

Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Farklar Yöntemlerinin  
Uygulanması

Pınar Keskin

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2010

Application of Finite Difference Methods to the Some PDE Having Solitary Wave  
Solution

Pınar Keskin

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics and Computer Sciences

June 2010

Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Farklar Yöntemlerinin Uygulanması

Pınar Keskin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk

Haziran 2010

## ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Pınar Keskin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Farklar Yöntemlerinin Uygulanması" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

**İkinci Danışman** : -

### **Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

**Üye** : Prof. Dr. İdris Dağ

**Üye** : Doç. Dr. Bülent Saka

**Üye** : Doç. Dr. Ahmet Bekir

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Dereli

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu tezde, sonlu farklar metodunu kullanarak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü ile ilgilenilmiştir.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar verilmiştir. İlk olarak soliton dalgalarının kısa hikayesi verildikten sonra lineer olmayan oluşum denklemleri ve sonlu farklar metodu tanımlanmıştır. Son olarak, sonraki bölümde sayısal çözümleri araştırılacak olan equal width (EW) denklemi, regularized long wave (RLW) denklemi, modified equal width (MEW) denklemi ve modified regularized long wave (MRLW) denklemi, test problemleri ile birlikte tanıtılmıştır.

Sonraki bölümde; EW, RLW, MEW ve MRLW denklemi, sonlu farklar metodu kullanılarak çözülmüştür. Solitary dalgalarını ve iki solitary dalgasının çarpışmasını içeren iki test problemi, analitik ve önerilen metotlar arasında karşılaştırma yapmak için kullanılmıştır.

Son bölümde ise önerilen metotlar kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgaları, sonlu farklar metodu, EW, RLW, MEW, MRLW

## SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of some partial differential equations by using finite difference methods.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First brief history of soliton waves are given and the nonlinear evolution equation, finite difference methods are described. Finally, equal width (EW) equation, regularized long wave (RLW) equation, modified equal width (MEW) equation and modified regularized long wave (MRLW) equation solved numerically in the next chapters are introduced together with their test problems.

In the next chapter; EW, RLW, MEW and MRLW equations are solved by using finite difference methods. Two test problems including solitary waves and interaction of two solitary waves are used to compare between results of analytic and proposed methods.

In the last chapter, the result obtained by using the proposed methods are discussed.

Keywords: Solitary waves, finite difference methods, EW, RLW, MEW, MRLW

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, derslerimde ve tez çalışmalarımnda, bana danışmanlık eden, beni yönlendiren ve hiçbir yardımını esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk'a, yüksek lisans derslerimde değerli fikirlerine başvurduğum hocalarım Prof. Dr. Naci Özer, Prof. Dr. İdris Dağ ve Doç. Dr. Bülent Saka'ya ve bana her türlü olanağı sağlayan, her zaman yanımda olup beni destekleyen değerli aileme ve dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. TEMEL KAVRAMLAR .....	1
1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış .....	1
1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....	5
1.3 Sonlu Farklar Metodu .....	5
1.4 Genel Denklem .....	9
1.4.1 EW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri.....	10
1.4.2 RLW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri.....	13
1.4.3 MEW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri .....	16
1.4.4 MRLW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri .....	18
2. SAYISAL YÖNTEMİN UYGULANMASI .....	21
2.1 Birinci Metod (M1) .....	23
2.2 İkinci Metod (M2) .....	26
2.3 Metotların EW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması .....	30
2.3.1 Solitary dalga oluşumu .....	30
2.3.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	39
2.4 Metotların RLW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması.....	42
2.4.1 Solitary dalga oluşumu .....	42
2.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	51
2.5 Metotların MEW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması.....	54
2.5.1 Solitary dalga oluşumu .....	54
2.5.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	57



**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)**

	<b><u>Sayfa</u></b>
2.6 Metotların MRLW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması .....	60
2.6.1 Solitary dalga oluşumu .....	60
2.6.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	67
3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	72

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Basit bir dalga profili .....	1
1.2 Bir solitary dalgasının hareketi.....	3
2.1 $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu .....	31
2.2 $h = 0.03$ , $\Delta t = 0.05$ , $c = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	33
2.3 $h = 0.03$ , $\Delta t = 0.05$ , $c = 0.1$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için $t = 80$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	35
2.4 $h = 0.03$ , $\Delta t = 0.05$ , $c = 0.03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	37
2.5 $h = 0.03$ , $\Delta t = 0.05$ , $c = 0.03$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için $t = 80$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	39
2.6 iki solitary dalgasının çarpışması .....	41
2.7 $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu .....	43
2.8 $h = 0.125$ , $\Delta t = 0.1$ , $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	45
2.9 $h = 0.125$ , $\Delta t = 0.1$ , $c = 0.1$ ve $-60 \leq x \leq 90$ için $t = 20$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	47
2.10 $h = 0.125$ , $\Delta t = 0.1$ , $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	49
2.11 $h = 0.125$ , $\Delta t = 0.1$ , $c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	51
2.12 iki solitary dalgasının çarpışması .....	53
2.13 $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu .....	55
2.14 $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ , $A = 0.25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	57
2.15 iki solitary dalgasının çarpışması .....	59
2.16 $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu .....	61

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**

<b><u>Sekil</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
2.17	$h = 0.2, \Delta t = 0.025, c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 10$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	63
2.18	$h = 0.2, \Delta t = 0.025, c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için $t = 10$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	65
2.19	$h = 0.1, \Delta t = 0.01, c = 0.3$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 20$ zamanındaki  Analitik çözüm – Sayısal çözüm  .....	67
2.20	iki solitary dalgasının çarpışması .....	68

## TABLOLAR DİZİNİ

<b><u>Tablo</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
2.1	h = 0.03, $\Delta t = 0.05$ , c = 0.1 ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 32
2.2	h = 0.03, $\Delta t = 0.05$ , c = 0.1 ve $-5 \leq x \leq 40$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 34
2.3	h = 0.03, $\Delta t = 0.05$ , c = 0.03 ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 36
2.4	h = 0.03, $\Delta t = 0.05$ , c = 0.03 ve $-5 \leq x \leq 40$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 38
2.5	Farklı konum ve zaman artımları için t = 80 zamanındaki hata normları..... 40
2.6	İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 42
2.7	h = 0.125, $\Delta t = 0.1$ , c = 0.1 ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 44
2.8	h = 0.125, $\Delta t = 0.1$ , c = 0.1 ve $-60 \leq x \leq 90$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 46
2.9	h = 0.125, $\Delta t = 0.1$ , c = 0.03 ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 48
2.10	h = 0.125, $\Delta t = 0.1$ , c = 0.03 ve $-100 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 50
2.11	Farklı konum ve zaman artımları için t = 20 zamanındaki hata normları..... 52
2.12	İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 54
2.13	h = 0.1, $\Delta t = 0.2$ , A = 0.25 ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 56
2.14	Farklı konum ve zaman artımları için t = 20 zamanındaki hata normları..... 58
2.15	İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 60
2.16	h = 0.2, $\Delta t = 0.025$ , c = 0.03 ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 62
2.17	h = 0.2, $\Delta t = 0.025$ , c = 0.03 ve $-100 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 64

**TABLolar DİZİNİ (Devam Ediyor)**

<b><u>Tablo</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
2.18	$h = 0.1, \Delta t = 0.01, c = 0.3$ ve $0 \leq x \leq 100$ için korunum sabitleri ve hata normları.....	66
2.19	İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri .....	69

**KISALTMALAR DİZİNİ**

<b><u>Kısaltmalar</u></b>	<b><u>Açıklama</u></b>
EW	Equal Width
KdV	Korteweg de Vries
M1	Metot1
M2	Metot2
MEW	Modified Equal Width
MRLW	Modified Regularized Long Wave
RLW	Regularized Long Wave

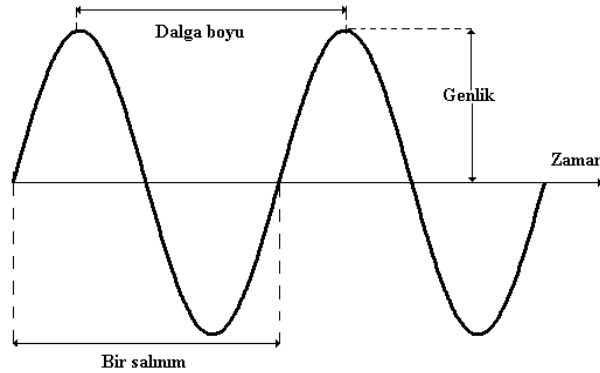
## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavramlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak soliton-solitary dalgaları ve lineer olmayan oluşum denklemleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Sonlu farklar metodu özetlendikten sonra sayısal çözümleri araştırılacak olan, EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerini içeren genel denklem başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtılmıştır. İlk bölümdeki temel kavramların bir çoğu (Irk, 2007) adlı çalışmadan alınmıştır. Ayrıntılı bilgi için (Irk, 2007) ve verdiği referanslar incelenebilir.

#### 1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Frekans: Birim zamandaki salınımların sayısı

Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, 1968).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarakta tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılabilirler. Solitary dalgalarını keşfeden Russel, laboratuvarında su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

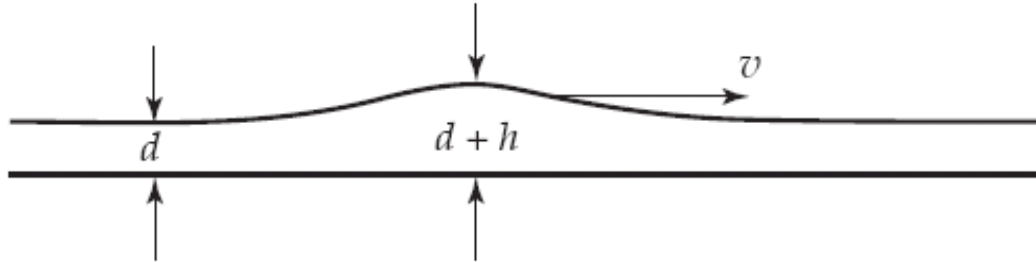
- (i) Solitary dalgaları  $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$  şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.



- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.
- (iv)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d+h)} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bakınız Şekil 1.2).



Şekil 1.2 Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağımı elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak

bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederek elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

O yıllarda Russel'in sonuçları deneysel olarak kaldı ve bir denklemin çözümü olarak solitary dalgaları elde edilemedi. Bununla birlikte, bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu oldu. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

formunda sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerine çalışmaya başladılar. Denklemden

- $u(x, t)$ , dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$ , küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$ , dağılma parametresine,
- $\gamma$ , lineer olmayan parametreye,
- $T$ , yüzey gerilimine,
- $\rho$ , suyun yoğunluğuna,

karşılık gelmektedir. Korteweg ve de Vries, (1.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Buradaki  $\tilde{u}(x - vt)$  terimi, Russell'in solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries, solitary dalgaların varlığını kanıtlamış oldular ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınladılar (Korteweg and de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi

sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky and Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

## 1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri  $t$  zamanı olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri,  $K[u]$ ;  $u$  ve  $u$ 'nun  $x$  değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere

$$u_t = K[u] \quad (1.4)$$

formundadır. Eğer  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir.

Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise, mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok daldaki problemlerde gözlenmektedir (Zheng, 2004).

## 1.3 Sonlu Farklar Metodu

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferensiyel denklemler, kısmi türevli diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ile ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri

çözöbilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar metodu bu yöntemlerden birisidir. Sonlu farklar metodu bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a, b]$  tanım aralığı için,  $N$  bir pozitif tamsayı,  $h = \frac{b-a}{N}$  ve parçalanma noktaları

$$x_m = a + mh, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda,  $u(x)$  fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere,  $u(x_m + h)$  ve  $u(x_m - h)$  ifadelerinin  $x_m$  noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u(x_m + h) = u(x_m) + hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.5)$$

$$u(x_m - h) = u(x_m) - hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (1.6)$$

olarak bulunabilir. Sırasıyla, (1.5-1.6) eşitliklerinden  $u_x(x_m)$  teriminin çekilmesi sonucunda

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) - \dots, \quad (1.7)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_m - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (1.8)$$

yazılabileceğinden  $u$  ifadesinin  $x_m$  noktasındaki birinci türevi

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} + \mathcal{O}(h) \Rightarrow (u_x)_m = \frac{u_{m+1} - u_m}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.9)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_m - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \Rightarrow (u_x)_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.10)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.9-1.10) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve  $\mathcal{O}(\cdot)$  ile gösterilir.

Eğer (1.6) eşitliği, (1.5) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} u_x(x_m) &= \frac{u(x_m + h) - u(x_m - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ (u_x)_m &= \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca, (1.5) ve (1.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_m) &= \frac{u(x_m + h) - 2u(x_m) + u(x_m - h))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ (u_{xx})_m &= \frac{u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı elde edilebilir.

Daha yüksek dereceden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımlarını bulmakta mümkündür:

$$u(x_m + 2h) = u(x_m) + 2hu_x(x_m) + \frac{(2h)^2}{2!}u_{xx}(x_m) + \dots, \quad (1.13)$$

$$u(x_m - 2h) = u(x_m) - 2hu_x(x_m) + \frac{(2h)^2}{2!}u_{xx}(x_m) - \dots \quad (1.14)$$

olarak  $u(x_m - 2h)$  ve  $u(x_m + 2h)$  seri açılımları yazılabilir.

$u_x$  için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı bulunmak istendiğinde

$$(u_x)_m = au_{m-2} + bu_{m-1} + cu_m + du_{m+1} + eu_{m+2}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki terimlerin yerine  $x_m$  noktasındaki Taylor seri açılımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 0 \\ h(-2a - b + d + 2e) &= 1 \\ \frac{h^2}{2}(4a + b + d + 4e) &= 0 \\ \frac{h^3}{6}(-8a - b + d + 8e) &= 0 \\ \frac{h^4}{24}(16a + b + d + 16e) &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a = \frac{1}{12h}, b = -\frac{8}{12h}, c = 0, d = \frac{8}{12h}, e = -\frac{1}{12h}$$

elde edilir. Böylece birinci türev için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$(u_x)_m = \frac{u_{m-2} - 8u_{m-1} + 8u_{m+1} - u_{m+2}}{12h} + \mathcal{O}(h^4) \quad (1.15)$$

olarak bulunabilir.

$u_{xx}$  için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı bulunmak istendiğinde

$$(u_{xx})_m = au_{m-2} + bu_{m-1} + cu_m + du_{m+1} + eu_{m+2}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki terimlerin yerine  $x_m$  noktasındaki Taylor seri açılımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 0 \\ h(-2a - b + d + 2e) &= 0 \\ \frac{h^2}{2}(4a + b + d + 4e) &= 1 \\ \frac{h^3}{6}(-8a - b + d + 8e) &= 0 \\ \frac{h^4}{24}(16a + b + d + 16e) &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$a = -\frac{1}{12h^2}, b = \frac{16}{12h^2}, c = \frac{1}{12h^2}, d = \frac{16}{12h^2}, e = -\frac{1}{12h^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla ikinci türev için 5 noktalı sonlu fark yaklaşımı

$$(u_{xx})_m = \frac{-u_{m-2} + 16u_{m-1} - 30u_m + 16u_{m+1} - u_{m+2}}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4) \quad (1.16)$$

olarak bulunabilir.

Benzer şekilde, iki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımları da Taylor serisi kullanılarak bulunabilir.  $N, T$  pozitif tamsayılar,  $a \leq x \leq b$ ,  $a' \leq t \leq b'$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $\Delta t = \frac{b'-a'}{T}$  ve parçalanma noktaları

$$x_m = a + mh, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad \text{ve} \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, T$$

olsun. Bu durumda,  $x$  ve  $t$  değişkenlerine göre birinci türev için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.17)$$

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.18)$$

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.19)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (1.20)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u_{m,n} - u_{m,n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (1.21)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (1.22)$$

olarak bulunabilir. İkinci ve üçüncü türev için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde bulunabilir. Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995) incelenebilir.

#### 1.4 Genel Denklem

Bu çalışmada

$$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0 \quad (1.23)$$

formundaki lineer olmayan oluşum denkleminin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümü araştırılacaktır. Denklemden  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ve  $\alpha_3$  pozitif reel sabitleri,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise konum ve zamana göre türevi,  $p$  ise değeri 1 veya 2 olan bir pozitif tamsayıyı göstermektedir.

Çalışma boyunca denklemin sayısal çözümleri araştırılırken

$$\left. \begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) = 0 \\ u'(a, t) = u'(b, t) = 0 \\ u''(a, t) = u''(b, t) = 0 \end{aligned} \right\} t > 0 \quad (1.24)$$

sınır şartları,  $f(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.25)$$

başlangıç şartı ve sayısal metodun analitik çözümle olan uyumunun kontrolü için ise

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{m=0}^N |u_m - u(x_m, t)|^2} \quad (1.26)$$

$$L_\infty = \max_m |u_m - u(x_m, t)|$$

$L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları kullanılacaktır. Burada  $u_m$ ,  $x_m$  noktasındaki yaklaşık çözümü,  $u(x_m, t)$  ise tam çözümü göstermektedir.

#### 1.4.1 EW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.23) denkleminde  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $p = 1$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alındığında

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.27)$$

formundaki EW denklemi elde edilir. Denkleminde  $\mu$  reel sabiti,  $x$  ve  $t$  alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. EW denklemi için sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  şeklindedir. Bununla birlikte sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığına sınırlandırılacaktır. EW denklemi sığ su dalgaları ve ion akustik plazmalar gibi bir çok fiziksel olayı modellemektedir (Peregrine, 1966; Benjamin et.al., 1972). Bununla birlikte denklem ilk kez Morrison tarafından lineer olmayan bir ortamda tek boyutlu bir dalganın yayılmasını modellemek için daha bilindik bir denklem olan RLW denkleminin yerine önerilmiştir (Morrison, et.al., 1981). EW denklemi, sınırlı sayıdaki başlangıç ve sınır şartları için analitik olarak çözülebildiğinden dolayı denklemin çözümü için bir çok sayısal yöntem önerilmiştir.

(Gardner and Gardner, 1992) adlı çalışmada kübik B-spline Galerkin metodu kullanılarak EW denkleminin sayısal çözümü solitary dalgasının yayılması ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemleri kullanılarak araştırılmıştır. (Zaki, 2000a), EW denkleminin sayısal çözümünü en küçük kareler sonlu elemanlar metodunu kullanarak elde etmiştir. Zaki ayrıca Petrov Galerkin sonlu elemanlar metodu ile birlikte kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak EW denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmıştır (Zaki, 2001). Kübik spline kolokeyşin (Irk et.al., 2003) ve kübik B-Spline kolokeyşin (Saka et.al., 2003) metotları ile EW denkleminin sayısal



çözümü araştırılmıştır. Raslan, EW denkleminin sayısal çözümünü kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanarak (Raslan, 2004) adlı çalışmasında ve kuartik B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar metodu kullanılarak (Raslan, 2005a) adlı çalışmasında araştırmıştır. (Esen, 2005) adlı çalışmada ise EW denkleminin sayısal çözümü kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak lumped Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile araştırılmıştır. Açık sonlu farklar metodu ile EW ve RLW denkleminin sayısal çözümü ise (Ramos, 2006) adlı çalışmada incelenmiştir. (Saka, 2006) adlı çalışmada denklemin sayısal çözümü için kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu önerilmiştir. EW denkleminin kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümü ise (Dağ et.al., 2007) adlı çalışmada çalışılmıştır. Kuartik B-spline fonksiyonların kullanıldığı Galerkin metodu, Cosine Expansion tabanlı diferensiyel kuadrature metodu ve radial tabanlı meshless metotlarını içeren üç farklı yöntem ile EW denkleminin sayısal çözümü ise (Saka et.al., 2008a) adlı çalışmada incelenmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için makaleler ve verdikleri referanslar incelenebilir.

### **Solitary dalga oluşumu**

EW denkleminin solitary dalga çözümü  $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$  olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - ct]), a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.28)$$

formundadır (Morrison, et.al., 1981). (1.28) eşitliği, başlangıç anında tepe noktası  $x_0$  noktasına karşılık gelen  $3c$  genliğine ve  $c$  dalga hızına sahip bir solitary dalgasının  $[a, b]$  konum aralığında soldan sağa doğru hareketini modellemektedir.

(1.28) eşitliğinde  $t = 0$  alınırsa

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.29)$$

başlangıç şartı elde edilir.

Solitary dalga oluşumu için korunum sabitleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\
C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\
C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^3 dx
\end{aligned} \tag{1.30}$$

eşitlikleri ile verilir ve sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelmektedir (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin programın çalışma süresi boyunca sabit kalmaları beklenir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri,  $[a, b]$  tanım aralığında yamuklar kuralı ile hesaplanacaktır. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c}{k}, \\
C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\
C_3 &= \frac{144c^3}{5k}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

olarak bulunabilir.

### İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$  başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla  $x_1 + c_1$  ve  $x_2 + c_2$  noktalarına karşılık gelecek şekilde  $[a, b]$  konum aralığında yerleştirilen  $3c_1$  ve  $3c_2$  genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi  $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$  olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(k[x - x_1 - c_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(k[x - x_2 - c_2]) \tag{1.32}$$

formunda modellenenir (Morrison, et.al., 1981). (1.32) eşitliğinde  $c_1$  ve  $c_2$  sırasıyla dalgaların hızına karşılık gelmektedir.  $c_1 > c_2$  ve  $x_2 + c_2 > x_1 + c_1$  seçimleri yapıldığında konum aralığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda, diğeri ise sağda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet

sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left( \frac{c_1 + c_2}{k} \right), \\ C_2 &= \left( \frac{12}{k} + \frac{48k\mu}{5} \right) (c_1^2 + c_2^2), \\ C_3 &= \frac{144}{5k} (c_1^3 + c_2^3) \end{aligned} \quad (1.33)$$

olarak bulunabilir.

#### 1.4.2 RLW denkleminin, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.23) denkleminde  $\alpha_1 = 1$ ,  $p = 1$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alındığında

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.34)$$

formundaki lineer olmayan RLW denkleminin elde edilir. Denkleminde  $\varepsilon$  ve  $\mu$  reel sabitler,  $x$  ve  $t$  alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. RLW denkleminin için sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığına sınırlandırılacaktır.

Peregrine ardışık dalgaların gelişimini modellemek için RLW denkleminin önermiş ve denklemin sonlu farklar metodu ile ilk sayısal çözümlerini elde etmiştir (Peregrine, 1966). T. B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony ise, RLW denkleminin dalga denkleminin çözümlerini, daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin dalga denkleminin çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir (Benjamin et.al., 1972). (Eilbeck and McGuire, 1975) adlı çalışmada birinci ve ikinci mertebeden iki adımlı ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu farklar metotları kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Eilbeck ve McGuire 1977 yılında, üç adımlı sonlu farklar yöntemi üzerinde daha ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır (Eilbeck and McGuire, 1977). Jain ve Iskandar ise RLW denkleminin sayısal çözümünü farklı formdaki sonlu farklar metotlarını kullanarak araştırmışlardır (Jain and Iskandar, 1979). Kübik spline şekil fonksiyonları kullanılarak Galerkin metodu ile denklemin sayısal çözümü (Alexander and Morris, 1979) adlı makalede çalışılmıştır.

Kübik B-spline Galerkin metodu ile RLW denkleminin sayısal çözümü (Gardner and Gardner,1990; Gardner and Dağ, 1995) adlı makalelerde araştırılmıştır. (Gardner et.al., 1995) adlı çalışmada kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümü yapılmıştır. RLW denkleminin sayısal çözümü, en küçük kareler sonlu elemanlar metodunun kullanıldığı (Gardner et.al., 1996) adlı çalışmada araştırılmıştır. (Gardner et.al., 1997) isimli çalışmada kuintik B-spline kullanılarak Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Dağ, kuadratik B-spline kullanarak en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü (Dağ, 2000) adlı çalışmada araştırmıştır. Kübik B-spline kullanılarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü ise Dağ ve Özer elde etmişlerdir (Dağ and Özer, 2001). Doğan ise kuadratik B-spline ve lineer şekil fonksiyonlarını kullanarak Petrov Galerkin ve Galerkin metotlarıyla RLW denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmıştır (Doğan, 2001; Doğan, 2002). Kübik B-spline kolokeyşin ve kuintik B-spline Galerkin metotları ile denklemin sayısal çözümü ise (Dağ et.al., 2004; Dağ et.al. 2006) adlı çalışmalarda araştırılmıştır. Kübik spline kolokeyşin sonlu elemanlar yöntemi ile denklemin sayısal çözümü (Irk et.al.,2005) adlı makalede çalışılmıştır. Kübik B-spline sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü (Raslan, 2005b) adlı çalışmada Raslan tarafından yapılmıştır. Septik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü ise kolokeyşin metodu ile araştırılmıştır (Soliman and Hussien, 2005). Kutluay ve Esen 2006 yılında yaptıkları çalışmada, RLW denkleminin sayısal çözümü için bir sonlu farklar yöntemini (Kutluay and Esen, 2006) ve aynı denklemin çözümü için kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak lumped Galerkin sonlu elemanlar metodunu (Esen and Kutluay, 2006) önermişlerdir. Saka ve Dağ, RLW denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline şekil fonksiyonları ile birlikte Galerkin metodunu kullanmışlardır (Saka and Dağ, 2008). Saka ve arkadaşları 2008 yılında Kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanarak denklemin sayısal metodunu araştırmışlardır (Saka et.al., 2008b).

### Solitary dalga oluşumu

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $3c$  genlikli,  $v = 1 + \varepsilon c$  dalga hızlı RLW denkleminin analitik çözümü  $k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$  olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t]) \quad (1.35)$$

formunda yazılabilir (Peregrine, 1966). (1.35) eşitliğinde  $t = 0$  alındığında

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.36)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

RLW denkleminin için korunum sabitleri sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^3 + 3u^2) dx \end{aligned} \quad (1.37)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c}{k}, \\ C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\ C_3 &= \frac{36c^2}{5k} (4c + 5) \end{aligned} \quad (1.38)$$

olarak bulunabilir.

### İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$  başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarına karşılık gelecek şekilde  $[a, b]$  konum aralığında yerleştirilen  $3a_1$  ve  $3a_2$  genliklerine sahip iki

solitary dalgasının hareketi  $a_i = \frac{4k_i^2}{1 - 4k_i^2}$ ,  $i = 1, 2$  olmak üzere

$$u(x, 0) = 3a_1 \operatorname{sech}^2(k_1 [x - x_1]) + 3a_2 \operatorname{sech}^2(k_2 [x - x_2]) \quad (1.39)$$

formunda modellenenir. (1.39) eşitliğinde  $a_1 > a_2$  ve  $x_2 > x_1$  seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left( \frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{k_1 k_2} \right), \\ C_2 &= \frac{12}{k_1 k_2} (a_1^2 k_2 + a_2^2 k_1) + \frac{48\mu}{5k_2 k_1} (k_1^2 a_1^2 k_2 + k_2^2 a_2^2 k_1), \\ C_3 &= \frac{36}{5k_1 k_2} (4a_1^3 k_2 + 4a_2^3 k_1 + 5a_1^2 k_2 + 5a_2^2 k_2) \end{aligned} \quad (1.40)$$

olarak bulunabilir.

### 1.4.3 MEW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.23) denkleminde  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon$ ,  $p = 2$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alınırsa

$$u_t + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.41)$$

formundaki MEW denklemi elde edilir. Denkleminde  $\varepsilon$  ve  $\mu$  reel sabit,  $x$  ve  $t$  alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. MEW denklemi için sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığına sınırlandırılacaktır. MEW denkleminde EW denklemi gibi sıg su dalgaları ve ion akustik plazmalar gibi bir çok fiziksel olayı modellemektedir.

Zaki, kuintik B-spline sonlu elemanları kullanarak Petrov Galerkin metodu ile MEW denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır (Zaki, 2000b). 2005 yılında Evans ve Raslan denklemin sayısal çözümü için kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak kolokeyşin metodu ile denklemin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır (Evans and Raslan, 2005). Aynı denklemin sayısal çözümü ise kuintik B-spline şekil

fonksiyonları kullanılarak Saka tarafından araştırılmıştır (Saka, 2007). Esen ve Kutluay ise MEW denkleminin sayısal çözümü için sonlu farklar metodunu önermiştir (Esen and Kutluay, 2008).

### Solitary Dalga Oluşumu

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$  genlikli,  $v = c$  dalga hızlı MEW denkleminin analitik çözümü  $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$  ve  $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - ct]), \quad (1.42)$$

olarak verilebilir (Gardner and Gardner, 1992). (1.42) eşitliğinde  $t = 0$  alındığında

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0]) \quad (1.43)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

Olver tarafından (Olver, 1979) adlı çalışmada EW ve RLW denklemleri için verilen kütle, enerji ve momentuma karşılık gelen korunum sabitleri MEW denklemini için ise

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^4 dx \end{aligned} \quad (1.44)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı

yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A\pi}{k}, \\ C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3}, \\ C_3 &= \frac{4A^4}{3k} \end{aligned} \quad (1.45)$$

olarak bulunabilir.

### İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$  başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarına karşılık gelecek şekilde  $[a, b]$  konum aralığında yerleştirilen  $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  olmak üzere  $A_1 = \sqrt{\frac{6c_1}{\varepsilon}}$  ve  $A_2 = \sqrt{\frac{6c_2}{\varepsilon}}$  genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k[x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k[x - x_2]) \quad (1.46)$$

formunda modellenenir. (1.46) eşitliğinde  $A_1 > A_2$  ve  $x_2 > x_1$  seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır ve genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra önündeki genliği ve hızı düşük olan diğer dalgaya yetişerek bir çarpışma gerçekleşecektir. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi}{k} (A_1 + A_2), \\ C_2 &= \frac{2}{k} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{2\mu k}{3} (A_1^2 + A_2^2), \\ C_3 &= \frac{4}{3k} (A_1^4 + A_2^4) \end{aligned} \quad (1.47)$$

olarak bulunabilir.

#### 1.4.4 MRLW denkleminin, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.23) denkleminde  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon$ ,  $p = 2$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alınırsa

$$u_t + u_x + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.48)$$

formundaki MRLW denkleminin elde edilir. Denkleminde  $\varepsilon$  ve  $\mu$  reel sabit,  $x$  ve  $t$  alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. MRLW denkleminin için sınır şartlarında diğer denklemlerde olduğu gibi  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  şeklinde olup sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığına sınırlandırılacaktır.

MRLW denkleminin sayısal çözümü sonlu farklar yöntemi ile Khalifa ve meslektaşları tarafından (Khalifa et.al., 2007) adlı çalışmada araştırılmıştır. (Haq et.al.,



2010) adlı çalışmada ise MRLW denkleminin sayısal çözümü kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile araştırılmıştır. Raslan ve Danaf ise MRLW denkleminin çözümü için kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanmıştır (Raslan and Danaf, 2010).

### Solitary Dalga Oluşumu

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$  genlikli,  $v = c + 1$  dalga hızı MRLW denkleminin analitik çözümü  $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$  ve  $k = \frac{c}{\sqrt{\mu}(c+1)}$  olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - (c+1)t]), \quad (1.49)$$

olarak verilebilir. (1.49) eşitliğinde  $t = 0$  alındığında

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0]) \quad (1.50)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

MRLW denklemini için korunum sabitleri EW, RLW ve MEW denklemlerinin korunum sabitlerine benzer olarak

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( u^4 - \frac{6}{\varepsilon} \mu(u_x)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (1.51)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Olver, 1979). Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple

programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi A}{k}, \\ C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \\ C_3 &= \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \end{aligned} \quad (1.52)$$

olarak bulunabilir.

### İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$  başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarına karşılık gelecek şekilde  $[a, b]$  konum aralığında yerleştirilen  $k_i = \frac{c_i}{\sqrt{\mu}(c_i + 1)}$ ,  $A_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$ ,  $i = 1, 2$  olmak üzere  $A_1$  ve  $A_2$  genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k_1 [x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k_2 [x - x_2]) \quad (1.53)$$

formunda modellenenir. (1.53) eşitliğinde  $A_1 > A_2$  ve  $x_2 > x_1$  seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga olan daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_2), \\ C_2 &= \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{3k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \\ C_3 &= \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2) \end{aligned} \quad (1.54)$$

olarak bulunabilir.

## BÖLÜM 2

### SAYISAL YÖNTEMİN UYGULANMASI

Bu bölümde, (1.23) kısmi diferensiyel denkleminin sonlu farklar metodu kullanılarak sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu iki test problemi için hata normları, korunum sabitleri hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

İlk bölümde bahsedilen

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0 \quad (2.3)$$

sınır şartlarını ve  $f(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.4)$$

başlangıç şartı ile birlikte verilen  $[a, b]$  konum aralığı üzerinde tanımlanan

$$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0 \quad (2.5)$$

kısmi türevli diferensiyel denklemini ele alalım.

Denklemden

$$v = u - \alpha_3 u_{xx} \quad (2.6)$$

dönüşümü yapılırsa, (2.5) denklemi

$$v_t = -\alpha_1 u_x - \alpha_2 u^p u_x \quad (2.7)$$

formunda yazılabilir.  $\Delta t$  zaman artımı olmak üzere  $v$ 'nin zamana göre Taylor seri açılımından

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t v_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} v_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} v_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (2.8)$$

yazılır ve zamana göre ikinci ve üçüncü türev için

$$v_{tt}^n \approx \frac{v_t^{n+1} - v_t^n}{\Delta t} \quad (2.9)$$

$$v_{ttt}^n \approx \frac{v_t^{n+1} - 2v_t^n + v_t^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.10)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t v_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} \theta_1 \left( \frac{v_t^{n+1} - v_t^n}{\Delta t} \right) + \frac{\Delta t^3}{6} \theta_2 \left( \frac{v_t^{n+1} - 2v_t^n + v_t^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \quad (2.11)$$

ve

$$v^{n+1} - v_t^{n+1} \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) = v^n + v_t^n \left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} v_t^{n-1} \quad (2.12)$$

elde edilir. Son eşitlikte  $v$  ile  $v_t$  yerine sırasıyla (2.6) ile (2.7) kullanılırsa

$$(u - \alpha_3 u_{xx})^{n+1} + \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x)^{n+1} = (u - \alpha_3 u_{xx})^n - \quad (2.13)$$

$$\left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x)^n - \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x)^{n-1}$$

bulunur. Burada  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  değerleri metodun doğruluğu en yüksek olacak şekilde sonradan belirlenecek parametrelerdir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u^{n+1} + \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u^p)^{n+1}) u_x^{n+1} - \alpha_3 (u_{xx})^{n+1} = \quad (2.14)$$

$$u^n - \alpha_3 (u_{xx})^n - \left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)^n + \alpha_2 (u^p u_x)^n) -$$

$$\frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)^{n-1})$$

bulunur. Son bulunan denklem, (2.5) denkleminin zamana göre parçalanma yapılmış durumudur. Zamana göre parçalanması yapılan denklemin, (2.5) denklemi ile tutarlı olup olmadığını anlamak için kesme hatasının bulunması gerekmektedir. Çözümü aranan  $u$  fonksiyonunun zaman değişkenine göre istenildiği kadar türevlenebilmesi koşuluyla  $u^{n+1}$ ,  $u_x^{n+1}$ ,  $(u_{xx})^{n+1}$ ,  $u^{n-1}$  ve  $(u_x)^{n-1}$  terimleri için Taylor seri

açılımları

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (u_t)^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (u_{tt})^n + \frac{1}{3!} \Delta t^3 (u_{ttt})^n + \frac{1}{4!} \Delta t^4 (u_{tttt})^n + \dots$$

$$u^{n-1} = u^n - \Delta t (u_t)^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (u_{tt})^n - \frac{1}{3!} \Delta t^3 (u_{ttt})^n + \frac{1}{4!} \Delta t^4 (u_{tttt})^n + \dots$$

$$(u_x)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} u^{n+1}, \quad (u_{xx})^{n+1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{n+1}, \quad (u_x)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x} u^{n-1}$$

olacaktır. Bulunan eşitlikler (2.14) de yerine yazılırsa kesme hataları

(i)  $p = 1$  için

a)  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = 0$  alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^3}{12} (-3a_1 a_2 (u_x)^n (u_{xt})^n - a_3 a_2^2 (u_x^2)^n (u_{xxt})^n + \dots) + \dots$$

b)  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = -\frac{1}{2}$  alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^4}{24} ((u_{tttt})^n - 10a_3 a_2^2 (u_x)^n (u_{xt})^n (u_{xxt})^n + \dots) + \dots$$

(ii)  $p = 2$  için

a)  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = 0$  alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^3}{12} (2a_2 a_3^2 (u_x)^n (u_{xxt}^2)^n + 6a_2^3 (u^4)^n (u_x^3)^n + \dots) + \dots$$

b)  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = -\frac{1}{2}$  alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^4}{24} ((u_{tttt})^n + 2a_1 (u_{xttt})^n - 48a_2^4 (u^5)^n + \dots) + \dots$$

olarak bulunur. Dolayısıyla  $\Delta t \rightarrow 0$  iken  $T_n \rightarrow 0$  olduğundan dolayı önerilen metot zaman parçalanmasına göre sayısal çözümü araştırılan denklem ile tutarlıdır.

## 2.1 Birinci Metod (M1)

(2.14) denkleminde  $x_m$  bölünme noktalarında konuma göre türevler için 3 noktalı sonlu farklar yaklaşımı olan

$$(u_x)_m = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$(u_{xx})_m = \frac{u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

formundaki eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}(u_x)_m^n &= \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \\ (u_x)_m^{n-1} &= \frac{u_{m+1}^{n-1} - u_{m-1}^{n-1}}{2h} \\ (u_{xx})_m^n &= \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}u_{m-1}^{n+1} \left[ - \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{2h} - \frac{\alpha_3}{h^2} \right] + \\ u_m^{n+1} \left[ 1 + \frac{2\alpha_3}{h^2} \right] + u_{m+1}^{n+1} \left[ \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{2h} - \frac{\alpha_3}{h^2} \right] =\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) -$$

$$\frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1})$$

bulunur. (2.15) denklem sistemi  $x_m$ ,  $m = 1, \dots, N - 1$  bölünme noktalarında  $N - 1$  denklem ve  $N + 1$  bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. (2.1) olarak bölümün başında verilen sınır şartlarından

$$u_0^{n+1} = 0, u_N^{n+1} = 0, t > 0\tag{2.16}$$

yazılabilir. Sınır şartlarından yazılan  $u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0$  eşitliklerinin sisteme ilave edilmesiyle yeni denklem sistemi  $N - 1$  denklem ve  $N - 1$  bilinmeyenden oluşan bir sisteme dönüşür. Böylece sınır şartları ilave edilmiş denklem sistemini

$$\begin{aligned}(u_x)_m^n &= \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \\ (u_x)_m^{n-1} &= \frac{u_{m+1}^{n-1} - u_{m-1}^{n-1}}{2h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_{xx})_m^n &= \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} \\
\lambda_{m1} &= - \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{2h} - \frac{\alpha_3}{h^2} \\
\lambda_{m2} &= 1 + \frac{2\alpha_3}{h^2} \\
\lambda_{m3} &= \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{2h} - \frac{\alpha_3}{h^2} \\
\lambda_{m4} &= u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) - \\
&\quad \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1})
\end{aligned}$$

olmak üzere

$m = 1$  için

$$\lambda_{m2} u_1^{n+1} + \lambda_{m3} u_2^{n+1} = \lambda_{m4}$$

$m = 2$  için

$$\lambda_{m1} u_1^{n+1} + \lambda_{m2} u_2^{n+1} \left[ 1 + \frac{2\alpha_3}{h^2} \right] + \lambda_{m3} u_3^{n+1} = \lambda_{m4}$$

⋮

(2.17)

$m = N - 2$  için

$$\lambda_{m1} u_{N-3}^{n+1} + \lambda_{m2} u_{N-2}^{n+1} + \lambda_{m3} u_{N-1}^{n+1} = \lambda_{m4}$$

$m = N - 1$  için

$$\lambda_{m1} u_{N-2}^{n+1} + \lambda_{m2} u_{N-1}^{n+1} = \lambda_{m4}$$

formunda açık olarak yazılabilir. Sınır şartları uygulandıktan sonra açık bir şekilde yazılan (2.17) denklem sistemi, katsayılarda bulunan  $(u_m^{n+1})^p$  teriminden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sisteminin çözülebilmesi için her bir zaman adımında  $(u_m^{n+1})^p$  yerine ilk olarak bir önceki zaman adımındaki değeri alınmış ve hesaplanan değer sadece  $(u_m^{n+1})^p$  değerine atanarak bir iç iterasyon yapılmıştır. İç iterasyon

işlemi tüm hesaplamalarda 5 kere yapılmıştır. Böylece  $u_m^{n+1}$  terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılarak sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

### Birinci metod için başlangıç durumu ve sayısal hesaplamalar

İlk zaman adımında ( $t = 0$  anında), (2.4) başlangıç şartı yardımıyla  $u_0^0, u_1^0, \dots, u_N^0$  bilinmeyenleri bulunabilir.

$u_0^1, u_1^1, \dots, u_N^1$  bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.17) denklem sisteminde  $n = 0$ ,  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = 0$  alınarak kapalı çözüm araştırılırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.17) denklem sistemi 3lü Thomas algoritması yardımıyla kolaylıkla çözülebilir. Böylece  $u_0^1, u_1^1, \dots, u_N^1$  değerleri hesaplanabilir.

$u_0^2, u_1^2, \dots, u_N^2$  bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.17) denklem sisteminde  $n = 1$ ,  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = -\frac{1}{2}$  alınırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.17) sistemi 3lü Thomas algoritması yardımıyla kolaylıkla çözülebilir. Böylece  $u_0^2, u_1^2, \dots, u_N^2$  değerleri hesaplanmış olur. Bundan sonra  $n$  hesaplanacak zaman adımı olmak üzere  $u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_N^{n+1}$  bilinmeyenleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan değerler kullanılır.

## 2.2 İkinci Metod (M2)

(2.14) denkleminde  $x_m$  bölünme noktalarında konuma göre türevler için 5 noktalı sonlu farklar yaklaşımı olan

$$\begin{aligned} (u_x)_m &= \frac{u_{m-2} - 8u_{m-1} + 8u_{m+1} - u_{m+2}}{12h} + \mathcal{O}(h^4) \\ (u_{xx})_m &= \frac{-u_{m-2} + 16u_{m-1} - 30u_m + 16u_{m+1} - u_{m+2}}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

formundaki eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned} (u_x)_m^n &= \frac{u_{m-2}^n - 8u_{m-1}^n + 8u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{12h} \\ (u_x)_m^{n-1} &= \frac{u_{m-2}^{n-1} - 8u_{m-1}^{n-1} + 8u_{m+1}^{n-1} - u_{m+2}^{n-1}}{12h} \\ (u_{xx})_m^n &= \frac{-u_{m-2}^n + 16u_{m-1}^n - 30u_m^n + 16u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{12h^2} \end{aligned}$$



olmak üzere

$$\begin{aligned}
& u_{m-2}^{n+1} \left[ \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{12h} + \frac{\alpha_3}{12h^2} \right] + \\
& u_{m-1}^{n+1} \left[ - \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{2}{3h} - \frac{4\alpha_3}{3h^2} \right] + \\
& u_m^{n+1} \left[ 1 + \frac{5\alpha_3}{2h^2} \right] + \\
& u_{m+1}^{n+1} \left[ \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{2}{3h} - \frac{4\alpha_3}{3h^2} \right] + \\
& u_{m+2}^{n+1} \left[ - \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{12h} + \frac{\alpha_3}{12h^2} \right] = \\
& u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) - \\
& \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

bulunur. (2.18) denklem sistemi  $m = 0, \dots, N$  için toplam  $N + 1$  denklem ve  $N + 5$  bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. (2.2-2.3) olarak bölümün başında verilen sınır şartlarından

$$u_x(a, t) = \frac{u_{-2}^{n+1} - 8u_{-1}^{n+1} + 8u_1^{n+1} - u_2^{n+1}}{12h} = 0 \tag{2.19}$$

$$u_x(b, t) = \frac{u_{N-2}^{n+1} - 8u_{N-1}^{n+1} + 8u_{N+1}^{n+1} - u_{N+2}^{n+1}}{12h} = 0 \tag{2.20}$$

$$u_{xx}(a, t) = \frac{-u_{-2}^{n+1} + 16u_{-1}^{n+1} - 30u_0^{n+1} + 16u_1^{n+1} - u_2^{n+1}}{12h^2} = 0 \tag{2.21}$$

$$u_{xx}(b, t) = \frac{-u_{N-2}^{n+1} + 16u_{N-1}^{n+1} - 30u_N^{n+1} + 16u_{N+1}^{n+1} - u_{N+2}^{n+1}}{12h^2} = 0 \tag{2.22}$$

yazılabilir. (2.19) ve (2.21) eşitliklerinden

$$u_{-2}^{n+1} = 3u_2^{n+1} - 32u_1^{n+1} + 30u_0^{n+1} \tag{2.23}$$

$$u_{-1}^{n+1} = \frac{u_2^{n+1}}{4} - 3u_1^{n+1} + \frac{15}{4}u_0^{n+1} \tag{2.24}$$

ayrıca (2.20) ve (2.22) eşitliklerinden

$$u_{N+1}^{n+1} = \frac{15}{4}u_N^{n+1} - 3u_{N-1}^{n+1} + \frac{u_{N-2}^{n+1}}{4} \tag{2.25}$$

$$u_{N+2}^{n+1} = 30u_N^{n+1} - 32u_{N-1}^{n+1} + 3u_{N-2}^{n+1} \tag{2.26}$$

bulunabilir. Bulunan eşitliklerin denklem sisteminde kullanılması sonucunda yeni denklem sistemi artık  $N + 1$  bilinmeyen,  $N + 1$  denklemden oluşan yeni bir sisteme döntüştür. Böylece sınır şartları uygulanmış denklem sisteminin son hali

$$\begin{aligned}
(u_x)_m^n &= \frac{u_{m-2}^n - 8u_{m-1}^n + 8u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{12h} \\
(u_x)_m^{n-1} &= \frac{u_{m-2}^{n-1} - 8u_{m-1}^{n-1} + 8u_{m+1}^{n-1} - u_{m+2}^{n-1}}{12h} \\
(u_{xx})_m^n &= \frac{-u_{m-2}^n + 16u_{m-1}^n - 30u_m^n + 16u_{m+1}^n - u_{m+2}^n}{12h^2} \\
\lambda_{m1} &= \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{12h} + \frac{\alpha_3}{12h^2} \\
\lambda_{m2} &= - \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{2}{3h} - \frac{4\alpha_3}{3h^2} \\
\lambda_{m3} &= 1 + \frac{5\alpha_3}{2h^2} \\
\lambda_{m4} &= \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{2}{3h} - \frac{4\alpha_3}{3h^2} \\
\lambda_{m5} &= - \left( \frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u_m^{n+1})^p) \frac{1}{12h} + \frac{\alpha_3}{12h^2} \\
\lambda_{m6} &= u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left( \Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) - \\
&\quad \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1})
\end{aligned}$$

olmak üzere

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left( \lambda_{m3} + 30\lambda_{m1} + \frac{15}{4}\lambda_{m2} \right) u_0^{n+1} + (\lambda_{m4} - 32\lambda_{m1} - 3\lambda_{m2}) u_1^{n+1} \\
&+ \left( \lambda_{m5} + 3\lambda_{m1} + \frac{\lambda_{m2}}{4} \right) u_2^{n+1} = \lambda_{m6}
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$\left( \lambda_{m2} + \frac{15}{4}\lambda_{m1} \right) u_0^{n+1} + (\lambda_{m3} - 3\lambda_{m1}) u_1^{n+1} + \left( \lambda_{m4} + \frac{\lambda_{m1}}{4} \right) u_2^{n+1} + \lambda_{m5} u_3^{n+1} = \lambda_{m6}$$

$m = 2$  için

$$\lambda_{m1} u_0^{n+1} + \lambda_{m2} u_1^{n+1} + \lambda_{m3} u_2^{n+1} + \lambda_{m4} u_3^{n+1} + \lambda_{m5} u_4^{n+1} = \lambda_{m6}$$

$$\vdots \quad (2.27)$$

$m = N - 2$  için

$$\lambda_{m1}u_{N-4}^{n+1} + \lambda_{m2}u_{N-3}^{n+1} + \lambda_{m3}u_{N-2}^{n+1} + \lambda_{m4}u_{N-1}^{n+1} + \lambda_{m5}u_N^{n+1} = \lambda_{m6}$$

$m = N - 1$  için

$$\lambda_{m1}u_{N-3}^{n+1} + \left( \lambda_{m2} + \frac{\lambda_{m5}}{4} \right) u_{N-2}^{n+1} + (\lambda_{m3} - 3\lambda_{m5}) u_{N-1}^{n+1} + (\lambda_{m4} + \frac{15}{4}\lambda_{m5}) u_N^{n+1} = \lambda_{m6}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_{m1} + \frac{\lambda_{m4}}{4} + 3\lambda_{m5} \right) u_{N-2}^{n+1} + (\lambda_{m2} - 3\lambda_{m4} - 32\lambda_{m5}) u_{N-1}^{n+1} \\ & + \left( \lambda_{m3} + \frac{15}{4}\lambda_{m4} + 30\lambda_{m5} \right) u_N^{n+1} = \lambda_{m6} \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Sınır şartları uygulandıktan sonra düzenlenen (2.27) denklem sistemi, katsayılarda bulunan  $(u_m^{n+1})^p$  teriminden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sisteminin çözülebilmesi için her bir zaman adımında Metod 1 de yapılan iç iterasyon işlemleri kullanılacaktır. Böylece her bir zaman adımında  $u_m^{n+1}$  terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılır ve sistem 5 li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

### İkinci metod için başlangıç durumu ve sayısal hesaplamalar

İlk zaman adımında ( $t = 0$  anında), (2.4) başlangıç şartı yardımıyla  $u_0^0, u_1^0, \dots, u_N^0$  bilinmeyenleri bulunabilir. Bu değerler (2.23-2.26) eşitliklerinde kullanılırsa

$$u_{-2}^0, u_{-1}^0, u_0^0, \dots, u_N^0, u_{N+1}^0, u_{N+2}^0$$

çözümleri bulunur.

$$u_{-2}^1, u_{-1}^1, u_0^1, u_1^1, \dots, u_N^1, u_{N+1}^1, u_{N+2}^1$$

bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.27) denklem sisteminde  $n = 0$ ,  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = 0$  alınarak kapalı çözüm araştırılırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.27) denklem sistemi 5li Thomas algoritması yardımıyla çözümlenerek öncelikle

$u_0^1, u_1^1, \dots, u_N^1$  değerleri ve bulunan değerler (2.23-2.26) eşitliklerinde kullanıldığında istenilen bilinmeyenler elde edilir.

$$u_{-2}^2, u_{-1}^2, u_0^2, \dots, u_N^2, u_{N+1}^2, u_{N+2}^2$$

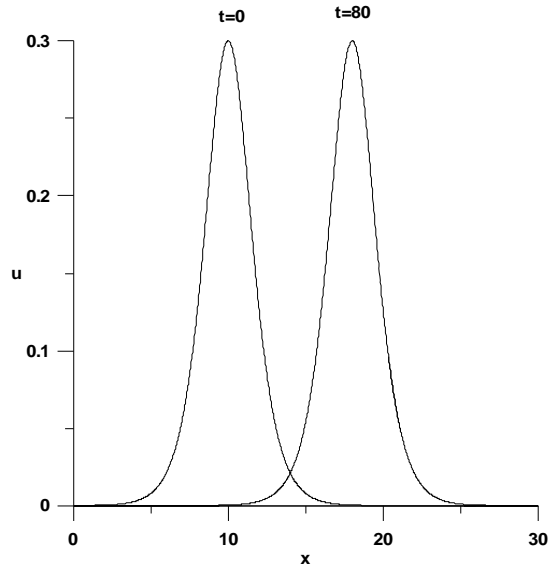
bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.27) denklem sisteminde  $n = 1$ ,  $\theta_1 = 1$  ve  $\theta_2 = -\frac{1}{2}$  alınırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.27) sistemi 5li Thomas algoritması yardımıyla kolaylıkla özülebilir. Böylece  $u_0^2, u_1^2, \dots, u_N^2$  değerleri hesaplanmış olur. Sınır şartlarından bulunan (2.23-2.26) eşitliklerinin kullanılmasıyla da istenilen değerlere ulaşılabilir. Bundan sonraki tüm zaman adımları için  $n$  hesaplanacak zaman adımı olmak üzere  $u_{-2}^{n+1}, u_{-1}^{n+1}, \dots, u_{N+2}^{n+1}$  bilinmeyenleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan bilinmeyenler kullanılır.

## 2.3 Metotların EW Denkleminin Sayısal özümüne Uygulanması

(2.5) denkleminde  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $p = 1$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alındığında EW denklemi elde edilir.

### 2.3.1 Solitary dalga oluşumu

İlk olarak  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 10$  parametreleri ve  $0 \leq x \leq 30$  tanım aralığı seçilerek  $3c$  genlikli solitary dalgasının  $v = c$  hızla sağa doğru hareketi  $0 \leq t \leq 80$  zaman aralığında incelenmiştir.  $c = 0.1$  seçimiyle  $t = 0$  ve  $t = 80$  anındaki dalgaların durumu (1.28) analitik çözümü yardımıyla şekil 2.1 de gösterilmiştir. Solitary dalgasının hızı  $c = 0.1$  birim olduğundan 80 birim sonra solitary dalgası 8 birim yol alabilecektir. Dolayısıyla  $t = 80$  anında solitary dalgasının tepe noktası şekilden de görüldüğü gibi  $x_0 + 80c = 18$  konum noktasma karşılık gelmektedir.



Şekil 2.1:  $t = 0$  ve  $t = 80$  anındaki dalgaların durumu

Program  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.1$  seçimleriyle  $t = 80$  anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.1 de daha önce yapılan çalışmaların sonuçları ile birlikte verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.31) eşitliklerinden

$$C_1 = \frac{6c}{k} = 1.2$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0.288$$

$$C_3 = \frac{144c^3}{5k} = 0.0576$$

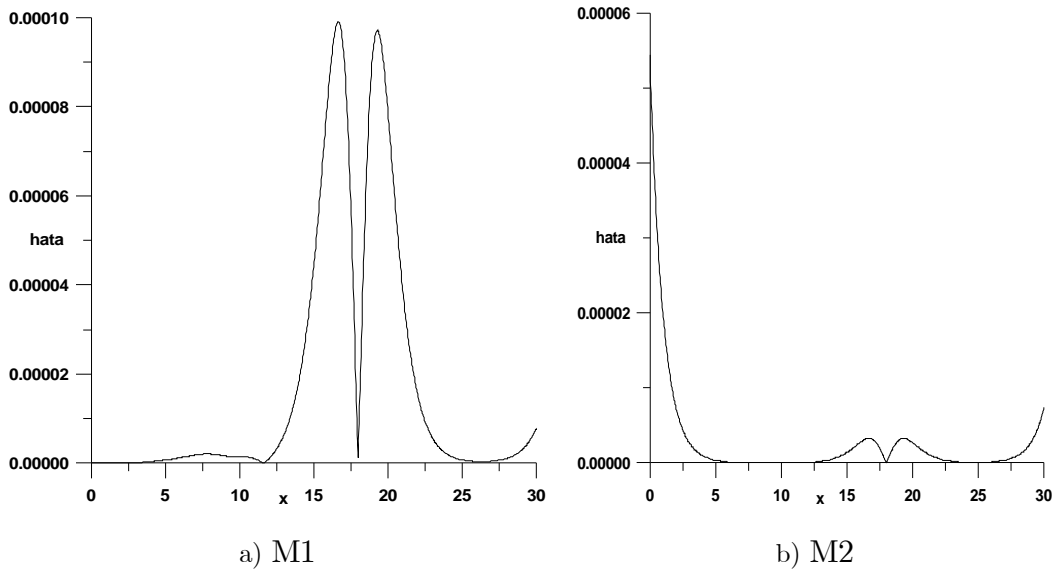
olarak bulunabilir. Tablo 2.1 incelendiğinde M2 nin M1 e göre hata normlarının daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur. Daha önceki yıllarda yapılan çalışmaların sonuçları ile kıyaslandığında metotların diğer çalışmalara yakın sonuçlar verdikleri görülmektedir.

Tablo 2.1:  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.1$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için korunum sabitleri ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	1.19989	0.28799	0.05760		
20	0.04604	0.02465	1.19998	0.28799	0.05760		
40	0.08442	0.04556	1.20000	0.28799	0.05760		
60	0.12237	0.06576	1.20000	0.28799	0.05760		
80	0.18603	0.09914	1.19998	0.28799	0.05760		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	1.19995	0.28800	0.05760		
20	0.03354	0.04710	1.20004	0.28800	0.05760		
40	0.03873	0.05348	1.20005	0.28800	0.05760		
60	0.04108	0.05434	1.20005	0.28800	0.05760		
80	0.03963	0.05446	1.20004	0.28800	0.05760		
Diğer çalışmalar ( $t = 80$ )							
	$h$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
Gardner et.al.,1997)	0.03	0.03	3.849	2.646	1.1910	0.2855	0.0558
(Zaki, 2000a)	0.03	0.03	7.444	4.373	1.1964	0.2858	0.0569
(Irk et.al., 2003)	0.03	0.05	0.062	0.053	1.20004	0.28800	0.05760
(Saka et.al.,2003)	0.03	0.05	0.049	0.0336	1.99999	0.28800	0.05756
(Esen, 2005)	0.03	0.05	0.029	0.021	1.19995	0.28798	0.05759
(Saka, 2006)	0.03	0.05	0.003	0.002	1.19999	0.28801	0.05760
(Dağ et.al., 2007)	0.03	0.05	0.040	0.024	1.19998	0.2880	0.05799

$h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.1$  seçimleri ile  $0 \leq x \leq 30$  konum aralığında  $t = 80$  zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.2 de gösterilmiştir. M1 için çizilen

grafik incelendiğinde maksimum hatanın  $x = 18$  noktası civarında olduğu görülmektedir. M2 de ise hatanın konum aralığının başında ve sonunda olduğu görülebilir. M2 deki hatanın konum aralığının başında ve sonunda olmasına rağmen M1 deki hataya göre daha iyi sonuç verdiği söylenilebilir. M2 de hatanın konum aralığının uç noktalarında görünmesinin sebebi dalganın yeterince sıfıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Örnek olarak solitary dalgası  $t = 0$  anında konum aralığının başında  $u(0, 0) = 0.000045$  ve  $t = 80$  anında konum aralığının sonunda  $u(30, 80) = 0.0000074$  değerlerini almaktadır. Dolayısıyla metotlar ne kadar iyi olursa olsun sınır şartlarındaki kabullerden dolayı en az bu kadar hatanın yapılması kaçınılmazdır.



Şekil 2.2 :  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.1$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için  $t = 80$  zamanındaki

$$|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Konum aralığını  $-5 \leq x \leq 40$  aralığına genişleterek programlar tekrar çalıştırıldığında sonuçların daha iyi olduğu Tablo 2.2 den görülebilir. Özellikle M2 nin oldukça iyi sonuçlar verdiği söylenilebilir.

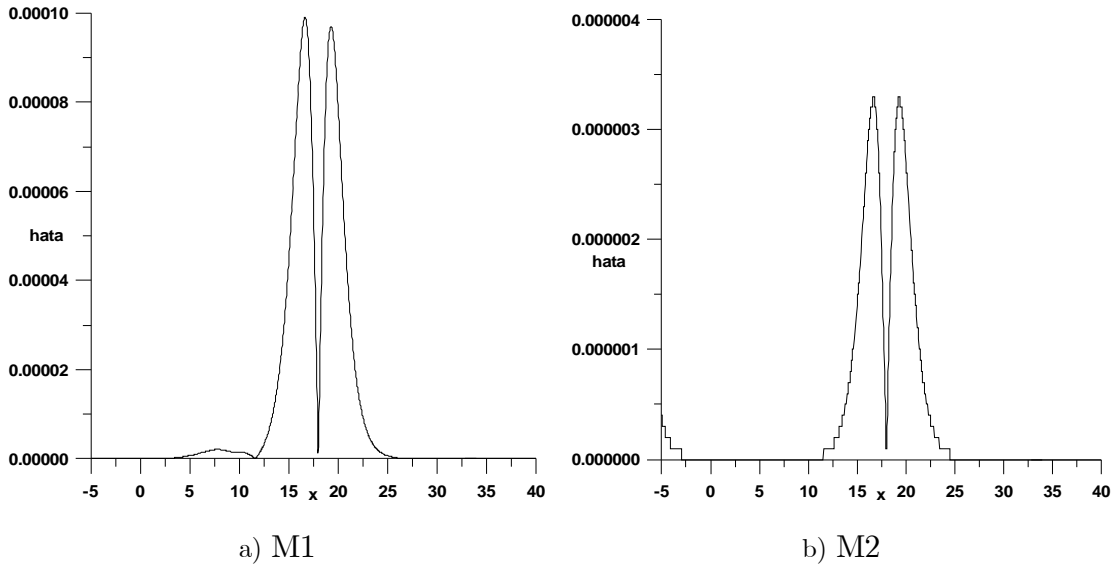
Tablo 2.2:  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.1$  ve  $-5 \leq x \leq 40$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	1.20000	0.28799	0.05760
20	0.04568	0.02464	1.20000	0.28799	0.05760
40	0.08441	0.04557	1.20000	0.28799	0.05760
60	0.12236	0.06575	1.20000	0.28799	0.05760
80	0.18593	0.09912	1.20000	0.28799	0.05760
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	1.20000	0.28800	0.05760
20	0.00047	0.00032	1.20000	0.28800	0.05760
40	0.00709	0.00374	1.20000	0.28800	0.05760
60	0.01377	0.00727	1.20000	0.28800	0.05760
80	0.00621	0.00328	1.20000	0.28800	0.05760

Şekil 2.3 te  $-5 \leq x \leq 40$  konum aralığında çizilen hata grafikleri verilmiştir. Konum aralığı genişletilerek çizilen bu grafiklerden kolayca görülebileceği gibi artık maksimum hata her iki program içinde dalganın tepe noktasının karşılık geldiği  $x = 18$  civarındadır. Eğer konum aralığını genişlettiğimizde maksimum hata hala konum aralığının uç noktalarında gelmiş olsaydı bu durumda sınır şartlarının metotlara iyi uygulanmadığı sonucunu çıkarabilirdik. Fakat şekillerden de görüldüğü gibi aralığın uç noktalarında  $u(a, t) = u(b, t) \approx 0$  olacak şekilde aralık genişletildiğinde maksimum hatalar artık uç noktalarda gelmemektedir. Metotlar arasında fark olmasının sebebi ise M2 de sınır şartı olarak sadece türev sınır şartlarını kullanabilmiş olmamızdır.





Şekil 2.3 :  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.1$  ve  $-5 \leq x \leq 40$  için  $t = 80$  zamanındaki

|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

Solitary dalganın oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızını yani  $c$  değerini değiştirerek problem incelenmiştir. Bu durumda programlar  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.03$  seçimleriyle  $t = 80$  anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.3 te verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k} = 0.36$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0.02592$$

$$C_3 = \frac{144c^3}{5k} = 0.00156$$

olarak bulunabilir. Tablo 2.3 incelendiğinde M1 in M2 ye göre hata normlarının daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur.

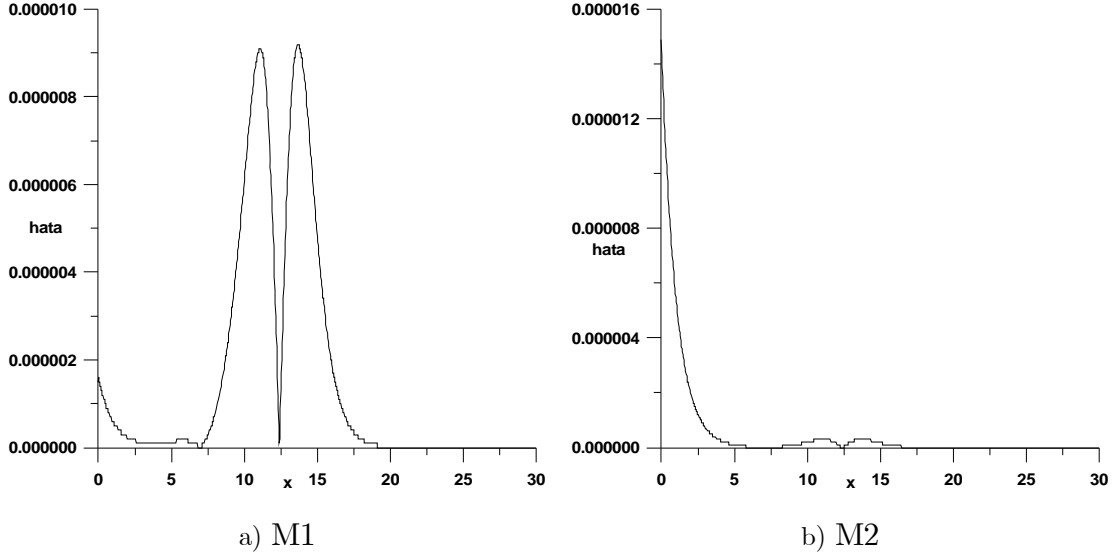
Tablo 2.3:  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.03$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	0.35998	0.02592	0.00156
20	0.00808	0.00943	0.35998	0.02592	0.00156
40	0.00857	0.00517	0.35999	0.02592	0.00156
60	0.01142	0.00608	0.35999	0.02592	0.00156
80	0.01717	0.00919	0.36000	0.02592	0.00156
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	0.35998	0.02592	0.00156
20	0.00525	0.00737	0.36000	0.02592	0.00156
40	0.00815	0.01142	0.36001	0.02592	0.00156
60	0.00979	0.01364	0.36001	0.02592	0.00156
80	0.01059	0.01486	0.36001	0.02592	0.00156

$h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.03$  seçimleri ile  $0 \leq x \leq 30$  konum aralığında  $t = 80$  zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.4. te verilmiştir. M1 için çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın  $x = 12$  noktası civarında olduğu görülmektedir. Bunun sebebi dalganın 80 birim sonra tepe noktasının gideceği yolun  $80c = 2.4$  birim olmasıdır. M2 de ise hatanın konum aralığının başında olduğu görülebilir. M2 deki hatanın konum aralığının başında görünmesinin sebebi dalganın yeterince sıfıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Örnek olarak solitary dalgası  $t = 0$  anında konum aralığının başında  $u(0, 0) = 0.0000163$  değerini almaktadır. M2 de sınır şartı olarak  $u$  nun kendisini kullanamadığımızdan başta verilen hata programın çalıştırıldığı diğer za-

manlarda hatalara sebep olmaktadır.



Şekil 2.4 :  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.03$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için  $t = 80$  zamanındaki

$$|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

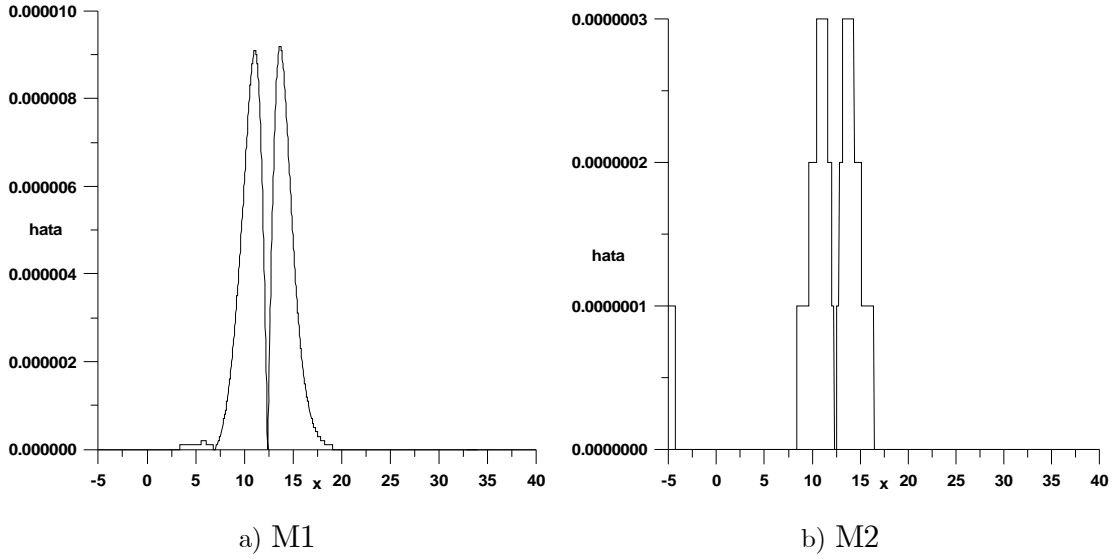
Konum aralığını  $-5 \leq x \leq 40$  aralığına genişleterek programlar tekrar çalıştırıldığında  $0 \leq x \leq 30$  konum aralığına göre sonuçların daha iyi olduğu Tablo 2.4 den görülebilir. Tablo 2.4 dikkatli bir şekilde incelendiğinde M1 de bir ilerleme kaydedilmemesine rağmen M2 için sonuçların oldukça iyileştiği görülebilir. Örnek olarak M2 için  $t = 80$  anında  $0 \leq x \leq 30$  konum aralığında  $L_\infty \times 10^3 = 0.01486$  değeri bulunmuşken, konum aralığı  $-5 \leq x \leq 40$  olacak şekilde genişletildiğinde  $L_\infty \times 10^3 = 0.00030$  değeri bulunmuştur. Bunun sebebi Şekil 2.4 ile de açıklanabilir. Şekilden de görüldüğü gibi M2 için en büyük hata konum aralığının başlarında gelmektedir. Eğer konum aralığı genişletilirse hatanın daha da azalacağı kaçınılmazdır. M1 de ise maksimum hata ortalarda gelmektedir. Konum aralığının genişletilmesi M1 için büyük bir iyileşme sağlamayacaktır. Bu durumda M2 nin sınır koşullarına göre daha duyarlı bir metot olduğu sonucuna da varılabilir.

Tablo 2.4:  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.03$  ve  $-5 \leq x \leq 40$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	0.36000	0.02592	0.00156
20	0.00412	0.00224	0.36000	0.02592	0.00156
40	0.00768	0.00418	0.36000	0.02592	0.00156
60	0.01122	0.00608	0.36000	0.02592	0.00156
80	0.01713	0.00919	0.36000	0.02592	0.00156
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	0.36000	0.02592	0.00156
20	0.00005	0.00005	0.36000	0.02592	0.00156
40	0.00064	0.00034	0.36000	0.02592	0.00156
60	0.00124	0.00065	0.36000	0.02592	0.00156
80	0.00056	0.00030	0.36000	0.02592	0.00156

Konum aralığı  $-5 \leq x \leq 40$  olacak şekilde genişletildikten sonra  $t = 80$  anında sayısal çözümle tam çözüm arasındaki farkın mutlak değerinin grafiği Şekil 2.5 te her iki metot içinde verilmiştir. Şekil 2.4 te gözlenen durumun aksine artık her iki metot içinde maksimum hata konum aralığının orta noktaları civarında gözlenmektedir. Konum aralığının orta noktalarında hatanın maksimum çıkması beklenen bir durumdur. Çünkü dalga zamanla ilerlerken dalganın en yüksek değeri aldığı yerlerde maksimum hata gözlenmelidir. Hata grafikleri incelendiğinde M2 için maksimum hatanın (yaklaşık olarak 0.0000003) M1 için maksimum hatadan (yaklaşık olarak 0.00001) daha düşük olduğuda söylenebilir. Ashında bu hata değerleride tam olarak Tablo 2.4 te  $t = 80$  anında verilen  $L_\infty$  hatasına eşittir.



Şekil 2.5 :  $h = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $c = 0.03$  ve  $-5 \leq x \leq 40$  için  $t = 80$  zamanındaki

|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

$c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 0.03$  ve farklı konum-zaman artımı değerleri için hesaplanan hata normlarının değerleri Tablo 2.5 te verilmiştir. Konum ve zaman artım değerleri büyüdükçe hata normlarının değerlerinde her iki metot için arttığı kolaylıkla görülebilir. M1 için bazı durumlarda hata normlarının değerleri çok büyük çıkmaktadır. Bu değerler tabloda hata olarak gösterilmiştir. M2 için ise böyle bir durum söz konusu değildir. Büyük zaman ve konum artımları için metotların iyi sonuçlar vermesi istenilen bir durumdur. Dolayısıyla sonuçlar incelendiğinde M2 nin M1 e göre daha iyi sonuçlar verdiği ve bu test problemi için M2 nin M1 e göre daha iyi olduğu söylenilebilir.

### 2.3.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.32) eşitliğinde  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 25$ ,  $k = 0.5$ ,  $c_1 = 1.5$  ve  $c_2 = 0.75$  seçimlerini yapıldığında

$$u(x, 0) = 4.5 \operatorname{sech}^2(0.5 [x - 10 - 1.5]) + 2.25 \operatorname{sech}^2(0.5 [x - 25 - 0.75]) \quad (2.28)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

Tablo 2.5: Farklı konum ve zaman artımları için  $t = 80$  zamanındaki hata normları

$c = 0.1, 0 \leq x \leq 30$

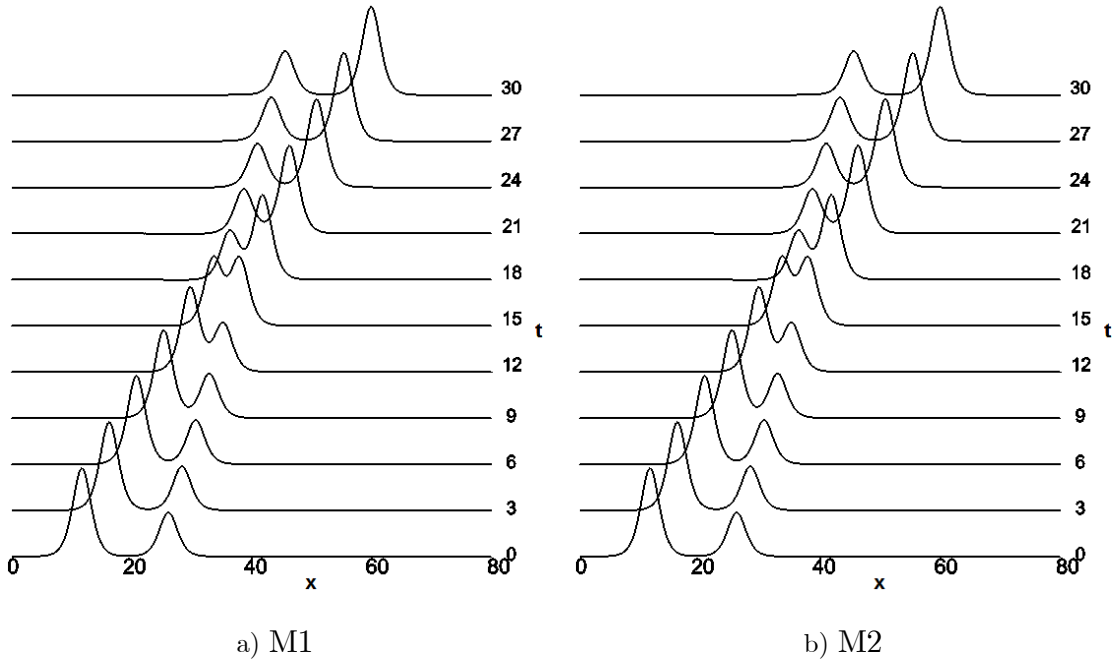
$h$	$\Delta t$	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.18139	0.09634	0.06869	0.05446
0.05	0.05	0.50553	0.26956	0.03988	0.05446
0.125	0.1	3.10364	1.65488	0.04036	0.05446
0.25	0.2	12.42635	6.57720	0.25633	0.14443
0.5	0.4	hata	hata	3.83679	2.17879
1.0	0.8	hata	hata	47.79112	24.71374
2.0	0.8	6018.94674	3000.00732	321.7861	145.7202

$c = 0.03, -5 \leq x \leq 40$

$h$	$\Delta t$	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.01659	0.00886	0.00509	0.00268
0.05	0.05	0.04659	0.02500	0.00060	0.00032
0.125	0.1	0.28621	0.15340	0.00065	0.00043
0.25	0.2	1.14671	0.61342	0.02655	0.01726
0.5	0.4	hata	hata	0.40004	0.25683
1.0	0.8	4859.62710	2203.83887	4.99132	3.09507
3.0	0.8	3577.47967	1998.93933	95.96448	41.85051

(2.28) eşitliği  $t = 0$  anında sırası ile genlikleri 4.5 ve 2.25 olan iki solitary dalgasının hareketini modellemektedir.  $h = \Delta t = 0.1$  ve  $[0, 80]$  konum aralığı seçimiyle program  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.6 da verilmiştir. Her iki metot içinde

çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği ve aynı zamanlarda sona erdiği sekilden görülebilir. Ayrıca solitary dalgaların özelliklerinden biri olan dalgaların çarpıştıktan sonra şekillerini kaybetmeden yollarına devam etme durumları kolaylıkla gözlenebilmektedir.



Şekil 2.6 : İki solitary dalgasının çarpışması

(2.28) için korunum sabitlerinin tam değerleri (1.33) eşitliklerinden

$$C_1 = 6 \left( \frac{c_1 + c_2}{k} \right) = 12(1.5 + 0.75) = 27,$$

$$C_2 = \left( \frac{12}{k} + \frac{48k\mu}{5} \right) (c_1^2 + c_2^2) = 28.8(1.5^2 + 0.75^2) = 81,$$

$$C_3 = \frac{144}{5k} (c_1^3 + c_2^3) = 57.6(1.5^3 + 0.75^3) = 218.7$$

olarak bulunabilir. Korunum sabitleri için sayısal değerleri ise Tablo 2.6 da gösterilmiştir. Sayısal yöntemler sonucunda elde edilen sonuçlar ile analitik değerlerin uyumlu oldukları görülebilir. Zaman ve konum artım değerleri daha da küçük seçilirse korunum sabitlerindeki değişimlerde o derece küçülecektir.

Tablo 2.6: İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	M1			M2		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	26.99982	80.96833	218.70283	26.99982	81.00033	218.70283
6	27.00000	81.01429	218.90830	27.00017	81.04708	218.91155
12	27.00000	81.04990	219.02613	27.00016	81.09283	219.11230
18	27.00000	81.06967	219.10214	27.00015	81.11406	219.20098
24	27.00000	81.12464	219.38855	27.00014	81.15915	219.39945
30	27.00000	81.17250	219.60269	27.00013	81.20688	219.61285

## 2.4 Metotların RLW Denklemine Sayısal Çözümüne Uygulanması

(2.5) denkleminde  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon$ ,  $p = 1$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alındığında RLW denklemi elde edilir.

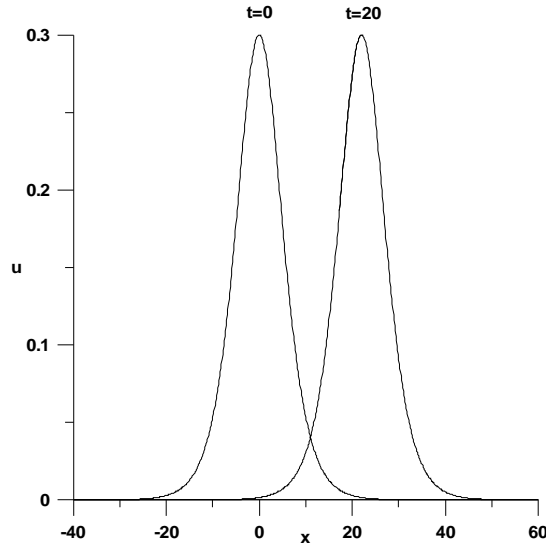
### 2.4.1 Solitary dalga oluşumu

İlk olarak  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $x_0 = 0$  parametreleri ve  $-40 \leq x \leq 60$  tanım aralığı seçilerek  $3c$  genlikli,  $x_0 = 0$  noktasma tepe noktası karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir solitary dalgasının  $v = 1 + \varepsilon c$  hızla sağa doğru hareketi  $0 \leq t \leq 20$  zaman aralığında incelenmiştir.  $c = 0.1$  seçimiyle  $t = 0$  ve  $t = 20$  anındaki dalgaların durumu Şekil 2.7 de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi  $t = 20$  anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 0 + [1 + 1.(0.1)] 20 = 22$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.





Şekil 2.7:  $t = 0$  ve  $t = 20$  anındaki dalgaların durumu

Bu test probleminde konum artımı  $h = 0.125$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.1$  ve genlik  $3c = 0.3$  olarak alınmıştır. Alınan parametrelere göre 0.3 genlikli tek dalga çözümünü için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.38) eşitliklerinden

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 3.97995,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0.81046,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 2.57901$$

olarak hesaplanabilir.

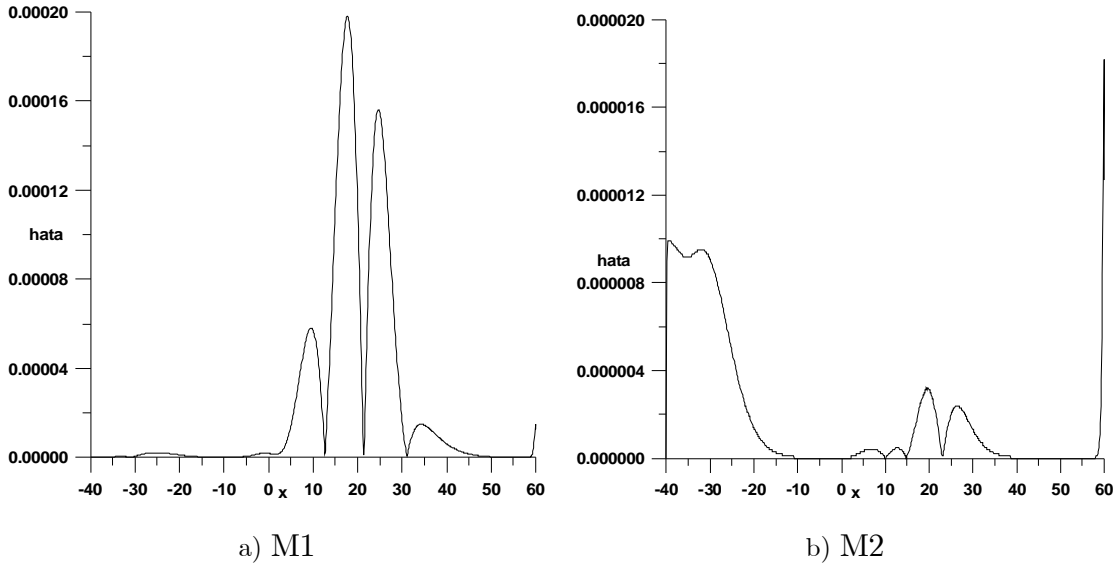
Program  $t = 20$  oluncaya kadar çalıştırılmış ve  $t = 20$  olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normlarıyla beraber  $C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_3$  korunum sabitleri Tablo 2.7 de M1 ve M2 için verilmiştir. Ayrıca aynı genlik değerini kullanan farklı çalışmalar sonucunda elde edilen hata normlarının değerleride aynı tabloda gösterilmiştir. Çalışma boyunca hesaplanan korunum sabitleri ile analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görülebilir. Daha önceki yıllarda yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar kıyaslandığında önerilen metotların oldukça iyi sonuçlar verdikleri özellikle M2 nin sonuçlarının oldukça iyi olduğu söylenilebilir.

Tablo 2.7:  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.1$  ve  $-40 \leq x \leq 60$  için korunum sabitleri ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	3.97993	0.81046	2.57901		
4	0.10943	0.04172	3.97993	0.81046	2.57901		
8	0.21570	0.08373	3.97993	0.81046	2.57901		
12	0.32117	0.12467	3.97992	0.81046	2.57901		
16	0.42329	0.16289	3.97992	0.81046	2.57901		
20	0.52171	0.19828	3.97988	0.81046	2.57902		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	3.97993	0.81046	2.57901		
4	0.00658	0.00508	3.97996	0.81046	2.57901		
8	0.01458	0.00776	3.97999	0.81046	2.57901		
12	0.02249	0.00878	3.98002	0.81046	2.57901		
16	0.02945	0.00937	3.98005	0.81046	2.57901		
20	0.03689	0.01824	3.98005	0.81047	2.57902		
Diğer çalışmalar ( $t = 20$ )							
	$h$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
(Dağ and Özer, 2001)	0.125	0.1	0.018	1.566	3.96160	0.80419	2.55829
(Dağ et.al., 2004)	0.125	0.1	0.3	0.116	3.97988	0.81028	2.57839
(Irk et.al., 2005)	0.125	0.1	0.301	0.114	3.97996	0.81027	2.57839
(Raslan, 2005b)	0.1	0.1	0.532	0.227	3.97804	0.80972	2.57657
(Kutluay and Esen, 2006)	0.1	0.1	0.55	0.21	3.97997	0.81046	2.57901

Şekil 2.8 de  $t = 20$  anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik çizilmiştir. Grafik incelendiğinde M1 de maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, M2 de ise hatanın konum aralığının

başında ve sonunda olduğu görülebilir. M2 deki hatanın konum aralığının başında ve sonunda olmasına rağmen M1 deki hataya göre daha iyi sonuç verdiği ise bir önceki tablodan söylenebilir. M2 de hatanın konum aralığının uç noktalarında görülmesinin sebebi dalganın yeterince sifıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Sınır şartından gelen hatayı dahada azaltabilmek için konum aralığı genişletilebilir.



Şekil 2.8 :  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.1$  ve  $-40 \leq x \leq 60$  için  $t = 20$  zamanındaki

|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

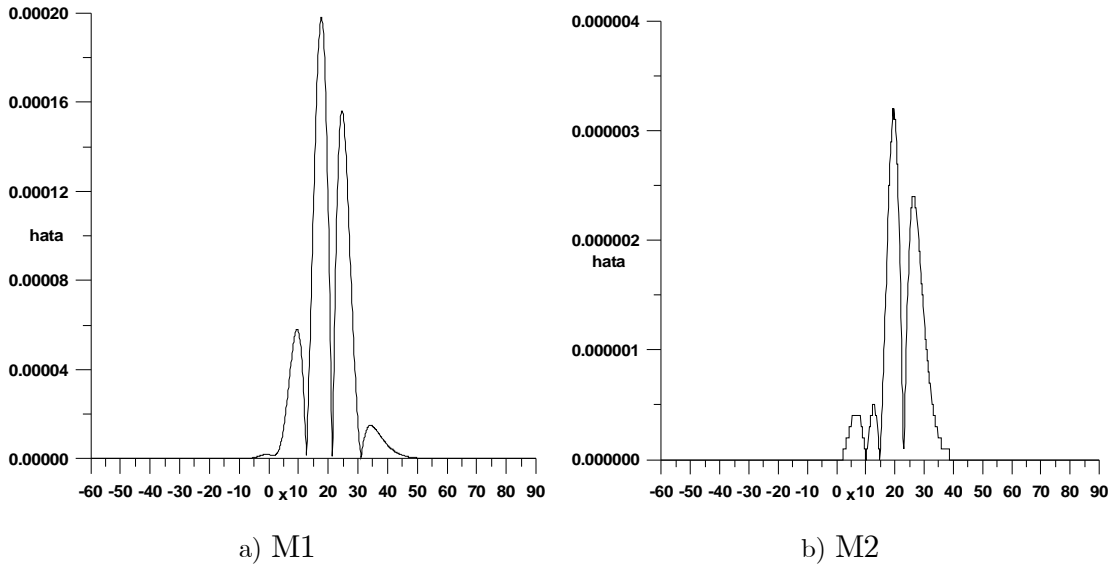
Konum aralığı  $-60 \leq x \leq 90$  aralığına genişletilerek programlar tekrar çalıştırılmıştır. Programlar çalıştırdıktan sonra elde edilen hata normları ve korunum sabitlerinin çeşitli zamanlardaki değerleri Tablo 2.8 de verilmiştir. Tablo 2.7 ile Tablo 2.8 karşılaştırıldığında konum aralığı genişletildikten sonra M2 nin çok daha iyi sonuçlar verdiği söylenilebilir. M1 de çok fazla değişiklik olmamasının sebebi ise maksimum hatanın zaten konum aralığının orta noktalarında gelmesidir.

Tablo 2.8:  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.1$  ve  $-60 \leq x \leq 90$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	3.97993	0.81046	2.57901
4	0.10943	0.04172	3.97984	0.81046	2.57901
8	0.21561	0.08373	3.97957	0.81046	2.57901
12	0.32111	0.12467	3.97856	0.81046	2.57901
16	0.42323	0.16289	3.97471	0.81046	2.57900
20	0.52160	0.19828	3.96029	0.81046	2.57883
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	3.97995	0.81046	2.57901
4	0.00155	0.00072	3.97995	0.81046	2.57901
8	0.00227	0.00104	3.97995	0.81046	2.57901
12	0.00390	0.00173	3.97995	0.81046	2.57901
16	0.00595	0.00244	3.97995	0.81046	2.57901
20	0.00806	0.00317	3.97995	0.81047	2.57902

Şekil 2.9 da  $t = 20$  anında  $-60 \leq x \leq 90$  konum aralığında çizilen hata grafikleri gösterilmektedir. Konum aralığı genişletildikten sonra çizilen bu grafiklerden kolaylıkla görülebileceği gibi artık maksimum hatalar konum aralığının orta noktalarında olmaktadır. Ayrıca M2 için hatanın oldukça küçük olduğuda grafikten kolaylıkla söylenilebilir. Grafikteki maksimum hataların Tablo 2.8 de  $t = 20$  anında verilen  $L_\infty$  hatası kadar olduğuda kolaylıkla söylenilebilir.



Şekil 2.9 :  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.1$  ve  $-60 \leq x \leq 90$  için  $t = 20$  zamanındaki

$$|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Solitary dalgasının oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızı olan  $c$  değeri değiştirilerek problem incelenmiştir. Bu durumda programlar  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.03$  seçimleriyle  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metod içinde Tablo 2.9 da verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 2.10941,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0.12730,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 0.38881$$

olarak bulunabilir. Tablo 2.9 incelendiğinde M1 in M2 ye göre hata normları incelendiğinde daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. M2 nin M1 e göre daha kötü sonuç vermesinin sebebi M2 de türev sınır şartlarının kullanılmasıdır.  $c$  yani dalganın hızı azaltıldığında dalganın genliğide hızına bağlı olduğundan azalacaktır. Dalganın genliği azalınca dalganın genişliği artacağından uç noktalarda dalganın aldığı değerler büyüyecektir. Dolayısıyla sınır şartlarına karşı hassas olan M2 de biraz daha

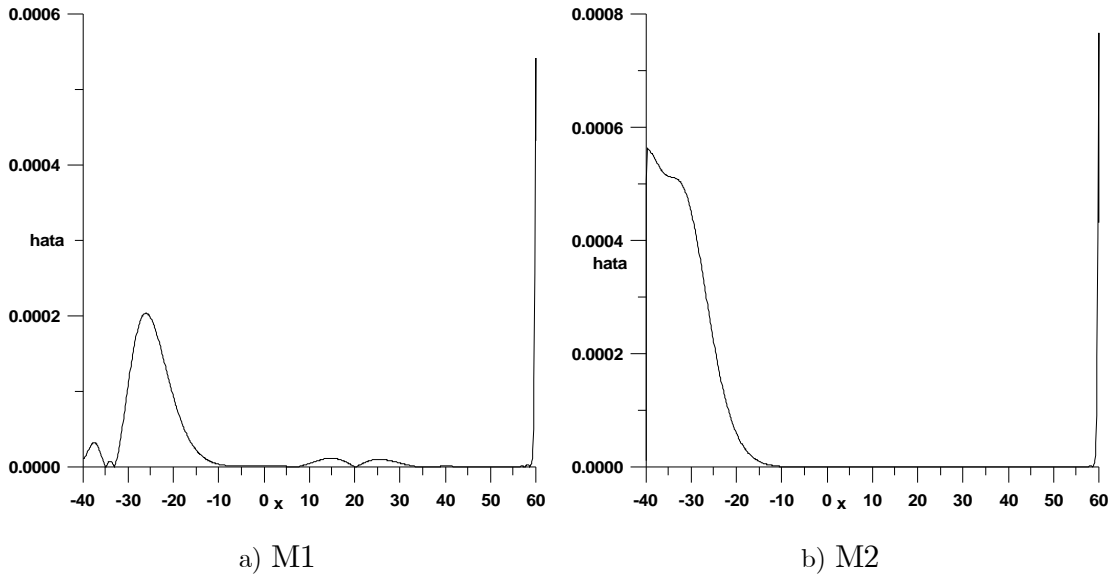
fazla bozulma olacaktır. Bununla birlikte her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur. Fakat M1 için sonuçlar analitik değerlere daha yakındır.

Tablo 2.9:  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.03$  ve  $-40 \leq x \leq 60$  için korunum sabitleri ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	2.10705	0.12730	0.38880
4	0.43284	0.23667	2.10703	0.12730	0.38880
8	0.52918	0.22756	2.10681	0.12730	0.38880
12	0.55500	0.21885	2.10646	0.12730	0.38880
16	0.56964	0.26742	2.10582	0.12730	0.38880
20	0.61616	0.54184	2.10446	0.12730	0.38880
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	2.10705	0.12730	0.38880
4	0.27304	0.21587	2.10867	0.12730	0.38881
8	0.66110	0.37716	2.11029	0.12730	0.38881
12	1.08790	0.46708	2.11196	0.12730	0.38881
16	1.48523	0.52070	2.11342	0.12731	0.38882
20	1.86644	0.76714	2.11427	0.12731	0.38882

$h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.03$  seçimleri ile  $-40 \leq x \leq 60$  konum aralığında  $t = 20$  zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.10 da verilmiştir. M1 ve M2 içinde maksimum hatanın konum aralığının sonunda olduğu görülebilir. Az önce bahsedildiği gibi hatanın konum aralığının sonunda görülmesinin sebebi dalganın

yeterince sifira yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Örnek olarak solitary dalgası  $t = 20$  anında konum aralığının sonunda  $u(60, 20) = 0.0004315$  değerini almaktadır. Fakat yaklaşık çözümler için bu değer sınır şartından dolayı sıfır kabul edilmiştir.



Şekil 2.10 :  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.03$  ve  $-40 \leq x \leq 60$  için  $t = 20$  zamanındaki  
|Analitik çözümler — Sayısal çözümler|

Konum aralığını  $-100 \leq x \leq 120$  aralığına genişleterek her iki program tekrar çalıştırıldığında  $-40 \leq x \leq 60$  konum aralığına göre sonuçların daha iyi olduğu Tablo 2.10 dan görülebilir. Artık M2 çok daha iyi sonuçlar vermektedir.  $t = 20$  anında  $L_\infty$  hatası virgülden sonra 6 sıfırdan sonra değer almaktadır ki bu değer neredeyse tam sonuç demektir. Ayrıca konum aralığı genişletildikten sonra konum sabitleride analitik değerlerin aldığı değerleri almaktadır. Dolayısıyla konum aralığının genişletilmesi sonuçları oldukça iyi hale getirmiştir

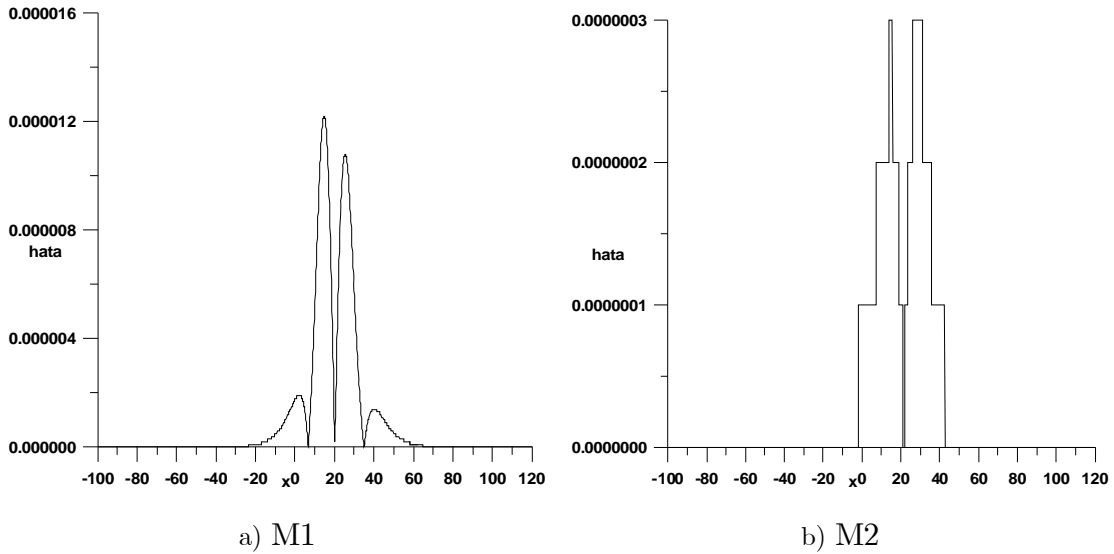
Tablo 2.10:  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.03$  ve  $-100 \leq x \leq 120$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	2.10941	0.12730	0.38881
4	0.00807	0.00233	2.10941	0.12730	0.38881
8	0.01602	0.00467	2.10941	0.12730	0.38881
12	0.02433	0.00716	2.10941	0.12730	0.38881
16	0.03263	0.00968	2.10941	0.12730	0.38881
20	0.04090	0.01220	2.10941	0.12730	0.38881
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	2.10941	0.12730	0.38881
4	0.00006	0.00002	2.10941	0.12730	0.38881
8	0.00013	0.00004	2.10941	0.12730	0.38881
12	0.00034	0.00009	2.10941	0.12730	0.38881
16	0.00076	0.00019	2.10941	0.12730	0.38881
20	0.00119	0.00028	2.10941	0.12730	0.38881

Hata grafikleri, yeni konum aralığı için çizildiğinde, maksimum hatanın artık konum aralığının uç noktalarında değilde orta kısımlarda ve oldukça küçük değerlerde olduğu kolaylıkla görülebilir. Her iki metot için oluşan maksimum hatanın Tablo 2.10 da verilen  $L_\infty$  hatası kadar olduğuda görülebilir.





Şekil 2.11 :  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $c = 0.03$  ve  $-100 \leq x \leq 120$  için  $t = 20$  zamanındaki  
|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

$c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 0.03$  ve farklı konum-zaman artımı değerleri için hesaplanan hata normlarının değerleri Tablo 2.11 de verilmiştir. Konum ve zaman artım değerleri büyüdükçe hata normlarının değerlerinde her iki metot için arttığı tablodan kolaylıkla söylenilebilir. M1 için bazı konum ve zaman artımı değerlerinde hata normlarının değerleri çok büyük çıkmaktadır. Bu değerler tabloda hata olarak gösterilmiştir. M2 için ise böyle bir durum söz konusu olmayıp sonuçlar oldukça uyumludur. Dolayısıyla M2 nin M1 e göre daha iyi sonuçlar verdiği ve bu test problemi için M2 nin M1 e göre daha iyi olduğu söylenilebilir.

#### 2.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.39) eşitliğinde  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 35$ ,  $k_1 = 0.4$  ve  $k_2 = 0.3$  seçimleri yapıldığında

$$u(x, 0) = 5.33333\text{sech}^2(0.4[x - 15]) + 1.68750\text{sech}^2(0.3[x - 35]) \quad (2.29)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

Tablo 2.11:Farklı konum ve zaman artımları için  $t = 20$  zamanındaki hata normları

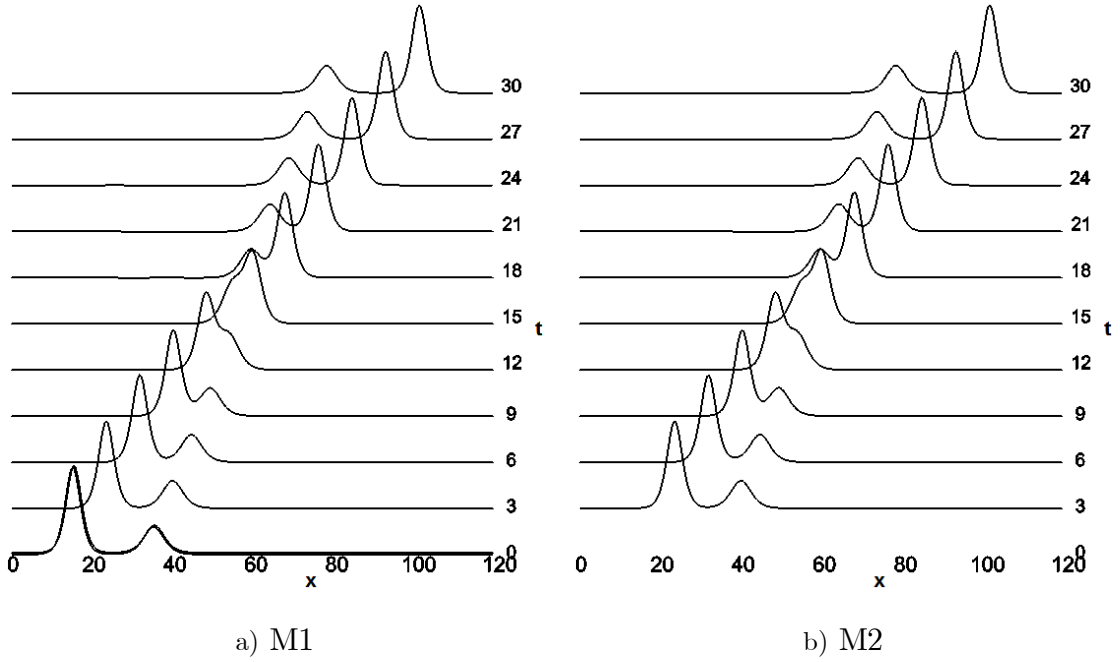
$$c = 0.1, -60 \leq x \leq 90$$

$h$	$\Delta t$	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.01331	0.00393	0.02148	0.00622
0.05	0.05	0.08072	0.03074	0.00249	0.00076
0.125	0.1	0.52160	0.19828	0.00806	0.00317
0.25	0.2	2.07280	0.78848	0.03987	0.01697
0.5	0.4	hata	58505.58984	0.33306	0.14108
1.0	0.8	hata	hata	3.02053	1.25460
2.0	0.8	9870.31024	6506.19971	16.83177	6.53192

$$c = 0.03, -100 \leq x \leq 120$$

$h$	$\Delta t$	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.00352	0.00074	0.00454	0.00099
0.05	0.05	0.00602	0.00181	0.00054	0.00012
0.125	0.1	0.04090	0.01220	0.00119	0.00028
0.25	0.2	0.16063	0.04799	0.00164	0.00059
0.5	0.4	44981.26950	26959.69727	0.01331	0.00477
1.0	0.8	hata	hata	0.11855	0.04228
2.0	0.8	4751.74103	3112.36938	0.61398	0.21266

$h = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $[0, 120]$  konum aralığı seçimiyle program  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.12 de verilmiştir. Her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği ve aynı zamanlarda sona erdiği şekilden görülebilir. Çarpışma öncesi ve sonrasında solitary dalgaların şekillerinde bir bozulma olmadığı da grafikten söylenebilir.



Şekil 2.12 : İki solitary dalgasının çarpışması

Korunum sabitlerinin tam değerleri (1.40) eşitliklerinden

$$C_1 = 6 \left( \frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{k_1 k_2} \right) \simeq 37.91667,$$

$$C_2 = \frac{12}{k_1 k_2} (a_1^2 k_2 + a_2^2 k_1) + \frac{48\mu}{5k_2 k_1} (k_1^2 a_1^2 k_2 + k_2^2 a_2^2 k_1) \simeq 120.51861,$$

$$C_3 = \frac{36}{5k_1 k_2} (4a_1^3 k_2 + 4a_2^3 k_1 + 5a_1^2 k_2 + 5a_2^2 k_1) \simeq 744.04234$$

olarak bulunabilir. Korunum sabitlerinin her iki metot için yaklaşık değerleri ise Tablo 2.12 de  $t = 30$  zamanına kadarki bazı zamanlar için verilmiştir. Sonuçların analitik çözümlere yakın olduğu söylenilebilir. Bununla birlikte konum ve zaman artımları dahada küçültüldüğünde korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri tam sonuçlara dahada yaklaşacaktır.

Tablo 2.12: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	M1			M2		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	37.91651	120.35157	744.08136	37.91651	120.52055	744.08136
6	37.91660	120.62807	746.33156	37.91733	120.82809	746.63963
12	37.91660	120.68245	745.17619	37.91810	121.09580	748.82325
18	37.91660	120.92346	748.42297	37.91887	121.21967	749.92956
24	37.91659	121.27858	751.80300	37.91963	121.52903	752.50834
30	37.91658	121.57717	754.30603	37.92038	121.84987	755.18768

## 2.5 Metotların MEW Denklemine Sayısal Çözümüne Uygulanması

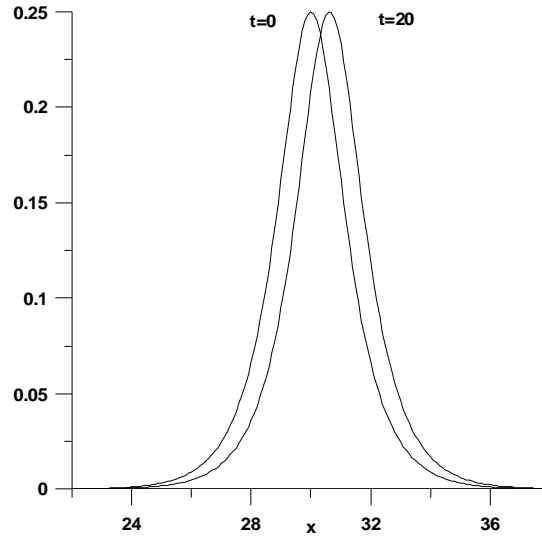
(2.5) denkleminde  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon$ ,  $p = 2$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alındığında MEW denklemi elde edilir.

### 2.5.1 Solitary dalga oluşumu

İlk olarak  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 30$  parametreleri ve  $0 \leq x \leq 80$  tanım aralığı seçilerek  $A = \sqrt{2c}$  genlikli, sola yerleştirilmiş tek dalganın  $v = c$  hızla sağa doğru hareketi  $0 \leq t \leq 20$  zaman aralığında incelenmiştir.  $t = 0$  ve  $t = 20$  anındaki dalgaların durumu  $A = 0.25$  genlik değeri için Şekil 2.13 de gösterilmiştir. Dalganın genliği küçük seçildiğinden dolayı dalganın hızıda oldukça yavaştır. Şekilden de görülebileceği gibi dalga çok az yol aldığından şeklin anlaşılır olabilmesi için konum aralığının küçük bir bölgesinde şekil çizilmiştir. Dalganın tepe noktası tam olarak

$$x_0 + ct = 30 + \frac{(0.25)^2}{2} 20 = 30.625$$

noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.13:  $t = 0$  ve  $t = 20$  anındaki dalgaların durumu

Program  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $A = 0.25$  seçimleriyle  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.13 de verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{A\pi}{k} \simeq 0.78540,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 0.166667,$$

$$C_3 = \frac{4A^4}{3k} \simeq 0.00521$$

olarak hesaplanabilir. Tablo 2.13 incelendiğinde M2 nin M1 e göre daha iyi sonuçlar verdiği açıkça görülebilir. Her iki metot için de korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur. Diğer makaleler ile yapılan kıyaslamalarda da metotların oldukça iyi sonuçlar verdiği özellikle M2 nin verdiği sonuçların çok iyi olduğu söylenebilir. Korunum sabitlerinin ise analitik değerleri tam olarak verdiği görülebilir. Sonuç olarak bu test problemi için önerilen metotlar diğer çalışmalarda göz önüne alındığında oldukça iyi sonuçlar vermiştir.

Tablo 2.13:  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $A = 0.25$  ve  $0 \leq x \leq 80$  için korunum sabitleri

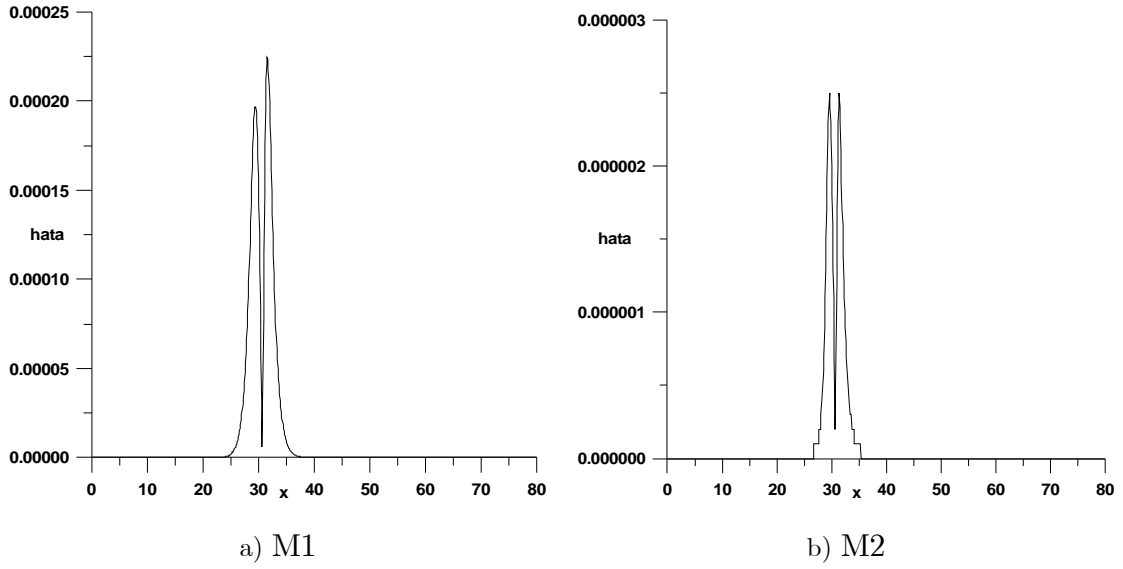
ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	0.78540	0.16647	0.00521
4	0.07090	0.04376	0.78540	0.16647	0.00521
8	0.14175	0.08833	0.78540	0.16647	0.00521
12	0.21255	0.13348	0.78540	0.16647	0.00521
16	0.28329	0.17902	0.78540	0.16647	0.00521
20	0.35406	0.22479	0.78540	0.16647	0.00521
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	0.78540	0.16647	0.00521
4	0.00072	0.00052	0.78540	0.16647	0.00521
8	0.00140	0.00104	0.78540	0.16647	0.00521
12	0.00208	0.00152	0.78540	0.16647	0.00521
16	0.00276	0.00198	0.78540	0.16647	0.00521
20	0.00355	0.00249	0.78540	0.16647	0.00521

Diğer çalışmalar ( $t = 20$ )							
	$h$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
(Zaki, 2000)	0.1	0.05	0.00345	0.00203	0.78539	0.16667	0.00521
(Evans and Raslan, 2005)	0.1	0.2	0.202	0.157	0.78529	0.16658	0.00521
	0.1	0.05	0.291	0.250	0.78495	0.16648	0.00520
(Esen and Kutluay, 2008)	0.1	0.2	0.270	0.258	0.78540	0.16647	0.00521
	0.1	0.05	0.269	0.257	0.78540	0.16647	0.00521

Konum artımı  $h = 0.1$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.2$  ve  $A = 0.25$  seçimleri ile  $0 \leq x \leq 80$  konum aralığında  $t = 20$  oluncaya kadar çalıştırılan programların sayısal

çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkı temsil eden grafik Şekil 2.14 gösterilmiştir. Her iki metot içinde maksimum hatanın konum aralığının orta noktaları civarında olduğu görülebilir.



Şekil 2.14 :  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $A = 0.25$  ve  $0 \leq x \leq 80$  için  $t = 20$  zamanındaki

$$|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

$A = 0.25$ ,  $A = 1$  genlikleri, farklı konum ve zaman artımı için hata normlarının değerleri Tablo 2.14 de verilmiştir. Genlik değeri küçükken sonuçların daha iyi olduğu ve hata normları kıyaslandığında M2 nin M1 e göre daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir.

### 2.5.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.46) eşitliğinde  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ ,  $x_1 = 15$  ve  $x_2 = 30$ , seçimleri yapıldığında

$$u(x, 0) = \text{sech}(x - 15) + 0.5\text{sech}(x - 30) \quad (2.30)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

Tablo 2.14:Farklı konum ve zaman artımları için  $t = 20$  zamanındaki hata normları

$A = 0.25, 0 \leq x \leq 80$

$h$	$\Delta t$	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	0.01	0.00585	0.00366	0.00231	0.00142
0.025	0.01	0.02446	0.01547	0.00233	0.00143
0.05	0.05	0.08850	0.05618	0.00010	0.00009
0.1	0.1	0.35429	0.22492	0.00377	0.00262
0.2	0.2	1.40885	0.89507	0.05478	0.03813
0.5	0.4	20.53795	20.95852	1.77964	1.22134
1.0	0.8	142.03438	99.52208	16.90100	8.75053
2.0	0.8	81.98318	40.71860	75.64688	38.32471

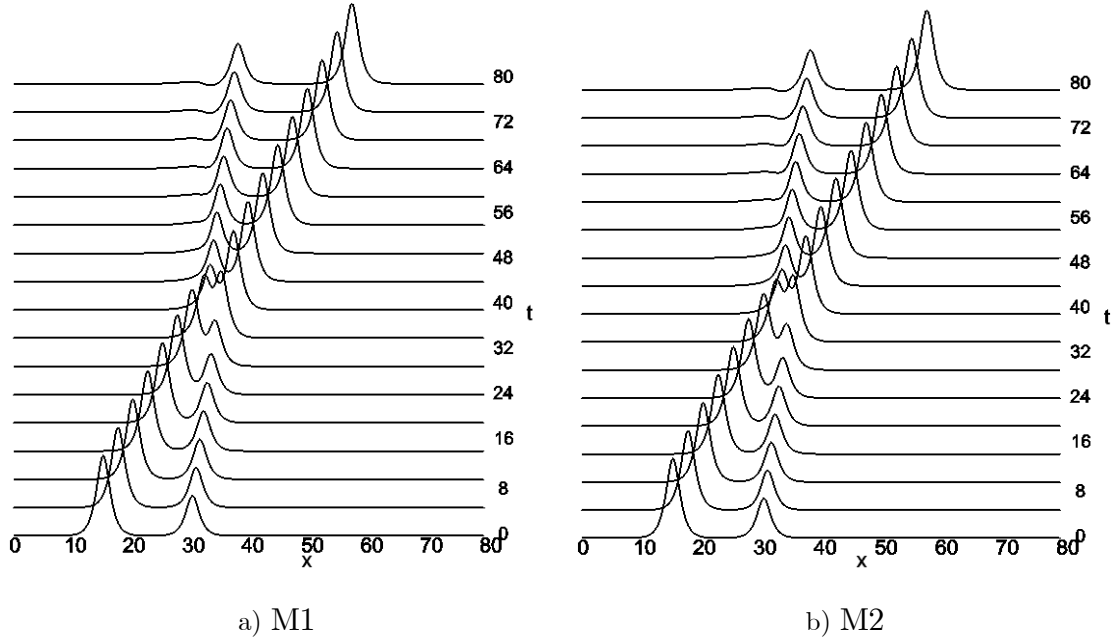
$A = 1, 0 \leq x \leq 80$

$h$	$\Delta t$	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	0.01	0.37833	0.23336	0.14761	0.09047
0.025	0.01	1.58951	0.98392	0.14841	0.09094
0.05	0.05	5.69442	3.52420	0.06104	0.04144
0.1	0.1	22.55740	13.93667	0.31312	0.21902
0.2	0.2	88.15383	54.28140	1.23897	0.80212
0.5	0.4	533.58694	320.30548	83.89119	54.22880
1.0	0.8	1564.44229	830.80023	975.28123	538.90302
2.0	0.8	1929.62352	996.25250	2008.05680	993.93854

$h = 0.1, \Delta t = 0.025$  ve  $[0, 80]$  konum aralığı seçimiyle program  $t = 80$  zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot



içinde Şekil 2.15 de verilmiştir. Her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği, aynı zamanlarda sona erdiği ve çarpışma sonrasında solitary dalgalarının şekillerinde bir bozulma olmadığı görülebilir.



Şekil 2.15 : İki solitary dalgasının çarpışması

Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$C_1 = \frac{\pi}{k} (A_1 + A_2) \simeq 4.71239,$$

$$C_2 = \frac{2}{k} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{2\mu k}{3} (A_1^2 + A_2^2) \simeq 3.33333$$

$$C_3 = \frac{4}{3k} (A_1^4 + A_2^4) \simeq 1.41667$$

olarak bulunabilir. Tablo 2.15 de korunum sabitlerinin yaklaşık çözümleri incelendiğinde sonuçların oldukça iyi olduğu görülebilir. Özellikle M2 için bulunan korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri analitik değerlere oldukça yakındır.

Tablo 2.15: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

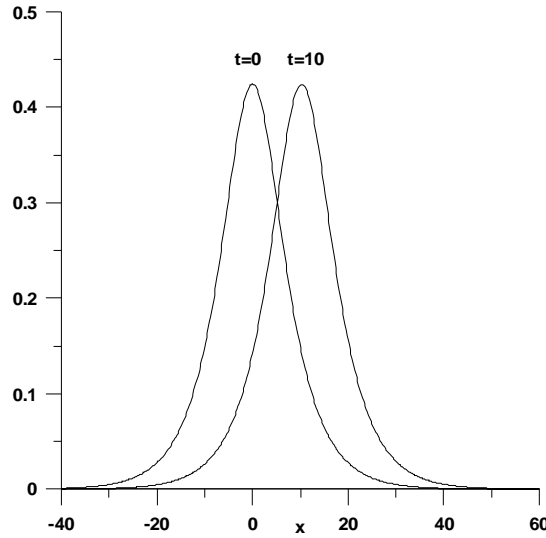
Zaman	M1			M2		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	4.71239	3.32946	1.41667	4.71239	3.33331	1.41667
10	4.71239	3.32947	1.41668	4.71239	3.33331	1.41667
20	4.71237	3.32941	1.41661	4.71239	3.33332	1.41668
30	4.71186	3.32806	1.41418	4.71239	3.33332	1.41667
40	4.71234	3.32890	1.41558	4.71239	3.33332	1.41668
50	4.71280	3.32987	1.41685	4.71239	3.33333	1.41669
60	4.71271	3.32981	1.41682	4.71239	3.33333	1.41669
70	4.71251	3.32964	1.41675	4.71239	3.33333	1.41669
80	4.71239	3.32955	1.41671	4.71239	3.33333	1.41669

## 2.6 Metotların MRLW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması

(2.5) denkleminde  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \varepsilon$ ,  $p = 2$  ve  $\alpha_3 = \mu$  alındığında MRLW denklemi elde edilir.

### 2.6.1 Solitary dalga oluşumu

İlk olarak  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $x_0 = 0$  parametreleri ve  $-40 \leq x \leq 60$  tanım aralığı seçilerek  $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$  genlikli solitary dalgasının  $v = c + 1$  hızla sağa doğru hareketi  $0 \leq t \leq 10$  zaman aralığında incelenmiştir.  $c = 0.03$  seçimiyle  $t = 0$  ve  $t = 10$  anındaki dalgaların durumu (1.49) analitik çözümü yardımıyla Şekil 2.16 de gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi  $t = 10$  anında dalganın tepe noktası  $x_0 + 10c + 10 = 10.3$  konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.16:  $t = 0$  ve  $t = 10$  anındaki dalgaların durumu

Program  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $c = 0.03$  seçimleriyle  $t = 10$  anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ile birlikte korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.16 da verilmiştir. Tabloda ayrıca daha önce yapılan çalışmaların sayısal sonuçlarında bulunmaktadır. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{\pi A}{k} \simeq 7.80988,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 2.12989$$

$$C_3 = \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \simeq 0.13025$$

olarak bulunabilir. Tablo 2.16 incelendiğinde M1 in M2 ye göre hata normlarının daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. M2 nin M1 e göre daha kötü sonuçlar vermesinin sebebi, konum aralığının uç noktalarında M2 nin sınır şartlarını tam olarak sağlayamamasından kaynaklanmaktadır. Bununla birlikte her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur.

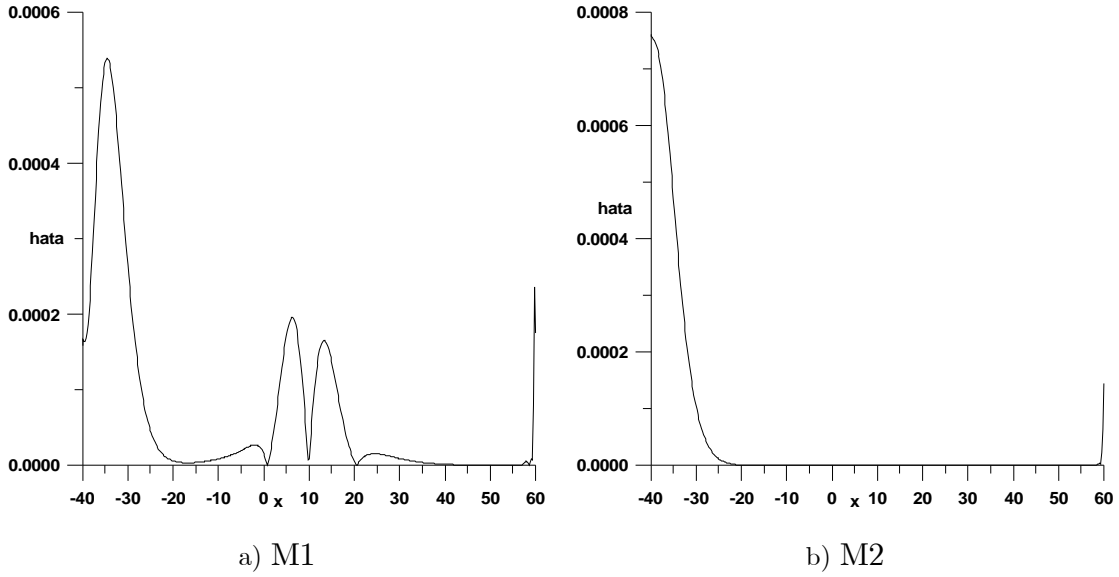
Tablo 2.16:  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $c = 0.03$  ve  $-40 \leq x \leq 60$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	7.80430	2.12987	0.13032		
2	0.93109	0.68287	7.80393	2.12987	0.13032		
4	1.08230	0.57090	7.80414	2.12987	0.13032		
6	1.23729	0.55871	7.80397	2.12987	0.13032		
8	1.35061	0.54891	7.80364	2.12987	0.13032		
10	1.42518	0.53836	7.80324	2.12987	0.13032		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	7.80430	2.12988	0.13025		
2	0.26168	0.27279	7.80626	2.12989	0.13025		
4	0.56450	0.46472	7.80798	2.12989	0.13025		
6	0.90912	0.59976	7.80961	2.12989	0.13025		
8	1.27623	0.69477	7.81121	2.12989	0.13025		
10	1.64172	0.76162	7.81274	2.12989	0.13025		
Diğer çalışmalar ( $t = 10$ )							
	$h$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
(Khalifa et.al., 2007)	0.2	0.025	0.698	0.1995	7.80932	2.12988	0.13032

$h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $c = 0.03$  seçimleri ile  $-40 \leq x \leq 60$  konum aralığında  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.17 de çizilmiştir. M1 ve M2 için çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının başlarında olduğu görülebilir. Metotlardaki hatanın konum aralığının uç noktalarında görünmesinin sebebi yukarıda da bahsettiğimiz gibi dalganın yeterince sifıra yakın değerleri ala-

çak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla metotlar ne kadar iyi olursa olsun sınır şartlarındaki kabullerden dolayı en az bu kadar hatanın yapılması kaçınılmazdır.



Şekil 2.17 :  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $c = 0.03$  ve  $-40 \leq x \leq 60$  için  $t = 10$  zamanındaki

$$|\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

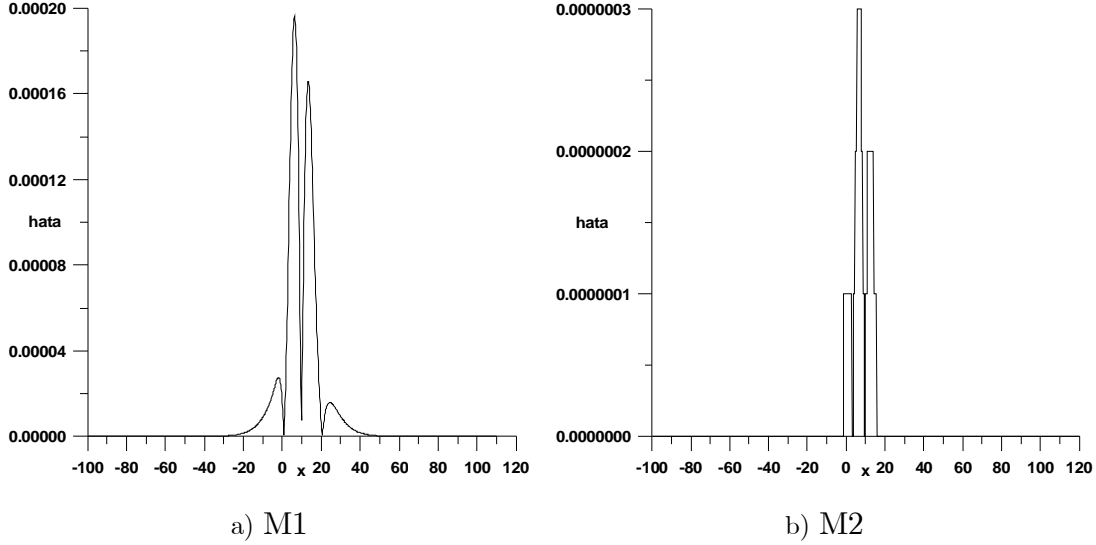
Daha iyi sonuçlar elde edebilmek için konum aralığını  $-100 \leq x \leq 120$  aralığına genişleterek programlar tekrar çalıştırıldığında sonuçların çok daha iyi olduğu Tablo 2.17 den görülebilir. Özellikle M2 deki iyileşme oldukça fazladır. Korunum sabitleri ise artık analitik sonuçlarla aynı değerdedir. Bu test probleminde de görüldüğü gibi konum aralığının seçimi oldukça önemlidir. Aralığın uç noktalarında dalganın analitik değerinin aldığı değer sınır şartına ne kadar yakınsa yaklaşık çözümlerde o kadar iyi olmaktadır.

Tablo 2.17  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $c = 0.03$  ve  $-100 \leq x \leq 120$  için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	7.80988	2.12988	0.13032
2	0.10650	0.03803	7.80988	2.12988	0.13032
4	0.21368	0.07755	7.80988	2.12988	0.13032
6	0.32041	0.11772	7.80988	2.12988	0.13032
8	0.42643	0.15789	7.80988	2.12988	0.13032
10	0.52757	0.19608	7.80988	2.12988	0.13032
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0	0	7.80988	2.12989	0.13025
2	0.00017	0.00008	7.80988	2.12989	0.13025
4	0.00031	0.00015	7.80988	2.12989	0.13025
6	0.00046	0.00021	7.80988	2.12989	0.13025
8	0.00060	0.00027	7.80988	2.12989	0.13025
10	0.00073	0.00033	7.80988	2.12989	0.13025

Şekil 2.18 de  $-100 \leq x \leq 120$  konum aralığında çizilen hata grafikleri verilmiştir. Konum aralığı genişletilerek çizilen bu grafiklerden kolayca görülebileceği gibi artık maksimum hatanın her iki program içinde konum aralığının orta noktaları civarında olduğu görülmektedir. Ayrıca maksimum hatanın bir önceki tabloda verilen  $L_\infty$  hataları kadar olduğuda kolaylıkla kontrol edilebilir.



Şekil 2.18 :  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $c = 0.03$  ve  $-100 \leq x \leq 120$  için  $t = 10$  zamanındaki  
 |Analitik çözüm — Sayısal çözüm|

Solitary dalganın oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızını yani  $c$  değerini değiştirerek problem incelenmiştir. Bu durumda programlar  $\varepsilon = 6$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c = 0.3$  seçimleriyle  $t = 20$  anına kadar  $0 \leq x \leq 100$  konum aralığında çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.18 de verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{\pi A}{k} \simeq 3.58197,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 1.34508,$$

$$C_3 = \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \simeq 0.15372$$

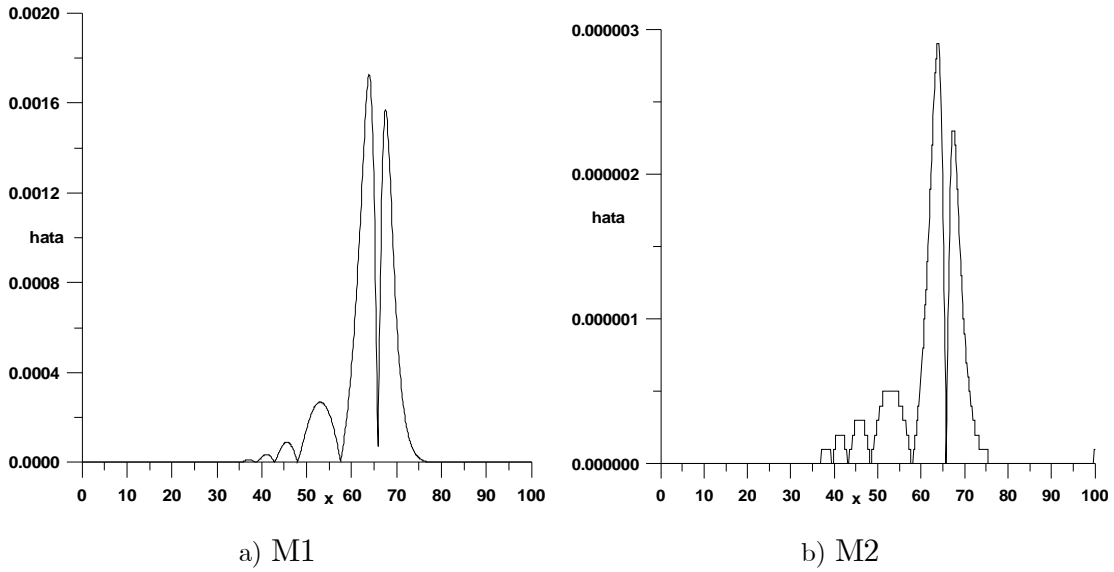
olarak bulunabilir. Tablo 2.18 den kolaylıkla görülebileceği gibi hata normları incelendiğinde M2 nin M1 e göre daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Ayrıca her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur.

Tablo 2.18:  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c = 0.3$  ve  $0 \leq x \leq 100$  için korunum sabitleri ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	3.58197	1.34497	0.15383		
4	0.86660	0.44700	3.58197	1.34497	0.15383		
8	1.68815	0.81481	3.58197	1.34497	0.15383		
12	2.44674	1.13188	3.58197	1.34497	0.15383		
16	3.17175	1.43234	3.58197	1.34497	0.15383		
20	3.87911	1.72632	3.58197	1.34497	0.15383		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$		
0	0	0	3.58197	1.34508	0.15372		
4	0.00178	0.00105	3.58197	1.34508	0.15372		
8	0.00304	0.00160	3.58197	1.34508	0.15372		
12	0.00414	0.00205	3.58197	1.34508	0.15372		
16	0.00517	0.00247	3.58197	1.34508	0.15372		
20	0.00616	0.00291	3.58197	1.34508	0.15372		
Diğer çalışmalar ( $t = 20$ )							
	$h$	$\Delta t$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
(Haq et.al., 2010)	0.1	0.01	0.051	0.0022	3.58197	1.34508	0.15372

$h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c = 0.3$  seçimleri ile  $0 \leq x \leq 100$  konum aralığında  $t = 20$  zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.19 da verilmiştir. M1 ve M2 için çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının ortalarında olduğu görülebilir.





Şekil 2.19 :  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c = 0.3$  ve  $0 \leq x \leq 100$  için  $t = 20$  zamanındaki

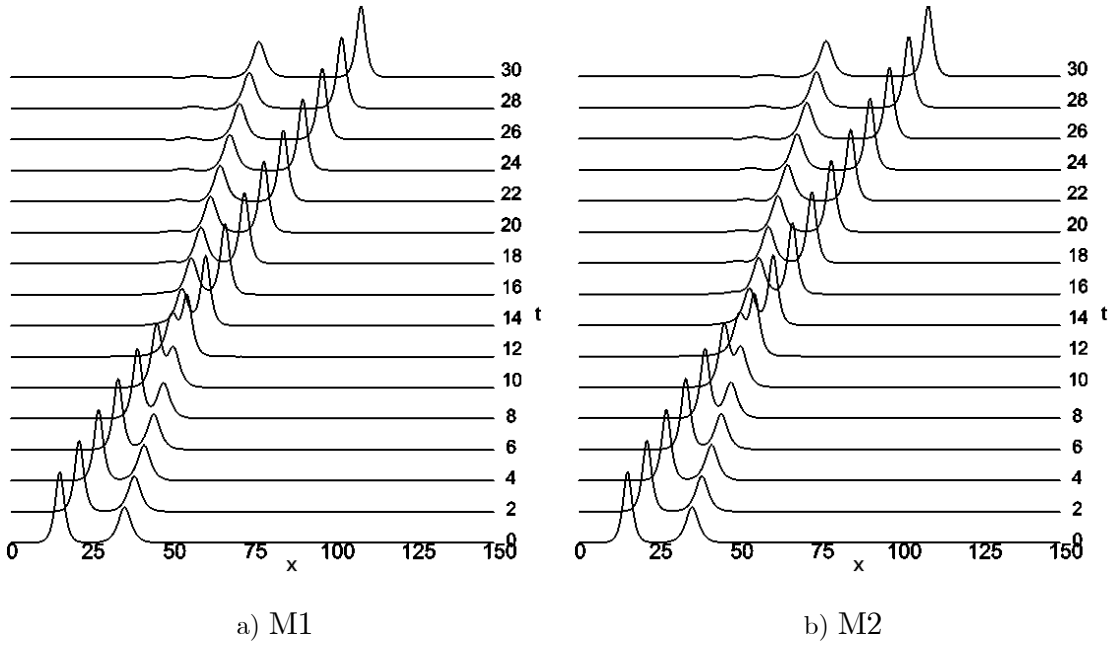
|Analitik çözüm – Sayısal çözüm|

## 2.6.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.53) eşitliğinde  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 35$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $A_1 = \sqrt{12}$ ,  $A_2 = \sqrt{3}$ ,  $k_1 = \frac{2}{3}$  ve  $k_2 = \frac{1}{3}$  alındığında

$$u(x, 0) = \sqrt{12} \operatorname{sech} \left( \frac{2}{3} [x - 15] \right) + \sqrt{3} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{3} [x - 35] \right)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $[0, 150]$  konum aralığı seçimiyle program  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.20 de verilmiştir. Her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği ve aynı zamanlarda sona erdiği şekilden görülebilir. Ayrıca çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında solitary dalgalarının şekillerinde bir bozulma olmadığında söylenebilir.



Şekil 2.20 : İki solitary dalgasının çarpışması

Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$C_1 = \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_2) \simeq 22.75342678,$$

$$C_2 = \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{3k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \simeq 47.47285495$$

$$C_3 = \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2) \simeq 209.8155859$$

olarak bulunabilir. Korunum sabitleri için sayısal değerler ise Tablo 2.19 da gösterilmiştir. Sayısal yöntemler sonucunda elde edilen sonuçlar ile analitik değerlerin oldukça uyumlu oldukları söylenebilir.

Tablo 2.19: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	M1			M2		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	22.75339	47.45213	209.96400	22.75339	47.47410	209.83218
6	22.75324	47.45165	209.94669	22.75361	47.47486	209.84125
12	22.75007	47.42654	209.28717	22.75380	47.47526	209.84454
18	22.75362	47.45475	209.99090	22.75400	47.47599	209.85479
24	22.75347	47.45507	209.99760	22.75420	47.47677	209.86404
30	22.75339	47.45558	210.00464	22.75440	47.47754	209.87327

## BÖLÜM 3

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerini kapsayan genel formdaki bir kısmi türevli diferensiyel denklemin sayısal çözümü sonlu farklar metodu kullanılarak araştırılmıştır. İlk olarak denklemin zamana göre parçalanması için Taylor seri açılımı kullanılmıştır. Zamana göre doğruluğu maksimum yapacak şekilde işlemler yapıldıktan sonra, konum parçalanması için iki farklı sonlu farklar yaklaşımı önerilmiştir. Konuma göre türevler için ilk yaklaşımda 3 noktalı ikincisinde ise 5 noktalı yaklaşım kullanılmıştır. Sırası ile bu metotlar M1 ve M2 olarak adlandırılmıştır. M1 metodu uygulandıktan sonra elde edilen denklem sistemi ile bilinmeyen sayısı arasında 2 bilinmeyen fazlalığı olmuştur. Bu fazlalığın elimine edilmesi için sınır şartlarında çözümü aranan ifadenin kullanılması yeterlidir. M2 de ise durum biraz daha farklıdır. M2 de denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı arasındaki fazlalık 4 tanedir. Bilinmeyenlerin baştan ve sondan 2 tanesi elimine edilmelidir. Bu durumda çözümü aranan ifadelerin kendileri elimine edilememiştir. Sadece birinci ve ikinci türev yaklaşımlarının sınırdaki değerleri kullanılarak elimine işlemi yapılabilmektedir. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlendikten sonra genel denklemin katsayılarının özel seçimleri ile sırasıyla EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerinin sayısal çözümleri iki test problemi yardımıyla incelenmiştir.

Sayısal çözümler incelendikten sonra M2 nin M1 e göre oldukça iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Bununla birlikte eğer konum aralığı yeterince büyük seçilememişse M2 sınırlarda büyük hatalar vermektedir. Bunun sebebi M2 de sınır şartı olarak sadece türevlerin kullanılmış olmasıdır. Özellikle konum aralığının genişletildiği ve böylece sınır şartlarının nispeten daha iyi sağlandığı durumlarda M2 çok daha iyi sonuçlar vermiştir.

Sonuç olarak uygulama kolaylığı açısından sonlu elemanlar metoduna göre daha kolay bir metot olan sonlu farklar metodu denklemlerin sayısal çözümü için iyi sonuçlar vermiştir. Dolayısıyla önerilen yeni zaman parçalanması kullanılarak ben-

zer tipteki diğer kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümleride araştırılabilir. Ayrıca zaman parçalanması için önerilen metot kullanıldıktan sonra, konum parçalanması için spline fonksiyonlar ile birlikte sonlu elemanlar metotlarıda kullanılabilir. Sonlu elemanlar metotları kullanılırken sınır şartlarıda daha iyi uygulanabileceğinden sonuçların daha iyi çıkması beklenebilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alexander, M.E. and Morris, J.L.L. 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *Journal of Computational Physics* 30, 428-451.
- Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., 1972, Model Equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 272, 47-78.
- Crawford, F., 1968, *Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3 Waves*, Mcgraw-Hill College, 600 p.
- Dağ, İ., 2000, Least squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,182, 205-215.
- Dağ, İ. and Özer, M. N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling* 25, 221-231.
- Dağ, İ., Saka, B. and Irk, D., 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation* 159(2), 373-389.
- Dağ, I., Saka, B. and Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 190(1-2), 532-547.
- Dağ, İ., Irk, D. and Boz, A., 2007, Simulation of EW wave generation via Quadratic B-spline finite element method, *International Journal of Mathematics and Statistics* 1(A07), 46-59.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- Doğan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 17, 485–494.
- Doğan, A., 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling* 26(7), 771-783.
- Eilbeck, J.C. and McGuire, G.R., 1975, Numerical study of the regularized long-wave equation I: numerical methods, *Journal of Computational Physics* 19, 43-57.
- Eilbeck, J.C. and McGuire, G. R., 1977, Numerical study of the regularized long-wave equation II: interaction of solitary waves, *Journal of Computational Physics* 23, 63-73.
- Esen, A., 2005, A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation* 168, 270-282.
- Esen, A. and Kutluay, S., 2006, Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation* 174, 833–845.
- Esen, A. and Kutluay, S., 2008, Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13, 1538-1546.
- Evans D.J. and Raslan K.R., 2005, Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation. *International Journal of Computer Mathematics* 82(4), 445–455.
- Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , <http://www.weizmann.ac.il/~home/fnfal/soliton.pdf>.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters* 19, 1095-1097.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, Solitary waves of the regularised long wave equation, *Journal of Computational Physics* 91, 441-459.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1992, Solitary waves of the equal width wave equation, *Journal of Computational Physics* 101, 218-223.
- Gardner, L. R. T. and Dağ, İ., 1995, The boundary-forced regularised long-wave equation, *Il Nuovo Cimento* 110 B N. 12, 1487-1496.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Dağ, İ., 1995, A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 11, 59-68.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 12(11), 795-804.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A. and Amein N.K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 147, 147-152.
- Haq, F., İslam, S. and Tirmizi, I.A., 2010, A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines, *Applied Mathematical Modelling*, (Baskıda)
- Irk, D., Saka, B. and Dağ, İ., 2003, Cubic spline method for the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18, 201-214.



### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Irk, D., Dağ, İ. and Doğan, A., 2005, Numerical integration of the RLW equation using cubic splines, *Anziam Journal* 47, 131-142.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 148 s.
- Jain, P.C. and Iskandar, L., 1979, Numerical solutions of the regularized long wave equation, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 20, 195-201.
- Khalifa, A.K., Raslan, K.R. and Alzubaidi, H.M., 2007, A finite difference scheme for the MRLW and solitary wave interactions, *Applied Mathematics and Computation* 189, 346-354.
- Korteweg, D.J and De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine* 39, 422-443.
- Kutluay, S. and Esen, A., 2006, A finite difference solution of the regularized long wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 1-14.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons, 677 p.
- Morrison, P.J., Meiss, J.D. and Carey, J.R., 1981, Scattering of RLW solitary waves, *Physica* 11D, 324-336.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85, 143-159.
- Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics* 25(2), 321-330.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- Ramos, J.I., 2006, Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations, *Applied Mathematics and Computation* 179, 622-638.
- Raslan, K.R., 2004, A computational method for the equal width equation, *International Journal of Computer Mathematics* 81(1), 63-72.
- Raslan, K.R., 2005a, Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation, *Applied Mathematics and Computation* 168, 795-805.
- Raslan, K.R., 2005b, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, *Applied Mathematics and Computation* 167(2), 1101-1118.
- Raslan, K.R. and El-Danaf, T.S., 2010, Solitary wave solutions of the MRLW equation using quintic B-splines, *Journal of King Sauri University, (Baskıda)*.
- Saka, B., Irk, D. and Dağ, İ., 2003, A numerical study of the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18, 99-196.
- Saka, B., 2006, A finite element method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation* 175, 730-747.
- Saka, B., 2007, Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method, *Mathematical and Computer Modelling* 45(9-10), 1096-1117.
- Saka, B. and Dağ, İ., 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24, 1339-1361.
- Saka, B., Dağ, İ., Dereli Y. and Korkmaz, A. 2008a, Three different methods for numerical solution of the EW equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 32, 556-566.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)**

- Saka, B., Dağ, İ. and Irk, D., 2008b, Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation, *Anziam Journal* 49, 389-410.
- Smith, G.D., 1978, Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press, 304 p.
- Soliman, A.A. and Hussien, M.H., 2005, Collocation solution for RLW equation with septic spline, *Applied Mathematics and Computation* 161, 623-636.
- Thomas, J.W., 1995, Numerical partial differential equations, Springer, 437 p.
- Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics* 57(5), 841-847.
- Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D., 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, *Physical Review Letters* 15, 240-243.
- Zaki, S.I., 2000a, A least quares finite element scheme for the EW equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 189, 381-392.
- Zaki, S.I., 2000b, Solitary wave interactions for the modified equal width equation, *Computer Physics Communications* 126, 219-231.
- Zaki, S.I., 2001, Solitary waves induced by the boundary forced EW equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 4881-4887.
- Zheng, S., 2004, Nonlinear evolution equations, Chapman & Hall/CRC, 304 p.