

Polinom ve Polinom Olmayan Kübik Spline Fonksiyonlar Yardımıyla Bazı Kısmi
Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Melis Zorşahin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık 2009

Numerical Solutions of the Some Partial Differential Equations by Using Polynomial
and Non-Polynomial Cubic Splines

Melis Zorşahin

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

December 2009

Polinom ve Polinom Olmayan Kübik Spline Fonksiyonlar Yardımıyla Bazı Kısmi
Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Melis Zorşahin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Bülent Saka

Aralık 2009

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Melis Zorşahin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Polinom ve Polinom Olmayan Kübik Spline Fonksiyonlar Yardımıyla Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Bülent Saka

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bülent Saka

Üye : Prof. Dr. İdris Dağ

Üye : Doç. Dr. Dursun Eser

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali Şahin

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, polinom ve polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar yardımıyla bazı kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavramlar tanıtılmıştır. Spline fonksiyonlar hakkında genel bilgi verilmiş, sonrasında kuadratik ve kübik spline interpolasyon fonksiyonları açıklanmıştır. Polinom olmayan spline fonksiyonlar tanımlanarak, polinom olmayan kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik spline interpolasyon fonksiyonları oluşturulmuştur. Son olarak, adveksiyon-difüzyon, RLW, lineer olmayan Burger ve genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemleri, başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte tanıtılmıştır.

Diğer dört bölümde, adveksiyon-difüzyon, RLW, lineer olmayan Burger ve genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemlerinin sayısal çözümleri polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar kullanılarak araştırılmıştır. Önerilen metotların kararlılığı için ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde von-Neumann analizi kullanılmış, son bölümde ise yerel kesme hatası çalışılmıştır. Metotların doğruluğunu ve etkinliğini ölçmede farklı bazı test problemleri dikkate alınmıştır ve elde edilen sonuçlar polinom spline tabanlı metotla ve daha önceden yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Spline fonksiyon, polinom olmayan kübik spline fonksiyon, kısmi diferensiyel denklemler, adveksiyon-difüzyon, RLW, lineer olmayan Burger, genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemleri

SUMMARY

In this thesis, the numerical solutions of the some partial differential equations are studied by using polynomial and non-polynomial cubic spline methods.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. An introduction about spline functions is given and then quadratic and cubic spline interpolation functions are described. After the non-polynomial cubic spline functions is explained, non-polynomial quadratic, cubic, quartic and quintic spline functions are constructed. Finally, the advection-diffusion, RLW, non-linear Burger and generalized Burgers-Fisher equations are introduced together with their initial and boundary conditions.

In the other four chapters, the advection-diffusion, RLW, non-linear Burger and generalized Burgers-Fisher equations are solved numerically by using non-polynomial cubic spline method. Von-Neumann analysis is employed in the second, third and fourth chapters for the stability and local truncation error of the method is derived in the last chapter. To illustrate the accuracy of the methods, some numerical examples are considered and obtained results are compared with polynomial spline based method and some early studies.

Keywords: Spline function, non-polynomial cubic spline function, partial differential equations, advection-diffusion, RLW, non-linear Burger, generalized Burgers-Fisher equations

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans çalışmalarımnda, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarımnda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA'ya, değerli fikirlerine başvurduğum hocalarım Prof. Dr. İdris DAĞ, Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN ve Yrd. Doç. Dr. Dursun İRK'a, bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a ve her zaman yanımda olup beni destekleyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLolar DİZİNİ	xiii
KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Spline Fonksiyonlar	1
1.1.1 Kuadratik spline fonksiyonlar	3
1.1.2 Kübik spline fonksiyonlar	7
1.2 Polinom Olmayan Spline Fonksiyonlar	15
1.2.1 Polinom olmayan kuadratik spline fonksiyonlar	15
1.2.2 Polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar	18
1.2.3 Polinom olmayan kuartik spline fonksiyonlar	22
1.2.4 Polinom olmayan kuintik spline fonksiyonlar	26
1.3 Kısmi Diferensiyel Denklemler	31
1.3.1 Adveksiyon- difüzyon denklemi, başlangıç ve sınır koşulları	32
1.3.2 Regularized long wave (RLW) denklemi, başlangıç ve sınır koşulları	33
1.3.3 Lineer olmayan Burger denklemi, başlangıç ve sınır koşulları	35
1.3.4 Genelleştirilmiş Burgers- Fisher denklemi, başlangıç ve sınır koşulları	37
2. ADVEKSİYON- DİFÜZYON DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ	39
2.1 Giriş	39
2.2 Sayısal Metot	39
2.3 Kararlılık Analizi	41

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

	<u>Sayfa</u>
2.4 Test Problemleri	42
2.4.1 Birinci test problemi	43
2.4.2 İkinci test problemi	45
2.5 Sonuçlar	48
3. REGULARIZED LONG WAVE (RLW) DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ	49
3.1 Giriş	49
3.2 Sayısal Metot	49
3.3 Kararlılık Analizi	51
3.4 Test Problemleri	52
3.4.1 Tek solitary dalganın yayılması	52
3.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması	57
3.5 Sonuçlar	60
4. LİNEER OLMAYAN BURGER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ	61
4.1 Giriş	61
4.2 Sayısal Metot	61
4.3 Kararlılık Analizi	63
4.4 Test Problemi	64
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS- FISHER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ...68	68
4.1 Giriş	68
4.2 Sayısal Metot	68
4.3 Yerel Kesme Hatası	70

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

	<u>Sayfa</u>
4.4 Test Problemleri	72
4.4.1 Birinci test problemi	72
4.4.2 İkinci test problemi	75
 KAYNAKLAR DİZİNİ	 80

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Mekanik spline2
2.1	Başlangıçtaki yayılımın taşınması43
2.2	Hata dağılımı45
2.3	Hata dağılımı45
2.4	$\lambda = 0.002$, $P_c = 5$ için çözümler46
2.5	$\lambda = 0.002$ m ² /sn için hatalar46
2.6	$\lambda = 0.002$, $P_c = 0.5$ için çözümler46
2.7	$\lambda=0.002$, $P_c = 0.05$ için çözümler46
3.1	$t = 0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 'deki solitary dalga çözümleri53
3.2	$t = 20$ 'deki $((u^{analitik} - u^{sayisal}) \times 10^4)$ hata dağılımı54
3.3	İki solitary dalganın çarpışması58
3.4	$t = 25$ zamanında küçük olan solitary dalganın ardındaki salınım kuyruğu ..59
4.1	$h = 0.02$, $\nu = 0.01$ için farklı zamanlardaki analitik ve sayısal çözümler65
4.2	$h = 0.02$, $\nu = 0.005$ için farklı zamanlardaki analitik ve sayısal çözümler65
4.3	$h = 0.005$, $\nu = 0.005$ için çeşitli zamanlardaki analitik ve sayısal çözümler .66
4.4	$h = 0.02$, $\nu = 0.01$ için $t = 1.7, 2.1, 2.6$ zamanlarındaki hataların karşılaştırılması67
4.5	$h = 0.02$, $\nu = 0.005$ için $t = 1.8, 2.1, 3.2$ zamanlarındaki hataların karşılaştırılması67
4.6	$h = 0.005$, $\nu = 0.005$ için $t = 1.7, 2.4, 3.1$ zamanlarındaki hataların karşılaştırılması67
5.1	$\delta = 1$ için $t = 0.001, 0.005$ ve 0.01 zamanlarındaki mutlak hataların karşılaştırılması75
5.2	$\delta = 4$ için $t = 0.001, 0.005$ ve 0.01 zamanlarındaki mutlak hataların karşılaştırılması75
5.3	$\delta = 2$ için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması79
5.4	$\delta = 4$ için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması79

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
5.5	$\delta = 8$ için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması	79

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
1.1	Polinom olmayan kübik spline eşitlikleri	22
2.1	$t = 9600$ sn'de çeşitli Courant sayıları için en yüksek değerin oluştuğu noktalar konsantrasyonu. $\Delta t = 50$, $\alpha = 0.1$	44
2.2	$t = 9600$ sn'deki hatalar. $\Delta t = 50$ ve $\alpha = 0.1$	44
2.3	$t = 3000$ 'de analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması ($\alpha = 0.2155$, $\beta = 0.2732$)	47
3.1	$Genişlik = 0.3$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $\alpha = \beta = 0.25$ için hatalar ve sabitler ..	55
3.2	$\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ 'de konum yakınsaklık oranı ...	57
3.3	$n=800$, $c=0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ 'de zaman yakınsaklık oranı	57
3.4	$h = 0.3$, $\Delta t = 0.1$, $\alpha = 1/24$, $\beta = 11/24$ için sabitler	59
4.1	$\Delta t = 0.01$ için farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması	66
5.1	Sayısal çözümlerin karşılaştırılması ($\alpha = -999 \cdot 10^{-9}$, $\beta = 999 \cdot 10^{-9}$)	73
5.2	Mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha = -999 \cdot 10^{-9}$, $\beta = 999 \cdot 10^{-9}$)	73
5.3	Sayısal çözümlerin karşılaştırılması ($\alpha = 10^{10} + 0.4690704$, $\beta = -\alpha$)	74
5.4	Mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha = 10^{10} + 0.4690704$, $\beta = -\alpha$)	74
5.5	x ve t nin farklı değerleri ve $\delta = 2$, $\xi = 0.1$, $\lambda = -0.0025$ için mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha = -26807.442$, $\beta = -\alpha$)	76
5.6	x ve t nin farklı değerleri ve $\delta = 4$, $\xi = 0.1$, $\lambda = -0.0025$ için mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha = -23743.977$, $\beta = -\alpha$)	77
5.7	x ve t nin farklı değerleri ve $\delta = 8$, $\xi = 0.1$, $\lambda = -0.0025$ için mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha = -21937.057$, $\beta = -\alpha$)	78

KISALTMALAR DİZİNİ**Kısaltmalar Açıklama**

POSM	Polinom olmayan spline metodu
PSM	Polinom spline metodu
RLW	Regularized Long Wave

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

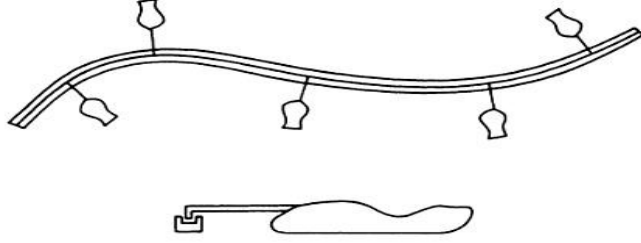
Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar tanıtılmıştır. Spline fonksiyonlar hakkında genel bilgi verilmiş, kuadratik ve kübik spline interpolasyon fonksiyonları açıklanmıştır. Diferensiyel denklem çözümlerinde kullanılacak olan polinom olmayan spline fonksiyonlar tanıtılarak, polinom olmayan kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik spline interpolasyon fonksiyonları açıklanmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri yapılacak olan bazı zamana bağlı kısmi diferensiyel denklemler tanıtılmıştır.

1.1 Spline Fonksiyonlar

Problem çözümlerinde sıklıkla kullanılan yöntemler arasında yer alan interpolasyon yöntemleri, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve matematik gibi çeşitli bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlar arasında polinom yaklaşımı önemli bir yere sahiptir. Uygulamada kullanılacak olan fonksiyonu bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Ancak fonksiyonu temsil etmeye bir polinom elde edilebilir. Fonksiyonu elde etmek için verilen nokta sayısı ne kadar artarsa polinomun derecesi de o kadar artacaktır. Yüksek dereceden polinomlar hem işlem güçlüklerini ortaya çıkaracağından hem de fonksiyonlarda büyük salınımlara yol açacağından hatalı sonuçlar doğurabilir. Bundan dolayı verilen bilgilere uyacak en küçük dereceden polinomlar bulunabilir. Bu yaklaşım için hem düzgünleştirici hem de verimli bir yaklaşım elde etmede en uygun olanı parçalı polinom yaklaşımıdır (De Boor, 1978). Böylece işlem kolaylığı sağlanmış olacaktır. Polinom yaklaşımında yapılan işlem, problemin çözüm bölgesini küçük aralıklara parçalayarak her bir parça üzerinde düşük dereceden polinomlar kullanılarak, aranan $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımdır. Bu tür özelliklere sahip parçalı polinomlara spline fonksiyonlar adı verilmektedir.

Spline kavramı, ilk olarak 1946'da Schoenberg tarafından tanıtılmıştır. Fonksiyona spline adının verilmesi parçalı polinomlarla, spline adını taşıyan mekanik bir

alet arasındaki ilişkidir kaynaklanmıştır. Bu mekanik alet, elastik bir maddeden yapılmış ince oluklu bir çubukla beraber kollarının bir ucunda ağırlıkları olan ve diğer ucundan da oluklara geçirilebilecek çıkıntıları olan parçalardan oluşmaktadır (Bkz. Şekil 1.1). Kollar ve ağırlıklarla çubuğun belli bir yoldan geçmesi sağlanır ve böylece ağırlıkların kollarının çubuğa değdiği noktalardan geçen düzgün eğrileri çizilir. Bu düzgün eğriler spline fonksiyon olarak adlandırılmış ve $S(x)$ ile gösterilmiştir.



Şekil 1.1: Mekanik spline (Schumaker'den, 1993)

m . dereceden spline fonksiyonlar, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ monoton artan bir dizi olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i) $S(x)$, her $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ de m . ya da daha küçük dereceden bir polinomdur. (Burada $x_0 = -\infty$ ve $x_n = \infty$ olabilir.)
- (ii) $S(x)$, $(m - 1)$. mertebeden türevlenebilir ve x_1, x_2, \dots, x_{n-1} bölünme noktalarında süreklidir.

$m = 0$ için (ii) koşulu geçersizdir. $m = 1$ için spline fonksiyonu lineer bir fonksiyon olup verilen aralıkta kırık çizgiyi gösterir.

Genel olarak, $S(x)$; $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ aralıklarının her biri için derecesi m ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarak verilebilir. $m > 0$ için m . dereceden bir spline fonksiyonun m . türevi bir adım fonksiyonudur. Bunun yanı sıra m . dereceden bir spline fonksiyonu bir adım fonksiyonun m . basamaktan belirsiz integralidir de denebilir.

Şimdi, bir $[a, b]$ aralığı için $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ şeklindeki $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ bölüm noktalarını göz önüne alalım. u_i 'ler $u(x_i, t)$ 'lerin yaklaşık çözümlerini ifade etmek üzere kuadratik ve kübik spline fonksiyonlarını elde edelim.

1.1.1 Kuadratik spline fonksiyonlar

Tanım: Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $S(x)$ fonksiyonuna kuadratik spline interpolasyon polinomu denir.

- (i) $S(x) \in C^1 [a, b]$
- (ii) $S(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$
- (iii) $S(x)$, her $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ alt aralığında parçalı kuadratik polinomdur.

m . dereceden bir spline fonksiyonun özelliklerini göz önüne alırsak, $m-1$. mertebeden türevlenebilir olması için en azından m . dereceden polinomların seçilmesi gerekir. Kuadratik spline fonksiyonlar her bir alt aralıkta türevlenebilen ikinci dereceden polinomlardır ve bu fonksiyonların birinci türevleri bölünme noktalarında süreklidir. $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında bu polinomlar a_i, b_i ve c_i 'ler bilinmeyenler olmak üzere ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (1.1.1)$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $n+1$ nokta için n tane aralık vardır. Bu nedenle $3n$ tane bilinmeyen sabitin hesaplanması gerekir. Bu sabitlerin hesaplanması için de $3n$ tane denkleme veya koşula ihtiyaç vardır. Bu koşullar aşağıda belirtildiği gibi elde edilir:

1. Fonksiyon iç noktalarda süreklidir. Bu durum;

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) \quad (1.1.2)$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \quad (1.1.3)$$

biçiminde ifade edilebilir. Sadece içteki bölünme noktaları kullanıldığından $i = 2$ den n 'ye kadar alınır. Her bir nokta için iki denklem elde edildiğinden (1.1.2) ve (1.1.3) denklemlerinden $n - 1$ nokta için $2n - 2$ denklem elde edilir.

2. Aralık üzerinde tanımlanan spline fonksiyon uç noktalarda da değer almaktadır. Bunun için

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0) \quad (1.1.4)$$

$$a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n = f(x_n) \quad (1.1.5)$$

denklemleri yukarıdaki sisteme eklenirse toplamda $2n - 2 + 2 = 2n$ koşul elde edilmiş olur.

3. İç bölünme noktalarındaki birinci türevleri sürekli olmalıdır. Buna göre $S_i(x) = a_ix^2 + b_ix + c_i$ denkleminin birinci türevi $S'_i(x) = 2a_ix + b_i$ olur. Bu koşulu bölünme noktaları için sağlatırsak,

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i \quad (1.1.6)$$

olur ($i = 2, \dots, n$). Bu eşitlik $n - 1$ nokta için sağlanacağından, toplam $2n + n - 1 = 3n - 1$ koşul bulunmuş olur. $3n$ sabitin hesaplanabilmesi için bir koşul eksiktir. Fonksiyonlar veya onların türevleri hakkında ek bilgiye sahip olamazsak, sabitleri başarıyla hesaplayabilecek keyfi bir seçim yapmamız gerekir. Her ne kadar yapılacak seçim sayısı fazla da olsa aşağıdaki koşula göre seçeriz.

4. İlk bölünme noktasında ikinci türevi 0 kabul ederiz. (1.1.1) denkleminin ikinci türevi $2a_i$ 'dir ve bunu matematiksel olarak $a_0 = 0$ ile ifade ederiz. Bu koşul ilk iki noktanın düz bir çizgi ile bağlı olduğu anlamına gelir.

$S(x)$ kuadratik spline fonksiyonu

$$S(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i \quad (1.1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada a_i, b_i, c_i ler sabitlerdir.

(1.1.7) denklemindeki a_i, b_i ve c_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) katsayılarını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} S(x_{i+1/2}) &= u_{i+1/2} \\ S'(x_i) &= m_i \\ S''(x_{i+1/2}) &= M_{i+1/2} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

olmak üzere kuadratik spline fonksiyonu M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerlerine bağlı olarak elde edilecektir ve M_0, M_1, \dots, M_n ler denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır. Bu M_i değerleri daha sonradan hesaplanmak üzere (1.1.7) denkleminin iki defa türevini alırsak;

$$S'(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i \quad (1.1.9)$$

$$S''(x) = 2a_i \quad (1.1.10)$$

olur. (1.1.7), (1.1.8), (1.1.9) ve (1.1.10) denklemlerinden $S(x_{i+1/2})$, $S'(x_i)$, $S''(x_{i+1/2})$ değerleri hesaplanarak $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$a_i = \frac{M_{i+1/2}}{2}, \quad b_i = m_i, \quad c_i = u_{i+1/2} - \frac{h^2}{8}M_{i+1/2} - \frac{h}{2}m_i \quad (1.1.11)$$

olarak bulunur. Spline olma koşullarından $S(x)$ ve $S'(x)$ 'in sürekli olması gerekmektedir. Dolayısıyla $1 \leq i \leq n$ için;

$$S_i^{(m)}(x_i) = S_{i-1}^{(m)}(x_i), \quad m = 0, 1 \quad (1.1.12)$$

bağıntısını sağlayacak şekilde seçilen M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerleri ile $S(x)$ ve $S'(x)$ sürekli yapılabilir. Buradan (1.1.7) denkleminden;

$$\begin{aligned} S_{i-1}(x_i) &= a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= a_{i-1}h^2 + b_{i-1}h + c_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= a_i(x_i - x_i) + b_i(x_i - x_i) + c_i \\ &= c_i \end{aligned}$$

olup (1.1.12) eşitliğinden $m = 0$ için $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$a_{i-1}h^2 + b_{i-1}h + c_{i-1} = c_i \quad (1.1.13)$$

elde edilir. (1.1.9) denkleminde

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= 2a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1} \\ &= 2a_{i-1}h + b_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= 2a_i(x_i - x_i) + b_i \\ &= b_i \end{aligned}$$

olup (1.1.12) eşitliğinden $m = 1$ için $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$2a_{i-1}h + b_{i-1} = b_i \quad (1.1.14)$$

elde edilir. (1.1.13) ve (1.1.14) eşitliklerinde (1.1.11) denklemleri kullanılırsa ve düzenleme yapılırsa $h = x_i - x_{i-1}$ için

$$h(m_i + m_{i-1}) = 2(u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) - \frac{h^2}{4}(M_{i+1/2} + 3M_{i-1/2}) \quad (1.1.15)$$

$$h(m_i - m_{i-1}) = h^2 M_{i-1/2} \quad (1.1.16)$$

olur. (1.1.15) ve (1.1.16) eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} hm_i &= (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) - \frac{h^2}{8}(M_{i+1/2} - M_{i-1/2}) \\ hm_{i-1} &= (u_{i-1/2} - u_{i-3/2}) - \frac{h^2}{8}(M_{i-1/2} - M_{i-3/2}) \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

elde edilir. (1.1.18) denklemlerindeki değerler (1.1.16) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse ($i = 2, 3, \dots, n-1$);

$$M_{i+1/2} + 6M_{i-1/2} + M_{i-3/2} = \frac{8}{h^2}(u_{i+1/2} - 2u_{i-1/2} + u_{i-3/2}) \quad (1.1.19)$$

bulunur.

(1.1.19) denklem sisteminde M_1 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse $(n-2) \times (n-2)$ lik bir lineer sisteme sahip oluruz. (1.1.19) dan M_i , $2 \leq i \leq n-1$ değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesaplamalar ve (1.1.11) deki değerler, (1.1.7) de yerine yazılırsa kuadratik spline fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

1.1.2 Kübik spline fonksiyonlar

Tanım: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $S(x)$ fonksiyonuna kübik spline interpolasyon polinomu denir.

(i) $S(x) \in C^2[a, b]$

(ii) $S(x_j) = f(x_j) \quad 0 \leq j \leq n$

(iii) $S(x)$, $0 \leq j \leq n$ olmak üzere her $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ alt aralığında parçalı kübik polinomdur.

Kübik spline fonksiyonların kendisi, birinci ve ikinci türevleri verilen aralık üzerinde süreklidir. Her bir aralık için a_j, b_j, c_j ve d_j 'ler bilinmeyenler olmak üzere ($j = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$f_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad (1.1.20)$$

biçiminde polinomlar kullanılarak yaklaşım yapılabilir. Burada $n+1$ nokta için n tane aralık olduğundan $4n$ tane bilinmeyen sabitin hesaplanması gerekir. Bu sabitlerin hesaplanabilmesi içinde $4n$ tane denkleme veya koşula ihtiyaç vardır. Bu koşullar aşağıdaki gibi belirlenir:

1. İç noktalarda fonksiyon değerleri süreklidir. ($2n-2$ bağıntı)
2. Baştaki ve sondaki fonksiyonlar uç noktalardan geçmelidir. (2 bağıntı)
3. İç noktalarda birinci mertebeden türevler süreklidir. ($n-1$ bağıntı)
4. İç noktalarda ikinci mertebeden türevler süreklidir. ($n-1$ bağıntı)
5. İlk ve son noktada ikinci mertebeden türevler sıfır olmalıdır. (2 bağıntı)

Yukarıdaki beş şarttan toplam $2n-2+2+n-1+n-1+2 = 4n$ tane koşul elde edilmiş olur. Beşinci şart, uç noktalarda fonksiyonların doğrusal olacağı anlamını taşır. Bu tür spline fonksiyonlara tabii spline fonksiyonları denir (Türker, 1997).

$S''(x_j) = M_j$ olsun. $S(x)$ kübik spline fonksiyonu $0 \leq j \leq n$ olmak üzere M_j lere bağlı olarak elde edilecek ve bu M_j değerleri lineer denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır.

M_0, M_1, \dots, M_n değerlerini sonradan belirlemek üzere seçelim. $S(x)$ kübik spline olduğundan her $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında $S''(x)$ birinci dereceden bir polinomdur. $[x_j, x_{j+1}]$ aralığındaki kübik spline fonksiyonunu $S_j(x)$ ile gösterelim.

(x_j, M_j) ve (x_{j+1}, M_{j+1}) noktaları için $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında Lagrange interpolasyon formülünden $S_j(x)$ 'nin ikinci türevi;

$$S_j''(x) = \frac{M_j(x_{j+1} - x)}{h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)}{h} \quad (1.1.21)$$

olarak yazılabilir. Burada $S_j''(x_j) = M_j$, $S_j''(x_{j+1}) = M_{j+1}$ $0 \leq j \leq n-1$ ve $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ $0 \leq j \leq n-2$ olduğuna dikkat edelim. Böylece $x \in [x_j, x_{j+1}]$ için $S_j''(x)$ değerine sahip olan $S''(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli fonksiyon tanımlar ($S''(x)$ kırık çizgidir). (1.1.21) eşitliğinin iki defa integrali alınırsa;

$$S_j'(x) = -\frac{M_j(x_{j+1} - x)^2}{2h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)^2}{2h} + c_1 \quad (1.1.22)$$

$$S_j(x) = \frac{M_j(x_{j+1} - x)^3}{6h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)^3}{6h} + c_1x + c_2 \quad (1.1.23)$$

elde edilir. Burada c_1 ve c_2 katsayıları integrasyon sabitleridir. $S(x)$ 'in sürekli olması ve interpolasyon koşullarını sağlaması için (1.1.23) de;

$$S_j(x_j) = U_j, S_{j+1}(x_j) = U_{j+1}, 0 \leq j \leq n-1$$

yazılırsa;

$$U_j = S_j(x_j) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x_j)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x_j - x_j)^3 + c_1x_j + c_2 \quad (1.1.24)$$

$$U_{j+1} = S_j(x_{j+1}) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x_{j+1})^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x_{j+1} - x_j)^3 + c_1x_{j+1} + c_2 \quad (1.1.25)$$

denklemleri elde edilir. (1.1.24) ve (1.1.25) denklemlerinin ortak çözümüyle

$$c_1 = \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j) \quad (1.1.26)$$

$$c_2 = x_j \left(\frac{h}{6}M_{j+1} - \frac{1}{h}U_{j+1} \right) - x_{j+1} \left(\frac{h}{6}M_j - \frac{1}{h}U_j \right) \quad (1.1.27)$$

bulunur. Bu değerler (1.1.23) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse;

$$S_j(x) = \frac{M_j(x_{j+1} - x)^3}{6h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)^3}{6h} + \left(U_j - \frac{h^2}{6}M_j \right) \frac{(x_{j+1} - x)}{h} + \left(U_{j+1} - \frac{h^2}{6}M_{j+1} \right) \frac{(x - x_j)}{h} \quad (1.1.28)$$

sonucuna varılır. (1.1.28) denkleminin $S'(x)$ 'in sürekli olmasını yani $S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ bağıntısını garantilemez. (1.1.28)'ün türevi;

$$S'_j(x) = -\frac{M_j(x_{j+1} - x)^2}{2h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)^2}{2h} - \frac{h(M_{j+1} - M_j)}{6} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \quad (1.1.29)$$

olup $S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ bağıntısını sağlayacak biçimde seçilen M_j , $1 \leq j \leq n - 1$ değerleri ile $S'(x)$ sürekli yapılabilir. Bunun için (x_{j-1}, x_j) ve (x_j, x_{j+1}) aralıklarının ortak noktalarındaki türev ifadeleri (1.1.29) yardımıyla;

$$\begin{aligned} S'_{j-1}(x_j) &= -\frac{M_{j-1}(x_j - x_j)^2}{2h} + \frac{M_j(x_j - x_{j-1})^2}{2h} + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{h(M_j - M_{j-1})}{6} \\ &= \frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{h}{3}M_j + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \\ S'_j(x_j) &= -\frac{M_j(x_{j+1} - x_j)^2}{2h} + \frac{M_{j+1}(x_j - x_j)^2}{2h} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h(M_{j+1} - M_j)}{6} \\ &= -\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$ eşitliğinden $1 \leq j \leq n - 1$ olmak üzere;

$$\frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{h}{3}M_j + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} = -\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h}$$

elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$hM_{j-1} + 2hM_j + hM_{j+1} = \frac{6}{h}(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}) \quad (1.1.30)$$

bulunur. Bu sistemde M_0 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirleyip sağ tarafa geçirilirse $(n - 1) \times (n - 1)$ lineer sistemini elde etmiş oluruz. Sistemin matris formu $b_j = \frac{6}{h}(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1})$, $1 \leq j \leq n - 1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} 4h & h & 0 & & & & \\ h & 4h & h & & & & \\ 0 & h & 4h & h & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & h & 4h & h & 0 \\ & & & & & h & 4h & h \\ & & & & & & 0 & h & 4h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - hM_0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - hM_n \end{bmatrix} \quad (1.1.31)$$

biçiminde olur. Katsayılar matrisinde üçgensellik ve köşegensellik özellikleri vardır. Dolayısıyla tekil değildir. M_1, M_2, \dots, M_{n-1} bir tek çözüme sahip olur. Çözüm M_0 ve M_n lerin seçimine bağlıdır. (1.1.31) den M_j , $1 \leq j \leq n-1$ değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesaplamamanın sonucunda bulunan M_j değerleri (1.1.28) de yerine yazılarak spline fonksiyonu elde edilir. $\alpha \in [a, b]$ için $S(\alpha)$ değerinin bulunması gerektiğinde $\alpha \in [x_j, x_{j+1}]$ aralığında (1.1.28) bağıntısı bulunur. Yani $S_j(\alpha) = S(\alpha)$ dır.

$[a, b]$ aralığının uç noktalarında $U(x)$ 'in türevleri bilinirse daha iyi bir spline fonksiyon elde edilebileceği düşünülmektedir. Bunun için $S(x_j) = U_j$, $0 \leq j \leq n$ olduğundan $S(x)$; $S'(x_n) = U'(x_n) = m_n$ ve $S'(x_0) = U'(x_0) = m_0$ eşitliklerini sağlamalıdır. (1.1.29) dan $j = n-1$ için;

$$\begin{aligned} U'(x_n) &= S'_{j-1}(x_n) = -\frac{M_{n-1}(x_n - x_n)^2}{2h} + \frac{M_n(x_n - x_{n-1})^2}{2h} + \frac{U_n - U_{n-1}}{h} \\ &\quad - \frac{h(M_n - M_{n-1})}{6} \\ &= \frac{h}{6}M_{n-1} + \frac{h}{3}M_n + \frac{U_n - U_{n-1}}{h} \end{aligned}$$

olup

$$m_n = \frac{h}{6}M_{n-1} + \frac{h}{3}M_n + \frac{U_n - U_{n-1}}{h} \quad (1.1.32)$$

bulunur. Benzer biçimde (1.1.29) dan $j = 0$ için;

$$\begin{aligned} U'(x_0) &= S'_0(x_0) = -\frac{M_0(x_1 - x_0)^2}{2h} + \frac{M_1(x_0 - x_0)^2}{2h} + \frac{U_1 - U_0}{h} - \frac{h(M_1 - M_0)}{6} \\ &= -\frac{h}{3}M_0 - \frac{h}{6}M_1 + \frac{U_1 - U_0}{h} \end{aligned}$$

olup

$$m_0 = -\frac{h}{3}M_0 - \frac{h}{6}M_1 + \frac{U_1 - U_0}{h} \quad (1.1.33)$$

elde edilir. Bulunan bağıntılar ve (1.1.30) denklemleri ile birlikte $S'(x)$ 'in sürekliliği sağlanmış olur. (1.1.30), (1.1.32) ve (1.1.33) denklemleri birlikte düşünüldüğünde $(n+1)$ bilinmeyenli $(n+1)$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Sistemin matris formu $b_j = \frac{6}{h}(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1})$, $1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3} & h & 0 & & & & & & & & \\ h & 4h & h & & & & & & & & \\ 0 & h & 4h & h & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & h & 4h & h & 0 & & & \\ & & & & & h & 4h & h & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{h}{6} & \frac{h}{3} & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_1 - U_2}{h} - m_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ m_n - \frac{U_n - U_{n-1}}{h} \end{bmatrix} \quad (1.1.34)$$

elde edilir. Denklem sisteminden M_0, \dots, M_n kolaylıkla hesaplanabilir ve (1.1.28) de yerine yazılırsa elde edilen spline fonksiyona D_1 spline'ı denir (Ahlberg, et al., 1967).

Şimdi de $S'(x_j) = m_j$ olmak üzere $S(x)$ kübik spline fonksiyonunu m_0, m_1, \dots, m_n türevlerine bağlı olarak elde etmeye çalışalım. Bu durumda m_0, m_1, \dots, m_n lineer denklem sistemimizin bilinmeyenleri olacaktır.

$[x_j, x_{j+1}]$ aralığındaki kübik spline fonksiyonunu $S_j(x)$ ile gösterelim. (x_j, m_j) ve (x_{j+1}, m_{j+1}) noktaları için $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında Hermit interpolasyon formülünden;

$$\begin{aligned} S_j(x) &= m_j \frac{(x_{j+1} - x)^2 (x - x_j)}{h^2} - m_{j+1} \frac{(x_{j+1} - x)(x - x_j)^2}{h^2} \\ &+ U_j \frac{(x_{j+1} - x)^2 (2(x - x_j) + h)}{h^3} + U_{j+1} \frac{(x - x_j)^2 (2(x_{j+1} - x) + h)}{h^3} \end{aligned} \quad (1.1.35)$$

eşitliğine ulaşabiliriz. Bu ifadenin iki defa türevini aldığımızda

$$\begin{aligned} S_j'(x) &= m_j \frac{(x_{j+1} - x)(2x_j + x_{j+1} - 3x)}{h^2} - m_{j+1} \frac{(x - x_j)(2x_{j+1} + x_j - 3x)}{h^2} \\ &+ 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} - x)(x - x_j) \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

$$\begin{aligned} S_j''(x) &= -2m_j \frac{2x_{j+1} + x_j - 3x}{h^2} - 2m_{j+1} \frac{2x_j + x_{j+1} - 3x}{h^2} \\ &+ 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} + x_j - 2x) \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

eşitliklerini buluruz. $S_j''(x_j) = S_{j-1}''(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ bağıntısını sağlayacak biçimde seçilen m_j , $1 \leq j \leq n - 1$ değerleri ile $S''(x)$ sürekli yapılabilir. Böylece;

$$\begin{aligned}
S_j''(x_j) &= -2m_j \frac{2x_{j+1} + x_j - 3x_j}{h^2} - 2m_{j+1} \frac{2x_j + x_{j+1} - 3x_j}{h^2} \\
&\quad + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} + x_j - 2x_j) \\
&= -4 \frac{m_j}{h} - 2 \frac{m_{j+1}}{h} + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{j-1}''(x_j) &= -2m_{j-1} \frac{2x_j + x_{j-1} - 3x_j}{h^2} - 2m_j \frac{2x_{j-1} + x_j - 3x_j}{h^2} \\
&\quad + 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^3} (x_j + x_{j-1} - 2x_j) \\
&= 2 \frac{m_{j-1}}{h} + 4 \frac{m_j}{h} + 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^2}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $S_j''(x_j) = S_{j-1}''(x_j)$ eşitliğinde $1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere;

$$-4 \frac{m_j}{h} - 2 \frac{m_{j+1}}{h} + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^2} = 2 \frac{m_{j-1}}{h} + 4 \frac{m_j}{h} + 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^2}$$

denkleminde

$$hm_{j-1} + 4hm_j + hm_{j+1} = 3(U_{j+1} - U_{j-1}) \quad (1.1.38)$$

sonucunu elde ederiz. Bu sistemde m_0 ve m_n için isteksel sabit değerleri belirleyip sağ tarafa geçirilirse $(n-1) \times (n-1)$ lineer sistemini elde etmiş oluruz. Sistemin matris formu $b_j = 3(U_{j+1} - U_{j-1})$, $1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} 4h & h & 0 & & & & & & \\ & h & 4h & h & & & & & \\ & 0 & h & 4h & h & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & h & 4h & h & 0 \\ & & & & & & h & 4h & h \\ & & & & & & & 0 & h & 4h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-3} \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - hm_0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - hm_n \end{bmatrix} \quad (1.1.39)$$

biçiminde olur. Katsayılar matrisinde üçgensellik ve köşegenellik özellikleri vardır. Dolayısıyla tekil değildir. m_1, m_2, \dots, m_{n-1} bir tek çözüme sahip olur. Çözüm m_0 ve m_n lerin seçimine bağlıdır. (1.1.39) den m_j , $1 \leq j \leq n-1$ değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesaplamamın sonucunda bulunan m_j değerleri (1.1.35) de yerine yazılarak spline fonksiyonu elde edilir.

$[a, b]$ aralığının uç noktalarında $U(x)$ 'in ikinci türevleri bilinirse daha iyi bir spline fonksiyon elde edilebileceği düşünülmektedir. Bunun için $S(x_j) = U_j$, $0 \leq j \leq n$ olduğundan $S(x); S''(x_n) = U''(x_n) = M_n$ ve $S''(x_0) = U''(x_0) = M_0$ eşitliklerini sağlamalıdır. (1.1.37) den $j = n - 1$ için;

$$\begin{aligned} M_n &= -2m_{n-1} \frac{2x_n + x_{n-1} - 3x_n}{h^2} - 2m_n \frac{2x_{n-1} + x_n - 3x_n}{h^2} \\ &\quad + 6 \frac{U_n - U_{n-1}}{h^3} (x_n + x_{n-1} - 2x_n) \\ &= 2 \frac{m_{n-1}}{h} + 4 \frac{m_n}{h} - 6 \frac{U_n - U_{n-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

olur ve benzer şekilde $j = 0$ için;

$$\begin{aligned} M_0 &= -2m_0 \frac{2x_1 + x_0 - 3x_0}{h^2} - 2m_1 \frac{2x_0 + x_1 - 3x_0}{h^2} + 6 \frac{U_1 - U_0}{h^3} (x_1 + x_0 - 2x_0) \\ &= -4 \frac{m_0}{h} - 2 \frac{m_1}{h} + -6 \frac{U_1 - U_0}{h^2} \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

elde edilir. Bulunan bu bağıntılar ve (1.1.38) denklemini birlikte düşünüldüğünde $(n + 1)$ bilinmeyenli $(n + 1)$ denklem sistemi elde edilir. Sistemin matris formu $b_j = 3(U_{j+1} - U_{j-1})$, $1 \leq j \leq n - 1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{h} & -\frac{2}{h} & 0 & & & & & & & & \\ h & 4h & h & & & & & & & & \\ 0 & h & 4h & h & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & h & 4h & h & 0 & & & \\ & & & & & h & 4h & h & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{2}{h} & \frac{4}{h} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 - 6 \frac{U_1 - U_0}{h^2} \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ M_n + 6 \frac{U_n - U_{n-1}}{h^2} \end{bmatrix} \quad (1.1.42)$$

olur. Bu denklem sisteminden m_0, \dots, m_n kolaylıkla bulunabilir ve (1.1.35)' de yerine yazılırsa elde edilecek olan spline fonksiyon yine bir D_1 spline'ı olur.

m_j ve M_j ler arasındaki ilişkiyi elde etmek için iç noktalar için $U(x)$ fonksiyonunun türev değerlerini hesaplayalım. Bunun için ilk olarak (1.1.29) denkleminde

$S'_{j-1}(x_j)$ ve $S'_j(x_j)$ değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
S'_{j-1}(x_j) &= m_j = -\frac{M_{j-1}(x_j - x_j)^2}{2h} + \frac{M_j(x_j - x_{j-1})^2}{2h} + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \\
&\quad - \frac{h(M_j - M_{j-1})}{6} \\
m_j &= \frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{h}{3}M_j + \frac{U_j - U_{j-1}}{h}
\end{aligned} \tag{1.1.43}$$

ve

$$\begin{aligned}
S'_j(x_j) &= m_j = -\frac{M_j(x_{j+1} - x_j)^2}{2h} + \frac{M_{j+1}(x_j - x_j)^2}{2h} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \\
&\quad - \frac{h(M_{j+1} - M_j)}{6} \\
m_j &= -\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h}
\end{aligned} \tag{1.1.44}$$

bulunur. (1.1.37) denkleminde de $S''_{j-1}(x_j)$ ve $S''_j(x_j)$ değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
S''_{j-1}(x_j) &= M_j = -2m_{j-1}\frac{2x_j + x_{j-1} - 3x_j}{h^2} - 2m_j\frac{2x_{j-1} + x_j - 3x_j}{h^2} \\
&\quad + 6\frac{U_j - U_{j-1}}{h^3}(x_j + x_{j-1} - 2x_j) \\
M_j &= 2\frac{m_{j-1}}{h} + 4\frac{m_j}{h} + 6\frac{U_j - U_{j-1}}{h^2}
\end{aligned} \tag{1.1.45}$$

ve

$$\begin{aligned}
S''_j(x_j) &= M_j = -2m_j\frac{2x_{j+1} + x_j - 3x_j}{h^2} - 2m_{j+1}\frac{2x_j + x_{j+1} - 3x_j}{h^2} \\
&\quad + 6\frac{U_{j+1} - U_j}{h^3}(x_{j+1} + x_j - 2x_j) \\
M_j &= -4\frac{m_j}{h} - 2\frac{m_{j+1}}{h} + 6\frac{U_{j+1} - U_j}{h^2}
\end{aligned} \tag{1.1.46}$$

eşitlikleri elde edilir. (1.1.43) denkleminde m_{j+1} ve (1.1.44) denkleminde m_j eşitlikleri kullanılırsa;

$$m_{j+1} - m_j = \frac{h}{2}(M_j + M_{j+1}) \tag{1.1.47}$$

bağıntısı kolaylıkla elde edilebilir.

Kuartik ve kuintik spline fonksiyonlar, polinom olmayan kuartik ve kuintik spline fonksiyonlar bölümünde açıklanacaktır.

1.2 Polinom Olmayan Spline Fonksiyonlar

Birinci bölümde verilen bir aralığı küçük parçalara ayırıp her bir parça üzerinde düşük dereceden polinomlar kullanarak aranan fonksiyona yaklaşmak için spline fonksiyonların kullanılması tanımlanmış ve spline fonksiyonlar $1, x, x^2, x^3$ polinomları kullanılarak elde edilmişti. Bu bölümde ise $1, x, x^2, x^3, \sin \tau x, \cos \tau x$ tipindeki fonksiyonlar kullanılarak polinom ve trigonometrik kısımlardan oluşan polinom olmayan spline fonksiyonlar elde edilecektir. Burada τ spline fonksiyonunun trigonometrik kısmının frekansı olup real veya imajiner bir değer olabilir.

Polinom olmayan spline için oluşturacağımız model τ parametresine göre lineer olmayan bir bağıttır. Elde edeceğimiz spline fonksiyonda τ keyfi bir parametre olacağından uygun seçilmesi durumunda iyi bir yaklaşım oluşturacağı ve metodun doğruluğunun artacağı düşünülmektedir (Rashidina, 2006). Ayrıca polinom olmayan spline'ların trigonometrik kısımlarının C^∞ -türevlenebilirliği polinom spline fonksiyonlarda ortaya çıkan düzgünlük kaybını da azaltacaktır. Bunun yanında polinom olmayan spline'lar sadece $u(x, t)$ için değil, çözüm kümesinin her noktasında $u(x, t)$ nin yüksek dereceden türevleri için de sürekli bir yaklaşıma sahiptir.

Araştırılan polinom olmayan spline fonksiyonlarının sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını içermesi, bu fonksiyonların polinomların birçok beklenen özelliğini paylaşması ve ardışık türevlerinin de sinüs ve kosinüs olması açısından hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır (Scheid, 1988).

Şimdi, bir $[a, b]$ aralığı için $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ şeklindeki $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ bölüm noktalarını göz önüne alalım. u_i 'ler $u(x_i, t)$ 'lerin yaklaşık çözümlerini ifade etmek üzere polinom olmayan kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik spline fonksiyonlarını elde edelim. İlerleyen bölümlerde kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri polinom olmayan kübik spline fonksiyonları yardımıyla elde edilecektir.

1.2.1 Polinom olmayan kuadratik spline fonksiyonlar

$S(x)$ polinom olmayan kuadratik spline fonksiyonu

$$S(x) = a_i \cos \tau (x - x_i) + b_i \sin \tau (x - x_i) + c_i \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada a_i, b_i, c_i ler sabitler ve τ keyfi bir parametredir. Denklem (1.2.1), $[a, b]$ aralığında $\tau \rightarrow 0$ iken bilinen kuadratik spline fonksiyonunu vermektedir. Polinom olmayan kuadratik spline fonksiyonu şu özellikleri sağlamaktadır:

$$(i) \quad u(x) = S_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(ii) \quad S(x) \in C^\infty[a, b]$$

u_i 'ler $u(x_i, t)$ 'lere yaklaşık çözümlerini ifade etmek üzere (1.2.1) denklemindeki a_i, b_i ve c_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} S(x_{i+1/2}) &= u_{i+1/2} \\ S'(x_i) &= m_i \\ S''(x_{i+1/2}) &= M_{i+1/2} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

olmak üzere polinom olmayan kuadratik spline fonksiyonu M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerlerine bağlı olarak elde edilecektir ve M_0, M_1, \dots, M_n ler denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır. Bu M_i değerleri daha sonradan hesaplanmak üzere (1.2.1) denkleminin iki defa türevini alırsak;

$$S'(x) = -\tau a_i \sin \tau(x - x_i) + \tau b_i \cos \tau(x - x_i) \tag{1.2.3}$$

$$S''(x) = -\tau^2 a_i \cos \tau(x - x_i) - \tau^2 b_i \sin \tau(x - x_i) \tag{1.2.4}$$

olur. (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) ve (1.2.4) denklemlerinden $S(x_{i+1/2}), S'(x_i), S''(x_{i+1/2})$ değerleri hesaplanarak $\theta = \tau h$ ve $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$a_i = -\frac{M_{i+1/2}}{\tau^2} \sec \frac{\theta}{2} - \frac{m_i}{\tau} \tan \frac{\theta}{2}, \quad b_i = \frac{m_i}{\tau}, \quad c_i = u_{i+1/2} + \frac{M_{i+1/2}}{\tau^2} \tag{1.2.5}$$

olarak bulunur. Spline olma koşullarından $S(x)$ ve $S'(x)$ 'in sürekli olması gerekmektedir. Dolayısıyla $1 \leq i \leq n$ için;

$$S_i^{(m)}(x_i) = S_{i-1}^{(m)}(x_i), \quad m = 0, 1 \tag{1.2.6}$$

bağıntısını sağlayacak şekilde seçilen M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerleri ile $S(x)$ ve $S'(x)$ sürekli yapılabilir. Böylece (1.2.1) denkleminde;

$$\begin{aligned} S_{i-1}(x_i) &= a_{i-1} \cos \tau (x_i - x_{i-1}) + b_{i-1} \sin \tau (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= a_{i-1} \cos \theta + b_{i-1} \sin \theta + c_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= a_i \cos \tau (x_i - x_i) + b_i \sin \tau (x_i - x_i) + c_i \\ &= a_i + c_i \end{aligned}$$

olup $S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$a_{i-1} \cos \theta + b_{i-1} \sin \theta + c_{i-1} = a_i + c_i \quad (1.2.7)$$

elde edilir. (1.2.3) denkleminde;

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= -\tau a_{i-1} \sin \tau (x_i - x_{i-1}) + \tau b_{i-1} \cos \tau (x_i - x_{i-1}) \\ &= -\tau a_{i-1} \sin \theta + \tau b_{i-1} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= -\tau a_i \sin \tau (x_i - x_i) + \tau b_i \cos \tau (x_i - x_i) \\ &= \tau b_i \end{aligned}$$

olup $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$-\tau a_{i-1} \sin \theta + \tau b_{i-1} \cos \theta = \tau b_i \quad (1.2.8)$$

elde edilir. (1.2.7) ve (1.2.8) eşitliklerinde (1.2.5) denklemleri kullanılırsa ve düzenleme yapılırsa $\theta = \tau h$ ve $h = x_i - x_{i-1}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \tan \frac{\theta}{2} (m_i + m_{i-1}) &= (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) + \frac{1}{\tau^2} \left(\cos \theta \sec \frac{\theta}{2} - 1 \right) M_{i-1/2} \\ &\quad + \frac{1}{\tau^2} \left(1 - \sec \frac{\theta}{2} \right) M_{i+1/2} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

$$m_i - m_{i-1} = \frac{2}{\tau} \sin \frac{\theta}{2} M_{i-1/2} \quad (1.2.10)$$

olur. (1.2.9) ve (1.2.10) eşitliklerinden;

$$m_i = \frac{\tau}{2} \cot \frac{\theta}{2} (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) + \left(\frac{1}{2\tau} \cot \frac{\theta}{2} \left(\cos \theta \sec \frac{\theta}{2} - 1 \right) + \frac{1}{\tau} \sin \frac{\theta}{2} \right) M_{i-1/2} \\ + \frac{1}{2\tau} \cot \frac{\theta}{2} \left(1 - \sec \frac{\theta}{2} \right) M_{i+1/2}$$

$$m_{i-1} = \frac{\tau}{2} \cot \frac{\theta}{2} (u_{i-1/2} - u_{i-3/2}) + \left(\frac{1}{2\tau} \cot \frac{\theta}{2} \left(\cos \theta \sec \frac{\theta}{2} - 1 \right) + \frac{1}{\tau} \sin \frac{\theta}{2} \right) M_{i-3/2} \\ + \frac{1}{2\tau} \cot \frac{\theta}{2} \left(1 - \sec \frac{\theta}{2} \right) M_{i-1/2}$$

eşitlikleri elde edilir. m_{i-1} ve m_i değerleri (1.2.10) de yerine yazılıp düzenlenirse ($i = 2, 3, \dots, n-1$);

$$\alpha M_{i+1/2} + \beta M_{i-1/2} + \alpha M_{i-3/2} = \frac{1}{h^2} (u_{i+1/2} - 2u_{i-1/2} + u_{i-3/2}) \quad (1.2.11)$$

bulunur. Burada

$$\alpha = \frac{\sec \frac{\theta}{2} - 1}{\theta^2} \\ \beta = \frac{4 \sec \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(1 - \sec \frac{\theta}{2})}{\theta^2}$$

dir.

(1.2.11) denkleminde $(\alpha, \beta) \rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$ iken denklem bilinen kuadratik polinom spline'a, $(\alpha, \beta) \rightarrow \left(\frac{1}{24}, \frac{22}{24}\right)$ iken denklem bilinen kübik polinom spline'a dönüşür ve $(\alpha, \beta) \rightarrow \left(\frac{1}{12}, \frac{10}{12}\right)$ iken nümerik sonuç kuadratik ve kübik polinom spline'dan daha iyi çıkmaktadır (Ramadan, et al., 2007).

(1.2.11) denklem sisteminde M_1 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse $(n-2) \times (n-2)$ boyutlu bir lineer sisteme sahip oluruz. (1.2.11) den M_i , $2 \leq i \leq n-1$ değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesaplamalar ve (1.2.5) deki değerler, (1.2.1) de yerine yazılırsa polinom olmayan kuadratik spline fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

1.2.2 Polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar

$S(x)$ polinom olmayan kübik spline fonksiyonu

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i \sin \tau(x - x_i) + d_i \cos \tau(x - x_i) \quad (1.2.12)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada a_i, b_i, c_i, d_i ler sabitler ve τ keyfi bir parametredir. Denklem (1.2.12), $[a, b]$ aralığında $\tau \rightarrow 0$ iken bilinen kübik spline fonksiyonunu vermektedir. Polinom olmayan kübik spline fonksiyonu şu özellikleri sağlamaktadır:

$$(i) \quad u(x) = S_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(ii) \quad S(x) \in C^\infty [a, b]$$

(1.2.12) denklemindeki a_i, b_i, c_i ve d_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) katsayılarını hesaplayalım.

$S(x_i) = u_i$ ve $S''(x_i) = M_i$ olmak üzere polinom olmayan kübik spline fonksiyonu M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerlerine bağlı olarak elde edilecektir ve M_0, M_1, \dots, M_n ler denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır. Bu M_i değerleri daha sonradan hesaplanmak üzere (1.2.12) denkleminin iki defa türevini alırsak;

$$S'(x) = b_i + \tau c_i \cos \tau (x - x_i) - \tau d_i \sin \tau (x - x_i) \quad (1.2.13)$$

$$S''(x) = -\tau^2 c_i \sin \tau (x - x_i) - \tau^2 d_i \cos \tau (x - x_i) \quad (1.2.14)$$

olur. (1.2.14) denkleminde ve $S''(x_i) = M_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} M_i &= S''(x_i) = -\tau^2 c_i \sin \tau (x_i - x_i) - \tau^2 d_i \cos \tau (x_i - x_i) \\ &= -\tau^2 d_i \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= S''(x_{i+1}) = -\tau^2 c_i \sin \tau (x_{i+1} - x_i) - \tau^2 d_i \cos \tau (x_{i+1} - x_i) \\ &= -\tau^2 c_i \sin \theta - \tau^2 d_i \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

olup burada $\theta = \tau h$ ve $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere (1.2.15), (1.2.16) ve (1.2.12) denkleminin x_i ve x_{i+1} noktalarındaki değerlerinden kolaylıkla $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$a_i = u_i + \frac{M_i}{\tau^2}, \quad b_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{M_{i+1} - M_i}{\tau \theta}, \quad c_i = \frac{M_i \cos \theta - M_{i+1}}{\tau^2 \sin \theta}, \quad d_i = -\frac{M_i}{\tau^2} \quad (1.2.17)$$

olarak bulunur. Spline olma koşullarından $S'(x)$ 'in sürekli olması gerekmektedir. Dolayısıyla (1.2.13) denkleminde $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ bağıntısını

sağlayacak şekilde seçilen M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerleri ile $S'(x)$ sürekli yapılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= b_{i-1} + \tau c_{i-1} \cos \tau (x_i - x_{i-1}) - \tau d_{i-1} \sin \tau (x_i - x_{i-1}) \\ &= b_{i-1} + \tau c_{i-1} \cos \theta - \tau d_{i-1} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= b_i + \tau c_i \cos \tau (x_i - x_i) - \tau d_i \sin \tau (x_i - x_i) \\ &= b_i + \tau c_i \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

olup $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$b_{i-1} + \tau c_{i-1} \cos \theta - \tau d_{i-1} \sin \theta = b_i + \tau c_i$$

bu eşitlikte (1.2.17) denklemleri kullanılırsa ve düzenleme yapılırsa $\theta = \tau h$ ve $h = x_i - x_{i-1}$ için

$$\alpha M_{i-1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i+1} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (1.2.20)$$

bulunur. Burada $\alpha = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta \sin \theta}$ ve $\beta = \frac{1}{\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\theta \sin \theta}$ dur. $\tau \rightarrow 0$ iken $\theta \rightarrow 0$ olup $(\alpha, \beta) \rightarrow (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ olur ve (1.2.20) denklemi bilinen kübik polinom spline'a dönüştür.

(1.2.20) denklem sisteminde M_0 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu bir sisteme sahip oluruz. Sistemin matris formu $b_i = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$, $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} 2\beta & \alpha & 0 & & & & & & & & \\ & \alpha & 2\beta & \alpha & & & & & & & \\ & & 0 & \alpha & 2\beta & \alpha & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \alpha & 2\beta & \alpha & 0 & \\ & & & & & & & \alpha & 2\beta & \alpha & \\ & & & & & & & & 0 & \alpha & 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - \alpha M_0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - \alpha M_n \end{bmatrix} \quad (1.2.21)$$

biçiminde olur. Katsayılar matrisinde üçgensellik ve köşegensellik özellikleri vardır. Dolayısıyla tekil değildir. M_1, M_2, \dots, M_{n-1} bir tek çözüme sahip olur. Çözüm M_0

ve M_n lerin seçimine bağlıdır. (1.2.21) den M_i , $1 \leq i \leq n-1$ değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesaplamalar ve (1.2.17) deki değerler, (1.2.12) de yerine yazılırsa polinom olmayan kübik spline fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

$S(x_i) = u_i$, $S'(x_i) = m_i$ ve $S''(x_i) = M_i$ olmak üzere polinom olmayan kübik spline fonksiyonunun m_i ($i = 0, 1, \dots, n$) birinci türev değerlerini hesaplayalım. m_0, m_1, \dots, m_n değerleri elde edeceğimiz denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır. Bu m_i değerleri daha sonradan hesaplanmak üzere (1.2.13) denkleminde;

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= m_{i-1} = b_{i-1} + \tau c_{i-1} \cos \tau (x_i - x_{i-1}) - \tau d_{i-1} \sin \tau (x_i - x_{i-1}) \\ m_{i-1} &= b_{i-1} + \tau c_{i-1} \cos \theta - \tau d_{i-1} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= m_i = b_i + \tau c_i \cos \tau (x_i - x_i) - \tau d_i \sin \tau (x_i - x_i) \\ m_i &= b_i + \tau c_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{i+1}(x_i) &= m_{i+1} = b_{i+1} + \tau c_{i+1} \cos \tau (x_{i+1} - x_i) - \tau d_{i+1} \sin \tau (x_{i+1} - x_i) \\ m_{i+1} &= b_{i+1} + \tau c_{i+1} \cos \theta - \tau d_{i+1} \sin \theta \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliklerde (1.2.17) daki değerler yerine koyulursa;

$$m_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - h\beta M_{i-1} - h\alpha M_i \quad (1.2.22)$$

$$m_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + h\beta M_i + h\alpha M_{i-1} \quad (1.2.23)$$

$$m_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + h\beta M_{i+1} + h\alpha M_i \quad (1.2.24)$$

elde edilir. (1.2.22), (1.2.23) ve (1.2.24) denklemlerini sırasıyla α , 2β ve α değerleri ile çarparak toplarsak;

$$\alpha m_{i-1} + 2\beta m_i + \alpha m_{i+1} = \frac{\alpha + \beta}{h} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (1.2.25)$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. Burada $\alpha = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta \sin \theta}$ ve $\beta = \frac{1}{\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\theta \sin \theta}$ dur.

(1.2.25) denklem sistemi m_0 ve m_n isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu bir sisteme sahip oluruz. Sistemin matris formu

$b_i = \frac{\alpha+\beta}{h}(u_{i+1} - u_{i-1})$, $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} 2\beta & \alpha & 0 & & & & & & \\ & \alpha & 2\beta & \alpha & & & & & \\ & 0 & \alpha & 2\beta & \alpha & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \alpha & 2\beta & \alpha & 0 \\ & & & & & & \alpha & 2\beta & \alpha \\ & & & & & & & 0 & \alpha & 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-3} \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - \alpha m_0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - \alpha m_n \end{bmatrix} \quad (1.2.26)$$

biçiminde olur. Katsayılar matrisinde üçgensellik ve köşegenlik özellikleri vardır. Dolayısıyla tekil değildir. m_1, m_2, \dots, m_{n-1} bir tek çözüme sahip olur. Çözüm m_0 ve m_n lerin seçimine bağlıdır. (1.2.26) dan m_i , $1 \leq i \leq n-1$ değerleri kolaylıkla hesaplanabilir.

Elde ettiğimiz ve ileride kullanacağımız tüm polinom olmayan kübik spline eşitlikleri Tablo 1.1'de gösterilmiştir.

Tablo 1.1 : Polinom olmayan kübik spline eşitlikleri

$\alpha M_{i-1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i+1}$	$= \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$
$\alpha m_{i-1} + 2\beta m_i + \alpha m_{i+1}$	$= \frac{\alpha+\beta}{h}(u_{i+1} - u_{i-1})$
m_{i-1}	$= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - h\beta M_{i-1} - h\alpha M_i$
m_i	$= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + h\beta M_i + h\alpha M_{i-1}$
m_{i+1}	$= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + h\beta M_{i+1} + h\alpha M_i$

1.2.3 Polinom olmayan kuartik spline fonksiyonlar

$S(x)$ polinom olmayan kuartik spline fonksiyonu

$$S(x) = a_i \cos \tau(x - x_i) + b_i \sin \tau(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i) + e_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.2.27)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada a_i, b_i, c_i, d_i ve e_i ler sabitler ve τ keyfi bir parametredir. Denklem (1.2.27), $[a, b]$ aralığında $\tau \rightarrow 0$ iken bilinen kuartik polinom spline fonksiyonunu verir. Polinom olmayan kuartik spline fonksiyonu şu özellikleri sağlar:

$$(i) \quad u(x) = S_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(ii) \quad S(x) \in C^\infty[a, b]$$

(1.2.27) denklemindeki a_i, b_i, c_i, d_i ve e_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) katsayılarını hesaplayalım.

$S(x_i) = u_i, S'(x_i) = m_i$ ve $S'''(x_i) = F_i$ olmak üzere polinom olmayan kuartik spline fonksiyonu F_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerlerine cinsinden elde edilecektir ve F_0, F_1, \dots, F_n ler denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır. Bu F_i değerleri daha sonradan hesaplanmak üzere (1.2.27) denkleminin üç defa türevini alırsak;

$$S'(x) = -\tau a_i \sin \tau (x - x_i) + \tau b_i \cos \tau (x - x_i) + 2c_i (x - x_i) + d_i \quad (1.2.28)$$

$$S''(x) = -\tau^2 a_i \cos \tau (x - x_i) - \tau^2 b_i \sin \tau (x - x_i) + 2c_i \quad (1.2.29)$$

$$S'''(x) = \tau^3 a_i \sin \tau (x - x_i) - \tau^3 b_i \cos \tau (x - x_i) \quad (1.2.30)$$

olur. Buradan (1.2.27), (1.2.28) ve (1.2.30) denklemlerinin x_i ve x_{i+1} noktalarındaki değerleri ve $S(x_i) = u_i, S'(x_i) = m_i, S'''(x_i) = F_i$ eşitlikleri kullanılarak $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $\theta = \tau h$ ve $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{h^3}{\theta^3 \sin \theta} (F_{i+1} - F_i \cos \theta), \\ b_i &= -h^3 \frac{F_i}{\theta^3}, \\ c_i &= \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{h (\cos \theta - 1)}{\theta^3 \sin \theta} (F_{i+1} + F_i) - \frac{m_i}{h} - \frac{h}{\theta^2} F_i, \\ d_i &= m_i + \frac{h^2}{\theta^2} F_i, \\ e_i &= u_i - \frac{h^3}{\theta^3 \sin \theta} (F_{i+1} - \cos \theta F_i) \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

değerleri kolaylıkla elde edilir. Spline olma koşullarından $S'(x)$ ve $S''(x)$ 'in sürekli olması gerekmektedir. Dolayısıyla (1.2.28) ve (1.2.29) denklemlerinden $1 \leq i \leq n$

için;

$$S_i^{(m)}(x_i) = S_{i-1}^{(m)}(x_i), \quad m = 1, 2 \quad (1.2.32)$$

bağıntısını sağlayacak şekilde seçilen F_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerleri ile $S'(x)$ ve $S''(x)$ sürekli yapılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= -\tau a_{i-1} \sin \tau (x_i - x_{i-1}) + \tau b_{i-1} \cos \tau (x_i - x_{i-1}) + 2c_{i-1} (x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + d_{i-1} \\ &= -\tau a_{i-1} \sin \theta + \tau b_{i-1} \cos \theta + 2hc_{i-1} + d_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_i(x_i) &= -\tau a_i \sin \tau (x_i - x_i) + \tau b_i \cos \tau (x_i - x_i) + 2c_i (x_i - x_i) + d_i \\ &= \tau b_i + d_i \end{aligned}$$

olup $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$-\tau a_{i-1} \sin \theta + \tau b_{i-1} \cos \theta + 2hc_{i-1} + d_{i-1} = \tau b_i + d_i \quad (1.2.33)$$

ve

$$\begin{aligned} S''_{i-1}(x_i) &= -\tau^2 a_{i-1} \cos \tau (x_i - x_{i-1}) - \tau^2 b_{i-1} \sin \tau (x_i - x_{i-1}) + 2c_{i-1} \\ &= -\tau^2 a_{i-1} \theta - \tau^2 b_{i-1} \sin \theta + 2c_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S''_i(x_i) &= -\tau^2 a_i \cos \tau (x_i - x_i) - \tau^2 b_i \sin \tau (x_i - x_i) + 2c_i \\ &= -\tau^2 a_i + 2c_i \end{aligned}$$

olup $S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$-\tau^2 a_{i-1} \theta - \tau^2 b_{i-1} \sin \theta + 2c_{i-1} = -\tau^2 a_i + 2c_i \quad (1.2.34)$$

elde edilir. (1.2.33) ve (1.2.34) eşitliklerinde (1.2.31) denklemleri kullanılırsa ve düzenleme yapılırsa $\theta = \tau h$ ve $h = x_i - x_{i-1}$ için

$$m_i + m_{i-1} = \frac{2}{h} (u_i - u_{i-1}) - \frac{h^2}{\theta^2} (F_i + F_{i+1}) - \frac{2h^2}{\theta^3 \sin \theta} (F_i + F_{i+1}) (\cos \theta - 1) \quad (1.2.35)$$

$$\begin{aligned} m_i - m_{i-1} &= \frac{h^2 \tan \theta}{\theta} F_i - h^2 \frac{\cos \theta - 1}{\theta^3 \sin \theta} (F_{i-1} - F_{i+1}) - \frac{h^2}{2\theta \sin \theta} (F_{i-1} + F_{i+1}) \\ &\quad - \frac{h^2}{\theta^2} (F_i - F_{i-1}) + \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

olur. (1.2.35) ve (1.2.36) eşitliklerini toplayarak $i = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere;

$$m_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{h^2}{2\theta^3 \sin \theta}(F_{i-1} + 2F_i + F_{i+1})(\cos \theta - 1) - \frac{h^2}{4\theta \sin \theta}(F_{i-1} + F_{i+1}) + h^2 \left(\frac{\cot \theta}{2\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) F_i \quad (1.2.37)$$

bulunur. (1.2.37) denkleminde ise;

$$m_{i-1} = \frac{1}{2h}(u_i - u_{i-2}) - \frac{h^2}{2\theta^3 \sin \theta}(F_{i-2} + 2F_{i-1} + F_i)(\cos \theta - 1) - \frac{h^2}{4\theta \sin \theta}(F_{i-2} + F_i) + h^2 \left(\frac{\cot \theta}{2\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) F_{i-1} \quad (1.2.38)$$

yazılabilir. (1.2.37) ve (1.2.38) denklemlerinin (1.2.35) denkleminde kullanılmasıyla $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere;

$$\alpha F_{i-2} + \beta F_{i-1} + \beta F_i + \alpha F_{i+1} = \frac{1}{h^3}(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}) \quad (1.2.39)$$

bulunur. Burada $\alpha = \left(\frac{1}{2\theta \sin \theta} + \frac{\cos \theta - 1}{\theta^3 \sin \theta} \right)$ ve $\beta = \left(-\frac{(\cos \theta - 1)}{\theta^3 \sin \theta} + \frac{(1 - 2 \cos \theta)}{2\theta \sin \theta} \right)$ dur. $\tau \rightarrow 0$ iken $\theta \rightarrow 0$ olup (1.2.39) denklemi bilinen kuartik polinom spline'a dönüşür (Noor, et al., 2004; El-Danaf, 2008). $(\alpha, \beta) \rightarrow \left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12} \right)$ iken ise (1.2.39) denklemi bilinen kübik polinom spline'a dönüşür (Al-Said, et al., 2003; El-Danaf, 2008).

(1.2.39) denklem sisteminde M_0 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse sistemin matris formu $b_i = \frac{1}{h^3}(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1})$, $2 \leq i \leq n-1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} \beta & \beta & \alpha & & & & \\ \alpha & \beta & \beta & \alpha & & & \\ & \alpha & \beta & \beta & \alpha & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha & \beta & \beta & \alpha \\ & & & & & \alpha & \beta & \beta & \alpha \\ & & & & & & \alpha & \beta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{n-3} \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - \alpha F_0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - \alpha F_n \end{bmatrix} \quad (1.2.40)$$

biçiminde olur. Katsayılar matrisinde üçgensellik ve köşegensellik özellikleri vardır. Dolayısıyla tekil değildir. F_1, F_2, \dots, F_{n-1} bir tek çözüme sahip olur. Çözüm F_0 ve F_n lerin seçimine bağlıdır. (1.2.40) dan F_i , $1 \leq i \leq n-1$ değerleri kolaylıkla

hesaplanabilir. Bu hesaplamalar ve (1.2.31) deki değerler, (1.2.27) de yerine yazılırsa polinom olmayan kuartik spline fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

1.2.4 Polinom olmayan kuintik spline fonksiyonlar

$S(x)$ polinom olmayan kuintik spline fonksiyonunun formu:

$$S(x) = a_i \cos \tau (x - x_i) + b_i \sin \tau (x - x_i) + c_i (x - x_i)^3 + d_i (x - x_i)^2 + e_i (x - x_i) + f_i \quad (1.2.41)$$

şeklinindedir. Burada $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ ler sabitler ve τ keyfi bir parametredir. Denklem (1.2.41), $[a, b]$ aralığında $\tau \rightarrow 0$ iken bilinen kuintik polinom spline fonksiyonunu vermektedir. Polinom olmayan kuintik spline aşağıdaki iki özelliği sağlar:

$$(i) \quad u(x) = S_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(ii) \quad S(x) \in C^\infty [a, b]$$

(1.2.41) denklemindeki a_i, b_i, c_i, d_i, e_i ve f_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) katsayılarını hesaplayalım.

$S(x_i) = u_i, S^{(2)}(x_i) = M_i$ ve $S^{(4)}(x_i) = F_i$ olmak üzere polinom olmayan kúbik spline fonksiyonu M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerlerine bağlı olarak elde edilecektir ve M_0, M_1, \dots, M_n ler denklem sisteminin bilinmeyenlerini oluşturacaktır. Bu M_i değerleri daha sonradan hesaplanmak üzere (1.2.41) denkleminin dört defa türevini alırsak;

$$\begin{aligned} S'(x) &= -a_i \tau \sin \tau (x - x_i) + b_i \tau \cos \tau (x - x_i) + 3c_i (x - x_i)^2 \\ &\quad + 2d_i (x - x_i) + e_i \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

$$\begin{aligned} S^{(2)}(x) &= -a_i \tau^2 \cos \tau (x - x_i) - b_i \tau^2 \sin \tau (x - x_i) + 6c_i (x - x_i) \\ &\quad + 2d_i \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

$$S^{(3)}(x) = a_i \tau^3 \sin \tau (x - x_i) - b_i \tau^3 \cos \tau (x - x_i) + 6c_i \quad (1.2.44)$$

$$S^{(4)}(x) = a_i \tau^4 \cos \tau (x - x_i) + b_i \tau^4 \sin \tau (x - x_i) \quad (1.2.45)$$

olur. (1.2.41), (1.2.43) ve (1.2.45) denklemlerinden $\theta = \tau h$ ve $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
u_i &= S(x_i) = a_i \cos \tau (x_i - x_i) + b_i \sin \tau (x_i - x_i) + c_i (x_i - x_i)^3 \\
&\quad + d_i (x_i - x_i)^2 + e_i (x_i - x_i) + f_i \\
&= a_i + f_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{i+1} &= S(x_{i+1}) = a_i \cos \tau (x_{i+1} - x_i) + b_i \sin \tau (x_{i+1} - x_i) + c_i (x_{i+1} - x_i)^3 \\
&\quad + d_i (x_{i+1} - x_i)^2 + e_i (x_{i+1} - x_i) + f_i \\
&= a_i \cos \theta + b_i \sin \theta + c_i h^3 + d_i h^2 + e_i h + f_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_i &= S^{(2)}(x_i) = -a_i \tau^2 \cos \tau (x_i - x_i) - b_i \tau^2 \sin \tau (x_i - x_i) \\
&\quad + 6c_i (x_i - x_i) + 2d_i \\
&= -a_i \tau^2 + 2d_i
\end{aligned}$$

(1.2.46)

$$\begin{aligned}
M_{i+1} &= S^{(2)}(x_{i+1}) = -a_i \tau^2 \cos \tau (x_{i+1} - x_i) - b_i \tau^2 \sin \tau (x_{i+1} - x_i) \\
&\quad + 6c_i (x_{i+1} - x_i) + 2d_i \\
&= -a_i \tau^2 \cos \theta - b_i \tau^2 \sin \theta + 6c_i h + 2d_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i &= S^{(4)}(x_i) = a_i \tau^4 \cos \tau (x_i - x_i) + b_i \tau^4 \sin \tau (x_i - x_i) \\
&= a_i \tau^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{i+1} &= S^{(4)}(x_{i+1}) = a_i \tau^4 \cos \tau (x_{i+1} - x_i) + b_i \tau^4 \sin \tau (x_{i+1} - x_i) \\
&= a_i \tau^4 \cos \theta + b_i \tau^4 \sin \theta
\end{aligned}$$

olup (1.2.46) denklemleri ile birlikte $S(x_i) = u_i$, $S^{(2)}(x_i) = M_i$ ve $S^{(4)}(x_i) = F_i$ olduğu kullamlarak kolaylıkla $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{F_i}{\tau^4}, \\
b_i &= \frac{F_{i+1} - F_i \cos \theta}{\tau^4 \sin \theta}, \\
c_i &= \frac{1}{6h} (M_{i+1} - M_i) + \frac{h}{6\theta^2} (F_{i+1} - F_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_i &= \frac{1}{2}M_i + \frac{1}{2\tau^2}F_i, \\
e_i &= \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{h^3}{\theta^4} - \frac{h^3}{3\theta^2}\right)F_i - \left(\frac{h^3}{\theta^4} + \frac{h^3}{6\theta^2}\right)F_{i+1} - \frac{h}{6}(M_{i+1} + M_i), \\
f_i &= u_i - \frac{F_i}{\tau^4}
\end{aligned} \tag{1.2.47}$$

olarak bulunur. Spline olma koşullarından $S'(x)$ 'in ve $S^{(3)}(x)$ 'in sürekli olması gerekmektedir. Dolayısıyla (1.2.42) ve (1.2.44) denklemlerinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$S_i^{(m)}(x_i) = S_{i-1}^{(m)}(x_i), \quad m = 1, 3$$

bağıntısını sağlayacak şekilde seçilen M_i ve F_i ($i = 0, 1, \dots, n$) değerleri ile $S'(x)$ ve $S^{(3)}(x)$ sürekli yapılabilir. Buradan $\theta = \tau h$ ve $h = x_i - x_{i-1}$ için;

$$\begin{aligned}
S'_{i-1}(x_i) &= -a_{i-1}\tau \sin \tau (x_i - x_{i-1}) + b_{i-1}\tau \cos \tau (x_i - x_{i-1}) \\
&\quad + 3c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + e_{i-1} \\
&= -a_{i-1}\tau \sin \theta + b_{i-1}\tau \cos \theta + 3c_{i-1}h^2 + 2d_{i-1}h + e_{i-1}
\end{aligned} \tag{1.2.48}$$

$$\begin{aligned}
S'_i(x_i) &= -a_i\tau \sin \tau (x_i - x_i) + b_i\tau \cos \tau (x_i - x_i) \\
&\quad + 3c_i(x_i - x_i)^2 + 2d_i(x_i - x_i) + e_i \\
&= b_i\tau + e_i
\end{aligned}$$

olup $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$-a_{i-1}\tau \sin \theta + b_{i-1}\tau \cos \theta + 3c_{i-1}h^2 + 2d_{i-1}h + e_{i-1} = b_i\tau + e_i \tag{1.2.49}$$

elde edilir ve yine $\theta = \tau h$ ve $h = x_i - x_{i-1}$ için;

$$\begin{aligned}
S_{i-1}^{(3)}(x_i) &= a_{i-1}\tau^3 \sin \tau (x_i - x_{i-1}) - b_{i-1}\tau^3 \cos \tau (x_i - x_{i-1}) + 6c_{i-1} \\
&= a_{i-1}\tau^3 \sin \theta - b_{i-1}\tau^3 \cos \theta + 6c_{i-1}
\end{aligned} \tag{1.2.50}$$

$$\begin{aligned}
S_i^{(3)}(x_i) &= a_i\tau^3 \sin \tau (x_i - x_i) - b_i\tau^3 \cos \tau (x_i - x_i) + 6c_i \\
&= -b_i\tau^3 + 6c_i
\end{aligned}$$

olup $S_i^{(3)}(x_i) = S_{i-1}^{(3)}(x_i)$ eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$a_{i-1}\tau^3 \sin \theta - b_{i-1}\tau^3 \cos \theta + 6c_{i-1} = -b_i\tau^3 + 6c_i \quad (1.2.51)$$

bulunur. (1.2.49) ve (1.2.51) eşitliklerinde (1.2.47) denklemleri yerine yazılır ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned} M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} &= \frac{6}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{6}{\tau^2} \left(\frac{1}{\theta \sin \theta} - \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{6} \right) \\ &\quad (F_{i-1} + F_{i+1}) + \frac{6}{\tau^2} \left(\frac{2}{\theta^2} - \frac{2 \cos \theta}{\theta \sin \theta} - \frac{4}{6} \right) F_i \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

$$\begin{aligned} M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} &= h^2 \left(\frac{1}{\theta \sin \theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) (F_{i-1} + F_{i+1}) \\ &\quad + 2h^2 \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{\cos \theta}{\theta \sin \theta} \right) F_i \end{aligned} \quad (1.2.53)$$

bu iki eşitlikden F_{i-1} ile F_{i+1} elimine edilirse $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} h^2 \left(\frac{6}{\theta^4} + \frac{-4 - 2 \cos \theta}{\theta^3 \sin \theta} \right) F_i &= \left(\frac{\theta^2 - 6}{\theta \sin \theta} + \frac{6}{\theta^4} \right) (M_{i-1} + M_{i+1}) \\ &\quad + \left(\frac{4\theta^2 - 12}{\theta^3 \sin \theta} - \frac{6}{\theta^2} - \frac{12}{\theta^4} \right) M_i \\ &\quad - \frac{6}{h^2} \left(\frac{1}{\theta \sin \theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.2.54)$$

sonucuna varırız. (1.2.54) eşitliğinden F_{i-1} ve F_{i+1} için;

$$\begin{aligned} h^2 \left(\frac{6}{\theta^4} + \frac{-4 - 2 \cos \theta}{\theta^3 \sin \theta} \right) F_{i-1} &= \left(\frac{\theta^2 - 6}{\theta \sin \theta} + \frac{6}{\theta^4} \right) (M_{i-2} + M_i) \\ &\quad + \left(\frac{4\theta^2 - 12}{\theta^3 \sin \theta} - \frac{6}{\theta^2} - \frac{12}{\theta^4} \right) M_{i-1} \\ &\quad - \frac{6}{h^2} \left(\frac{1}{\theta \sin \theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) (u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i) \end{aligned} \quad (1.2.55)$$

$$\begin{aligned} h^2 \left(\frac{6}{\theta^4} + \frac{-4 - 2 \cos \theta}{\theta^3 \sin \theta} \right) F_{i+1} &= \left(\frac{\theta^2 - 6}{\theta \sin \theta} + \frac{6}{\theta^4} \right) (M_i + M_{i+2}) \\ &\quad + \left(\frac{4\theta^2 - 12}{\theta^3 \sin \theta} - \frac{6}{\theta^2} - \frac{12}{\theta^4} \right) M_{i+1} \\ &\quad - \frac{6}{h^2} \left(\frac{1}{\theta \sin \theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) (u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}) \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

eşitlikleri de elde edilebilir. (1.2.54), (1.2.55) ve (1.2.56) eşitlikleri (1.2.53) de yerine yazılır ve düşenlenirse $i = 2, 3, \dots, n - 1$ olmak üzere;

$$\alpha M_{i-2} + \beta M_{i-1} + \gamma M_i + \beta M_{i+1} + \alpha M_{i+2} = \frac{6}{h^2} (\omega u_{i-2} + \varphi u_{i-1} + \sigma u_i + \varphi u_{i+1} + \omega u_{i+2}) \quad (1.2.57)$$

bulunur. Burada kullanılan $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \sigma$ ve φ parametreleri $\theta = \tau h$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{(6\theta - \theta^5 + 6\theta^3) \sin \theta + 6 \cos^2 \theta + \theta^6 - 6\theta^4 - 6}{\theta^6 (-1 + \cos^2 \theta)}, \\ \beta &= 2 \frac{(9\theta^3 - \theta^5 + (6\theta - \theta^3) \cos \theta) \sin \theta + (\theta^6 - 6\theta^4 + 12 \cos \theta) \cos \theta - 2\theta^4}{\theta^6 (-1 + \cos^2 \theta)} \\ &\quad + 12 \frac{\theta^2 - 2}{\theta^6 (-1 + \cos^2 \theta)}, \\ \gamma &= -2 \frac{(6\theta^3 - 6\theta - \theta^5) \sin \theta + (12\theta^2 - 4\theta^4) \cos \theta + (4\theta^3 + 12\theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^6 (-1 + \cos^2 \theta)} \\ &\quad + \frac{18 \cos^2 \theta + \theta^6 - 6\theta^4 - 18}{\theta^6 (-1 + \cos^2 \theta)}, \\ \omega &= \frac{2\theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \theta^2 - 1}{\theta^4 (-1 + \cos^2 \theta)}, \\ \varphi &= 2 \frac{-3\theta \sin \theta + \theta^2 \cos \theta - \theta \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta + \theta^2 + 2}{\theta^4 (-1 + \cos^2 \theta)}, \\ \sigma &= -2 \frac{-4\theta \sin \theta + 2\theta^2 \cos \theta - 2\theta \sin \theta \cos \theta - 3 \cos^2 \theta + \theta^2 + 3}{\theta^4 (-1 + \cos^2 \theta)} \end{aligned} \quad (1.2.58)$$

şeklindedir.

(1.2.57) denklem sisteminde M_0 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu bir sisteme sahip oluruz. Sistemin matris formu $b_i = \frac{6}{h^2} (\omega u_{i-2} + \varphi u_{i-1} + \sigma u_i + \varphi u_{i+1} + \omega u_{i+2})$, $2 \leq i \leq n - 2$ olmak üzere;

1.3.1 Adveksiyon-difüzyon denklemi, başlangıç ve sınır koşulları

Taşınma ve difüzyon işlemlerini belirleyen bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.3.1)$$

formundadır. Burada ξ düzgün akış hızını ve λ sabit difüzyon katsayısını göstermek üzere $u(x, t)$, x konumunda ve t zamanındaki konsantrasyonu göstermektedir.

Denklem (1.3.1) in başlangıç koşulu;

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.3.2)$$

ve sınır koşulları

$$u(0, t) = f_0(t), \quad u(L, t) = f_L(t) \quad \text{veya} \quad -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L = \phi_L(t) \quad (1.3.3)$$

olarak tanımlanır. Burada L kanalın uzunluğu; ϕ_L , $x = L$ sınırındaki akış ve u_0 , f_0 , f_L bilinen fonksiyonlardır. Bölüm 2'de adveksiyon-difüzyon denkleminin polinom olmayan kübik spline metoduyla çözümünü incelenecektir ve buradaki $u_0(x)$ değeri test problemleri çalışılırken verilecektir.

Denklem (1.3.1) in çözümü için literatürde değişik nümerik algoritmalar bulunmaktadır. Holly ve Preissmann (1977) özel interpolasyon polinomlarını kullanmışlardır ve $C_r < 1$ için, şartlı olarak kararlı bir metot oluşturmuşlardır. Szymkewicz (1993) denklem (1.3.1) i kübik spline fonksiyonunun karakteristik kullanımı olan bir metotla çözmüştür. Çalışmalarında zaman adımı üzerinde bir sınırlama yoktur ve $C_r > 1$ için yüksek doğrulukta çözüm oluşturulmuştur. Rapin ve Lube (2004), Streamline Upwind Petrov-Galerkin kararlılaştırma metodu ile sonlu elemanlar metodunu kullanarak adveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Torrilhon ve Xu (2005), Bhatnagar-Gross-Krook yöntemini araştırmışlar ve bu yöntemi lineer olmayan adveksiyon-difüzyon denkleminin uygulayarak metodun kararlılığını ve tutarlılığını incelemişlerdir. Bu çalışmalarında C_r 'ye bağlı şartlı kararlı bir metot elde etmişlerdir. Adveksiyon-difüzyon denkleminin en küçük kareler sonlu eleman formülüyle çözümü (2006) de Dağ, İrk ve Tombul tarafından oluşturulmuştur. Çalışmalarında hem lineer şekilli fonksiyonları hem de kuadratik

B-spline şeklindeki fonksiyonları kullanmışlardır. Szymkewicz'in 1993'deki çalışmasına benzer olarak, C_r üzerinde herhangi bir sınırlama yapmaksızın doğruluğu yüksek çözümler de bulmuşlardır. Spreadsheet'leri kullanarak, Karahan (2006) adveksiyon-difüzyon denkleminin bir kapalı sonlu fark formülasyonu geliştirmiştir. Çalışmasında üç farklı yöntem sunmuştur ve sonuçları hesaplarken sadece ağırlık parametrelerini değiştirmiştir. Tsai, Chiang ve Yang (2006) denklem (1.3.1) için karakteristikler metodunu araştırmışlar ve konum veya zaman doğruları üzerinde kullanılan Hermit kübik interpolasyonu ve kübik spline interpolasyonlarındaki 4 metodla karşılaştırmışlardır. Witek, Teixeira ve Flatau (2008), adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünü kapalı ve kararlı sayısal metotlar olmak üzere iki ayrı yöntemle araştırmışlar ve C_r sayısına bağlı şartlı kararlı olan bu metotlar ile denklemin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Kalashnikova, Farhat ve Tezaur (2009), yüksek dereceden Peclet sayıları için adveksiyon-difüzyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak sürekli olmayan enrichment metodu ile sayısal çözümünü elde etmişlerdir.

1.3.2 Regularized long wave (RLW) denklemi, başlangıç ve sınır koşulları

RLW denklemi,

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.3.4)$$

eşitliği ile verilmektedir. Burada x konum koordinatı, t zaman, u dalga genişliği, ε ve μ pozitif parametreleri ifade etmektedir. Bu denklemin başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ x \rightarrow \pm\infty \text{ iken } u &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

dir.

Bölüm 3'te RLW denkleminin polinom olmayan kübik spline metoduyla çözümü incelenecektir ve buradaki $f(x)$ değeri test problemleri çalışılırken verilecektir.

Lineer olmayan (1.3.4) denklemi ilk olarak Peregrine (1966) tarafından, ardışık dalgaları modellemek için ileri sürülmüştür ve sayısal çözümü yapılmıştır. Benjamin, Bona ve Mahony (1972) ise, RLW denkleminin daha yaygın olarak bilinen

lineer olmayan Korteweg-de Vries dalga denkleminin çözümüne benzerliğini göstermişlerdir. Eilbeck ve McGuire (1975, 1977), sonlu farklar metodu kullanarak denklemin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Jain ve Iskandar (1979), farklı formlardaki sonlu farklar metotları kullanarak sayısal çözümler elde etmişlerdir. Alexander ve Morris (1979), kübik spline kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini araştırmışlardır. Ayrıca 1977 yılında, üç adımlı sonlu farklar metodlarını kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır (Eilbeck, et al., 1977). Padam ve Iskandar(1979), farklı formdaki sonlu farklar yöntemini kullanarak, RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Bona ve Pryant (1973), uygun koşullar altında RLW denkleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini incelemişlerdir. Bu denklemin uzun dalgaların modellenmesindeki tek dalga çözümünün kararlılığı için yeterli koşullar Albert, Bona ve Henry (1987) tarafından elde edilmiştir. Chang, Wang ve Guo (1995), RLW denklemi için korunumlu fark yöntemini vermişlerdir. Jain, Shankar ve Singh (1993), RLW denklemini parçalayıp kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümlerini bulmuşlardır. Gardner, Gardner ve Dağ (1995), kuadratik B-spline kullanarak Galerkin metoduyla, RLW denkleminin sayısal çözümünü yapmışlardır. Gardner, Gardner ve Doğan (1996), lineer şekil fonksiyonları kullanarak, RLW denkleminin en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Gardner, Gardner ve Amein (1997), kuintik B-spline kullanarak, Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini yapmışlardır. Bhardwaj ve Shankar (2000), kuadratik B-spline kullanarak, en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümüyle uğraşmıştır. Dağ ve Özer (2001), kübik B-spline kullanarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü yapmışlardır. Doğan (2001, 2002), kuadratik B-spline kullanarak, Petrov-Galerkin metoduyla ve lineer şekil fonksiyonları kullanarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır. Dağ, Doğan ve Saka (2003), denklemin sayısal çözümü için B-spline kolokeyşim metoduyla; Avilez-Valente ve Seabra-Santos (2004), denklemin sayısal çözümünü Petrov-Galerkin sonlu eleman metoduyla; Saka, Dağ ve Doğan (2004), denklemin sayısal çözümünü kuadratik B-spline kullanarak Galerkin

metoduyla; Raslan (2005), denklemin sayısal çözümünü eşit genişlik denklemlerini kullanarak; Dağ, Saka ve Irk (2006), denklemin sayısal çözümünü kuintik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Galerkin metoduyla; Kutluay ve Esen (2006), denklemin sayısal çözümünü sonlu fark metoduyla araştırmışlardır. RLW denkleminin yaklaşık çözümünü elde edebilmek için yapılan çalışmalar bugünde devam etmektedir ve değişik algoritmalar ile en iyi sayısal çözümü bulmak amaçlanmaktadır.

1.3.3 Lineer olmayan Burger denklemi, başlangıç ve sınır koşulları

Burger denklemi,

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (1.3.6)$$

eşitliği ile verilmektedir. Burada ν viskozite sabiti, t ve x alt indisleri ise zamana ve konuma göre türevleri göstermektedir. Sınır şartları ve başlangıç şartları ise sırasıyla

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1, & u(b, t) &= \alpha_2, \\ u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$u_{xx}(a, t) = 0, \quad u_{xx}(b, t) = 0, \quad t \in (0, T]$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.3.8)$$

olarak alınacaktır.

Bölüm 4'te lineer olmayan Burger denkleminin polinom olmayan kübik spline metoduyla çözümünü incelenecektir ve buradaki $f(x)$ değeri test problemleri çalışılırken verilecektir.

Lineer olmayan Burger denklemi, Bateman (1915) tarafından ortaya atılmıştır. Burger (1948), özellikle türbülans modellemesi olmak üzere birçok matematiksel modelleme de kullanıldığından, denklem daha çok Burger denklemi olarak bilinmektedir. Bu denklem, daha sonraki zamanlarda ısı iletimi ve yayılması, gaz dinamiği, elastiklik, sayı teorisi, şok dalgalar ve türbülans problemleri olmak üzere pek çok fiziksel olayın modellenmesinde kullanılmıştır.

Hopf (1950) ve Cole (1951), Burger denklemini lineer hale getirip, keyfi başlangıç ve sınır koşulları kullanarak denklemin tam çözümünü bulmuşlardır. Bu yüzden denklem, sayısal metotlar için test denklemi olarak kullanılmaktadır. Burger denk-

lemi bir kaç analitik çözüme sahiptir. Fakat bu çözümler genelde seri çözümü olduğundan küçük viskozite sabiti için yavaş yakınsamaktadır ve dolayısıyla bu çözümleri kullanmak pratik değildir. Bu yüzden Burger denkleminin çözümlerini elde edebilmek için sayısal çalışmalar zorunluluk olmuştur. Sayısal metotlar ile de Burger denkleminin yaklaşık çözümleri küçük viskozite sabiti için her zaman bulunamamaktadır. Bugüne kadar pek çok çalışma denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak için önerilmiştir. Bu çalışmaların en ilgi çekenleri küçük viskozite sabiti için de çözüm bulunabilenlerdir.

Jain ve Holla (1978), kübik spline kullanarak bir ve iki boyutlu Burger denkleminin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain ve Lohar (1979), bir ve iki boyutlu Burger denklemlerini ikiye parçaladıktan sonra kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümünü elde etmiştir. Fletcher (1983), bir ve iki boyutlu Burger denkleminin beş ve yedi noktalı sonlu elemanlar metoduyla, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonlarını kullanarak sonlu elemanlar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmış bulduğu sonuçları birbirleriyle karşılaştırmıştır. Evans ve Abdullah (1984), sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan aşikar grup metodunu kullanarak, Burger denklemini sayısal olarak çözmüşler ve metodun kararlılığını incelemişlerdir. Değişik dereceden B-spline fonksiyonları kullanılarak sonlu elemanlar metotlarının değişik formülasyonları verilmiştir. Ağırlık ve interpolasyon fonksiyonu olarak ikinci dereceden spline fonksiyonlar kullanılarak Bubnov-Galerkin metoduna bağlı bir çalışma yapılmıştır (Ali, et al., 1990). Iskandar ve Mohsen (1992), Burger denklemini ikiye parçalayarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Kutluay, Bahadır ve Özdeş (1999), sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan aşikar metodu kullanarak sayısal çözümünü vermişlerdir. Sonlu elemanlar kübik ve kuintik B-spline kolokeyşin yöntemleri ile de Burger denkleminin sayısal çözümü bulunmuştur (Ali, et al., 1992, Zaki, et al., 2000). İkinci dereceden B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemi ile Burger denklemini sayısal çözümleri bulunmuştur (Kutluay, et al., 2004). Hem kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile hemde kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonları deneme ve ağırlık fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemi ile Burger

denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir (Dağ, et al., 2005, Dağ, et al., 2006). Ganji, Ganji, Kariimpour ve Ganji (2008), homotopi perturbation metodunun kullanılarak lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümü üzerine çalışmışlardır. Öziş ve Erdoğan (2009), bir boyutlu Burger denkleminin sayısal çözümü için üstel uygunlaştırma metodunu kullanmışlar ve yüksek Reynolds ($Re = 1/v$) sayıları için kararlı bir metot elde etmişlerdir. Lin ve Ying (2009), Burger denkleminin başlangıç koşulları için Green fonksiyonlarını kullanarak denklemin sayısal çözümü için aralık hesabı yöntemini uygulamışlardır. Luo, Zhou ve Yang (2009), uygun dik ayrıştırma tabanlı sonlu elemanlar metodu ile denklemin sayısal çözümünü elde etmişler ve sonlu elemanlar metodu ile elde edilen çözüm ile karşılaştırmışlardır. Wang, Lin ve Hu (2009), lineer olmayan Burger denklemini ayrıştırarak residual correction metodu yardımıyla sonlu farklar metodu ile denklemin sayısal sonucunu elde etmişlerdir.

1.3.4 Genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemleri, başlangıç ve sınır koşulları

Genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemleri, (Sarı, et al., 2008)

$$u_t + \xi u^\delta u_x - u_{xx} = \lambda u (1 - u^\delta), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (1.3.9)$$

eşitliği ile verilmektedir. Burada ξ , λ ve δ sabitlerdir. Başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(a_1 x) \right)^{1/\delta} \quad (1.3.10)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(a_1 a_2 t) \right)^{1/\delta}, \\ u(1, t) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(a_1 (1 - a_2 t)) \right)^{1/\delta}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

olarak kullanılmıştır. Burada $a_1 = \frac{-\xi\delta}{2(\delta+1)}$ ve $a_2 = \frac{\xi}{\delta+1} + \frac{\lambda(\delta+1)}{\xi}$ dir.

Bölüm 5'te genelleştirilmiş Fisher-Burgers denkleminin polinom olmayan kübik spline metoduyla çözümü incelenecektir ve buradaki $f(x)$ değeri test problemleri çalışılırken verilecektir.

Genelleştirilmiş Fisher-Burgers denklemleri bazı fiziksel olayların modellenmesinde kullanılır. Fisher (1937) önce $u(x, t)$ ile mutant genin yayılımı için farklı disiplinlerle karşılaştırılmış bir model olarak bilinen Fisher denklemleri ileri sürmüştür. Daha sonra

denklem farklı problemleri modellemek için kullanılmıştır. Fisher denkleminin en genel formlarından birisi genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemidir.

Birçok araştırmacı farklı sayısal metodları kullanarak Burgers-Fisher denkleminin çözümünü hesaplamaya çalışmıştır. Genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin sayısal bir simülasyonu ve kapalı çözümü Kaya ve El-Sayed (2004) tarafından verilmiştir. Genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin çözümü için sınırlı bir Padé yaklaşımı Ismail ve Rabboh (2004) tarafından verilmiştir. Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak, Burgers-Huxley ve Burgers-Fisher denklemlerinin çözümleri Ismail, Raslan ve Rabboh (2004) tarafından elde edilmiştir. Wazwaz (2005) lineer olmayan ısı iletimi ve Burgers-Fisher denklemlerinin çözümünde tanh fonksiyonlar metodu kullanmıştır. Yine aynı yöntemle Chen ve Zhang (2004) Burgers-Fisher ve Kuramoto-Sivashinsky denklemlerinin çözümleri üzerine çalışmışlardır. Wakil ve Abdou (2007) denklemin çözümünde genişletilmiş modifiye tanh metodunu kullanmışlardır. Wazwaz (2007), tanh-coth metodu kullanarak Burgers-Fisher denkleminin sayısal çözümünü elde etmeye çalışmıştır. Varyasyonel iterasyon metodu (2007) yardımıyla Moghimi ve Hejazi, genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemi ve Burger denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Fahmy (2008), faktori-zasyon metoduyla denklemi çözmüştür. Golbabai ve Javidi (2007, 2006), genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin sayısal çözümünü elde etmede spektral kolekeyşin metodunu kullanmışlardır. Sarı, Gürarlan ve Dağ kompakt sonlu fark metodu yardımıyla denklemin sayısal çözümünü elde etmişler ve elde ettikleri çözümleri Ismail, Raslan ve Rabboh'un (2004) çalışmalarıyla karşılaştırmışlardır (Sarı, et al., 2008).

BÖLÜM 2

ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

2.1 Giriş

Bu bölümde, adveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümü polinom olmayan spline fonksiyonlar kullanılarak araştırılmıştır. Elde edilen metodun kararlılığı için von-Neumann analizi kullanılmıştır. Metodun doğruluğunu göstermek için iki farklı test problemi incelenmiştir ve burada bulunan sonuçlar polinom spline tabanlı metotla ve daha önceden yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Nümerik modeller, sıvıların yoğunluğuna göre kirlenmenin yayılımını tahmin etmede önemli mühendislik araçlarıdır. Böyle bir tahmin adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümüyle elde edilebilir. Bir akıtma filmindeki ısı transferi de, toprak-taki su transferi de adveksiyon-difüzyon denklemi ile modellenmektedir. Denklem nümerik çözümündeki bilinen zorluklar hem adveksiyon hem de difüzyon içermesinden ve yüksek Peclet sayıları için olduğu gibi adveksiyonun baskın olmasından ortaya çıkmaktadır. Analitik metotlarla denklemin pratik durumlara simülasyonu mümkün olmadığından çeşitli nümerik metodlar kullanılmaktadır. Sonlu fark ve sonlu eleman metodlarının standart formlarında kullanılmasının adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için verimli olmadığı ve genellikle gerçek olmayan sonuçlara neden olduğu bilinmektedir. Bu durumda bahsedilen zorlukların üstesinden gelmek için özel algoritmalar önerilmektedir.

Polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla adveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümünü veren algoritmayı tanımlayalım:

2.2 Sayısal Metot

x_i 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları ve $i = 0, 1, \dots, n$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ h &= \frac{b-a}{n} \\ x_i &= x_0 + ih \end{aligned}$$

olsun. (1.3.1) adveksiyon-difüzyon denkleminde

$$u_t = \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, \quad u = \frac{u^{n+1}+u^n}{2} \quad (2.1)$$

Crank-Nicolson formülleri kullanılırsa (1.3.1) denkleminin tamamıyla zamana ve konuma göre ayrıştırılmış formunu

$$u_i^{n+1} = fM_i^{n+1} + gm_i^{n+1} + c_i \quad (2.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} u_{xx}^{n+1} &= M_i^{n+1}, \quad u_x^{n+1} = m_i^{n+1}, \quad u_{xx}^n = M_i^n \quad \text{ve} \quad u_x^n = m_i^n \\ f &= \frac{-\xi\Delta t}{2}, \quad g = \frac{\lambda\Delta t}{2} \quad \text{ve} \quad c_i = fM_i^n + gm_i^n + u_i^n \end{aligned}$$

dir. Denklem (2.2) dan

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= fM_{i-1}^{n+1} + gm_{i-1}^{n+1} + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= fM_i^{n+1} + gm_i^{n+1} + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= fM_{i+1}^{n+1} + gm_{i+1}^{n+1} + c_{i+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

yazılabilir. (2.3) denklemlerinde Tablo 1.1 deki m_{i-1} , m_i ve m_{i+1} eşitlikleri kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= fM_{i-1}^{n+1} + g \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} - h\beta M_{i-1}^{n+1} - h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= fM_i^{n+1} + g \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + h\beta M_i^{n+1} + h\alpha M_{i-1}^{n+1} \right) + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= fM_{i+1}^{n+1} + g \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + h\beta M_{i+1}^{n+1} + h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminden M_{i-1}^{n+1} , M_i^{n+1} ve M_{i+1}^{n+1} değerleri bulunarak Tablo 1.1 deki

$$\alpha M_{i-1}^{n+1} + 2\beta M_i^{n+1} + \alpha M_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})$$

eşitliğinde yerine yazar ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& (gh\beta + h^2\alpha + gh\alpha - f) u_{i-1}^{n+1} + (2h^2\beta + 2f) u_i^{n+1} + (-gh\beta + h^2\alpha - gh\alpha \\
& - f) u_{i+1}^{n+1} \\
& = \alpha h^2 c_{i-1} + 2\beta h^2 c_i + \alpha h^2 c_{i+1}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

bulunur. Denklem (2.4) de

$$\begin{aligned}
c_{i-1} & = fM_{i-1}^n + gm_{i-1}^n + u_{i-1}^n \\
c_i & = fM_i^n + gm_i^n + u_i^n \\
c_{i+1} & = fM_{i+1}^n + gm_{i+1}^n + u_{i+1}^n
\end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse Tablo 1.1 deki eşitlikler de kullanılarak $i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere

$$A_1 u_{i-1}^{n+1} + B_1 u_i^{n+1} + C_1 u_{i+1}^{n+1} = A_2 u_{i-1}^n + B_2 u_i^n + C_2 u_{i+1}^n \tag{2.5}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
A_1 & = gh\beta + h^2\alpha + gh\alpha - f, & A_2 & = -gh\beta + h^2\alpha + gh\alpha + f, \\
B_1 & = 2h^2\beta + 2f, & B_2 & = 2h^2\beta - 2f, \\
C_1 & = -gh\beta + h^2\alpha - gh\alpha - f, & C_2 & = gh\beta + h^2\alpha + gh\alpha + f
\end{aligned}$$

dir. (1.3.2) başlangıç koşulundan u_i^0 hesaplanır ve (1.3.3) sınır koşulları yardımıyla u_0 ve u_n (2.5) denklem sisteminden elimine edilirse iteratif olarak u_i^n değerleri hesaplanabilir.

2.3 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi için von-Neumann metodu kullanılacaktır:

$$u_j^n = q^n e^{ijkh} \tag{2.6}$$

k mod sayısı, h konum artımı, q büyüme çarpanı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere denklem (2.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_1 q_{j-1}^{n+1} e^{i(j-1)kh} + B_1 q_j^{n+1} e^{ijkh} + C_1 q_{j+1}^{n+1} e^{i(j+1)kh} & = A_2 q_{j-1}^n e^{i(j-1)kh} + B_2 q_j^n e^{ijkh} \\
& + C_2 q_{j+1}^n e^{i(j+1)kh}
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemi düzenlersek ve $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerini kullanırsak

$$q = \frac{z_1 + iz_2}{z_3 + iz_4} \quad (2.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} z_1 &= (A_2 + C_2) \cos(kh) + B_2, & z_2 &= (C_2 - A_2) \sin(kh), \\ z_3 &= (A_1 + C_1) \cos(kh) + B_2, & z_4 &= (C_1 - A_1) \sin(kh) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dir. Böylece (2.7) eşitliğine $|q| \leq 1$ kararlılık şartını sağlatırsak

$$\left| \frac{z_1 + iz_2}{z_3 + iz_4} \right| \leq 1 \implies \left(\frac{z_1 + iz_2}{z_3 + iz_4} \right)^2 \leq 1$$

bulunur. Bu eşitsizliği, (2.8) eşitliklerini ve $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerini göz önünde bulundurarak düzenlersek

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = 16h^2 (\cos(kh) - 1) (\alpha \cos(kh) + \beta) \leq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğe göre sayısal metot $\alpha \cos(kh) + \beta \geq 0$ şartıyla kararlı olur, bu şarta göre;

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ ve } \beta \geq \alpha \text{ veya } \alpha < 0, \beta > 0 \text{ ve } \beta \geq -\alpha \quad (2.9)$$

olmalıdır.

2.4 Test Problemleri

Bu bölümde elde ettiğimiz algoritmanın doğruluğunu görmek için iki test problemi incelenecektir. Metodun doğruluğu

$$Hata = \|u^{analitik} - u^{nümerik}\|_{\infty} = \max_j |u_j^{analitik} - u_j^{nümerik}|$$

hata normuyla ölçülecektir. Sayısal hesaplamalarda, α ve β nın belirlenmesi (2.9) kararlılık şartlarına uygun olarak seçilmiştir. (2.5) nümerik metodu $(\alpha, \beta) \rightarrow (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ iken polinom spline matoduna (PSM) dönüşmektedir ve α ve β 'nın diğer değerleri için polinom olmayan spline metodunu (POSM) vermektedir. Courant sayısı, ξ akış hızı ve $\frac{h}{\Delta t}$ adım hızı olmak üzere $C_r = \xi \frac{h}{\Delta t}$ olarak alınmıştır. Peclet sayısı ise ξ adveksiyonunun $\frac{\lambda}{h}$ difüzyonuna oranıyla yani $P_c = \xi \frac{h}{\lambda}$ olarak alınmıştır.

2.4.1 Birinci test problemi

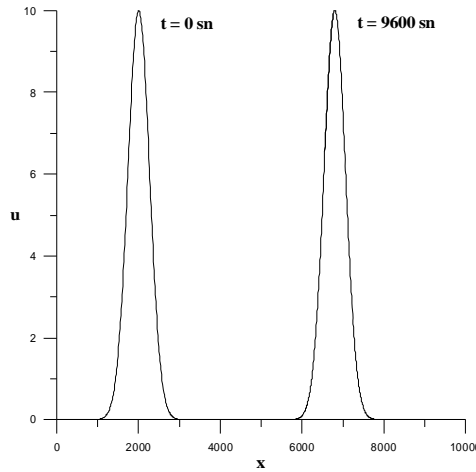
Bu örnekte, $\lambda = 0$ ve $\xi = 0.5$ m/sn sabit hız da olan saf adveksiyon incelenecektir. Analitik çözümü

$$u(x, t) = 10 \exp\left(-\frac{1}{2\rho^2} (x - x_0 - \xi t^2)\right) \quad (2.10)$$

dir ve burada ρ standart sapma olup 264 m ve $x = 2$ km'dir. Başlangıç konsantrasyonu (2.10) denkleminde $t = 0$ için elde edilebilir. Sınırlarda ise

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

şartları alınmıştır. Burada $L = 9$ km'dir. Hız 0.5 m/sn olduğunda, başlangıçtaki yayılımı 9600 sn'de 4.8 km uzaklığa taşınmaktadır. Şekil.1 'de bu taşıma gösterilmektedir.



Şekil 2.1 : Başlangıçtaki yayılımın taşınması

$t = 9600$ sn'de oluşan en yüksek değerlere sahip olduğu noktaların konsantrasyonları Tablo 2.1 de verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi zaman periyodu ilerlerken en yüksek değer aldığı noktadaki analitik değeri seçilen tüm Courant sayıları için 10 değerine eşit olmaktadır. Bu verilere dayalı hesaplamalar, POSM'nin analitik çözüme çok yakın sonuçlar verdiğini ve genellikle diğer metodlardan daha doğru sonuçlar ortaya koyduğunu göstermektedir.

Tablo 2.1 :

t=9600 sn'de çeşitli Courant sayıları için en yüksek değerin olduğu noktalar konsantrasyonu. $\Delta t=50$, $\alpha=0.1$

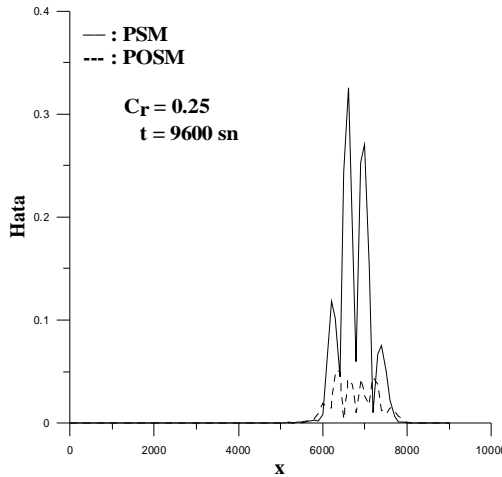
C_r	h	β	POSM	PSM	Szymkiewicz,1993	Dağ,2006	Holly,1977	Gardner,1994	Analitik
0.25	100	0.1874	9.989	9.940	9.816	9.926	9.677	9.986	10.000
0.50	50	0.1661	10.000	9.985	9.836	9.932	9.756	9.986	10.000
0.75	33.3	0.1340	10.000	9.986	9.934	9.949	9.805	9.993	10.000
1.00	25	0.1	10.000	9.986	10.000	9.961	10.000	9.986	10.000
1.50	16.6	0.1	9.989	9.994	9.941	9.959		9.994	10.000
2.00	12.5	0.1	9.996	9.994	10.000	9.961		9.986	10.000
2.40	10.416	0.1	9.996	9.994	9.966	9.962		9.994	10.000
3.20	7.8	0.1	9.996	9.995	9.988	9.962		9.999	10.000
4.80	5.2	0.1	9.995	9.994	9.992	9.962		9.994	10.000

Farklı Courant sayıları için tanım kümesi üzerindeki hatalar Tablo 2.2 de verilmiştir. Bu tabloya göre açıkça görülmektedir ki POSM, $C_r \leq 1$ için doğruluğu daha iyi olan sonuçlar vermektedir. $C_r > 1$ için metodun doğruluğunda bir azalma olsa da POSM'in sonuçları diğer metotlardan daha iyi veya hemen hemen aynı çıkmaktadır.

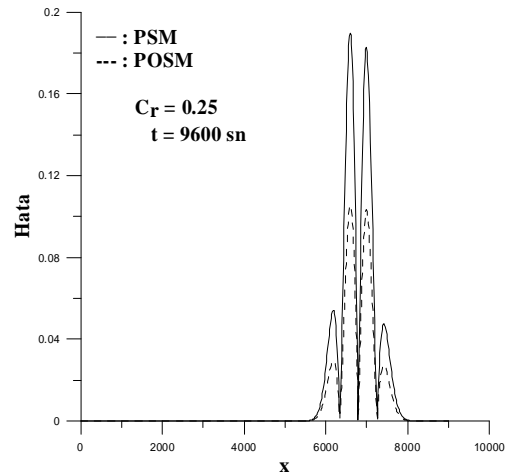
Tablo 2.2 : t=9600 sn'deki hatalar. $\Delta t=50$ ve $\alpha=0.1$

C_r	h	β	POSM	PSM	Dağ, 2006
0.25	100	0.1874	$5.066E - 2$	$3.258E - 1$	$3.76E - 1$
0.50	50	0.1661	$2.207E - 3$	$1.976E - 1$	$3.73E - 1$
0.75	33.3	0.1340	$2.579E - 4$	$1.912E - 1$	$3.76E - 1$
1.00	25	0.1	$1.673E - 12$	$1.901e - 1$	$3.79E - 1$
1.50	16.6	0.1	$1.054E - 1$	$1.899E - 1$	$3.78E - 1$
2.00	12.5	0.1	$1.419E - 1$	$1.897E - 1$	$3.79E - 1$
2.40	10.4	0.1	$1.565E - 1$	$1.899E - 1$	$3.80E - 1$
3.20	7.8	0.1	$1.711E - 1$	$1.898E - 1$	$3.80E - 1$
4.80	5.2	0.1	$1.815E - 1$	$1.898E - 1$	$3.77E - 1$

POSM ve PSM metotlarının hata dağılımları Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'te verilmiştir. Şekillerden de hatadaki iyileşme açıkça görünmektedir. $C_r = 0.25$ için en yüksek değeri aldığı noktada PSM'nin POSM'den daha az hata oluşturduğu görülmektedir ancak bütün tanım kümesi üzerindeki hata dağılımı POSM'nin daha doğru sonuçlar çıkardığını göstermektedir.



Şekil 2.2 : Hata dağılımı



Şekil 2.3 : Hata dağılımı

2.4.2 İkinci test problemi

Bu örnekte, hem difüzyon hemde adveksiyon incelenecektir. Bu durumda akış hızı $\xi = 0.01$ m/dk olarak alınmıştır. Kanalın uzunluğu $L = 200$ m olup tanım bölgesi $h = 1$ m uzunluğundaki düzgün aralıklara bölünmüştür. Bulunan sonuçlar $C_r = 0.6$ ($\Delta t = 60$ sn) için hesaplanmıştır.

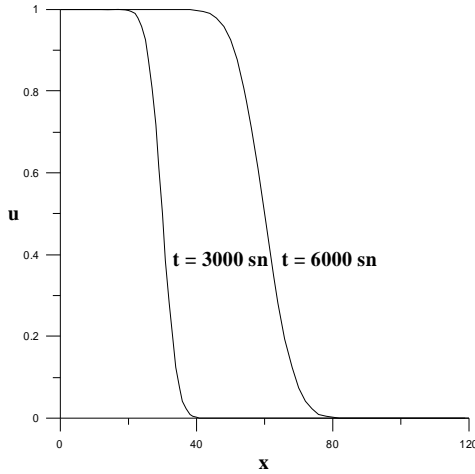
Başlangıç ve sınır koşulu sırasıyla $u(x, 0) = 0$ ve $u(0, t) = 1$, $u(L, t) = 0$ olarak seçilmiştir.

Bu başlangıç ve sınır koşulları altında, denklem (1.3.1) aşağıdaki analitik çözüme sahiptir:

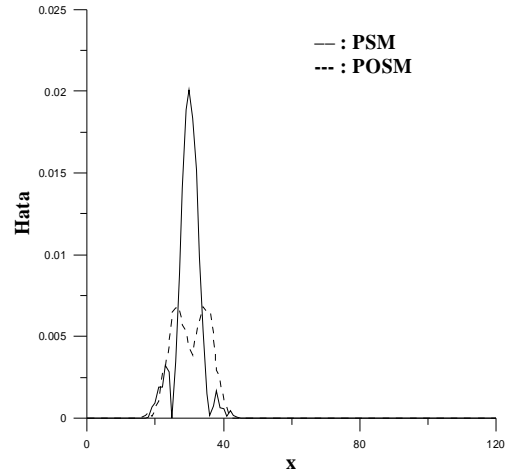
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} c \left(\frac{x - \xi t}{\sqrt{4\lambda t}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\xi x}{\lambda} \right) \operatorname{erf} c \left(\frac{x + \xi t}{\sqrt{4\lambda t}} \right)$$

Şekil 2.4, 2.6 ve 2.7 de üç farklı difüzyon katsayısı için sayısal sonuçların davranışlarını göstermektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi yüksek dereceden Peclet sayıları için çözüm düzgünleşmiştir. Bundan dolayı nümerik metotlarla çözümü tam doğrulukla modellemeye bazı sorunlar ortaya çıkmaktadır. $\lambda = 0.002$ m²/sn ve $P_c = 5$

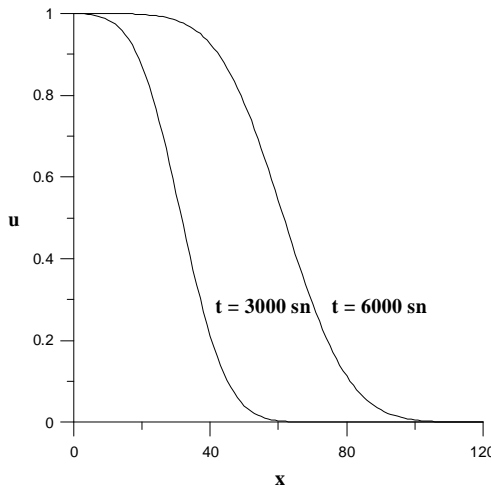
olmak üzere POSM ve PSM metotlarının hata dağılımları Şekil 2.5'te verilmiştir. Tekrar görülmüştür ki POSM, PSM'ye göre doğruluğu daha yüksek sonuçlar vermektedir.



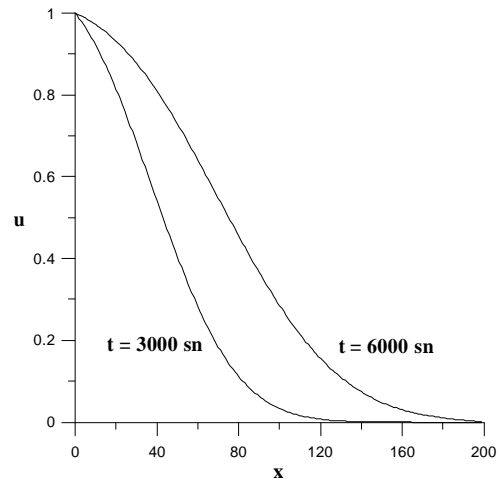
Şekil 2.4 : $\lambda=0.002$, $P_c=5$ için çözümler



Şekil 2.5 : $\lambda=0.002 \text{ m}^2/\text{sn}$ için hatalar



Şekil 2.6 : $\lambda=0.002$, $P_c=0.5$ için çözümler



Şekil 2.7 : $\lambda=0.002$, $P_c=0.05$ için çözümler

Karşılaştırma yapmak için, Tablo 4.2'de $P_c = 5$, $\xi = 0.01 \text{ m/sn}$, $\lambda = 0.002 \text{ m}^2/\text{sn}$, $C_T = 0.6$, $\Delta t = 60 \text{ sn}$, $h = 1 \text{ m}$ için adveksiyon-difüzyon denklemi çözülmüştür ve $t = 3000 \text{ sn}$ da sonuçlar elde edilmiştir. Hesaplama hataları da aynı tabloda verilmiştir. Bu tablodan, genellikle POSM'nin sonuçlarının diğerlerinden daha doğru sonuçlar verdiği söylenebilir.

Tablo 2.3 : $t=3000$ 'de analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması ($\alpha=0.2155, \beta=0.2732$)

x	POSM	PSM	Szmkiewicz,1993	Holly,1977	Gardner,1994	Dağ,2006	Analitik
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
19	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999
20	0.997	0.999	0.998	1.000	0.999	1.000	0.998
21	0.994	0.997	0.996	1.000	0.996	0.999	0.995
22	0.987	0.992	0.990	1.000	0.991	0.996	0.990
23	0.975	0.981	0.978	1.000	0.981	0.989	0.978
24	0.954	0.961	0.957	1.000	0.961	0.974	0.958
25	0.920	0.926	0.922	1.000	0.927	0.946	0.926
26	0.869	0.873	0.870	0.996	0.874	0.900	0.876
27	0.800	0.798	0.799	1.013	0.800	0.832	0.807
28	0.712	0.704	0.708	1.047	0.706	0.743	0.718
29	0.609	0.595	0.602	0.897	0.596	0.638	0.614
30	0.496	0.480	0.488	0.457	0.479	0.524	0.500
31	0.382	0.368	0.375	0.067	0.366	0.411	0.386
32	0.277	0.267	0.272	-0.036	0.265	0.306	0.282
33	0.187	0.183	0.185	-0.010	0.181	0.218	0.193
34	0.117	0.119	0.118	0.002	0.118	0.147	0.124
35	0.067	0.073	0.070	0.000	0.072	0.095	0.074
36	0.035	0.042	0.038	0.000	0.042	0.058	0.042
37	0.017	0.023	0.020	0.000	0.023	0.034	0.022
38	0.007	0.012	0.009	0.000	0.012	0.019	0.010
39	0.003	0.006	0.004	0.000	0.006	0.010	0.005
40	0.001	0.003	0.002	0.000	0.003	0.005	0.002
41	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.003	0.001
42	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Hata	6.83E-3	2.01E-2				2.5E-2	

2.5 Sonuçlar

Bu b3l3mde adveksiyon-dif3zyon denkleminin 3z3m3ne polinom olmayan spline algoritmasının uygunluğu araştırılmıştır. Doğruluk açısından metod iyi sonuçlar vermiştir. Bu sonuçlar ışığında yapılan çalışmadan aşağıdakilere ulaşılmıştır:

1. Polinom olmayan k3bik spline'ları kullanarak adveksiyon-dif3zyon denkleminin 3z3m3 in verilen algoritma etkilidir ve aynı hesaplama maliyetiyle doğruluğu daha y3ksek sonuçlar vermektedir.
2. Von-Neumann teorisine dayalı olarak yapılan kararlılık analizi n3merik metodun şartlı olarak kararlı olduğunu g3stermektedir.
3. Elde edilen metod, C_r Courant sayısı in herhangi bir kısıtlama getirmemektedir ve $C_r > 1$ in hesaplamalara uygundur.
4. Birinci test problemine g3re, ele alınan metod $C_r \leq 1$ durumunda $C_r > 1$ durumundakinden daha doğru sonuçlar vermektedir.

3zetle, adveksiyon-dif3zyon denkleminin 3z3m3nde polinom olmayan k3bik spline fonksiyonlarından oluşturulan n3merik algoritma doğruluk ve etkililik açısından diğer sayısal y3ntemlerle karşılaştırıldığında daha iyi performans g3sterdiği g3r3lmektedir.

BÖLÜM 3

REGULARIZED LONG WAVE (RLW) DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

3.1 Giriş

Bu bölümde RLW denkleminin sayısal çözümü için polinom olmayan kübik spline fonksiyonları kullanılacaktır. Von-Neumann teorisi yardımıyla metodun kararlılık analizi yapılacaktır. Metodun doğruluğunu ve etkililiğini ölçmede tek solitary dalga oluşumu ve iki solitary dalga çarpışması olmak üzere iki test problemi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar polinom spline tabanlı metotla ve daha önceden yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

RLW denklemi, sığ sular ve plazma dalgaları gibi önemli fiziksel fenomenlerin modellenmesinde kullanılmıştır. Bundan dolayı lineer olmayan dağıtıcı dalgaların çalışılmasında bu denklem önemli bir rol oynar. Sınırlı sayıda analitik çözümü var olduğundan, RLW denkleminin çalışılmasında sayısal analizler önem kazanır.

Şimdi polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla (1.3.4) RLW denkleminin sayısal çözümü için bir algoritmayı tanımlayalım:

3.2 Sayısal Metot

x_i 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları ve $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ h &= \frac{b - a}{n} \\ x_i &= x_0 + ih \end{aligned}$$

olsun. (1.3.4) denklemini lineerleştirerek yaklaşık çözümlerini elde edeceğiz. Denklemde lineer olmayan uu_x terimindeki u yerine yerel bir sabit olarak z alalım. Böylece denklem (1.3.4)'ü yeniden yazacak olursak

$$u_t + u_x + \varepsilon z u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.1)'de (2.1) Crank-Nicolson formülleri kullanılarak zaman ayrıştırması $u_{xx}^{n+1} = M_i^{n+1}$, $u_x^{n+1} = m_i^{n+1}$, $u_{xx}^n = M_i^n$ ve $u_x^n = m_i^n$ olmak üzere;

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{m_i^{n+1} + m_i^n}{2} + \varepsilon z \frac{m_i^{n+1} + m_i^n}{2} - \mu \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.2) denklemi düzenlenirse

$$u_i^{n+1} = \mu M_i^{n+1} - gm_i^{n+1} + c_i \quad (3.3)$$

halini alır. Burada

$$g = \frac{\Delta t}{2} (1 + \varepsilon z) \text{ ve } c_i = u_i^n - \mu M_i^n - gm_i^n$$

dir. Denklem (3.3)'ten

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= \mu M_{i-1}^{n+1} - gm_{i-1}^{n+1} + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= \mu M_i^{n+1} - gm_i^{n+1} + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= \mu M_{i+1}^{n+1} - gm_{i+1}^{n+1} + c_{i+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazılabilir. (3.4) denklemlerinde Tablo 1.1 deki m_{i-1} , m_i ve m_{i+1} eşitlikleri kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= \mu M_{i-1}^{n+1} - g \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} - h\beta M_{i-1}^{n+1} - h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= \mu M_i^{n+1} - g \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + h\beta M_i^{n+1} + h\alpha M_{i-1}^{n+1} \right) + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= \mu M_{i+1}^{n+1} - g \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + h\beta M_{i+1}^{n+1} + h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminden M_{i-1}^{n+1} , M_i^{n+1} ve M_{i+1}^{n+1} değerleri bulunarak Tablo 1.1 deki

$$\alpha M_{i-1}^{n+1} + 2\beta M_i^{n+1} + \alpha M_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})$$

eşitliğinde yerine yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned} &\left(\alpha - \frac{\mu}{h^2} - \frac{g(\alpha + \beta)}{h} \right) u_{i-1}^{n+1} + \left(2\beta + \frac{2\mu}{h^2} \right) u_i^{n+1} + \left(\alpha - \frac{\mu}{h^2} + \frac{g(\alpha + \beta)}{h} \right) u_{i+1}^{n+1} \\ &= \alpha c_{i-1} + 2\beta c_i + \alpha c_{i+1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. Denklem (3.5) de

$$\begin{aligned} c_{i-1} &= u_{i-1}^n - \mu M_{i-1}^n - gm_{i-1}^n \\ c_i &= u_i^n - \mu M_i^n - gm_i^n \\ c_{i+1} &= u_{i+1}^n - \mu M_{i+1}^n - gm_{i+1}^n \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse Tablo 1.1 deki eşitlikler de kullanılarak $i = 1, 2, \dots, n - 1$ olmak üzere

$$Au_{i-1}^{n+1} + Bu_i^{n+1} + Cu_{i+1}^{n+1} = Cu_{i-1}^n + Bu_i^n + Au_{i+1}^n \quad (3.6)$$

elde edilir. Burada

$$A = \alpha - \frac{\mu}{h^2} - \frac{g(\alpha+\beta)}{h}, \quad B = 2\beta + \frac{2\mu}{h^2}, \quad C = \alpha - \frac{\mu}{h^2} + \frac{g(\alpha+\beta)}{h} \quad (3.7)$$

dir. (3.6) denklem sisteminde $n - 1$ tane denklem elde edilmiştir ve $n + 1$ tane bilinmeyen vardır. (1.3.5) başlangıç ve sınır koşullarının da bu sisteme eklenmesiyle, yeni denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülebilen üçlü bant matris sistemi haline gelmektedir. Başlangıç koşulundan u_i^0 değerini hesaplayarak, yeni zaman düzeylerindeki çözümler (3.6) denkleminin tekrarlı kullanılışıyla elde edilebilecektir. Yukarıda kullandığımız lineerleştirme işleminin sakıncalarını en aza indirmek için aşağıdaki iterasyon her bir zaman adımında iki defa tekrarlanmıştır:

$$(u^*)^{n+1} = u^n + \frac{1}{2} (u^{n+1} - u^n) \quad (3.8)$$

3.3 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi için von-Neumann metodu kullanılacaktır. Bunun için (2.6) daki u_j^n değeri (3.6) da yerine yazılırsa

$$Aq_{j-1}^{n+1} e^{i(j-1)kh} + Bq_j^{n+1} e^{ijkh} + Cq_{j+1}^{n+1} e^{i(j+1)kh} = Cq_{j-1}^n e^{i(j-1)kh} + Bq_j^n e^{ijkh} + Aq_{j+1}^n e^{i(j+1)kh}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerini kullanırsak

$$q = \frac{z_1 + iz_2}{z_1 - iz_2} \quad (3.9)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$z_1 = (A + C) \cos(kh) + B, \quad z_2 = (A - C) \sin(kh), \quad (3.10)$$

dir. Böylece (3.9) eşitliği ile (3.10) ve (3.7) değerlerini bir arada düşünürsek

$$q = 1$$

bulunur. Buradan $|q| \leq 1$ kararlılık şartının sağlandığı açıkça görülmektedir. Buna göre sayısal metodun koşulsuz kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.

3.4 Test Problemleri

Algoritmanın doğruluğu iki test problemi incelenerek gösterilecektir. Hata

$$L_2 = \|u^{analitik} - u^{nümerik}\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^n |u_j^{analitik} - u_j^{sayısal}|} \quad (3.11)$$

$$L_\infty = \|u^{analitik} - u^{nümerik}\|_\infty = \max_j |u_j^{analitik} - u_j^{sayısal}| \quad (3.12)$$

hata normlarıyla verilecektir..

RLW denklemleri aşağıda sırasıyla verilmiş olan kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen korunum kanunlarını sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu (u_x)^2) dx, \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx. \end{aligned}$$

Sayısal hesaplamalarda, α ve β deneysel olarak belirlenmiştir. (3.6) sayısal metodu $(\alpha, \beta) \rightarrow (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ iken PSM'ye dönüşmektedir ve α ve β 'nin diğer değerleri için POSM'yi vermektedir.

3.4.1 Tek solitary dalga'nın yayılması

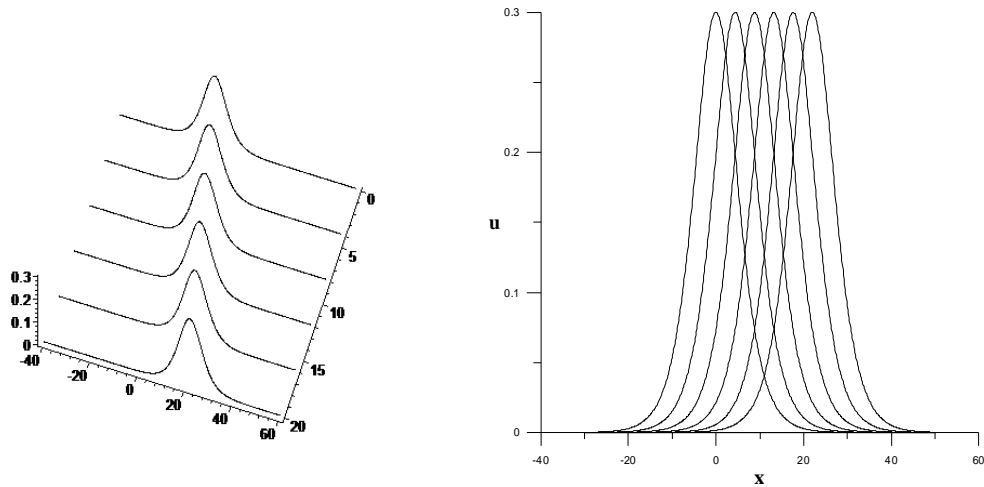
RLW denkleminin analitik çözümü (Peregrine, 1966)'da

$$u(x, t) = 3c \sec^2(k(x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t)) \quad (3.13)$$

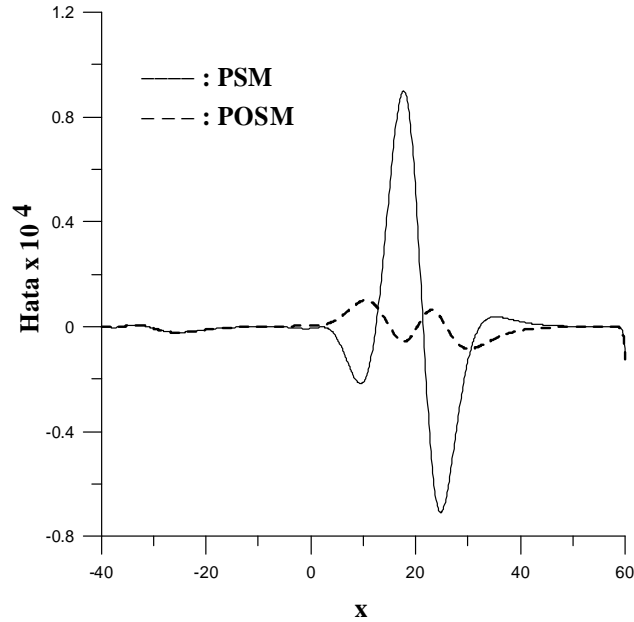
olarak verilmiştir. Burada $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1+\varepsilon c)}}$ dir. Bu çözüm $3c$ genişliğinde ve $1 + \varepsilon c$ hızındaki bir tek solitary dalgayı ifade etmektedir. Başlangıç koşulu (3.13) denkleminde $t = 0$ alınarak hesaplanmıştır. Bu test probleminde, $(\alpha, \beta) \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ikilisi POSM'u için kullanılmıştır. Yukarıdaki denklemde görülen parametreler

$$c = 0.1, x_0 = 0, \varepsilon = 1, \mu = 1$$

olarak alınmıştır. Bu parametreler ve verilen başlangıç koşuluyla birlikte, solitary dalga hareketleri için $0 \leq t \leq 20$ ve $-40 \leq x \leq 60$ aralığında çözümler elde edilecektir. Daha önceki çalışmalarla karşılaştırma yapmak için konum adımı $h = 0.125$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.1$ olarak kullanılmıştır. Seçilen zamandaki çözüm profili Şekil 3.1 de verilmiştir. Bu şekilden de açıkça görüldüğü üzere, dalganın büyüklüğü değişmemektedir. $t = 20$ de PSM için elde edilen maksimum hata solitary dalganın en yüksek değerini aldığı noktanın yakınında meydana gelmiştir. Diğer taraftan POSM için maksimum hata seçilen zamanda sağ taraftaki sınırdaki meydana gelmiştir. Bu hata, sınırdaki analitik değer 0.1268×10^4 iken sıfır alınarak hesaplanmıştır. Doğruluğu açısından POSM'nin etkisini görmek için Şekil 3.2 üzerinde hem POSM'nin hemde PSM'nin hata dağılımları bir arada verilmiştir. Şekil 3.2'den POSM'nin PSM'ye göre daha az hataya sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 3.1 : $t=0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 'deki solitary dalga çözümleri



Şekil 3.2 : $t=20$ 'deki $((u^{\text{analitik}} - u^{\text{sayısal}}) \times 10^4)$ hata dağılımı

Elde ettiğimiz sonuçları daha önceki bazı çalışmalarla karşılaştırmak için hata normları ve korunum sabitlerinin farklı zamanlardaki değerleri Tablo 3.1 de verilmiştir. Bu tabloya göre POSM diğerlerine göre daha doğru sonuçlar vermektedir. Dağ ve arkadaşları, 2003 de en küçük kareler yöntemini kullanmışlardır. Kullandıkları Galerkin metodu sonlu farklar metoduna göre maliyeti yüksek olan bir metottur. Önerilen bu metod daha az maliyetlidir. Farklı zamanlardaki C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin değerleri $t = 0$ daki sabitlerle neredeyse aynı değerde kalmaktadır.

Tablo 3.1 : Genişlik=0.3, h=0.125, $\Delta t=0.1$, $\alpha = \beta=0.25$ için hatalar ve sabitler

Metot	Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
POSM	0	0.0000	0.0000	3.979927	0.8104625	2.579007
	4	0.0896	0.0285	3.979930	0.8104650	2.579007
	8	0.1556	0.0481	3.979928	0.8104650	2.579007
	12	0.2214	0.0613	3.979926	0.8104650	2.579008
	16	0.2863	0.0816	3.979917	0.8104650	2.579008
	20	0.3534	0.1268	3.979883	0.8104651	2.579008
PSM	0	0.0000	0.0000	3.979927	0.8104625	2.579007
	4	0.4979	0.1884	3.979930	0.8104625	2.579007
	8	0.9855	0.3810	3.979928	0.8104625	2.579007
	12	1.4623	0.5655	3.979926	0.8104625	2.579007
	16	1.9253	0.7377	3.979917	0.8104625	2.579007
	20	2.3739	0.8981	3.979883	0.8104625	2.579007
Avilez,2004	0	0.0000	0.0000	3.979927	0.8104625	2.579007
	4	0.1549	0.0695	3.979944	0.8104625	2.579007
	8	0.3000	0.1343	3.979947	0.8104625	2.579007
	12	0.4306	0.1868	3.979946	0.8104625	2.579007
	16	0.5464	0.2292	3.979939	0.8104625	2.579007
	20	0.6493	0.2643	3.979909	0.8104625	2.579007
Dağ,2006	0	0.0000	0.0000	3.979927	0.8104625	2.579008
	4	0.4084	0.1560	3.979929	0.8104622	2.579007
	8	0.8054	0.3148	3.979926	0.8104620	2.579006
	12	1.1917	0.4658	3.979923	0.8104617	2.579005
	16	1.5641	0.6054	3.979914	0.8104614	2.579004
	20	1.9215	0.7337	3.979883	0.8104612	2.579003

Dağ,2001	0	0.0000	0.000	3.979927	0.810463	2.579007
	4	0.0060	1.458	3.977092	0.809641	2.576296
	8	0.0260	5.786	3.973316	0.808320	2.571938
	12	0.0640	9.228	3.979106	0.806774	2.566836
	16	0.1150	12.148	3.965344	0.805461	2.562505
	20	0.1840	15.664	3.961597	0.804185	2.558292
Dağ,2003	0	0.0000	0.0000	3.979926	0.8104646	2.579007
	4	0.1757	0.0693	3.979930	0.8104626	2.578998
	8	0.2249	0.0887	3.979924	0.8104606	2.578994
	12	0.3355	0.1072	3.979926	0.8104621	2.578997
	16	0.4075	0.1224	3.979918	0.8104624	2.578999
	20	0.4315	0.1321	3.979890	0.8104625	2.578999

Noktasal yakınsaklık oranının derecesini görmek için farklı zaman ve konum adımlarında algoritma çalıştırılmıştır. Konum ve zamandaki noktasal yakınsaklık oranı

$$\frac{\log_{10} (\|u_{analitik} - u_{h_i}\| / \|u_{analitik} - u_{h_{i+1}}\|)}{\log_{10} (h_i/h_{i+1})},$$

$$\frac{\log_{10} (\|u_{analitik} - u_{\Delta t_i}\| / \|u_{analitik} - u_{\Delta t_{i+1}}\|)}{\log_{10} (\Delta t_i/\Delta t_{i+1})}$$

formülleri yardımıyla hesaplanmaktadır. Burada $u_{analitik}$ analitik çözümü, u_{h_i} ve $u_{\Delta t_i}$ sırasıyla h_i ve Δt_i ile elde edilen sayısal çözümlerini göstermektedir.

Zaman adımı $\Delta t = 0.1$ alınarak elde edilen konumsal yakınsaklık oranı Tablo 3.2 de verilmiştir. Bu tabloya göre POSM'nin yakınsaklık oranı PSM'ye göre daha yüksektir yani POSM daha hızlı yakınsar. Konum adımı sabit alınarak zamana bağlı yakınsaklık oranı Tablo 3.3'te verilmiştir. Verilen sonuçlar POSM'nin PSM'den daha hızlı yakınsadığını göstermektedir.

Tablo 3.2 : $\Delta t=0.1$, $c=0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ için $t=20$ 'de konum yakınsaklık oranı

n	POSM		PSM	
	$L_2 \times 10^4$	Diğer	$L_2 \times 10^4$	Diğer
50	640.5540	—	87.00504	—
100	150.7303	2.087351	20.69252	2.071990
200	35.58707	2.082544	6.270329	1.722496
400	7.244032	2.296488	3.025769	1.051239
800	0.353355	4.357603	2.373942	0.350017

Tablo 3.3 : $n=800$, $c=0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ için $t=20$ 'de zaman yakınsaklık oranı

Δt	POSM		PSM	
	$L_2 \times 10^4$	Diğer	$L_2 \times 10^4$	Diğer
2	762.0152	—	763.9788	—
1	209.0968	1.865649	211.4360	1.853312
0.5	52.02754	2.006824	54.48368	1.956325
0.25	11.36144	2.195130	13.84686	1.976265
0.125	1.144468	3.311397	3.601900	1.942729
0.1	0.353355	5.266663	2.373942	1.868347

3.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Bu bölümde, farklı büyüklüklerde ve aynı yönde hareket eden iki solitary dalganın çarpışması üzerinde çalışılacaktır. Çarpışma için başlangıç koşulu;

$$u(x, 0) = u_1 + u_2,$$

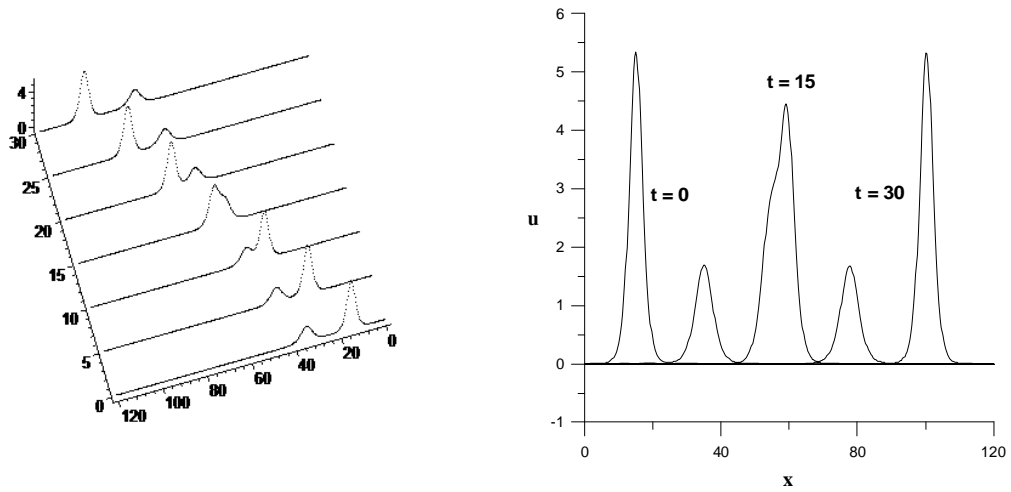
$$u_j = 3A_j \operatorname{sech}^2 \left(k_j \left(x - \tilde{x}_j \right) \right), \quad A_j = \frac{4k_j^2}{1-4k_j^2}, \quad j = 1, 2$$

dir. Daha önceki çalışmalarda kullanılan aşağıdaki parametreler kullanılmıştır:

$$\varepsilon = 1, \quad \mu = 1, \quad k_1 = 0.4, \quad k_2 = 0.3, \quad \tilde{x}_1 = 15, \quad \tilde{x}_2 = 35.$$

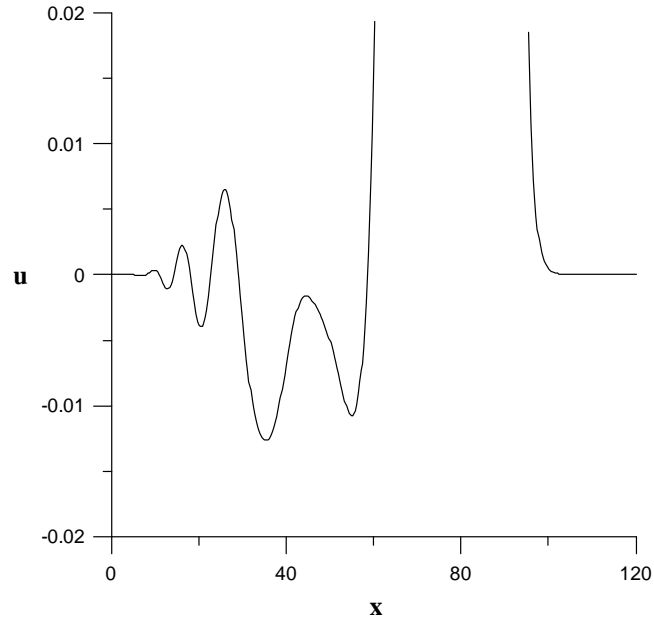
Başlangıç koşulu altında, RLW denkleminin analitik bir çözümü bulunmamaktadır.

İki solitary dalga çarpışması $[0, 120]$ aralığında $\Delta t = 0.1$ ve $h = 0.3$ alınarak $t = 30$ oluncaya kadar gözlenmiştir ve POSM için (α, β) ikilisi $(\frac{1}{24}, \frac{11}{24})$ olarak seçilmiştir. İlk çözüm Şekil 3.3'te verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, ilk zamanlarda iki ayrı dalga olan solitary dalga $t = 15$ zamanında çarpışma oluşmuştur ve sonraki zamanlarda orijinal şekilleri değiştirmiştir.



Şekil 3.3 : İki solitary dalganın çarpışması

İki dalganın çarpışması $t = 10$ da başlamıştır. Çarpışmadan sonra $t = 20$ de kendi orijinal şekillerini almışlardır ve daha küçük olan solitary dalganın arkasındaki salınım kuyruğu gözlenmiştir. Bu durum Şekil 3.4 te gösterilmiştir. Benzer çalışma daha önce (Kutluay, et al., 2006), (Duran, et al., 2003), (Santerelli, 1978), (Gardner, et al., 1990) gibi makalelerde de ele alınmıştır. Korunum sabitlerinin seçilen farklı zamanlardaki değerleri Tablo 3.4'te verilmiştir. Bu tabloya göre, çarpışma sırasında C_2 korunum sabiti neredeyse aynı kalırken, C_1 ve C_3 korunum sabitlerinde değişimler olmaktadır.



Şekil 3.4 : $t=25$ zamanında küçük olan solitary dalganın ardındaki salınım kuyruğu

Tablo 3.4 : $h=0.3$, $\Delta t=0.1$, $\alpha=1/24$, $\beta=11/24$ için sabitler

Metot	Zaman	C_1	C_2	C_3
POSM	0	37.91650203	120.5232341	744.0812089
	5	37.93509791	120.5162830	745.0483244
	10	37.96824283	120.6108837	745.3071008
	15	38.01838004	120.6522575	743.8516366
	20	37.97028040	120.7355790	746.7345423
	25	37.98104398	120.8660845	747.9501516
	30	37.99741759	120.9928903	749.0129697
PSM	0	37.91650203	120.5232341	744.0812089
	5	37.93438349	120.6477294	745.1183240
	10	37.96813431	120.7039296	745.3940462
	15	38.01848528	120.6199847	743.9516635
	20	37.97014311	120.8658730	746.8785308
	25	37.98154128	121.0107860	748.1228400
	30	37.99840311	121.1422921	749.2197390

3.5 Sonuçlar

Bu alışmada, RLW denkleminin çözümü için polinom olmayan spline algoritmasının iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Metodun verimliliği tek solitary dalga hareketi ve iki solitary dalga çarpışması ile test edilmiştir. Metodun doğruluğunu görmek için, L_2 ve L_∞ hata normları, C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleri ile birlikte kullanılmıştır. Kararlılık analizi von-Neumann metodu ile yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara bağlı olarak, şu bilgilere ulaşılabilir:

- i) Kararlılık analizi sayısal metodun koşulsuz kararlı olduğunu göstermektedir.
- ii) Polinom olmayan spline tabanlı metot RLW denkleminin çözümü için doğru ve verimli bir metottur. İlk test probleminden POSM'nin diğer metotlardan aynı veya daha az hesaplama maliyetiyle daha doğru sonuçlar ortaya koyduğu söylenebilir.
- iii) İlk test probleminde konum ve zamana göre yakınsaklık oranı POSM'nin PSM ye göre daha hızlı yakınsamaktadır.
- iv) İkinci test probleminde analitik çözümün olmamasından dolayı metodun doğruluğu korunum sabitlerinin sonuçlarına göre tartışılmıştır ve POSM kabul edilebilir sonuçlar ortaya koymuştur.

Sonuç olarak, polinom olmayan spline fonksiyonlardan oluşan sayısal metot RLW denkleminin çözümü için kullanılmış olan diğer sayısal metotlarla karşılaştırıldığında daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

BÖLÜM 4

LİNEER OLMAYAN BURGER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

4.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümünü bulmak için polinom olmayan kübik spline fonksiyonları kullanılacaktır. Elde edilen metodun kararlılık analizi için von-Neumann teorisi kullanılmıştır. Metodun doğruluğunu ve etkililiğini ölçmede bir test problemi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar polinom spline tabanlı metotla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Burger denklemi bir kaç analitik çözüme sahiptir. Fakat bu çözümler genelde seri çözümü olduğundan küçük viskozite sabiti için yavaş yakınsamaktadır ve dolayısıyla bu çözümleri kullanma pratik olmamaktadır. Bu yüzden Burger denkleminin çözümlerini elde edebilmek için sayısal çalışmalar zorunluluk olmuştur.

Şimdi polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla (1.3.6) lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümü için bir algoritma elde etmeye çalışalım.

4.2 Sayısal Metot

x_i 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları ve $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ h &= \frac{b - a}{n} \\ x_i &= x_0 + ih \end{aligned}$$

olsun. (1.3.6) denklemi sayısal olarak çözmek için öncelikle lineer olmadığından lineerleştirmelidir. Bunun için denklemde lineer olmayan uu_x terimdeki u yerine yerel bir sabit olarak z alalım. Böylece denklem (1.3.6)'yı yeniden yazacak olursak

$$u_t + zu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. Denklem (4.1) denkleminin (2.1) Crank-Nicolson formüllerini kullanarak zaman ayrıştırılması yapılmış hali

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + z \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} - \nu \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} = 0 \quad (4.2)$$

olur. (4.2) denklemini $u_{xx}^{n+1} = M_i^{n+1}$, $u_x^{n+1} = m_i^{n+1}$, $u_{xx}^n = M_i^n$ ve $u_x^n = m_i^n$ olmak üzere düzenlersek

$$u_i^{n+1} = aM_i^{n+1} + bm_i^{n+1} + c_i \quad (4.3)$$

halini alır. Burada

$$a = \frac{\Delta t}{2}\nu, \quad b = -z\frac{\Delta t}{2}, \quad c_i = u_i^n + aM_i^n + bm_i^n$$

dir. Denklem (4.3)'den

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= aM_{i-1}^{n+1} + bm_{i-1}^{n+1} + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= aM_i^{n+1} + bm_i^{n+1} + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= aM_{i+1}^{n+1} + bm_{i+1}^{n+1} + c_{i+1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

yazılabilir. (4.4) denklemlerinde Tablo 1.1 deki m_{i-1} , m_i ve m_{i+1} eşitlikleri kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= aM_{i-1}^{n+1} + b \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} - h\beta M_{i-1}^{n+1} - h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= aM_i^{n+1} + b \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + h\beta M_i^{n+1} + h\alpha M_{i-1}^{n+1} \right) + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= aM_{i+1}^{n+1} + b \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + h\beta M_{i+1}^{n+1} + h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminden M_{i-1}^{n+1} , M_i^{n+1} ve M_{i+1}^{n+1} değerleri bulunarak Tablo 1.1 deki

$$\alpha M_{i-1}^{n+1} + 2\beta M_i^{n+1} + \alpha M_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})$$

eşitliğinde yerine yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned} &(bh\beta + h^2\alpha + bh\alpha - a) u_{i-1}^{n+1} + (2h^2\beta + 2a) u_i^{n+1} + (-bh\beta + h^2\alpha \\ &- bh\alpha - a) u_{i+1}^{n+1} \\ &= \alpha h^2 c_{i-1} + 2\beta h^2 c_i + \alpha h^2 c_{i+1} \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur. Denklem (4.5) de

$$\begin{aligned} c_{i-1} &= u_{i-1}^n + aM_{i-1}^n + bm_{i-1}^n \\ c_i &= u_i^n + aM_i^n + bm_i^n \\ c_{i+1} &= u_{i+1}^n + aM_{i+1}^n + bm_{i+1}^n \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse Tablo 1.1 deki eşitlikler de kullanılarak $i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere

$$A_1 u_{i-1}^{n+1} + B_1 u_i^{n+1} + C_1 u_{i+1}^{n+1} = A_2 u_{i-1}^n + B_2 u_i^n + C_2 u_{i+1}^n \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_1 &= bh\beta + h^2\alpha + bh\alpha - a, & A_2 &= -bh\beta + h^2\alpha + bh\alpha + a, \\ B_1 &= 2h^2\beta + 2a, & B_2 &= 2h^2\beta - 2a, \\ C_1 &= -bh\beta + h^2\alpha - bh\alpha - a, & C_2 &= bh\beta + h^2\alpha + bh\alpha + a \end{aligned}$$

dir. (4.6) denklem sisteminde $n-1$ tane denklem elde edilmiştir ve $n+1$ tane bilinmeyen vardır. (1.3.7) sınır koşullarının da bu sisteme eklenmesiyle, yeni denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülebilen üçlü band matris sistemi haline gelmektedir. (1.3.8) başlangıç koşulundan u_i^0 değerini hesaplayarak başlanırsa, yeni zaman düzeylerindeki çözümler (4.6) denkleminin tekrarlı kullanılışıyla elde edilebilecektir. Yukarıda kullandığımız lineerleştirme işleminin sakıncalarını en aza indirmek için (3.8) iterasyonu her bir zaman adımında iki defa eklenmiştir.

4.3 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi için von-Neumann metodu kullanılacaktır. Denklem (2.6) yı denklem (4.6) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} A_1 q_{j-1}^{n+1} e^{i(j-1)kh} + B_1 q_j^{n+1} e^{ijkh} + C_1 q_{j+1}^{n+1} e^{i(j+1)kh} &= A_2 q_{j-1}^n e^{i(j-1)kh} + B_2 q_j^n e^{ijkh} \\ &+ C_2 q_{j+1}^n e^{i(j+1)kh} \end{aligned}$$

olur. Bu denklemi düzenlersek ve $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerini kullanırsak

$$q = \frac{z_1 + iz_2}{z_3 + iz_4} \quad (4.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} z_1 &= (A_2 + C_2) \cos(kh) + B_2, & z_2 &= (C_2 - A_2) \sin(kh), \\ z_3 &= (A_1 + C_1) \cos(kh) + B_2, & z_4 &= (C_1 - A_1) \sin(kh) \end{aligned} \quad (4.8)$$

dir. Böylece (4.7) eşitliğine $|q| \leq 1$ kararlılık şartını sağlatırsak

$$\left| \frac{z_1 + iz_2}{z_3 + iz_4} \right| \leq 1 \implies \left(\frac{z_1 + iz_2}{z_3 + iz_4} \right)^2 \leq 1 \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) eşitsizliğini (4.8) eşitliklerini ve $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerini göz önünde bulundurarak düzenlersek

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = 16h^2 (\cos(kh) - 1) (\alpha \cos(kh) + \beta) \leq 0 \quad (4.10)$$

eşitsizliği elde ederiz. (4.10) eşitsizliğinden sayısal metot $\alpha \cos(kh) + \beta \geq 0$ şartıyla kararlı olur, bu şarta göre;

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ ve } \beta \geq \alpha \text{ veya } \alpha < 0, \beta > 0 \text{ ve } \beta \geq -\alpha \quad (4.11)$$

olmalıdır.

4.4 Test Problemi

Bu bölümde elde ettiğimiz algoritmayı doğrulamak için bir test problemi incelenecektir. Metodun doğruluğu (3.11) ve (3.12) denklemleri ile verilen hata normlarıyla ölçülmüştür.

Sayısal hesaplamalarda, α ve β deneysel olarak belirlenmiştir. (4.6) sayısal metodu $(\alpha, \beta) \rightarrow (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ iken PSM'ye dönüşmektedir ve α ve β 'nin diğer değerleri için POSM'yi vermektedir.

Burger denkleminin iyi bilinen analitik çözümü (Nguyen, et al., 1982)

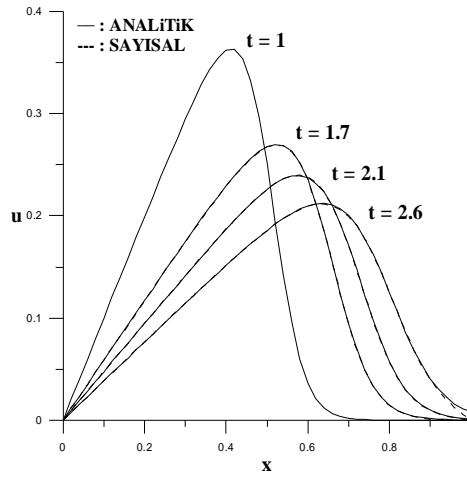
$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} \exp(x^2/(4\nu t))}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.12)$$

olarak alınmıştır. Burada $t_0 = \exp(1/8\nu)$ dir. Başlangıç koşulu denklem (4.12)'nin $t = 1$ değeri için hesaplanmış halidir ve sınır koşulları ise

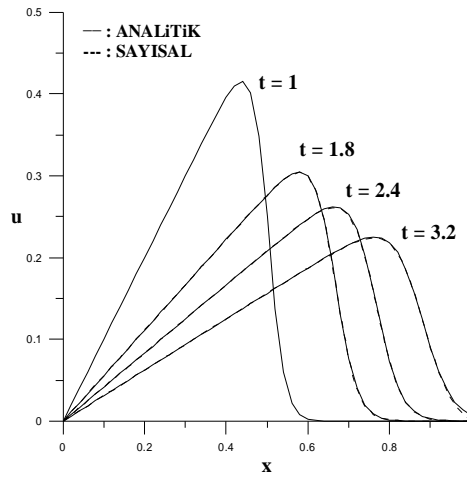
$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \quad \text{ve} \quad u(1, t) = 0 \quad (4.13)$$

olarak verilmektedir. Sarsıntının yayılımı için $[0, 1]$ tanım aralığında $\nu = 0.01, 0.005, h = 0.02, 0.005$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri ile çalışılmıştır.

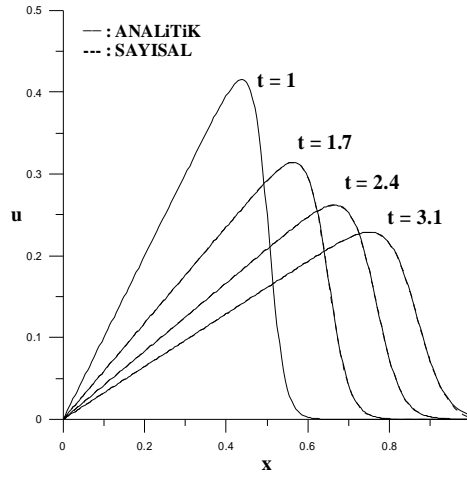
POSM için farklı zamanlardaki sayısal çözümler ile denklemin analitik çözüm değerleri Şekil 4.1 – 4.3’de farklı ν ve h değerleri için modellenmiştir. Şekillerden sayısal çözüm ve analitik çözümlerin çakışmakta olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1 : $h=0.02$, $\nu=0.01$ için farklı zamanlardaki analitik ve sayısal çözümler



Şekil 4.2 : $h=0.02$, $\nu=0.005$ için farklı zamanlardaki analitik ve sayısal çözümler

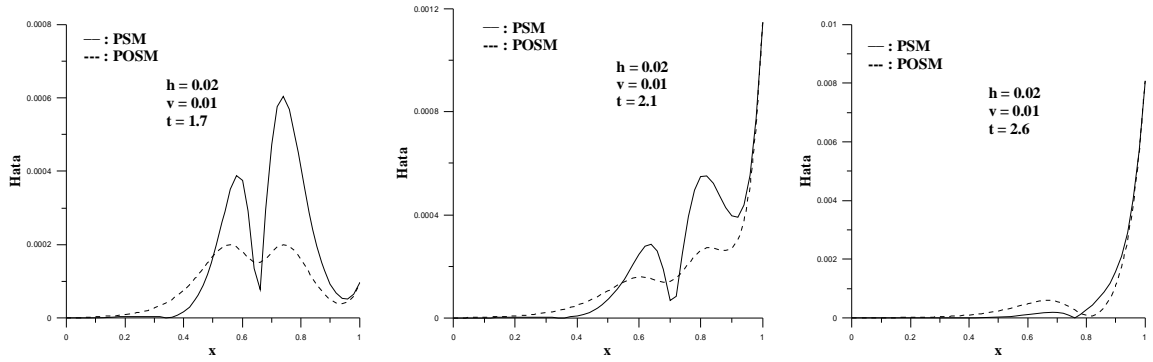


Şekil 4.3 : $h=0.005$, $\nu=0.005$ için çeşitli zamanlardaki analitik ve sayısal çözümler

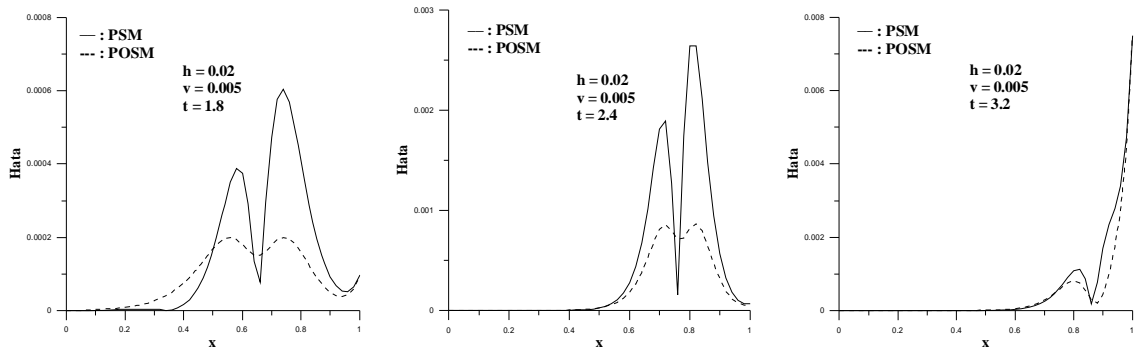
Tablo 4.1’de PSM ve POSM için farklı zamanlarda elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Tabloda ve Şekil 4.4–4.6’da da görüldüğü gibi POSM, PSM’ye göre küçük olan viskozite ve adım aralığı değerleri için genelde daha iyi sonuçlar vermektedir. Daha büyük ν değerleri için ise genelde daha iyi iken, hemen hemen aynı sonuçları verdikleri aralıklarda görülmektedir.

Tablo 4.1 : $\Delta t=0.01$ için farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması

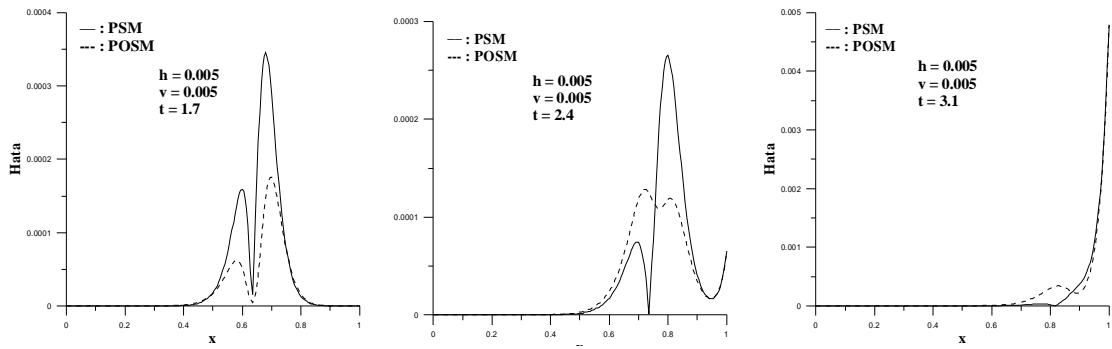
				PSM		POSM	
				$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
	t	α	β				
$h=0.005,$ $\nu=0.005$	1.7	0.245	0.254	0.0893163	0.345139	0.0458896	0.174708
	2.4	0.249	0.250	0.0731669	0.264713	0.0531737	0.128441
	3.1	0.220	0.278	0.6675740	4.790610	0.6582950	4.790610
$h=0.02,$ $\nu=0.005$	1.8	0.173	0.3075	1.1290300	3.629850	0.3324350	0.800371
	2.4	0.1903	0.295	0.8641230	2.640350	0.3716420	0.865847
	3.2	0.245	0.245	1.4966200	7.491460	1.3476400	7.491460
$h=0.02,$ $\nu=0.01$	1.7	0.1632	0.3328	0.2320930	0.603065	0.1143880	0.200391
	2.1	0.1729	0.3243	0.3133720	1.147600	0.2537940	1.147600
	2.6	0.2397	0.256	1.6270600	8.067980	1.5923600	8.067980



Şekil 4.4 : $h=0.02$, $\nu=0.01$ için $t=1.7$, 2.1 ve 2.6 zamanlarındaki hataların karşılaştırılması



Şekil 4.5 : $h=0.02$, $\nu=0.005$ için $t=1.8$, 2.4 ve 3.2 zamanlarındaki hataların karşılaştırılması



Şekil 4.6: $h=0.005$, $\nu=0.005$ için $t=1.7$, 2.4 ve 3.1 zamanlarındaki hataların karşılaştırılması

BÖLÜM 5

GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS-FISHER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN KÜBİK SPLINE METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.1 Giriş

Bu bölümde polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar yardımıyla genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin fark denklemi formu elde edilecektir. Elde edilen fark metodun yerel kesme hatası hesaplanmıştır. Metodun doğruluğunu ve etkinliğini ölçmede iki test problemi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar polinom spline tabanlı metotla elde edilen ve daha önce yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Şimdi polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla (1.3.9) genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin sayısal çözümü için bir algoritmayı tanımlayalım.

5.2 Sayısal Metot

$x_i, i = 0, 1, \dots, n$ ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktaları olmak üzere

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ h &= \frac{b - a}{n} \\ x_i &= x_0 + ih \end{aligned}$$

olsun. (1.3.9) denklemini sayısal olarak çözmek için öncelikle lineer olmadığından lineerleştirilerek çözümleri bulunacaktır. Bunun için denklemden lineer olmayan uu_x terimindeki u yerine yerel bir sabit olarak z alalım. Böylece denklem (1.3.9)'u yeniden yazacak olursak

$$u_t + \xi z^\delta u_x - u_{xx} = \lambda z (1 - u^\delta) \quad (5.1)$$

şeklinde yazılır. Denklem (5.1)'de (2.1) Crank-Nicolson formülleri kullanılırsa

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \xi z^\delta \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} - \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} = \lambda z (1 - z^\delta) \quad (5.2)$$

elde edilir. (5.2) denklemini $u_{xx}^{n+1} = M_i^{n+1}$, $u_x^{n+1} = m_i^{n+1}$, $u_{xx}^n = M_i^n$ ve $u_x^n = m_i^n$ olmak üzere düzenlersek

$$u_i^{n+1} = aM_i^{n+1} + bm_i^{n+1} + c_i \quad (5.3)$$

halini alır. Burada

$$a = -\frac{\Delta t}{2}, \quad b = -z^\delta \frac{\Delta t}{2}, \quad c_i = aM_i^n + \xi bm_i^n - u_i^n + \lambda \kappa, \quad \kappa = z(1 - z^\delta) \Delta t$$

dir. Denklem (5.3)'den

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= aM_{i-1}^{n+1} + \xi bm_{i-1}^{n+1} + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= aM_i^{n+1} + \xi bm_i^{n+1} + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= aM_{i+1}^{n+1} + \xi bm_{i+1}^{n+1} + c_{i+1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

yazılabilir. (5.4) denklemlerinde Tablo 1.1 deki m_{i-1} , m_i ve m_{i+1} eşitlikleri kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_{i-1}^{n+1} &= aM_{i-1}^{n+1} + \xi b \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} - h\beta M_{i-1}^{n+1} - h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i-1} \\ u_i^{n+1} &= aM_i^{n+1} + \xi b \left(\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + h\beta M_i^{n+1} + h\alpha M_{i-1}^{n+1} \right) + c_i \\ u_{i+1}^{n+1} &= aM_{i+1}^{n+1} + \xi b \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + h\beta M_{i+1}^{n+1} + h\alpha M_i^{n+1} \right) + c_{i+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminden M_{i-1}^{n+1} , M_i^{n+1} ve M_{i+1}^{n+1} değerleri bulunarak Tablo 1.1 den

$$\alpha M_{i-1}^{n+1} + 2\beta M_i^{n+1} + \alpha M_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})$$

eşitliğinde yerine yazar ve düzenlersek

$$\begin{aligned} &(\xi bh\beta + h^2\alpha + \xi bh\alpha - a) u_{i-1}^{n+1} + (2h^2\beta + 2a) u_i^{n+1} + (-\xi bh\beta + h^2\alpha \\ &-\xi bh\alpha - a) u_{i+1}^{n+1} \\ &= \alpha h^2 c_{i-1} + 2\beta h^2 c_i + \alpha h^2 c_{i+1} \end{aligned} \quad (5.5)$$

bulunur. Denklem (5.5) de

$$\begin{aligned} c_{i-1} &= aM_{i-1}^n + \xi bm_{i-1}^n - u_{i-1}^n + \lambda \kappa \\ c_i &= aM_i^n + \xi bm_i^n - u_i^n + \lambda \kappa \\ c_{i+1} &= aM_{i+1}^n + \xi bm_{i+1}^n - u_{i+1}^n + \lambda \kappa \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse Tablo 1.1 deki eşitlikler de kullanılarak $i = 1, 2, \dots, n - 1$ olmak üzere

$$A_1 u_{i-1}^{n+1} + B_1 u_i^{n+1} + C_1 u_{i+1}^{n+1} = A_2 u_{i-1}^n + B_2 u_i^n + C_2 u_{i+1}^n + 2h^2 \lambda \kappa (\alpha + \beta) \quad (5.6)$$

genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin fark denklemi formu elde edilir. Bu denklemle

$$\begin{aligned} A_1 &= \xi b h \beta + h^2 \alpha + \xi b h \alpha - a, & A_2 &= -\xi b h \beta - h^2 \alpha - \xi b h \alpha + a, \\ B_1 &= 2h^2 \beta + 2a, & B_2 &= -2h^2 \beta - 2a, \\ C_1 &= -\xi b h \beta + h^2 \alpha - \xi b h \alpha - a, & C_2 &= \xi b h \beta - h^2 \alpha + \xi b h \alpha + a \end{aligned}$$

dir. (5.6) denklem sisteminde $n - 1$ tane denklem elde edilmiştir ve $n + 1$ tane bilinmeyen vardır. (1.3.11) sınır koşullarının da bu sisteme eklenmesiyle, yeni denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülebilen üçlü bant matris sistemi haline gelir. (1.3.10) başlangıç koşulundan u_i^0 değerini hesaplayarak başlanırsa, yeni zaman düzeylerindeki çözümler (5.6) denkleminin tekrarlı kullanılışıyla elde edilebilecektir. Yukarıda kullandığımız lineerleştirme işleminin sakıncalarını en aza indirmek için (3.8) iterasyonu her bir zaman adımında iki defa tekrarlanmıştır.

5.3 Yerel Kesme Hatası

(5.6) fark denkleminin yerel kesme hatası Taylor seri açılımından faydalanılarak bulunur. (5.6) denklemindeki u_{i-1}^{n+1} , u_i^{n+1} , u_{i+1}^{n+1} , u_{i-1}^n , u_i^n ve u_{i+1}^n fonksiyonlarının (ih, nk) noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u_{i-1}^{n+1} = u_i^n - h(u_x)_i^n + \frac{h^2}{2!} (u_{xx})_i^n - \frac{h^3}{3!} (u_{xxx})_i^n + \frac{h^4}{4!} (u_{xxxx})_i^n - \dots$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + h(u_x)_i^n + \frac{h^2}{2!} (u_{xx})_i^n + \frac{h^3}{3!} (u_{xxx})_i^n + \frac{h^4}{4!} (u_{xxxx})_i^n + \dots$$

$$u_{i-1}^{n+1} = u_i^{n+1} - h(u_x)_i^{n+1} + \frac{h^2}{2!} (u_{xx})_i^{n+1} - \frac{h^3}{3!} (u_{xxx})_i^{n+1} + \frac{h^4}{4!} (u_{xxxx})_i^{n+1} - \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \left[u_i^n + k (u_t)_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{tt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{ttt})_i^n + \frac{k^4}{4!} (u_{tttt})_i^n + \dots \right] \\
&\quad - h \left[(u_x)_i^n + k (u_{xt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xttt})_i^n + \dots \right] \\
&\quad + \frac{h^2}{2!} \left[(u_{xx})_i^n + k (u_{xxt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xxtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xxttt})_i^n + \dots \right] - \dots
\end{aligned}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + k (u_t)_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{tt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{ttt})_i^n + \frac{k^4}{4!} (u_{tttt})_i^n + \dots$$

$$\begin{aligned}
u_{i+1}^{n+1} &= u_i^{n+1} + h (u_x)_i^{n+1} + \frac{h^2}{2!} (u_{xx})_i^{n+1} + \frac{h^3}{3!} (u_{xxx})_i^{n+1} + \frac{h^4}{4!} (u_{xxxx})_i^{n+1} + \dots \\
&= \left[u_i^n + k (u_t)_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{tt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{ttt})_i^n + \frac{k^4}{4!} (u_{tttt})_i^n + \dots \right] \\
&\quad + h \left((u_x)_i^n + k (u_{xt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xttt})_i^n + \dots \right) \\
&\quad + \frac{h^2}{2!} \left[(u_{xx})_i^n + k (u_{xxt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xxtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xxttt})_i^n + \dots \right] + \dots
\end{aligned}$$

şekindedir. Bu değerleri (5.6) da yerine yazarsak kesme hatası

$$\begin{aligned}
T_i^n &= A_1 \left[\left(u_i^n + k (u_t)_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{tt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{ttt})_i^n + \frac{k^4}{4!} (u_{tttt})_i^n + \dots \right) \right. \\
&\quad - h \left((u_x)_i^n + k (u_{xt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xttt})_i^n + \dots \right) \\
&\quad \left. + \frac{h^2}{2!} \left((u_{xx})_i^n + k (u_{xxt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xxtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xxttt})_i^n + \dots \right) - \dots \right] \\
&\quad + B_1 \left(u_i^n + k (u_t)_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{tt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{ttt})_i^n + \frac{k^4}{4!} (u_{tttt})_i^n + \dots \right) \\
&\quad + C_1 \left[\left(u_i^n + k (u_t)_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{tt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{ttt})_i^n + \frac{k^4}{4!} (u_{tttt})_i^n + \dots \right) \right. \\
&\quad + h \left((u_x)_i^n + k (u_{xt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xttt})_i^n + \dots \right) \\
&\quad \left. + \frac{h^2}{2!} \left((u_{xx})_i^n + k (u_{xxt})_i^n + \frac{k^2}{2!} (u_{xxtt})_i^n + \frac{k^3}{3!} (u_{xxttt})_i^n + \dots \right) + \dots \right] \\
&\quad - A_2 \left(u_i^n - h (u_x)_i^n + \frac{h^2}{2!} (u_{xx})_i^n - \frac{h^3}{3!} (u_{xxx})_i^n + \frac{h^4}{4!} (u_{xxxx})_i^n - \dots \right) - B_2 u_i^n \\
&\quad - C_2 \left(u_i^n + h (u_x)_i^n + \frac{h^2}{2!} (u_{xx})_i^n + \frac{h^3}{3!} (u_{xxx})_i^n + \frac{h^4}{4!} (u_{xxxx})_i^n + \dots \right) - 2h^2 \lambda \kappa (\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

olarak bulunmaktadır. Burada $\alpha = -\beta$ seçildiği takdirde denklemin hata derecesi $O(h^2 + kh^2)$ olarak elde edilmektedir.

5.4 Test Problemleri

Bu bölümde elde ettiğimiz algoritmayı doğrulamak için iki test problemi incelenecektir. Metodun doğruluğu (3.12) hata normuyla verilmiştir.

Sayısal hesaplamalarda, α ve β deneysel olarak belirlenmiştir. (5.6) sayısal metodu $(\alpha, \beta) \rightarrow (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ iken PSM'ye dönüşmektedir ve α ve β 'nin diğer değerleri için POSM'yi vermektedir.

5.4.1 Birinci test problemi

Genelleştirilmiş Burger-Fisher denkelminin analitik çözümü (Sarı, et al., 2008)'da

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(a_1(x - a_2 t))\right)^{1/\delta}, \quad t \geq 0 \quad (5.7)$$

olarak verilmiştir. Burada

$$a_1 = \frac{-\xi\delta}{2(\delta+1)}, \quad a_2 = \frac{\xi}{\delta+1} + \frac{\lambda(\delta+1)}{\xi}$$

olup $\xi = 0.001$, $\lambda = 0.001$ ve $\delta = 1, 4$ değerleri kullanılmıştır. Daha önce yapılmış çalışmalarla karşılaştırma yapılabilmesi için $n = 11$ ve $\Delta t = 0.0001$ seçilmiştir. $\delta = 1$ ve 4 iken elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 5.1 ve 5.3'te denklemin analitik çözümü ve daha önce yapılmış çalışmalarda elde edilen sonuçlarla birlikte verilmiştir. Tablo 5.1 ve 5.3'te PSM ve POSM ile elde edilen sayısal çözümler analitik çözümle aynı görünmektedir çünkü metodların mutlak hata değeri Tablo 5.2 ve 5.4'te de verildiği gibi 10^{-16} civarlarındadır. Tablo 5.2 ve 5.4'e göre POSM, genelde PSM'ye göre daha iyi sonuçlar verirken, her iki metotta daha önceki yapılan çalışmalardan çok daha iyi çözümler elde etmektedir.

Tablo 5.1 : Sayısal çözümlerin karşılaştırılması ($\alpha=-999\cdot 10^{-9}$, $\beta=999\cdot 10^{-9}$)

		$\delta = 1$				
x	t	analitik	Ismail, 2004	Sarı, 2008	PSM	POSM
0.1	0.001	0.499988	0.499986	0.499988	0.499988	0.499988
	0.005	0.499989	0.499979	0.499988	0.499989	0.499989
	0.010	0.499990	0.499971	0.499989	0.499990	0.499990
0.5	0.001	0.499938	0.499936	0.499938	0.499938	0.499938
	0.005	0.499939	0.499929	0.499938	0.499939	0.499939
	0.010	0.499940	0.499921	0.499939	0.499940	0.499940
0.9	0.001	0.499888	0.499886	0.499888	0.499888	0.499888
	0.005	0.499889	0.499879	0.499888	0.499889	0.499889
	0.010	0.499890	0.499871	0.499889	0.499890	0.499890

Tablo 5.2 : Mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha=-999\cdot 10^{-9}$, $\beta=999\cdot 10^{-9}$)

		$\delta = 1$			
x	t	Ismail, 2004	Sarı, 2008	PSM	POSM
0.1	0.001	$1.93753E - 06$	$1.01E - 07$	$1.11022E - 16$	$1.66533E - 16$
	0.005	$9.68763E - 06$	$4.38E - 07$	$1.27676E - 15$	$1.55431E - 15$
	0.010	$1.93752E - 05$	$7.53E - 07$	$2.72005E - 15$	$3.83027E - 15$
0.5	0.001	$1.93738E - 06$	$1.04E - 07$	$5.55112E - 16$	$1.66533E - 16$
	0.005	$9.68691E - 06$	$5.21E - 07$	$2.05391E - 15$	$1.11022E - 16$
	0.010	$1.93738E - 05$	$1.04E - 06$	$2.60902E - 15$	$2.22045E - 16$
0.9	0.001	$1.93724E - 06$	$1.01E - 07$	$7.77156E - 16$	$3.33067E - 16$
	0.005	$9.68619E - 06$	$4.38E - 07$	$3.16414E - 15$	$1.60982E - 15$
	0.010	$1.93724E - 05$	$7.53E - 07$	$3.05311E - 15$	$3.49720E - 15$

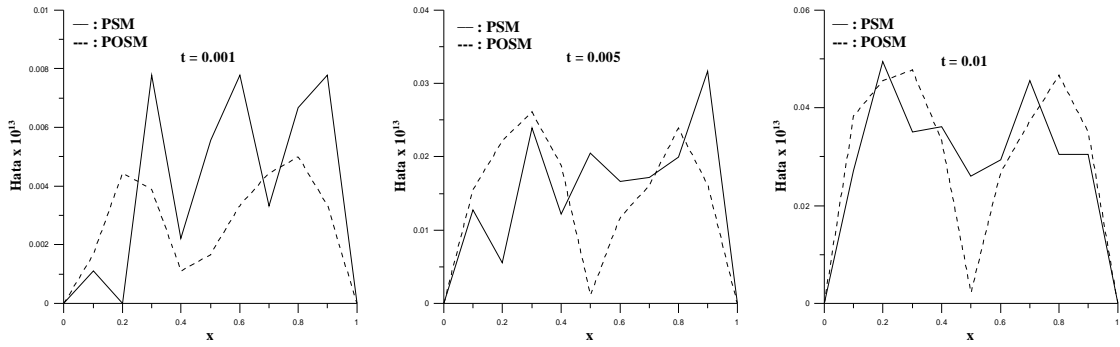
Tablo 5.3 : Sayısal çözümlerin karşılaştırılması ($\alpha=-10^{10}+0.4690704, \beta=-\alpha$)

		$\delta = 4$			
x	t	analitik	Ismail, 2004	PSM	POSM
0.1	0.001	0.840888	0.840888	0.840888	0.840888
	0.005	0.840890	0.840889	0.840890	0.840890
	0.010	0.840892	0.840891	0.840892	0.840892
0.5	0.001	0.840854	0.840854	0.840854	0.840854
	0.005	0.840856	0.840856	0.840856	0.840856
	0.010	0.840859	0.840857	0.840859	0.840859
0.9	0.001	0.840821	0.840821	0.840821	0.840821
	0.005	0.840823	0.840822	0.840823	0.840823
	0.010	0.840825	0.840824	0.840825	0.840825

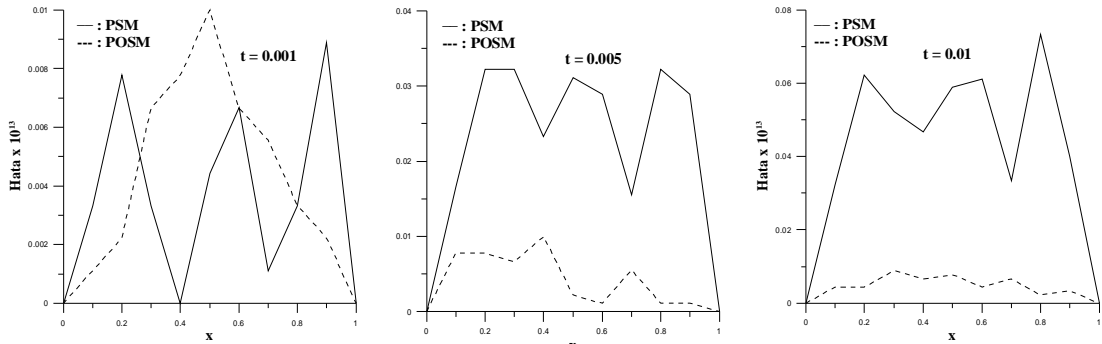
Tablo 5.4 : Mutlak hataların karşılaştırılması ($\alpha=-10^{10}+0.4690704, \beta=-\alpha$)

		$\delta = 4$		
x	t	Sarı, 2008	PSM	POSM
0.1	0.001	$1.75E - 08$	$3.33067E - 16$	$1.11022E - 16$
	0.005	$7.32E - 07$	$1.66533E - 15$	$7.77156E - 16$
	0.010	$1.27E - 06$	$3.21965E - 15$	$4.44089E - 16$
0.5	0.001	$1.75E - 08$	$4.44089E - 16$	$9.99201E - 16$
	0.005	$8.77E - 07$	$3.10862E - 15$	$2.22045E - 16$
	0.010	$1.75E - 06$	$5.88418E - 15$	$7.77156E - 16$
0.9	0.001	$1.75E - 08$	$8.88178E - 16$	$2.22045E - 16$
	0.005	$7.38E - 07$	$2.88658E - 15$	$1.11022E - 16$
	0.010	$1.27E - 06$	$3.99680E - 15$	$3.33067E - 16$

PSM ve POSM için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması Şekil 5.1 ve 5.2'de verilmiştir.



Şekil 5.1 : $\delta=1$ için $t=0.001$, 0.005 ve 0.01 zamanlarındaki mutlak hataların karşılaştırılması



Şekil 5.2 : $\delta=4$ için $t=0.001$, 0.005 ve 0.01 zamanlarındaki mutlak hataların karşılaştırılması

5.4.2 İkinci test problemi

Genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin (5.7) analitik çözüm denkleminde $\xi = 0.1$, $\lambda = -0.0025$ ve $\delta = 2, 4, 8$ değerleri alınmıştır. Daha önce yapılmış çalışmalarda alınan $n = 11$ ve $\Delta t = 0.0001$ parametreleri seçilmiştir.

İncelenen bu test probleminde PSM ve POSM için elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmalardan daha iyi olduğu görülmüştür. Bu sonuçların karşılaştırılması farklı δ değerleri ve zamanlar için Tablo 5.5 – 5.7'de verilmiştir.

Tablo 5.5 :

x ve t nin farklı değerleri ve $\delta=2$, $\xi=0.1$, $\lambda=-0.0025$ için mutlak hataların karşılaştırılması

$$(\alpha=-26807.442, \beta=-\alpha)$$

		$\delta = 2$		
x	t	Sarı, 2008	PSM	POSM
0.1	0.1	$1.12133E - 05$	$5.37170E - 11$	$6.31561E - 11$
	0.2	$1.46989E - 05$	$7.04719E - 11$	$1.24436E - 10$
	0.3	$1.60003E - 05$	$7.66925E - 11$	$2.47514E - 10$
	0.4	$1.64875E - 05$	$7.90152E - 11$	$2.41347E - 10$
	0.5	$1.66712E - 05$	$7.98940E - 11$	$2.96981E - 10$
0.5	0.1	$2.90376E - 05$	$1.40695E - 10$	$1.03180E - 11$
	0.2	$4.04291E - 05$	$1.95464E - 10$	$1.54824E - 11$
	0.3	$4.46809E - 05$	$2.15774E - 10$	$1.54823E - 11$
	0.4	$4.62715E - 05$	$2.23343E - 10$	$1.03265E - 11$
	0.5	$4.68703E - 05$	$2.26201E - 10$	$2.12053E - 14$
0.9	0.1	$1.15442E - 05$	$5.64229E - 11$	$5.55619E - 11$
	0.2	$1.51006E - 05$	$7.35281E - 11$	$1.12952E - 10$
	0.3	$1.64278E - 05$	$7.98684E - 11$	$1.72173E - 10$
	0.4	$1.69246E - 05$	$8.22344E - 11$	$2.33224E - 10$
	0.5	$1.71119E - 05$	$8.31305E - 11$	$2.96099E - 10$

Tablo 5.6:

x ve t nin farklı değerleri ve $\delta=4$, $\xi=0.1$, $\lambda=-0.0025$ için mutlak hataların karşılaştırılması
 $(\alpha=-23743.977, \beta=-\alpha)$

		$\delta = 4$		
x	t	Sarı, 2008	PSM	POSM
0.1	0.1	$1.34208E - 05$	$4.29993E - 11$	$1.19890e - 010$
	0.2	$1.76149E - 05$	$5.68683E - 11$	$2.31559e - 010$
	0.3	$1.91878E - 08$	$6.21130E - 11$	$3.35001e - 010$
	0.4	$1.97832E - 05$	$6.41561E - 11$	$4.30227e - 010$
	0.5	$2.00142E - 05$	$6.50192E - 11$	$5.17243e - 010$
0.5	0.1	$3.48865E - 05$	$1.15776E - 10$	$4.46976e - 011$
	0.2	$4.85914E - 05$	$1.61094E - 10$	$6.67254e - 011$
	0.3	$5.37251E - 05$	$1.78146E - 10$	$6.60870e - 011$
	0.4	$5.56640E - 05$	$1.84746E - 10$	$4.27950e - 011$
	0.5	$5.64122E - 05$	$1.87481E - 10$	$3.11895e - 012$
0.9	0.1	$3.83199E - 05$	$4.76527E - 11$	$8.71749e - 011$
	0.2	$5.34140E - 05$	$6.18394E - 11$	$1.82454e - 010$
	0.3	$5.91084E - 05$	$6.71834E - 11$	$2.85830e - 010$
	0.4	$6.12989E - 05$	$6.92637E - 11$	$3.97298e - 010$
	0.5	$6.21833E - 05$	$7.01377E - 11$	$5.16846e - 010$

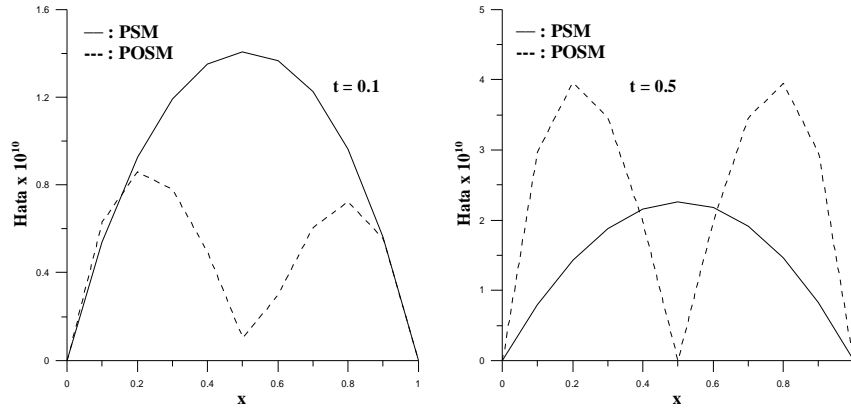
Tablo 5.7:

x ve t nin farklı değerleri ve $\delta=8$, $\xi=0.1$, $\lambda=-0.0025$ için mutlak hataların karşılaştırılması

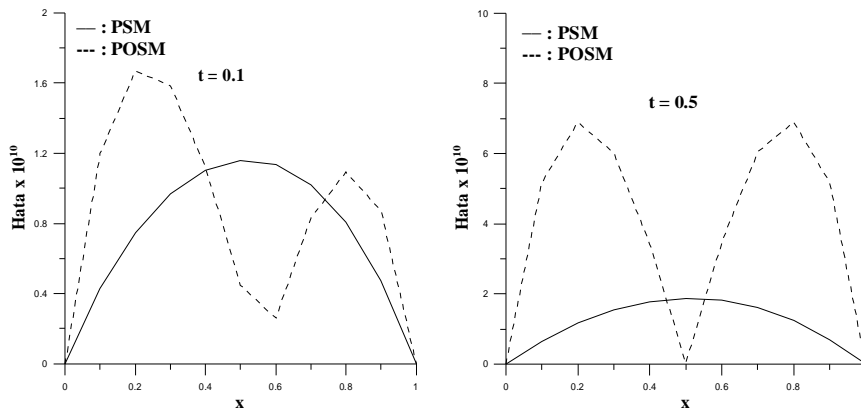
$$(\alpha=-21937.057, \beta=-\alpha)$$

		$\delta = 8$		
x	t	Sarı, 2008	PSM	POSM
0.1	0.1	$1.47050E - 05$	$2.66396E - 11$	$1.84907E - 10$
	0.2	$1.93270E - 05$	$3.58646E - 11$	$3.47224E - 10$
	0.3	$2.10749E - 05$	$3.95652E - 11$	$4.86972E - 10$
	0.4	$2.17508E - 05$	$4.12100E - 11$	$6.04158E - 10$
	0.5	$2.20270E - 05$	$4.20937E - 11$	$6.98801E - 10$
0.5	0.1	$3.83199E - 05$	$7.52639E - 11$	$1.23985E - 10$
	0.2	$5.34140E - 05$	$1.05310E - 10$	$1.85502E - 10$
	0.3	$5.91084E - 05$	$1.17194E - 10$	$1.84611E - 10$
	0.4	$6.12989E - 05$	$1.22358E - 10$	$1.21344E - 10$
	0.5	$6.21833E - 05$	$1.25037E - 10$	$4.24494E - 12$
0.9	0.1	$1.15325E - 05$	$3.23339E - 11$	$9.51818E - 11$
	0.2	$2.00506E - 05$	$4.18010E - 11$	$2.12739E - 10$
	0.3	$2.18329E - 05$	$4.55691E - 11$	$3.52650E - 10$
	0.4	$2.25218E - 05$	$4.72393E - 11$	$5.14901E - 10$
	0.5	$2.28032E - 05$	$4.81349E - 11$	$6.99470E - 10$

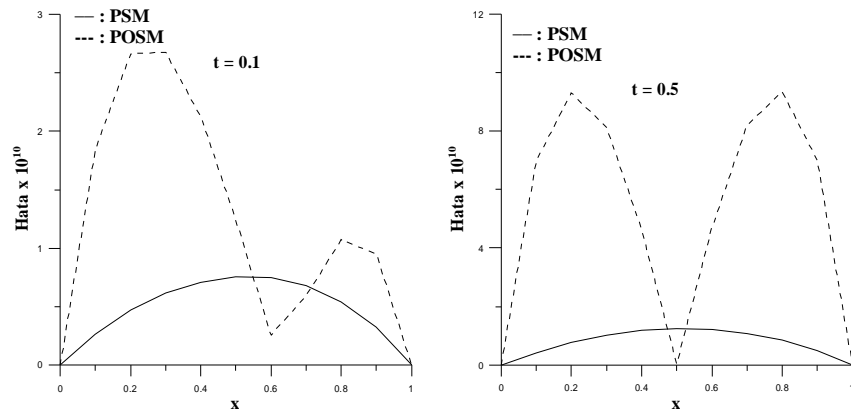
Elde edilen sonuçlar Şekil 5.3 – 5.5’de modellenmiştir. Bu çalışmada POSM için elde edilen sonuçlar beklenildiği kadar iyi olmamıştır, yani bazı zaman dilimlerinde PSM’nin daha iyi çözümler ortaya koyduğu görülmüştür.



Şekil 5.3 : $\delta=2$ için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması



Şekil 5.4: $\delta=4$ için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması



Şekil 5.5 : $\delta=8$ için farklı zamanlardaki hataların karşılaştırılması

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ahlberg, J. H., Nilson, E. N. and Walsh, J. L., 1967, The theory of splines and their application, Academic Press.
- Al-Said, E. A. and Noor, M. A., 2003, Cubic splines method for a system of third boundary value problems, Applied Mathematics And Computations, 142, 195-204.
- Alberty J. P., Bona, J. L. and Henry, D. B., 1987, Sufficient conditions for stability of solitary wave solutions of model equations for long waves, Physica, 24 D, 343.
- Alexander, M. E. and Morris, J. L., 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, J. Comput. Physics, 30, 428-451.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, A Galerkin approach to the solution of Burgers' equation, UCNW Maths Pre-print, 90. 04.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, A collocation method for Burgers' equation using cubic splines, Comp. Meth. Eng., 325-337.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1992, A collocation method for Burgers' equation using cubic B-splines, Comput. Mech., 34, 256-270.
- Avilez-Valente, P. and Seabra-Santos, F. J., 2004, A Petrov -Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation, Computational Mechanics, 34, 256-318.
- Bateman, H., 1915, Some recent researches on the motion of fluids, Monthly Weather Rec., 43, 163-170.
- Ben-Yu, G. and Manoranjan, V. S., 1985, A spectral method for solving the RLW equation, IMA J. Numer. Anal., 5, 307-318.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J., 1972, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A272, 47-78.
- Bhardwaj, D. and Shankar, R., 2000, A computational method for regularized long wave equation, *Comput. Math. Appl.*, 40, 1397-1404.
- Bona, J. L. and Pylant, P. J., 1973, A mathematical model for long waves generated by wave makers in nonlinear dispersive systems, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 73, 391.
- Burger, J. M., 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. In App. Mech.* I, 171-199.
- Chang, Q., Wang, G. and Guo, B., 1995, Conservative scheme for a model of nonlinear dispersive waves induced by boundary motion, *J. Comput. Physics.*, 93, 360-375.
- Chen, H. and Zhang, H., 2004, New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos Soliton Fract.*, 19, 71-76.
- Cole, J. D., 1951, On a quasi-linear parabolic equation in aerodynamics, *Quarterly Of Applied Math.*, 9, 225-236.
- Çağal, B., 2000, *Sayısal Analiz*, Birsen Yayınevi, 501 s.
- Dağ, İ., 2000, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularized wave equation, *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 182, 205-215.
- Dağ, İ. and Özer, M. N., 2001, Approximation of RLW equation by the least square cubic B-spline finite method, *Applied Mathematical Modelling*, 25, 221-231.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Dağ, İ., Doğan, A. and Saka, B., 2003, B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, Intern. J. Computer Math., 80, 743-757.

Dağ, İ., Irk, D. and Saka, B., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, Appl. Math. Comput., 163, 199-211.

Dağ, İ., Irk, D. and Tombul, M., 2006, Least-squares finite element method for advection-diffusion equation, Appl. Math. Comput., 173, 554-565.

Dağ, İ., Saka, B. and Boz, A., 2006, B-splines Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation, Appl. Math. Comput., 166, 506-522.

Dağ, İ., Saka, B. and Irk, D., 2006, Galerkin Method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, Journal Of Computational And Applied Mathematics, 190, 532-547.

De Boor C.,1978, A practical guide to splines, Springer-Verlag, 392 p.

Doğan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, Comm. Numer. Methods Eng., 17, 485-494.

Doğan, A., 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, Applied Mathematical Modelling, 26 (7), 771-783.

Duran, A. and Lopez-Markos, M. A., Conservative numerical methods for solitary waves, Journal Of Physics A: Mathematical And General, 36, 7761-7770.

Eilbeck, J. C. and McGuire, G. R., 1975, Numerical study of the RLW equation 1: Numerical methods, J. Comput. Physics., 19, 43-57.

Eilbeck, J. C. and McGuire, G. R., 1975, Numerical study of the RLW equation 2: Interaction of solitary waves, J. Comput. Physics., 23, 63-73.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- El-Wakil, S. A. and Abdou, M. A., 2007, Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equation, *Chaos Soliton Fract*, 31, 1256-1264.
- El-Danaf, T. S., 2008, Quartic nonpolynomial spline solution for third order two-point boundary value problem, *Proceedings Of World Academy Of Science, Engineering and Technology*, 35, 2070-3740.
- Evans, D. J. and Abdullah, A. R., 1984, The group explicit method for the solution of Burgers' equation, *Computing*, 32, 239-253.
- Fahmy, H., 2008, Travelling wave solutions for some time-delayed equations through factorizations, *Chaos Soliton Fract*, 38, 1209-1216.
- Fisher, R. A., 1937, The wave of advance of advantageous genes, *Ann Eugenics*, 7, 353-369.
- Fletcher, C. A. J., 1983, A comparison of finite element and finite difference solutions of the one-and two-dimensional Burgers' equations, *Jour. Comp. Physics*, 51, 159-188.
- Ganji, D. D., Ganji, S. S., Karimpour, S. and Ganji, Z. Z., 2008, Numerical study of homotopy-perturbation method applied to Burgers equation in fluid, *Wiley InterScience*, 10. 1002.
- Gardner, L. R. T. and Gardner G. A., 1990, Solitary wave of the regularized long wave equation, *J. Comput. Phys.*, 91, 441-459.
- Gardner, L.R.T. and Dağ, İ., 1994, A numerical solution of the advection-diffusion equation using B-spline finite element, *Proceedings Intern. AMSE Conference Systems Analysis, Control & Design Lyon*, 1, 109-116.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Dağ, İ., 1995, A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 11, 59-68.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Gardner, L. R. T. and Dağ, İ., 1995, The boundary-forced regularised long wave equation, *Il Nuova Cimento*, 110, 1487-1496.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme of the RLW equation, *Communications In Numerical Methods In Engineering*, 12 (11), 795-804.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A. and Ameen, N. K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, *Comput. Methods In Appl. Mech. Eng.*, 147, 147-152.
- Golbabai, A. and Javidi, M., 2007, A spectral domain decomposition approach for the generalized Burger's-Fisher equation, *Chaos Soliton Fract*, 10. 1016.
- Göttingen, G. R. and Göttingen, G. L., 2004, A stabilized three-field formulation for advection-diffusion equations, *Computing*, 73, 155-178.
- Guo, B. and Cao W., 1988, The fourier pseudospectral method with a restrain operator for the RLW equation, *J. Comput. Physics*, 74, 110-126.
- Holly Jr, F.M. and Preissmann, A., 1977, Accurate calculation of transport in two dimensions, *J. Hydraulics Division*, 103,1259-1277.
- Hopf, E., 1950, The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure App. Math.*, 3, 201-230.
- Iskandar, L. and Mohsen, A., 1992, Some numerical experiments on the splitting of Burgers' equation, *Num. Meth. Par. Diff. Eq.*, 8, 267-276.
- Islam, S. U., Noor, M. A., Tirmizi I. A. and Khan M. A., 2006, Quadratic non-polynomial spline approach to a system of second-order boundary-value problems, *Apppl. Math. Comput.*, 179, 153-160.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Islam, S. U., Tirmizi, I.A. and Khan, M.A., 2007, Quartic non-polynomial spline approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 335, 1095-1104.
- Ismail, H. N. A., 2004, A restrictive Padé approximation for the solution of the generalized Fisher and Burgers-Fisher equations, *Appl. Math. Comput.* ,154, 203-210.
- Ismail, H. N. A., Raslan, K. and Rabboh, A. A. A., 2004, Adomian decomposition method for Burgers-Fisher equations, *Appl. Math. Comput.* ,159, 291-301.
- Jain, P. C. and Holla, D. N., 1978, Numerical solutions of coupled Burgers' equations, *Int. J. Non-linear Mech.*, 13, 195-201.
- Jain, P. C. and Lohar, B. L., 1979, Cubic spline technique for coupled non-linear parabolic equations, *Comp. math. With Appl.*, 5, 179-185.
- Jain, P. J. and Iskandar, L., 1979, Numerical solution of the regularised long wave equation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 20, 195-201.
- Jain, P. C., Shankar, R. and Singh, T. V., 1993, Numerical solution of RLW equation, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 9, 579-586.
- Javidi, M., 2006, Spectral collocation method for the solution of the generalized Burger-Fisher equation, *Appl. Math. Comput.*, 174, 345-352.
- Kalashnikova, I., Farhata, C. and Tezaurc, R., 2009, A discontinuous enrichment method for the finite element solution of high Péclet advection-diffusion problems, *Finite Elements In Analysis And Design*, 45, 238-250.
- Karahan, H., 2006, Implicit finite difference techniques for the advection-diffusion equation using spreadsheets, *Adv. Eng. Softw.*, 37, 601-608.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Kaya, D. and El-Sayed, S. M., 2004, A numerical simulation and explicit solutions of the generalized Burger-Fisher equation, *Appl. Math. Comput.*, 152, 403-413.
- Kumar, M. and Srivastava, P.K., 2008, Computational techniques for solving differential equations by quadratic, quartic and octic spline, *Adv. Eng. Softw.*, 39, 646-653.
- Kutluay, S. Bahadır, A. R. and Özdeş, A., 1999, Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: Explicit and exact-explicit finite difference methods, *J. Comp. App. Maths.*, 103, 251-261.
- Kutluay, S., Esen, A. and Dağ, İ., 2004, Numerical solution of the Burgers' equation by the least squares quadratic B-spline finite element method, *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21-33.
- Kutluay, S., and Esen, A., 2006, A finite difference solution of regularized long-wave equation, *Mathematical Problems In Engineering*, 1-14.
- Lin, Q. and Ying, L. A., 2009, Interval inclusion computation for the solutions of the Burgers' equation, *Siam J. Numer. Anal.*, 47, 2496-2517.
- Luo, Z. and Liu, R., 1998, Mixed finite element analysis and numerical solitary solution for the RLW equation, *SIAM. J. Numer. Anal.*, 36, 89-104.
- Luo, Z., Zhou, Y. and Yang, X., 2009, A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burgers equation, *Applied Numerical Mathematics*, 59, 1933-1946.
- Moghimi, M. and Hejazi, F. S. A., 2007, Variational iteration method for solving generalized Burger-Fisher and Burger equations, *Chaos Soliton Fract*, 33, 1756-1761.
- Nguyen, H. and Reynen, J. A., 1982, A space-time finite element approach to Burgers' equation, *Numerical Methods For Non-Linear Problems*, 718-28.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Noor, M. A. and Al-Said, E. A., 2004, Quartic spline solutions of third order obstacle boundary value problems, *Applied Mathematics And Computations*, 153, 307-316.
- Olver, P. J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 143-159.
- Öziş, T. and Erdoğan, U., 2009, An exponentially fitted method for solving Burgers' equation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 79, 696-705.
- Padam, D. H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid. Mech.*, 25 (2), 321-330.
- Peregrine, D. H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid. Mech.*, 25(2), 321-330.
- Ramadan, M. A., Lashien, I. F. and Zahra, W. K., 2007, Polynomial and nonpolynomial spline approaches to the numerical solution of second order boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, 184, 476-484.
- Ramadan, M. A., Lashien, I. F. and Zahra, W. K., 2008, High order accuracy non-polynomial spline solutions for 2μ th order two boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, 204, 920-927 .
- Ramadan, M.A., Lashien, I.F. and Zahra, W.K., 2009, Quintic nonpolynomial spline solutions for fourth order two-point boundary value problem, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1105-1114.
- Rashidinia, J., Mohammadi, R. and Jalilian, R., 2006, Spline methods for the solution of hyperbolic equation with variable coefficients, *Wiley InterScience*, 23, 1411-1419.
- Rashidinia, J., Jalilian, R. and Kazemi, V., 2007, Spline methods for the solutions of hyperbolic equations, *Appl. Math. Comput.*, 190, 882-886.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Rashidinia, J. and Mohammadi, R., 2008, Non-polynomial cubic spline methods for the solution of parabolic equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 85, 843-850.
- Raslan, K. R., 2005, A computational method for the RLW equation, *Appl. Math. Comput.*, 167, 1101-1118.
- Saka, B. and Dağ, İ., 2005, Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation, *Chaos, Soliton And Fractals*, 32, 1125-1137.
- Santerelli, A. R., 1978, Numerical analysis of the regularized long-wave equation: Anelastic collision of solitary waves, *Il Nuova Cimento*, 46 B, 179-188.
- Sanz Serra, J. M. and Petrov, I. C., 1981, Galerkin methods for non linear dispersive wave, *J. Comput. Physics*, 39, 94-102.
- Sarı, M., Gürarşlan, G. and Dağ, İ., 2008, A compact finite difference Method for the solution of the Generalized Burgers-Fisher equation, *Wiley INterScience*, 10. 1002.
- Scheid, F., 1988, *Nümerik analiz*, (Çev. H. H. Hacısalihoğlu, A. Köksal), Nobel Yayın Dağıtım Ltd. Şti., 470 s.
- Schumaker, L. L., 1993, *Spline functions: basic theory*, Krieger Publishing Company, 553 p.
- Sloan, D. M., 1991, Fourier pseudospectral solution of the regularized long wave equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 36, 159-170.
- Szymkiewicz, R., 1993, Solution of the advection-diffusion equation using the spline function and finite elements, *Commun. Numer. Math. En.*, 9, 197-206.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Şahin, A., Dağ, İ. and Zorşahin, M., 2009, Numerical solution of the advection-diffusion equation by using non-polynomial splines. (unpublished)
- Şahin, A., 2009, Non-polynomial spline based method for the RLW equation. (unpublished)
- Torrilhon, M. and Xu, K., 2006, Stability and consistency of kinetic upwinding for advection-diffusion equations, IMA Journal Of Numerical Analysis, 26, 686-722.
- Tsai, T.L., Chiang, S.W. and Yang, J.C., 2006, Examination of characteristics method with cubic interpolation for advection-diffusion equation, Comput. Fluids, 35, 1217-1227.
- Türker, E. S. ve Can, E.,1997, Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri, 479 s.
- Uzun, İ., 2000, Nümerik analiz, Beta Basım Yayım Dağıtım A. Ş.,303 s.
- Wanga, C. C., Lin, D. T. W. and Huc H. P., 2009, Error analysis of approximate solutions of non-linear Burgers' equation, Applied Mathematics and Computation, 212, 387–395.
- Wazwaz, A. M., 2005, The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equations, Appl. Math. Comput. ,169, 321-338.
- Wazwaz, A. M., 2007, The tanh-coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations, Appl. Math. Comput., 188, 1467-1475.
- Witek, M. L., Teixeira, J. and Flatau, P. J., 2008, On stable and explicit numerical methods for the advection-diffusion equation, Mathematics And Computers In Simulation, 79, 561-570.
- Zaki, S. I., 2000, A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation, Comput. Method. Appl. Engrg., 188, 121-134.