

**DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA  
YÖNTEMLERİNİN  
SİSTEM DENETİMİNDE KULLANIMI**

**Ahmet YAZICI**

**DOKTORA TEZİ  
Elektrik Elektronik Mühendisliği  
Anabilim Dalı**

**Ekim 2005**

**USING NONLINEAR PROGRAMMING TECHNIQUES  
IN CONTROL THEORY**

**Ahmet YAZICI**

**Ph.D. THESIS**

**Department of Electrical&Electronics Engineering**

**October 2005**

**DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA YÖNTEMLERİNİN  
SİSTEM DENETİMİNDE KULLANIMI**

**Ahmet YAZICI**

**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı  
Kontrol Kumanda Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır**

**Danışman: Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU**

**Ekim 2005**

Ahmet YAZICI 'nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Doğrusal olmayan programlama yöntemlerinin sistem denetiminde kullanımı” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU .....

Üye : Prof. Dr. Rafail N. GASİMOV .....

Üye : Prof. Dr. Altuğ İFTAR .....

Üye : Prof. Dr. İdris DAĞ .....

Üye : Yrd.Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA .....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 07/10/2005 tarih ve 2005-14/3 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmada kontrol alanındaki bazı denetleyici tasarım ve gürbüzlük analiz problemleri doğrusal olmayan programlama ile modellenmektedir. Oluşturulan modellerin çözülmesinde, klasik çözüm yöntemlerinin yetersiz olduğu dışbükey olmayan ve türevlenemeyen geniş bir problemler sınıfı için ikil aralığın sifıra eşit olmasını garanti eden, genişletilmiş subgradient algoritması kullanılmaktadır. Bu çalışmanın ilk katkısı kayma kipli kontrol denetleyicilerinin doğrusal olmayan programlama kullanarak gerçekleştirilmesidir. Bu gerçekleştirilmede, kayma kipli kontrolde temel denetleyici çalışma felsefesi, sistem durumları kararlı bir kayma yüzeyi komşuluğuna getirilmekte ve bu komşulukta kalacak şekilde orijine sürülmektedir. Kullanılan bu yeni yöntemde sistem girişlerine sınır değeri getirme ve kayma yüzeyine yaklaşım hızını ayarlamak mümkün olmaktadır. Geliştirilen yeni yöntem, benzetim ortamında başarı ile ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. İkinci çalışma olarak, bir gürbüzlük ölçütü olan, gerçek yapısal tekil değerin hesaplanması ele alınmaktadır. Gerçek yapısal tekil değer hesaplamasında, mevcut yazılım araçlarının önerdiği alt ve üst sınırlar arasında, birçok problem için büyük aralıklar oluşması bu çalışmayı motive etmiştir. Öncelikle, gerçek yapısal tekil değerin alt sınır değerinin hesaplanması için esnek bir doğrusal olmayan programlama modeli önerilmekte ve bu şekilde modellenen problem genişletilmiş subgradient algoritması ile çözümlenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Olmayan Programlama, Doğrusal Olmayan Sistemler, Kayma Kipli Kontrol, Gürbüz Denetim, Gerçek Yapısal Tekil Değer, Ters Sarkaç Sistemi, Acrobot

## SUMMARY

In this study, some controller design and robustness analysis problems are modeled as nonlinear programming problems. These nonlinear programming problems are solved by modified subgradient algorithm which constructs the dual problem as an intermediate step. This algorithm yields a solution with no duality gap for a large class of constrained problems and does not require any convexity and differentiability assumptions. Firstly, sliding mode control problem is modeled as a nonlinear programming problem. In this realization, basic philosophy of sliding mode control, which is steering the state of dynamic system towards a stable sliding surface and then driving the system state towards the origin while keeping it in a neighborhood of this surface, is preserved. In this new approach, it is possible to impose bounds on the system input and specify approaching rates to the sliding surface. Validity of the approach is illustrated by stabilizing inverted pendulum and acrobot systems using simulations. Secondly, a new approach is taken at the real structured singular value computation problem which is a popular tool for testing robustness of a system. Currently, some software packages propose lower and upper bounds to calculate the real structured singular value. But, the gap between the lower and upper bounds is large for many problems. Motivated by this, a flexible nonlinear programming model is proposed for lower bound of real structured singular value problem, and solved by the modified subgradient algorithm.

**Keywords:** Nonlinear Programming, Nonlinear Systems, Sliding Mode Control, Robust Control, Real Structured Singular Value, Inverted Pendulum System, Acrobot

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım sırasında akademik hayata ısınmamı sağlayan, doktora çalışmalarım süresince ise bilgi ve tecrübeleriyle ve bitmeyen desteği ile çalışmalarımı yönlendiren, gece geç saatlere kadar veya hafta sonları zamanını akademik çalışmalarımıza ayıran Prof. Dr. Abdurrahman Karamancıoğlu'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora çalışmaları süresince en yoğun olduğu dönemlerde bile her zaman bana vakit ayıran ve tecrübelerinden yararlanmam için değerli zamanını harcayan ve çalışmalarımı yönlendiren Prof. Dr. Rafail N. Gasimov'a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Evliliğimizin ilk yıllarına rastlayan doktora çalışmalarım sırasında desteğini hiç eksik etmeyen ve tez çalışmalarım için evden kaçmamı sabırla karşılayan sevgili eşim Demet'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük destek ve fedakarlıkları olan ailemede en içten teşekkürlerimi sunarım.

Rahat bir çalışma ortamı içerisinde, her zaman için önümüzü açan tavsiye ve yönlendirmelerde bulunan, yetişmemizde büyük emekleri olan diğer bölüm hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET .....</b>	<b>iv</b>
<b>SUMMARY .....</b>	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR .....</b>	<b>vi</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ.....</b>	<b>x</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ.....</b>	<b>xiii</b>
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. KULLANILACAK YÖNTEMLERİN TANITIMI.....</b>	<b>5</b>
2.1 Kayma Kipli Kontrol .....	5
2.1.1 Kayma kipli kontrole giriş .....	5
2.1.2 Sürekli zaman LTI sistemlerde kayma kipli denetleyici tasarımı .....	7
2.1.2.1 Kayma yüzeyi tasarımı .....	7
2.1.2.2 Ulaşım girdi tasarımı .....	8
2.1.3 Doğrusal olmayan sistemler için kayma kipli denetleyici tasarımı .....	10
2.1.3.1 Kayma yüzeyi tasarımı .....	10
2.1.3.2 Ulaşım girdi tasarımı .....	11
2.1.3.3 Kayma kipli kontrolün ters sarkaç sistemine uygulanması.....	12
2.1.3.4 Kayma kipli denetleyicinin acrobot sistemine uygulanması.....	16
2.2 Doğrusal Olmayan Programlama .....	20
2.2.1 Bazı dışbükey-içbükey analiz kavramları.....	21
2.2.1.1 Dışbükey Kümeler.....	21
2.2.1.2 Dışbükey fonksiyonlar.....	22
2.2.1.3 Dışbükey fonksiyon için subgradient kavramı.....	23
2.2.2 Doğrusal olmayan programlama .....	24
2.2.2.1 Asıl Problem .....	25
2.2.2.2 Lagrange ikil problem .....	25
2.2.2.3 İkil Aralık .....	30
2.2.3 DOP için kullanılan bazı çözüm yöntemleri .....	30
2.2.3.1 Kesme Düzlemi Yöntemi .....	31
2.2.3.2 Ceza Fonksiyonları Yöntemi .....	32
2.2.3.3 Lagrange Çarpanlar Yöntemi .....	34
2.2.3.4 Genişletilmiş subgradient yöntemi .....	36



## İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
<b>3. KAYMA KIPLİ DENETLEYİCİ TASARIMININ DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA KULLANILARAK GERÇEKLENMESİ .....</b>	<b>40</b>
3.1 Kayma Kipli Kontrol Denetleyicisinin DOP ile Modellenmesi .....	40
3.1.1 Ulaşım fazının DOP ile modellenmesi .....	41
3.1.2 Kayma fazının DOP ile modellenmesi .....	43
3.1.3 DOP tabanlı KKK yöntemi .....	45
3.2 DOP Tabanlı KKK Denetleyicisinin Ters Sarkaç ve Acrobot Sistemlerine Uygulanması .....	46
3.2.1 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanması .....	47
3.2.2. DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanması .....	49
3.3 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Yöntemi .....	52
3.3.1 Ulaşım ve kayma fazlarının tek DOP modeli altında birleştirilmesi .....	53
3.3.2 Birleştirilmiş DOP modelinin çözülmesi .....	53
3.3.3 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK yöntemi algoritması .....	54
3.4 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Yönteminin Ters Sarkaç ve Acrobot Sistemine Uygulanması .....	55
3.4.1 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanması .....	55
3.4.2 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanması .....	59
3.5 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Denetleyicinin Parametre Değişimlerinin Sistem Tepkisine Etkisi.....	62
3.5.1 Denetleyici ceza parametresi $\lambda$ ya bağlı sistem davranış analizi.....	63
3.5.2 Denetleyici parametreleri $\gamma$ ve $\eta$ ye bağlı sistem davranış analizleri.....	66
3.5.3 Kontrol giriş genliği üst sınırı $\alpha$ ve geri besleme matrisi $K$ nın bileşenlerinin alt ve üst sınır değerlerinin sistem tepkisine etkisi.....	69
3.6 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Yöntemindeki DOP Modelinin bazı Kısıtlarının Amaç Fonksiyonuna Dahil Edilmesi .....	72
3.6.1 Tek performans kısıtın amaç fonksiyonuna dahil edilmesi .....	73
3.6.2 İki performans kısıtının amaç fonksiyonuna dahil edilmesi .....	75
3.7 KKK Denetleyicilerinde DOP Kullanılması : Sonuçlar – Yapılabilecek Çalışmalar	78

**İÇİNDEKİLER (devam)**

	<b><u>Sayfa</u></b>
<b>4. GERÇEK YAPISAL TEKİL DEĞERİN ALT SINIRININ HESAPLANMASI İÇİN YENİ BİR YÖNTEM .....</b>	<b>80</b>
4.1 Yapısal Tekil Değer (Structured Singular Value) .....	81
4.2 Gerçek Yapısal Tekil Değerin (GYTD) Alt Sınırının Hesaplanması için Önerilen DOP Modeli .....	84
4.3. Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin Çözümü .....	85
4.4 Uygulamalar .....	86
4.5 GYTD Alt Sınırının Hesaplanması İçin Yeni Bir Yöntem: Sonuçlar .....	97
<b>5. GENEL SONUÇLAR .....</b>	<b>98</b>
<b>6. EK AÇIKLAMALAR .....</b>	<b>100</b>
Ek Açıklamalar-A .....	100
Ek Açıklamalar-B.....	109
<b>7. KAYNAKLAR .....</b>	<b>112</b>
<b>8. ÖZGEÇMİŞ</b>	

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Kayma Çizgisi .....	7
2.2 Ters sarkaç sistemi .....	13
2.3 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında, kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	15
2.4 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	16
2.5 Acrobot sistemi .....	17
2.6 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin acrobot sistemine uygulanmasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	19
2.7 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin acrobot sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	20
2.8 a) Dışbükey küme , b) Dışbükey olmayan küme .....	22
2.9 a) Dışbükey Fonksiyon , b) İçbükey Fonksiyon .....	23
2.10 a) Dışbükey-b) İçbükey fonksiyonlarda subgradientlerin grafiksel gösterimi .....	24
2.11 Lagrange ikiliğin geometrik gösterimi (Bazaraa et al., 1993) .....	27
2.12 İkil problemin geometrik gösterimi .....	29
2.13 İkil aralığın gösterimi (Bazaraa et al., 1993) .....	30
2.14 Ceza fonksiyonları yönteminde oluşan ikillik gösterimi .....	34
2.15 Lagrange Çarpanlar yönteminde oluşan ikillik gösterimi .....	36
2.16 Genişletilmiş subgradient yönteminde oluşan ikillik gösterimi .....	39
3.1 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	48
3.2 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	49
3.3 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanmasında kayma yüzeyi ve sistem girdisinin zamana bağlı değişim grafiği .....	51
3.4 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişim grafiği .....	52
3.5 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin $X_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	56
3.6 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin $X_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	56

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
3.7	Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$ ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	57
3.8	Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$ ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	57
3.9	$\lambda = 5$ için $\frac{dV}{dt}$ ve $\left\  w + \frac{w^T \dot{X}}{\ \dot{X}\ } w \right\ $ terimlerinin ağırlıklarının analizi .....	59
3.10	Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulamasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişim grafiği .....	60
3.11	Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulamasında sistem durumlarının zamana bağlı değişim grafiği .....	61
3.12	$\lambda = 50$ için $\frac{dV}{dt}$ ve $\left\  w + \frac{w^T \dot{X}}{\ \dot{X}\ } w \right\ $ terimlerinin analizi .....	62
3.13	$\lambda = 1$ için $\frac{dV}{dt}$ ve $\left\  w + \frac{w^T \dot{X}}{\ \dot{X}\ } w \right\ $ terimlerinin/toplamlarının ve kayma yüzeyinin zamana bağlı değişimi .....	64
3.14	$\lambda = 25$ için $\frac{dV}{dt}$ ve $\left\  w + \frac{w^T \dot{X}}{\ \dot{X}\ } w \right\ $ terimlerinin/toplamlarının ve kayma yüzeyinin zamana bağlı değişimi .....	65
3.15	Farklı $\gamma$ lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	67
3.16	Farklı $\eta$ lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	68

**ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)**

<b><u>Sekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
3.17 Farklı $\alpha$ lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	70
3.18 Farklı $\alpha$ lar için sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	70
3.19 Farklı $K$ bileşen sınır değerleri için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	71
3.20 Farklı $K$ bileşen sınır değerleri için sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	72
3.21 Kayma Yüzeyi ve sistem girdisinin zamana bağlı değişimi .....	74
3.22 Sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	74
3.23 Kayma Yüzeyi ve sistem girdisinin zamana bağlı değişimi .....	76
3.24 Kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi .....	77
3.25 Sistem durumlarının zamana bağlı değişim grafiği .....	77
4.1 Sistemlerdeki belirsizliklerin ayrıştırılması .....	81
4.2 Örnek 4.1 için bulunan $\mu$ değerlerinin frekansa bağlı değişimi .....	87
4.3 Ters sarkaç sisteminin geri besleme altında blok diyagramı. ....	89
4.4 a) $P$ tipi belirsizlikler b) $1/P$ tipi belirsizlikler .....	90
4.5 Ters sarkaç sistemi bilinen kısmın $M$ , ve bilinmeyen kısım $\Delta$ nin blok diyagramı .....	90
4.6. Ters sarkaç sistemi için bulunan $\mu$ değerlerinin frekansa bağlı değişimi .....	92
4.7 Belirsizliğe sahip ters sarkaç sisteminin $X_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ referans girdisini takip sırasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi .....	93
4.8 $-0.999 < \delta_m, \delta_l \leq 10^5$ için ters sarkaç sistemi için bulunan $\mu$ değerlerinin frekansa bağlı değişimi .....	94
4.9 Örnek 4.3 için $\mu$ nün frekansa bağlı değişimi .....	95

**ÇİZELGELER DİZİNİ**

<b><u>Çizelge</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
2.1	Ters sarkaç için kullanılan nümerik değerler .....	15
2.2	Acrobot sistemi tipik parametre değerleri .....	18
4.1	Değişik $10 \times 10$ boyutlu rasgele matrisler için $\mu$ sonuçları .....	96

## 1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan programlama veya en genel haliyle matematiksel programlama, mühendislik, ekonomi, yönetim gibi çok alanda uygulamalara sahip olup, bu alanlardaki bir çok problem uygun dönüşümler sonucunda modellenebilmektedir. Oluşturulan matematiksel modellerin eniyi çözümünün bulunmasına yönelik çözüm yöntemleri ve toparlayıcı çalışmalar güncellenerek (Bazaraa et al., 1993; Bertsekas, 1995; Floudas et al., 2005; Gasimov, 2002; Luenberger, 1984) literatürde yerlerini almaktadırlar. Bu yöntemlerden, Gasimov tarafından geliştirilen doğrusal olmayan programlama çözüm algoritması (Gasimov, 2002), geniş bir problemler sınıfı için eniyi çözümü garanti etmektedir.

Kontrol alanında klasik yöntemlerle çözümü olmayan bir çok problem de doğrusal olmayan programlama yaklaşımı kullanılarak çözülmektedir (Bryson, 1996; Gopal and Biegler, 1998; Sargent, 2000; Betts, 2001; Biegler, 1998; Papamichal and Adjiman, 2002; Mayne and Schroeder, 1997; Becerra, 2004; Bemporad et al., 1997; Casavola et al., 2004; Ferrara, 2005; ve buralardaki kaynaklar). Örneğin, klasik kontrol yöntemlerinde denetleyici tasarımı, genellikle belli performans kriterlerini sağlayan denetleyici katsayılarının deneme yanılmalarla bulunmasından oluşmaktadır. Yükselme zamanı, durulma zamanı, maksimum yüzde aşma hatası, kazanç-faz açısı ve bant genişliği bilinen zaman ve frekans alanındaki performans kriterlerinden bazılarıdır (Ogata, 1990). Bu performans kriterlerin yanında, sistem girdisine veya durumlarına kısıt getirilmek istendiğinde klasik yöntemlerin verimli kullanımı mümkün olmamaktadır. Bu tip kısıtlara sahip problemler için, son zamanlarda geliştirilen bazı yöntemler (Bemporad et al., 1997; Casavola et al., 2004; Ferrara, 2005) uygun çözümler üretmektedir.

Ayrıca, sistem tasarımında frekans-zaman alanı performans kriterlerinin yanında en az zaman, en az yol veya en az enerji gibi başka performans kriterlerinin de sağlanması gerekebilir. Bu tip performans kriterleri için, bazı sistem sınıflarına yönelik optimal kontrol çözümleri mevcuttur (Kirk, 1970). Optimal kontrol alanında direk (*direct*) ve dolaylı (*indirect*) yöntemler baskın olarak kullanılmaktadır. Kısıtsız problemlerde dolaylı yöntemler rahatça kullanılırken, kısıta sahip problemlerde bazı

zorluklar oluşmaktadır. Bu durumlarda, sonsuz boyutlu problemler sonlu boyuta indirgenip, doğrusal olmayan programlama çözücülerini ile direk olarak çözülmektedir (Gopal and Biegler, 1998). Ayrıca, birden çok amaca sahip olan kontrol problemleri de eşdeğer optimizasyon problemine dönüştürülebilmektedir (Elia and Dahleh, 1997). Bu problemlerin yanında, denetleyicinin sistemde olan belirsizliklere karşın sistemi kararlı halde tutması (*robust stability*) ve belli performans kriterlerini yerine getirecek (*robust performance*) şekilde tasarımı da kısıtlı optimizasyon problemine indirgenebilir (Doyle, 1982; Keel and Bhattacharyya, 1999; Lordelo and Ferreira, 2002; Zhou, 1998).

Bu çalışmada kontrol alanındaki bazı denetleyici tasarım ve gürbüzlük analiz problemleri doğrusal olmayan programlama ile modellenmektedir. Oluşturulan modeller, Gasimov tarafından geliştirilen genişletilmiş subgradient algoritması (Gasimov, 2002), ile başarılı şekilde çözülmektedir. İlk olarak, kayma kipli kontrol denetleyicileri doğrusal olmayan programlama ile modellenmektedirler. Bu modelleme sonucunda, klasik kayma kipli denetleyicilerinde mevcut olmayan, bazı kısıtlarda denetleyici yapısına eklenmektedir. Geliştirilen yeni denetleyici klasik kayma kipli kontrol denetleyici çalışma felsefesi olan sistem durumlarının kararlı bir kayma yüzeyi komşuluğuna getirilmesi ve buradan orijine sürülmesini korumaktadır. İkinci çalışma olarak, gerçek yapısal tekil değerin alt sınırının hesaplanması da bu tezde ele alınmaktadır. Gerçek yapısal tekil değer hesaplamasında, mevcut yazılım araçlarının önerdiği alt ve üst sınırlar arasında, birçok problem için büyük aralıklar oluşmaktadır. Burada, gerçek yapısal tekil değerin alt sınırının hesaplanması için esnek bir doğrusal olmayan programlama modeli önerilmekte ve genişletilmiş subgradient algoritması ile çözümlenmektedir. Bu çalışmaların, tez bölümlerinde dağılımı aşağıdaki gibidir.

Bölüm 2’de kayma kipli kontrol ve doğrusal olmayan programlama tanıtılarak, ileriki bölümlerde verilecek olan doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol ve doğrusal olmayan programlamanın gerçek yapısal tekil değerin alt sınırının hesaplanmasında kullanımı yaklaşımlarına altyapı oluşturulmaktadır. Öncelikle, kayma kipli kontrolle ilgili bazı temel kavramlar, sunuş kolaylığı ve kolay algılanabilirliği açısından iki boyutlu uzayda faz düzlemi grafikleri kullanılarak tanıtılıp, sürekli zaman sistemlerinde kayma kipli denetleyici tasarımının aşamalarından olan kayma yüzeyi ve ulaşım girdi tasarımları incelenmektedir. Daha sonra ise doğrusal olmayan sistemler



için literatürde bulunan mevcut kayma kipli denetleyici tasarım yöntemleri ele alınmakta, ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. Kayma kipli kontrol ile ilgili alt yapı verildikten sonra, doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde kullanılan dışbükey kümeler, dışbükey fonksiyonlar, dışbükey fonksiyon için subgradient, asıl problem, ikil problem, ikil aralık v.b. bazı temel kavramlar tanıtılmaktadır. Son olarak ise, doğrusal olmayan programlamaya yönelik literatürde bilinen bazı çözüm yöntemleri ve ikil aralığın oluşmasını engelleyen genişletilmiş subgradient algoritması tanıtılmaktadır.

Takip eden Bölüm'3 de, doğrusal olmayan programlama yöntemlerinin kayma kipli kontrol yöntemlerine uygulanışı ele alınmaktadır. Öncelikle kayma kipli kontrol yöntemlerindeki ulaşım ve kayma fazındaki denetleyici katsayılarını hesaplayabilen uygun doğrusal olmayan kısıt ve amaç fonksiyonlarına sahip doğrusal olmayan programlama modelleri verilmektedir. Devamında, oluşturulan doğrusal olmayan programlama modelleri, konveks olmayan ve türev alınmayan durumlarda da çözüm üreten genişletilmiş subgradient yöntemi kullanılarak çözülmektedir. Bu çalışmalardan sonra ulaşım fazı ve kayma fazında kullanılan iki ayrık doğrusal olmayan programlama modeli tek bir doğrusal olmayan programlama modeli altında bir araya getirilmekte ve başarı ile ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. Bu uygulamalardan sonra, doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol denetleyicilerin parametre değişimlerinin ters sarkaç sistem tepkilerine etkisi incelenerek doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol denetleyici tasarımı yaklaşımını kendi içinde bir bütün olarak sunmak amaçlanmaktadır. Burada geliştirilen yöntemin, diferansiyel denklem alanında ifade edilen modelleri uygun dönüşümlerle, kısıtlara sahip şekilde cebir alanına taşıdığı ve bunun sonucu olarak sistem girdisini doğrusal olmayan programlama yöntemi ile hesaplayabildiği görülebilir. Son olarak, bu alanda yapılan çalışmalar özetlenmekte ve ilerisi için yapılabilecek çalışmalar aktarılmaktadır.

Bölüm 4'de, yapısı bilinen gerçek belirsizliklere sahip sistemler için, gürbüzlük değerlerini hesaplamak üzere, kullanılan gerçek yapısal tekil değer bir doğrusal olmayan programlama problemi olarak modellenmekte ve bu model genişletilmiş subgradient algoritması ile çözülmektedir. Öncelikle, en genel haliyle yapısal tekil

değer hesaplanması anlatılmakta olup, sonrasında gerçek yapısal tekil değerlerin alt sınırının hesaplanması için önerilen esnek doğrusal olmayan programlama modeli ve bu modelin çözümü için önerilen algoritma tanıtılmaktadır. Yeni yöntem çeşitli örneklere uygulanmakta, elde edilen sonuçlar bu amaca yönelik MATLAB komutu kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Son bölümde ise bu çalışmada bulunan sonuçlar değerlendirilip daha sonra yapılabilecek çalışmalar hakkında önerilerde bulunmaktadır.

## 2. KULLANILACAK YÖNTEMLERİN TANITIMI

Bu bölümde, *Kayma kipli kontrol ve Doğrusal olmayan programlama* tanıtılarak, ileriki bölümlerde verilecek olan doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol ve doğrusal olmayan programlamanın gerçek yapısal tekil değerinin alt sınırının hesaplanmasında kullanımı yaklaşımlarına altyapı oluşturulmaktadır. Öncelikle kayma kipli kontrol yönteminin, ileride kullanılacak düzeyde temel felsefesi ele alınmakta, mevcut popüler yöntemlerden biri karşılaştırma amaçlı olarak ters sarkaç ve acrobot sistemine uygulanmakta, sonrasında ise doğrusal olmayan programlama ana hatlarıyla tanıtılıp, gelişmiş ve genel amaçlı bir doğrusal olmayan programlama algoritması verilmektedir.

### 2.1 Kayma Kipli Kontrol

*Kayma kipli kontrol* (Sliding Mode Control, SMC) ve *Değişken yapıli kontrol* (Variable Structure Control, VSC) Utkin'in (1977) toparlayıcı çalışmasından sonra yetmişli yıllardan itibaren kontrol mühendisliğinde yaygın olarak irdelenmektedir. Bu konuda temel bilgiler sürekli güncellenerek literatürde popülaritesini korumaktadır (Slotine, 1984; Decarlo et al., 1988; Hung et al., 1993; Young et al., 1999; Adamy and Flemming, 2004). Ayrıca, kayma kipli kontrolün temel felsefesini kullanan disiplinler arası çalışmalar literatüre eklenmeye devam etmektedir (Choi, 1997; Kaynak et al., 2001; Li et al., 1997; Yu et al., 1998; Palm, 1994; Yoo and Ham, 1998).

Bu alt bölümde, kayma kipli kontrolle ilgili bazı temel kavramlar, sunuş kolaylığı ve kolay algılanabilirliği açısından iki boyutlu uzayda faz düzlemi grafikleri kullanılarak tanıtılıp, sürekli zaman sistemlerinde kayma kipli denetleyici tasarımları incelenmektedir. Daha sonra ise doğrusal olmayan sistemler için literatürde bulunan mevcut kayma kipli denetleyici tasarım yöntemleri ele alınmakta, karşılaştırma amaçlı olarak ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır.

#### 2.1.1 Kayma kipli kontrole giriş

Sürekli zamanda bir LTI sistem

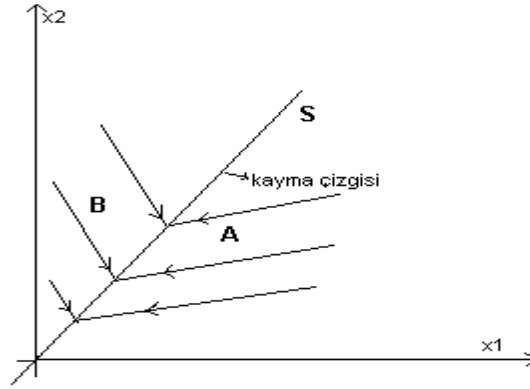
$$\dot{X} = AX + Bu \quad (2.1)$$

formunda verilsin. Burada  $A \in R^{2 \times 2}$ ,  $B \in R^{2 \times 1}$  matrisleri bilinen sabit matrislerdir. Burada  $X$  ve  $u$  sırasıyla sistem durum vektörünü ve kontrol girişini göstermektedir.

Burada ele alınan kontrol probleminin amacı uygun  $u$  girişini belirleyerek sistem durumunun sıfıra gelmesini sağlamaktır. Kontrol mühendisliğinde yaygın olarak karşılaşılan yörünge izleme problemi de bu probleme indirgenebilir. Belirlenmesi istenen kontrol girişinin, bilinen sistem matrislerini ve sistem durum vektörünü kullanmasına izin verilmektedir.

Eşitlik (2.1) de verilen iki boyutlu bir sistemin durum uzayının belli bir bölgesindeki *faz düzlemi grafiği* Şekil 2.1 deki gibi olsun. Şekildeki hayali  $S$  çizgisi ile durum uzayı iki bölgeye ayrılmaktadır. Bölgelerden birini A diğeri B bölgesi olarak adlandıralım. Dikkat edilecek olursa bütün yörüngeler  $S$  çizgisine yönelmiş ve orada son bulmaktadır. Bilindiği gibi LTI sistemlerde bu tip bir faz portresi elde edilemez. Bu faz portresi iki farklı sistemin faz portrelerinin belli kısımlarının alınıp bir araya getirilmesiyle elde edilebilir. Bu da fiziksel olarak durum uzayının ikiye ayrılıp (A ve B bölgeleri), her bir bölgede iki sistemden sadece birinin aktif olmasıyla ortaya çıkan bir sisteme karşılık gelir.

Şekil 2.1 de A ve B bölgelerinde değişik sistem yapısından kaynaklanan iki farklı faz portresi bulunmaktadır. Başlangıç durum değeri A veya B bölgelerinden birinde olan sistem bir müddet sonra  $S$  çizgisine ulaşacak ve sistem yapısı değişmezse diğer bölgeye geçecektir. Ancak yörünge  $S$  çizgisini geçer geçmez, sisteme uygulanan geribeslemenin değiştirilmesi dolayısıyla sistem yapısı değişeceğinden yeni geçilen bölgenin dinamiği aktif olacaktır. Yeni durumda da yörünge  $S$  çizgisine yöneleceği için her durumda yörünge  $S$  çizgisi üzerinde kalacaktır. Sistem kontrol girişini oluşturan geribesleme sistemi uygun seçilerek çizginin her iki yanındaki sistem dinamiklerinin yörüngeyi çizgiye doğru götürmesi kayma kipli kontrolün en belirgin özelliğidir. Yörünge çizgiyi geçerken sistemin yapı değiştirmesine sistemin yeni yapısına *anahtarlanması* denir. Anahtarlanmanın gerçekleştirildiği  $S$  çizgisi de *anahtarlama çizgisi* adını almaktadır. Durum uzayı değişkenleri türünden belirlenen anahtarlama kuralı da *anahtarlama fonksiyonu* olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 2.1 Kayma Çizgisi

Şekil 2.1 de sistem yörüngelerinin tamamının  $S$  çizgisine yöneldiği görülmektedir. Kaba terimlerle, sistem yörüngeleri bir anahtarlama çizgisine bir kez ulaştığında o andan itibaren o çizginin komşuluğunda kalıyorsa, o çizgi *kayma çizgisi* adını alır.

### 2.1.2 Sürekli zaman LTI sistemlerde kayma kipli denetleyici tasarımı

Bu altbölümde, sürekli zaman kayma kipli kontrolde denetleyici tasarımının temel iki aşaması olan kayma yüzeyi ve ulaşım girdi tasarımı incelenmektedir.

#### 2.1.2.1 Kayma yüzeyi tasarımı

Eşitlik (2.1) ile verilen zamanla değişmeyen doğrusal bir sistem için kayma çizgisi

$$S := \{X : GX = 0\} \quad (2.2)$$

olsun. Burada  $G \in R^{1 \times 2}$  olur. Kayma çizgisine ulaşan bir yörüngenin çizgi üzerinde kalması için kayma yüzeyini ifade eden anahtarlama fonksiyonunun zamana göre türevinin sıfıra eşit olması yaklaşımı kullanılır. Anahtarlama fonksiyonu

$$s(X) = GX$$

zamana göre türevlenerek

$$\begin{aligned}\dot{s}(X) &= G\dot{X} \\ &= G(AX + Bu)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olmasını sağlayan sistem girişi *eşdeğer giriş* olarak adlandırılır,  $u_{eq}$  ile gösterilir ve

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}GAX \quad (2.3)$$

olarak elde edilebilir. Burada  $(GB)$  tersi alınabilir olmalıdır. Bu ifadede bir alt isimlendirme daha yapılarak  $-(GB)^{-1}GA$  *eşdeğer geribesleme matrisi* olarak adlandırılabilir ve  $F_{eq}$  ile gösterilir. Eşdeğer giriş, (2.1) de yerine yazılırsa, kayma çizgisi üzerindeki sistem dinamiği

$$\dot{X} = (A + BF_{eq})X \quad (2.4)$$

elde edilir (Decarlo et al., 1988). Kayma çizgisini temsil eden  $G$ , eşitlik (2.4) de kayma çizgisi dinamiğini temsil eden özdeğerler negatif olacak şekilde seçilir. Bu şekilde seçilen kayma çizgisi kararlı olur.

### **2.1.2.2 Ulaşım girdi tasarımı**

Sistemi herhangi bir ilk değerden kayma çizgisine ulaştıran *ulaşım girdisinin* ( $u_r$ ) bulunmasında Lyapunov yöntemi kullanılabilir. Bu yöntemde

$$V(X) = \frac{1}{2}s^2(X) \quad (2.5)$$

ifadesi sistem yörüngesinin kayma çizgisinden uzaklığının monoton artan bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun değerinin zamanla azalması yörüngenin kayma çizgisine yaklaştığı anlamına gelir. Fonksiyonun zamana göre türevinin eksi işaretli olması fonksiyonun zamanla azaldığını, yani yörüngenin kayma çizgisine yaklaştığını gösterir. Eşitlik (2.5) in türevi alındığında

$$\dot{V} = s \dot{s} \quad (2.6)$$

elde edilir. Burada eşitlik (2.2) ve sistem denklemleri kullanılarak  $\dot{s}$  terimi yerine yazıldığında

$$\dot{V} = sG(AX + Bu) \quad (2.7)$$

olur. Burada kontrol girişini  $u = u_{eq} + u_r$  olarak tanımlayalım ( $u_r$  birazdan tanımlanacaktır). Eşdeğer girdi ( $u_{eq}$ ) yerine eşitlik (2.3) deki değeri ve ulaşım girdisi için  $u_r = F_r X$  yazıldığında

$$\dot{V} = sGBF_r X \quad (2.8)$$

elde edilir. Burada  $F_r := [k_1 \quad k_2]$  olup eşitlik (2.8) de yerine yazıldığında

$$\dot{V} = sGBk_1 x_1 + sGBk_2 x_2 \quad (2.9)$$

elde edilir. İfade (2.9) in negatif olması için ulaşım girdi katsayıları

$$k_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{eger } sGBx_i < 0 \\ -\beta_i & \text{eger } sGBx_i > 0 \end{cases} \quad i=1,2. \quad (2.10)$$

olarak seçilebilir. Burada  $\alpha_i > 0$  ve  $\beta_i > 0$  olup büyüklükleri sistem performansı ile ilgilidir.

Şu ana kadar kolay anlaşılabilirlik açısından sistem kontrol girişi ve durum vektörü boyutları sırasıyla  $u \in R^1$ ,  $X \in R^2$  olan sistemler incelenmiştir. Bu durumda sistem matrisleri  $A \in R^{2 \times 2}$  ve  $B \in R^{2 \times 1}$  boyutlarında olmaktadır. Kontrol girişi  $u \in R^m$  ve durum vektörü  $X \in R^n$  olduğunda sistem matrisleri  $A \in R^{n \times n}$  ve  $B \in R^{n \times m}$  boyutlarında olacaktır. İki boyutlu sistemlerdeki *anahtarlama çizgisi* ve *kayma çizgisi* terimleri çok boyutlu sistemlerde *anahtarlama yüzeyi* ve *kayma yüzeyi* olarak adlandırılır.

Eşdeğer girdinin bulunmasında kullanılan sabit matris,  $G \in R^{m \times n}$  boyutunda olur ve bu matrisin kullanıldığı (2.3)-(2.4) deki ifadeler geçerliliğini korur. Sürekli zamanda tek girdili ve  $n$  durumlu bir sistem için (2.10) daki ulaşım girdi katsayıları,  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , ifade (2.8) in  $n$  boyutlu versiyonunu negatif yapacak şekilde seçilir (Slotine, 1984).

### 2.1.3 Doğrusal olmayan sistemler için kayma kipli denetleyici tasarımı

#### Tek girdili doğrusal olmayan bir sistem sınıfı

$$\dot{X} = A(X) + B(X)u \quad (2.11)$$

şeklinde durum uzayı modeli ile temsil edilsin. Burada  $X \in R^n$  durum vektörü ve  $u$  kontrol girişi olup sistem (2.11) in kontrol edilebilir olduğu kabul edilsin.

Burada ele alınacak kontrol probleminin amacı uygun  $u$  girişi belirleyerek sistem (2.11) durumunun sifıra gelmesini sağlamaktır. Kayma kipli kontrol yöntemi ile bu amacı gerçekleştiren bir denetleyici, durum uzayındaki sistem yörüngelerini, kayma yüzeyinin önceden tasarımcı tarafından belirlenmiş bir komşuluğuna getirme ve buradan da kayma yüzeyinin bu komşuluğundan çıkarmadan durum uzayının orijinine götürür. Dolayısıyla kayma kipli denetleyici tasarımı iki adımdan oluşur:

- 1)  $R^n$  de kararlı bir kayma yüzeyi tasarlanması
- 2) Sistem (2.11) in yörüngelerini durum uzayındaki herhangi bir başlangıç noktasından tasarlanmış olan kararlı kayma yüzeyine getirip, kayma yüzeyinin komşuluğuna hapsedecek kontrol girişinin tasarlanması.

Yukarıdaki şekilde tasarlanan denetleyici yörüngenin kayma yüzeyinin komşuluğundan ayrılmadan orijine varmasını sağlayacaktır.

#### 2.1.3.1 Kayma yüzeyi tasarımı

Kayma Kipli Kontrol teorisi kararlı bir kayma yüzeyinin bulunması üzerine kuruludur. Kayma yüzeyi  $s(X) = 0$ ,  $n$  boyutlu ve  $m$  girdili bir sistem için,  $(n-m)$  boyutlu bir manifolda karşılık gelir. Kayma yüzeyi tasarımı, bu yüzeyde başlayan sistem yörüngelerini bu yüzeyde tutacak şekilde yapılıdır. İfade (2.2) ile verilen doğrusal kayma yüzeyi çok geniş bir sistemler sınıfı için kullanılabilir (Decarlo et al., 1988; Banks et al., 2000). Doğrusal olmayan bir çok mekanik sistem için kayma yüzeyi tasarlarlarken, çalışma noktası etrafında doğrusallaştırma kullanılabilir. Örneğin ifade (2.11) ile verilen sistem istenilen çalışma noktası etrafında ifade (2.1) deki forma gelecek şekilde doğrusallaştırılıp, (2.2)-(2.3)-(2.4) kullanılarak kayma yüzeyi bulunabilir.



Doğrusal olmayan kararlı kayma yüzeyinin bulunmasına yönelik sistematik ve farklı yöntemler literatürde mevcuttur (Decarlo et al., 1988; Slotine, 1984; Banks et al., 2000; Choi, 1997; Park and Choi, 1999; Swaroop et al., 2000). Örneğin,

$$z^{(n)} = f(z) + b(z)u \quad (2.12)$$

kanonik formunda ifade edilebilen doğrusal olmayan sistem için

$$S(z) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} z, \quad \lambda > 0 \quad (2.13)$$

şeklinde kararlı bir kayma yüzeyi tasarlanabilir (Slotine, 1984). Burada  $\lambda$  kayma yüzeyi tasarımında sisteme bağlı bir parametredir.

### **2.1.3.2 Ulaşım girdi tasarımı**

Sistemi herhangi bir ilk değerden kayma çizgisine ulaştıracak kontrol girişinin bulunmasında Lyapunov yaklaşımı kullanılabilir. Bu yaklaşımda

$$V(X) = \frac{1}{2} s^2(X) \quad (2.14)$$

ifadesi sistem yörüngesinin kayma çizgisinden uzaklığının monoton artan bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun değerinin zamanla azalması yörüngenin kayma çizgisine yaklaştığı anlamına gelir. Fonksiyonun zamana göre türevinin eksi işaretli olması fonksiyonun zamanla azaldığını, yani yörüngenin kayma çizgisine yaklaştığını, gösterecektir. Eşitlik (2.14) in türevi alındığında

$$\dot{V} = s \dot{s} \quad (2.15)$$

elde edilir. İfade (2.11) ile verilen sistem için ifade (2.2) formunda doğrusal bir kayma yüzeyi bulunmuş olsun. Eşitlik (2.11) veya (2.2) deki denklemleri kullanılarak  $\dot{s}$  terimi yerine yazıldığında

$$\dot{V} = sG(A(X) + B(X)u) \quad (2.16)$$

olur. Buradaki kontrol girişinin literatürde bilinen en genel formu

$$u = u_{eq}(X) + u_r(X) + \Gamma \text{sgn}(s) \quad (2.17)$$

olup,  $u_{eq}$  ve  $u_r$  sırasıyla eşdeğer ve ulaşım girdileridir. İfade (2.17) deki girdi uygun şekilde seçilerek (Utkin, 1977; Decarlo et al., 1988; Young et al., 1999; Slotine, 1984), ifade (2.16) ün sıfırdan küçük olması sağlanır. Literatürde mevcut yöntemlerden, Decarlo' nun (1988) çalışmasında kontrol girişinin

$$u = \begin{cases} u_{eq} - \frac{B^T(X)\nabla_x V}{\|B^T(X)\nabla_x V\|} \hat{p} & \text{eger } |s| \geq \delta \\ u_{eq} - \frac{B^T(X)\nabla_x V}{\|B^T(X)\nabla_x V\|} \hat{p} \frac{|s|}{\delta} & \text{eger } |s| < \delta \end{cases} \quad (2.18)$$

formunda seçilmesiyle ifade (2.16) un negatif olması sağlanmaktadır. İfade (2.2) yapısında olan kayma yüzeyi için eşdeğer girdi

$$u_{eq} = -(GB(X))^{-1}GA(X) \quad (2.19)$$

olur. İfade (2.18) ile bulunan kontrol girişi  $u$ , sistemin ulaşım ve kayma fazında istenilen davranışı gerçekleştirmesini sağlayacaktır. İfade (2.18) de  $\delta > 0$  şeklinde seçilen bant genişliği ile, kayma kipli kontrol yöntemlerinin dezavantajlarından olan zikzaklar elimine edilir. Takip eden kısımda ifade (2.18) ile verilen kayma kipli denetleyicisi ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. Uygulamadan önce ters sarkaç ve acrobot sistemleri tanıtlıp matematiksel modelleri verilmektedir.

### **2.1.3.3 Kayma kipli kontrolün ters sarkaç sistemine uygulanması**

Bu kısımda, önce ters sarkacın (Inverted Pendulum) doğrusal olmayan modeli Newton yasaları kullanılarak (Ogata, 1990) bulunmakta ve tanımlanan çalışma noktası etrafında doğrusallaştırılmaktadır. Sonrasında kayma kipli denetleyici tasarımı yapılmakta ve kapalı çevrim sistemin kararlaştırma işlevini başarı ile gerçekleştirdiği deneylerle doğrulanmaktadır. Basit bir ifade ile, ters sarkaç sistemi Şekil 2.2 deki gibi uzunluğu  $l$ , kütlesi  $m^1$  olan çubuğun,  $M$  kütleli bir aracın üzerine P noktasından monte edilmesinden oluşmaktadır. Çubuğun P noktasından geçen dikey doğrultu ile yaptığı açı

<sup>1</sup> Çubuğun kütlesi uç noktasında yoğunlaştırılmış kabul edilmektedir.

$\theta$  ve yatay ekseninde belirli bir referans noktasına olan uzaklığı  $x$  değişkenleri ile temsil edilmektedir. Çubuk hareketi  $xy$  düzlemine kısıtlanmış olup monte edildiği araç sadece  $x$  eksenini boyunca hareket edebilmektedir. Bu harekete  $b$  katsayısıyla ifade edilen sürtünme kuvveti karşı koymaktadır. Newton'un ikinci kuralı  $x$  yönündeki harekete uygulandığında

$$(M + m) \ddot{x} - ml(\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta) \ddot{\theta} + b\dot{x} = u \quad (2.20)$$

olarak yazılabilir.

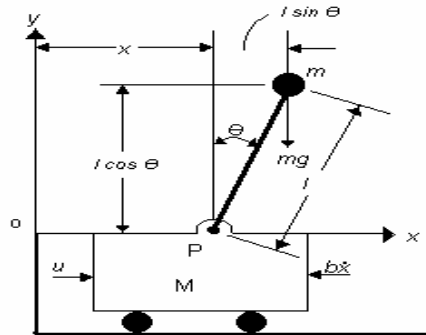
İkinci olarak  $m$  kütesinin P noktası etrafındaki hareketine Newton'un ikinci kuralını uygulanıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (2.21)$$

ifadesi elde edilir. İfade (2.20) ve (2.21) ile verilen doğrusal olmayan sistem modeli durum uzayı formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-bx_2 + ml \sin(x_3)x_4^2 - mg \sin(x_3) \cos(x_3) + u}{M + m - m \cos(x_3)^2} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{bx_2 \cos(x_3) - ml \sin(x_3) \cos(x_3)x_4^2 + (M + m)g \sin(x_3) - u \cos(x_3)}{l(M + m - m \cos(x_3)^2)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Burada,  $x_1 := x$ ,  $x_2 := \dot{x}$ ,  $x_3 := \theta$ ,  $x_4 := \dot{\theta}$  olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 2.2 Ters sarkaç sistemi

Doğrusal sistemlerin analizi ve bunlar için denetleyici tasarımı belirli bir olgunluğa erişmiş ve iyi anlaşılmuş bir konu olduğundan, kayma yüzeyi tasarımında sistem (2.22) in doğrusal yaklaşımından faydalanılmaktadır. Ters sarkaç sisteminde kontrol amacı sarkacı dikey tutmak olarak belirlenmiştir. Ters sarkaç sisteminin kontrol amacına uygun yörüngelerinin

$$(x_3, x_4) = (0, 0) \quad (2.23)$$

çalışma noktası komşuluğunda seyretmesi beklenmektedir. Bu çalışma noktası için doğrusal model

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_3, x_4)=(0,0)} x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_3, x_4)=(0,0)} u \quad (2.24)$$

işlemi sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{M} x_3 - \frac{b}{M} x_2 + \frac{1}{M} u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{(M+m)g}{Ml} x_3 + \frac{b}{Ml} x_2 - \frac{1}{Ml} u \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bu ifadeler matris notasyonunda

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (2.26)$$

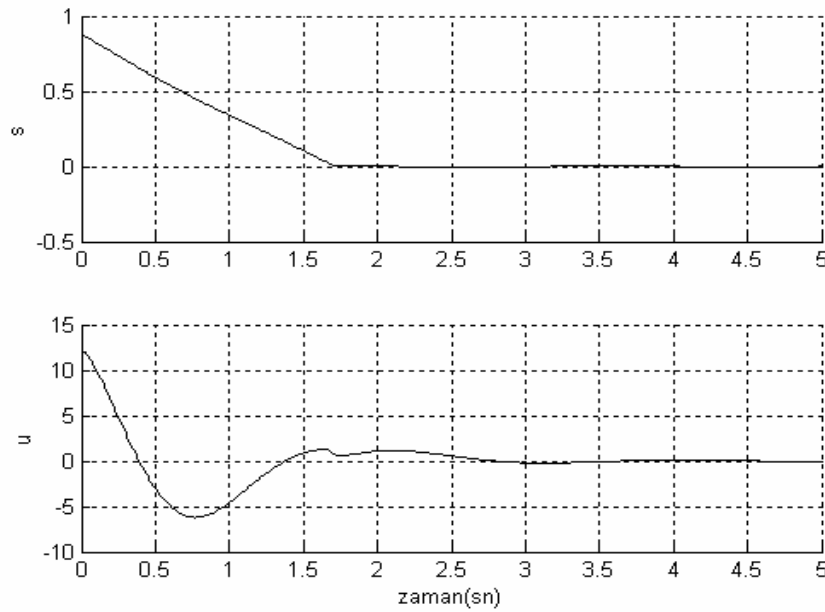
olarak ifade edilebilir. Çizelge 2.1 de tipik bir ters sarkaç sistemi parametre değerleri vardır.

Çizelge 2.1 Ters sarkaç için kullanılan nümerik değerler

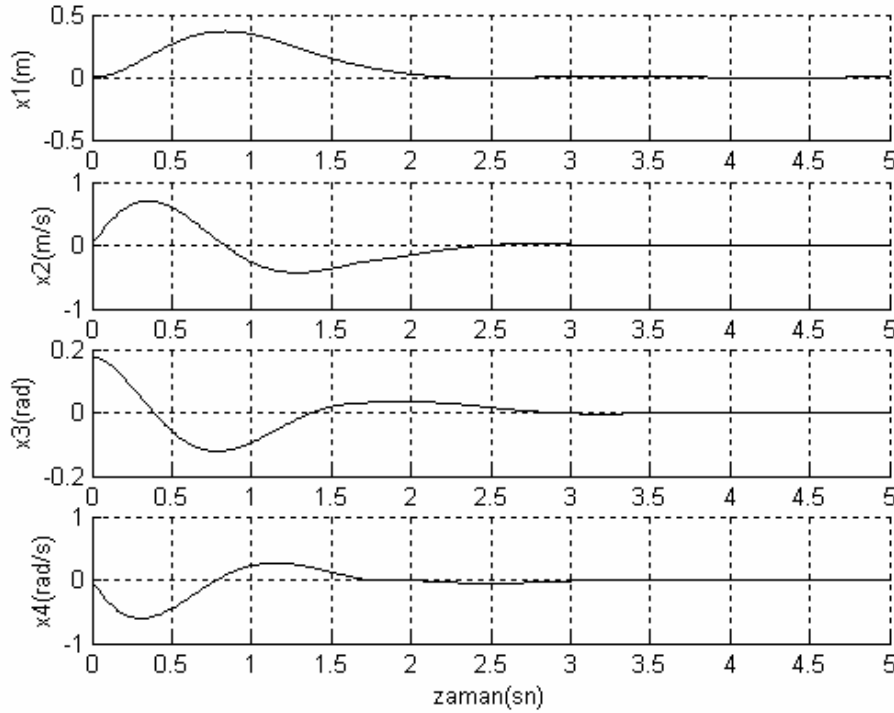
Parametreler	Sembol	Değeri	Birimi
Aracın kütlesi	M	3	kg
Ters Sarkacın kütlesi	m	0.5	kg
Ters Sarkacın uzunluğu	$l$	0.5	m
Aracın sürtünme katsayısı	b	2	kg/sn
Yerçekimi ivmesi	g	9.8	m/sn <sup>2</sup>

Yapılan testlerle (Yazıcı, 2000), (2.22) ve (2.26) deki matematiksel modellerin fiziksel beklentilere uyumlu tepkiler verdiği gözlenmiştir.

Ters sarkaç sistemi için ifade (2.4) oluşturularak, verilen kararsız denge noktası etrafında kayma yüzeyi matrisi  $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$  için kayma yüzeyi dinamiğinin kararlı olduğu görülebilir. Kayma yüzeyi bant genişliğini, örneğin,  $\delta = 0.02$  ve  $\hat{\rho} = 1$  seçip, ifade (2.18) ile verilen kayma kipli kontrol denetleyicisi  $x^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  ilk durum değerleri için ifade (2.22) ile verilen doğrusal olmayan ters sarkaç sistemine uygulandığında Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 ile verilen benzetim grafikleri elde edilir.



Şekil 2.3 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında, kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



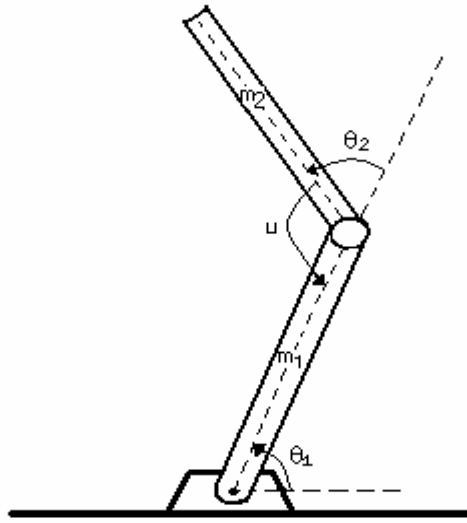
Şekil 2.4 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi

#### **2.1.3.4 Kayma kipli denetleyicinin acrobot sistemine uygulanması**

Bu kısımda da önceki kısımda olduğu gibi önce sistem modeli oluşturulmakta, sonrasında ise, kayma kipli denetleyici tasarım ve uygulaması gerçekleştirilmektedir. Serbestlik derecesinden daha az sayıda aktüatör olduğundan, acrobot yetersiz uyarımlı (underactuated) mekanik sistem olarak sınıflanabilir. Acrobot'un kontrolü geçen yıllarda bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir (Spong, 1995; Oriolo and Nakamura, 1991; Berkemeier and Fearing, 1999). Acrobot, Şekil 2.5 deki gibi birinci bağlantı noktasında serbest salınım yapabilen ve ikinci bağlantı noktasında ise  $u$  torku ile hareket ettirilebilen iki linkli bir robot koludur.

Sistem olarak tamamen dikey-yukarı doğru olduğu pozisyonda kararsız olup, uygun bir kuvvet uygulamadığında herhangi bir yöne düşebilir. Acrobot sisteminde,  $m_1, m_2$  sırasıyla link 1 ve link 2 nin kütlesi ve  $l_1, l_2$  ise link 1 ve link 2 nin

uzunluklarıdır. Bütün kütleler linklerin orta noktalarında yoğunlaştırılmış kabul edilip,  $l_{c1}, l_{c2}$  sırasıyla linkler için bağlantı noktalarından kütle merkezlerine olan uzaklıklarını göstermektedir. Link 1 in yatay çizgiyle yaptığı açı  $\theta_1$  ve link 2 nin link 1 e göre yaptığı açı ise  $\theta_2$  dir.  $I_1$  ve  $I_2$  sırasıyla linklerin atalet momentini temsil etmektedir.



Şekil 2.5 Acrobot sistemi

Acrobot sisteminin doğrusal olmayan modeli aşağıdaki gibidir (Mahindrakar and Banavar, 2001; Boone, 1997; Spong, 1995):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-d_{12}(u - c_2 - \phi_2) - d_{22}(c_1 + \phi_1)}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{d_{11}(u - c_2 - \phi_2) + d_{12}(c_1 + \phi_1)}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Burada

$$\begin{aligned} c_1 &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(x_3) x_4^2 - 2m_2 l_1 l_{c2} x_2 x_4 \sin(x_3) \\ c_2 &= m_2 l_1 l_{c2} x_2^2 \sin(x_3) \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(x_1) + m_2 l_{c2} g \cos(x_1 + x_3) \\
\phi_2 &= m_2 l_{c2} g \cos(x_1 + x_3) \\
d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(x_3)) + I_1 + I_2 \\
d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\
d_{12} &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(x_3)) + I_2 \\
x_1 &:= \theta_1, \quad x_2 := \dot{\theta}_1, \quad x_3 := \theta_2, \quad x_4 := \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Acrobot sistemi için tipik parametre değerleri Çizelge 2.2 de verilmektedir:

Çizelge 2.2. Acrobot sistemi tipik parametre değerleri

Parametre	Tanımı	Değeri
$l_1, l_2$	Link uzunlukları	1.0 m
$l_{c1}, l_{c2}$	Ek-kütle merkezi u.	0.5 m
$m_1, m_2$	Link kütleleri	1.0 kg
$I_1, I_2$	Link ataletleri	1.0 kg.m <sup>2</sup>
$g$	yerçekimi	9.81 m/s <sup>2</sup>

Çizelge 2.2 de verilen değerler ile, ifade (2.27) in durum uzayı temsili

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{\left[ -(1.25 + 0.5\cos(x_3))(u - 0.5x_2^2\sin(x_3)) - 4.9\cos(x_1 + x_3) \right. \\
&\quad \left. + (0.625x_2 + 1.25x_2)x_4\sin(x_3) - 18.4\cos(x_1) - 6.13\cos(x_1 + x_3) \right]}{4.375 + 1.25\cos(x_3) - (1.25 + 0.5\cos(x_3))^2} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{\left[ (3.5 + \cos(x_3))(u - 0.5x_2^2\sin(x_3)) - 4.9\cos(x_1 + x_3) \right. \\
&\quad \left. + (1.25 + 0.5\cos(x_3))((-0.5x_4 - x_2)x_4\sin(x_3) + 14.7\cos(x_1) + 4.9\cos(x_1 + x_3)) \right]}{4.375 + 1.25\cos(x_3) - (1.25 + 0.5\cos(x_3))^2}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklinde olur.



Burada da amaç dikey-yukarı pozisyonda kararsız olan sistemi kararlı hale getirecek bir denetleyici tasarlamaktır.  $X_e = [\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  dikey-yukarı olan denge noktasını temsil etmek üzere, bu noktadaki doğrusallaştırılmış model

$$\dot{X} = A(X - X_e) + Bu \quad (2.29)$$

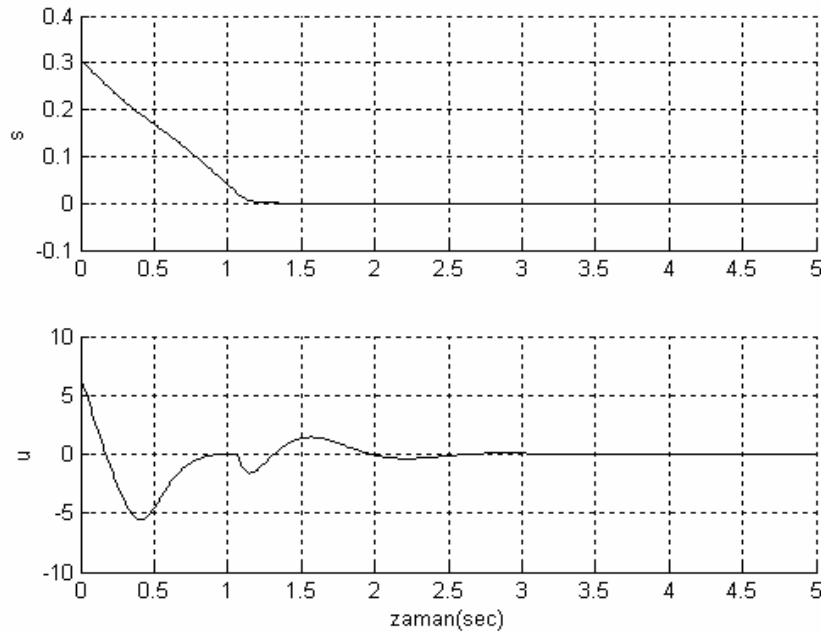
olup burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.2209 & 0 & -0.9570 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4.7853 & 0 & 5.2639 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.6829 \\ 0 \\ 1.7560 \end{bmatrix}$$

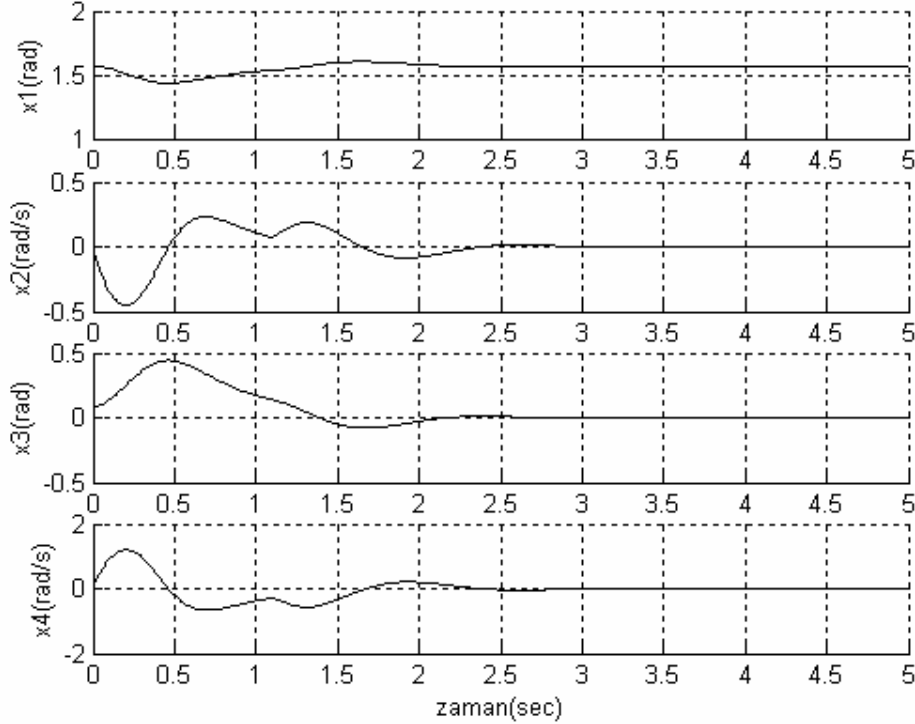
olmaktadır. Acrobot sistem durumları için  $\tilde{X} := X - X_e$  şeklinde bir hata sistemi tanımlansın. Bu hata sistemi için kayma yüzeyi  $S := \{\tilde{X} : G\tilde{X} = 0\}$  formunda olup

kararlı bir yüzey için  $G = [10 \ 4 \ 3.5 \ 1.5]$  olarak seçilebilir.  $X = \left[ \frac{\pi}{2} \ 0 \ \frac{\pi}{36} \ 0 \right]^T$

ilk durum değerleri ve kayma yüzeyi bant genişliğini  $\delta = 0.02$  ve  $\hat{\rho} = 3$  için ifade (2.18) yapısındaki kayma kipli denetleyici ifade (2.28) deki doğrusal olmayan Acrobot sistemine uygulandığında Şekil 2.6 ve Şekil 2.7 deki benzetim grafikleri elde edilir.



Şekil 2.6 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin acrobot sistemine uygulanmasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



Şekil 2.7 (Decarlo et al., 1988) deki denetleyicinin acrobot sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi

## 2.2 Doğrusal Olmayan Programlama

Doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde verilen kısıtlı asıl bir problemi çözmek için kısıtsız ikil problem oluşturulur. İkil problemlerin oluşturulması ve ikil aralık oluşturmaksızın problem çözümüne yönelik literatürde birçok yöntem vardır. Fakat, bunlar dışbükeylik şartı istemektedirler. Bu yöntemlerden genişletilmiş subgradient algoritması, dışbükey olan durumlarda olduğu gibi dışbükey olmayan durumlarda da, sıfır ikil aralıklı çözümler oluşturmaktadır. Bu bölümde, doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde kullanılan dışbükey kümeler, dışbükey fonksiyonlar, ikil problem, ikil aralık v.b. bazı temel kavramlar tanıtılmaktadır. Son olarak ise, doğrusal olmayan programlamaya yönelik literatürde bilinen bazı çözüm yöntemleri ve sıfır ikil aralıklı çözümler üretebilen genişletilmiş subgradient algoritması tanıtılacaktır.

### 2.2.1 Bazı dışbükey-içbükey analiz kavramları

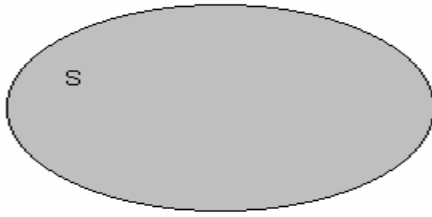
Eniyileme problem çözümlerinin analizlerinde ve çözüme yönelik yöntemler geliştirme aşamasında dışbükey küme ve dışbükey fonksiyon kavramları önemli bir yere sahiptir (Bazaraa et al., 1993). Örneğin, dışbükey küme üzerinde tanımlı bir dışbükey fonksiyonun yerel enküçük değeri, aynı zamanda global enküçük değere karşılık gelmektedir (Luenberger, 1984). Bu bağlamda, eniyileme problemleri iki ana kısımdan oluşmaktadır. Bunlardan ilki karar değişkenleri ve kısıtlar tarafından belirlenen alternatifler kümesi, diğeri ise bu alternatifler kümesi üzerinde tanımlı, seçme kriteri olan amaç fonksiyonudur. Problemin çözümü için seçilecek olan yöntem, genellikle alternatifler kümesi ve amaç fonksiyonunun yapısına bağlıdır. Bu alt kısımda, ileride kullanılacağı ölçüde ve kavram kargaşası oluşturmaması açısından literatürde de olan bazı dışbükeylik analiz kavramları kısaca verilmektedir.

#### 2.2.1.1 Dışbükey Kümeler

Doğrusal ve doğrusal olmayan programlamada çözüm aranırken, kullanılan önemli temel kavramlardan biri de dışbükeylik (convex) kavramı olup burada kısaca ele alınmaktadır.  $S \subset R^n$  şeklinde verilen bir küme için, bu kümenin her hangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine kümeye aitse S kümesine dışbükey denir. Ve, verilen  $k_1, k_2 \in S$  ve her  $\lambda \in [0,1]$  için

$$\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2 \quad (2.30)$$

ifadesi  $k_1, k_2$  nin dışbükey bileşimi olarak adlandırılır. Şekil 2.8.a-b sırasıyla dışbükey ve dışbükey olmayan kümeleri gösterir. Şekil 2.8.a da küme içindeki her noktanın dışbükey bileşimi yine kümede kalır. Dolayısıyla bu kümeye dışbükey küme denir. Şekil 2.8.b de ise seçilen  $k_1, k_2$  noktalarının dışbükey bileşimi tamamen kümeye ait olmadığı için, bu küme dışbükey değildir.



Şekil 2.8.a Dışbükey küme



Şekil 2.8.b Dışbükey olmayan küme

### 2.2.1.2 Dışbükey fonksiyonlar

$S \subset R^n$  olmak üzere  $f : S \rightarrow R$  tanımlanmış gerçel değerli bir fonksiyon olsun.

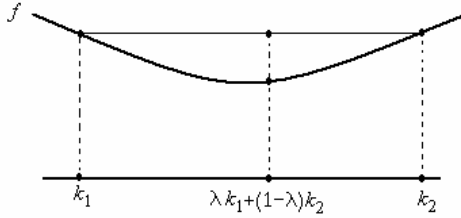
Eğer her  $k_1, k_2 \in S$  ve  $\lambda \in (0,1)$  için

$$f(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2) \leq \lambda f(k_1) + (1-\lambda)f(k_2)$$

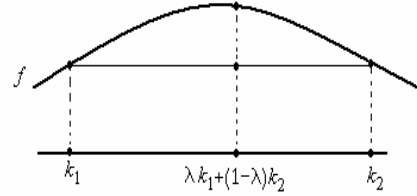
ise,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde dışbükeydir denir. Kesin eşitsizlik durumunda ise  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde kesin dışbükeydir denir. Eğer her  $k_1, k_2 \in S$  ve  $\lambda \in (0,1)$  için

$$f(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2) \geq \lambda f(k_1) + (1-\lambda)f(k_2)$$

ise,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde içbükey denir. Kesin eşitsizlik durumunda ise  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde kesin içbükeydir denir. Şekil 2.9.a ve Şekil 2.9.b de sırasıyla dışbükey ve içbükey fonksiyonlar vardır. Şekil 2.9.a da  $k_1$  ve  $k_2$  noktaları  $f$  nin tanım kümesinde iki ayrı nokta olsun ve  $\lambda \in (0,1)$  olmak üzere  $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$  noktası ele alınsın. Dikkat edilirse  $\lambda f(k_1) + (1-\lambda)f(k_2)$  ifadesi  $f(k_1)$  ve  $f(k_2)$  in ağırlıklı ortalamasını,  $f(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2)$  ise  $f$  fonksiyonunun  $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$  noktasındaki değerini verir. Dışbükey  $f$  fonksiyonu için,  $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$  noktasında  $f$  fonksiyonun değeri  $f(k_1)$  ve  $f(k_2)$  nin ağırlıklı ortalamasından her zaman az veya eşittir.



Şekil 2.9.a. Dışbükey Fonksiyon



Şekil 2.9.b. İçbükey Fonksiyon

Dışbükey fonksiyonların en önemli özelliklerinden birisi de tanım kümesinin iç noktalarında sürekli olmalarıdır.  $S \subset R^n$  boş olmayan bir küme ve  $f : S \rightarrow R$  dışbükey bir fonksiyon olsun. O zaman  $f$  fonksiyonu  $S$  in iç noktalarında sürekli dir.

### 2.2.1.3 Dışbükey fonksiyon için subgradient kavramı

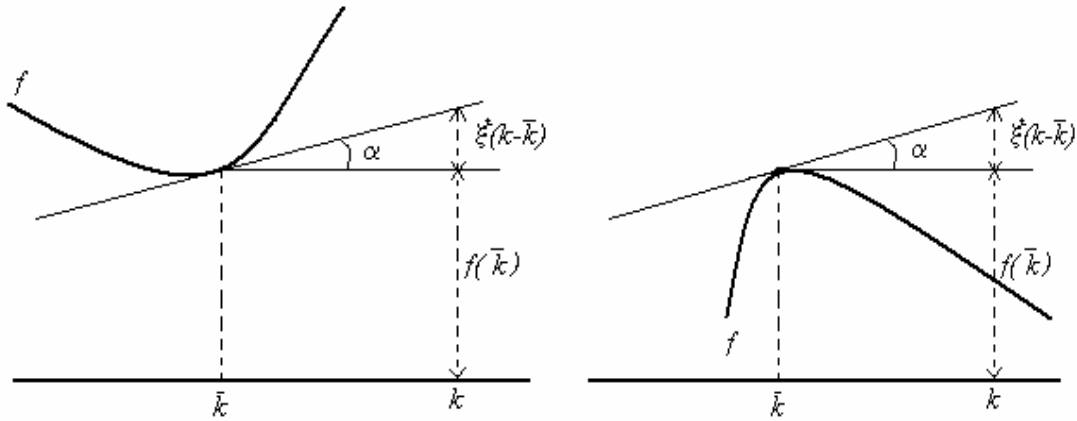
$S \subset R^n$  boş olmayan dışbükey bir küme ve  $f : S \rightarrow R$  dışbükey bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f(k) - f(\bar{k}) \geq \xi'(k - \bar{k}), \forall k \in S$$

için koşulu sağlayan  $\xi \in R^n$  vektörüne,  $f$  fonksiyonunun  $\bar{k} \in S$  noktasındaki bir subgradienti denir. Aynı şekilde  $f : S \rightarrow R$  içbükey bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f(k) - f(\bar{k}) \leq \xi'(k - \bar{k}), \forall k \in S$$

için koşulu sağlayan  $\xi \in R^n$  vektörüne,  $f$  fonksiyonunun  $\bar{k} \in S$  noktasındaki bir subgradienti denir. Şekil 2.10.a-b dışbükey ve içbükey fonksiyonların subgradientlerinin geometrik yorumunun iki boyutlu düzlemde gösterimidir.



Şekil 2.10.a.b. Dışbükey-İçbükey fonksiyonlarda subgradientlerin grafiksel gösterimi

Şekil 2.10.a-b de görülebileceği gibi subgradient vektörü  $\xi$  buradaki destek hiperdüzlemin eğimine karşı gelmektedir.  $f$  fonksiyonunun,  $\bar{k} \in S$  noktasındaki tüm subgradientleri kümesine  $f$  fonksiyonunun bu noktadaki subdiferansiyeli denir ve  $\partial f(\bar{k})$  ile gösterilir. Dışbükey  $f$  fonksiyonu için subdiferansiyel

$$\partial f(\bar{k}) = \left\{ \xi \in R^n \mid f(k) - f(\bar{k}) \geq \xi'(k - \bar{k}), \forall k \in S \right\} \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır.

### 2.2.2 Doğrusal olmayan programlama

Doğrusal olmayan programlama (DOP) problemi, verilen bir amaç fonksiyonunu belli kısıtlar altında eniyi yapan değeri bulmaktır. DOP da amaç fonksiyonu veya kısıtlardan herhangi biri doğrusal olmayabilir. Takip eden kısımda doğrusal olmayan programlamada kullanılan matematiksel yöntemler tanıtılmaktadır. Öncelikle asıl problem ve karşılık gelen matematiksel model kullanılarak bazı temel tanımlar yapılmakta, sonrasında ise asıl problemin çözümü için kurulan ikil problem tanıtılmaktadır. Son olarak ise, bazı durumlarda, ikil problemin bulunan değeri ile asıl problemin eniyi değeri arasında oluşan ikil aralık tanıtılacaktır.

### **2.2.2.1 Asıl Problem**

En genel haliyle bir doğrusal olmayan programlama problemi ( $P$ ) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left. \begin{array}{l} g_i(K) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(K) = 0 \quad i = 1, \dots, l \\ K \in \Omega \\ k.a. \\ \text{Enk } f(K) \end{array} \right\} : P \quad (2.32)$$

Burada,  $\Omega \subset R^n$  ve  $K$  ise  $n$  tane bileşeni olan bir vektördür.  $f(K)$  amaç fonksiyonu (objective function),  $g_i(K) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$  eşitsizlik kısıtları (*inequality constraints*),  $h_i(K) = 0 \quad i = 1, \dots, l$  ise eşitlik kısıtları (*equality constraints*) olarak bilinir. ( $P$ ) ye asıl problem denir. DOP problemlerinde,  $\Omega$  kümesinde genellikle karar değişkenlerin alt ve üst sınırları tanımlanır. Bazı algoritmalarda kısıtların da kısmen bu kümeye dahil edilmesi problem çözümünü kolaylaştırmaktadır.

Genelde, ifade (2.32) ile verilen kısıtlı problemler, karşı gelen ikil problem oluşturularak kısıtsız hale getirilip çözülür. Literatürde, ikil problemlerin oluşturulmasında değişik Lagrange fonksiyonları kullanılmaktadır (Rockafellar and Wets, 1998; Azimov and Gasimov, 1999; Rubinov and Gasimov, 2002; Rubinov and Gasimov, 2003). Probleme bağlı olarak uygun Lagrange fonksiyonun tipi belirlenir. Takip eden kısımda, klasik Lagrange fonksiyonu kullanılarak ikil problem oluşturulmaktadır.

### **2.2.2.2. Lagrange ikil problem**

Genel haliyle ifade (2.32) ile verilen ( $P$ ) probleminin Lagrange ikil probleminin kurulması sırasında eşitsizlik ve eşitlik kısıtları sırasıyla  $u_i$  ve  $v_i$  çarpanlarıyla çarpılarak Lagrange fonksiyonu

$$L(K, U, V) = f(K) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(K) + \sum_{i=1}^l v_i h_i(K) \quad (2.33)$$

olur.

$$U = [u_1 \quad \dots \quad u_m], \text{ ve } V = [v_1 \quad \dots \quad v_l]$$

vektörleri ikil problemin karar değişkenleridirler. İkili fonksiyon

$$\theta(U, V) = \text{Enk}_{K \in \Omega} L(K, U, V) \quad (2.34)$$

ve (P) nin Lagrange ikil problemi

$$\left. \begin{array}{l} U \in R^m, u_i \geq 0, V \in R^l \\ k.a. \\ \text{Enb } \theta(U, V) \end{array} \right\} : LD \quad (2.35)$$

olur. İkili problem (LD), Lagrange fonksiyonunun en küçük alt sınırının en büyüklüğünü gösterdiği için Enb - Enk ikil problem olarak da isimlendirilmektedir. Eşitsizlik kısıtlarına karşı gelen ikil problem karar değişkenlerinin negatif olmama kısıtı vardır. Kısıtlı (2.32) ifadesi ile verilen (P) problemi için Lagrange fonksiyonu yardımıyla kısıtsız (LD) probleminin oluşturulması çözümün daha kolay bulunmasına yardımcı olur.

Eğer, K asıl problem P ve (U, V) de ikil problem LD için uygun bir çözümse, o zaman

$$f(K) \geq \theta(U, V) \quad (2.36)$$

olur (Bazaraa et al., 1993).

#### *İkil problemin geometrik açıklanması*

İkil problemin, asıl problemle geometrik olarak ilişkisini açıklamada, gösterimde kolaylık olması için, sadece bir eşitsizlik kısıtına sahip asıl problem

$$\left. \begin{array}{l} g(K) \leq 0 \\ K \in \Omega \\ k.a. \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

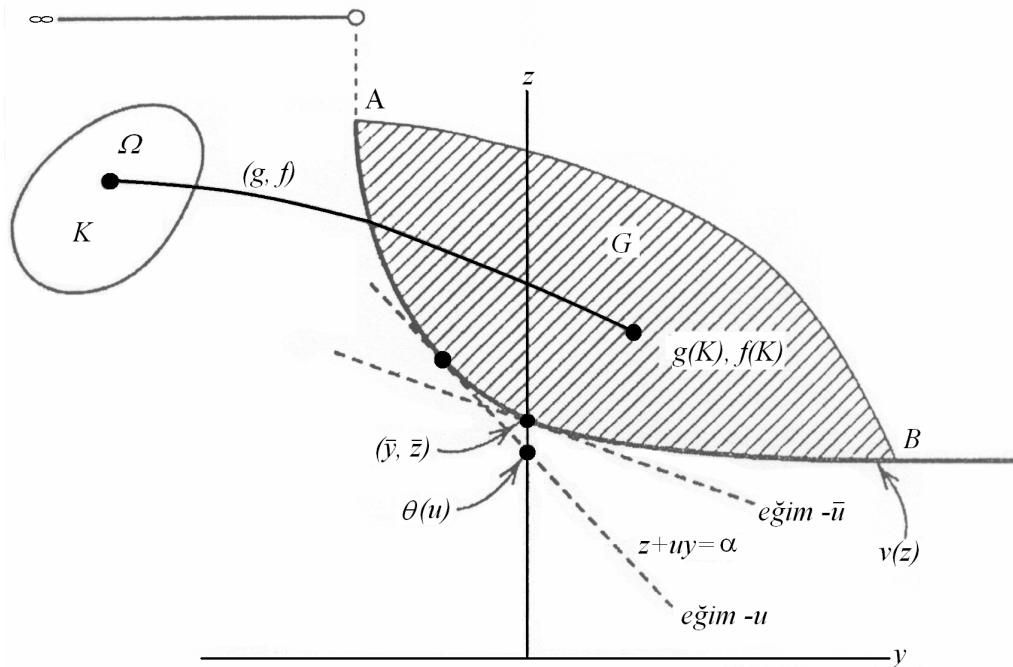
$$\text{Enk } f(K)$$

ele alınsın. (y, z) uzayında  $\{(y, z) : y = g(K), z = f(K), \text{bazı } K \in \Omega\}$  kümesi, Şekil 2.11 de G ile gösterilmiştir. G kümesi,  $\Omega$  nın (g, f) dönüşümü altındaki görüntüsüdür. Asıl problemin çözümü, G kümesindeki  $y \leq 0$  kısıdı sağlayan minimum z eksen



noktasını bulmaya eşdeğerdir. Bu nokta Şekil 2.11 de de görülebileceği gibi  $(\bar{y}, \bar{z})$  noktasıdır.

Asıl problemde bir adet eşitsizlik kısıtı olduğu için, ikil fonksiyonda Lagrange fonksiyonunun eşitsizlik kısıdının çarpanı olarak skalar  $u$  kullanılmaktadır. Kanonik form (2.35) den  $u \geq 0$  olmaktadır. İkili fonksiyon  $\theta(u)$  yu belirlemek için  $\Omega$  üzerinde,  $f(K) + ug(K)$  fonksiyonunu enküçüklemek gerekmektedir. Bu aynı zamanda,  $z + uy$  nin  $G$  kümesi üzerinde enküçüklenmesidir. Bu da  $z + uy = \alpha$  doğrusunun,  $G$  ye destek olacak şekilde negatif gradient yönünde aşağı doğru kaydırılması ile olur. Şekil 2.11 de görüldüğü gibi  $z + uy = \alpha$  çizgisinin  $z$  eksenini kestiği nokta,  $\theta(u)$  yu vermektedir. Dolayısıyla, ikil problem,  $z$  eksenini kesen destek hiper düzlemlerinden en büyük eğimlisinin eğimini bulmaktır. Şekil 2.11 e bakıldığında, en iyi ikil değer çözüm  $\bar{u}$ , karşılık gelen ikil amaç fonksiyonu değeri de  $\bar{z}$  dir. Bu durum için asıl ve ikil problem en iyi amaç fonksiyonlarının değerleri birbirlerine eşittir.



Şekil 2.11 Lagrange ikiliğin geometrik gösterimi (Bazaraa et al., 1993)

Şekil 2.11 de, A-B arası ve G bölgesinin alt örtüsü

$$v(y) = \text{enk} \{f(K) : g(K) \leq y, K \in \Omega\} \quad (2.38)$$

gibi bir fonksiyonla tanımlanabilir. İfade (2.38) ile verilen fonksiyon, eşitsizlik kısıtı  $g(K) \leq 0$  in sağ tarafının 0 dan  $y$  ye kaydırılması yoluyla orijinal amaç fonksiyonunun en iyi değerinin bulunmasıyla oluşur. Monoton azalan bu fonksiyon, perturbasyon fonksiyonu olarak bilinir ve ikil aralığın anlatımında ve ikil problemlerin analizinde önemlidir. Dikkat edildiğinde,  $y$  arttığında problemin uygun çözüm bölgesi artmakta veya aynı kalmaktadır. Bu durumda  $y$  ye bağlı olarak uygun çözüm kümesinin büyümesi sonucu  $f(K)$  fonksiyonunun değeri azalacak veya sabit kalacaktır. Buradan  $v(y)$  in monoton azalan bir fonksiyon olduğu görülebilir. Şekil 2.11 incelendiğinde, A noktasının sol tarafındaki noktalar uygun çözüm alanı dışında olduğu için  $v(y)$ ,  $\infty$  olur. Eğer  $v$  orijinde türevlenebiliyorsa,  $\dot{v}(0) = -\bar{u}$  olur. Eğer  $v$  dışbükey fakat orijinde türevlenemiyorsa, o zaman  $-\bar{u}$   $y=0$ , da  $v$  nin subgradient'ine karşılık gelir. Her iki durumda da,  $v(y) \geq v(0) - \bar{u}y$  sağlanmaktadır. Aşağıdaki örnekte verilen bir asıl problem için ikil problem oluşturulmakta ve geometrik olarak gösterilmektedir.

Örnek 2.1: Aşağıda verilen asıl problem ele alınsın.

$$\begin{aligned} -k_1 - k_2 + 4 &\leq 0 \\ k_1, k_2 &\geq 0 \\ k.a. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\text{Enk } k_1^2 + k_2^2$$

İfade (2.37) deki kompakt yapıya benzetmek için, burada  $f(K) = k_1^2 + k_2^2$ ,  $g(K) = -k_1 - k_2 + 4$  ve tanım kümesi  $\Omega = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 \geq 0\}$  olarak alınabilir.

i- Asıl problem, geometrik olarak orijinden  $-k_1 - k_2 + 4 = 0$  doğrusuna en kısa mesafeyi bulmaya eşdeğerdir. En kısa mesafenin sağlandığı nokta (2,2) dir. Buna karşılık gelen eniyi amaç fonksiyonu değeri de 8 dir.

ii- İkili problem oluşturularak eniyi çözüm bulunmak istendiğinde, Lagrange ikil fonksiyon

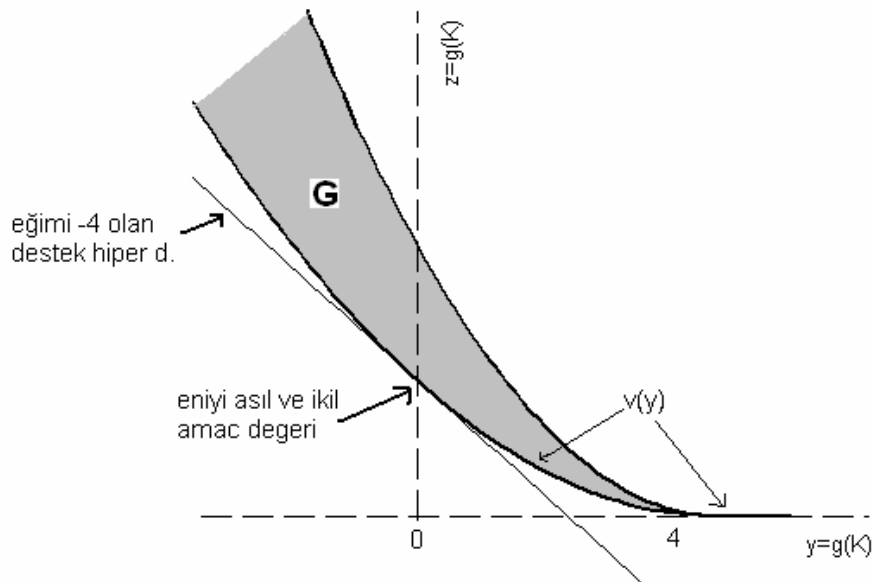
$$\begin{aligned}\theta(u) &= \text{Enk}_{K \in \Omega} \{k_1^2 + k_2^2 + u(-k_1 - k_2 + 4) : K = (k_1, k_2) \geq 0\} \\ &= \text{Enk} \{k_1^2 - uk_1 : k_1 \geq 0\} + \text{Enk} \{k_2^2 - uk_2 : k_2 \geq 0\}\end{aligned}\quad (2.40)$$

şeklinde oluşturulabilir. Enküçük değer  $k_1 = k_2 = \frac{u}{2}$  de oluşur. Dolayısıyla, ifade (2.35) deki Lagrange ikil problem

$$\begin{aligned}u &\geq 0 \\ k.a. \\ \text{Enb } &\left(\frac{-1}{2}u^2 + 4u\right)\end{aligned}\quad (2.41)$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse  $\theta(u)$  içbükey olup,  $u \geq 0$  için  $\bar{u} = 4$  de eniyi değere sahip olur. Dikkat edilirse eniyi asıl problem ve ikil problem değeri 8 olup, birbirine eşittir. Burada ikil aralığın sıfıra eşit olduğu görülür.

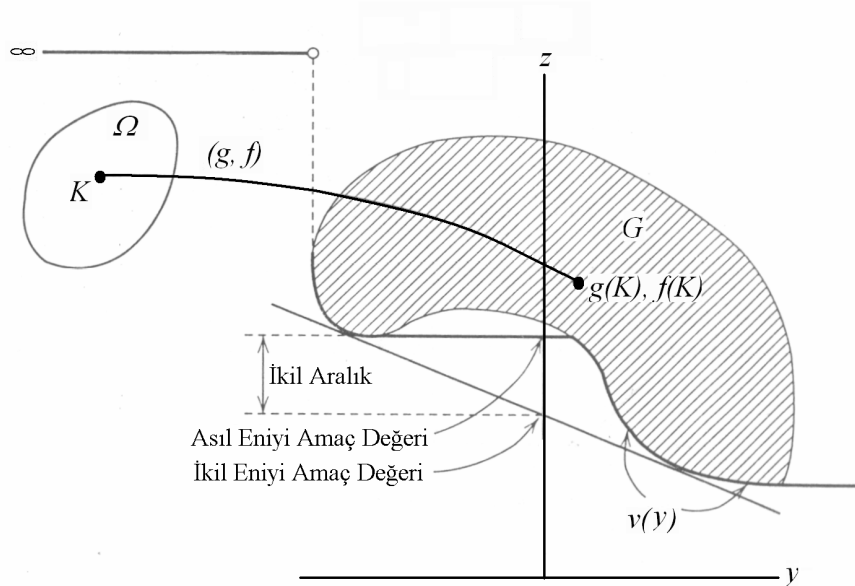
Asıl problem  $y = g(K)$  ve  $z = f(K)$  tanımlamasıyla  $(y, z)$  düzlemine taşınmak istensin.  $\Omega$  kümesi üzerinde  $(g, f)$  dönüşümü yapıldığında Şekil 2.12 elde edilir. Şekil 2.12 incelendiğinde, i-  $y=0$  noktasındaki  $z$  fonksiyon değeri 8 olup asıl ve ikil problemin en iyi değerine eşittir. ii-  $y=0$  noktasındaki destek düzleminin eğimi, ikil problem için bulunan  $\bar{u} = 4$  eniyi değerinin negatifine eşittir.



Şekil 2.12 İkil problemin geometrik gösterimi

### 2.2.2.3 İkili Aralık

İfade (2.36) ile gösterildiği gibi, asıl problemin en iyi değeri her zaman için ikil problemin en iyi değerinden büyük veya ona eşittir. Eğer kesin eşitsizlik durumu oluşursa, ikil aralık (duality gap) olduğu söylenir. Şekil 2.13 ikil aralığı tek bir eşitsizlik kısıtı olan bir eniyileme problemi için göstermektedir. Perturbasyon fonksiyonu  $v(y)$  de bu şekilde gösterilmektedir. Bu fonksiyonun tanımına göre,  $G$  yi aşağıdan örten en büyük monoton artmayan fonksiyondur. Eniyi asıl problem değeri  $v(0)$  dır. Eniyi ikil amaç değerini veren destek doğrusu Şekil 2.13 de verilmiştir. Bu doğrunun  $z$  eksenini kestiği nokta ile  $v(0)$  değerleri birbirinden farklıdır. Özellikle bakmak gerekirse,  $v(y) \geq v(0) - \bar{u}y$  olan bir  $\bar{u}$  yoktur.



Şekil 2.13 İkili aralığın gösterimi (Bazaraa et al., 1993)

### 2.2.3 DOP için kullanılan bazı çözüm yöntemleri

Seçilen Lagrange fonksiyonunun, asıl problemin eniyi değeriyle, ikil problemin en iyi değerinin birbirine eşit olmasını garanti etmesi gereklidir. Klasik Lagrange fonksiyonları dışbükey problemler için bunu garanti etmektedir. Fakat, amaç fonksiyonu veya kısıtların en az bir tanesi dışbükey değilse klasik Lagrange

fonksiyonları bunu garanti etmez (Bazaraa et al., 1993; Bertsekas, 1995). Dolayısıyla dışbükey olmayan problemler için genişletilmiş Lagrange fonksiyonları kullanılması gereklidir.

Takip eden kısımlarda kesme düzlemi yöntemi, ceza fonksiyonları yöntemi, Lagrange çarpanlar yöntemi, ve türevlenemeyen-dışbükey olmayan problemler için de kullanılabilen genişletilmiş subgradient yöntemi (Gasimov, 2002; Rubinov and Gasimov, 2002) sunulmakta ve kolay anlatım açısından tek kısıtlı bir örneğe uygulanmaktadır. Bu yöntem, geniş sınıf dışbükey olmayan problemler için ikil aralığın sıfıra eşit olmasını garantiliyor (Gasimov, 2002; Azimov and Gasimov, 1999; Rubinov and Gasimov, 2003; Rubinov and Gasimov, 2002; Gasimov and Rubinov, 2004; Azimov and Gasimov, 2002).

### **2.2.3.1 Kesme Düzlemi Yöntemi**

Kesme düzlemi yönteminde (Cutting Plane Method ), ifade (2.32) ile verilen asıl problem (P) için ikil fonksiyon ,

$$\theta(U, V) = \text{Enk}_{K \in \Omega} f(K) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(K) + \sum_{i=1}^l v_i h_i(K) \quad (2.42)$$

şeklinde oluşturulmakta olup ikil problem

$$\left. \begin{array}{l} U \geq 0 \\ k.a. \\ \text{Enb } \theta(u, v) \end{array} \right\} : KD \quad (2.43)$$

olur. Aşağıda verilen algoritma, ikil problem (KD) yi çözmektedir.

*Kesme Düzlemi Yöntemi Algoritması* (Bazaraa et al., 1993; Bertsekas, 1995)

*İlk Adım:*  $g(K_0) \leq 0$  ve  $h(K_0) = 0$  olan  $K_0 \in \Omega$  noktası bul.  $k=1$  al ve Adım 1 e geç.

*Adım 1* : Aşağıdaki ana problemi çöz:

$$\begin{array}{l} z \leq f(K_j) + U g(K_j) + V h(K_j) \quad j = 1, \dots, k-1 \\ U \geq 0 \\ k.a. \\ \text{Enb } z \end{array} \quad (2.44)$$

Adım 2 : Aşağıdaki alt problemi çöz.

$$K \in \Omega$$

$$k.a. \quad (2.45)$$

$$\text{Enk } f(K) + U_k g(K) + V_k h(K)$$

$K_k$  en iyi çözüm olsun.  $\theta(U_k, V_k) = f(K_k) + U_k g(K_k) + V_k h(K_k)$  i hesapla.

Eğer  $z_k = \theta(U_k, V_k)$  ise **dur**:  $(U_k, V_k)$  en iyi ikil çözümdür.

Eğer  $z_k \geq \theta(U_k, V_k)$  ise  $k=k+1$  al ve Adım 1 e git.

Örnek 2.2: İfade (2.39) deki asıl problem bu yöntemle çözülmek istensin. Kesme düzlemi yöntemi için ikil fonksiyon

$$\theta(u) = \text{Enk}_{K \in \Omega} \{k_1^2 + k_2^2 + u(-k_1 - k_2 + 4) : k_1, k_2 \geq 0\} \quad (2.46)$$

şeklinde oluşturulabilir. Verilen kesme düzlemi yöntemi algoritması bu probleme uygulandığında 14 iterasyonda asıl ve ikil problemin eniyi çözümü olan 8 e ulaşılır. İkili problem karar değişkeni  $u = 4$ , asıl problem karar değişkenleri ise  $k_1 = k_2 = 2$  olarak bulunur. Burada oluşan ikilliğin geometrik gösterimi Şekil 2.12 ile aynıdır.

### 2.2.3.2 Ceza Fonksiyonları Yöntemi

Ceza Fonksiyonları Yönteminde (Bazaraa et al., 1993) (Penalty Functions Method), ifade (2.32) ile verilen asıl problem ( $P$ ) için ikil problem ( $CD$ ),

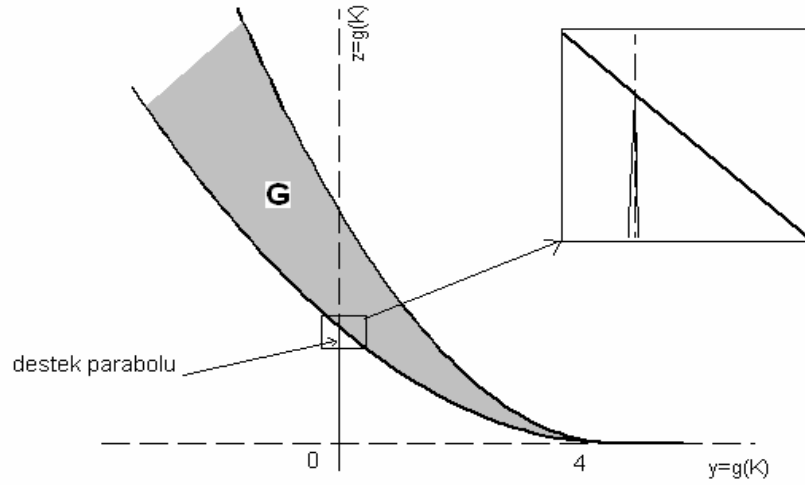
$$\left. \begin{array}{l} \mu \geq 0 \\ k.a. \\ \text{Enb } \theta(\mu) \end{array} \right\} : CD \quad (2.47)$$

olup, burada

$$\theta(\mu) = \text{Enk}_{K \in \Omega} f(K) + \mu \alpha(K), \quad \alpha(K) = \sum_{i=1}^m [\text{Enb} \{0, g_i(K)\}]^p + \sum_{j=1}^l |h_j(K)|^p \quad (2.48)$$

dır.





Şekil 2.14 Ceza fonksiyonları yönteminde oluşan ikilliğin gösterimi

### 2.2.3.3 Lagrange Çarpanlar Yöntemi

Çarpanlar Yönteminin (Bazaraa et al., 1993) (Methods of Multipliers), uygulanabilmesi için asıl problemde eğer varsa eşitsizlik kısıtları aylak değişkenler (slack variables) yardımı ile eşitlik kısıtlarına çevrilmesi gerekir. Sadece eşitlik kısıtlarının olduğu doğrusal olmayan programlamada asıl problem ( $\bar{P}$ ) aşağıdaki gibi verilsin.

$$\left. \begin{array}{l} h_i(K) = 0 \quad i = 1, \dots, l \\ K \in \Omega \\ k.a \\ \text{Enk } f(K) \end{array} \right\} : \bar{P} \quad (2.50)$$

Yukarıdaki problem için yardımcı Lagrange fonksiyonu

$$F_{ALAG}(K, V) = f(K) + \sum_{i=1}^l v_i h_i(K) + \sum_{i=1}^l \mu_i h_i^2(K) \quad (2.51)$$

olup, bu yöntem için algoritma aşağıda sunulmaktadır.

#### *Lagrange Çarpanlar Yöntemi Algoritması*

*Başlangıç Adımı:* Lagrange çarpanları  $v$  ve pozitif değerli  $\mu_1, \dots, \mu_l$  ceza parametreleri



seç.  $K_0$  boşluk (null) vektör ve  $VIOL(K_0) = \infty$  olsun. Burada ,herhangi bir  $K \in R^n$  için,

$$VIOL(K) = \text{Enb} \{|h_i(K)| : i = 1, \dots, l\}$$

olsun.  $k=1$  alıp iç döngüye geç.

*İç döngü:* Ceza fonksiyonları en küçükleme

Aşağıdaki kısıtsız problemi çöz

$$K \in R^n$$

*k.a.*

$$\text{Enk } F_{ALAG}(K, V)$$

$K_k$  en iyi çözüm olsun. Eğer  $VIOL(K_k) = 0$ , **dur**:

Diğer türlü, eğer

i-  $VIOL(K_k) \leq \frac{1}{4} VIOL(K_{k-1})$  dış döngüye geç.

ii-  $VIOL(K_k) > \frac{1}{4} VIOL(K_{k-1})$  ise  $i = 1, \dots, l$  e bütün kısıtları tarayıp

$|h_i(K_k)| > \frac{1}{4} VIOL(K_{k-1})$  olanlara karşılık gelen ceza parametrelerini  $\mu_i = 10\mu_i$

olarak al ve iç döngüyü tekrar et.

*Dış döngü:* Lagrange Çarpanları yenileme

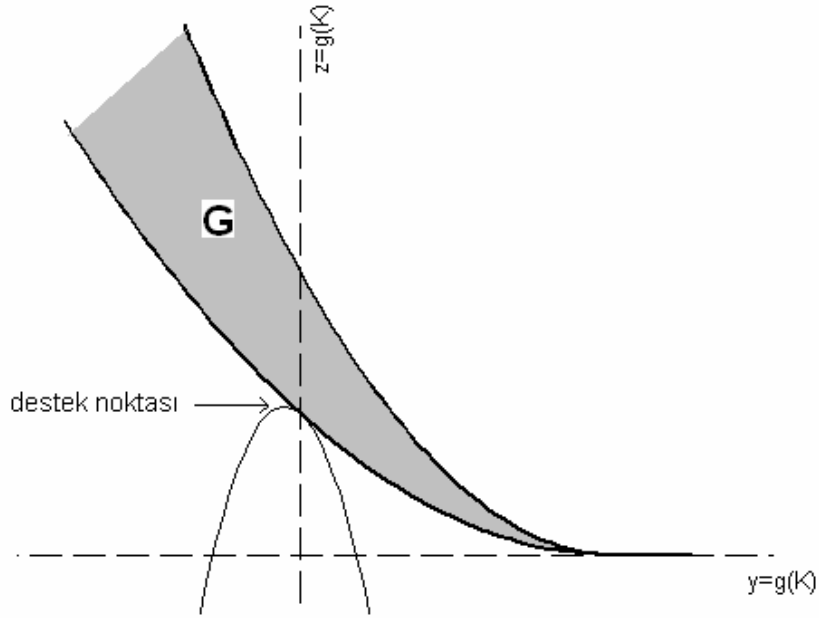
$i = 1, \dots, l$  için  $v_i = v_i + 2\mu_i h_i(K_k)$ , ve  $k=k+1$  al ve iç döngüye dön.

Örnek 2.4: İfade (2.39) deki asıl problem bu yöntemle çözülmek istensin. Çarpanlar yönteminin asıl probleme uygulanması için bu problemin yapısını dikkate alarak, kısıtı  $h(K) = 0$  şeklinde düşünebiliriz. Bu durumda Lagrange ikil fonksiyon

$$F_{ALAG}(K, v) = \text{Enk}_{K \in \Omega} (k_1^2 + k_2^2) + v(-k_1 - k_2 + 4) + \mu(-k_1 - k_2 + 4)^2$$

şeklinde oluşturulabilir. Verilen çarpanlar yöntemi algoritması bu probleme uygulandığında 5 iterasyonda asıl ve ikil problemin eniyi çözüm değeri olan 8 e ulaşılır. İkil problemde  $\mu = 10$  ve  $v = 3.9996$  olur. Asıl problem karar değişkenleri ise  $k_1 = k_2 = 2$  olarak bulunur. Burada oluşan ikilliğin geometrik gösterimi Şekil 2.15 de

gösterilmiştir. Dikkat edilirse burada da destek eğrisi ile  $y=0$  noktası desteklenmektedir.



Şekil 2.15 Lagrange Çarpanlar yönteminde oluşan ikiliğin gösterimi

### 2.2.3.4 Genişletilmiş subgradient yöntemi

Bu kısımda Gasimov (2002) tarafından geliştirilmiş genişletilmiş subgradient algoritması (Modified Subgradient Algorithm) tanıtılmaktadır. İfade (2.32) ile verilen problem, aylak değişkenler yardımıyla eşitsizlik kısıtlarından kurtarılarak aşağıdaki standart forma getirilir.

$$\begin{aligned} h(K) &= 0 \\ K &\in \Omega \\ k.a. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\text{Enk } f(K)$$

Burada  $h(K) = [h_1(K) \ \dots \ h_{m+1}(K)]^T$  olur. Problem (2.52) için Lagrange fonksiyonu

$$L(K, V, c) = f(K) + c \|h(K)\| - V^T h(K) \quad (2.53)$$

şeklinde kurulur. Burada  $V \in R^{m+1}$  ve  $c \in R_+$  olur. İkili fonksiyon ise

$$H(V, c) = \text{Enk}_{K \in \Omega} L(K, V, c) \quad (2.54)$$

olup ikil problem

$$\text{Enb}_{(V,c) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}_+} H(V,c) \quad (2.55)$$

şeklinde olur. Aşağıda ifade (2.55) ile verilen ikil problemi çözen algoritma sunulmaktadır.

*Genişletilmiş subgradient algoritması*

*Başlangıç:*  $V_1 \in \mathbb{R}^{m+1}$  ve  $c_1 \geq 0$  olacak şekilde  $(V_1, c_1)$  vektörünü seç,

ve  $j=1$  alıp Adım 1 e geç.

*Adım 1 :* Verilen  $(V_j, c_j)$  için aşağıdaki alt problemi çöz:

$$K \in \Omega$$

*k.a.*

(2.56)

$$\text{Enk}_K f(K) + c_j \|h(K)\| - v_j h(K)$$

$K_j$ , (2.56) in bir çözümü olsun. Eğer  $h(K_j) = 0$  o zaman **dur**;  $(V_j, c_j)$  (2.55) ile verilen ikil problemin en iyi bir çözümü, ve  $K_j$  ise (2.52) ile verilen asıl problemin bir çözümü olur. Dolayısıyla,  $f(K_j)$  de (2.52) de verilen problemin en iyi değeri olur. Eğer  $h(K_j) \neq 0$  ise Adım 2 ye geç.

*Adım 2:*  $(V_j, c_j)$  vektörünü aşağıdaki şekilde yenile.

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j - z_j h(K_j) \\ c_{j+1} &= c_j + (z_j + \varepsilon_j) \|h(K_j)\| \end{aligned} \quad (2.57)$$

Burada  $z_j$  ve  $\varepsilon_j$  pozitif sabit adım uzunlukları olup birazdan tanımlanacaklardır.

$j=j+1$  alıp Adım 1 e geri dön.

Genişletilmiş Lagrange fonksiyonu kullanılarak elde edilen ikil problem ele alınsın, herhangi bir uygun çözüm için bu problemin değeri, asıl problemin uygun noktadaki değerinden büyük değildir. Asıl ve ikil problemler en iyi değerlerine ulaştıklarında ise eşitlik oluşur.

Kısıtsız problemler için çözüm algoritmalarının literatürde belli bir olgunlukta olduğu dikkate alınarak, kısıtsız problem (2.56) nin global eniyi çözümünün bulunduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım altında, (2.56) den elde edilen herhangi bir çözüm  $K$  için  $h(K)=0$  olursa (Gasimov, 2002) de ispatlandığı üzere bu  $K$  asıl problemin çözümü olur. Eğer,  $h(K) \neq 0$  ise o zaman, (2.56) in en iyi değeri kesin olarak (2.52) un en iyi değerinden azdır. Bu durumda, Adım 2 kullanılarak ikil problemin değeri artırılır.

Problem (2.56) in, yenilenmiş  $(V,c)$  lere karşılık gelen çözümü her zaman için önceki adımda elde edilen enküçük değerden büyüktür. Bu özellik çarpanlar (multiplier) ve ceza (penalty) metotlarında (Bazaraa et al., 1993; Bertsekas, 1995) garanti edilemiyor.

*Adım uzunluğu hesaplanması:*

$(V_j, c_j)$  vektör çiftleri için

$$H(v_j, c_j) = \text{Enk}_{x \in X} \{ f(K) + c_j \|h(K)\| - V_j h(K) \} \quad (2.58)$$

hesapla ve karşılık gelen  $K_j$  için  $h(K_j) \neq 0$  olsun. Bu durumda  $K_j$  en iyi olmayıp adım genişliği  $z_j$  ve  $e_j$  şöyle hesaplanabilir:

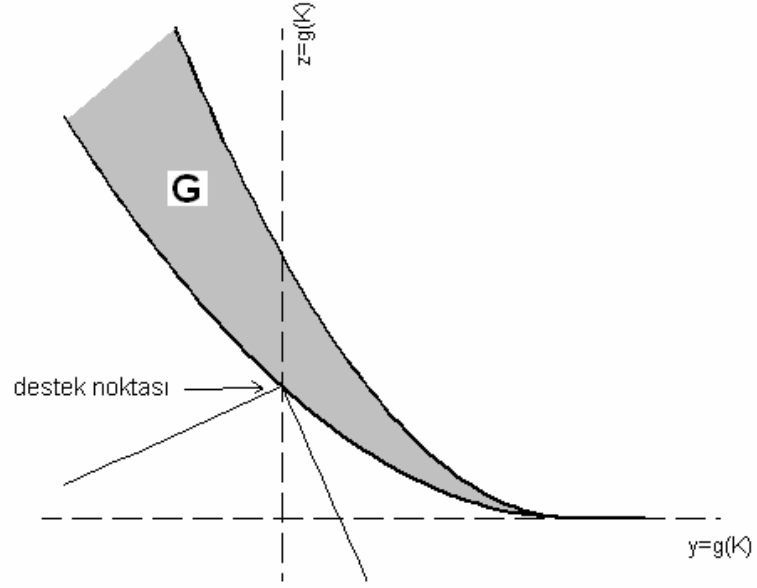
$$0 < z_j \leq \frac{2(\bar{H}_j - H(V_j, c_j))}{5\|h(K_j)\|^2}, \text{ ve } 0 < \varepsilon_j < z_j \quad (2.59)$$

Burada,  $\bar{H}_j$  ikil problem için bir üst sınırdır.

Örnek 2.5: İfade (2.39) deki asıl problem bu yöntemle çözülmek istensin. Genişletilmiş subgradient yöntemi için ikil fonksiyon

$$H(c, v) = \text{Enk}_{K \in \Omega} (k_1^2 + k_2^2) + c \|-k_1 - k_2 + 4\| - v(-k_1 - k_2 + 4) \quad (2.60)$$

şeklinde oluşturulabilir. Verilen algoritma bu probleme uygulandığında 1 iterasyonda asıl ve ikil problemin eniyi çözümü olan 8 e ulaşılır. İkil problemde karar değişkenleri  $c = 6.1019$  ve  $v = -4.0013$  olur. Asıl problem karar değişkenleri ise  $k_1 = k_2 = 2$  olarak bulunur. Burada oluşan ikilliğin geometrik gösterimi Şekil 2.16 da gösterilmiştir. Dikkat edilirse burada destek konisi ile  $y=0$  noktasında destekleme vardır.



Şekil 2.16 Genişletilmiş subgradient yönteminde oluşan ikiliğin gösterimi

### 3. KAYMA KIPLİ KONTROL DENETLEYİCİ TASARIMININ DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA KULLANILARAK GERÇEKLENMESİ

Bu bölümde, daha önce temel tasarım mantığı verilen kayma kipli kontrol (KKK) denetleyicilerinin doğrusal olmayan programlama (DOP) kullanılarak tasarlanması verilmektedir. Kayma kipli kontrol ile yeni yöntem arasında ilişkinin daha net aktarılması açısından, ilk olarak, kayma kipli kontrolde temel iki faz olan ulaşım ve kayma fazları iki ayrı DOP modeli ile temsil edilmekte ve oluşturulan denetleyici yapısı ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. Sonrasında ise, ulaşım ve kayma fazlarına karşılık gelen DOP modelleri seçilen belli ceza çarpanı ile tek bir DOP modeli altında birleştirilmekte ve ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır.

#### 3.1 Kayma Kipli Kontrol Denetleyicisinin DOP ile Modellenmesi

Tek girdili doğrusal olmayan bir sistem, geniş sınıfı temsil eden,

$$\dot{X} = a(X, u) \quad (3.1)$$

şeklinde verilsin. Burada  $X = [x_1 \dots x_n]$  sistem durum vektörünü,  $u$  skaler kontrol girişini, ve  $a$   $n$ -boyutlu fonksiyon vektörünü temsil etmektedir. İfade (3.1) ile tanımlanan sistemin kontrol edilebilir olduğu ve özel olarak ifade (2.11) formundaki sistemlerde tanımlanan eşleşme şartını (matching condition) sağladığı varsayalım. Sistem (3.1) için kararlı kayma yüzeyi

$$S := \{X : GX = 0\} \quad (3.2)$$

şeklinde olsun. Sistem girdisi,  $K$  geri besleme matrisi ile sistem durumlarının çarpımı,  $u = KX$ , formunda olsun.

Fiziksel sistemlerde sistem girdisi sınırlı olduğu için,

$$|u| \leq \alpha \quad (3.3)$$

şeklindeki bir kısıt sistem için gerekli bir spesifikasyon olabilmektedir. Ayrıca, sistem girdisindeki kabul edilebilir geribesleme matrisleri kümesi  $\Omega$  olsun. Bu bölümde önereceğimiz yöntemin kullanılabilmesi için  $\Omega$  kümesi kompakt olmalıdır, ancak bu kümenin elemanları sürekli veya kesikli olabilir.

### 3.1.1 Ulaşım fazının DOP ile modellenmesi

Bir başlangıç durumu kararlı kayma yüzeyinin belli komşuluğunda değilse, sistem girdisinin sistem durumlarını bu komşuluğa sürmesi tasarlayacağımız denetleyici tarafından sağlanmalıdır. Sistem durumlarının bir başlangıç durumundan, kayma yüzeyinin belli komşuluğuna gelmesi daha önce de belirtildiği gibi ulaşım fazı olarak adlandırılmaktadır. Bu komşuluk pozitif bir sayı olan  $\delta$  ile belirlenmektedir. Eğer  $|s| := |GX| > \delta$  ise, sistem durumları bu komşuluk dışındadır ve ulaşım fazındadır denir. Sistem durumlarını kayma yüzeyine sürmek amacıyla yönelik olarak sistem (3.1) için (2.14) formunda bir Lyapunov fonksiyonu seçilsin. İfade (2.15) ile verilen, Lyapunov fonksiyonun zamana göre türevinin,

$$\text{Enk } \dot{V} \quad (3.4)$$

işlemine tabi tutulması, diğer bir ifade ile enküçüklenmesi, sınırlı kontrol girişinin izin verdiği ölçüde, herhangi bir sistem durumunun kayma yüzeyine en hızlı yaklaşmasını sağlar.

Birçok durumda, sınırlı kontrol girişinin izin verdiği sistem durumlarının kayma yüzeyine yaklaşma hızı çok yüksektir. Sistem durumlarının kayma yüzeyine istenenden hızlı yaklaşmasını engellemek amacıyla

$$-\gamma^2 \leq \dot{V} \quad (3.5)$$

şeklinde,  $\gamma > 0$ , bir kısıt eklenebilir. Bu kısıttaki  $\gamma$  parametresi ile ulaşım fazında, sistem durumlarının kayma yüzeyine yaklaşım hızına üst sınır getirilmektedir.

Bu kısıtlar ve istenilen amaç doğrultusunda, ulaşım fazındaki doğrusal olmayan programlama modeli aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{aligned}
& -\gamma^2 \leq \frac{dV}{dt} \\
& u \in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\
& K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{3.6}$$

*k.a.*

$$\text{Enk } \frac{dV}{dt}$$

Dikkat edilirse, kayma kipli kontrolde ulaşım girdi tasarım aşamasında ifade (2.15) in negatif olması gerekmektedir. Burada ifade (3.4) ile verilen amaç fonksiyonunun eniyilenmesi durumunda,  $\dot{V}$  kısıtların izin vermesi halinde negatif olacağı için, ulaşım fazındaki bu gereksinim karşılanmış olur.

İfade (3.6) ile verilen model, sistem dinamikleri ve kayma yüzeyi cinsinden

$$\begin{aligned}
& -\gamma(GX)^2 \leq GXGa(X, KX) \\
& u \in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\
& K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

*k.a.*

$$\text{Enk } GXGa(X, KX)$$

şeklinde de yazılabilir. İfade (3.7) ile verilen DOP modelinin genişletilmiş subgradient algoritması ile çözümünü, 2. Bölümdeki notasyona uygun olarak sunulabilmesi için, ifade (2.52) ile verilen asıl problem formuna getirelim. Bu problem için ifade (2.52) deki kısıt vektörü

$$h(K) = [h_1(K) \ h_2(K)]^T \tag{3.8}$$

olarak ifade edildiğinde,  $h_1(K) = -GXGa(X, KX) - \gamma(GX)^2 + r_1$  ve  $h_2(K) = |KX| - \alpha + r_2$  olmaktadır. Burada  $r_1$  ve  $r_2$ , DOP da eşitsizlik kısıtlarını eşitlik



kısıtlarına dönüştürülmesinde kullanılan  $r_1, r_2 \geq 0$  gerçekte değerlerdir. İfade (2.52) deki amaç fonksiyonuna, ifade (3.7) deki  $GXGa(X, KX)$  terimi karşılık gelmektedir.

### 3.1.2 Kayma fazının DOP ile modellenmesi

Kayma fazı, sistem durumlarının  $|s| \leq \delta$  koşulunu sağladığı, yani kayma yüzeyinin  $\delta$ -komşuluğunda olduğu durumdur. Sistem durumları verilen bir anda, ulaşım veya kayma fazlarından sadece birindedir. Kayma fazında, kontrol girişinin, sistem durumlarının bu fazın dışına çıkmaksızın orijine ulaştıracak şekilde seçilmesi gerekmektedir.

Herhangi bir anda  $X$  durumunun kayma yüzeyi (3.2) üzerine projeksiyonu  $w$  olsun. Bu projeksiyon  $1 \times n$  boyutlu bir kayma yüzeyi matrisi  $G$  için  $\text{null}(G) = V = [v_1 \dots v_{n-1}]$  olmak üzere

$$w = \text{Pr } o_{j_{GX}} X = (X^T v_1)v_1 + \dots + (X^T v_{n-1})v_{n-1} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunabilir. Kontrol girişi öyle seçilsin ki, projeksiyon  $w$  bir sonraki durumda en küçük olsun. Sistem yörüngelerinin farklı kontrol girişleri için oluşabilecek

muhtemel yönlerinin,  $w$  yönündeki bileşenleri  $\frac{w^T \dot{X}}{\|w\|} w$  şeklinde ifade edilebilir. Bu

yönlerden  $w$  yi en azaltacak kontrol girdisini hesaplamak için, amaç fonksiyonu olarak

$$\text{Enk} \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|w\|} w \right\| \quad (3.10)$$

ifade edilebilir. Bu sistem durumlarının orijine yaklaştığını gösterir.

Kayma fazında amaç fonksiyonu ifade (3.10) ile belirlendiği için,  $V$  nin kayma yüzeyi üzerinde artmaması veya belli komşuluğunda kesin azalan olmasını sağlamak için bir kısıt gereklidir. Sistem girdisinin süresiz olduğu uygulamalarda Lyapunov

fonksiyonu  $V$  nin kesin azalan olmasını ve belirli zamanda kayma yüzeyinin belli komşuluğa gelmesini sağlamak için

$$\dot{V} \leq -\eta s^2 \quad (3.11)$$

olması yeterli olmaktadır (Edwards and Spurgeon, 1998). Bu kısıtta  $\eta$ , pozitif ve sıfırdan büyük bir sayı olup, sistem dinamiklerine bağlı olarak farklı değerlerde seçilebilir. Dikkat edilirse  $s=0$  için  $\dot{V} \leq 0$  olup, kayma yüzeyi üzerinde kalma koşulu sağlanır. Bu fazda da sistem durumlarının kayma yüzeyine yaklaşım hızı ifade (3.11) deki parametre olan  $\eta$  kullanılarak ayarlanabilir. Bu parametrenin ulaşım fazındaki  $\gamma$  parametresinden farklı değerlerde seçilmesi, sistemin ulaşım ve kayma fazında farklı performans göstermesini sağlar. Bu durumda, kayma fazında doğrusal olmayan programlama modeli aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -s^2 \eta \\ u &\in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\ K &\in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

*k.a.*

(3.12)

$$\text{Enk} \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$$

Kayma fazında bu problemin çözümü verilen kısıtlar altında amacımıza en uygun sistem girdisi olan  $u$  yu vermektedir. Bu model incelendiğinde amaç fonksiyonu ile orijine ulaşma hedeflenirken, birinci kısıt ile de kayma yüzeyinin komşuluğundan yüzeye yaklaşma veya üzerinde kalma garanti edilmektedir. Bu (3.12) modeli sistem dinamikleri ve kayma yüzeyi cinsinden yazılmak istendiğinde

$$\begin{aligned}
GXGa(X, KX) &\leq -(GX)^2 \eta \\
u &\in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\
K &\in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

*k.a.*

(3.13)

$$\text{Enk} \left\| w + \frac{w^T \frac{a(X, KX)}{|a(X, KX)|}}{\|w\|} w \right\|$$

şeklinde de yazılabilir. İfade (3.13) ile verilen DOP modelinin genişletilmiş subgradient algoritması ile çözülebilmesi için, ifade (2.52) ile verilen asıl problem formuna getirilmesi gerekmektedir. Bu problem için ifade (2.52) deki kısıt vektörü

$$h(K) = [h_1(K) \ h_2(K)]^T \quad (3.14)$$

şeklinde seçildiğinde kısıtlar,  $h_1(K) = GXGa(X, KX) + \eta(GX)^2 + r_1$  ve  $h_2(K) = |KX| - \alpha + r_2$  olmaktadır. Burada  $r_1$  ve  $r_2$ , DOP da eşitsizlik kısıtlarını eşitlik kısıtlarına dönüştürülmesinde kullanılan  $r_1, r_2 \geq 0$  gerçekte değerlerdir. İfade (2.52)

deki amaç fonksiyonuna, ifade (3.13) deki  $\left\| w + \frac{w^T \frac{a(X, KX)}{|a(X, KX)|}}{\|w\|} w \right\|$  terimi karşılık

gelmektedir.

### 3.1.3 DOP tabanlı KKK yöntemi

Doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol, ulaşım fazı ve kayma fazının ana algoritma altında birleştirilmesinden oluşur. Başlangıç zamanı ve sistem durumları  $t_0$  ve  $X_0$  olsun. Sistem durumlarının durum uzayındaki yerine bağlı olarak çalışan Ana Algoritma aşağıdaki gibidir:

*DOP tabanlı kayma kipli kontrol benzetim Ana Algoritması*

*Başlangıç Adımı:* Başlangıç zamanı ve durumlarını sırasıyla zaman  $t$  ye ve sistem durumu  $X$  e ata, (sembolik olarak:  $t \leftarrow t_0, X \leftarrow X_0$ ).

*Adım 1 ( $\delta$ -Kontrol Adımı):* Anlık sistem durumunu dikkate alarak  $|s| \leq \delta$  ve  $|s| > \delta$  eşitsizliklerinden hangisinin geçerli olduğunu belirle. Eğer  $|s| > \delta$  ise ulaşım fazında verilen D.O.P. problemi (3.7) yi genişletilmiş subgradient algoritması kullanarak çöz. Eğer  $|s| \leq \delta$  ise kayma fazında verilen DOP problemi (3.13) i genişletilmiş subgradient algoritması kullanarak çöz. D.O.P problemleri (3.7) veya (3.13) in çözümünden çıkan  $K$  yi kullanarak kontrol girişi  $u = KX$  'i bul.

*Adım 2:* Adım 1 de bulunan kontrol girişi  $u$  yu kullanarak sistem (3.1) i  $[t, t + \Delta t]$  arasında çalıştır.

*Adım 3:* Zaman ve sistem durum değerlerini güncelleyip Adım 1 e dön.

Güncelleme zamanı  $\Delta t$ , fiziksel sistemin en küçük zaman sabiti dikkate alınarak bulunur. Birçok sistem için bu zamanın değişik bulunma şekilleri vardır. Örneğin, doğrusal sistemler için, sistem matrisinin özdeğerleri güncelleme zamanını belirlemede kullanılabilir.

### **3.2 DOP Tabanlı KKK Denetleyicisinin Ters Sarkaç ve Acrobot Sistemlerine Uygulanması**

Önceki altbölümde türetimi verilen DOP tabanlı kayma kipli kontrol yönteminin, Bölüm 2' de matematiksel modelleri verilen ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanması bu altbölümün konusunu oluşturmaktadır. Kullanmakta olduğumuz sistem benzetimlerinde; *i-* doğrusal olmayan modellere ait diferansiyel denklemlerin çözümünde MATLAB' daki *ode23* komutu, *ii-* denetleyici algoritmasının içindeki DOP modellerinin, genişletilmiş subgradient algoritması kullanılarak, çözümünde, ise GAMS kullanılmaktadır. Benzetimlerde kullanmakta olduğumuz ana program MATLAB da yer almakta olup kısıtsız optimizasyon problemine indirilen

kısımların çözümü için GAMS bu programdan çağırılmaktadır. Bu programların kendi aralarında veri alışverişi yapmaları için uygun kodlama teknikleri (Ferris, 2004) gerekmektedir. MATLAB ve GAMS in koordineli çalışması ile ilgili örnek programlar ve açıklamalar Ek Açıklamalar-A da yer almaktadır.

### 3.2.1. DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulaması

Bu kısımda, geliştirilen yeni yöntem, önceki bölümde matematiksel modelleri verilen ters sarkaç sistemine uygulanmaktadır. Doğrusal olmayan denklemleri ifade (2.22) ile verilen ters sarkaç sistemi, DOP tabanlı KKK denetleyicisi kullanılarak kararsız denge noktası etrafında kararlaştırılmak istenmektedir.

Ulaşım ve kayma fazındaki ifade (3.6) ve (3.12) ile verilen DOP modelleri sırasıyla aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır:

$$\begin{aligned} & -\gamma(GX)^2 \leq GXG\dot{X} \\ & u \in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\ & K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.15)$$

*k.a.*

$$\text{Enk } GXG\dot{X}$$

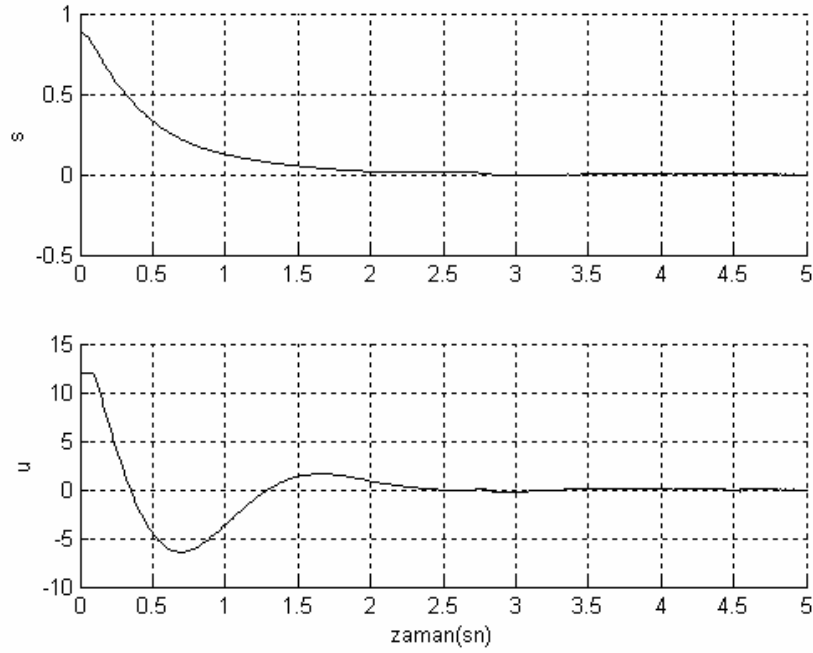
$$\begin{aligned} & GXG\dot{X} \leq -(GX)^2 \eta \\ & u \in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\ & K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

*k.a.*

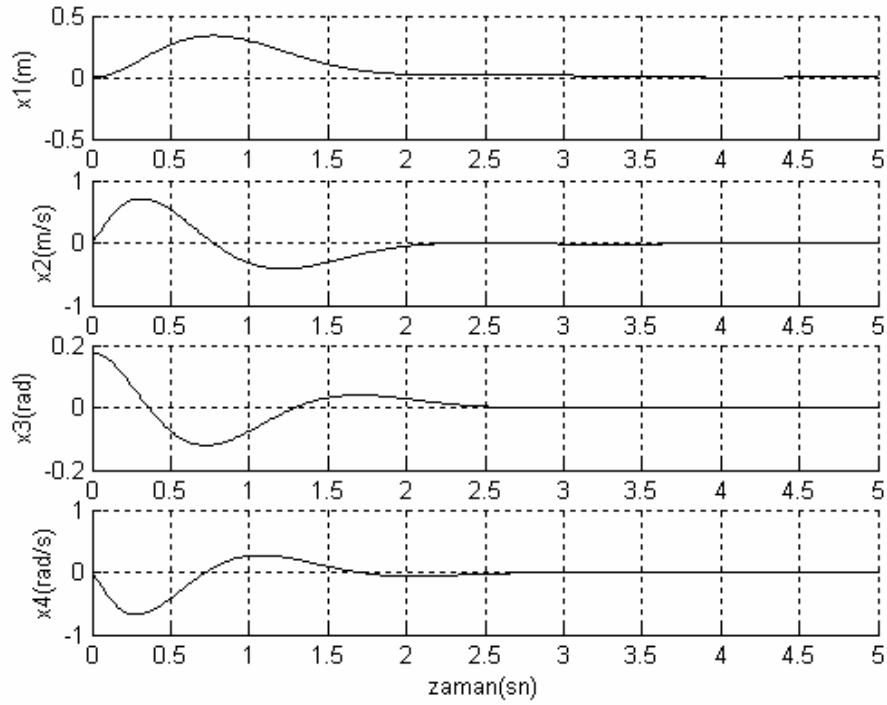
$$\text{Enk } \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| \quad (3.16)$$

Bu ifadelerde, takip kolaylığı açısından, ilk kısıtlardaki ve amaç fonksiyonlardaki  $K$  terimleri  $\dot{X}$  içinde gösterilmekte olup, açık olarak yazılmamıştır. Kayma kipli denetleyicisi (2.18) ile karşılaştırılabilmesi için, Şekil 2.3 deki deney koşullarını korumaktayız. Bu durumda, kayma yüzeyi matrisi  $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\delta -$

komşuluğu genişliği  $\delta = 0.02$  olmaktadır. Ayrıca, Şekil 2.3 teki sistem girdisi genliği dikkate alınarak kontrol girişi üst sınır genliği  $\alpha = 12$ , geri besleme matrisi kısıt kümesi  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$ , sırasıyla ulaşım ve kayma fazı parametreleri  $\gamma = 2$  ve  $\eta = 0.1$  olarak seçilsin. Denge durumundan farklı bir ilk durum değeri  $X^T = \left[ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{18} \ 0 \right]$  için ifade (3.15)-(3.16) deki DOP modelleri ve önceki alt bölümde verilen DOP tabanlı kayma kipli kontrol benzetim ana algoritması kullanıldığında Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 teki benzetim sonuçları elde edilmektedir.



Şekil 3.1 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



Şekil 3.2 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi

Şekil 3.1-Şekil 3.2 ve Şekil 2.3-Şekil 2.4 karşılıklı incelendiğinde, kayma kipli denetleyici altındaki bir sistem için benzer grafikler olduğu gözükmemektedir. Kayma yüzeyine ulaşım zamanı vb. gibi farklılıklar seçilen denetleyici parametrelerine bağlıdır. Denetleyici parametre değerlerinin değiştirilmesiyle değişik performans değerleri yakalanabilir. Bu uygulamada GAMS programındaki CONOPT ve MINOS optimizasyon çözücülerini kullanılmıştır.

### 3.2.2. DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanması

DOP tabanlı KKK yönteminin ifade (2.28) ile doğrusal olmayan matematiksel modeli verilen acrobot sistemine uygulanabilmesi için ulaşım ve kayma fazlarına karşılık gelen DOP modelleri aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır. İfade (2.28) sistemi için çalışma noktası etrafında kayma yüzeyi tasarımı yaparken, ifade (2.29) daki doğrusal model kullanılmaktadır. Bundan dolayı kayma yüzeyi fonksiyonunun değeri ve sistem girdisinin bulunmasında model (2.29) de tanımlanan  $\tilde{X}$  durumları ve  $\dot{X}$  ifadesi içinde

doğrusal olmayan sistem modeli (2.28) kullanılmaktadır. Dolayısıyla acrobot sisteminin kontrolü için, ulaşım ve kayma fazları doğrusal olmayan programlama modelleri sırası ile aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} & -\gamma(G\tilde{X})^2 \leq G\tilde{X}G\dot{X} \\ & u \in \{K\tilde{X} : |K\tilde{X}| \leq \alpha\} \\ & K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \end{aligned} \quad (3.17)$$

*k.a.*

Enk  $G\tilde{X}G\dot{X}$

$$\begin{aligned} & G\tilde{X}G\dot{X} \leq -(G\tilde{X})^2 \eta \\ & u \in \{K\tilde{X} : |K\tilde{X}| \leq \alpha\} \\ & K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

*k.a.*

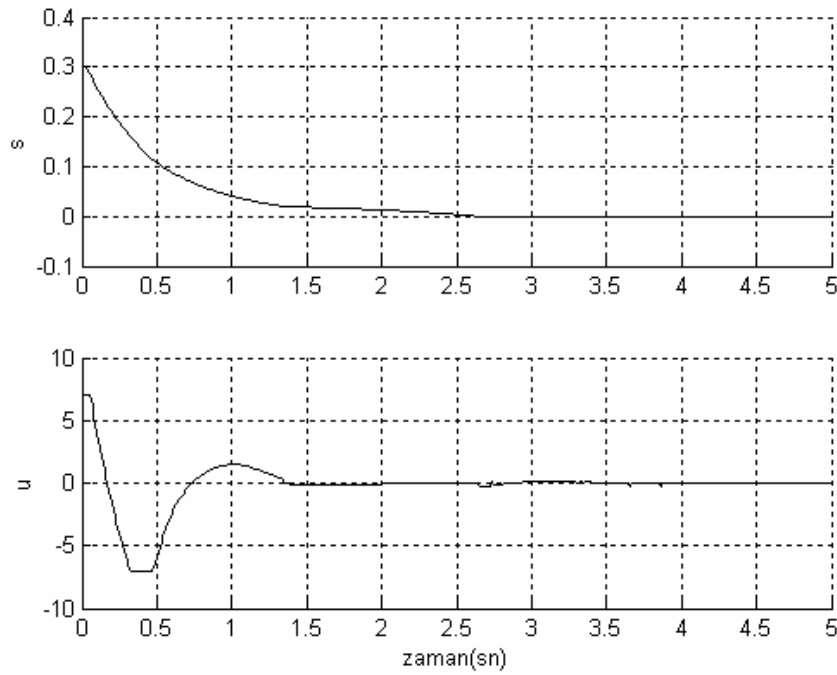
(3.18)

$$\text{Enk} \left\| \begin{array}{c} w^T \frac{\dot{X}}{|X|} \\ w + \frac{w^T \frac{\dot{X}}{|X|}}{\|w\|} w \end{array} \right\|$$

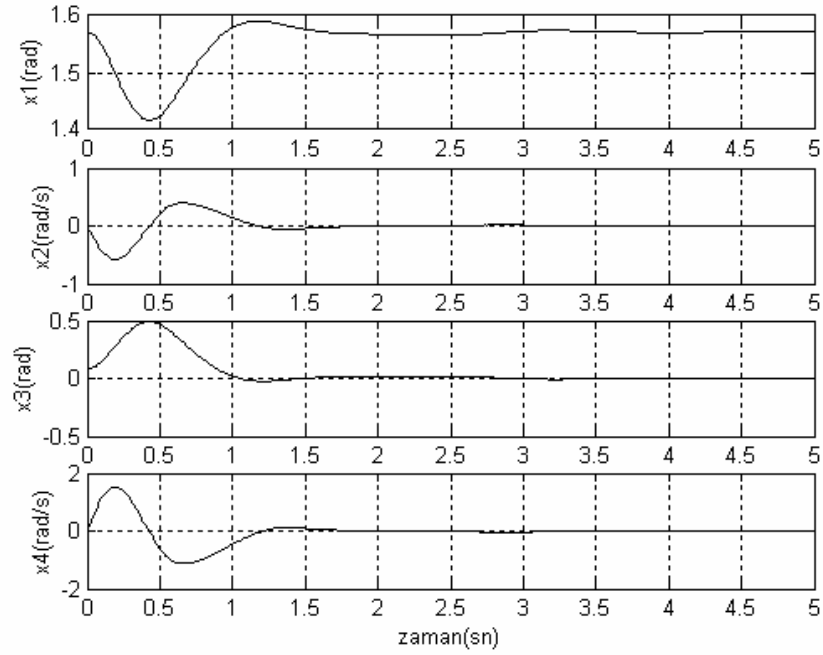
DOP tabanlı KKK yönteminin acrobot sistemine uygulanmasında, model (3.17)-(3.18) de  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -45 \leq k_i \leq 45, i = 1, 2, 3, 4\}$  olup, ulaşım ve kayma fazı parametreleri sırasıyla  $\gamma = 2$  ve  $\eta = 0.5$  seçilmektedir. Kayma kipli denetleyici (2.18) in acrobot sistemine uygulanmasında, Şekil 2.6 de gözüken, elde edilen en büyük sistem girdi genliği 7 olduğundan, karşılaştırma yapabilmemiz için,  $\alpha = 7$  olarak seçilmektedir. Benzerlik olması için kayma yüzeyi matrisi  $G = [10 \ 4 \ 3.5 \ 1.5]$  ve bant genişliği  $\delta = 0.02$  alınmaktadır. Acrobot sistemi  $X = [\pi/2 \ 0 \ \pi/36 \ 0]^T$  ilk durumundan başlatılıp,  $\Delta t = 0.01$  seçilerek, DOP tabanlı KKK benzetim algoritması ifade (2.28) ile verilen sisteme uygulandığında Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 elde edilmektedir.



Şekil 3.3-Şekil 3.4 ve Şekil 2.6-Şekil 2.7 karşılıklı incelendiğinde, kayma kipli denetleyici altındaki bir sistem için benzer grafikler olduğu gözükmemektedir. Kayma yüzeyine ulaşım zamanı vb. gibi farklılıklar seçilen denetleyici parametrelerine bağlıdır. Denetleyici parametre değerlerinin değiştirilmesiyle değişik performans değerleri yakalanabilir. Bu uygulamada GAMS programındaki CONOPT ve MINOS çözücülerini kullanılmıştır.



Şekil 3.3 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanmasında kayma yüzeyi ve sistem girdisinin zamana bağlı değişim grafiği



Şekil 3.4 DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanmasında sistem durumlarının zamana bağlı değişim grafiği

### 3.3 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Yöntemi

Önceki kısımda, kayma kipli kontrolde temel iki faz olan ulaşım ve kayma fazı ayrık olarak doğrusal olmayan programlama kullanılarak modellenmekte ve önerilen DOP tabanlı KKK yöntemi başarılı bir şekilde ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. Bu kısımda, ulaşım ve kayma fazı için ayrı olarak oluşturulan DOP modelleri, tek bir DOP modeli altında birleştirilmektedir. Bu yeni yöntemi *genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK* yöntemi olarak adlandırmaktayız.

### 3.3.1 Ulaşım ve kayma fazlarının tek DOP modeli altında birleştirilmesi

İfade (3.6) ve (3.12) ile verilen DOP modelleri tek bir model altında

$$\begin{aligned} -\gamma s^2 &\leq \frac{dV}{dt} \leq -s^2 \eta \\ u &\in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\ K &\in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

*k.a.*

(3.19)

$$\text{Enk} \left\| \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| + \lambda \frac{dV}{dt} \right\|$$

şeklinde birleştirilebilir. Önceki kısımlarda detayları verilen DOP modelleri (3.6) ve (3.12) nin kısıtlarında değişiklik yapılmadan tek bir DOP modeli altında birleştirilmekte ve çoklu amaç fonksiyonu kullanılmaktadır. Model (3.19) de  $\lambda$  bir ceza çarpanı olup, kayma yüzeyinden uzak bölgelerde  $\frac{dV}{dt}$  teriminin baskın, belli yakınlıktaki bir bölgede

$\frac{dV}{dt}$  ve  $\left\| \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| \right\|$  terimi belli oranda baskın, kayma yüzeyi üzerinde ise sadece

$\left\| \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| \right\|$  terimi baskın olmaktadır.

### 3.3.2 Birleştirilmiş DOP modelinin çözülmesi

İfade (3.19) ile verilen DOP modelinin genişletilmiş subgradient algoritması ile çözülebilmesi için, ifade (2.52) ile verilen asıl problem formuna getirilmesi gerekmektedir. Bu problem için ifade (2.52) deki kısıt vektörü

$$h(K) = [h_1(K) \quad h_2(K) \quad h_3(K)]^T \quad (3.20)$$

şeklinde seçildiğinde kısıtlar,  $h_1(K) = -GXGa(X, KX) - \gamma(GX)^2 + r_1$ ,  $h_2(K) = GXGa(X, KX) + \eta(GX)^2 + r_2$  ve  $h_3(K) = |KX| - \alpha + r_3$  olmaktadır. Burada pozitif gerçek sayılar  $r_1, r_2$  ve  $r_3$ , DOP da eşitsizlik kısıtlarının eşitlik kısıtlarına dönüştürülmesinde kullanılmaktadır. İfade (2.52) deki amaç fonksiyonu ise

$$f(K) = \left\| w + \frac{w^T \frac{\dot{X}}{|\dot{X}|}}{\|w\|} w \right\| + \lambda \frac{dV}{dt} \quad (3.21)$$

olmaktadır.

### 3.3.3. Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK yöntemi algoritması

Geliştirilen yeni model (3.19) için genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK benzetim algoritması aşağıdaki gibi olmaktadır.

#### *Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK benzetim algoritması*

*Başlangıç Adımı:* Başlangıç zamanı ve durumlarını sırasıyla zaman  $t$  ye ve sistem durumu  $X$  e ata (sembolik olarak:  $t \leftarrow t_0$ ,  $X \leftarrow X_0$ ).

*Adım 1:* DOP modeli (3.19) da genişletilmiş subgradient algoritması kullanarak  $K$  için çöz ve kontrol girişi  $u = KX$  i bul.

*Adım 2:* Adım 1 de bulunan kontrol girişi  $u$  yu kullanarak sistem (3.1) i  $[t, t + \Delta t]$  arasında çalıştır.

*Adım 3:* Zaman ve sistem durum değerlerini güncelleyip Adım 1 e dön.

### 3.4 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Yönteminin Ters Sarkaç ve Acrobat Sistemine Uygulanması

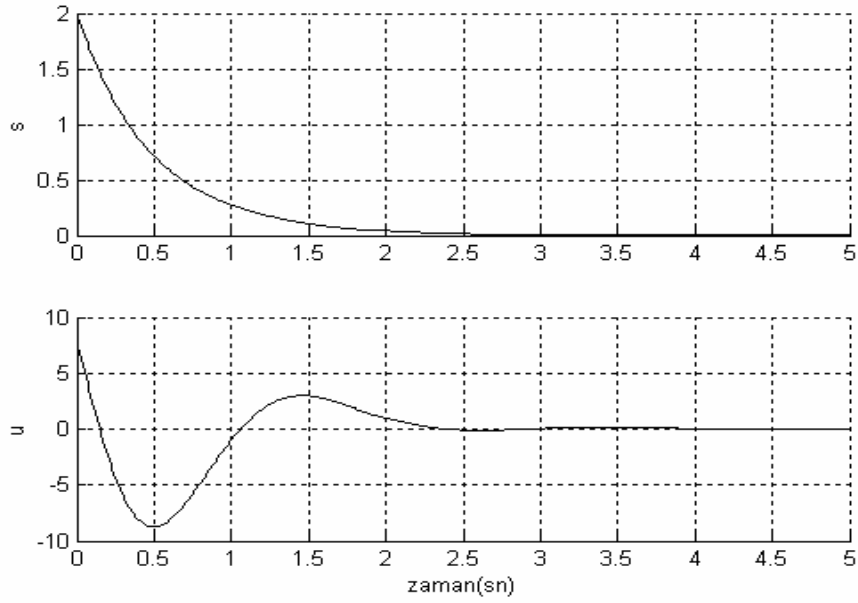
Bu kısımda genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisi ters sarkaç ve acrobat sistemlerine uygulanmaktadır. Daha önceki kısımlarda olduğu gibi verilen sistemlerin doğrusal olmayan modellerinin çalıştırılmasında MATLAB' daki *ode23* komutu kullanılmaktadır. Denetleyici algoritmasının içindeki doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde ise GAMS yazılımının CONOPT veya MINOS optimizasyon çözücüleri kullanılmaktadır.

#### 3.4.1. Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ters sarkaç sistemine uygulanması

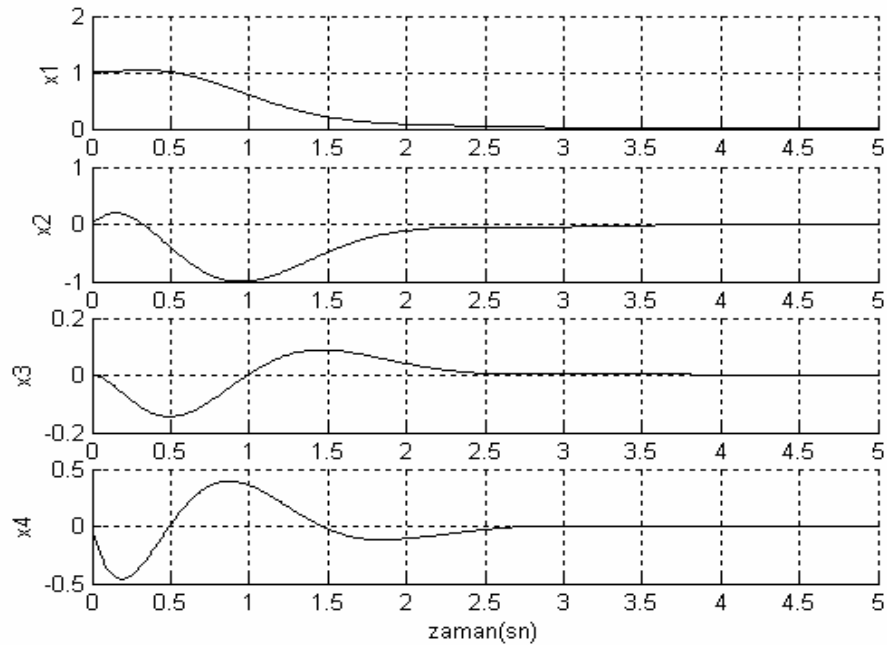
Bu altbölümde geliştirilen DOP tabanlı KKK yöntemi ifade (2.22) ile verilen ters sarkaç sistemine uygulanmaktadır. Burada da kontrol problemi, kararsız denge noktası etrafında ters sarkaç sisteminin kararlaştırılmasıdır. İfade (2.22) ile verilen ters sarkaç sistemi için ifade (3.19) ile verilen DOP modeli kullanılarak, genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisini oluşturulur. Ulaşım-kayma fazları ayrık DOP tabanlı KKK denetleyicisi ile karşılaştırılabilmesi için, ters sarkaç sistemine altbölüm 3.2.1 deki uygulanan denetleyici katsayıları kullanılmaktadır. Bunlar, kayma yüzeyi matrisi  $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ , sistem girdisi üst sınırı  $\alpha = 12$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\gamma = 2$  ve  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$  dir. DOP modeli (3.19) da ceza çarpanı  $\lambda = 5$  olarak seçilsin.

Çeşitlilik olması açısından, öncelikle geliştirilen yeni yöntem yukarıda verilen denetleyici parametreleri kullanılarak ilk durum değerleri  $X_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  olan ters sarkaç sistemine uygulansın. Bu uygulamada, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 ile verilen grafikler elde edilir.

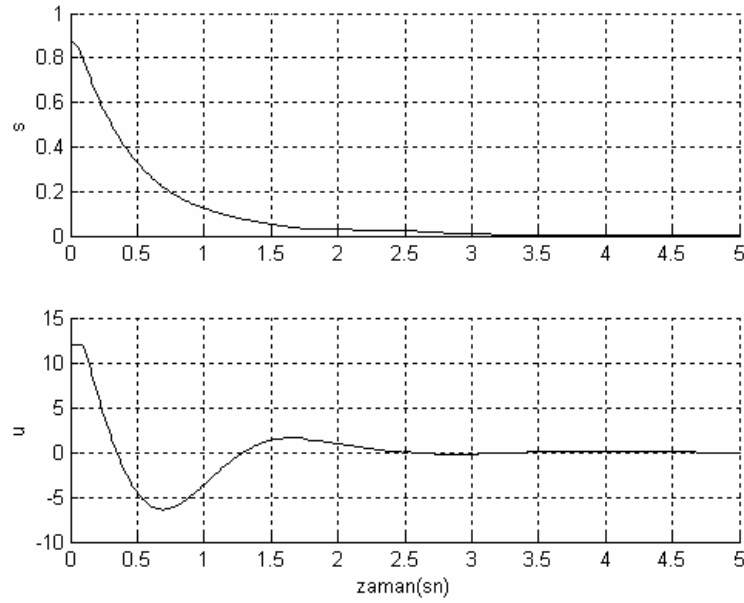
Aynı denetleyici parametreleri için, genelleştirilmiş DOP tabanlı kayma kipli denetleyici ilk durum değerleri  $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  olan ters sarkaç sistemine uygulandığında Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 deki grafikler elde edilir.



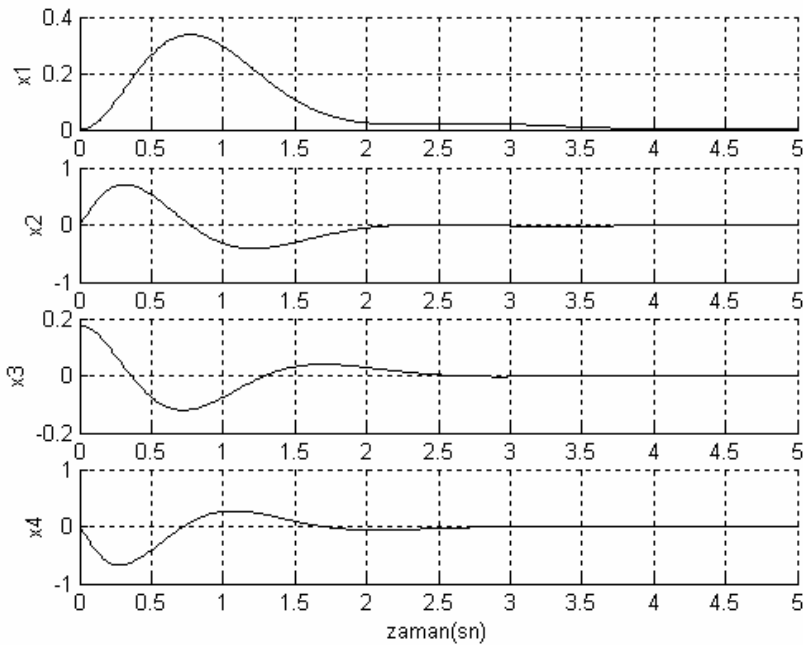
Şekil 3.5 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin  $X_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



Şekil 3.6 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin  $X_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi



Şekil 3.7 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin  $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



Şekil 3.8 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin  $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  ilk durumları için ters sarkaç sistemine uygulamasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi

Şekil 3.7-Şekil 3.8 ve Şekil 3.1-Şekil 3.2 karşılıklı incelendiğinde, ulaşım ve kayma fazları ayrık olan DOP tabanlı kayma kipli denetleyici ile genelleştirilmiş DOP tabanlı kayma kipli denetleyicinin benzer sistem tepkileri oluşturduğu gözlenmektedir. Şekil 3.1 de kayma yüzeyinin  $\delta$  komşuluğuna kadar kontrol girişinin bulunmasında ifade (3.15) ile verilen model, bu komşuluğun içinde ise ifade (3.16) ile verilen model ayrık zamanlarda kullanılmaktadır. Şekil 3.7 kayma yüzeyi grafiğinde ise,  $\lambda$  parametresine bağlı olarak DOP modeli (3.19) deki amaç fonksiyonu terimlerinden  $\frac{dV}{dt}$

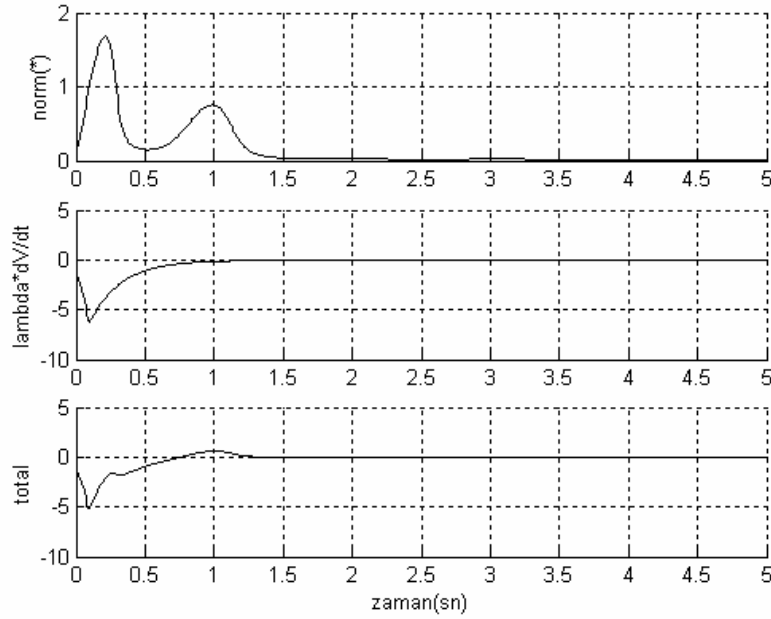
veya  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimi kısmen veya baskın olmaktadır. Bu durumun görsel olarak

açıklanması için, Şekil 3.7 oluşturan deney şartları kullanılarak, ifade (3.19) ün amaç fonksiyonunun terimlerinin ve toplamlarının zamana bağlı değişimi Şekil 3.9 de verilmektedir. Bu şekil incelendiğinde, ceza parametresi  $\lambda = 5$  için, yaklaşık olarak 0-0.25 sn arası  $\frac{dV}{dt}$  tamamen baskın, 0.25-0.75 sn arası her iki terim birden etkin, 0.75 sn

den sonra ise sadece  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimi baskın olmaktadır. DOP modeli (3.19)

deki  $\lambda$  parametresinin seçimine bağlı olarak kayma yüzeyinin ne kadar yakın komşuluğunda  $\frac{dV}{dt}$  teriminin baskın olacağı belirlendiğinden, ceza parametresi olan  $\lambda$  ile kayma yüzeyi bant genişliği olan  $\delta$  arasında belli bir ilişki vardır.





Şekil 3.9  $\lambda = 5$  için  $\frac{dV}{dt}$  ve  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimlerinin ağırlıklarının analizi

### 3.4.2 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulanması

Bu altbölümde genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyici ifade (2.28) ile verilen acrobot sistemine uygulanmaktadır. Daha öncede belirtildiği gibi acrobot için kayma yüzeyi tasarımı aşamasında model (2.29) de tanımlanan  $\tilde{X}$  durumları,  $\dot{X}$  ifadesi için de doğrusal olmayan sistem modeli (2.28) kullanılmaktadır.  $\tilde{X}$  durumları cinsinden genelleştirilmiş DOP modeli

$$\begin{aligned}
& -\gamma(G\tilde{X})^2 \leq G\tilde{X}G\dot{X} \leq -(G\tilde{X})^2 \eta \\
& u \in \left\{ K\tilde{X} : |K\tilde{X}| \leq \alpha \right\} \\
& K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

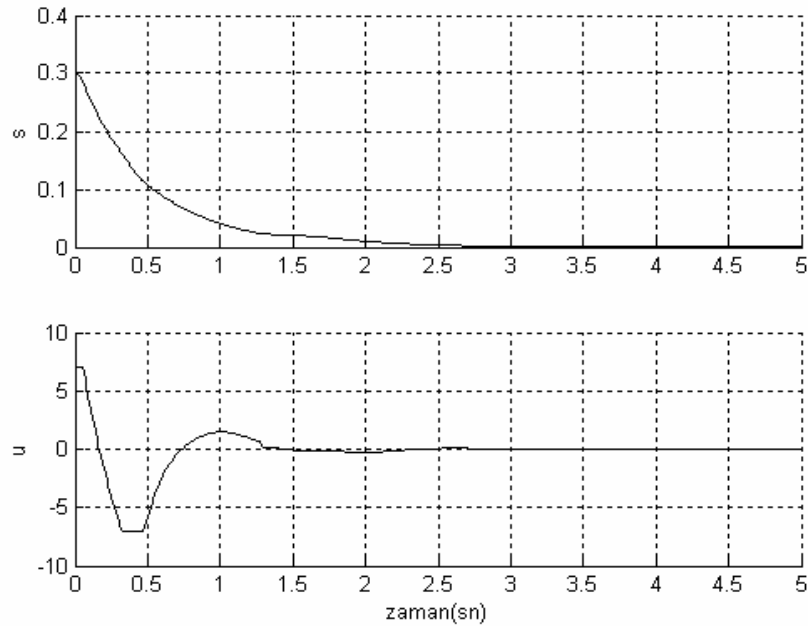
k.a.

(3.22)

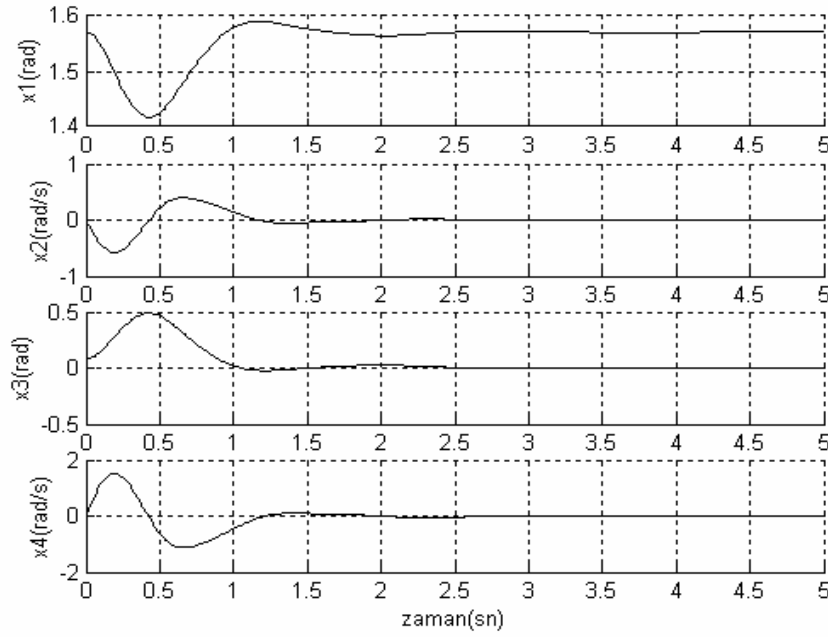
$$\text{Enk} \left\| w + \frac{w^T \frac{\dot{X}}{|\dot{X}|}}{\|w\|} w + \lambda G\tilde{X}G\dot{X} \right\|$$

şeklinde olmaktadır.

Önceki kısımda verilen, acrobot sistemine uygulanan, denetleyiciler ile karşılaştırılması açısından uygulanmakta olan denetleyici parametreleri  $G = [10 \ 4 \ 3.5 \ 1.5]$ ,  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -45 \leq k_i \leq 45, i = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\alpha = 7$  olarak alınmaktadır. Ceza çarpanı  $\lambda = 50$  ve  $X = [\pi/2 \ 0 \ \pi/36 \ 0]^T$  ilk durumunu için genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyici acrobot sistemine uygulandığında Şekil 3.10 ve Şekil 3.11 deki grafikler elde edilir.



Şekil 3.10 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulamasında kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişim grafiği



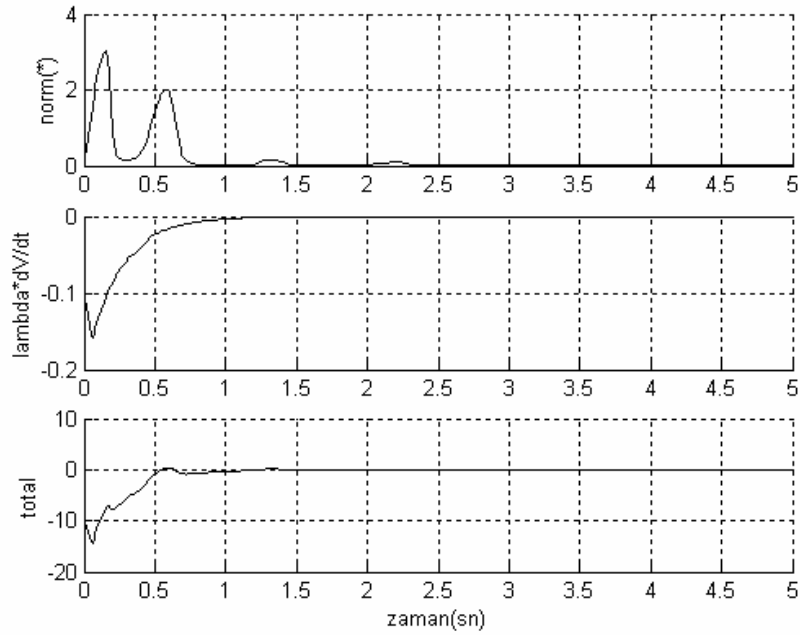
Şekil 3.11 Genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulamasında sistem durumlarının zamana bağlı değişim grafiği

Şekil 3.10 ve Şekil 3.11 incelendiğinde, ulaşım ve kayma fazları ayrık olan DOP tabanlı KKK denetleyicisinin acrobot sistemine uygulandığı Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ile benzerlikler olduğu gözükmemektedir.

Ceza parametresi  $\lambda = 50$  için DOP modeli (3.22) deki amaç fonksiyonu terimlerinin ağırlıklarını incelemek için Şekil 3.12 kullanılabilir. Bu şekilde gözüktüğü

gibi, kayma yüzeyine olan uzaklığa ve  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  ifadesine bağlı olarak  $G\tilde{X}G\dot{X}$

veya  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimi kısmen veya tamamen baskın olmaktadır.



Şekil 3.12  $\lambda = 50$  için  $\frac{dV}{dt}$  ve  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimlerinin analizi

Sonuç olarak, ulaşım ve kayma fazlarında ayrık DOP modeli ile temsil edilen kayma kipli kontrol girdi bulma problemi, tek bir DOP altında birleştirilmekte, ters sarkaç ve acrobot sistemlerine başarılı şekilde uygulanmaktadır. Takip eden kısımda, geliştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisi parametre seçimlerinin sistem tepkisine etkileri verilmektedir.

### 3.5 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Denetleyicinin Parametre Değişimlerinin Sistem Tepkisine Etkisi

Bu kısımda geliştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicilerin parametre değişimlerinin sistem tepkilerine etkisi incelenmektedir. DOP modeli oluşturulurken denetleyici parametresi amaçlanan sistem karakteristiği/tepkisi doğrultusunda ters sarkaç sistemi tepkileri analiz edilmektedir. Denetleyicinin parametre değişimlerine karşı ters sarkaç sistemi tepki analizlerinin geliştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyici tasarımcılarına yol gösterecek nitelikte olması planlanmaktadır.

### 3.5.1. Denetleyici ceza parametresi $\lambda$ ya bağlı sistem davranış analizi

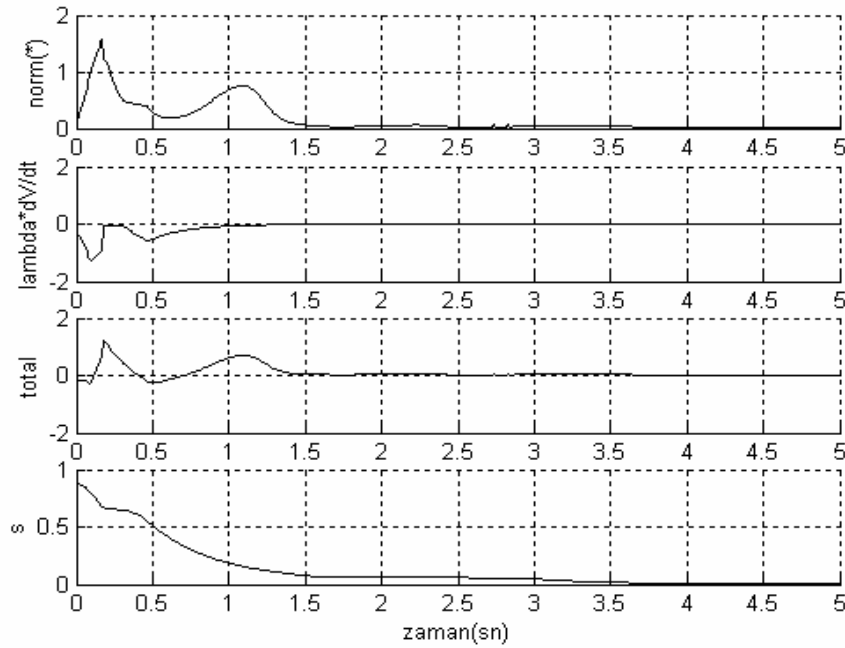
Önceki kısımlarda da bahsedildiği gibi, geliştirilmiş DOP tabanlı kayma kipli denetleyicinin ulaşım veya kayma fazı amaç fonksiyonlarının durum uzayında etkili olduğu bölgeler ceza parametresi  $\lambda$  a bağlı olarak değişmektedir. Ceza parametresi  $\lambda$  nın büyük bir aralıkta seçilmesi halinde dahi denetleyici başarılı olarak çalışmaktadır.

Şimdi geliştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin ceza parametresi değişimlerine karşı ters sarkaç sisteminin tepkilerini inceleyelim. Bunun için Şekil 3.7 ve Şekil 3.9 teki grafikleri veren denetleyici parametreleri ( $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\gamma = 2$ ) kullanılarak sistem ilk durum değeri ( $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$ ) aynı kalmak üzere ceza parametresi  $\lambda$  nin değişimine karşın sistem tepkisi inceleyelim.

$\lambda = 1$  için genişletilmiş DOP tabanlı KKK denetleyici ters sarkaç sistemine uygulandığında, amaç fonksiyonu terimlerinin ve kayma yüzeyinin zamana bağlı değişimi Şekil 3.13 deki gibi olur. Bu şekil incelendiğinde, yaklaşık olarak 0-0.1 sn

$$\text{arası } \frac{dV}{dt} \text{ terimi, } 0.1-0.5 \text{ sn arası } \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| \text{ terimi } 0.5-0.7 \text{ sn arası tekrar } \frac{dV}{dt}$$

terimi baskındır. Bu durum zaman ilerledikçe yine değişmektedir. Sonuç olarak, küçük  $\lambda$  değerleri için sistem kayma kipli kontrol hareket karakteristiği gösterse de, düzgün bir ulaşım fazı grafiği sergilememektedir. Şekil 3.13 ün 4. altgrafisindeki kayma yüzeyinin zamanla değişim grafiğinde bu durum gözükmemektedir.

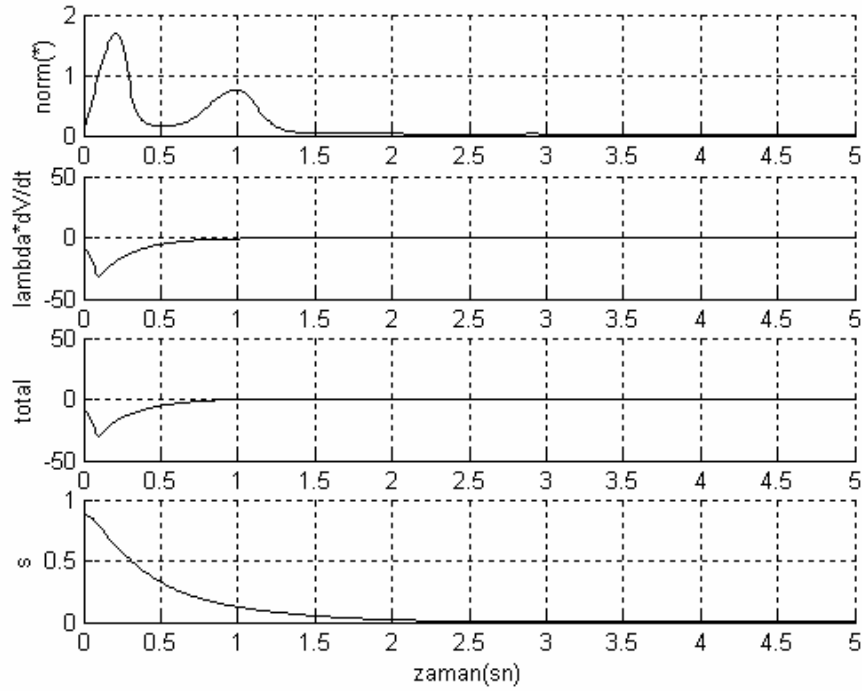


Şekil 3.13  $\lambda = 1$  için  $\frac{dV}{dt}$  ve  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimlerinin/toplamlarının ve

kayma yüzeyinin zamana bağlı değişimi

$\lambda = 5$  için genişletilmiş DOP tabanlı KKK denetleyici ters sarkaç sistemine uygulandığında, amaç fonksiyonu terimlerinin zaman bağlı değişim grafikleri Şekil 3.9, kayma yüzeyinin ise zamana bağlı değişimi Şekil 3.7 deki gibi verilmiş ve ilgili yorumlar yapılmıştır (Bkz. altbölüm 3.4.1).

Daha yüksek bir ceza parametresi değeri olan  $\lambda = 25$  için, genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisi ters sarkaç sistemine uygulandığında, amaç fonksiyonu terimlerinin ve kayma yüzeyinin zamana bağlı değişimi Şekil 3.14 deki gibi olur.



Şekil 3.14  $\lambda = 25$  için  $\frac{dV}{dt}$  ve  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimlerinin/toplamlarının ve

kayma yüzeyinin zamana bağlı değişimi

Bu şekil incelendiğinde, kayma yüzeyinin çok yakın bir komşuluğuna kadar  $\frac{dV}{dt}$  teriminin baskın olduğu gözükmektedir. Şekil 3.14 un son satırı incelendiğinde, düzgün bir kayma yüzeyi hareketi olduğu gözlenir.

Sonuç olarak, daha öncede açıklanan kayma yüzeyinden uzak bölgelerde  $\frac{dV}{dt}$

terimi, belli yakınlıktaki bir bölgede  $\frac{dV}{dt}$  ve  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimi belli oranda baskın,

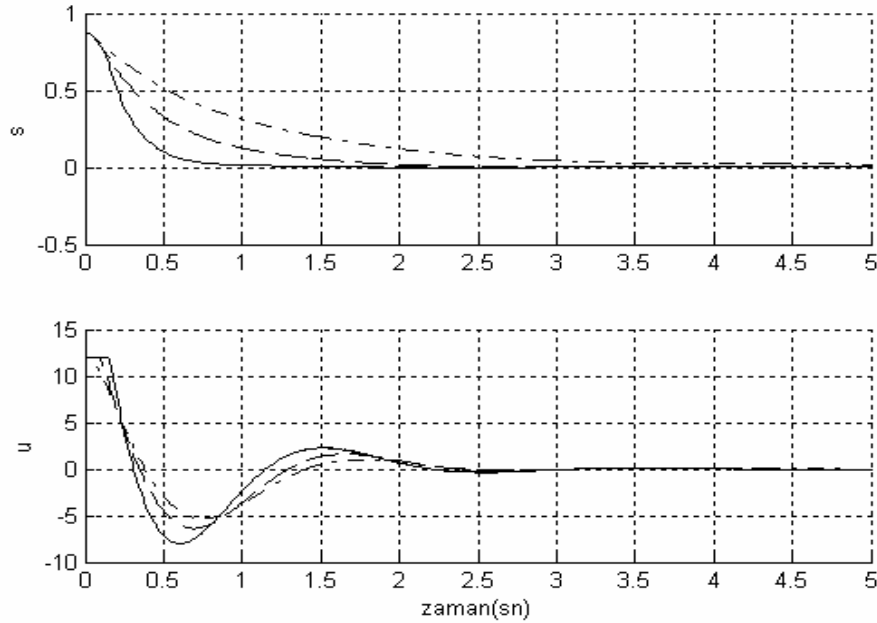
kayma yüzeyi üzerinde ise sadece  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  terimi baskın olacak şekilde ceza

parametresi  $\lambda$  nin seçilmesi önerilmektedir. Sistem için hangi denetleyici parametrelerinin daha iyi performans sergileyeceği önsezisi oluşmamışsa, ilk tasarım aşamasında ceza parametresi  $\lambda$  büyük değerlerde seçilebilir. Gözlenecek tepkilere göre sonrasında ayarlamalar yapılabilir.

### 3.5.2. Denetleyici parametreleri $\gamma$ ve $\eta$ ye bağlı sistem davranış analizleri

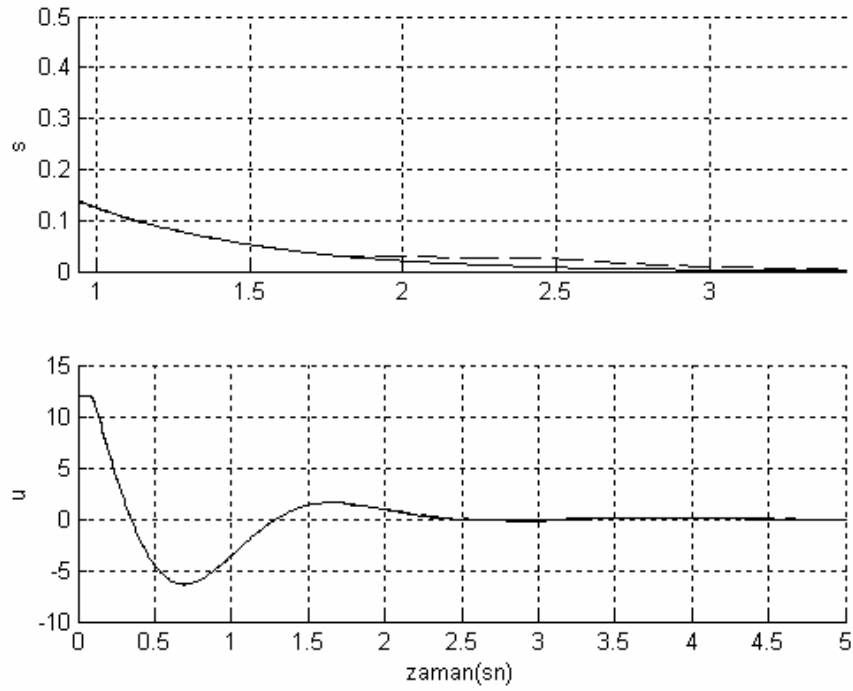
Daha önce de belirtildiği gibi  $\gamma$  değerine bağlı olarak,  $-\gamma^2 \leq \frac{dV}{dt}$  kısıtı sistem durumlarının kayma yüzeyine yaklaşım hızına alt sınır getirmektedir. Bu durumun gözlenmesi için, diğer denetleyici parametreleri yukarıdaki gibi seçilip,  $\gamma$  değiştirilerek ilk durumu  $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  olan ters sarkaç sistemi hareketi incelenmektedir. Diğer denetleyici parametreleri, kayma yüzeyi matrisi  $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\eta = 0.1$ , ceza çarpanı  $\lambda = 5$  dir. Şekil 3.15 de farklı  $\gamma$  lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi gösterilmektedir. Bu grafikte,  $\gamma = 1$  için sistem tepkisi kesikli-noktalı,  $\gamma = 2$  için sistem tepkisi kesikli,  $\gamma = 50$  için sistem tepkisi sürekli çizgi ile gösterilmektedir. Şekil 3.15 den de görülebileceği gibi,  $\gamma$  değeri arttıkça sistem durumlarının kayma yüzeyine varma hızı da artmaktadır.





Şekil 3.15 Farklı  $\gamma$  lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi

Diğer denetleyici parametresi  $\eta$  kayma yüzeyinin belli komşuluğunda  $\frac{dV}{dt} \leq -s^2\eta$  kısıtı ile kayma yüzeyinden uzaklaşmamayı garanti eder. Bu parametrenin 0.1 gibi değerde seçilmesi birçok denetleyici grubu için yeterli olmaktadır. Eğer kayma yüzeyinin yakın komşuluğunda kayma yüzeyine yaklaşım hızı ile ilgili değişiklik yapılmak isteniyorsa bu parametre kullanılabilir. Örneğin, denetleyici parametreleri olan , kayma yüzeyi matrisi  $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\gamma = 2$ , ceza çarpanı  $\lambda = 5$   $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$ , olarak seçilip genelleştirilmiş benzetim algoritması ilk durum değeri  $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  için ters sarkaç sistemine uygulandığında, farklı  $\eta$  değerleri için Şekil 3.16 deki kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişim grafiği elde edilir.  $\eta$  ya bağlı değişimin gözükmesi açısından, ilk altgrafik belli ölçüde büyütülmüştür. Kayma yüzeyi komşuluğunda, kesikli çizgiler  $\eta = 0.1$ , sürekli çizgi ise  $\eta = 1.5$  için olan deneyi göstermektedir. Gözükteği gibi daha büyük  $\eta$  değeri için komşulukta yaklaşma hızı artmaktadır.



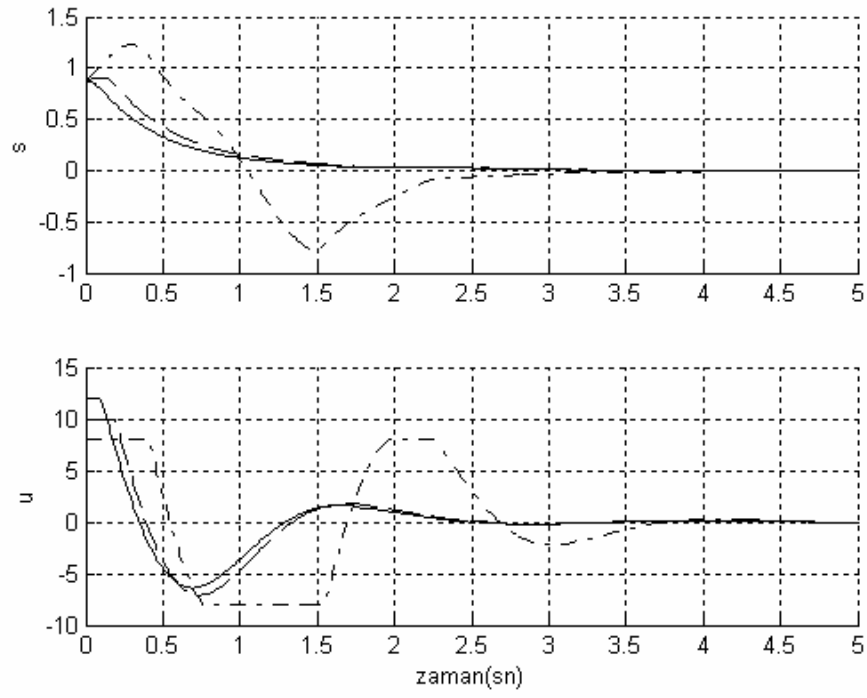
Şekil 3.16 Farklı  $\eta$  lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi

Sonuç olarak tasarımcı kayma yüzeyinin belli komşuluğuna kadar yaklaşım hızını belirlemede denetleyici parametresi  $\gamma$  yı kullanabilir. Kayma yüzeyi komşuluğundaki yaklaşım hızının belirlenmesinde ise denetleyici parametresi  $\eta$  etkili olmaktadır. Ayrıca, DOP modeli (3.19) un uygun çözümlerinin olabilmesi için  $0 < \eta \leq \gamma$  şeklinde seçilmesi gerekmektedir. Bu kısıt, kayma yüzeyi komşuluğunda yaklaşım hızının kayma yüzeyinin komşuluğuna kadar olan yaklaşım hızından büyük olamayacağını ifade etmekte olup, genel olarak KKK denetleyiciden böyle bir performans beklenmemektedir.

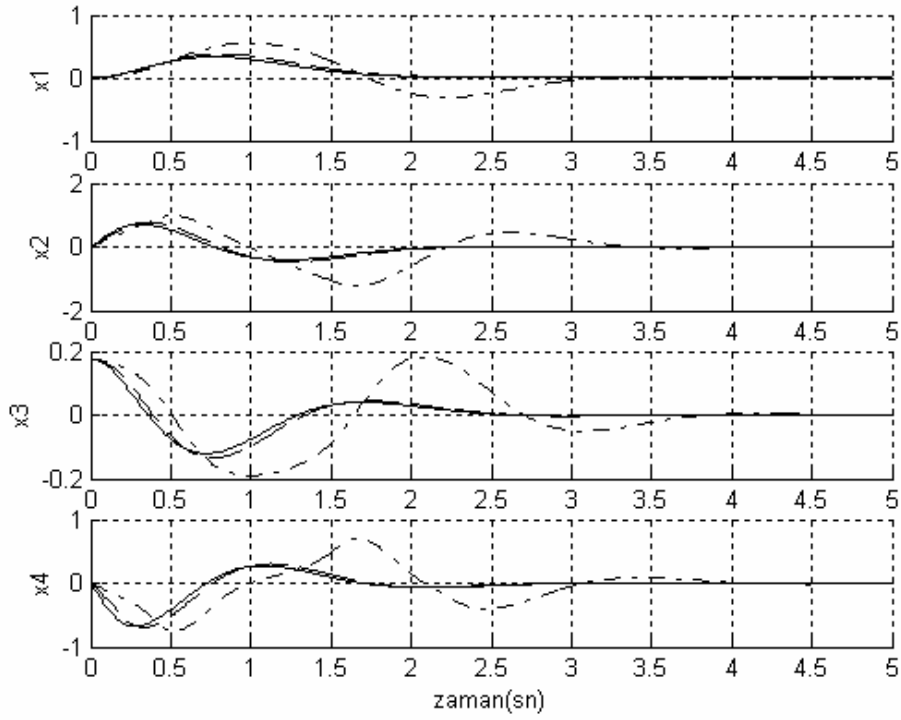
### 3.5.3. Kontrol giriş genliği üst sınırı $\alpha$ ve geri besleme matrisi $K$ nın bileşenlerinin alt ve üst sınır değerlerinin sistem tepkisine etkisi

Sistemlere uygulanabilecek kontrol sinyalinin maksimum genliği  $\alpha$  birçok uygulamada fiziksel olarak sınırlı olmaktadır. Bazı kontrol yaklaşımları  $\alpha$  nın sınırlı oluşunu hesaplamalarda dikkate almayıp bu değerin üstünde kontrol girdi sinyalleri önerebilmekte, ancak uygulamada bu sinyal kullanılmadığı için beklenen sistem tepkileri elde edilememektedir. DOP tabanlı KKK yaklaşımı verilen  $\alpha$  değerini dikkate alarak bu kısıt altında, verilen eniyilik kriterine göre, eniyi kontrol girdisini önermektedir. Gereğinden küçük üst sınırlar, tahmin edilebileceği gibi, kontrol amacını gerçekleştirmede zayıflığa yol açabilmektedir. Aşağıda, kontrol girdisi genlik kısıtının sistem tepkilerine etkisini incelemek için farklı  $\alpha$  değerleri ile benzetimler yapılmaktadır.

Örneğin, genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin denetleyici parametreleri ( $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\lambda = 5$ ) ve sistem ilk durum değerleri ( $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$ ) aynı kalmak üzere kontrol girişi genliği üst sınır değişimine karşın sistem tepkileri şekil 3.17 ve şekil 3.18 de verilmektedir. Bu şekillerde, kesikli noktalı çizgi  $\alpha = 8$ , kesikli çizgi  $\alpha = 10$ , sürekli çizgi ise  $\alpha = 12$  için olan sistem tepkilerine karşılık gelmektedir. Bu şekiller incelendiğinde,  $\alpha = 8$  için  $\frac{dV}{dt}$  teriminin negatif olmasının sağlanamadığı gözükmemektedir. Bu durumda sistem durumlarının ilk zamanlarda kayma yüzeyinden uzaklaştığı görülmektedir.

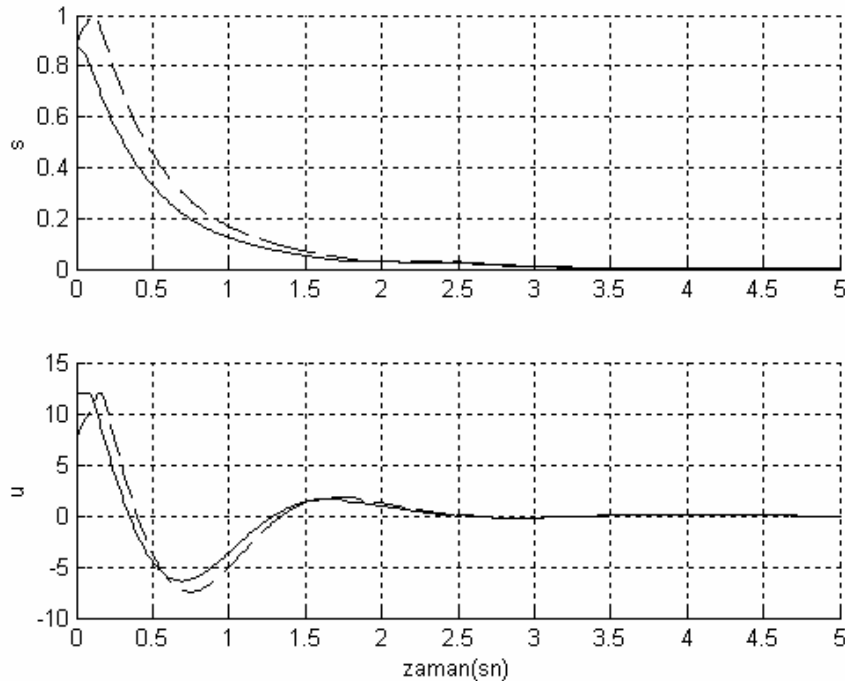


Şekil 3.17 Farklı  $\alpha$  lar için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi

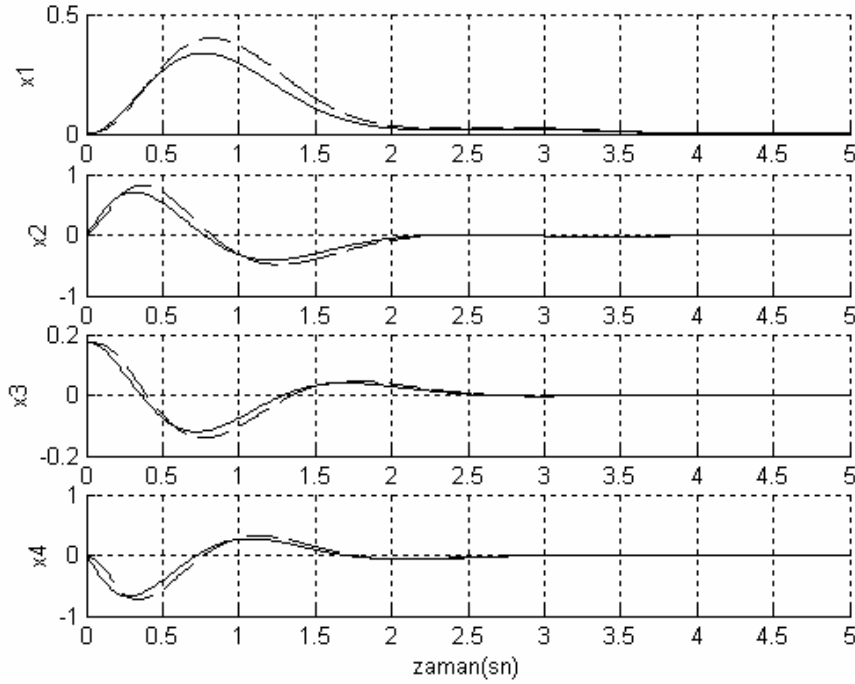


Şekil 3.18 Farklı  $\alpha$  lar için sistem durumlarının zamana bağlı değişimi

Kontrol girdisinin genliğine ek olarak her geri besleme kanalından beslenebilecek sinyal büyüklükleri de kısıtlı olabilir. Bu durum geribesleme matrisi  $K$  bileşenlerinin alt ve üst sınır değerlerine kısıtlarla modellenebilir. Bu kısıtlamaların sistem tepkilerine etkilerini DOP tabanlı KKK benzetim algoritması kullanarak aşağıda incelemekteyiz. Örneğin, genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisinin denetleyici parametreleri ( $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\lambda = 5$ ) ve sistem ilk durum değeri ( $X_0^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$ ) aynı kalmak üzere  $\Omega$  kümesindeki farklı sınır değerleri için sistem tepkileri Şekil 3.19 ve Şekil 3.20 da verilmektedir. Bu şekillerde  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -15 \leq k_i \leq 15, i = 1, 2, 3, 4\}$  olduğunda sistem tepkileri kesikli çizgiler,  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$  olduğunda sistem tepkileri sürekli çizgiler ile verilmektedir. Denetleyici kontrolü altındaki sistemin beklenen tepkiyi verebilmesi için geribesleme matrisi sınır değerlerinin doğal olarak yeterli aralıkta seçilmesi gerekmektedir.



Şekil 3.19 Farklı  $K$  bileşen sınır değerleri için kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



Şekil 3.20 Farklı  $K$  bileşen sınır değerleri için sistem durumlarının zamana bağlı değişimi

### 3.6 Genelleştirilmiş DOP Tabanlı KKK Yöntemindeki DOP Modelinin bazı Kısıtlarının Amaç Fonksiyonuna Dahil Edilmesi

Bu kısımda ifade (3.19) ile oluşturulan DOP modelinde, kayma yüzeyine yaklaşım hızını belirleyen kısıtlarının kısmen veya tamamen amaç fonksiyonuna dahil edilmesinin mümkün olduğu gösterilmektedir. Kısıtlardan arındırma gibi değişikliklerin yapılmasıyla;

*i*-DOP modelindeki kısıtların amaç fonksiyonuna nasıl dahil edilebileceğinin

*ii*-Denetleyicilerden beklenen değişik tip performansların farklı şekillerde DOP modelleri içinde nasıl temsil edilebileceğinin

gösterimi amaçlanmaktadır. Bu sayede, aktarılan yöntemin rahatça genelleştirilebileceği veya uygun modifikasyonlara birçok performans isteğine cevap verebileceği gösterilmektedir.

### 3.6.1 Tek performans kısıtın amaç fonksiyonuna dahil edilmesi

İfade (3.19) de kullanılmakta olan, kayma yüzeyine yaklaşım hızına alt kısıt olan  $-\gamma s^2$  terimi,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -s^2\eta \\ u &\in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\ K &\in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

*k.a.*

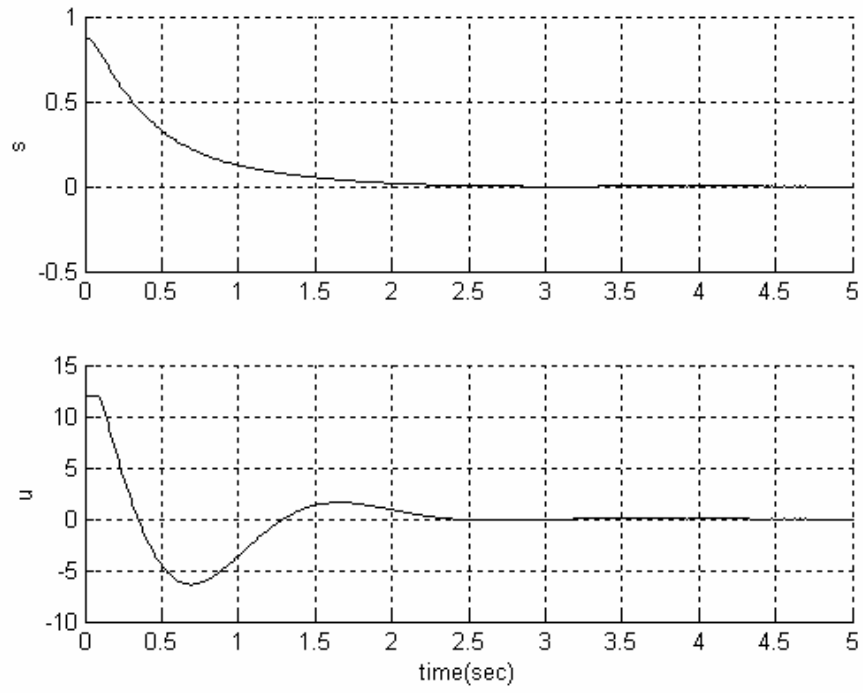
(3.23)

$$\text{Enk} \left\| \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| + \tilde{\lambda} \left\| \frac{dV}{dt} + \gamma s^2 \right\| \right\|$$

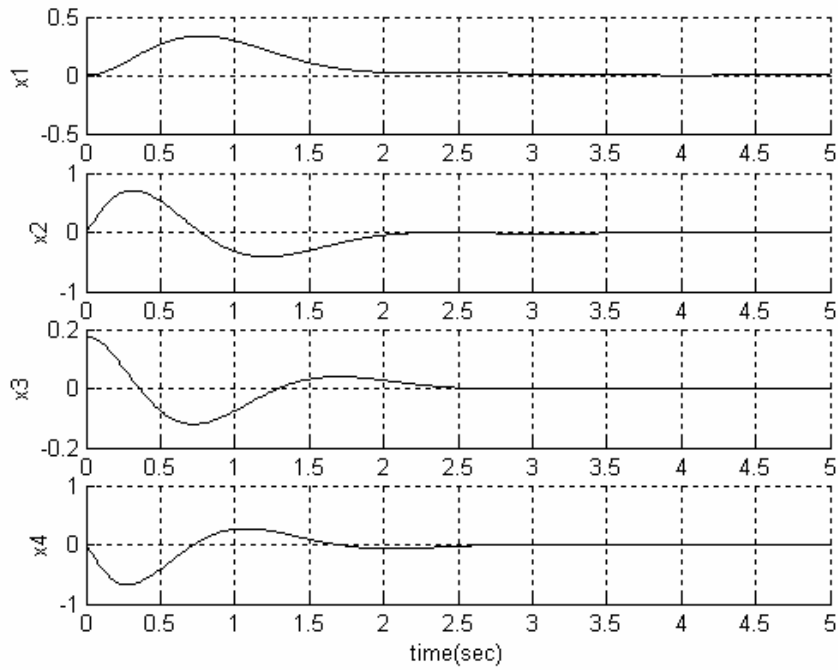
şeklinde DOP modeli amaç fonksiyonu içine dahil edilmektedir. Burada yeni ceza parametresi  $\tilde{\lambda}$  değerinin seçimi ile kayma yüzeyine yaklaşım hızını ifade eden  $\frac{dV}{dt}$  teriminin hız ölçütü olan  $-\gamma s^2$  terimini takip etme oranı ayarlanabilir.  $s \rightarrow 0$  olurken  $\gamma s^2 \rightarrow 0$  olacağından,  $\tilde{\lambda} \|s\dot{s} + \gamma s^2\|$  teriminin amaç fonksiyonunda karar verme mekanizması olarak kullanılma değeri azalmaktadır. Bu şekilde oluşturulan genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisi (Yazıcı et al., 2005b) de acrobot sistemine uygulandığından, bu kısımda sadece ters sarkaç sistemi uygulaması verilmektedir.

#### *Ters sarkaç sistemi uygulaması*

İfade (3.23) kullanılarak oluşturulan genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK denetleyicisi, ters sarkaç sistemine uygulanmak istensin. Önceki bölümlerle benzerlik olması açısından, kayma yüzeyi matrisi  $G = [2 \ 1.5 \ 5 \ 1.5]$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\Omega = \{k_1, \dots, k_4 : -60 \leq k_i \leq 60, i = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\eta = 0.1$  ve  $\gamma = 2$  olarak seçilmektedir. Burada ceza çarpanı  $\tilde{\lambda} = 10$  ve ilk durum değeri  $X^T = [0 \ 0 \ \pi/18 \ 0]$  için genelleştirilmiş DOP tabanlı kayma kipli denetleyici benzetim algoritması ifade (3.23) için kullanıldığında, Şekil 3.21 ve Şekil 3.22 deki grafikler elde edilir.



Şekil 3.21 Kayma Yüzeyi ve sistem girdisinin zamana bağlı değişimi



Şekil 3.22 Sistem durumlarının zamana bağlı değişimi



DOP modeli (3.23) nin amaç fonksiyonu incelendiğinde  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  ile

$\tilde{\lambda} \left\| \frac{dV}{dt} + \gamma s^2 \right\|$  teriminin etkileşimi DOP modeli (3.19) deki gibi değildir. Burada

$\tilde{\lambda} \left\| \frac{dV}{dt} + \gamma s^2 \right\|$  teriminin sıfır olması  $\frac{dV}{dt} = -\gamma s^2$  durumunun oluşmasına bağlı olmakta

olup, bu durum kayma yüzeyine uzak bölgelerde rahatça oluşabilir. Kayma yüzeyi

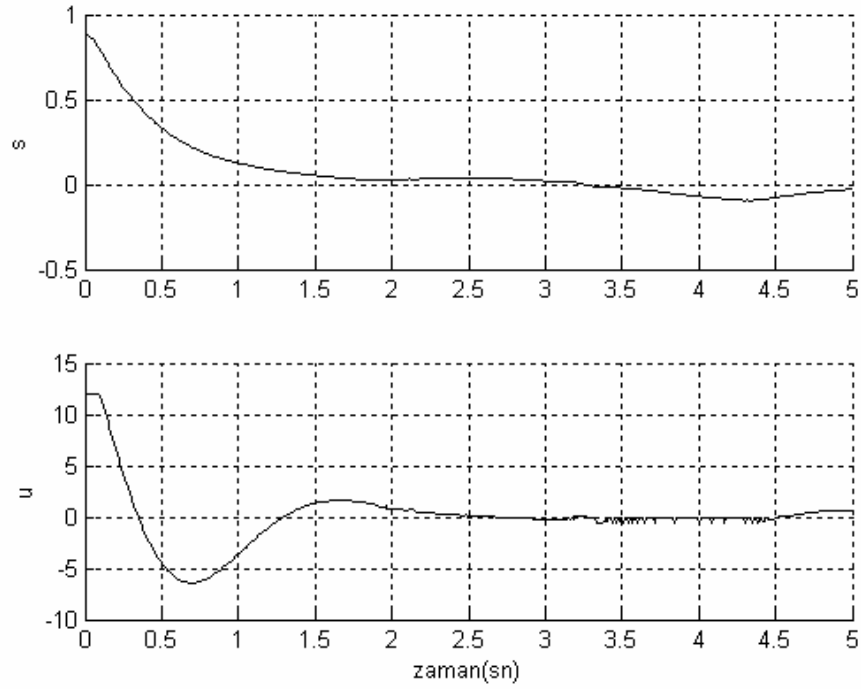
üzerinde ise bu terim zaten sıfır olmakta olup, etkin terim  $\left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\|$  olmaktadır.

### 3.6.2. İki performans kısıtının amaç fonksiyonuna dahil edilmesi

İfade (3.23) de kullanılmakta olan, kayma yüzeyine yaklaştıktan sonra etkili olan  $-\eta s^2$  terimi,

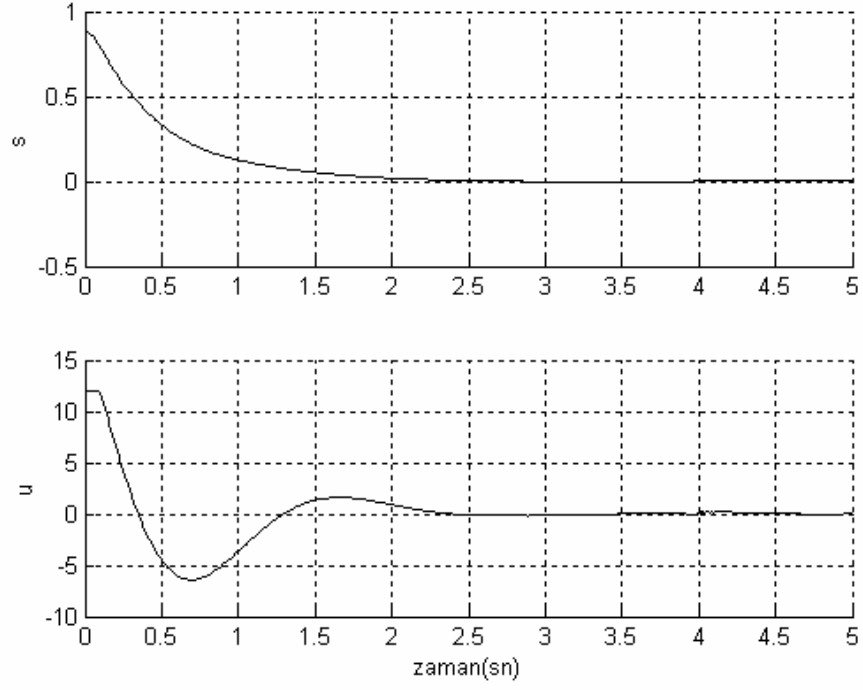
$$\begin{aligned}
 & u \in \{KX : |KX| \leq \alpha\} \\
 & K \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\
 & \text{k.a} \\
 & \text{Enk} \left\| w + \frac{w^T \dot{X}}{\|\dot{X}\|} w \right\| + \bar{\lambda} \left\| \frac{dV}{dt} + \bar{\gamma} s^2 \right\| \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

şeklinde tamamen kaldırılabilir. Bu durumda,  $\bar{\lambda}$  ve  $\bar{\gamma}$  parametrelerini seçimi önem kazanır. Örneğin, Şekil 3.21-Şekil 3.22 de ki grafiklerin elde edildiği  $\bar{\lambda} = \tilde{\lambda} = 10$  ve  $\bar{\gamma} = \gamma = 2$  için yapılan benzetimde Şekil 3.23 da gözüktüğü gibi kayma yüzeyine ulaştıktan sonra oradan uzaklaşmalar olur.

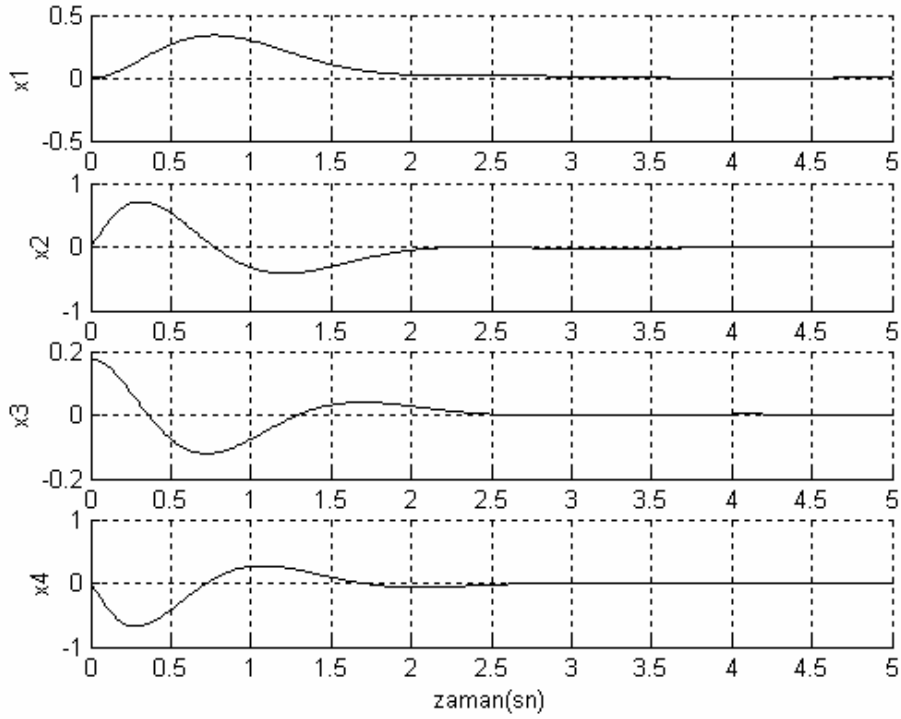


Şekil 3.23 Kayma Yüzeyi ve sistem girdisinin zamana bağlı değişimi

Kayma yüzeyine vardıktan sonra, üzerinde kalmanın sağlanması için  $\bar{\lambda}$  teriminin yüksek değerlerde seçilmesi gerekir. Bu sırada  $\bar{\gamma}$  parametresi yüksek seçildiğinde kayma yüzeyine hızlı yaklaşım olurken, kayma yüzeyi etrafında ufak da olsa zikzaklar oluşturabilmektedir.  $\bar{\gamma}$  parametresinin düşük seçilmesi ise kayma yüzeyine yaklaşım hızını azaltmaktadır. Dolayısıyla bu kısımda, DOP modeli performans kısıtlardan tamamen arındırırken, tasarımcı için denetleyici parametre seçimi biraz daha fazla çaba gerektirmektedir. Örneğin,  $\bar{\lambda} = 100$  ve  $\bar{\gamma} = 2$  için Şekil 3.24-Şekil 3.25 deki grafikler elde edilir.



Şekil 3.24 Kayma yüzeyi ve kontrol girişinin zamana bağlı değişimi



Şekil 3.25 Sistem durumlarının zamana bağlı değişim grafiği

DOP modeli (3.24) ile model kayma yüzeyine yaklaşım hızını belirleyen kısıtlardan tamamen arındırılmakta fakat bu durumda denetleyici parametrelerinin tasarımı daha zorlaşmaktadır.

### **3.7 KKK Denetleyicilerinde DOP Kullanılması : Sonuçlar – Yapılabilecek Çalışmalar**

Yapılan çalışmada kayma kipli kontrol geri besleme matrisinin doğrusal olmayan programlama ile bulunabileceği gösterilmiştir. İlk olarak, kayma kipli kontrolde temel iki faz olan ulaşım ve kayma fazları iki ayrı DOP modeli ile temsil edilmekte ve oluşturulan denetleyici yapısı benzetim ortamında başarılı şekilde ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır. Sonrasında ise, ulaşım ve kayma fazlarına karşılık gelen DOP modelleri seçilen belli ceza çarpanı ile tek bir DOP modeli altında birleştirilmekte ve yine benzetim ortamında ters sarkaç ve acrobot sistemlerine uygulanmaktadır.

Yeni yaklaşımda kayma kipli kontrolde önemli bir dezavantaj olan zikzaklar (chattering) (Young et al., 1999; Bartolini et al., 2000), bu yeni yöntem kullanıldığında oluşmamaktadır. Sistem girdisinde yüksek frekansta değişimler şeklinde oluşan zikzaklar, sistemde yüksek frekans modellenemeyen dinamikleri harekete geçirerek beklenmedik kararsızlıklara, veya sistemde fiziksel yıpranmalara yol açabilmektedirler.

Kayma kipli kontrolün doğrusal olmayan programlama ile modellenmesiyle, sistem girdilerine sınır değeri getirme imkanı olmaktadır. Ayrıca, kurulan doğrusal olmayan programlama modelindeki kısıtlar sayesinde, klasik kayma kipli kontrolde mümkün olmayan kayma yüzeyine yaklaşım hızını ayarlamak mümkün olmaktadır. Ayrıca, yeni denetleyicinin parametre değişimlerinin sistem tepkisine olan etkisi incelendiğinde, denetleyici parametrelerinin belli aralıklarda rahatça seçilebilmesinin mümkün olduğu gözükmemektedir.

Sistem girdisi, her bir örnekleme zaman aralığında sistem durumlarının sabit bir geri besleme matrisi ile çarpımından oluştuğu için, klasik kayma kipli kontrolde olan eşdeğer girdinin hesaplamasına gerek kalmamaktadır. Verilen doğrusal olmayan bir

sistem için kayma yüzeyinin bulunmasından sonra, klasik kayma kipli kontrol yöntemleri  $\dot{X} = f(X) + b(X)u$  şeklindeki sistemlere uygulanabilirken, yeni yöntem belli varsayımlar altında  $\dot{X} = a(X, u)$  şeklindeki geniş sınıf sistemlere uygulanabilir.

Yapılan yayınlarda (Gasimov et al., 2005; Yazıcı et al., 2005; Yazıcı et al., 2003; Yazıcı et al., 2004), doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol denetleyicileri, değişik yapılarda ters sarkaç ve acrobot sistemine başarı ile uygulanmıştır.

İleride yapılacak çalışmalarda,  $\dot{X} = a(X, u)$  formunda verilen sistemler için gürbüz yapıda denetim gerçekleyecek DOP tabanlı KKK denetleyicileri tasarlanabilir. Ayrıca, genelleştirilmiş DOP tabanlı KKK deki ceza parametresi ile kayma yüzeyi bant genişliği arasında bir ilişki kurulması mümkün olabilir. Benzetimlerde, gözlenen ilişki bu alanda yapılabilecek çalışma ile bir fonksiyon ile tanımlanabilir.

Bu çalışmada önerilen doğrusal olmayan programlama modelleri ile en basit anlamda, tek girdili kayma kipli kontrol denetleyicisinin gerçekleştirilmesi aktarılmaktadır. Klasik kayma kipli denetleyicilerine ek olarak kayma yüzeyine yaklaşım hızı performans kriteri ayarlanmakta ve sistem girdisine kısıt getirilmektedir. Yapılacak çalışmalarla mevcut doğrusal olmayan programlama modelleri çok girdili sistemlere uygulanabilir hale getirmenin yanı sıra, doğrusal olmayan programlama modellerinde yapılacak değişikliklerle, denetleyici için farklı performans kriterleri veya kısıtlar eklemek mümkün olabilir.

#### 4. GERÇEK YAPISAL TEKİL DEĞERİN ALT SINIRININ HESAPLANMASI İÇİN YENİ BİR YÖNTEM

Doğrusal zamanla değişmeyen nominal bir sistem için tasarlanmış denetleyicinin, nominal sistemdeki hangi değişim miktarına kadar sistemi kararlı halde tutacağı kontrol teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu bölümde, yapısı bilinen gerçek belirsizliklere sahip sistemler için, gürbüzlük değerlerini hesaplamak üzere kullanılan gerçek yapısal tekil değer bir doğrusal olmayan programlama problemi olarak modellenmekte ve bu model genişletilmiş subgradient algoritması ile çözülmektedir. Çeşitli örnek problemler için elde edilen alt sınır değerleri bu amaca yönelik MATLAB komutu kullanılarak elde edilen alt sınır değerleri ile karşılaştırılmaktadır.

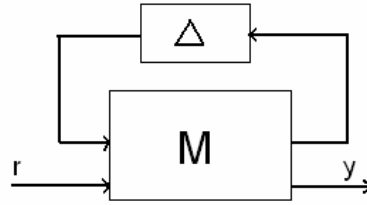
Yapısı bilinen karmaşık belirsizlikler için karmaşık yapısal tekil değer (*complex structured singular value*) hesaplayarak, yapısı bilinmeyen belirsizliklere göre daha kati gürbüzlük sınır değerleri bulmak mümkündür (Doyle, 1982; Packard and Doyle, 1993; Balas et al., 1995). Karmaşık belirsizliklere ek olarak parametrik belirsizlikleri de içeren, karışık belirsizliklerin olduğu sistemlerde, gürbüzlük sınır değerleri bulmak için karışık yapısal tekil değer (*mixed structured singular value*) yöntemi kullanılmaktadır (Fan et al., 1991; Young et al., 1995; Fu and Barabanov, 1997; Newlin and Young, 1997; Young and Doyle, 1997; Balas et al., 2001). Ancak bu yöntemler üzerine kurulu olan mevcut yazılım araçları, sadece parametrik belirsizliklerin olduğu sistemlerde başarılı sonuçlar vermemektedir. Bu tür belirsizlikler için hesaplanan gerçek yapısal tekil değer (*real structured singular value*) alt-üst sınırları arasında büyük bir aralık vardır. Bu yöntemlerdeki detaylar ve gerçek belirsizlikler için analiz imkanı veren yapısal tekil değer aracı dışındaki diğer yöntemler için (Young, 2001) uygun bir başvuru kaynağıdır. Sadece parametrik belirsizliklerin olduğu sistemlerde, yapısal tekil değer formülasyonu kullanılarak, bir gürbüzlük ölçütü olan,  $\mu$ 'nun hesaplanmasına yönelik geliştirilen diğer yöntemler için, (Ge and Chu, 1998; Ge and Chu, 2000; Hayes et al., 2001; Elgersma et al., 1996; Gungah et al., 2001) kaynaklarına bakılabilir.

Bu bölümde, Bölüm 2'de detaylı olarak verilen, genişletilmiş subgradient algoritması kullanılarak gerçek yapısal tekil değerinin alt sınır değerinin hesaplanması için yeni bir yöntem önerilmektedir. Öncelikle, en genel haliyle yapısal tekil değer hesaplanması anlatılmakta olup, sonrasında gerçek yapısal tekil değerinin alt sınırının

hesaplanması için önerilen doğrusal olmayan programlama modeli ve bu modelin çözümü için önerilen algoritmaya değinilmektedir. Yeni yöntem çeşitli örneklere uygulanmaktadır.

#### 4.1 Yapısal Tekil Değer (Structured Singular Value)

Belirsizliklere sahip doğrusal bir sistem Şekil 4.1 deki gibi temsil edilebilir. Bu yapıda  $M$  bilinen kısımları temsil eden doğrusal transfer fonksiyon matrisini,  $\Delta$  ise saf belirsizlikler matrisini temsil etmektedir.



Şekil 4.1 Sistemlerdeki belirsizliklerin ayrıştırılması

Belirsizlik bloğu  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ , yapısında olup her alt blok  $\Delta_i$ , tekrar eden gerçek skaler blok ( $\Delta_i = \delta_i I_k, \delta_i \in \mathbb{R}$ ), tekrar eden karmaşık skaler blok ( $\Delta_i = \delta_i I_k, \delta_i \in \mathbb{C}$ ) veya tamamen karmaşık bir blok ( $\Delta_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ ) olabilir. Bu alt blokların boyutlarının toplamı  $\Delta$  bloğunun boyutuna eşittir ve değişken tipleri ve boyutları ise sistemlerde belirsizlik tiplerine bağlıdır. Gerçek bloklar ile parametrik belirsizlikler; karmaşık bloklar kullanılarak da modellenemeyen dinamikler temsil edilebilir (Fan et al., 1991).

Transfer fonksiyonu matrisi  $M$  altmatrisleri türünden

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $M_{11}$  in boyutu belirsizlik bloku  $\Delta$  ile etkileşimde olacak şekildedir. En genel olarak, belirsizlik bloğu  $\Delta$  ya karşılık gelen  $M_{11} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matrisinin yapısal tekil değeri (*structured singular value*),  $\mu_{\Delta}(M_{11})$ :

$$\mu_{\Delta}(M_{11})^{\Delta} = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M_{11}\Delta) = 0\}} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. İfade  $I - M_{11}\Delta$  yi tekil yapan bir  $\Delta$  yoksa, bu durumda  $\mu_{\Delta}(M_{11})^{\Delta} = 0$  olarak tanımlanır. Bu ifadelerde  $\bar{\sigma}(\Delta)$  maksimum tekil değeri temsil etmektedir.

İfade (4.2) ile verilen eniyileme problemi NP hard olarak bilinmekte ve hesaplaması değişik zorluklar içermektedir (Braatz et al., 1994; Nemirovskii, 1993; Poljak and Rohn, 1993; Young and Doyle, 1996; Packard and Pandey, 1993; Fu and Dasgupta, 2000; Fu, 1997; Coxson and DeMarco, 1994; Toker and Özbay, 1995). Literatürde, ifade (4.2) ile verilen formülle direk  $\mu$  değerinin hesaplanması yerine, daha önce de belirtilen, alt ve üst sınır değerlerinin direkt optimizasyon dışı yöntemlerle hesaplanması önerilmektedir. Ayrıca, belirsizlik türüne bağlı olarak, önerilen alt ve üst sınır değer hesaplamaları da değişiklikler içermektedir. Örneğin, karışık (karmaşık-gerçek) belirsizliklerin olduğu problemler için  $\mu$  hesaplanması, sadece karmaşık belirsizliklerin olduğu problemler için  $\mu$  hesaplanmasından daha zordur (Fan et al., 1991; Young et al., 1995). Sadece gerçek belirsizliklerin olduğu sistemlerde yapısal tekil değer hesaplanmasında, karışık belirsizlikler için önerilen alt ve üst sınır hesaplama yöntemleri kullanılmaktadır. Bu yöntemlerce kullanılan alt sınır değer hesaplama yöntemi, sadece gerçek belirsizliklerin olduğu sistemlerde çözüm olduğu durumlarda dahi sıfır alt sınır verebilmektedir. Dolayısıyla sadece gerçek belirsizliklerin olduğu durumda alt-üst sınır arasında büyük bir aralık vardır. Mevcut yazılım araçlarında, gerçek yapısal tekil değer içinde kullanılmakta olan alt ve üst sınır hesaplama yöntemi devam eden kısımda verilmektedir.

Karışık belirsizliklere sahip bir problem için,  $\rho_R(M_{11}) = \max\{|\lambda| : \lambda M_{11} \text{ in gerçekte bir özdeğeri}\}$ , eğer  $M_{11}$  gerçekte özdeğere sahip değilse  $\rho_R(M_{11}) = 0$  olsun. Belirsizlik bloğu  $\Delta$  için  $m_r$  gerçekte skalar blokların sayısını,  $m_c$  karmaşık skalar blokların sayısını ve  $m_C$  ise tam ve karmaşık elemanlara sahip blokların sayısını temsil etmek üzere  $m = m_r + m_c + m_C \leq n$  olsun. Verilen bir blok yapısı

$$\kappa = (k_1, \dots, k_{m_r}; k_{m_r+1}, \dots, k_{m_r+m_c}; k_{m_r+m_c+1}, \dots, k_m) \quad (4.3)$$

için  $\sum_{q=1}^m k_q = n$  olup, belirsizlik matrisi  $\Delta$  verilen



$$L_{\kappa} = \left\{ \Delta = \text{blok diag}(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_c}^C) : \begin{array}{l} \delta_i^r \in R, \quad \delta_i^c \in C, \quad \Delta_i^C \in C^{k_{m_r+m_c+i} \times k_{m_r+m_c+i}} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

yapısının bir alt kümesi olsun. Burada  $I_k$  verilen herhangi bir tamsayı  $k$  için  $k \times k$  boyutlu birim matrisi temsil etmektedir.  $\mu$  için alt sınır tanımını yapmak üzere blok köşegen skalar matrisler tanımlansın:

$$Q_L = \left\{ \Delta \in L_{\kappa} : \delta_i^r \in [-1, 1], \quad \delta_i^{c*} \delta_i^c = 1, \quad \Delta_i^{c*} \Delta_i^c = I_{k_{m_r+m_c+i}} \right\} \quad (4.5)$$

$$D_L = \left\{ \Delta = \text{blok diag}(D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{k_{m_r+m_r+1}}, \dots, d_{m_c} I_{k_m}) : \begin{array}{l} 0 < D_i = D_i^* \in C^{k_i \times k_i}, \quad 0 < d_i \in R \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

$$G_L = \left\{ \text{blok diag}(G_1, \dots, G_{m_r}, 0_{k_{m_r+1}}, \dots, 0_{k_m}) : G_i = G_i^* \in C^{k_i \times k_i} \right\} \quad (4.7)$$

Sabit  $M_{11} \in C^{n \times n}$  matrisi ve karşılık gelen blok yapısı  $\kappa$  dikkate alındığında alt ve üst sınır  $\mu$  değerleri (Young, 2001)

$$\max_{Q \in Q_L} \rho_R(QM_{11}) \leq \mu_{\Delta}(M_{11}) \leq \inf_{\substack{D \in D_L \\ G \in G_L}} \inf_{0 \leq \beta \in R} \left\{ \beta : \bar{\sigma} \left( \left( \frac{DM_{11}D^{-1}}{\beta} - jG \right) (I + G)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\} \quad (4.8)$$

olarak bulunabilir. Verilen bir transfer fonksiyonu  $M_{11}(s)$  için, bütün frekans aralığı dikkate alınır, İfade (4.8) ile önerilen alt ve üst sınır değerlerinin en-büyükleri kullanılarak  $\mu$  alt-üst sınır değeri

$$\gamma_1 = \sup_{w \in R^+} \max_{Q \in Q_L} \rho_R(QM_{11}(jw)) \quad (4.9)$$

$$\gamma_2 = \sup_{w \in R^+} \inf_{\substack{D \in D_L \\ G \in G_L}} \inf_{0 \leq \beta \in R} \left\{ \beta : \bar{\sigma} \left( \left( \frac{DM_{11}(jw)D^{-1}}{\beta} - jG \right) (I + G)^{-1/2} \right) \leq 1 \right\} \quad (4.10)$$

şeklinde bulunabilir. Burada alt sınır  $\gamma_1$ , yapısal belirsizliklerden dolayı oluşacak kararsızlık için olan yeterli durumu vermektedir. Bu aynı zamanda en kötü durum olmaktadır. Üst sınır  $\gamma_2$  ise, hangi seviye belirsizliklerin kararlılık için yeterli olduğu sorusuna cevap vermektedir.

Yapılan çalışmalarda (Yazıcı ve Karamancıoğlu 2004; Yazıcı and Karamancıoğlu 2005a), karmaşık yapısal belirsizliklere sahip, geri besleme altındaki ters sarkaç ve acrobot sistemlerinin gürbüzlük analizleri yapılmıştır.

## 4.2 Gerçek Yapısal Tekil Değerin Alt Sınırının Hesaplanması için Önerilen

### DOP Modeli

İfade (4.2) ile verilen enküçükleme problemindeki kısıt, aşağıdaki gibi gerçek ve sanal kısımlara ayrılabilir (Ge and Chu, 1998; Ge and Chu, 2000):

$$\det(I - M\Delta_{11}) = f_R(\delta_1, \dots, \delta_n) + f_I(\delta_1, \dots, \delta_n)i. \quad (4.11)$$

Burada  $f_R$ , ve  $f_I$ , sırasıyla  $\det(I - M_{11}\Delta)$  ifadesinin gerçek ve sanal kısımlarına karşılık gelmektedir. Bu ayrıştırma ifade (4.2) in aşağıdaki formda yazılmasına imkan vermektedir:

$$\begin{aligned} \mu(M_{11}) &= \frac{1}{\min\{\overline{\sigma}(\Delta) : \det(I - M_{11}\Delta) = 0\}} \\ &= \frac{1}{\min\{\max(|\delta_i|) : f_R(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0, \\ &\quad f_I(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0\}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Model (4.12) de, orijinal kısıtlara ve amaç fonksiyonuna aylak değişkenlerin değişik kuvvetlerinin eklenmesi ile doğrusal olmayan programlama modeli problem çözümü daha esnek bir yapıya kavuşmaktadır. Önerilen model anlatıldıktan sonra bu esnek yapı daha detaylı sunulacaktır.

Yeterli küçük bir  $\varepsilon$ , yeterli büyük frekans aralığı  $[w_L, w_U]$ , ve  $(\delta_1, \dots, \delta_n, \lambda_1, \lambda_2)$  değişkenlerini içeren kompakt hiper-dikdörtgen bölgesi  $\Omega$  verilsin. Burada  $[w_L, w_U]$  aralığındaki her bir frekans  $w$  için  $\mu_L(M_{11}(iw))$  aşağıdaki adımlar kullanılarak hesaplanabilir:

*Adım 1:* Yüksek değerde bir ceza parametresi  $\lambda$  seç (örneğin:  $\lambda \geq 10^5$ ).  $m = p = 2$  seç ( $p = 2, 4, 6, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , olabilir). Aşağıdaki problemi çöz.

$$\begin{aligned} f_R(\delta_1, \dots, \delta_n) - \lambda_1^m &= 0 \\ f_I(\delta_1, \dots, \delta_n) - \lambda_2^p &= 0 \\ (\delta_1, \dots, \delta_n, \lambda_1, \lambda_2) &\in \Omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

*k.a.*

$$\text{Enk} \quad \max_i (|\delta_i|) + \lambda(\lambda_1^p + \lambda_2^p)$$

*Adım 2:* Determinant değerine karşılık gelen  $\left\| \begin{matrix} f_R \\ f_I \end{matrix} \right\|$  i kullanarak frekans  $w$  için alt sınır bul.

$$\mu_L(M_{11}(jw)) = \begin{cases} \frac{1}{\max_i (|\delta_i|)}, & \text{eger } \left\| \begin{matrix} f_R \\ f_I \end{matrix} \right\| < \varepsilon \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (4.14)$$

Frekans aralığı  $[w_L, w_U]$  deki örneklenen frekanslar için eniyileme problemleri çözüldüğünde, gerçek yapısal tekil değer alt sınırı

$$\mu_L(M_{11}(s)) = \max_w \mu_L(M_{11}(iw)) \quad (4.15)$$

ifadesi ile bulunabilir.

### 4.3. Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin Çözümü

İfade (4.13) ile verilen doğrusal olmayan programlama modeli aşağıdaki standart forma getirilebilir:

$$\begin{aligned} h(K) &= 0 \\ K &\in \Omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

*k.a.*

$$\text{Enk} \quad f(K)$$

Burada değişkenler  $K = (\delta_1, \dots, \delta_n, \lambda_1, \lambda_2)$ , amaç fonksiyonu  $f(K) = \max_i (|\delta_i|) + \lambda_1^p + \lambda_2^p$ ,

ve kısıt vektörü  $h(K) = [h_1(K) \quad h_2(K)]^T$  olup kısıtlar  $h_1(K) = f_R(\delta_1, \dots, \delta_n) - \lambda_1^m$  ve

$h_2(K) = f_1(\delta_1, \dots, \delta_n) - \lambda_2^m$  dir. Burada, problem (4.16) asıl problem olarak adlandırılıp, bu problemin çözümü için Bölüm 2'de genişletilmiş subgradient algoritması kullanılmaktadır. Genişletilmiş subgradient algoritması, klasik yöntemlere göre geniş sınıf problemler için ikil aralık olmadan çözüm üretse bile, algoritmanın global en iyiyi bulması ifade (2.56) da kullanılan kısıtsız problem çözümleyicisine büyük ölçüde bağlıdır. Bazı durumlarda yerel en az çözüm değerine ulaşılabilir. Bundan dolayı bulunan sonuç gerçek yapısal tekil değer alt sınır değeri olarak dikkate alınmaktadır.

Dikkat edilirse ifade (4.11) da kısıtları direk sıfıra eşitleme yerine, gerçek ve sanal kısımlara sırasıyla  $-\lambda_1^m$  ve  $-\lambda_2^m$  aylak değişkenleri eklenmektedir. Bu şekilde, kısıtların sağlanmasına yönelik nümerik hatalar elimine edilmektedir. Problemin karakteristiğine bağlı olarak, aylak değişkenler  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  in değişik kuvveti kullanılabilir. Bu ise daha öncede bahsedildiği gibi problemin çözümünde esneklik sağlamaktadır.

#### 4.4. Uygulamalar

Bu altbölümde, yeni yöntemi çeşitli matrislere uygulamakta ve bulduğumuz sonuçları (Genişletilmiş subgradient algoritmasının (4.13) ya uygulanması) MATLAB  $\mu$  analizi ile bulunan sonuçlarla karşılaştırmaktayız. Ayrıca, genişletilmiş subgradient algoritması yerine direk MATLAB ve GAMS eniyileme çözümleyicilerini (4.13) ya kullanmak suretiyle de karşılaştırmalar yapılmaktadır.

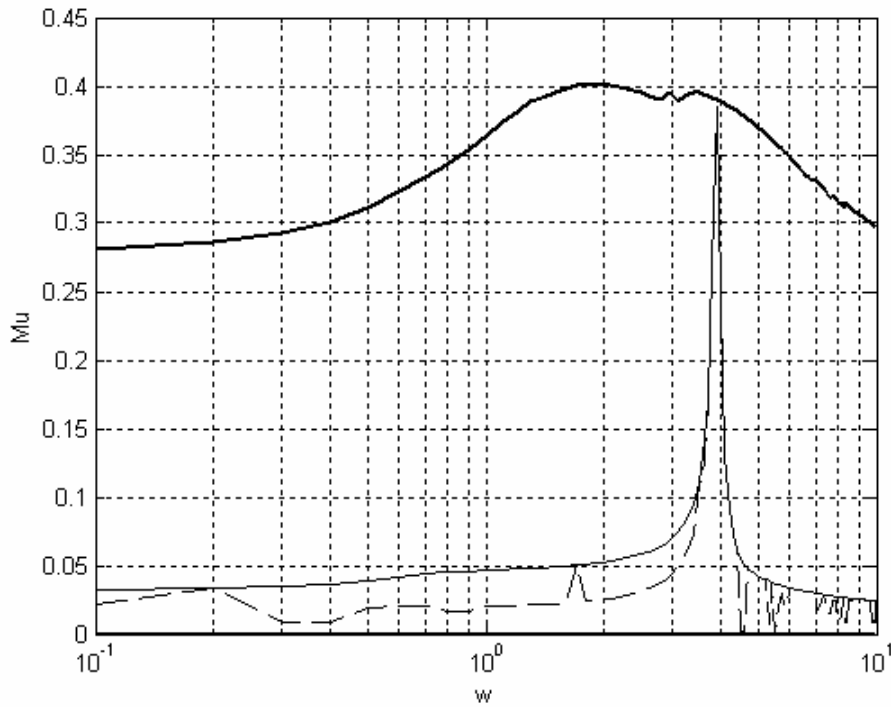
#### Örnek 4.1

Sadece belirsizlikler ile etkileşen bir transfer fonksiyonu matrisi

$$M_{11}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+99s+100} & \frac{1}{s^2+150s+4400} & \frac{s-1}{s+7} \\ \frac{1}{s^2+11s+12} & \frac{1}{s^2+99.99s+1} & \frac{1}{s+140} \\ \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s+10} & \frac{1}{s+30} \end{bmatrix}$$

ve belirsizlik yapısı  $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ,  $\delta_i \in R$ ,  $i = 1, 2, 3$  için gerçek yapısal tekil değer bulunmak istensin. İfade (4.13) ve ifade (4.14) deki parametreler  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,

$\Omega = \{(\delta_1, \dots, \delta_n, \lambda_1, \lambda_2) : -10^5 \leq \delta_i \leq 10^5, i=1, \dots, 3, 0 \leq \lambda_{1,2} \leq 10^5\}$  ve frekans aralığı  $w \in [0.1, 10]$  için gerçek yapısal tekil değerin frekansa bağlı değişim Şekil 4.2 de verilmektedir. Bu şekilde, MATLAB  $\mu$  kullanılarak önerilen alt-üst sınır değerleri kalın çizgiler ile, genişletilmiş subgradient algoritmasının ifade (4.13) uygulanması ile bulunan alt sınır değeri ince çizgi ile gösterilmektedir. Burada önerilen yöntem MATLAB  $\mu$ 'nun alt sınırına göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Aynı grafikte, kesikli çizgi ile gösterilen, ifade (4.13) nin sadece GAMS (MINOS çözümleyicisi) eniyileme çözümleyicileri ile edilen alt sınır değeridir.



Şekil 4.2. Örnek 4.1 için bulunan  $\mu$  değerlerinin frekansa bağlı değişimi

Şekil 4.2 de gözüktüğü gibi genişletilmiş subgradient algoritması ve önerilen DOP modeli kullanıldığında gerçek yapısal tekil değer için daha iyi sonuçlar bulunmaktadır.

#### Örnek 4.2

Sadece parametrik belirsizliklerin olduğu sabit geri besleme altındaki ters sarkaç sisteminde, belirsizlik analizi yapılmak istensin. Öncelikle, bu sistemde belirsizlik

modellemesi yapılmakta, sonrasında ise geliştirilen yeni yöntemle, verilen sabit geri besleme matrisi için, belirsizlik sınırları bulunmaktadır.

İfade (2.26) ile verilen sistemin, verilen bir ilk durum değeri  $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  için sistemin  $X_d = [r \ 0 \ 0 \ 0]^T$  şeklinde bir yörüngeyi takip etmesi istensin. Sistem durumları ve istenilen yörünge cinsinden hata

$$e := X - X_d \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ifade (2.26) de yerine yazıldığında sistem hata dinamikleri

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (4.18)$$

gibi yazılabilir. Verilen hata sistemi için sistem girdisi

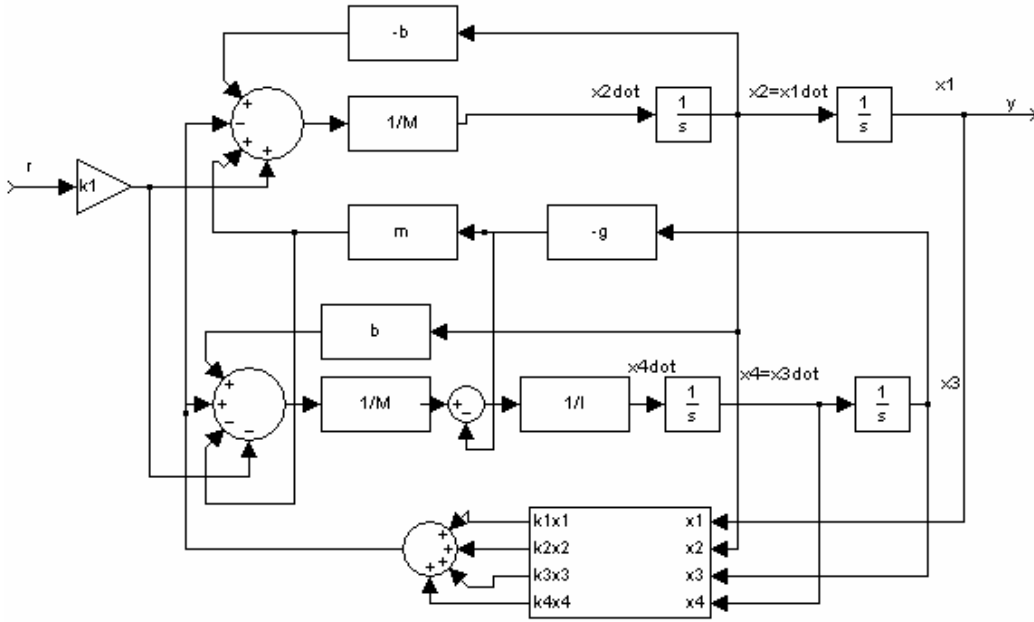
$$u = -Ke \quad (4.19)$$

olup, geri besleme matrisi  $K := [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$  şeklinde olsun. İfade (4.17) ve (4.19) ifade (4.18) de yerine yazıldığında sistem dinamiği, sistem parametreleri cinsinden, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{b+k_2}{M} & -\frac{mg+k_3}{M} & -\frac{k_4}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{Ml} & \frac{b+k_2}{Ml} & \frac{(M+m)g+k_3}{Ml} & \frac{k_4}{Ml} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{M} \\ 0 \\ -\frac{k_1}{Ml} \end{bmatrix} r \quad (4.20)$$

$y = x_1$ .

İfade (4.20) ile verilen modelin blok diyagramı Şekil 4.3 deki gibi olur.



Şekil 4.3 Ters sarkaç sisteminin geri besleme altında blok diyagramı.

Yapılmakta olan belirsizlik modellenmesinde, parametrik belirsizlik olarak sistem kütlesi ve uzunluğu olan  $m$  and  $l$  deki belirsizlikler ele alınmaktadır. Bu parametrelerdeki belirsizlikler, nominal değerleri etrafında

$$m = \bar{m}(1 + m_v \delta_m), \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{\bar{l}(1 + l_v \delta_l)} \quad (4.21)$$

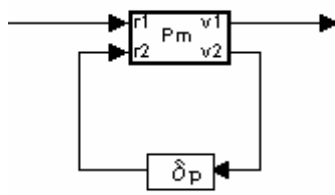
şeklinde temsil edilebilir. Burada normalleştirme değerleri  $m_v = 1$ ,  $l_v = 1$  ve nominal değerler (Bkz. Çizelge 2.1)  $\bar{m} = 0.5$ ,  $\bar{l} = 0.5$  olarak alınmaktadır. İfade (4.21) deki parametrik belirsizlikler kısmi doğrusal kesirli dönüşümler (*Linear Fractional Transformations -LFT*) kullanılarak

$$m = F_L(P_m, \delta_m), \quad \frac{1}{l} = F_U(P_l, \delta_l) \quad (4.22)$$

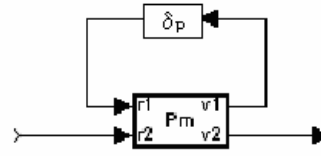
şeklinde yazılabilirler (Balas et al., 2001). Burada

$$P_m = \begin{bmatrix} \bar{m} & m_v \bar{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } P_l = \begin{bmatrix} -l_v & \frac{1}{\bar{l}} \\ -l_v & \frac{1}{\bar{l}} \end{bmatrix} \text{ olup, ifade (4.22) de LFT formunda yazılan } P \text{ ve}$$

( $1/P$ ) şeklindeki parametreler Şekil 4.4.a ve Şekil 4.4.b deki blok diyagramlarla gösterilebilir.

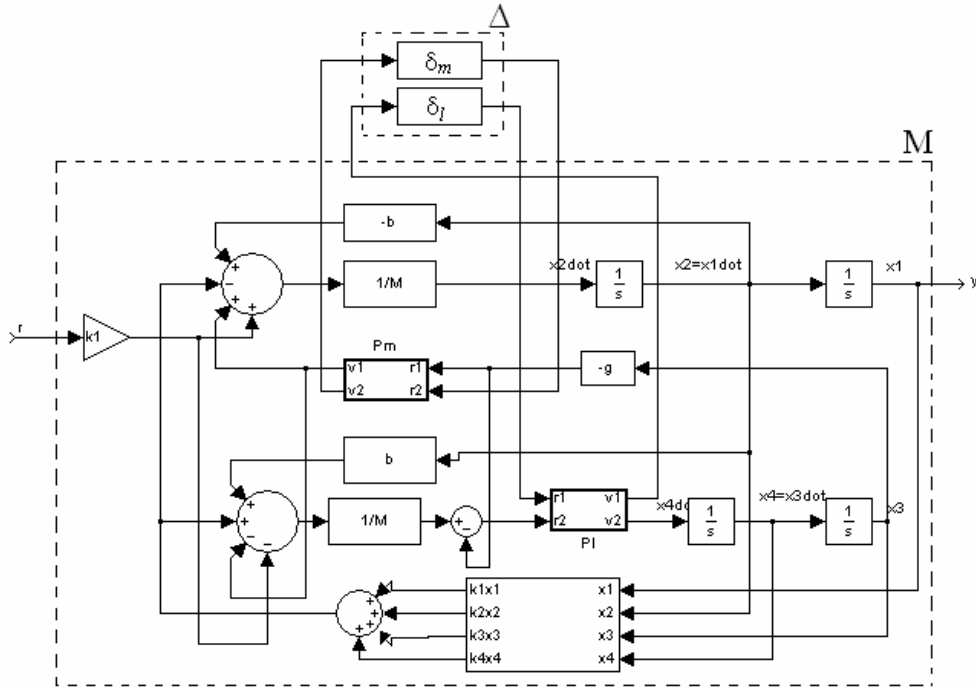


Şekil 4.4.a  $P$  tipi belirsizlikler



Şekil 4.4.b  $\frac{1}{P}$  tipi belirsizlikler

Sistem parametreleri  $m$  ve  $l$  deki belirsizliklerin temsilinde kullanılabilecek olan Şekil 4.4.a-b deki blok şemaları, Şekil 4.3 deki nominal modelin içine yerleştirilsin. Bu yerleştirme sonucu, Şekil 4.1 deki yapıda bilinen kısım  $M$  ve bilinmeyen kısım  $\Delta$  nin blok diyagram gösterimi Şekil 4.5 de ki gibi olur:



Şekil 4.5 Ters sarkaç sistemi bilinen kısmın  $M$ , ve bilinmeyen kısım  $\Delta$  nin blok diyagramı



Bütün sistemin, bilinen kısım transfer fonksiyonu  $M$  ve belirsizlikler  $\Delta$  cinsinden, ifadesi

$$y = F_U(M, \Delta)r \quad (4.23)$$

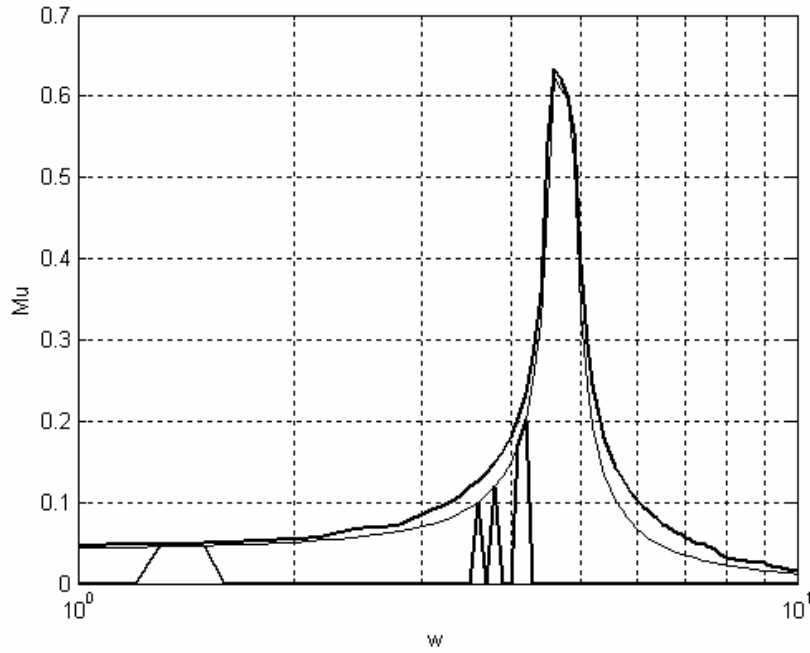
olarak yazılabilir. Bu ifadedeki transfer fonksiyonu matrisi  $M$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Burada, Çizelge 2.1 deki nominal sistem parametreleri ve ifade (4.19) deki geri besleme matrisi  $K = [-15.82 \quad -22.46 \quad -150.45 \quad -36.09]$  için, belirsizliklere karşılık gelen transfer fonksiyonu matrisi aşağıdaki gibi olur:

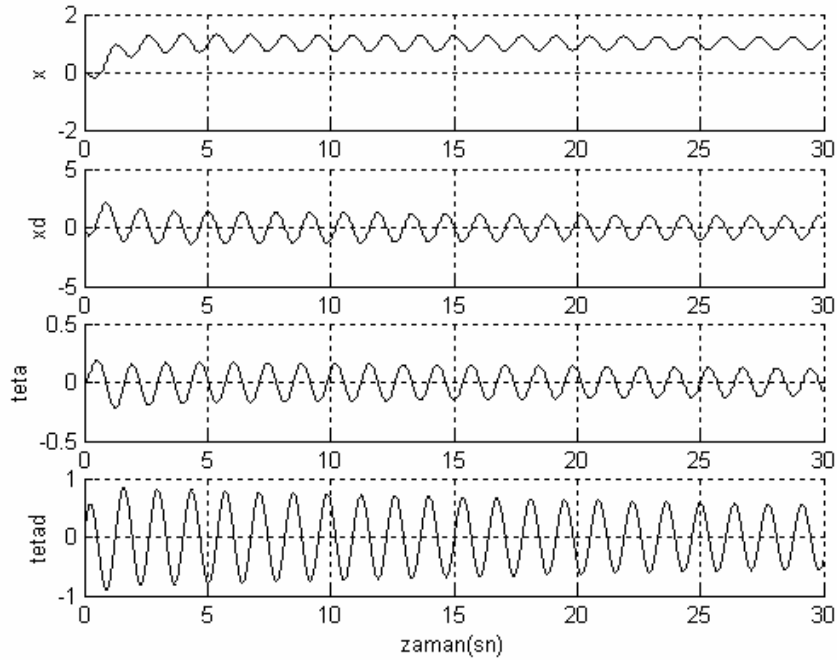
$$M_{11}(s) = \frac{1}{s^4 + 17.24s^3 + 72.14s^2 + 133.80s + 103.46} \begin{bmatrix} 3.27s^2 & 9.81s^2 - 66.9s - 51.73 \\ -0.333s^4 & -s^4 + 6.82s^3 + 5.27s^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Bu sistem için  $\varepsilon = 10^{-10}$ ,  $\Omega = \{(\delta_m, \delta_l, \lambda_1, \lambda_2) : -10^5 \leq \delta_m, \delta_l \leq 10^5, 0 \leq \lambda_{1,2} \leq 10^5\}$  ve frekans aralığı  $\omega \in [1, 10]$  alınarak gerçek yapısal tekil değer bulunmak istensin. Şekil 4.6 da gerçek yapısal değerlerin frekansa bağlı değişimini göstermektedir. Bu şekilde, MATLAB  $\mu$  kullanılarak önerilen alt-üst sınır değerleri kalın çizgiler ile, genişletilmiş subgradient algoritmasının ifade (4.13) uygulanması ile bulunan alt sınır ince çizgi ile gösterilmektedir. Burada önerilen yöntem MATLAB  $\mu$  alt sınırına göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Aynı grafikte, kesikli çizgi ile verilen ifade (4.13) nin sadece GAMS (MINOS çözümleyicisi) eniyileme çözümleyicileri ile edilen frekansa bağlı sonuçlarıdır.



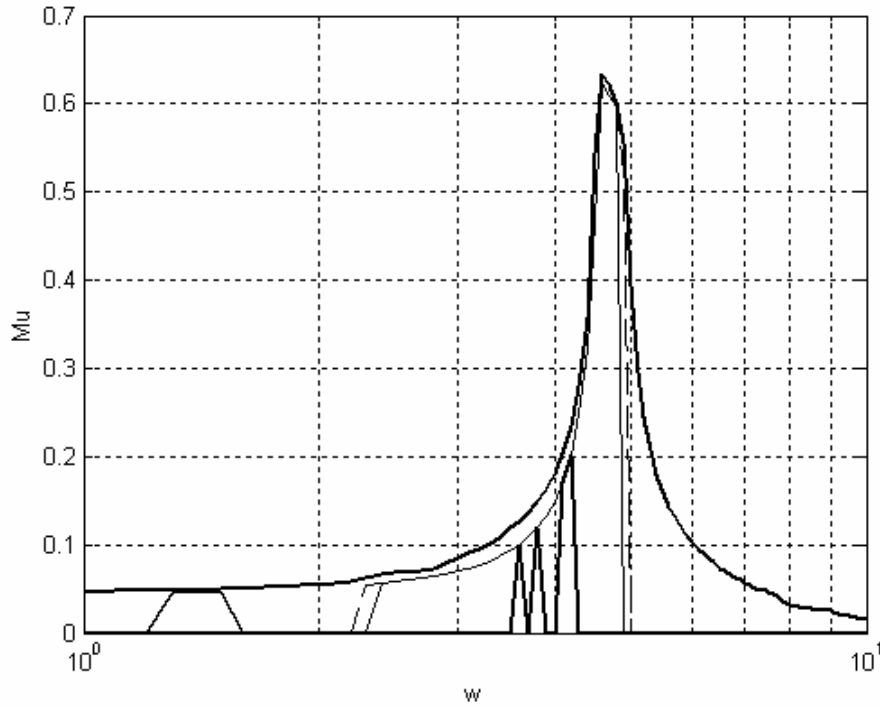
Şekil 4.6. Ters sarkaç sistemi için bulunan  $\mu$  değerlerinin frekansa bağlı değişimi

İfade (4.15) kullanıldığında sistem için  $\mu_L(M_{11}(s)) = 0.6317$  olarak bulunmaktadır. Bu MATLAB ta buluna değerle aynıdır. Dolayısıyla, geribesleme altında,  $\max_w \bar{\sigma}(\Delta) < \frac{1}{\mu(M_{11})} = 1.5830$  sağlayan bütün belirsizlikler için ters sarkaç sistemi karardır. Bu sistem parametreleri  $m$  ve  $l$  de yaklaşık %158 değerlerine kadar eşzamanlı belirsizlik için kapalı çevrim sisteminin kararlı olacağını göstermektedir. Geribesleme matrisi  $K = [-15.82 \quad -22.46 \quad -150.45 \quad -36.09]$ , incelenen sistem parametreleri  $m=1.129$ ,  $l=1.29$  ve diğer sistem parametreleri Çizelge 2.1 deki nominal değerlerinde alındığında kapalı çevrim sisteminin kutupları  $-0.0049 + 4.5577i$ ,  $-0.0049 - 4.5577i$ ,  $-1.2479 + 0.6109i$ ,  $-1.2479 - 0.6109i$ , ve  $X_d = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  şeklindeki bir referans girdisini takip etmesi durumunda ise sistem durumlarının zaman bağlı değişimi Şekil 4.7 deki grafikteki gibi olur.



Şekil 4.7 Belirsizliğe sahip ters sarkaç sisteminin  $X_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  referans girdisini takip sırasında sistem durumlarının zamana bağlı değişimi.

MATLAB ta kullanılan *Mu* komutu ile karşılaştırma yapılabilmesi için, belirsizlik modellenmesinde ters sarkaç sistemindeki belirsizliklerin alt ve üst sınır değerleri  $-10^5 \leq \delta_m, \delta_l \leq 10^5$  şeklinde alınmıştır. İfade (4.21) incelendiğinde,  $m_v = 1$ ,  $l_v = 1$  için, ters sarkaç kütlesi ve uzunluğunda fiziksel olarak anlamlı olacak belirsizlik alt sınırı  $-1 < \delta_m, \delta_l \leq 10^5$  şeklinde olur. Bu yeni durumda  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\Omega = \{(\delta_m, \delta_l, \lambda_1, \lambda_2) : -0.999 \leq \delta_m, \delta_l \leq 10^5, 0 \leq \lambda_{1,2} \leq 10^5\}$  ve frekans aralığı  $w \in [1, 10]$  alınarak gerçek yapısal tekil değer bulunmak istensin. Bu yeni sınır değerleri için genişletilmiş subgradient algoritması ifade (4.13) ile verilen DOP modeline uygulandığında Şekil 4.8 ile verilen grafik elde edilir.



Şekil 4.8.  $-0.999 < \delta_m, \delta_l \leq 10^5$  için ters sarkaç sistemi için bulunan  $\mu$  değerlerinin frekansa bağlı değişimi

Yeni önerilen DOP modeli ve ile daha iyi değerlerin bulunması yanında, fiziksel olarak anlamlı olan, fakat mevcut yazılım araçlarında buna izin vermeyen belirsizlik sınırlaması mümkün olmaktadır.

### Örnek 4.3

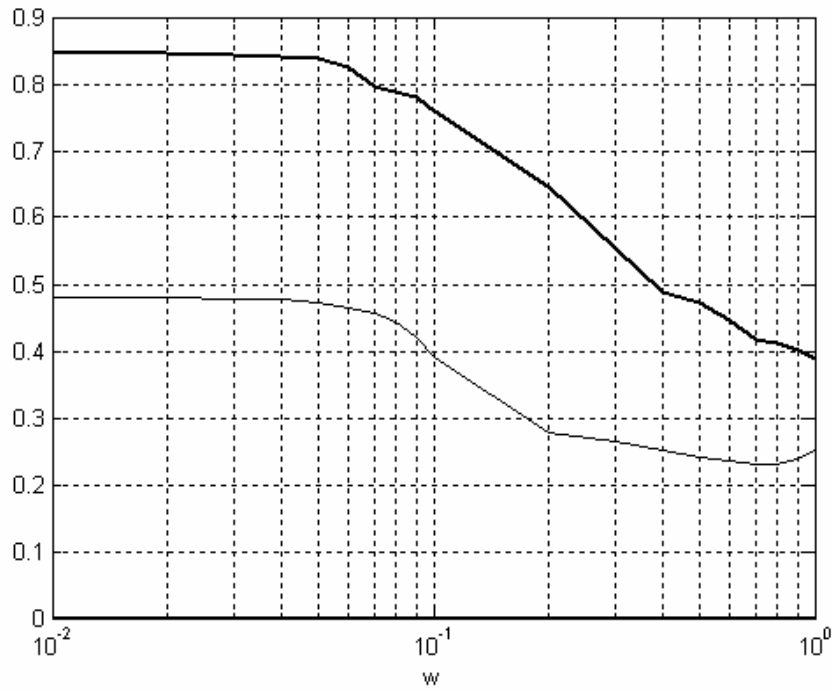
Belirsizliklerle etkileşen bir sistem transfer fonksiyonu

$$M_{11}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s^2 + 8s + 17} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s^2 + 7s + 12} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{1}{s^2 + 12s + 61} & \frac{1}{s^2 + 9s + 22} & \frac{1}{s^2 + 20s + 96} & \frac{1}{s^2 + 18s + 82} & \frac{1}{s^2 + 27s + 170} \\ \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8} & \frac{1}{s^2 + 8s + 15} & \frac{1}{s^2 + 12s + 11} & \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} & \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 43s + 65} \\ \frac{1}{s + 14} & \frac{1}{s^2 + 16s + 15} & \frac{1}{s^2 + 2s + 10} & \frac{1}{s + 7} & \frac{1}{s^2 + 9s + 8} \\ \frac{1}{s^2 + 4s + 29} & \frac{1}{s^2 + 2s + 17} & \frac{1}{s^2 + 10s + 74} & \frac{1}{s + 3} & \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix}$$

ve belirsizlik matrisi

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix}, \delta_i \in R, i = 1, 2, 3, 4$$

için GYTD bulunmak istensin.  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\Omega = \{(\delta_1, \dots, \delta_4, \lambda_1, \lambda_2) : -10^5 \leq \delta_i \leq 10^5, i = 1, \dots, 4, 0 \leq \lambda_{1,2} \leq 10^5\}$  ve  $w_u = [0.01, 1]$  aralığı için GYTD in frekansa bağlı değişimi Şekil 4.9 deki gibidir. MATLAB tarafından *mu* komutu kullanılarak elde edilen  $\mu$  değerleri koyu çizgiler ile gösterilmektedir. Genişletilmiş subgradient algoritması ve GAMS (OQNLP çözümlenici) kullanılarak elde edilen alt sınır değerleri ince çizgi ile gösterilmektedir. Kesikli çizgi ise sadece GAMS kullanıldığında bulunan sonucu vermektedir.



Şekil 4.9 Örnek 4.3 için  $\mu$  nün frekansa bağlı değişimi

#### Örnek 4.4

MATLAB ta rasgele oluşturulmuş  $10 \times 10$  boyutlu karmaşık test matrisleri ve belirsizlik matrisi  $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10})$ ,  $\delta_i \in R, i = 1, \dots, 10$ . için  $\mu$  değeri bulunmak istensin. Örnek bir test matrisi

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0.3351 + 0.5152i & 0.8686 + 0.0136i & 0.2622 + 0.6523i & 0.0129 + 0.0155i & 0.5676 + 0.7799i \\ 0.4374 + 0.6059i & 0.6264 + 0.5616i & 0.1165 + 0.7727i & 0.8892 + 0.8909i & 0.9805 + 0.484i \\ 0.4712 + 0.9667i & 0.2412 + 0.4546i & 0.0693 + 0.1062i & 0.8660 + 0.7617i & 0.7918 + 0.8022i \\ 0.1493 + 0.8221i & 0.9781 + 0.9049i & 0.8529 + 0.0011i & 0.2542 + 0.9070i & 0.1526 + 0.4710i \\ 0.1359 + 0.3178i & 0.6405 + 0.2822i & 0.1803 + 0.5418i & 0.5695 + 0.7586i & 0.8330 + 0.2028i \\ 0.5325 + 0.5877i & 0.2298 + 0.0650i & 0.0324 + 0.0069i & 0.1593 + 0.3807i & 0.1919 + 0.5796i \\ 0.7258 + 0.1302i & 0.6813 + 0.4766i & 0.7339 + 0.4513i & 0.5944 + 0.3311i & 0.6390 + 0.6665i \\ 0.3987 + 0.2544i & 0.6658 + 0.9837i & 0.5365 + 0.1957i & 0.3311 + 0.5041i & 0.6690 + 0.6768i \\ 0.3584 + 0.8030i & 0.1347 + 0.9223i & 0.2760 + 0.7871i & 0.6586 + 0.5646i & 0.7721 + 0.9425i \\ 0.2853 + 0.6678i & 0.0225 + 0.5612i & 0.3685 + 0.6186i & 0.8636 + 0.7672i & 0.3798 + 0.7701i \\ 0.4416 + 0.7374i & 0.4075 + 0.2188i & 0.7340 + 0.5421i & 0.6978 + 0.1189i & 0.3331 + 0.1930i \\ 0.4831 + 0.8663i & 0.4078 + 0.1055i & 0.4109 + 0.6535i & 0.4619 + 0.1690i & 0.8807 + 0.9096i \\ 0.6081 + 0.9909i & 0.0527 + 0.1414i & 0.3998 + 0.3134i & 0.0826 + 0.2789i & 0.4797 + 0.9222i \\ 0.1760 + 0.5039i & 0.9418 + 0.4570i & 0.5055 + 0.2312i & 0.8207 + 0.5568i & 0.5608 + 0.0133i \\ 0.0020 + 0.6291i & 0.1500 + 0.7881i & 0.1693 + 0.4161i & 0.1930 + 0.4856i & 0.6159 + 0.7675i \\ 0.7902 + 0.7926i & 0.3844 + 0.2811i & 0.5247 + 0.2988i & 0.4454 + 0.9522i & 0.6619 + 0.9473i \\ 0.5136 + 0.4486i & 0.3111 + 0.2248i & 0.6412 + 0.6724i & 0.0130 + 0.2319i & 0.6166 + 0.8133i \\ 0.2132 + 0.5244i & 0.1685 + 0.9089i & 0.0162 + 0.9383i & 0.3087 + 0.4787i & 0.6851 + 0.9238i \\ 0.1034 + 0.1715i & 0.8966 + 0.0073i & 0.8369 + 0.3431i & 0.8754 + 0.5265i & 0.5102 + 0.1990i \\ 0.1573 + 0.1307i & 0.3227 + 0.5887i & 0.8035 + 0.5630i & 0.8353 + 0.7927i & 0.7140 + 0.6743i \end{bmatrix}$$

için, genişletilmiş subgradient algoritmasının GAMS ta kodlanarak bulunduğu alt sınır değeri  $\mu_L = 2.5075$  dır. MATLAB *mu* komutu kullanılarak elde edilen alt sınır değer 0, üst değer ise 3.6741 dır. Sadece GAMS kullanılarak  $\mu_L = 2.4883$  değeri elde edilmektedir. Bu sonuçtan da anlaşılacağı üzere, genişletilmiş subgradient algoritmasının GAMS altında bulunduğu alt sınır değeri sadece GAMS çözümleyici kullanılarak bulunan çözümden daha iyidir.

Rasgele oluşturulmuş diğer beş adet karmaşık test matrisi (Bkz. Ek Açıklamalar-B) için bulunan yapısal tekil değer sonuçları Çizelge 4.1 de verilmektedir. Bu çizelgede, sütunlar test matrislerine, ilk satır Matlab *mu* komutu tarafından bulunan alt sınır değeri, ikinci satır Matlab *mu* komutu tarafından bulunan üst sınır değeri, üçüncü satır genişletilmiş subgradient algoritmasının(GSA) GAMS ta kodlanarak bulunduğu  $\mu$  alt sınır değeri, son satır ise sadece GAMS kullanılarak bulunan  $\mu$  alt sınır değerlerini göstermektedir.

Çizelge 4.1 Değişik  $10 \times 10$  boyutlu rasgele matrisler için  $\mu$  sonuçları

	$M_{11(T1)}$	$M_{11(T2)}$	$M_{11(T3)}$	$M_{11(T4)}$	$M_{11(T5)}$
Matlab alt sınır	0	0	0	0	0
Matlab üst sınır	6.1305	3.1073	3.2598	3.8338	3.5726
GSA-GAMS alt sınır	4.5251	2.5341	2.4151	2.8277	3.1170
GAMS alt sınır	3.8512	2.5201	2.4151	2.5806	2.5882

Bu çizelge incelendiğinde, Matlab *mu* komutu tarafından bulunan  $\mu$  alt ve üst sınır değerleri arasında büyük bir aralık olduğu gözükür.  $10 \times 10$  boyutlu test matrislerinde ise alt sınır değeri sıfır olarak gözlenmiştir. Genişletilmiş subgradient algoritmasının GAMS ta kodlanarak bulunduğu  $\mu$  alt sınır değeri ile sadece GAMS kullanılarak bulunan  $\mu$  alt sınır değerleri karşılaştırıldığında, genişletilmiş subgradient algoritmasının daha iyi sonuçlar verdiği gözükür. İfade (4.2) dikkate alınarak Çizelge 4.1 üçüncü ve dördüncü satırlardaki sonuçlar incelendiğinde, genişletilmiş subgradient algoritmasının, sadece GAMS kullanımına göre  $\det(I - M_{11}\Delta)$  ifadesini sıfır yapan daha küçük belirsizlik değerlerini bulduğu gözlenmektedir.

#### 4.5 GYTD Alt Sınırının Hesaplanması için Yeni Bir Yöntem: Sonuçlar

Gerçek yapısal tekil değer hesaplanması NP zor bir problem olup, bilinen yazılımlar alt ve üst sınır değerleri önermektedirler. Yeni yöntemler kullanarak, gerçek yapısal belirsizlikler için bu alt ve üst sınır değerleri arasındaki uzaklığı azaltmak, hatta gerçek değerın yaklaşık olarak hesaplanmasına yönelik sonuçlar elde etmek mümkün olabilir. Bu tezde alt sınır değerinin hesaplanması için ilk olarak, yeni bir esnek doğrusal olmayan programlama modeli önerilmiş, daha sonra ise genişletilmiş subgradient algoritması başarı ile bu modeli çözmekte kullanılmıştır. Yeni yöntem,  $10 \times 10$  boyutlu  $M_{11}$  transfer fonksiyonlarına uygulanmıştır.  $\det(I - M\Delta) = f_R(\delta_1, \dots, \delta_n) + f_I(\delta_1, \dots, \delta_n)$  ifadesinin sembolik açılımının mevcut olduğu daha yüksek boyutlu problemlere de bu yöntem rahatlıkla uygulanabilir.

Yapılan yayında (Yazıcı et al., 2005a) yeni  $\mu$  hesaplama yaklaşımı farklı örneklere uygulanmıştır. Tezdeki örnekler ele alındığında, yeni yaklaşımın Matlab  $\mu$  alt sınır değerine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Bunun yanında, yeni kurulan doğrusal olmayan programlama modeli farklı eniyileme çözümleyicileri ile çözülmüş, genişletilmiş subgradient algoritmasının sadece GAMS çözümleyicilerine göre daha başarılı sonuç verdiği gözlenmiştir.

## 5. GENEL SONUÇLAR

Bu çalışmada kontrol alanındaki bazı denetleyici tasarım ve gürbüzlük analiz problemleri doğrusal olmayan programlama ile modellenmiş ve genişletilmiş subgradient algoritması ile başarılı şekilde çözümlenmiştir. İlk olarak, doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli kontrol denetleyicileri gerçekleştirilmiştir. Sonrasında ise, bir gürbüzlük ölçütü olan, gerçek yapısal tekil değer alt sınırının hesaplanması için esnek doğrusal olmayan programlama modeli önerilmiş ve genişletilmiş subgradient algoritması ile çözülmüştür.

Kayma kipli kontrolde, başlangıçta ikinci derece sistemlerin analizi konusunda yapılan çalışmalar artan şekilde devam etmektedir. Kayma kipli kontrol denetleyicileri farklı yöntemlerle gerçekleştirilerek (Choi, 1997; Kaynak et al., 2001; Li et al., 1997; Yu et al., 1998; Palm, 1994; Yoo and Ham, 1998, Adamy and Flemming, 2004) bu alandaki literatür daha da zenginleşmiştir. Yapılan bu çalışmanın da, literatürdeki zenginleşmeye önemli bir katkı sağlaması beklenmektedir.

Doğrusal olmayan programlama tabanlı kayma kipli denetleyicilerde, klasik kayma kipli denetleyicilerde mevcut olmayan, bazı kısıtlar denetleyici yapısına eklenebilmektedir. Oluşturulan bu yeni ve genişlemeye müsait denetleyici yapısı ile yeni performans kriterleri veya sistemle ilgili kısıtlar rahatça denetleyici yapısına eklenebilir.

Problem tersten ele alındığında, şöyle ki, verilen sınırlı bir girdi, performans kısıtları ve amaçlardan oluşan doğrusal olmayan programlama modelinin çözümü olup olmadığına bakılarak, sistemin beklenen performansı karşılayıp karşılayamayacağı konusunda, sistemi çalıştırmadan ön kestirimde bulunmak mümkün olabilir. Bu da denetleyici analizleri için farklı bir bakış açısı kazandıracaktır.

Gerçek yapısal tekil değer hesaplamasında mevcut yazılım araçlarının önerdiği alt ve üst sınır arasında (önerilen sınır hesaplama yaklaşımından dolayı), birçok problem için büyük aralıklar oluşmakta idi. Burada, gerçek yapısal tekil değer alt sınır değerinin hesaplanması için esnek bir doğrusal olmayan programlama modeli önerilmiş ve genişletilmiş subgradient algoritması ile çözümlenmiştir. Bu şekilde alt sınır değerinin hesaplanması sağlanırken, mevcut yazılım araçlarında olmayan, fakat fiziksel



sistemlerde olan belirsizliklere de alt sınır getirme imkanı olmuştur (Bknz. Örnek 4.2). Bu sayede gerçek belirsizlikler için, daha yaklaşık bir belirsizlik analizi mümkün olmaktadır.

Genişletilmiş subgradient algoritmasının, klasik yöntemlere göre geniş sınıf dışbükey olmayan ve türevlenemeyen problemi, ikil aralık oluşturmaksızın çözdüğü dikkate alındığında (kullanılan kısıtsız DOP çözümleyicisinin global eniyiyi bulduğu varsayıldığında, her algoritma yakınsamayı garanti etmektedir), kontrol alanında kısıtlı doğrusal olmayan programlama modeline indirgenebilecek bir çok problem bu yöntemle yeniden ele alınabilir.

## 6. EK AÇIKLAMALAR

### Ek Açıklamalar-A

MATLAB ve GAMS programlarının koordineli olarak çalışması için uygun kurulumların (Ferris, 2004) yapılması gerekmektedir. Burada DOP tabanlı KKK denetleyicilerinin Acrobat sistemine uygulamasında kullanılan alt programlar kullanılarak, genel amaçlı bir tanıtım planlanmaktadır.

Ferris (2004) tarafından önerilen kurulumların yapılmasından sonra, DOP tabanlı KKK denetleyicilerinin Acrobat sistemine uygulaması için aşağıdaki programların MATLAB\work klasörü altına kopyalanması gerekmektedir.

MATLAB programları: *Ana\_Program.m*, *acrbt\_UF\_GamsIntf.m*  
*acrbt\_KF\_GamsIntf.m*, *acrobotssystemEqn.m*

GAMS programları : *acrbt\_UF.gms*, *acrbt\_KF.gms*

MATLAB dosyası olan *Ana\_Program.m* çalıştırılması suretiyle tüm kodlar koordineli şekilde çalışmaktadır. Burada MATLAB programları olan *acrbt\_UF\_GamsIntf.m* ve *acrbt\_KF\_GamsIntf.m* dosyaları, sırasıyla GAMS dosyası olan *acrbt\_UF.gms* ve *acrbt\_KF.gms* dosyaları ile MATLAB dosyası olan *Ana\_Program.m* arasında iletişimi sağlamaktadırlar. GAMS dosyaları olan *acrbt\_UF.gms* ve *acrbt\_KF.gms* programları ise sırasıyla ifade (3.7) ve ifade (3.13) deki DOP modellerinin çözümünde kullanılmaktadır. Ulaşım veya kayma fazında DOP modellerinin çözümlenmesi ile bulunan sistem girdisi  $u$ , ve mevcut sistem durumları dikkate alınarak sistem benzetimi *acrobotssystemEqn.m* alt programı kullanılarak yapılmaktadır.

Kullanılan programların içerikleri:

#### **Ana\_Program.m**

```
clear,clc
```

```
global uinput xval G
```

```
sim_dur=input('Simulasyon süresini giriniz(default=5sn ) :');
```

```
if isempty(sim_dur) sim_dur=5; end
```

```

%Örnekleme zamanını tanımla
samp_time=input('Örnekleme zamanini giriniz(default=0.01sn ) :');
if isempty(samp_time) samp_time=0.01; end
sim_step=round(sim_dur/samp_time);
%Define Sub space sy=G(x-xe) %found depend on lineriazed system
G=[10.00 4.00 3.50 1.50];
%layer size
epslnlayer=0.02;%0.05
%kbound
kbound=45;%14
%ubound
ubound=7;%15
Nu=.5; Gama=2;
%İlk durum değerleri
teta1=pi*0.5+(pi/180)*0; teta1_vel=0; teta2=(pi/180)*5; teta2_vel=0;
%Sistem ilk değerleri
x=[teta1;teta1_vel;teta2;teta2_vel];
xe=[pi*0.5;0;0;0]; %Equilibrium point
kt=[0;0;0;0];
wt=null(G); %a vector span Gx=0
w1=wt(:,1);w2=wt(:,2);w3=wt(:,3);
for i=1:sim_step+1
xval=x; xtmp=x; k0=kt;
%=====
%System equations defined here Xdot=Fx+Bx*u
%=====
I1=1;I2=1; lc1=0.5;lc2=0.5; m1=1;m2=1; I1=1;I2=1; g=9.81;
d11=m1*lc1^2+m2*(I1^2+lc2^2+2*I1*lc2*cos(x(3)))+I1+I2;
d22=m2*lc2^2+I2; d12=m2*(lc2^2+I1*lc2*cos(x(3)))+I2;
d21=m2*(lc2^2+I1*lc2*cos(x(3)))+I2;
c1=-m2*I1*lc2*x(4)^2*sin(x(3))-2*m2*I1*lc2*x(2)*x(4)*sin(x(3));
c2=m2*I1*lc2*x(2)^2*sin(x(3));

```

```

fi1=(m1*lc1+m2*11)*g*cos(x(1))+m2*lc2*g*cos(x(1)+x(3));
fi2=m2*lc2*g*cos(x(1)+x(3));
Fx=[x(2);
    (-d12*(-c2-fi2)-d22*(c1+fi1))/(d11*d22-d12^2);
    x(4);
    (d11*(-c2-fi2)+d12*(c1+fi1))/(d11*d22-d12^2)];
Bx=[0;-d12/(d11*d22-d12^2); 0; d11/(d11*d22-d12^2)];

x=x-xe;
if (abs(G*(x))>epslnlayer)
    flp=[G*(x)*G*Bx*x(1) G*(x)*G*Bx*x(2) G*(x)*G*Bx*x(3) G*(x)*G*Bx*x(4)];
    Alp=[ x(1)    x(2)    x(3)    x(4) ; %for |u|<10
         -x(1)   -x(2)   -x(3)   -x(4) ; %for |u|<10
         -G*(x)*G*Bx*x(1) -G*(x)*G*Bx*x(2) -G*(x)*G*Bx*x(3) -G*(x)*G*Bx*x(4)];
    Blp=[ubound;ubound;G*(x)*G*Fx+Gama*abs(G*(x))^2];
    %*****GAMS solution*****
    [kt,EXITFLAG]=acrbt_UF_GamsIntf(flp,Alp,Blp,LB,UB)
else
    Alp=[ x(1)    x(2)    x(3)    x(4) ; %for |u|<10
         -x(1)   -x(2)   -x(3)   -x(4) ; %for |u|<10
         G*(x)*G*Bx*x(1) G*(x)*G*Bx*x(2) G*(x)*G*Bx*x(3) G*(x)*G*Bx*x(4)];%for
    Blp=[ubound;ubound;-G*(x)*G*Fx-Nu*abs(G*(x))^2];
    w=(x'*w1)*w1+(x'*w2)*w2+(x'*w3)*w3; %projection point on G
    [kt,EXITFLAG]=acrbt_KF_GamsIntf(w,Alp,Blp,LB,UB,x,Fx,Bx)
end
k_fdbck=[kt(1) kt(2) kt(3) kt(4)];
uinput=k_fdbck*x;
% values ar taken for the graphic.
sx(i)=G*(x);x1(i)=x(1)+xe(1);x2(i)=x(2);x3(i)=x(3);x4(i)=x(4);
k1(i)=kt(1);k2(i)=kt(2);k3(i)=kt(3);k4(i)=kt(4);u(i)=uinput;
time(i)=samp_time*(i-1);
vdot1(i)=G*(x)*G*(Fx+Bx*k_fdbck*x);

```

% Sistem benzetimi bu adımda yapılır.

```

    ts=[0 samp_time];
    [t,xout]=ode23('acrobotsystemEqn_sub',ts,xtmp);
    [msz,nsz]=size(xout);
    x=[xout(msz,1);xout(msz,2);xout(msz,3);xout(msz,4)];
end
%Plot figure
figure(1)
subplot(2,1,1),hold on,plot(time,sx,'k'),ylabel('s'),grid
subplot(2,1,2),hold on,plot(time,u,'k'),ylabel('u'),xlabel('zaman(sn)'), grid
%Plot figure
figure(2)
subplot(4,1,1),plot(time,x1,'k'),ylabel('x1(rad)'),grid
subplot(4,1,2),plot(time,x2,'k'),ylabel('x2(rad/s)'),grid
subplot(4,1,3),plot(time,x3,'k'),ylabel('x3(rad)'),grid
subplot(4,1,4),plot(time,x4,'k'),ylabel('x4(rad/s)'),grid,xlabel('zaman(sn)')

```

### **acrobotsystemEqn.m**

```

function xd=acrobotsystemEqn_sub(t,x);
global uinput
I1=1;I2=1; lc1=0.5;lc2=0.5; m1=1;m2=1; I1=1;I2=1; g=9.81;
I1=0.0043;I2=0.0053; g=9.81;
d11=m1*lc1^2+m2*(I1^2+lc2^2+2*I1*lc2*cos(x(3)))+I1+I2;
d22=m2*lc2^2+I2;
d12=m2*(lc2^2+I1*lc2*cos(x(3)))+I2;
d21=m2*(lc2^2+I1*lc2*cos(x(3)))+I2;
c1=-m2*I1*lc2*x(4)^2*sin(x(3))-2*m2*I1*lc2*x(2)*x(4)*sin(x(3));
c2=m2*I1*lc2*x(2)^2*sin(x(3));
fi1=(m1*lc1+m2*I1)*g*cos(x(1))+m2*lc2*g*cos(x(1)+x(3));
fi2=m2*lc2*g*cos(x(1)+x(3));
xd(1,1)=x(2);
xd(2,1)=(-d12*(uinput-c2-fi2)-d22*(c1+fi1))/(d11*d22-d12^2);
xd(3,1)=x(4);

```

```
xd(4,1)=(d11*(uinput-c2-fi2)+d12*(c1+fi1))/(d11*d22-d12^2);
```

### **acrbt\_UF\_GamsIntf.m**

```
function [X,exitflag]=acrbt_UF_GamsIntf(f,A,B,vlb,vub,k0,neqcstr)
% Handle missing arguments
    if nargin < 7, neqcstr = 0;
        if nargin < 6, k0 = [];
            if nargin < 5, vub = [];
                if nargin < 4, vlb = [];
            end, end, end, end
[ncstr,nvars]=size(A);nvars = max([length(f),nvars]); % In case A is empty
if isempty(neqcstr), neqcstr = 0; end
if isempty(k0), k0=zeros(nvars,1); end
if isempty(vlb), vlb=-inf*ones(nvars,1); end
if isempty(vub), vub=inf*ones(nvars,1); end
if isempty(A), A=zeros(0,nvars); end
if isempty(B), B=zeros(0,1); end
f=f(:);B=B(:);k0 = k0(:);vlb = vlb(:);vub = vub(:);
% fool interface to make A a matrix, b a vector
if ncstr == 1
    A(ncstr+1,1) = 0;
    B(ncstr+1) = 0;
end
neqcstr = int2str(neqcstr);ncstr = int2str(ncstr);nvars = int2str(nvars);
gams_output = 'std';
[X,cnt]= gams('acrbt_UF',f,A,B,vlb,vub,k0,neqcstr,ncstr,nvars);
exitflag=cnt;
```

### **acrbt\_KF\_GamsIntf.m**

```
function [X,exitflag]=acrbt_KF_GamsIntf(w,A,B,vlb,vub,Xe,Fx,Bx)
% Handle missing arguments
    if nargin < 6, X0 = [];
        if nargin < 5, vub = [];
```

```

        if nargin < 4, vlb = [];
end, end, end
[ncstr,nvars]=size(A);nvars = max([length(w),nvars]); % In case A is empty
if isempty(vlb), vlb=-inf*ones(nvars,1); end
if isempty(vub), vub=inf*ones(nvars,1); end
if isempty(A), A=zeros(0,nvars); end
if isempty(B), B=zeros(0,1); end
w=w(:);B=B(:);Xe = Xe(:);vlb = vlb(:);vub = vub(:);
% fool interface to make A a matrix, b a vector
if ncstr == 1
    A(ncstr+1,1) = 0;
    B(ncstr+1) = 0;
end
ncstr = int2str(ncstr);nvars = int2str(nvars);
gams_output = 'std';
[X,cnt]=gams('acrbt_KF',w,A,B,vlb,vub,Xe,ncstr,nvars,Fx,Bx);
exitflag=cnt;
acrbt_UF.gms
$onempty
$include matglobs.gms
set i /1*%ncstr%/
    j /1*%nvars%/;
parameter H(j,j) //, f(j) //, A(i,j) //, b(i) //, vlb(j) //, vub(j) //, k0(j) //    hconst(i),
v(i);
scalars c, stpCrtr, stpSizZj, stpSizEj, Hbar, nrmH, cnt, stpSize;
hconst(i)=15;
$include matdata.gms
variables k(j),obj;
**Define slack variables
positive variable s(i);
equations cost;
cost..

```

```

obj =e=sum(j,f(j)*k(j))
+c*sqrt(sum(i,sqr(sum(j,A(i,j)*k(j))+s(i)-b(i))))
- sum(i,v(i)*(sum(j,A(i,j)*k(j))+s(i)-b(i)));
k.lo(j) = vlb(j); k.up(j) = vub(j); k.l(j) = k0(j);
model RGLagrangian /all/;
option dnlp=minos;
*****
**MSA Algortihm starts Loop starts
*****
**Initiliazition Step**
** Assign c, v where c>=0
c=.1; loop(i,v(i)=0);Hbar=1;
** Assign loop parameters
stpCrtr=0.000001; stpSize=10; cnt=1;
solve RGLagrangian using nlp minimizing obj;
nrmH=sqrt(sum(i,sqr(sum(j,A(i,j)*k.l(j))+s.l(i)-b(i)))));
**While((cnt le stpSize),
While((nrmH gt stpCrtr),
**Step2 Update step sizes
stpSizZj=1.95*(Hbar-obj.l)/(5*sqr(nrmH));
stpSizEj=stpSizZj/2;
**Find h(x)=0
loop(i,hconst(i)=sum(j,A(i,j)*k.l(j))+s.l(i)-b(i));
loop(i,v(i)=v(i)-stpSizZj*hconst(i));
c=c+(stpSizZj+stpSizEj)*nrmH;
solve RGLagrangian using dnlp minimizing obj;
nrmH=sqrt(sum(i,sqr(sum(j,A(i,j)*k.l(j))+s.l(i)-b(i)))));
if(( cnt gt stpSize), nrmH=stpCrtr-.1; else cnt=cnt+1; );
);
$libinclude matout k.l j
$libinclude matout cnt 1

```



**acrbt\_UF.gms**

```

$onempty
$include matglobs.gms
set i /1*%ncstr%/
    j /1*%nvars%/;
parameter Fx(j) //, Bx(j) //, Xe(j) //, w(j) //, A(i,j) //, B(i) //, vlb(j) //, vub(j) //, k0(j) //
    hconst(i), v(i);
scalars c, stpCrtr, stpSizZj, stpSizEj, Hbar, nrmH, cnt, stpSize;
**Initiliaze constraint vector
hconst(i)=15;
**initial condition
k0(j)=0;
$include matdata.gms
alias(j,j1,j2,j3,j4,j5);
variables k(j),obj,u;
**Define slack variables
positive variable s(i);
equations cost;
cost..
    obj
=e=sqrt(sum(j,sqr(w(j)+w(j)*(sum(j2,w(j2)*(Fx(j2)+Bx(j2)*sum(j1,k(j1)*Xe(j1)))))/(sqrt(s
um(j3,sqr(w(j3))))*sqrt(sum(j4,sqr(Fx(j4)+Bx(j4)*sum(j5,k(j5)*Xe(j5)) ))))))))
    +c*sqr(sum(i,sqr(sum(j,A(i,j)*k(j)+s(i))-b(i))))
    - sum(i,v(i)*(sum(j,A(i,j)*k(j)+s(i))-b(i)));
    k.lo(j) = vlb(j);
    k.up(j) = vub(j);
    k.l(j) = k0(j);

model RGLagrangian /cost/;
option dnlp=minos;

```

```

*****
**MSA Algorithm starts Loop starts
*****
**Initiazition Step**
**   Assign c, v where c>=0
      c=.1; loop(i,v(i)=0);Hbar=5;
**   Assign loop parameters
      stpCrtr=0.00001; stpSize=10; cnt=1;
solve RGLagrangian using dnlp minimizing obj;
nrmH=sqrt(sum(i,sqr(sum(j,A(i,j)*k.l(j)+s.l(i))-b(i))));
While((nrmH gt stpCrtr),
stpSizZj=1.95*(Hbar-obj.l)/(5*sqr(nrmH));
stpSizEj=stpSizZj/2;
**Find h(x)=0
loop(i,hconst(i)=sum(j,A(i,j)*k.l(j)+s.l(i))-b(i));
**Update v(i)
      loop(i,v(i)=v(i)-stpSizZj*hconst(i));
**Update c
      c=c+(stpSizZj+stpSizEj)*nrmH;
solve RGLagrangian using dnlp minimizing obj;
nrmH=sqrt(sum(i,sqr(sum(j,A(i,j)*k.l(j)+s.l(i))-b(i))));
      if(( cnt gt stpSize),
          nrmH=stpCrtr-.1;
      else
          cnt=cnt+1;
      );
);
$libinclude matout k.l j
$libinclude matout cnt 1

```

### Ek Açıklamalar-B

MATLAB ta rasgele oluşturulmuş  $10 \times 10$  boyutlu karmaşık test matrisleri aşağıdaki gibidir (Bkz. Çizelge 4.1).

**T1:**

$$M_{11(T1)} = \begin{bmatrix} 1.1267 + 1.1316i & 0.8874 + 0.3845i & 1.1421 + 1.0530i & 1.4123 + 1.4380i & 0.2957 + 1.0015i \\ 0.8893 + 0.2972i & 1.7721 + 1.2345i & 0.2791 + 0.7228i & 0.8006 + 0.6966i & 0.9246 + 1.2757i \\ 1.2601 + 0.8609i & 0.5709 + 0.9258i & 1.4751 + 1.7748i & 1.0080 + 0.6853i & 1.7805 + 0.9397i \\ 1.0173 + 1.0874i & 0.9826 + 1.1634i & 1.1506 + 0.9249i & 0.9869 + 1.3984i & 0.3012 + 1.1814i \\ 0.5514 + 1.3566i & 1.0462 + 0.2454i & 0.4553 + 0.9893i & 1.1250 + 0.9699i & 0.7238 + 1.0240i \\ 0.8387 + 1.0426i & 1.1620 + 1.0036i & 1.1082 + 1.1634i & 1.6337 + 1.1992i & 0.6098 + 0.8306i \\ 1.2042 + 0.7596i & 0.5169 + 0.5942i & 1.0416 + 1.3724i & 1.2894 + 1.2659i & 1.4645 + 1.3093i \\ 0.2433 + 0.9778i & 1.2789 + 0.2436i & 1.4895 + 1.0335i & 1.1133 + 1.1944i & 0.6984 + 1.6492i \\ 1.5803 + 1.7337i & 1.5708 + 0.8159i & 0.5026 + 1.0911i & 1.6253 + 0.6906i & 1.5102 + 0.7754i \\ 0.5116 + 0.4510i & 1.6044 + 0.8874i & 1.0108 + 0.1596i & 1.4606 + 0.1926i & 1.1659 + 1.8518i \\ 0.9902 + 1.5494i & 1.7431 + 0.5645i & 0.4064 + 0.3191i & 1.4164 + 0.3894i & 0.7472 + 1.0658i \\ 0.5378 + 1.2877i & 1.5159 + 1.3093i & 1.0110 + 1.2799i & 1.0065 + 0.3228i & 1.8564 + 1.4931i \\ 0.8412 + 1.8210i & 1.3584 + 1.3171i & 1.1147 + 1.0303i & 0.5016 + 1.7770i & 0.3775 + 0.4876i \\ 1.4445 + 0.4084i & 0.8430 + 1.0082i & 0.9780 + 0.9906i & 1.7142 + 0.4017i & 1.4734 + 1.6181i \\ 1.4228 + 1.1088i & 1.7485 + 1.3610i & 1.1594 + 0.4035i & 0.8955 + 1.3137i & 0.6363 + 1.0041i \\ 0.8833 + 1.0321i & 1.7511 + 0.8765i & 0.9977 + 0.2918i & 1.4276 + 0.3101i & 1.1730 + 0.5338i \\ 1.4998 + 0.9659i & 0.6268 + 1.3702i & 0.4769 + 1.7340i & 0.9182 + 1.1816i & 1.6485 + 0.5728i \\ 1.3317 + 0.9642i & 1.7368 + 0.4723i & 0.5425 + 1.7247i & 1.0343 + 0.7042i & 1.4280 + 1.0329i \\ 0.6433 + 1.3183i & 0.8785 + 0.7695i & 0.1120 + 0.6106i & 0.8818 + 1.0201i & 0.9969 + 1.8568i \\ 0.7427 + 1.5821i & 0.5980 + 1.7002i & 0.9337 + 0.9821i & 1.3524 + 1.3951i & 0.9122 + 0.6231i \end{bmatrix}$$

**T2:**

$$M_{11(T2)} = \begin{bmatrix} 0.3225 + 0.1667i & 0.0525 + 0.4943i & -0.4813 - 0.5830i & -0.1629 - 0.5299i & -0.6170 - 0.3160i \\ -0.2563 + 0.1568i & 0.7254 + 0.1984i & 0.1061 + 0.7424i & 0.9438 + 0.1886i & -0.0856 + 0.3323i \\ 0.1020 + 0.5616i & -0.5042 - 0.0344i & -0.2071 - 0.1418i & -0.6617 + 0.1956i & 0.0629 + 0.2970i \\ -0.5703 - 0.0210i & -0.5992 + 0.7601i & 0.4425 - 0.9271i & -0.4457 + 0.0605i & 0.3815 - 0.1122i \\ 0.8116 + 0.0051i & 0.7170 + 0.2711i & 0.1192 + 0.4905i & 0.4299 - 0.4843i & 0.5647 + 0.1074i \\ 0.1856 - 0.5668i & -0.3258 - 0.1615i & -0.4872 + 0.3655i & 0.0329 + 0.1024i & 0.2342 - 0.3607i \\ 0.6074 + 0.0383i & -0.3958 + 0.2606i & 0.2041 + 0.1036i & 0.3455 - 0.1447i & 0.6144 + 0.6280i \\ 0.4032 + 0.1230i & 0.2489 - 0.1308i & 0.1409 - 0.5625i & -0.5771 + 0.5372i & 0.5058 - 0.4264i \\ 0.7210 - 0.0486i & 0.5118 - 0.7323i & -0.3934 - 0.9626i & -0.3326 - 0.2666i & -0.5070 - 0.8963i \\ 0.4587 - 0.3439i & 0.3138 + 0.3633i & -0.5637 - 0.1851i & 0.1932 + 0.0171i & 0.4960 - 0.2320i \\ -0.6217 - 0.5865i & 0.3877 - 0.1499i & -0.0824 + 0.9759i & 0.5440 - 0.0776i & -0.3945 - 0.5218i \\ 0.7875 + 0.3045i & 0.2362 + 0.0674i & -0.1982 + 0.3644i & 0.2950 + 0.0678i & -0.6230 + 0.2328i \\ 0.7058 + 0.2822i & -0.7423 - 0.0801i & 0.2317 - 0.1972i & 0.0927 + 0.2937i & 0.1146 - 0.3345i \\ 0.2225 + 0.0513i & -0.4535 - 0.3903i & -0.8821 + 0.5426i & 0.2116 + 0.5151i & 0.0308 + 0.2287i \\ -0.1535 - 0.6770i & 0.3830 - 0.5236i & -0.5052 - 0.5786i & -0.4211 + 0.9291i & 0.1118 + 0.2011i \\ -0.2209 + 0.3917i & -0.5865 - 0.3001i & 0.0339 - 0.3143i & -0.8943 - 0.0199i & 0.0957 + 0.3927i \\ -0.1271 - 0.4816i & -0.3505 - 0.3794i & -0.1953 + 0.6959i & 0.4497 - 0.0304i & 0.2324 + 0.0390i \\ -0.2807 + 0.1439i & -0.8677 - 0.4183i & -0.9325 + 0.5157i & -0.6529 - 0.1842i & 0.7578 + 0.7913i \\ -0.0691 - 0.0695i & -0.0344 - 0.7077i & -0.0619 + 0.7655i & 0.5146 + 0.4289i & -0.2041 + 0.5067i \\ 0.3805 - 0.1067i & 0.0131 - 0.7864i & -0.7315 - 0.7829i & 0.7196 + 0.2850i & -0.1001 + 0.0816i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T3: } M_{11(T_3)} = \begin{bmatrix}
 -0.8596 - 0.0487i & 0.2364 - 0.4666i & 0.3033 + 0.0964i & -0.1705 - 0.7558i & -0.0494 - 0.0367i \\
 -0.1984 + 0.2122i & 0.3438 + 0.4397i & -0.1634 - 0.1756i & -0.0527 - 0.3645i & 0.1670 - 0.6600i \\
 0.0142 - 0.5130i & -0.4128 - 0.0013i & 0.1326 + 0.0053i & 0.4504 + 0.3723i & 0.6793 - 0.1751i \\
 -0.8452 + 0.8226i & 0.2716 - 0.5607i & 0.1079 + 0.1115i & -0.0694 + 0.0944i & 0.4897 + 0.3439i \\
 -0.3946 - 0.1821i & 0.1380 - 0.2019i & -0.3228 - 0.2345i & 0.7577 + 0.2246i & 0.3694 + 0.2029i \\
 -0.0871 - 0.0705i & -0.3128 - 0.4222i & -0.8577 - 0.4700i & -0.4476 + 0.2755i & 0.3914 + 0.2132i \\
 -0.3526 - 0.0106i & 0.3172 + 0.6047i & -0.4611 + 0.0057i & -0.4985 + 0.4710i & -0.7571 - 0.0976i \\
 -0.4474 + 0.0185i & -0.1212 - 0.0199i & 0.0374 - 0.4361i & 0.1882 - 0.6806i & 0.6088 + 0.3758i \\
 -0.2098 - 0.2645i & 0.0499 + 0.0437i & 0.1044 + 0.2590i & 0.0525 - 0.1662i & 0.0085 + 0.2431i \\
 0.2557 + 0.1645i & -0.0696 + 0.3660i & -0.0649 + 0.6055i & 0.3783 + 0.2649i & -0.0591 + 0.7014i \\
 -0.3691 + 0.1633i & -0.3215 + 0.3252i & -0.5368 + 0.3061i & 0.7116 - 0.0362i & -0.2250 + 0.2314i \\
 -0.7130 - 0.5154i & 0.4800 + 0.2375i & 0.2375 - 0.3825i & 0.6831 - 0.1919i & 0.1120 + 0.0451i \\
 0.5875 + 0.1356i & -0.0025 - 0.3687i & -0.3569 + 0.1886i & -0.2278 + 0.1187i & -0.4510 + 0.1412i \\
 0.7360 + 0.5697i & -0.1563 + 0.4452i & -0.6634 + 0.0487i & 0.4193 + 0.1452i & -0.2273 - 0.1890i \\
 0.1730 + 0.8594i & 0.5356 - 0.2183i & -0.4585 + 0.1801i & -0.1071 - 0.4140i & 0.0996 + 0.1148i \\
 0.3366 + 0.1548i & -0.2432 + 0.4174i & -0.4795 - 0.0442i & 0.3256 + 0.7012i & -0.3593 - 0.0748i \\
 0.4834 + 0.0267i & -0.2445 + 0.1101i & -0.4422 + 0.6279i & -0.1093 + 0.3761i & -0.0793 - 0.3090i \\
 0.1258 - 0.5546i & -0.1938 + 0.1748i & -0.0529 - 0.0996i & 0.3016 - 0.2900i & -0.0693 + 0.0361i \\
 0.5071 + 0.3546i & 0.2965 - 0.0521i & -0.1981 - 0.2238i & -0.1316 + 0.4072i & 0.1003 + 0.3225i \\
 0.2516 - 0.4200i & -0.1102 - 0.0992i & 0.3374 - 0.2123i & -0.3449 + 0.4610i & 0.2342 - 0.6588i
 \end{bmatrix}$$

**T4:**

$$M_{11(T_4)} = \begin{bmatrix}
 0.9025 + 0.4455i & 0.9808 + 0.2201i & 0.4838 + 0.8022i & 0.5420 + 0.3324i & 0.0074 + 0.8536i \\
 0.6689 + 0.9794i & 0.9653 + 0.1033i & 0.4859 + 0.6787i & 0.6639 + 0.5884i & 0.9985 + 0.3929i \\
 0.6653 + 0.4470i & 0.5198 + 0.2639i & 0.9301 + 0.7576i & 0.6301 + 0.1614i & 0.9807 + 0.5457i \\
 0.4445 + 0.8087i & 0.7458 + 0.6274i & 0.4400 + 0.8142i & 0.4271 + 0.6386i & 0.4259 + 0.8909i \\
 0.7962 + 0.2958i & 0.3918 + 0.5111i & 0.9746 + 0.5526i & 0.7091 + 0.1375i & 0.0465 + 0.4065i \\
 0.5641 + 0.5242i & 0.0265 + 0.5684i & 0.6722 + 0.0698i & 0.2002 + 0.5393i & 0.4271 + 0.2447i \\
 0.9099 + 0.6129i & 0.2508 + 0.7424i & 0.4054 + 0.0989i & 0.1100 + 0.6491i & 0.1244 + 0.3928i \\
 0.2857 + 0.5466i & 0.7383 + 0.8015i & 0.9604 + 0.1492i & 0.6767 + 0.6187i & 0.9294 + 0.8485i \\
 0.3567 + 0.2520i & 0.0767 + 0.9809i & 0.9425 + 0.8702i & 0.7471 + 0.0322i & 0.6086 + 0.5606i \\
 0.6575 + 0.5993i & 0.8289 + 0.9917i & 0.4162 + 0.3666i & 0.7406 + 0.8810i & 0.9107 + 0.0907i \\
 0.1014 + 0.6556i & 0.9127 + 0.4548i & 0.0147 + 0.8637i & 0.2894 + 0.4882i & 0.6273 + 0.5080i \\
 0.4611 + 0.0664i & 0.9179 + 0.8572i & 0.0092 + 0.9880i & 0.6393 + 0.6474i & 0.4526 + 0.2586i \\
 0.8826 + 0.9400i & 0.2672 + 0.9032i & 0.6365 + 0.4186i & 0.5934 + 0.6748i & 0.1105 + 0.6403i \\
 0.3815 + 0.5599i & 0.5779 + 0.8384i & 0.4777 + 0.9542i & 0.5612 + 0.7509i & 0.2454 + 0.5409i \\
 0.4359 + 0.5885i & 0.8777 + 0.1381i & 0.5926 + 0.3228i & 0.0194 + 0.7601i & 0.5284 + 0.1509i \\
 0.1076 + 0.1399i & 0.2924 + 0.6229i & 0.5583 + 0.7734i & 0.9308 + 0.9595i & 0.0186 + 0.9893i \\
 0.2045 + 0.3633i & 0.3494 + 0.7486i & 0.8341 + 0.3860i & 0.2015 + 0.8318i & 0.5107 + 0.1493i \\
 0.7196 + 0.5338i & 0.2416 + 0.9692i & 0.2488 + 0.1992i & 0.7750 + 0.2772i & 0.9923 + 0.9194i \\
 0.6343 + 0.2402i & 0.9975 + 0.7864i & 0.1172 + 0.9635i & 0.8284 + 0.9759i & 0.1265 + 0.9355i \\
 0.4749 + 0.6970i & 0.1851 + 0.9176i & 0.4718 + 0.7374i & 0.9083 + 0.2472i & 0.6636 + 0.6511i
 \end{bmatrix}$$

**T5:**

$$M_{11(T5)} = \begin{bmatrix} 0.8782 + 0.6984i & 0.4851 + 0.4562i & 0.5270 + 0.1562i & 0.1478 + 0.0178i & 0.2313 + 0.6957i \\ 0.0218 + 0.0021i & 0.4412 + 0.8380i & 0.9202 + 0.9251i & 0.1482 + 0.8200i & 0.8453 + 0.2212i \\ 0.9238 + 0.8366i & 0.6265 + 0.8231i & 0.3791 + 0.2022i & 0.6391 + 0.0574i & 0.7264 + 0.6254i \\ 0.6326 + 0.8894i & 0.0778 + 0.5421i & 0.6389 + 0.0084i & 0.0934 + 0.0901i & 0.6947 + 0.5133i \\ 0.0669 + 0.0198i & 0.5441 + 0.0924i & 0.1737 + 0.6891i & 0.9288 + 0.6967i & 0.3831 + 0.5757i \\ 0.6327 + 0.0984i & 0.2091 + 0.2953i & 0.7858 + 0.4010i & 0.4851 + 0.1471i & 0.4798 + 0.2872i \\ 0.7537 + 0.3742i & 0.2700 + 0.6022i & 0.3656 + 0.3796i & 0.1632 + 0.0576i & 0.9671 + 0.8927i \\ 0.7697 + 0.9675i & 0.2917 + 0.1828i & 0.7769 + 0.9032i & 0.2763 + 0.0634i & 0.7835 + 0.0926i \\ 0.8080 + 0.6196i & 0.8222 + 0.7332i & 0.3421 + 0.9434i & 0.1310 + 0.7228i & 0.4097 + 0.2925i \\ 0.5433 + 0.6700i & 0.4115 + 0.5489i & 0.7742 + 0.4740i & 0.0232 + 0.0337i & 0.9574 + 0.8219i \\ 0.1970 + 0.9940i & 0.3048 + 0.3328i & 0.3879 + 0.5227i & 0.4175 + 0.9711i & 0.8506 + 0.8155i \\ 0.5293 + 0.0678i & 0.8138 + 0.2924i & 0.9672 + 0.1291i & 0.8355 + 0.9577i & 0.7131 + 0.0250i \\ 0.5042 + 0.9731i & 0.6821 + 0.4025i & 0.0667 + 0.0038i & 0.8047 + 0.7207i & 0.0804 + 0.4242i \\ 0.4834 + 0.9228i & 0.8824 + 0.0341i & 0.3167 + 0.3258i & 0.0092 + 0.6480i & 0.8187 + 0.0338i \\ 0.3776 + 0.9587i & 0.0818 + 0.2875i & 0.1267 + 0.3608i & 0.6447 + 0.8626i & 0.3490 + 0.6767i \\ 0.5197 + 0.5632i & 0.4948 + 0.2196i & 0.1158 + 0.9940i & 0.1124 + 0.0309i & 0.1625 + 0.3280i \\ 0.8158 + 0.9505i & 0.4303 + 0.5659i & 0.1644 + 0.9400i & 0.2157 + 0.3659i & 0.5398 + 0.5601i \\ 0.2086 + 0.3182i & 0.3455 + 0.8701i & 0.0939 + 0.4341i & 0.9093 + 0.0938i & 0.9233 + 0.4248i \\ 0.3888 + 0.2659i & 0.9137 + 0.2550i & 0.5321 + 0.9355i & 0.1447 + 0.3346i & 0.4371 + 0.1501i \\ 0.0461 + 0.0611i & 0.1602 + 0.5918i & 0.7624 + 0.4968i & 0.2075 + 0.0073i & 0.5401 + 0.0644i \end{bmatrix}$$

## 7. KAYNAKLAR

- Adamy, J., Flemming, A., 2004, Soft variable-structure controls: A survey, *Automatica*, 40(11), 1821-1844.
- Azimov, A.Y. and Gasimov, R.N., 1999, On weak conjugacy, weak subdifferentials and duality with zero gap in nonconvex optimization, *International Journal of Applied Mathematics*, Academic Publications, 1, 171-192.
- Azimov, A.Y. and Gasimov, R.N., 2002, Stability and duality of nonconvex problems via augmented Lagrangian, *Cybernetics and Systems Analysis*, 38, 412-421.
- Balas, G.J., Doyle, J.C., Glover, K., Packard, A., Smith, R., 1995,  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox, MathWorks..
- Balas, G.J., Doyle, J.C., Glover, K., Packard, A., Smith, R., 2001,  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox: User's Guide, MUSYN Inc. and The MathWorks, Inc.
- Banks, S.P., Salamci, M.U., and McCaffrey, D., 2000, Non-local stabilization of nonlinear systems using switching manifolds, *International Journal of Systems Science*, 31(2), 243-254.
- Bartolini, G., Ferrara A., Usai, E., Utkin, V.I., 2000, On multi-input chattering free second order sliding mode control, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(9), 1711-1717.
- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M., 1993, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, 638 p.
- Becerra, V.M., 2004, Solving optimal control problems with state constraints using nonlinear programming and simulation tools, *IEEE Transactions on Education*, 47(3), 377-384.
- Bemporad, A., Casavola, A., Mosca, E., 1997, Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(3), 340-349.
- Berkemeier, M.D. and Fearing, R.S., 1999, Tracking fast inverted trajectories of the underactuated acrobot, *IEEE Transactions on Robotic and Automation*, 15, 740-750.
- Bertsekas, D.P., 1995, *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, 646p.
- Betts, J.T., 2001, *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*, Philadelphia, Pa, SIAM, 190 p.

- Biegler, L.T., 1998, Advances in nonlinear programming concepts for process control, *Journal of Process Control*, 8(5-6), 301-311.
- Boone, G., 1997, Minimum-time control of the acrobot, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3281–3287.
- Braatz, R.P., Young, P.M., Doyle, J.C., Morari, M., 1994, Computational-complexity of mu-calculation, *IEEE Transactions on Automatic control*, 39, 1000-1002.
- Bryson, A.E., 1996, Optimal control-1950 to 1985, *IEEE Control Systems Magazine*, 26-33.
- Casavola, A., Mosca, E., and Papini, M., 2004, Control under constraints: An application of the command governor approach to an inverted pendulum, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(1), 193-204.
- Choi, H.H., 1997, A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach, *Automatica*, 33(11), 2089-2092.
- Coxson, G.E. and DeMarco, C.L., 1994, The computational complexity of approximating the minimal perturbation scaling to achieve instability in an interval matrix, *Mathematics of Control- Signals and Systems*, 7(4), 279-292.
- Decarlo, R.A., Zak, S.H., and Matthews, G. P., 1988, Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial, *Proceedings of the IEEE*, 76(3), 212-232.
- Doyle, J.C., 1982, Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEEE Proceedings-D Control Theory and Applications*, 129(6), 242-250.
- Edwards, C. and Spurgeon, S.K., 1998, *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor&Francis Ltd, 237 p.
- Elgersma, M., Freudenberg, J., Morton, B., 1996, Polynomial methods for the structured singular value with real parameters, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6 (2), 147-170.
- Elia, N. and Dahleh, M.A., 1997, [Controller design with multiple objectives](#), *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5), 596-613.
- Fan, M.K.H., Tits, A.L., and Doyle, J.C., 1991, Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 25-38.
- Ferrara A., 2005, A variable structure convex programming based control approach for a class of uncertain linear systems, *Systems & Control Letters*, 54(6), 529-538.

- Ferris, M.C., 2004, MATLAB and GAMS: Interfacing, optimization, and visualization software, . <ftp://ftp.cs.wisc.edu/math-prog/tech-reports/98-19.ps>.
- Floudas, C.A., Akrotirianakis, I.G., Caratzoulas, S., Meyer C.A., Kallrath, J., 2005, Global optimization in the 21st century: Advances and challenges, *Computers and Chemical Engineering*, 29, 1185–1202.
- Fu, M., 1997, The real structured singular value is hardly approximable, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (9), 1286-1288.
- Fu, M. and Barabanov, N.E., 1997, Improved upper bounds for the mixed structured singular value, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 1447-1452.
- Fu, M. and Dasgupta, S., 2000, Computational complexity of real structured singular value in  $l(p)$  setting, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11): 2173-2176.
- Gasimov, R.N., 2002, Augmented Lagrangian duality and nondifferentiable optimization methods in nonconvex programming, *Journal of Global Optimization*, 24, 187-203.
- Gasimov, R.N., Rubinov, A.M., 2004, On augmented Lagrangians for optimization problems with a single constraint, *Journal of Global Optimization*, 28, 153-173.
- Gasimov, R.N., Yazıcı, A., Karamancıoğlu, A., 2005, A Nonlinear Programming Approach for the Sliding Mode Control Design, *Applied Mathematical Modelling*, 29(11), pg.1135-1148, 2005.
- Ge, Z.M. and Chu, L.W., 1998, An interval method for computing the structured singular value of a transfer matrix with real uncertainty, *The Japan Society of Mechanical Engineers: International Journal Series C*, 41, 741-750.
- Ge, Z.M. and Chu, L.W., 2000, An interval method for computing the stability margin of real uncertainty problems, *Optimal Control Applications and Methods*, 21, 185-193.
- Gopal, V. and Biegler, L.T., 1998, Large scale inequality constrained optimization and control”, *IEEE Control Systems Magazine*, 18(6), 59-68.
- Gungah, S.K., Malik, U., Jaimoukha, I.M., Halikias, G.D., 2001, A new upper bound for the real structured singular value, *Proceedings of the 40 th IEEE Conference on Decision and Control*, 247-248.
- Hayes, M.J., Bates, D.G., Postlethwaite, I., 2001, New tools for computing tight bounds on the real structured singular value, *Journal of Guidance Control And Dynamics*, 24(6), 1204-1213.



- Hung, J.Y., Gao, W., and Hung, J.C., 1993, Variable structure control: A survey, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1), 2-22.
- Kaynak, O., Erbatur, K., Ertugrul, M., 2001, The fusion of computationally intelligent methodologies and sliding-mode control - A survey, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48 (1), 4-17.
- Keel, L.H., and Bhattacharyya, S.P., 1999, Robust stability and performance with fixed-order controllers , *Automatica*, 35(10), 1717-1724.
- Kirk, D.E., 1970, *Optimal Control Theory: An Introduction*. Prentice-Hall Inc, 452 p.
- Li, H.X., Gatland, H.B., Green, A.W., 1997, Fuzzy variable structure control, *IEEE Transactions On Systems Man And Cybernetics Part B-Cybernetics*, 27(2), 306-312.
- Lordelo, A.D.S. and Ferreira, P.A.V., 2002, Linear controller design by goal programming, *IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design Proceedings*, 145-150.
- Luenberger, D.G., 1984, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, 491 p.
- Mahindrakar, A.D. and Banavar, R.N., 2001 ,Sub time-optimal swing up of the acrobot, *Proceedings of the European Control Conference*.
- Mayne, D.Q., Schroeder, W.R., 1997, Robust time-optimal control of constrained linear systems, *Automatica*, 33 , 2103–2118.
- Nemirovskii, A., 1993, Several NP-hard problems arising in robust stability analysis, *Mathematics of Control, Signals and Systems: MCSS*, 6, 99-105.
- Newlin, M.P. and Young, P.M., 1997, Mixed mu problems and branch and bound technique, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7(2), 145-164.
- Ogata, K., 1990, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall Inc, 963 p.
- Oriolo, G. and Nakamura, Y., 1991, Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated Manipulator, *Proceedings of the 30th IEEE conference on Decision and Control*, 2398-2403.
- Packard, A. and Doyle, J.C., 1993, The complex structured singular value, *Automatica*, 29(1), 71-109.
- Packard, A. and Pandey, P., 1993, Continuity properties of the real/complex structured singular value, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(35), 415-428.

- Palm, R., 1994, Robust control by fuzzy sliding mode, *Automatica*, 30(9), 1429-1437.
- Papamichal, I., and Adjiman, C.S., 2002, A rigorous global optimization algorithm for problems with ordinary differential equations, *Journal of Global Optimization*, 24, 1-33.
- Park, D.W. and Choi, S.B., 1999, Moving sliding surfaces for high-order variable structure systems, *International Journal of Control*, 72(11), 960-970.
- Poljak, S. and Rohn, J., 1993, Checking robust nonsingularity is NP-hard, *Mathematics of Control, Signals and Systems : MCSS*, 6, 1-9.
- Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.B., 1998, *Variational Analysis*, Springer-Berlin.
- Rubinov, A.M. and Gasimov, R.N., 2002, The nonlinear and augmented lagrangians for nonconvex optimization problems with a single constraint, *Applied and Computational Mathematics*, 1, 142-157.
- Rubinov, A.M. and Gasimov, R.N., 2003, Strictly increasing positively homogeneous functions with applications to exact penalization, *Optimization*, 52(1), 1-28.
- Sargent, R.W.H., 2000, Optimal control, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124, 361-371.
- Slotine, J.J.E., 1984, Sliding controller design for nonlinear systems, *International Journal of Control*, 40(2), 421-434.
- Spong, M.W., 1995, The swing up control problem for the acrobot, *IEEE Control Systems Magazine*, 15, 49-55.
- Swaroop, D., Hedrick, J.K., Yip, P.P., and Gerdes J.C., 2000, Dynamic surface control for a class of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10), 1893-1899.
- Toker, O. and Özbay, H., 1995, On the NP-hardness of the purely complex  $\mu$  computation, analysis /synthesis, and some related problems in multi-dimensional systems, *Proceedings of the American Control Conference*, 447-451.
- Utkin, V.I., 1977, Variable structure systems with sliding modes, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 22(2), 212-222.
- Yazıcı, A., 2000, Kayma Kipli Kontrol Yaklaşımlarının Ters Sarkaç Sistemine Uygulanması, Osmangazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, 102 s.

- Yazıcı, A. ve Karamancıoğlu, A., 2004, ters sarkaç sistemi için tasarlanan bir kontrolörün yapısal kararlılık analizi, HİTEK(Havacılıkta İleri Teknolojiler Ve Uygulamaları Sempozyumu), 503-507.
- Yazıcı, A. and Karamancıoğlu, 2005a, Mixed-Structured Robust Stability Analysis of Acrobot System, IKECCO'2005 (International Conference On Electronics And Computer In Kyrgyzstan), 120-126.
- Yazıcı, A., Karamancıoğlu, A., Gasimov, R.N., 2003, Nonlinear programming based sliding mode control of an inverted pendulum, International Conference on Electrical and Electronics Engineering ELECO'2003, 293-297.
- Yazıcı, A., Karamancıoğlu, A., Gasimov, R.N., 2004, Stabilizing Acrobot by using nonlinear programming based sliding mode controller, International Conference: 2004 -Dynamical Systems and Applications, 712-724.
- Yazıcı, A., Karamancıoğlu, A., Gasimov, R.N., 2005a, A nonlinear programming technique to compute the real structured singular value, Applied Computational Mathematics, 4(1), 61-69.
- Yazıcı, A., Karamancıoğlu, A., Gasimov, R.N., 2005b, Nonlinear programming based sliding mode control with an application in stabilization of Acrobot, Engineering Optimization, baskıda.
- Yoo, B. and Ham, W., 1998, Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 6(2), 315-321.
- Young, K.D., Utkin V.I., and Özgüner, Ü., 1999, A control engineer's guide to sliding mode control, IEEE Trans. Contr. Sys. Tech., 7(3), 328-342.
- Young, P.M., 2001, Structured singular value approach for systems with parametric uncertainty, Int. Journal of Robust and Nonlinear Control, 11, 653-680.
- Young, P.M. and Doyle, J.C., 1996, Properties of the mixed  $\mu$  problem and its bounds, IEEE Transactions on Automatic Control, 41, 155-159.
- Young, P.M. and Doyle, J.C., 1997, A lower bound for the mixed  $\mu$  problem, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (1), 123-128.
- Young, P.M., Newlin, M.P., Doyle, J.C, 1995, computing bounds for the mixed- $\mu$ -problem, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 5(6), 573-590.
- Yu, X.H., Man, Z.H., Wu, B.L., 1998, Design of fuzzy sliding-mode control systems, Fuzzy Sets and Systems, 95(3), 295-306.
- Zhou, K., 1998, Essentials of Robust Control, Prentice hall, 411 p.

23.04.1976 da Rize de doğan yazar, ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamlamıştır. Lisans (1994-1998) ve Yüksek Lisans (1998-2000) eğitimini Osmangazi Üniversitesinde bitirmiştir. 2005 yılında ise Eskişehir Osmangazi Üniversitesinde doktora eğitimini tamamlamıştır. Kontrol-Kumanda sistemleri (Kayma Kipli Kontrol, PLC), gürbüz kontrol (Mu Analizi), Optimizasyon ve Akıllı Robotlar konularında aktif olarak çalışmaları devam etmektedir.