Bölüm 1

1 İzoperimetrik Teorem Üzerine

1.1 Giriş

İzoperimetrik eşitsizlik oldukça eski bir problemdir. Teoremin adı Yunancadan gelir. “isos = aynı” , “peri = etrafında” ve “metron = ölçü” anlamındadır. Çevre (= “peri”+ “metron”) 2-boyutlu kapalı bir bölgenin sınırı boyunca yay uzunluğudur. Dolayısıyla teorem aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller ile ilgilidir.

İzoperimetrik teorem şu şekilde ifade edilebilir :

“ Aynı çevreye sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir ”. Başka bir deyişle:

“ Aynı alana sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en küçük çevreye sahip olan çemberdir ”.

Teorem M.Ö.900’ lü yıllardan beri bilinmektedir. Prenses Dido’nun hikayesinde [1] teorem ile ilgili bir uygulama bulunmuştur.

Prenses Dido, şimdilerde Lübnan olarak adlandırılan Tyrus dolaylarında prenses idi. Ancak babasının ölümünden sonra erkek kardeşi Prenses Dido’ yu ülkesinden sınır dışı etti. Prenses de, halkı ile birlikte Kuzey Afrika’ da bugün Tunus'un olduğu yerde bulunan Carthage'e gitti ve buranın hükümdarı King Jambas'dan bir arsa almak istedi. Ancak onlar Dido' nun gücünden korktukları için tüm araziyi alacağını düşündüler. Kral Jambas, Prensese zekice bir teklif sundu. Buna göre, Prensese bir boğa verildi ve bu boğanın derisiyle çevreleyebileceği araziyi alabileceği söylendi.

Kralın zekice olduğunu düşündüğü bu teklifi Prenses kabul etti ve dahiyane bir buluş ile herkesi şaşırtacak bir alan elde etti. Prenses, öncelikle boğanın derisini ince şeritlere böldü. Dido, Akdeniz kıyısını bir doğru kabul ederek elde ettiği şeridi bu doğrunun iki ucuna bağladı ve şeridi yarım çember haline getirdi. Böylece Prenses, alabileceği en büyük alanı elde etti. Hikayeye göre, Prenses Dido 8 ile 32 *hektar* arası toprak kazandı (1 *hek* = 10.000 m^2). Dido, şeridi maksimum alanı kaplayacak şekilde arsaya yerleştirdi ve böylece farkında olmadan izoperimetrik teoremi çözdü!

Şimdi, Prenses Dido'nun bu gerçek hikayesini biraz sayısal değerlerle anlamaya çalışalım. Prenses tarafından kullanılan şeritlerin uzunluğunu tahmin etmeye çalışalım.

Farz edelim ki, bir boğanın vücudunun çapı 100 *cm* ve boyu 200 *cm* olan bir silindir olsun. Prenses Dido tarafından kullanılan şeritlerin eni 0.5 *cm* yi geçmediğinden, sabit 0.5 *cm* genişliği için şeritlerin uzunluğunu tahmin edilebilir. Silindir şeklindeki boğayı kullanarak, bir şeridin uzunluğu 1.257 *m* olur.

Şimdi 1.257 *m* uzunluğundaki bir şerit için alıştırma yapalım. Eğer şerit bir çember etrafında toprağa yerleştirilirse 12.6 *hektar* yer kaplar. Eğer şerit bir kare içine yerleştirilirse 9.9 *hektar* yer kaplar. 200×428.5 ve 100×528.5 *m* boyutlarındaki dikdörtgenler ise sırasıyla 8.6 ve 5.3 *hektar* yer kaplarlar.

Bizim 1.257 *m* lik şeridimiz, 25.1 *hektar* lık bir arazi oluşturur ki bu da istediğimiz değer aralığındadır.

1.2 Biraz Matematik

Teoremi Şekil 1 deki gibi bir dikdörtgen ve bir çember için gösterelim. Bu gerçek bir matematiksel ispat olmayacak ancak, bu örnek yardımı ile teorem açıklanmış olacaktır.

Şekil 1

Dikdörtgenin alanı,

$$A(D) = ab \tag{1}$$

ile ve çemberin alanı,

$$A(\text{Ç}) = \pi r^2 \tag{2}$$

ile hesaplanır.

Eğer bu şekiller eşit alanlara sahip iseler (1) ve (2) den;

$$A(D) = A(\text{Ç})$$

$$a.b = \pi r^2 \tag{3}$$

eşitliği sağlanır. r için (3) eşitliği çözülürse,

$$r = \sqrt{ab \ / \ \pi} \tag{4}$$

elde edilir. Diğer taraftan çemberin çevresi,

$$P(\text{Ç}) = 2\pi r$$

olduğundan (4) kullanılarak,

$$P(\text{Ç}) = 2\sqrt{\pi ab}$$

eşitliği elde edilir.

İzoperimetrik teoremin ispatı için, çemberin çevresi P(Ç) nin dikdörtgenin çevresi $P(D) = 2(a+b)$ den daha küçük olduğu gösterilmelidir. Bu nedenle çözülmesi gereken eşitsizlik,

$$P(\text{Ç}) \;\; < \;\; P(D)$$

dir. Ya da,

$$2\sqrt{ab\pi} \; < \; 2(a+b)$$

dir. Burada,

$$x, y \; > \; 0, \, x \; < \; y \; \Rightarrow \; x^2 \; < \; y^2 \tag{5}$$

olduğu kullanılarsa,

$$\pi ab \; < \; (a+b)^2 \tag{6}$$

eşitsizliği bulunur. (6) eşitliği düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \pi ab \;\; &< \;\; a^2 + 2ab + b^2 \\ \pi ab - 2ab \;\; &< \;\; a^2 + b^2 \\ (ab)\,(\pi - 2) \;\; &< \;\; a^2 + b^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$v, x, y, z \; > \; 0, \quad x \; > \; (z.y) \; ve \; v \; < \; z \Longrightarrow x \; > \; (v.y) \tag{7}$$

ve

$$2 \ > \ (\pi - 2) \tag{8}$$

olduğundan,

$$a^2 + b^2 \ > \ 2\ (ab)$$

eşitsizliği ispatlanır.

Dikdörtgen için $a > b$ olsun (aksi halde bu bir kare olur). $k > 0$ olmak üzere $a = b + k$ yazılabilir, bu durumda

$$a^2 + (a-k)^2 \ > \ 2a(a-k)$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlikten her $k > 0$ için $k^2 > 0$ elde edilir. Böylece bu eşitsizlik geçerlidir. Yani çemberin çevresi aynı alana sahip dikdörtgenin çevresinden daha küçüktür.

Şimdi teoremi alternatif bir formülasyon ile ispatlayalım. Eğer,

$$P(\text{Ç}) = P(D) \implies A(D) \ < \ A(\text{Ç})$$

dir.

Sonuç olarak, ispatın başlama noktası,

$$2\pi r = 2(a+b) \tag{9}$$

dir. (9) dan,

$$r = \frac{a+b}{\pi}$$

elde edilir. A(Ç) yi, a ve b yi kullanarak tekrar yazarsak,

$$\frac{(a+b)^2}{\pi} \ > \ ab$$

elde edilir. Yani,

$$(a+b)^2 \ > \ (\pi ab)$$

elde edilir ki bu önceden ispatlanmıştı.

Böylece çemberin alanı aynı çevreye sahip olan dikdörtgenin alanından daha büyüktür.

1.3 İzoperimetrik Teoreme Farklı Yaklaşımlar

İzoperimetrik teoremin pek çok farklı ispatı verilmiştir. Biz burada birkaç ilginç ispat vereceğiz. Son bölümde ise kendi ispatımızı yapacağız.

1.3.1 İzoperimetrik Eşitsizlik

İzoperimetrik teorem, genellikle düzlemde kapalı bir eğrinin çevre ve alanını ilişkilendiren bir eşitsizlik ile ifade edilir [6].

Teorem: L, düzlemde kapalı bir eğrinin çevresi ve A da eğri tarafından çevrelenen bölgenin alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} 4\pi A &\leq L^2 \\ \frac{L^2}{A} &\geq 4\pi \end{aligned}$$

dir. Eşitlik ise ancak kapalı eğrinin çember olması durumunda geçerlidir.

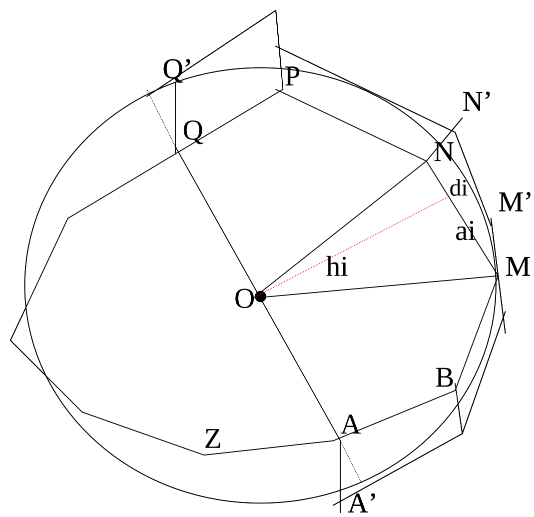
İspat: ABM...Z bir poligon (çokgen) olmak üzere, poligon içindeki AQ doğrusu poligonu öyle iki eşit parçaya böler ki,

$$AB \ + \ BM \ + ... + \ PQ \ = \ \frac{1}{2}$$

A(ABM...PQA)= A_1 için $A_1 \geq \dfrac{A}{2}$ dir.

O, AQ nun orta noktası, M ise ABM...PQA nın O ya en uzak noktası, OM = R olmak üzere (O, R) çemberini çizelim.

A ve Q dan OM ye çemberin A′, Q' noktalarıyla kesişen dikeyler çizelim.



Şekil 2

Simetriden dolayı S=Alan (AA′$MQ'QA$) alanı, çemberin alanının yarısına eşittir. Yani,

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2$$

ABM...PQ çokgeninin dışı çembere değecek şekilde temel kenarları MN=a_i ve diğer kenarlarda AA′ ye paralel olacak şekilde paralelkenarlar kurar.

OMN nin yüksekliği h_i ve MM′N′N paralelkenarının yüksekliği d$_i$ olmak üzere,

$$h_i + d_i = R$$

dir. Ayrıca, A_1 , OAB, ... , OMN , ..., OPQ üçgenlerinin alanlarının toplamına eşittir. Dolayısıyla,

$$A_1 = \frac{1}{2}\sum_i a_i h_i$$

olur.

A_2, paralelkenarların alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_2 \;=\; \textstyle\sum_i a_i d_i &= \textstyle\sum_i a_i (R - h_i) \\ &= \textstyle\sum_i a_i R - \sum_i a_i h_i \\ &= R\textstyle\sum a_i - \sum a_i h_i \\ &= R\frac{L}{2} - 2A_1 \end{aligned}$$

bulunur.

$$A_1 + A_2 \geq S$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &\geq \frac{1}{2}\pi R^2 \\ A_2 &= R\frac{L}{2} - 2A_1 \end{aligned}$$

ifadesi yerine konursa,

$$\begin{aligned} A_1 + R\frac{L}{2} - 2A_1 &\geq \frac{1}{2}\pi R^2 \\ R\frac{L}{2} - A_1 &\geq \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 - LR + 2A_1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \pi(R - \frac{L}{2\pi})^2 - (\frac{L^2}{4\pi} - 2A_1) \leq 0 \\ L^2 &\geq 4\pi 2A_1 \geq 4\pi A \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

bulunur.

Çember için eşitsizlik, eşitliğe dönüştüğünden; sabit P çevresine sahip bütün kapalı eğriler içinde en büyük alana sahip olan çemberdir sonucuna varılır.

1.3.2 İzoperimetrik Teorem ve Eşitsizlik

İfade 1: Aynı çevreye sahip olan bütün düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir.

İfade 2: Aynı alana sahip olan bütün düzlemsel şekiller arasında en küçük çevreye sahip olan çemberdir.

İzoperimetrik Eşitsizlik: L ve A düzlemsel bir şeklin sırasıyla çevresi ve alanı olmak üzere;

$$\begin{aligned} 4\pi &\leq \frac{L^2}{A} \\ 4\pi A &\leq L^2 \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$4\pi A = L^2 \tag{10}$$

durumu ise sadece çember için geçerlidir. O halde P yi sabit tutarak ifade 1 i, A yı sabit tutarak ifade 2 yi elde ederiz. İzoperimetrik eşitsizliği daha yüksek boyutlu uzaylara taşıyarak genelleştirebiliriz. Örneğin, S ve V üç - boyutlu bir cismin sırasıyla yüzey alanı ve hacmi olmak üzere;

$$36\pi V \leq S^3$$

dir.

Aslında ifade 1 in çözümünde çember elde etmek oldukça tatmin edicidir. Çünkü çember yuvarlaklığı ile tektir ve merkezinden geçen her doğruya göre simetriktir. Çember mükemmel bir şekildir, dolayısıyla da İzoperimetrik Teoremi sağlayabilecek iyi bir adaydır. Poligonlar ise çemberlere göre daha az düzgün olduklarından, teoremin çözümü için de iyi bir aday değillerdir. Her poligon ailesinde diğerlerine göre daha az kusurlu bir eleman olduğundan, bu " daha az kusurlu şekil " izoperimetrik şartları sağlar [5].

1- Aynı çevreye sahip bütün üçgenler arasında, en büyük alana sahip olan eşkenar üçgendir.

2- Aynı çevreye sahip bütün dörtgenler arasında, en büyük alana sahip olan karedir.

3- Özel olarak, aynı çevreye sahip bütün dikdörtgenler arasında, en büyük alana sahip olan karedir.

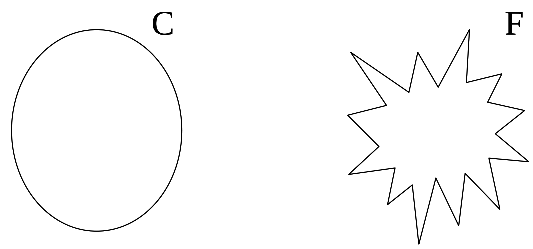
4- Aynı çevreye sahip olan sonlu kenar sayılı düzgün poligonlar arasında en büyük alanı en fazla kenar sayısına sahip olan kapsar.

5- Alan verildiği takdirde yukarıdaki her ifadenin tersi de geçerlidir.

6- Sabit bir uzunluğa ve sabit uç noktalara sahip tüm düzlemsel eğriler arasında en büyük alanı dairesel bir eğri kapsar.

İspat: İfade 1 i A ile ve ifade 2 yi B ile gösterelim.

Öncelikle A nın doğru olduğunu farz edelim ve B yi ispatlayalım. Bunun için B nin yanlış olduğunu kabul edelim. O halde verilen bir C çemberi ile aynı alana ve daha küçük çevreye sahip bir F düzlemsel şekli vardır.



Şekil3

Matematiksel olarak;

$$A(C) = A(F) \implies P(F) \leq P(C)$$

dir.

F ile aynı çevreye sahip başka bir D çemberini ele alalım. Çemberin çevresi ile alanı doğru orantılı ve

$$P(D) = P(F) \leq P(C)$$

olduğundan D çemberinin alanı C çemberinin alanından daha küçük olur. Yani,

$$P(D) = P(F)$$

iken

$$A(D) \leqslant A(F)$$

olur. Bu ise A ifadesi ile çelişir. O halde;

$$A \Rightarrow B$$

dir.

Şimdi de B nin doğru olduğunu farz edelim ve A nın da doğru olduğunu gösterelim. Bunun için A nın yanlış olduğunu kabul edelim.

O halde verilen bir C çemberi ile aynı çevreye ve daha büyük alana sahip olan bir F düzlemsel şekli vardır.

$$P(C) \ = \ P \ (\ F \ )$$

iken

$$A \ (\ F \ ) \ \geq A \ (\ C \ )$$

dir.

F ile aynı alana sahip başka bir D çemberini ele alalım. Çemberin çevresi ile alanı doğru orantılı ve

$$A \ (\ D \ ) \ = \ A \ (\ F \ ) \ \geq A \ (\ C \ )$$

olduğundan D çemberinin çevresi C çemberinin çevresinden daha büyük olur. Yani,

$$A \ (\ D \ ) \ = \ A \ (\ F \ )$$

iken

$$P \ (\ D \ ) \ \geq P \ (\ F \ )$$

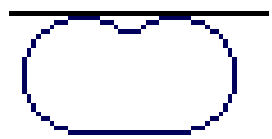
olur. Bu ise B ifadesi ile çelişir. O halde B doğru iken A da doğrudur.

$$B \Rightarrow A$$

dır.

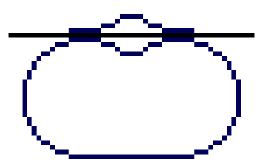
Şimdiye kadar A nın ya da B nin doğru olduğunu değil ancak ikisinin birlikte doğru ya da yanlış olduğunu göstermiş olduk. Böylece aşağıdaki ispatı inceleyelim.

İfade 1 in İspatı: İspat pek çok basamağı içerir. Öncelikle ifade 1 de çözülen şekle örnek olarak aşağıdaki konveks şekli ele alalım. Şekil üzerindeki X ve Y noktalarından geçen doğruyu eksen kabul ederek arada kalan parçayı yansıtalım.



Şekil 4

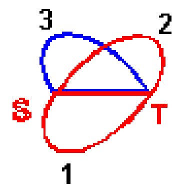
Elde edilen ikinci şeklin alanı daha büyüktür. O halde şeklin çevre uzunluğu değişmediği halde alanı büyütülebilir.



Şekil 5

İspatın ikinci adımında ise aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

Lemma 1: S ve T ifade 1 de çözülen şeklin sınırı üzerinde seçilmiş 2 nokta olsun ve çevreyi iki eşit parçaya ayırsınlar. O halde ST doğrusu şeklin alanını iki eşit parçaya ayırır.



İspat: S1T nin alanının T2S den büyük olduğunu varsayalım. ST yi eksen kabul ederek S1T2 ile aynı çevreye fakat daha büyük alana sahip S1T3 elde edilir.

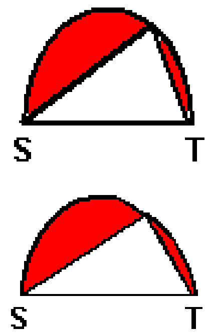
Bu ispat aşağıdaki sorunun kısmen çözümünde yeterli olacaktır.

“ Verilen bir uzunluğa ve ST gibi bir doğru üzerindeki uç noktalara sahip olan bütün yaylar arasında en büyük alanı çevreleyeni bulunuz”.

Lemma 2: ST doğrusu üzerinde verilen bir uzunluğa ve uç noktalara sahip bütün yayları düşünelim. Yay ile doğru arasında maksimum alana sahip olan bir yarım çemberdir.

İspat: Çemberde çapı gören çevre açı dik açıdır, buradan en büyük alana sahip olan yay içine çizilen üçgenin dik olduğunu gösterilirse, bu yayın bir yarım çember olduğu ispatlanır. Eğer yay içine çizilen bu üçgen dik değilse S nin noktaları kaydırılarak üçgen dikleştirilir. Böylece yayın bir kısmının yeri değiştirilmiş olur.

Ayrıca iki kenarı verilen bütün üçgenler içinde en büyük alana sahip olan dik açı oluşturandır. Buradan şekillerde taralı alanlar değişmediği halde üçgenin alanı ve ST doğrusu ile yeni yay arasındaki toplam alanın arttığı görülür. Öyle ise, verilen eğri bir yarım çember olana dek alanı her zaman S ve T yi hareket ettirerek artırılabilir. Bu ise Lemma 2 ile birlikte ifade 1 i de ispatlar.



Şekil 7-Şekil 8

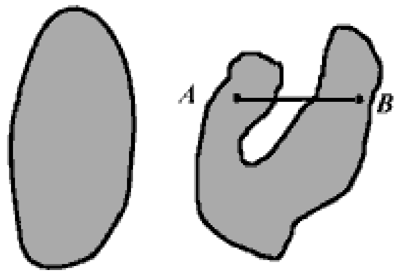
Ancak ifade 1 in ispatı bir hatayı da içerir, çünkü her üç adımda da şartlara uyan bir şekil olduğunu kabul ettik ve lemmaları bu varsayımlar altında ispatladık. Aynı çevreye sahip bütün düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip bir şekil olduğunu farz ettik. Bu varsayım altında bu şeklin çember olduğunu ispatladık. H$\Longrightarrow A$ gibi bir H hipotezinin varlığına dikkat edelim. Öyle ki A yı ispatlamak için H nın doğru olduğunu göstermeliyiz.

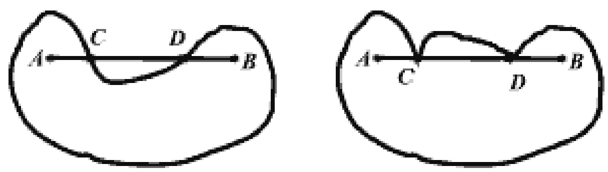
İfade 1 için optimal bir şeklin varlığı açık değildir. Örneğin, eğer ifade 1 verilen bir çevre için en küçük alana sahip olan şekli tanımlamamızı gerektirseydi bunu gösteremezdik. Ancak bu ispatı gerçekten tamamlamamız için daha az önemli bir noktadır. H nın ispatı ise oldukça basit fakat Calculus un temel elemanlarını gerektirmektedir.

1.3.3 Kosinüs Teoremi Yardımı ile İspat

Şimdi yapacağımız ispatın pek çok basamağı vardır [4]. İspata bir büyük varsayımla başlayalım:

“ Aynı çevreye sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan bir şekil kesinlikle vardır. ”





1.Adım : Aşağıdaki iki eğriyi ele alalım. Soldaki eğri konveks bir eğridir, öyle ki eğri içinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru yine eğri içindedir. Sağdaki eğri ise bu şartı sağlamadığından konveks değildir.

İspatın birinci adımında çevreler eşit iken maksimum alana sahip olan şeklin konveks olduğu gösterilir.

Şekil 9

Yukarıda gösterildiği gibi konveks olmayan bir şekil alalım. Şeklin C ve D noktalarında geçen bir AB doğrusu çizelim. C ve D arasında kalan eğri parçası yansıtılırsa, aynı çevreye sahip yeni bir şekil elde edilir. Ancak bu yeni şeklin alanı artmış olur. Bu işlem şekil konveks olana kadar tekrar edilebilir.

Böylece şu sonuca varılır:

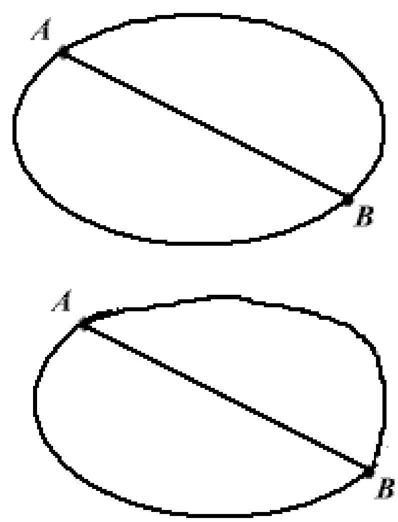
“ Verilen bir çevre için maksimum alana sahip olan şekil konvekstir. ”

Şekil 10

2.Adım: Bu adımda ise maksimum alana sahip olan şeklin çapına göre simetrik olduğunu göstereceğiz.

Herhangi bir S konveks şeklini ve şeklin çevresi üzerinde bir A noktasını alalım. A dan yarım çevre uzaklığında bir B noktası daha alalım ve bu noktaları birleştirelim

Böylece AB doğrusu S şeklini aynı çevreye sahip olan S1 ve S2 gibi iki ayrı parçaya bölen bir çap olur.



Şekil 11-12

Varsayalım ki S1 in alanı S2 nin alanından daha büyük olsun. Yukarıdaki şekildeki gibi S1 i yansıtalım. Oluşan yeni şekil AB çapına göre simetriktir ve toplam alanı

$$2S1 > S1 + S2 = S$$

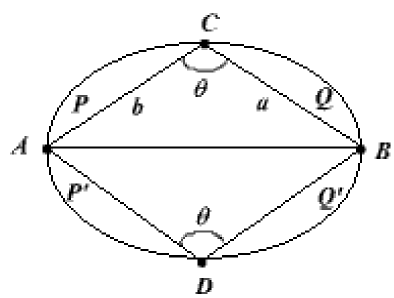
dir. $S1$ ve $S2$ aynı çevrelere sahip olduğundan bu iki şeklin çevreleri de birbirine eşittir. Ancak simetrik olan şeklin alanı orjinal şeklin alanından büyüktür.

A, S şeklinin çevresi üzerinde herhangi bir nokta olduğundan, şu genellemeye varılır:

" En büyük alana sahip olan şekil çapına göre simetrik olmalıdır. "

3.Adım: Bu adımda ise ACB açısının dik açı olmak zorunda olduğunu göstereceğiz.

S, AB çapına göre simetrik olan bir şekil; C, çevre üzerinde herhangi bir nokta ve D de AB doğrusuna göre onun yansımasıdır (öyle ki D noktası da AB simetri doğrusu olduğundan çevre üzerinde olmalıdır). Böylece şekli ACBD gibi bir uçurtma şekli ve P, Q ve simetrikleri olan P$'$ve Q' parçaları oluşturur.



Şekil 13

Parçalar değişik şekiller verecek şekilde dayanak noktalarından hareket ettirilebilirler. Ancak herbirinin çevresi orjinal şeklin çevresine eşittir.

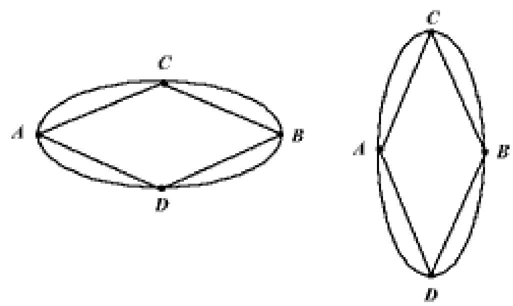
Tüm bu şekillerin alanı; P, Q, P$'$, Qparçalarının hareket ettirilmesiyle oluşan uçurtma şeklinin alanı ve alanlarında bir değişiklik olmayan dört parçanın alanlarının toplamına eşittir. ACBD nin alanı ise ACB değişken açısının ölçümü ile hesaplanır.

ACB açısına q diyelim, dolayısıyla,

$$A(ACBD) = ab \sin q$$

ya eşit olur. Bu alan ise ancak $\sin q$ nun maksimum olması ile maksimum olur ki bu da a va b değişmediğinden $q = p/2$ veya $90°$ olması ile mümkündür. Sonuç olarak:

"Maksimum alana sahip olan şekil, $90°$ lik ACB gibi bir açı ile elde edilir"



Şekil 14

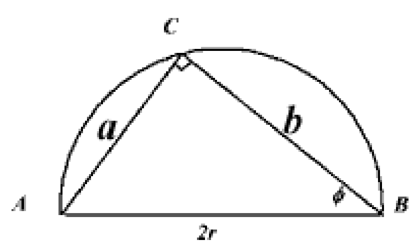
4.Adım: Şimdiye kadar verilen bir çevre için en büyük alana sahip olan şeklin, aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu gördük:

1) konvekstir,

2) bir çapa göre simetriktir,

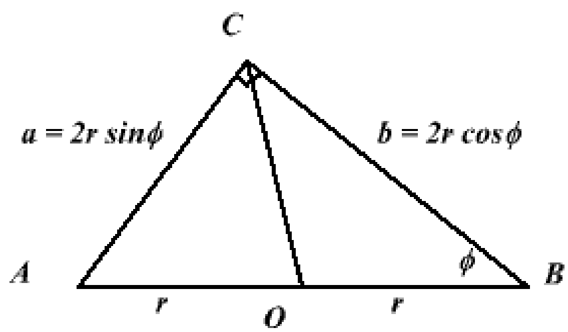
3) şeklin çevresi üzerinde herhangi bir nokta ve bir çap ile oluşturduğumuz üçgende çapı gören çevre açı diktir.

Bunlar da bize bu şeklin çember olmak zorunda olduğunu verir.



Şekil 15

C dik açısı olmak üzere ACB dik üçgenini ele alalım. AB istediğimiz gibi çaptan geçsin. $AB = 2r$, $AC = a$, $BC = b$ ve ABC açısı f olmak üzere kolayca trigonometrik bağıntılardan; $a = 2r\cos f$ ve $b = 2r\sin f$ dir.



Şekil 16

O, AB nin orta noktası ve $AO = BO = r$ olsun. ACB etrafındaki eğrinin dairesel olduğunu göstermek için $OC = r$ olduğunu göstermeliyiz.

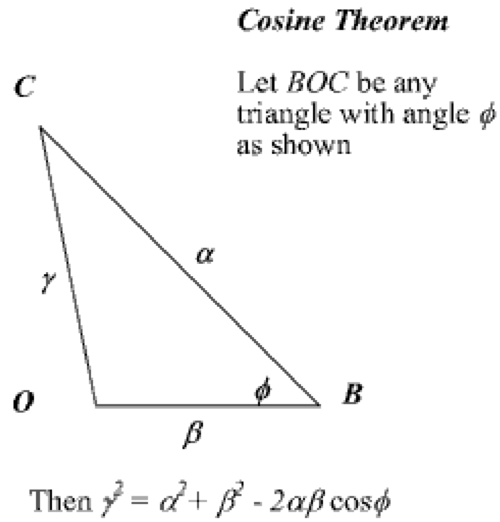
Aşağıda gösterilen kosinüs teoreminini BOC üçgenine uygulanırsa $b = r$ ve $a = 2r\cos f$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}(OC)^2 &= g^2 = r^2 + (2r\cos f)^2 - 2.2r\cos f.r\cos f \\ &= r^2 + 4r^2\cos^2 f - 4r^2\cos^2 f \\ &= r^2\end{aligned}$$

dir. Yani $OC = r$ dir.

Kosin**üsTeoremi**

BOC aşağıdaki gibi herhangi bir üçgen ve θ da bu üçgenin bir açısı olsun. Bu da OC nin uzunluğunun OA ve OB ye eşit olduğunu gösterir. C noktası şeklin dışında herhangi bir yerden seçilebilir ve böylece O noktasından şeklin çevresi üzerinde herhangi bir C noktasına olan uzaklık r ye eşittir.



Şekil 17

Sonuç olarak en büyük alanı veren şekil çemberdir.

1.3.4 Çubuk ve Yay Yardımıyla İspat

Problem: L uzunluğuna sahip bir yayın her iki ucu S uzunluğuna sahip bir çubuğa bağlansın. Bu şekilde oluşan bütün düzlemsel bölgeler arasında en büyük alana sahip olanı bulunuz.

İzoperimetrik Teorem: Verilen bir çevre için bütün düzlemsel bölgeler arasında alanı en büyük olan çemberdir.

Not: S=0 için problem özel bir duruma dönüşür.

Çözüm: $S>0$ için problemi bilinen bir hale getirmeye çalışalım. Polya' nın tümevarım ve Matematikte Analogy eserlerinden yararlanarak; Öncelikle çubuğu x-eksenine paralel olacak şekilde yerleştirelim. Çubuğun uç noktaları, çubuğun şeklini belirler. Yay pekçok şekil alabileceğinden, verilen bir çevre ile yay çubuğun uç noktalarına birleştirilirse keyfi bir eğri oluşur.

(Şekil 18)

Şekil 18

Oluşabilecek şekillerden biri ise; bir daire parçası ile çubuğu içeren dairesel bir yaydır. (Şekil 19)

Şekil 19

Şekil başka bir daire parçası ile tamamlanırsa, Şekil 20 ü elde edilir.

Şekil 20

Şekil 21

Öte yandan aynı daire parçası keyfi olarak oluşturulan başka bir şekle eklenirse Şekil 21 elde edilir.

Açıkça görülüyor ki Şekil 20 deki çember aynı çevreye sahip tüm eğriler içinde en büyük alana sahip olandır. Aynı daire parçası her iki şekilden de çıkarılırsa şu sonuca varılır; yay ve çubuk yardımıyla oluşturulan alan; Şekil 19 daki gibi çembersel bir yay ile maksimum olur.

1.3.5 Hurwitz in İspatı

İzoperimetrik eşitsizliğin modern analitik ispatı 1902de A. Hurwitz [3] tarafından yapılmıştır. İspat, R^2 de bir D bölgesinde C sınırı etrafnda (pozitif olarak yönlendirilmiş) bir doğru integrali ile verilen A alanının formülü kullanılarak yapılmıştır.

Doğru integralleri Riemann toplamlarının alışılmış limiti ile tanımlanmak üzere;

$$A = \int_c xdy = -\int ydx = \frac{1}{2}\int_c [xdy - ydx]$$

dir.

Basit bir c eğrisini, $a \leq t \leq b$ olmak üzere;

$$C : x = \ x(t), y = y(t)$$

ile parametrelendirirsek;

$$\int_c xdy = \int_a^b x(t)y^{'}(t)dt$$

$$\int_c ydx = \int_a^b y(t)x^{'}(t)dt$$

elde ederiz.

$V = (\ V^1, V^2)$, iken;

$$divV(\overleftrightarrow{x}, y) = V_x^1 + V_y^2$$

$\overrightarrow{n}$, C ye dış birim normal ve S yay uzunluğu olmak üzere, Divergence teoreminden A alanı için formüller aşağıdaki gibidir;

$$\int_D divV(\overrightarrow{x}, y)dxdy = \int_C \overrightarrow{V}\overrightarrow{n}ds$$

V= (x , y) seçersek $div\overrightarrow{V} = 2$ olur.

C için parametreler;

$$\overrightarrow{n} = \frac{(y'(t), -x^{'}(t))}{\sqrt{x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2}}$$

ve

$$ds = \sqrt{x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2}dt$$

olmak üzere A için formüller kolayca çıkarılabilir.

Hurwitz' in ispatında Wirtinger' in Eşitsizliği olarak bilinen ünlü eşitsizlik de kullanılmıştır.

Lemma: $f(t)$, C^1 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon ve averaj ;

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$$

olsun. O zaman;

$$f(t) = a\cos t + b\sin t$$

olmak üzere;

$$\int_0^{2\pi} f^{'}(t)dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

dir.

İspat: $f(t)$ yi Fourier serilerine genişletirsek;

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

($\frac{1}{2}$a$_0$ sabit terimi, averajın 0 olma şartından, 0' dır.)

O halde;

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

dir.

Porseval' ın formülünden,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ \int_0^{2\pi} f^{'}(t)^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)\end{aligned}$$

dir.

Buradan, her n> 1 için, a$_n = b_n = 0$ olmadıkça;

$$\int_0^{2\pi}(f^{'}(t)^2 f(t)^2)dt = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2)$$

kesinlikle pozitiftir. Bu ise lemmayı ispatlar.

Sadeleştirmek için C nin L uzunluğunu 2π kabul edelim. C yi çevirerek;

$$\int_0^{2\pi} x(t)ds = 0$$

olduğunu da kabul edebiliriz. O zaman;

$$2\pi = \int_0^{2\pi}((x^{'})^2+(y^{'})^2)ds$$

ve

$$A = \int_0^{2\pi} x(s)y^{'}(s)ds$$

dir.

Buradan;

$$\begin{aligned}2(\pi - A) &= \int_0^{2\pi}((x^{'})^2 - 2xy^{'} + (y^{'})^2)ds\\ &= \int_0^{2\pi}((x^{'})^2 - x^2))ds + \int_0^{2\pi}(x-y^{'})^2 ds\end{aligned}$$

elde edilir.

İlk integral lemmadan dolayı negatif değildir. Açıkça ikinci integralde negatif değildir.

Buradan;

$$4\pi A \leq (2\pi)^2 = L^2$$

izoperimetrik eşitsizliği çıkar.

Bölüm 2

2 Farklı Bir Yaklaşımla Teoremin İspatı

2.1 Bazı Düzlemsel Şekillerin Çember ile Karşılaştırılması

Teoremi ispatlamak için çemberi bazı düzlemsel şekillerle kıyaslayalım. Öncelikle eşkenar üçgen, dikdörtgen, kare, düzgün altıgen ve son olarak da elips ile çemberi kıyaslayalım. Daha sonra ise bu düzlemsel şekilleri kendi aralarında kıyaslayalım ki; kenar sayısı ve simetriklik arttıkça, çevreler eşit iken alanın büyüdüğünü ve alanlar eşit iken çevrenin küçüldüğünü görelim.

Problem 2.1: Eşkenar üçgenin çevresi ile çemberin çevresi eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin alanı, eşkenar üçgenin alanından büyüktür.

Eşkenar üçgenin kenarları a ve çemberin yarıçapı r olsun.

$$\begin{aligned} \mathrm{P(Ü)} &= 3a \\ \mathrm{P(Ç)} &= 2\pi r \end{aligned}$$

P(Ü)=P(Ç) olsun. O halde r= $\dfrac{3a}{2\pi}$ dir.Şimdi alanlarını kıyaslayalım;

$$\begin{aligned} A(\text{Ç}) - A(\ddot{U}) &= \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \\ &= \pi \frac{9a^2}{4\pi^2} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4}(\frac{9}{\pi} - \sqrt{3}) > 0 \end{aligned}$$

Yani; A(Ç) $> A(\ddot{U})$dir.

Problem 2.2: Eşkenar üçgenin alanı ile çemberin alanı eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin çevresi, üçgenin çevresinden küçüktür.

A(Ç)=A($\ddot{U}$)olsun.

O halde;

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \\ r^2 &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4\pi} \\ r &= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}} \end{aligned}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım,

$$\begin{aligned} (\mathrm{P}(\ddot{U}))^2 - (\mathrm{P}(\text{Ç}))^2 &= 9a^2 - 4\pi^2\frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \\ &= a^2(9-\sqrt{3}\pi) > 0 \end{aligned}$$

olur.Yani P(Ç) $<$ P(Ü)dir.

Problem 2.3: Dikdörtgenin çevresi ile çemberin çevresi eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin alanı, dikdörtgenin alanından daha büyüktür.

P(Ç)=P(D) olsun. O halde;

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 2(a+b) \\ r &= \frac{a+b}{\pi} \end{aligned}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım;

$$\begin{aligned} A(\text{Ç}) - A(D) &= \pi r^2 - ab \\ &= \pi\frac{(a+b)^2}{\pi^2} - ab \\ &= \frac{(a+b)^2 - \pi ab}{\pi} > 0 \end{aligned}$$

olur. Yani A(Ç) $> A(D)$ dir.

Lemma:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &> 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 &> 0 \\ a^2 + b^2 &> 2ab \end{aligned}$$

2>π-2olduğundan;

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &> 2ab & > (\pi-2)ab \\ a^2+b^2 &> (\pi-2)ab \\ a^2+b^2 &> \pi ab-2ab \\ (a+b)^2 &> \pi ab \end{aligned}$$

Problem 2.4: Çemberin ve dikdörtgenin alanları eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin çevresi, dikdörtgenin çevresinden küçüktür.

A(Ç)= $A(D)$ olsun

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= ab \\ r &= \sqrt{\frac{ab}{\pi}} \end{aligned}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım.

$$\begin{aligned} (\mathrm{P(D)})^2 - (\mathrm{P(Ç)})^2 &= (2(a+b))^2-(2\pi r)^2 \\ &= 4\left[(a+b)^2-\pi^2\frac{ab}{\pi}\right] \\ &= 4\left[(a+b)^2-\pi ab\right] > 0 \end{aligned}$$

Yani P(Ç) < P(D) dir.

Problem 2.5: Çember ile karenin çevreleri eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin alanı karenin alanından daha büyüktür.

P(Ç) =P(K) olsun

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 4a \\ r &= \frac{2a}{\pi} \end{aligned}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım.

$$\begin{aligned} A(\text{Ç}) - A(K) &= \pi r^2-a^2 \\ &= \pi\frac{4a^2}{\pi^2}-a^2 \\ &= a^2(\frac{4}{\pi}-1) > 0 \quad ;(a^2>0, \frac{4}{\pi}>1) \end{aligned}$$

Yani; A(Ç) $> A(K)$dir.

Problem 2.6: Çemberin alanı ile karenin alanı eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin çevresi karenin çevresinden küçüktür.

A(Ç)$= A(K)$ olsun.

$$\begin{aligned}\pi r^2 &= a^2\\ r &= \sqrt{\frac{a^2}{\pi}}\\ r &= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım,

$$\begin{aligned}(\mathrm{P(K)})^2 \quad - \quad (\mathrm{P(Ç)})^2 &= (4a)^2 - (2\pi r)^2\\ &= 16a^2 - 4\pi^2\frac{a^2}{\pi}\\ &= 4a^2(4-\pi) > 0 \quad ;(4 > \pi)\end{aligned}$$

Yani; P(Ç) $<$ P(K) dir.

Problem 2.7: Çember ile düzgün altıgenin çevreleri eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin alanı düzgün altıgenin alanından büyüktür.

P(Ç) =P(A)olsun.

$$\begin{aligned}2\pi r &= 6a\\ r &= \frac{3a}{\pi}\end{aligned}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım.

$$\begin{aligned}A(Ç) \quad - \quad A(A) &= \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\\ &= \pi\frac{9a^2}{\pi^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\\ &= 3a^2\left(\frac{3}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0\end{aligned}$$

Yani A(Ç) $> A(A)$dir.

Problem 2.8: Çember ile düzgün altıgenin alanları eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin çevresi, düzgün altıgenin çevresinden küçüktür.

A(Ç) = $A(A)$ olsun.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \\ r &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2\pi}} \end{aligned}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım;

$$\begin{aligned} (\mathrm{P}(\mathrm{Ç}))^2 - (\mathrm{P}(\mathrm{A}))^2 &= (2\pi r)^2 - (6a)^2 \\ &= 4\pi^2\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}a^2 - 36a^2 \\ &= 3a^2(2\sqrt{3}\pi - 12) < 0 \end{aligned}$$

Yani P(Ç) < P(A) dir.

Problem 2.9: Çemberin çevresi ile elipsin çevresi eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin alanı elipsin alanından büyüktür.

P(Ç) =P(E) olsun.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= \pi(a+b) \\ r &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım.

$$\begin{aligned} A(\mathrm{Ç}) - A(E) &= \pi r^2 - \pi ab \\ &= \pi\left[\frac{(a+b)^2}{4} - ab\right] \\ &= \pi\left[\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}\right] \\ &= \frac{\pi}{4}(a-b)^2 > 0 \end{aligned}$$

Yani; A(Ç) > $A(E)$

Problem 2.10: Çemberin ve elipsin alanları eşit olsun. Gösteriniz ki; çemberin çevresi, elipsin çevresinden küçüktür.

A(Ç)= $A(E)$ olsun.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \pi ab \\ r &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım.

$$\begin{aligned} (\mathrm{P(E)})^2 - (\mathrm{P((Ç)})^2 &= (\pi(a+b))^2 - (2\pi r)^2 \\ &= \pi^2((a+b)^2 - 4ab) \\ &= \pi^2(a-b)^2 > 0 \end{aligned}$$

Yani; P(Ç) $<$ P(E) dir.

2.2 Bazı Düzlemsel Şekillerin Kendi Aralarında Karşılaştırılması

Çemberi bazı düzlemsel şekillerle karşılaştırdık ve gördük ki; çevreler eşit iken çemberin alanı daha büyük oluyor ve alanlar eşit iken ise yine çemberin çevresi daha küçük oluyor. Şimdi bazı düzlemsel şekilleri kendi aralarında karşılaştıralım ve çembere nasıl ulaştığımızı görmeye çalışalım.

Problem 2.11: Eşkenar üçgen ile karenin çevreleri eşit iken, alanlarını karşılaştırınız.

P(Ü) = P(K) olsun.

$$\begin{aligned} 3b &= 4a \\ b &= \frac{4}{3}a \end{aligned}$$

Şimdi alanları karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} A(K) - A(\ddot{U}) &= a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \\ &= a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{16}{9} a^2 \\ &= a^2 (1 - \frac{4\sqrt{3}}{9}) > 0 \end{aligned}$$

Yani; A(K) > A(Ü).

Problem 2.12: Eşkenar üçgen ile karenin alanları eşit iken, çevrelerini karşılaştırınız.

A(Ü)=A(K) olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 &= a^2 \\ a &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} b^2} \\ a &= \frac{b}{2} 3^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Şimdi çevreleri karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} P(\ddot{U}) - P(K) &= 3b - 4a \\ &= 3b - 4\frac{b}{2} 3^{\frac{1}{4}} \\ &= b(3 - 2\ 3^{\frac{1}{4}}) > 0 \end{aligned}$$

Yani; P(Ü)>P(K) dır.

Problem 2.13: Dikdörtgen ile karenin çevreleri eşit iken, alanlarını karşılaştırınız.

P(D) =P(K) olsun.

$$\begin{aligned} 2(b + c) &= 4a \\ a &= \frac{b + c}{2} \end{aligned}$$

Şimdi alanları karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} A(K) \quad - \quad A(D) &= a^2 - bc \\ &= \frac{(b+c)^2}{4} - bc \\ &= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - 4bc}{4} \\ &= \frac{b^2 - 2bc + c^2}{4} \\ &= \frac{(b-c)^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

Yani; A$(K) > A(D)$

Problem 2.14: Alanları eşit olan dikdörtgen ile karenin çevrelerini karşılaştırınız.

A$(K) = A(D)$olsun.

$$\begin{aligned} a^2 &= bc \\ a &= \sqrt{bc} \end{aligned}$$

Şimdi çevreleri karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} \mathrm{P(D)} \quad - \quad \mathrm{P(K)} &= 2(b+c) - 4a \\ &= 2(b+c) - 4\sqrt{bc} \\ &= 2b - 4\sqrt{bc} + 2c \\ &= (\sqrt{2b} - \sqrt{2c})^2 > 0 \end{aligned}$$

Yani; P(K) $<$ P(D) dir.

Problem 2.15: Dikdörtgen ile düzgün altıgenin çevreleri eşit iken alanlarını karşılaştırınız.

P(A) =P(D) olsun.

$$\begin{aligned} 6a &= 2(b+c) \\ a &= \frac{b+c}{3} \end{aligned}$$

Şimdi alanları karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} A(A) - A(D) &= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - bc \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{(b+c)^2}{9} - bc \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)^2 - bc \\ &= \frac{\sqrt{3}(b+c)^2 - 6bc}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}b^2 + 2\sqrt{3}bc + \sqrt{3}c^2 - 6bc}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}(b^2+c^2) + bc(2\sqrt{3}-6)}{6} > 0 \end{aligned}$$

Yani; A$(A) > A(D)$ dir. Aynı sonucu Bir de Maple da görelim.

Problem 2.16: Dikdörtgen ile düzgün altıgenin alanları eşit iken çevrelerini karşılaştırınız.

A$(A) = A(D)$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 &= bc \\ a &= \sqrt{\frac{2bc}{3\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Sonucu Maple da görelim.

Problem 2.17: Kare ile düzgün beşgenin çevreleri eşit iken alanlarını karşılaştırınız.

P(K)=P(B)olsun.

$$\begin{aligned} 4a &= 5b \\ a &= \frac{5}{4}b \end{aligned}$$

Şimdi alanlarını karşılaştıralım.

r; düzgün beşgenin iç teğet çemberinin yarıçapı ve b; bir kenar uzunluğu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tan 54 &= \frac{2r}{b} \\ r &= \frac{b\tan 54}{2} \\ r &= \frac{b}{2}1,37 \end{aligned}$$

Buradan;

$$\begin{aligned} A(B) \quad - \quad A(A) &= \frac{5br}{2} - a^2 \\ &= \frac{5br}{2} - \frac{25b^2}{16} \\ &= \frac{40br - 25b^2}{16} \\ &= \frac{5b}{16}(8r - 5b) \\ &= (5,48b - 5b) > 0 \end{aligned}$$

Yani; A$(B) > A(K)$ dir. Aynı sonucu Maple da görmek istersek.

Problem 2.18: Kare ile düzgün beşgenin alanları eşit iken çevrelerini karşılaştırınız.

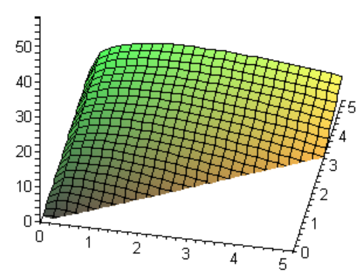
A$(K) = A(B)$ olsun.

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{5br}{2} \\ a &= \sqrt{\frac{5br}{2}} \end{aligned}$$

Şimdi çevrelerin karelerini karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} (\mathrm{P(K)})^2 - (\mathrm{P(B)})^2 &= (4a)^2 - (5b)^2 \\ &= 16\frac{5br}{2} - 5b \\ &= 40br - 5b \\ &= 40.b.\frac{b}{2}1,37 - 5b \\ &= 5b(5,48b - 1) > 0 \quad (b > 0,18248) \end{aligned}$$

Yani, P(B) $<$ P(K)dir.



Şekil 25

Problem 2.19: Kare ile düzgün altıgenin çevreleri eşit iken alanlarını karşılaştırınız.

P(K)=P(A) olsun.

$$\begin{aligned} 4a &= 6b \\ a &= \frac{6b}{4} \end{aligned}$$

Şimdi alanları karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} A(A) - A(K) &= \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 - a^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 - \frac{9}{4}b^2 \\ &= \frac{6\sqrt{3}b^2 - 9b^2}{4} \\ &= \frac{b^2(6\sqrt{3} - 9)}{4} \\ &= \frac{b^2}{4}(6.1,732 - 9) \\ &= \frac{b^2}{4}(10,392 - 9) \\ &= \frac{b^2}{4}1,392304 > 0 \end{aligned}$$

Yani; A$(A) > A(K)$dir.

Problem 2.20: Kare ile düzgün altıgenin alanları eşit iken çevrelerini karşılaştırınız.

A$(A) = A(K)$olsun.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 &= a^2 \\ a &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}b \end{aligned}$$

Şimdi çevreleri karşılaştıralım.

$$\begin{aligned}
P(K) \quad - \quad P(A) &= 4a - 6b \\
&= 4\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}b - 6b \\
&= b(4\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} - 6) \\
&= b(6,4474 - 6) \\
&= b.0,4474 > 0
\end{aligned}$$

Yani; P(A) $<$ P(K)dir.

Problem 2.21: Düzgün beşgen ile düzgün altıgenin çevreleri eşit iken alanlarını karşılaştırınız.

P(B) =P(A)olsun.

$$\begin{aligned}
5b &= 6a \\
b &= \frac{6}{5}a
\end{aligned}$$

Şimdi alanları karşılaştıralım. a, düzgün altıgenin bir kenar uzunluğu, b, düzgün beşgenin bir kenar uzunluğu ve r ise düzgün beşgenin iç teğet çemberinin yarıçapı olmak üzere;

$$\begin{aligned}
r &= \frac{b\tan 54}{2} \\
r &= \frac{6b.1,37}{10}
\end{aligned}$$

olmak üzere, alanları karşılaştıralım.

$$\begin{aligned}
A(A) \quad - \quad A/(B) &= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{5br}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - \frac{5}{2}\frac{6}{5}ar \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 - 3ar \\
&= 3a(\frac{\sqrt{3}}{2}a - r)
\end{aligned}$$

$$= \quad 3\text{a}(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{5}a1,37){>}0$$

Yani; A$(A) > A(B)$dir.

Problem 2.22: Düzgün beşgen ile düzgün altıgenin alanları eşit iken çevrelerini karşılaştırınız.

A$(B) = A(A)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{5br}{2} &= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \\
b &= \frac{3\sqrt{3}a^2}{5r}
\end{aligned}$$

Şimdi çevreleri karşılaştıralım.

$$\begin{aligned}
\text{P(B)} \quad - \quad \text{P(A)} &= 5b - 6a \\
&= 5\frac{3\sqrt{3}a^2}{5r} - 6a \\
&= \frac{3\sqrt{3}a^2}{r} - 6a \\
&= \frac{3\sqrt{3}a^2}{\frac{6}{10}a1,37} - 6a \\
&= \frac{5\sqrt{3}a}{1,37} - 6a \\
&= a(\frac{5\sqrt{3}}{1,37} - 6) > 0
\end{aligned}$$

Yani; P(A) < P(B) dir.

Problem 2.23: Elips ile düzgün altıgenin çevreleri eşit iken alanlarını karşılaştırınız.

P(A) =P(E)olsun.

$$\begin{aligned} 6a &= \pi(b+c) \\ a &= \frac{\pi}{6}(b+c) \end{aligned}$$

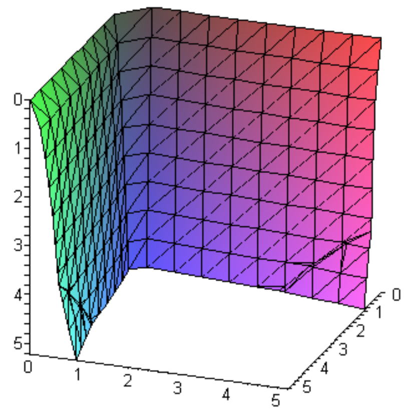
Şimdi alanları karşılaştıralım. $\varepsilon > 0$ iken $c = b + \epsilon$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} A(E) \quad - \quad A(A) &= \pi bc - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \\ &= \pi bc - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\pi^2}{36}(b+c)^2 \\ &= \pi(bc - \frac{\sqrt{3}}{24}\pi(b+c)^2) \\ &= \pi(b(b+\varepsilon) - \frac{\sqrt{3}}{24}\pi(b+b+\varepsilon)^2) \\ &= \pi(b^2 + b\varepsilon - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi b^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi b\varepsilon - \frac{\sqrt{3}}{24}\pi\varepsilon^2) \\ &= \pi(b^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi) + b(\varepsilon - \frac{\sqrt{3}}{6}\varepsilon) - (\frac{\sqrt{3}}{24}\pi\varepsilon^2) > 0 \end{aligned}$$

Yani; A(E) > $A(A)$dir.

Problem 2.24: Elips ile düzgün altıgenin alanları eşit iken çevrelerini karşılaştırınız.

A(E)=A(A) iken P(A)-P(E) farkını Maple da görelim.



Şekil 29

Dolayısıyla P(E) < P(A) dır.

2.3 Sonuç

Bölüm 2 de verilen Problem 2.11-Problem 2.24 sonucunda aşağıdaki sıralama elde edilir.

1) Alanları eşit olan düzlemsel şekiller arasında;

$$P(\ddot{U}) > P(D) > P(K) > P(B) > P(A) > P(\text{Ç})$$

sıralaması vardır.

2) Çevreleri eşit olan düzlemsel şekiller arasında;

$$A(\ddot{U}) < A(D) < A(K) < A(B) < A(A) < A(\text{Ç})$$

sıralaması vardır.

KAYNAKLAR

[**1**] **Andrew Miller**,The Isoperimetric Problem: A Motivated Look at the Calculus of Variations, (2000)

[**2**] **Alan Siegel**, An Historical Review of The Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Planer Geometry, Courant Institute of Mathematical Sciences New York Universty

[**3**] **Andrejs Treibergs**, Universty of Utah, Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality,

[**4**] **Millennium Mathematics Project**, University of Cambridge, (2002)

[**5**] **Alexander Bogomolny**, (1996-2005)

[**6**] **Nikolas Dergiades**, An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality, Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 129-130