekil 4.2.41

**3.**

**A.** $m \geq 1$ ve $y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ *ve* $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y) | 2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y) | 2y - (m+1)x + x_0 - y_0 - n = 0\ \}$ **çözüm kümesi,**

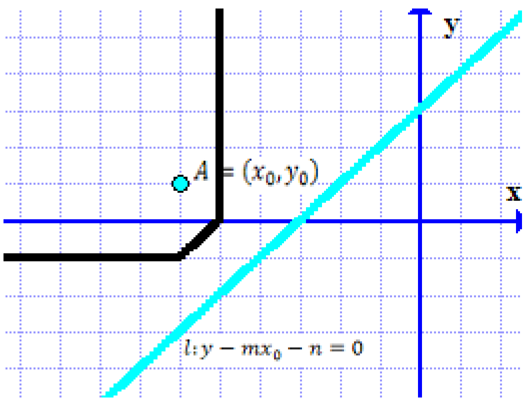
**B.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ için

**a)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0, x + \frac{n}{m} < 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{n}{m} - y_0\right), y \ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ } çözüm kümesinin

bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.42)




Şekil 4.2.42

**4.**

**A.** $m \geq 1$ ve $y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y) | 2y - (1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

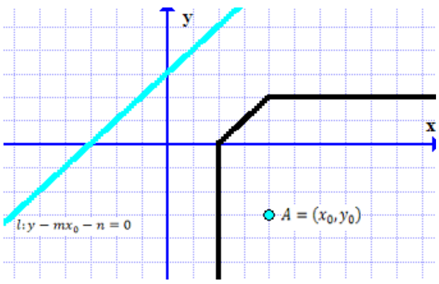
**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y) | 2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**B.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0\,, y_0 < 0\,, x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{n}{m} - y_0\right),\ y \in \mathbb{R}\}$ } çözüm kümesinin bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.43)




Şekil 4.2.43

**5.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

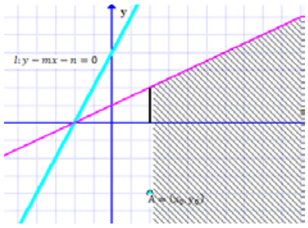
**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ , $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ koşulu sağlandığında,

**b.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0$, $y_o < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.44)




Şekil 4.2.44

**6.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

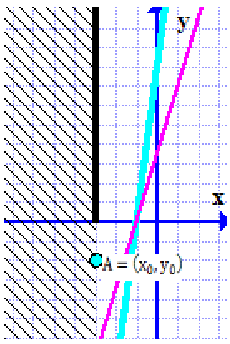
**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$, $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulu sağlandığında,

**b.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0$, $y_0 < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.45)




Şekil 4.2.45

**7.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0, y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x,\ y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} - x_0\right)\}$ $\varepsilon\, \mathcal{P}$

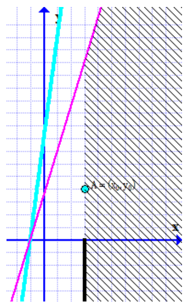
**b.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

**c.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.46)



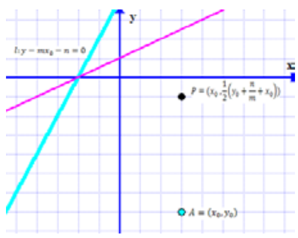
Şekil 4.2.46

**8.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

$x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ , $y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{n}{m} + x_0\right)\}$ $\varepsilon\mathcal{P}$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz . (Bkz. Şekil 4.2.47)



Şekil 4.2.47

**9.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ *ve* $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

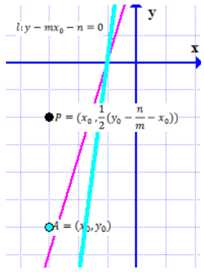
$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

$x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0, y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları

altında $\{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)$ ε $\mathcal{P}$

koşulları altında yandaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.48)



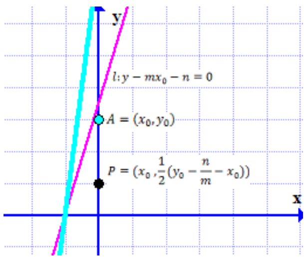

Şekil 4.2.48

**10.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

$x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ , $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)\}$ ε $\mathcal{P}$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz. (Bkz. Şekil 4.2.49)



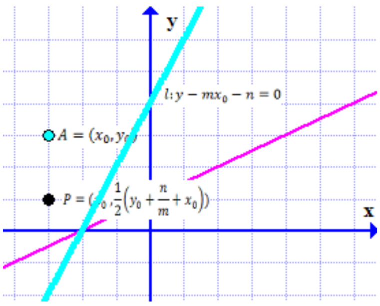

Şekil 4.2.49

**11.** $m \geq 1$ ve $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x+\frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x+\frac{n}{m}<0$ olmak üzere

$x=x_0$ iken $y-y_0<0, y \geq 0$ ve $x_0+\frac{n}{m}<0$ kısıtları altında

$\{(x,\ y)|x=x_0,\ y=\frac{1}{2}(y_0+\frac{n}{m}+x_0)\}$ ε $\mathcal{P}$koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz. (Bkz. Şekil 4.2.50)




Şekil 4.2.50

Aşağıda $m \leq -1$ iken belirtilen kısıtlar altında $P = (x,\ y)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusuna göre uzaklığı ifade edilmiştir.

**A.** $m \leq -1$ ve $\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olsun.

**a.** $x = x_0$ iken $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için $|y - y_0| = |y - mx_0 - n|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

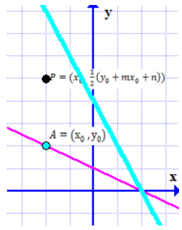
i. $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ ise

$y - y_0 = y - mx_0 - n \ \Rightarrow y_0 = mx_0 + n$ dır . Oysaki kabulümüzde $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusu üzerinde alınamayacağını belirttik. Çözüm kümemiz $\emptyset$ dir.

ii. $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ ise

$y - y_0 = -y + mx_0 + n \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.51)

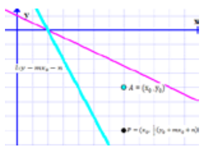


Şekil 4.2.51

iii. $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ ise

$-y + y_0 = y - mx_0 - n \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.52)


Şekil 4.2.52

iv. $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ ise

$-y + y_0 = -y + mx_0 + n \ \Rightarrow y_0 = mx_0 + n$ dır . Oysaki kabulümüzde $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının $l \ldots y - mx - n = 0$ doğrusu üzerinde alınamayacağını belirttik. Çözüm kümemiz $\emptyset$ dir.

**b.** $x \neq x_0$ olsun. Buna göre $d_s(P,\ A) = d_s(P,\ l)$ için $|x - x_0| + |y| + |y_0| \ = \ |y - mx - n|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $x - x_0 > 0$ , $y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0$ , $y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 + y + y_0 = y - mx - n \Rightarrow (m+1)x + y_0 + n - x_0) = 0$

$\{(x, y)|(m+1)x + y_0 + n - x_0) = 0, y \in \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak doğru üstünde alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

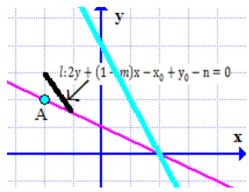
ii. $x - x_0 > 0$, $y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0$, $y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 + y + y_0 = -y + mx + n$

$\Rightarrow 2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\} \in \mathcal{P}$

doğru parçasıdır. (Bkz. Şekil 4.2.53)




Şekil 4.2.53

iii. $x - x_0 > 0$, $y \geq 0$ ve $y_0 < 0$, $y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 + y - y_0 = y - mx - n \Rightarrow x - x_0 + mx - y_0 + n = 0$

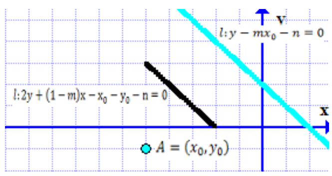
$\{(x,\ y)|(m+1)x - x_0 - y_0 + n) = 0,\ y \in \mathbb{R}\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

iv. $x - x_0 > 0$, $y \geq 0$ ve $y_0 < 0$ , $y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 + y - y_0 = -y + mx + n \Rightarrow 2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0\} \in \mathcal{P}$ dir. (Bkz. Şekil 4.2.54)

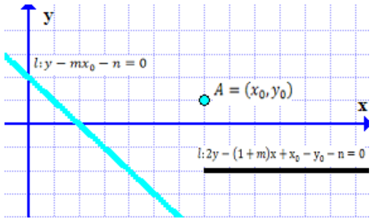



Şekil 4.2.54

v. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 - \mathrm{y} + \mathrm{y}_0 = \mathrm{y} - \mathrm{mx} - \mathrm{n} \Rrightarrow 2\mathrm{y} - (1 + \mathrm{m}) + \mathrm{x}_0 - \mathrm{y}_0 - \mathrm{n} = 0$

$\{(x,\ y)|\ 2y - (1 + m) + x_0 - y_0 - n = 0\ \} \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir. (Bkz. Şekil 4.2.55)




Şekil 4.2.55

vi. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 - y + y_0 = -y + mx + n$

$\Rrightarrow (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

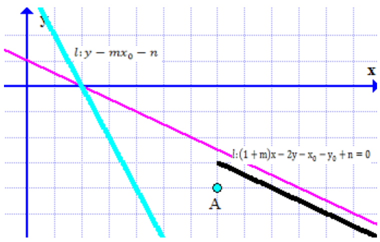
$\{(x,\ y)|(1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

vii. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ ise

$x - x_0 - y - y_0 = y - mx - n \Rrightarrow (1 + m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 + m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0\} \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir. (Bkz. Şekil 4.2.56)




Şekil 4.2.56

viii. $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ ise

$x - x_0 - y - y_0 = -y + mx + n$

$\Rrightarrow (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

ix. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 + y + y_0 = y - mx - n \Rightarrow (m-1)x + x_0 + y_0 + n = 0$

$\{ (x,\ y) | (m-1)x + x_0 + y_0 + n = 0,$ y ε $\mathbb{R} \} \notin \mathcal{P}$ dir.

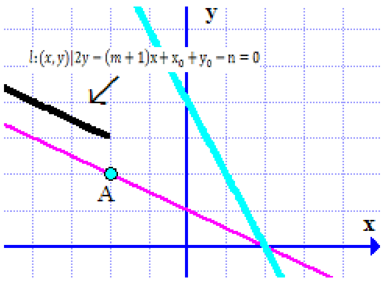
Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0, y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

x. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 + y + y_0 = -y + mx + n \Rightarrow 2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y) | 2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$ yarı doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.2.57)




Şekil 4.2.57

xi. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 + y - y_0 = y - mx - n \Rightarrow (m-1)x + x_0 - y_0 + n$

$\{(x,\ y) | (m-1)x + x_0 - y_0 + n,$ y ε $\mathbb{R} \} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

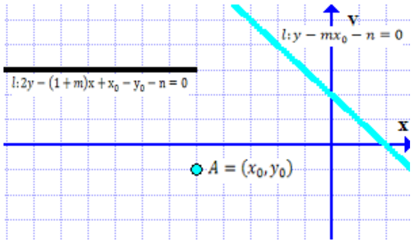
xii. $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 + y - y_0 = -y + mx + n$

$\Rightarrow 2y - (1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y) | 2y - (1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$ yarı doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.2.58)

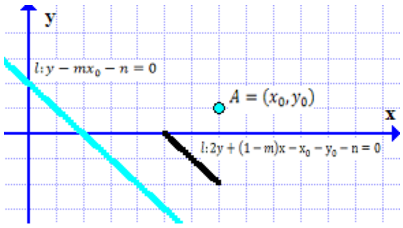



Şekil 4.2.58

xiii. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 - y + y_0 = y - mx - n \mapsto 2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x, y)|2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$ dir. (Bkz. Şekil 4.2.59)




Şekil 4.2.59

xiv. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 - y + y_0 = -y + mx + n$

$\mapsto (1 + m)x - x_0 - y_0 + n = 0$

$\{(x,\ y)|(1 + m)x - x_0 - y_0 + n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

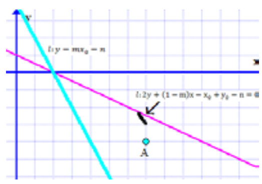
xv. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0, y - mx - n \geq 0$ ise

$-x + x_0 - y - y_0 = y - mx - n \mapsto$

$2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0$

$\{(x, y)|2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}$ ε $\mathcal{P}$

dir. (Bkz. Şekil 4.2.60)



Şekil 4.2.60

xvi. $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0$ , $y - mx - n < 0$ ise

$-x + x_0 - y - y_0 = -y + mx + n$

$\Rightarrow -(1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0$

$\{(x,\ y) | -(1+m)x + x_0 - y_0 - n = 0\} \notin \mathcal{P}$ dir.

Yukarıdaki kısıtlara bağlı olarak alınan herhangi bir $A = (x_0,\ y_0)$ noktası için yukarıdaki doğrunun denklemi sağlanmaz.

**B.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya $\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olsun.

**a.** $x = x_0$ iken $d_s(P, A) = d_s(P, l)$ için $|y - y_0| = |y| + |x_0 + \frac{n}{m}|$ bulunur.

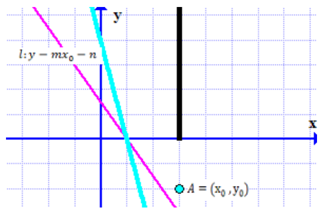
Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $y - y_0 \geq 0$ , $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

$y - y_0 = y + x_0 + \frac{n}{m} \Rightarrow y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$

olur. Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0, y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.61)



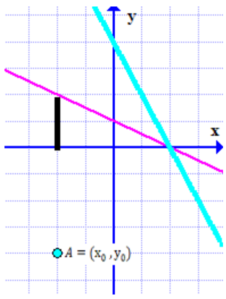
Şekil 4.2.61

ii. $y - y_0 \geq 0$ , $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$y - y_0 = y - x_0 - \frac{n}{m} \Rightarrow y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.62)



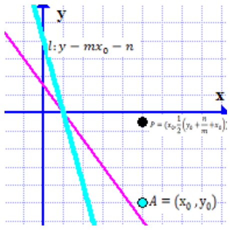
Şekil 4.2.62

iii. $y - y_0 \geq 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

$y - y_0 = -y + x_0 + \frac{n}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{n}{m} + x_0)$

$\{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{n}{m} + x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$dir.

(Bkz. Şekil 4.2.63)



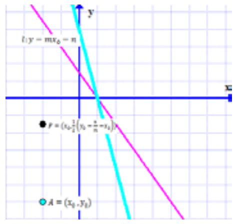

Şekil 4.2.63

iv. $y - y_0 \geq 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$y - y_0 = -y - x_0 - \frac{n}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)$

$\{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} - x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$dir.

(Bkz. Şekil 4.2.64)



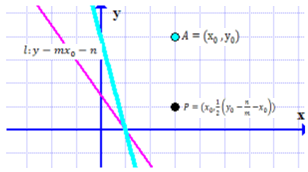
Şekil 4.2.64

v. $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$

$-y + y_0 = y + x_0 + \frac{n}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)$

$\{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} - x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.65)



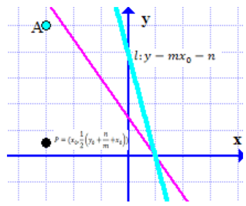

Şekil 4.2.65

vi. $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$-y + y_0 = y - x_0 - \frac{n}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{n}{m} + x_0)$

$\{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{n}{m} + x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$dir.

(Bkz. Şekil 4.2.66)



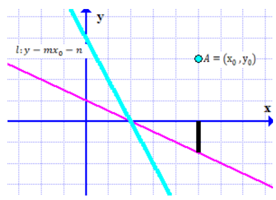

Şekil 4.2.66

vii. $y - y_0 < 0, y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ ise

$-y + y_0 = -y + x_0 + \frac{n}{m} \Rightarrow y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının $y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.67)

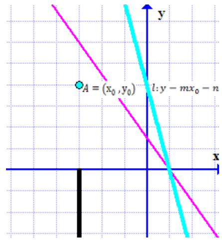



Şekil 4.2.67

viii. $y - y_0 < 0$, $y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ ise

$-y + y_0 = -y - x_0 - \frac{n}{m} \mapsto y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ dir.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olmasını gerektirir. (Bkz. Şekil 4.2.68)



Şekil 4.2.68

**b.** $x \neq x_0$ iken $d_s(P, A) = d_s(P, l)$ için

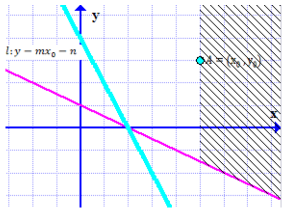
$|x - x_0| + |y| + |y_0| = |y| + |x + \frac{n}{m}|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$x - x_0 + y_0 = x + \frac{n}{m} \mapsto\ y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının ordinatının yani

$y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir. (Bkz. Şekil 4.2.69)



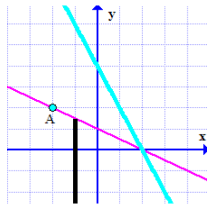

Şekil 4.2.69

ii. $x - x_0 > 0\ , y_0 \geq 0\ , x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$x - x_0 + y_0 = -x - \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{n}{m} - y_0),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \ \varepsilon\ \mathcal{P}$ olur.

(Bkz. Şekil 4.2.70)




Şekil 4.2.70

iii. $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

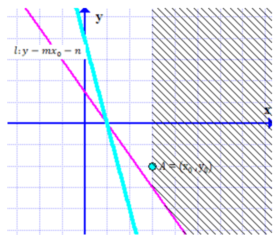
$x - x_0 - y_0 = x + \frac{n}{m} \mapsto\ y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$

Noktasının ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$

şeklinde olması gerektiğini gösterir.

(Bkz. Şekil 4.2.71)



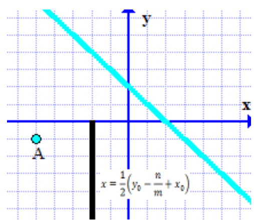

Şekil 4.2.71

iv. $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$x - x_0 - y_0 = -x - \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \ \varepsilon\ \mathcal{P}$ bulunur.

(Bkz. Şekil 4.2.72)



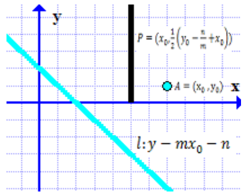

Şekil 4.2.72

v. $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$-x + x_0 + y_0 = x + \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right), \text{y} \ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \ \varepsilon\ \mathcal{P}$dir.

(Bkz. Şekil 4.2.73)

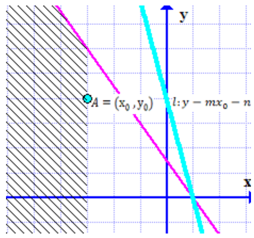



Şekil 4.2.73

vi. $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$-x + x_0 + y_0 = -x - \frac{n}{m} \mapsto\ y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ dir.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının Ordinatının yani $y_0 = -(x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir. (Bkz. Şekil 4.2.74)



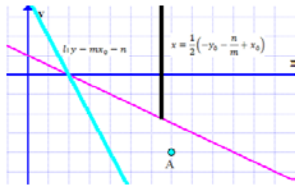

Şekil 4.274

vii. $x - x_0 < 0\,, y_0 < 0\,, x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken

$-x + x_0 - y_0 = x + \frac{n}{m} \mapsto\ x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 - \frac{n}{m})$

$\{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}\left(-y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right), \text{y} \ \varepsilon\ \mathbb{R}\}\ \ \varepsilon\ \mathcal{P}$ dir.

(Bkz. Şekil 4.2.75)

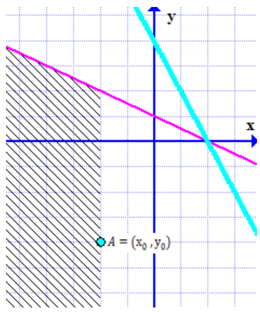



Şekil 4.2.75

viii. $x - x_0 < 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} < 0$ iken

$-x + x_0 - y_0 = -x - \frac{n}{m} \mapsto\ y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ olur.

Yukarıdaki kısıtlar altında $A = (x_0, y_0)$ noktasının ordinatının yani $y_0 = (x_0 + \frac{n}{m})$ şeklinde olması gerektiğini gösterir. (Bkz. Şekil 4.2.76)




Şekil 4.2.76

**SONUÇ 4.2.3 :**

s – parabolü yani verilen sabit bir $A = (x_0, y_0)$ noktası ile $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri,

**1.**

**A.** $m \leq -1$ ve $\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 \geq 0,\ y - mx - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|2y - (m+1)x + x_0 + y_0 - n = 0\ \}$ **çözüm kümesi,**

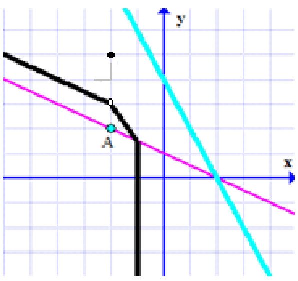
**B.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0\ , y_0 \geq 0\ , x + \frac{n}{m} < 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}(-y_0 - \frac{n}{m} + x_0),\ y \in \mathbb{R}\}$ } çözüm kümesinin

bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.77)




Şekil 4.2.77

**2.**

**A.** $m \leq -1$ ve $\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ *ve* $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ için

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y) | (1 + m)x - 2y - x_0 - y_0 + n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 < 0,\ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y) | 2y + (1 - m)x - x_0 + y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

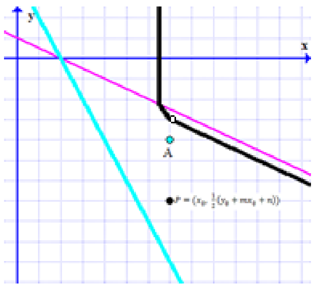
**B.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

$x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0\ , y_0 < 0\ , x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(-y_0 - \frac{n}{m} + x_0),\ y \in \mathbb{R}\}$ } çözüm kümesinin

bileşiminden yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.78)




Şekil 4.2.78

**3.**

**A.** $m \leq -1$ ve $\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ $ve\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ ve $y - mx_0 - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y)|x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|2y + (1 - m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $y_0 < 0,\ \ y - mx - n < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|2y - (m + 1)x + x_0 - y_0 - n = 0\ \}$ **çözüm kümesi,**

**B.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

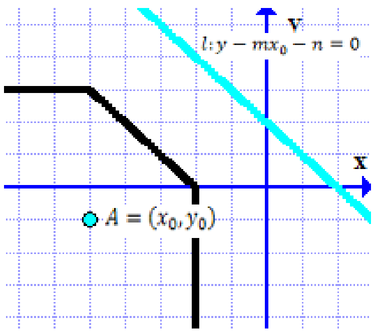
$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ için

**a)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ x + \frac{n}{m} < 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} + x_0),$ y ε ℝ} çözüm kümesinin bileşiminden

yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir.

(Bkz. Şekil 4.2.79)




Şekil 4.2.79

**4.**

**A.** $m \leq -1\ ve\ \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olduğunda

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ ve $y - mx_0 - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_1 = \{(x,\ y)|x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + mx_0 + n)\}$ **noktası,**

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y < 0\ ve\ \ y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|2y + (1-m)x - x_0 - y_0 - n = 0\}$ **çözüm kümesi,**

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y < 0$ ve $y_0 \geq 0,\ \ y - mx - n \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|2y - (m+1)x - x_0 - y_0 - n = 0\ \}$ **çözüm kümesi,**

**B.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

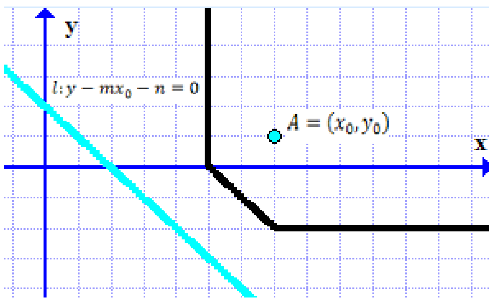
$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ x + \frac{n}{m} \geq 0$ iken kısıtları altında

$\mathcal{P}_4 = \{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} + x_0\right),\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\}$ } çözüm kümesinin bileşiminden

yani $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir.

(Bkz. Şekil 4.2.80)




Şekil 4.2.80

**5.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ için

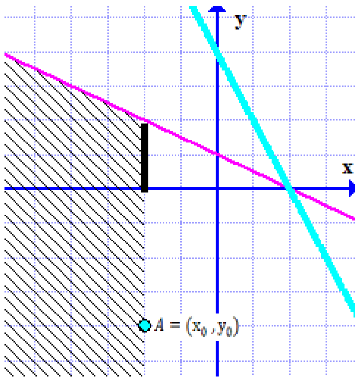
**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0,\; y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulu sağlandığında,

**b.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\; y_0 < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.81)




Şekil 4.2.81

**6.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ *ve* $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\; y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

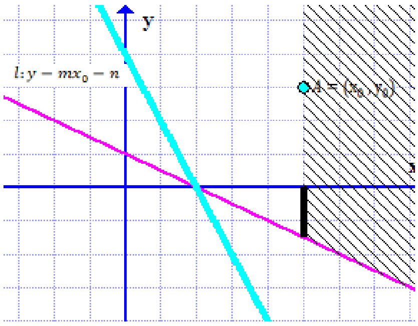
$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ **koşulu sağlandığında,**

**b.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\; y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x,\; y) | x = x_0,\; y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{n}{m} - x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$ **çözüm kümesi ile**

**c.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\; y_0 \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = (\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz. (Bkz. Şekil 4.2.82)




Şekil 4.2.82

**7.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

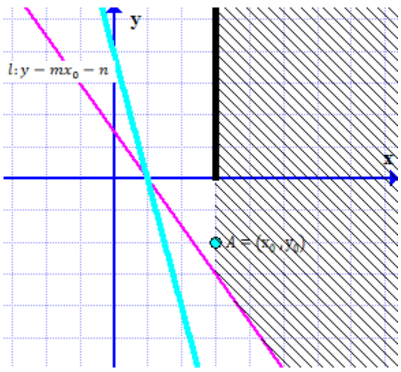
**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ koşulu sağlandığında,

**b.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0$ , $y_0 < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.83)




Şekil 4.2.83

**8.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ *ve* $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

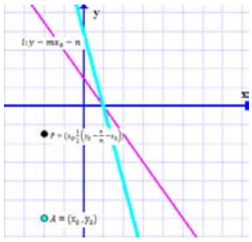
$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$, $y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$\{(x, y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)\}$ ε $\mathcal{P}$ koşulları altında

yandaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.84)



Şekil 4.2.84

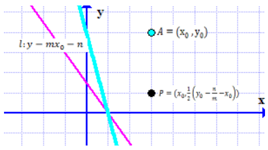
**9.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ için

**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$, $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x, y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 - \frac{n}{m} - x_0)\}$ ε $\mathcal{P}$ koşulları altında

yandaki şekli elde ederiz. (Bkz. Şekil 4.2.85)



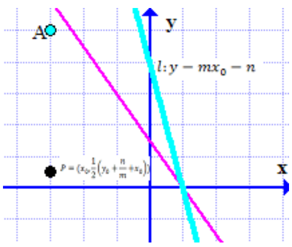
Şekil 4.2.85

**10.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

$x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$, $y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$\{(x, y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{n}{m} + x_0)\}$ ε $\mathcal{P}$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz . (Bkz. Şekil 4.2.86)




Şekil 4.2.86

**11.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$ olmak üzere

**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\ y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ **koşulu sağlandığında,**

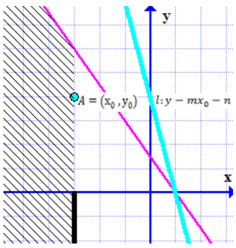
**b.** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{n}{m} + x_0\right)\}$ ε $\mathcal{P}$ **çözüm kümesi ile**

**c.** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} < 0$ kısıtları altında

$y_0 = -(\frac{n}{m} + x_0)$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz.

(Bkz. Şekil 4.2.87)



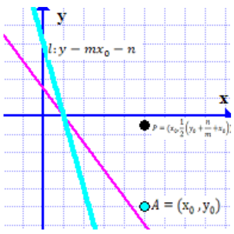

Şekil 4.2.87

**12.** $m \leq -1$ ve $y \geq \frac{(m+1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2}$ ve $x + \frac{n}{m} \geq 0$ veya

$\frac{(m-1)\left(\frac{n}{m}+x\right)}{2} \geq y$ ve $x + \frac{n}{m} < 0$

**a.** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ , $y < 0$ ve $x_0 + \frac{n}{m} \geq 0$ kısıtları altında

$\{(x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{n}{m} + x_0)\}$ ε $\mathcal{P}$ koşulları altında aşağıdaki şekli elde ederiz . (Bkz. Şekil 4.2.88)




Şekil 4.2.88

**3.** $|m| \to \infty$ olsun. Bu taktirde üç alt durum söz konusudur.

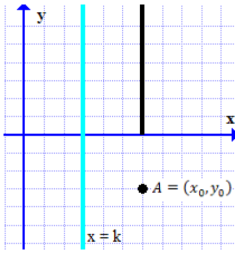
**a.** $(x,\ y)\varepsilon\ l$ iken $A = (x_0,\ y_0)$ noktası $x = k$ doğrusu üzerindedir. Bu da kabulümüzle çelişir.

**b.** $(x, y) \notin l$ ve $x = x_0$ olsun. Buna göre, $d_s(P, A) = d_s(P, l)$ için $|y - y_0| = |y| + |x_0 - k|$ bulunur. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $y - y_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ ise

$y - y_0 = y + x_0 - k \Rightarrow y_0 = k - x_0$ olduğundan

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y \geq 0\}$ yandaki **yarı doğru** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.89)

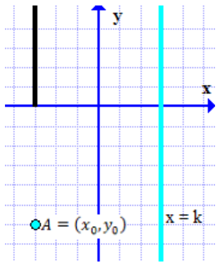



Şekil 4.2.89

ii. $y - y_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k < 0$ ise

$y - y_0 = y - x_0 + k \Rightarrow y_0 = x_0 - k$ olur.

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y \geq 0\}$ yandaki **yarı doğru** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.90)

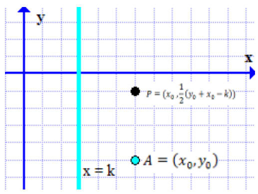



Şekil 4.2.90

iii. $y - y_0 \geq 0, y < 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ ise

$y - y_0 = -y + x_0 - k \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)$ olup

$\mathcal{P} = \{(x, y) | x = x_0, y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.91)

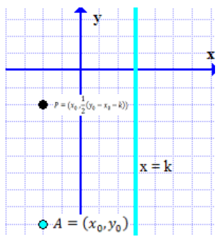



Şekil 4.2.91

iv. $y - y_0 \geq 0,\ y < 0$ ve $x_0 - k < 0$ ise

$y - y_0 = -y - x_0 + k \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 - k)$ dir.

$\mathcal{P} = \{(x, y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 - k)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.92)

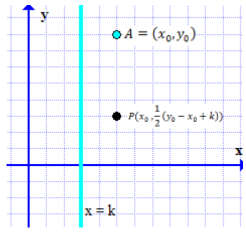



Şekil 4.2.92

v. $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ ise

$-y + y_0 = y + x_0 - k \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 + k)$ olur.

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 + k)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.93)

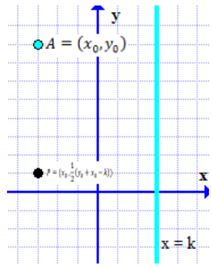



Şekil 4.2.93

vi. $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k < 0$ ise

$-y + y_0 = y - x_0 + k \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)$ olduğundan

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)\}$ tek bir nokta belirtir. (Bkz. Şekil 4.2.94)

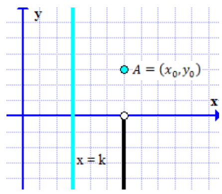



Şekil 4.2.94

vii. $y - y_0 < 0,\ y < 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ ise

$-y + y_0 = -y + x_0 - k \Rightarrow y_0 = x_0 - k$ olup

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y < 0\}$ yandaki **yarı doğru** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.95)

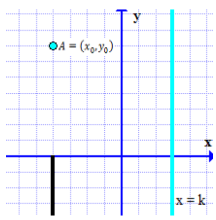



Şekil 4.2.95

viii. $y - y_0 < 0,\ y < 0$ ve $x_0 - k < 0$ ise

$-y + y_0 = -y - x_0 + k \Rightarrow y_0 = k - x_0$ dir.

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y < 0\}$ yandaki **yarı doğru** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.96)




Şekil 4.2.96

**c.** $(x,\ y) \notin$ l iken $x \neq x_0$ olsun. Buna göre, $d_s(P, A) = d_s(P, l)$ için

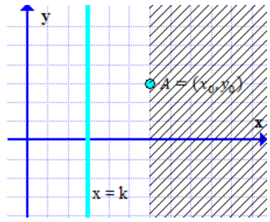
$|x - x_0| + |y| + |y_0| = |y| + |x - k| \Rrightarrow |x - x_0| + |y_0| = |x - k|$

dir. Bu bağıntı çözümlendiğinde aşağıdaki durumlara ulaşılır.

i. $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0,\ \ x - k \geq 0$ ise

$x - x_0 + \ y_0 = \ \ x - k \Rrightarrow y_0 = x_0 - k$ olur.

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x > x_0,\ y \in \mathbb{R}\}$ yandaki **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.97)




Şekil 4.2.97

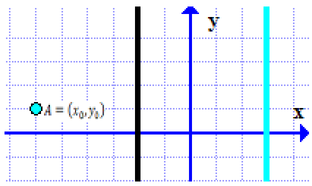
ii. $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0,\ \ x - k < 0$ ise

$x - x_0 + \ y_0 = \ -x + k$

$\Rrightarrow x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + k)$ bulunur. Buna göre

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + k),\ y \in \mathbb{R}\}$ doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.2.98)

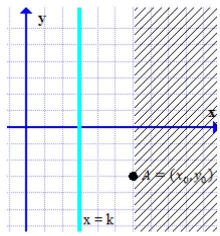



Şekil 4.2.98

iii. $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ \ x - k \geq 0$ ise

$x - x_0 - \ y_0 = \ \ x - k \Rrightarrow y_0 = k - x_0$ olup

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x > x_0,\ y \in \mathbb{R}\}$ yandaki **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.99)



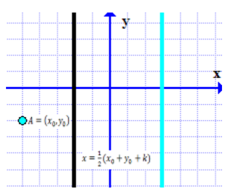

Şekil 4.2.99

iv. $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ \ x - k < 0$ ise

$x - x_0 - \ y_0 = \ -x + k \Rrightarrow x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + k)$ dir.

$\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + k),\ y \in \mathbb{R}\}$ doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.2.100)



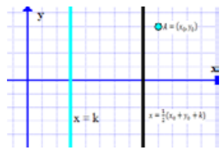

Şekil 4.2.100

v. $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ \ x - k \geq 0$ ise

$-x + x_0 + \ y_0 = \ \ x - k \Mapsto x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + k)$ olduğundan

$\mathcal{P}$ $=\{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + k)$ , y ε ℝ} doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.2.101)

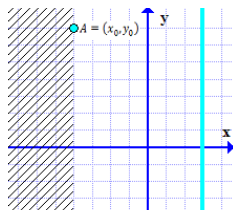



Şekil 4.2.101

vi. $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ \ x - k < 0$ ise

$-x + x_0 + \ y_0 = \ -x + k \Mapsto y_0 = k - x_0$ olduğundan

$\mathcal{P} = \{(x,\ y)|x < x_0,$ y ε ℝ } yandaki **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.102)



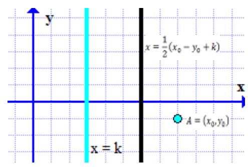

Şekil 4.2.102

vii. $x - x_0 < 0,\ y_0 < 0,\ \ x - k \geq 0$ ise

$-x + x_0 - \ y_0 = \ \ x - k \Mapsto x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + k)$ dir.

$\mathcal{P}$ $= \{(x,\ y)|x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + k)$, y ε ℝ} doğrusudur.

(Bkz. Şekil 4.2.103)

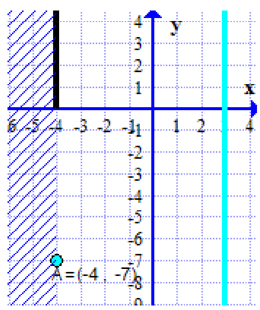



Şekil 4.2.103

viii. $x - x_0 < 0,\ y_0 < 0,\ \ x - k < 0$ ise

$-x + x_0 - \ y_0 = \ -x + k \Mapsto y_0 = x_0 - k$ olup

$\mathcal{P}$ $= \{(x,\ y)|x < x_0,$ y ε ℝ } yandaki **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.104)




Şekil 4.2.104

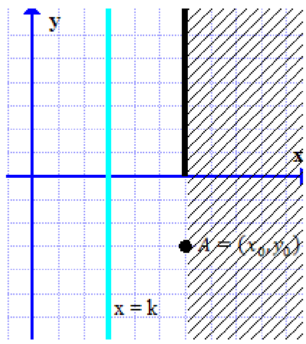
**SONUÇ 4.2.4 :**

s – parabolü yani verilen $A = (x_0,\ y_0)$ noktası ile $l \ldots y = mx + n$ doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri,

**1.** $|m| \to \infty\ ise$

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0, y \geq 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ kısıtları altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının apsisi $y_0 = k - x_0$ koşulunu sağladığında $\wp_1 = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y \geq 0\}$ **çözüm kümesi** elde edilir.

**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y_0 < 0,\ x - k \geq 0$ kısıtları altında $\wp_2 = \{(x, y)|x > x_0,\ y \in \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden $\wp = \wp_1 \cup \wp_2$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.105)

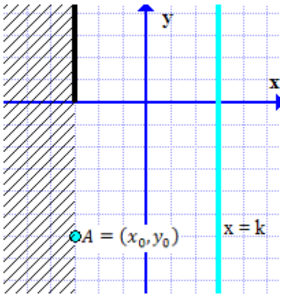



Şekil 4.2.105

**2.** $|m| \to \infty\ ise$

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k < 0$ kısıtları altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının apsisi $y_0 = x_0 - k$ koşulunu sağladığında $\wp_1 = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y \geq 0\}$ **çözüm kümesi** elde edilir.

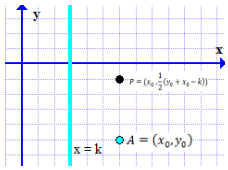
**b)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y_0 < 0,\ x - k < 0$ kısıtları altında $\wp_2 = \{(x,\ y)|x < x_0,\ y \in \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden $\wp = \wp_1 \cup \wp_2$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.106)




Şekil 4.2.106

**3.** $|m| \to \infty$ *ise*

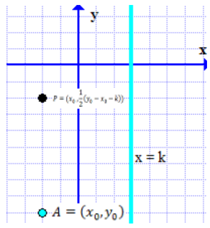
**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ , $y < 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ kısıtları sağladığında $\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.107)




Şekil 4.2.107

**4.** $|m| \to \infty$ *ise*

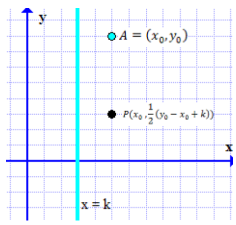
**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 \geq 0$ , $y < 0$ ve $x_0 - k < 0$ kısıtları sağladığında $\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 - k)\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.108)




Şekil 4.2.108

**5.** $|m| \to \infty$ *ise*

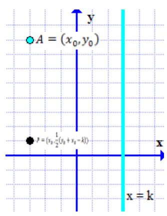
**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ , $y \geq 0$ ve $x_0 - k \geq 0$ kısıtları sağladığında $\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0 , y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 + k)\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.109)




Şekil 4.2.109

**6.** $|m| \to \infty$ *ise*

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0$ , $y \geq 0$ ve $x_0 - k < 0$ kısıtları sağladığında $\mathcal{P} = \{(x,\ y) | x = x_0 , y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. (Bkz. Şekil 4.2.110)




Şekil 4.2.110

**7.** $|m| \to \infty \, ise$

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k \geq 0$

kısıtları sağladığında $\mathcal{P}_1 = (x,\ y)|x = x_0,\ y = \frac{1}{2}(y_0 - x_0 + k)\}$ **çözüm kümesi** elde edilir.

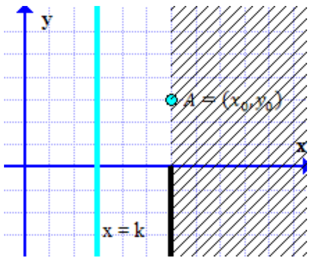
**b)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\ y < 0\ ve\ x_0 - k \geq 0$

kısıtları altında $A = (x_0, y_0)$ noktasının apsisi $y_0 = x_0 - k$ koşulunu sağladığında $\mathcal{P}_2 = \{(x,\ y)|x = x_0,\ y \geq 0\ \}$ **çözüm kümesi** elde edilir.

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\ y_0 \geq 0,\ \ x - k \geq 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_3 = \{(x,\ y)|x > x_0,\ y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.111)




Şekil 4.2.111

**8.** $|m| \to \infty \, ise$

**a)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0\ ,\ y \geq 0$ ve $x_0 - k < 0$

kısıtları sağladığında $\mathcal{P}_1 = (x,\ y)|x = x_0\ , y = \frac{1}{2}(y_0 + x_0 - k)\}$ **çözüm kümesi** elde edilir.

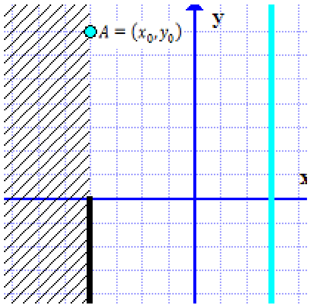
**b)** $x = x_0$ iken $y - y_0 < 0,\ y < 0$ ve $x_0 - k < 0$

kısıtları altında $A = (x_0,\ y_0)$ noktasının apsisi $y_0 = k - x_0$ koşulunu sağladığında $\mathcal{P}_2 = \{(x, y)|x = x_0, y < 0\ \}$ **çözüm kümesi** elde edilir.

**c)** $x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\ y_0 \geq 0,\ \ x - k < 0$ kısıtları altında

$\mathcal{P}_3 = \{(x, y)|x < x_0\ , y\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ \}$ **çözüm kümesinin** bileşiminden

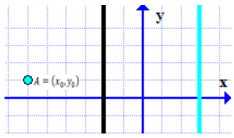
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ elde edilir. Şekli aşağıdaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.112)




Şekil 4.2.112

**9.** $|\, m| \rightarrow \infty\; ise$

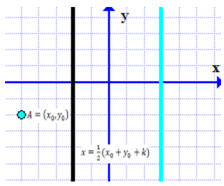
$x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\; y_0 \geq 0,\;\; x - k < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P} = \{(x,\; y)|x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + k),\; \text{y} \;\varepsilon\; \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. Şekli yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.113)




Şekil 4.2.113

**10.** $|\, m| \rightarrow \infty\; ise$

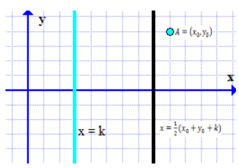
$x \neq x_0$ iken $x - x_0 > 0,\; y_0 < 0,\;\; x - k < 0$ kısıtları altında $\mathcal{P} = \{(x,\; y)|x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + k),\; \text{y} \;\varepsilon\; \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. Şekli yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.114)




Şekil 4.2.114

**11.** $|\, m| \rightarrow \infty\; ise$

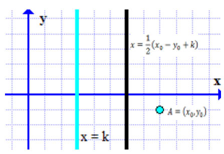
$\text{x} \neq \text{x}_0$ iken $x - x_0 < 0,\; y_0 \geq 0,\;\; x - k \geq 0$ kısıtları altında $\mathcal{P} = \{(x,\; y)|x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + k),\; \text{y} \;\varepsilon\; \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. Şekli yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.115)




Şekil 4.2.115

**12.** $|\, m| \rightarrow \infty\; ise$

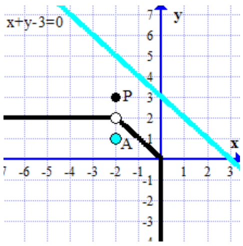
$x \neq x_0$ iken $x - x_0 < 0,\; y_0 < 0,\;\; x - k \geq 0$ kısıtları altında $\mathcal{P} = \{(x,\; y)|x = \frac{1}{2}(x_0 - y_0 + k)\;\; ,\text{y} \;\varepsilon\; \mathbb{R}\}$ **çözüm kümesi** elde edilir. Şekli yandaki gibidir. (Bkz. Şekil 4.2.116)



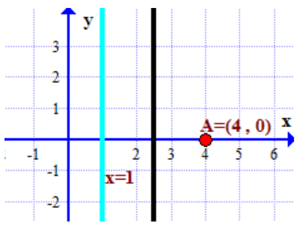

Şekil 4.2.116

## $d_s -$ Parabolü ile İlgili Örnekler

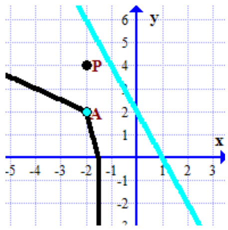
Aşağıdaki şekillerde sırasıyla $l$: $x + y - 3 = 0$ doğrusu ile $A = (-2,\ 1)$ noktası; $l$: $x - 1 = 0$ doğrusu ile $A = (4,\ 0)$ noktası; $l$: $2x + y - 2 = 0$ doğrusu ile $A = (-2,\ 2)$ noktası; $l$: $-4x + 6y - 12 = 0$ doğrusu ile $A = (3,\ 1)$ noktası; $l$: $3y - 12 = 0$ doğrusu ile $A = (2,\ 2)$ noktası; $l$: $3x - 12 = 0$ doğrusu ile $A = (1,\ 1)$ noktası; $l$: $2x + 3y - 12 = 0$ doğrusu ile ve $A = (-2,\ 2)$ noktası; $l$: $3x + 5y + 15 = 0$ doğrusu ile $A = (1,\ 1)$ noktası; $l$: $4x + 2y + 8 = 0$ doğrusu ile $A = (1,\ 2)$ noktası; $l$: $x - 3 = 0$ doğrusu ile $A = (-4,\ -7)$ noktası; $l$: $y - x - 3 = 0$ doğrusu ile $A = (2,\ 1)$ noktası; $l$: $x - 3 = 0$ doğrusu ile $A = (6,\ 3)$ noktası; $l$:$y - 2x - 4 = 0$ doğrusu ile $A = (2,\ -4)$ noktası; $l$: $2y - 7x - 7 = 0$ doğrusu ile $A = (-3, -6)$ noktası; $l$: $2y + 3x - 3 = 0$ doğrusu ile $A = (-3,\ 4)$ noktasına dair $d_s -$ parabollerinin grafikleri görülmektedir.



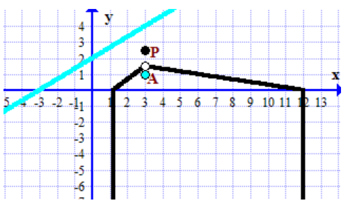
(a)



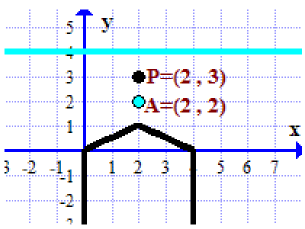
(b)



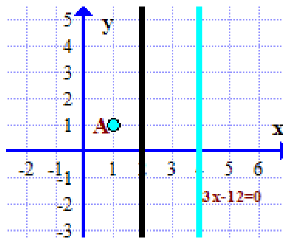
(c)



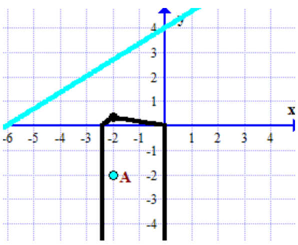
(d)

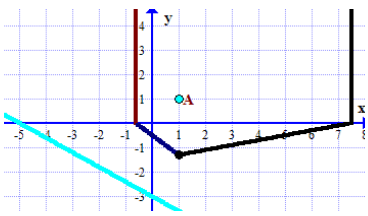


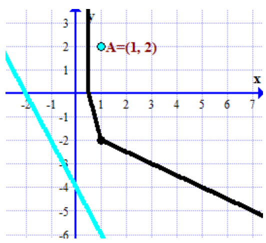
(e)



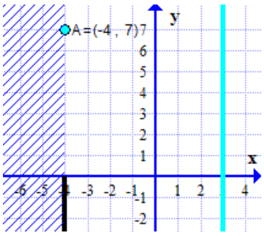
(f)



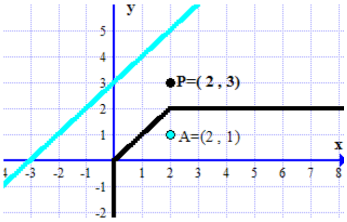



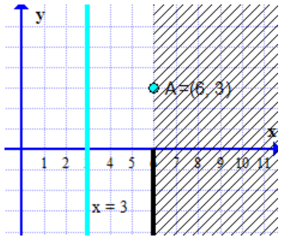
(g) (h) (k)



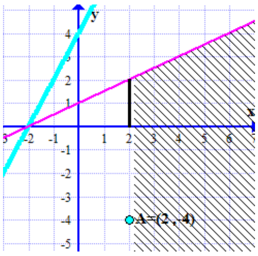

(m)



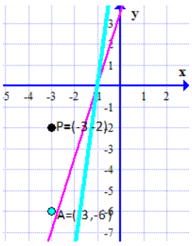

(n)



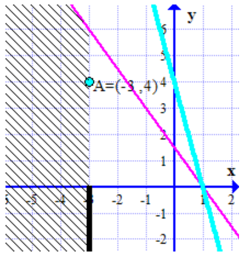

(o)




(p)




(q)




(r)

Şekil 4.2.117

# KAYNAKLAR

**[1]** Birkhoff, G. D., *"A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor, The Annals of Mathematics"*, Vol. 33 (1932), No. 2, 329-345.

**[2]** Coxeter, H. S. M., *"Introduction to Geometry"*, John Wiley&Sons Inst., 1961.

**[3]** Çolakoğlu, H. B., *"Bazı Öklidyen Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri"*, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2006.

**[4]** Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *"A Synthetic Approach to the Taxicab Circles"*, Applied Sciences (APPS), Vol. 9 (2007), 67-77.

**[5]** Çolakoğlu, H. B., "*Concerning the Alpha Distance, Algebras, Groups and Geometries"*, (accepted for publication).

**[6]** Gelişgen, Ö., Kaya, R. and Özcan, M., *"Distance Formula in the Chinese Checker Space"*, Int. J. of Pure and App. Math. (IJPAM), Vol. 26 (2006), No.1, 35-44.

**[7]** Grunbaum, B. and Mycielski, J., *"Some Models of Plane Geometries"*, The American Mathematical Monthly, Vol. 97 (1990), No. 9, 839-846.

**[8]** Hilbert, D., *"The Foundations of Geometry"*, Trans. by E. J. Townsend, Open Court, La Salle, Illinois, 1902 ("Grundlagen der Geometrie", Leibzig, 1899).

**[9]** Kaya, R., *"Analitik Geometri"*, Bilim ve Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2002.

**[10]** Krause, E. F., *"Taxicab Geometry"*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1975; Dover Publications, New York, 1987.

**[11]** MacLane, S., *"Metric Postulates for Plane Geometry"*, The American Mathematical Monthly, Vol. 66 (1959), No. 7, 543-555.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

**[12]** Mader, A., *“A Euclidean Model for Euclidean Geometry”*, The American Mathematical Monthly, Vol. 96 (1989), No. 1, 43-49.

**[13]** Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane,Springer, 509p.

**[14]** Menger, K., *"You Will Like Geometry"*, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL.,1952.

**[15]** Milmann, R. S. and Parker, G. D., *"Geometry; A Metric Approach with Models"*, Springer, 1991.