İNTEGRAL DENKLEMLER
VE
ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Taner DEMİRCİ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2005

INTEGRAL EQUATIONS
AND
ANALYTICAL SOLUTIONS

Taner DEMİRCİ
Department of Mathematics
Thesis for Master Degree
2005

İNTEGRAL DENKLEMLER

VE

ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Taner DEMİRCİ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalında

Yüksek Lisans Tezi

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr Dursun ESER

Eylül 2005

Taner DEMİRCİ' nin yüksek lisans tezi olarak hazırladığı

"İNTEGRAL DENKLEMLER VE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ"

Başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye:

Üye:

Üye:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasının 1. bölümünde integral denklemlerin tanımı, zaman içinde değişik bilim adamları tarafından bulunan integral denklemlerin tanımları, yapısal özellikleri verilmiştir.

2. bölümde ise integral denklemlerin sınıflandırılmasının nasıl yapıldığına dair tanımlar, özellikler ve örnekler verilmiştir.

Günümüzde en çok kullanım alanına sahip olan Fredholm integral denklemlerinin genel yapıları hakkında tanım ve özellikleri ile çözüm yöntemleri 3. bölümde verilmiştir.

Fredholm integral denklemlerinden sonra en çok kullanılan integral denklemler Volterra integral denklemleridir. Volterra integral denklerine ait tanımlar, örnekler ve çözüm yöntemleri ise 4. bölümde verilmiştir.

SUMMARY

In the first chapter of this thesis study, there are general description of Integral equation, other integral equations' descriptions that had been found different science men.

In the second chapter, there are descriptions of how to make classificiation of Integral equations, properties and examples.

In the third chapter there are descriptions of Fredholm integral equations that had been used too much in current time. There are also properties, examples and solving methods for Fredholm integral equations.

Another kind of integral equations is Volterra integral equations which is being used as Fredholm integral equations. In the last chapter there are properties of Volterra integral equations, examples and solving methods for Volterra integral equations.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın her aşamasında bana rehberlik eden, büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli tez danışmanım;

Yrd.Doç.Dr Dursun ESER'e

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2005

İçindekiler

Bölüm 1

İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemlerin teori ve uygulamaları, uygulamalı matematikte önemli bir yer almaktadır. İntegral denklemler çeşitli fiziksel problemlerde matematiksel model olarak kullanılmasının yanında diğer matematiksel problemlerin yeniden yapılandırılmasında yer almaktadır. Bu tez içinde integral denklemlerin kısa bir sınıflandırılması verildikten sonra uygulama alanında en çok kullanılan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin yapıları ve çözüm yolları hakkında temel bilgiler verilecektir. Zaman içinde bir çok matematikçi integral denklemler ile ilgilenmiştir. Bu matematikçilerin bulduğu integral denklemler kendi adları ile adlandırılmıştır.

İntegral Denklemler bu yüzyılın başında incelenmeye ve üzerinde araştırmalar yapılmaya başlanılmış bir konudur. Önceleri dağınık ve rastgele yapılan çalışmalar, gittikçe düzenli ve daha bilimsel yöntemler uygulanarak yapılmaya başlanılmış ve zaman içerisinde konu, bugünkü aşamasına gelmiştir.

İntegral Denklemlerin diferensiyel denklemlerle olan ilişkisi ve diferensiyel denklemlerin teknikte çok kullanılır olması nedeniyle, İntegral denklemler tekniğin problemlerine gitgide daha çok girmeye başlamıştır. Bu nedenlede önemi ile beraber ilgide artmaktadır. İntegral denklemler konusu giderek güncelleşmiş ve de teknolojide ve özellikle de bir çok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

İntegral denklemler lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki grupta incelenir. Bu tez çalışmasında sadece lineer integral denklemler ve çözüm yöntemleri incelenecektir.

$u(x)$ bilinmeyen fonkisyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

ifadesine integral denklem denir. Burada u(x) bilinmeyen fonksiyonunun lineer olması halinde,integral denklem Lineer İntegral Denklem adını alır [1].

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt$$

integral denkleminde ise u(x) bilinmeyen fonksiyonunun n.kuvveti bulunduğundan, lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır. Daha genel olarak,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \phi\left[x, t, u(t)\right] dt$$

denklemi de lineer olmayan integral denklem olmaktadır.

1.1 İNTEGRAL DENKLEMLERİN TİPLERİ

1.1.1 VOLTERRA'NIN I. TİP İNTEGRAL DENKLEMİ

Genel olarak I. Tip Volterra integral denklemi;

$$\int_a^t K(t,s,x(s))ds = y(t) \qquad t \geq a$$

şeklindedir [1] . $K(t,s,x(s))$ verilmiş fonksiyonlar olup $x(s)$ bilinmeyendir [5].

Genel anlamda lineer I. Tip Volterra integral denklemi;

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t) \qquad t \geq a$$

şeklindedir. I. Tip lineer Volterra integral denklemleri, üzerinde çok çalışma yapılmış olan bir denklemdir. Bu integral denklemleri zor yapan, lineer olsun veya lineer olmasın, boy olarak *bozuk yapılı* olmalarıdır. Bu durum bu tip integral denklemlerin çözümünün daha zor hale gelmesine yol açmaktadır. *Bozuk yapılı* demenin kısaca açıklamasını yapmak gerekirse; y' deki küçük değişikliklere karşın x'in çözümünde çok daha büyük değişiklikler olabilir. Bunun için verilecek basit bir örnek;

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \geq a \tag{1.1}$$

denklemi için

$$\int_a^t x(s)ds = y(t) \quad t \geq a \tag{1.2}$$

denklemidir.

Burada $y(a) = 0$ ve $x(t) = y'(t)$, $t \geq a$ için eşdeğerdir. Dolayısıyla (1.2)' in nümerik çözümü $y(t)$ nin nümerik çözümü ile eşdeğerdir.

1.1.2 VOLTERRA' NIN II. TİP İNTEGRAL DENKLEMİ

Volterra'nın II. Tip integral denkleminin genel formu;

$$x(t) + \int_a^t K(t,s,x(s))ds = y(t), \quad t \geq a$$

şeklindedir.

$K(t, s, x(s))$ ve $y(t)$ verilmiş olup $x(t)$ bilinmemektedir. Bu integral denklem homojen olmayan bir integral denklem olup bu şekli ile bir çok alanda uygulanabilmekte ve çözülmektedir. Bu tip denklemler aşağıdaki ifadenin genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilmektedir.

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq a \qquad x(a) = x_0$$

Bu denklem adi diferensiyel denklemlerin bir başlangıç değer problemi olup;

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))ds \qquad t \geq a$$

integraline eşdeğer olarak alınır.

1.1.3 ABEL I. TİP İNTEGRAL DENKLEMİ

(1.1) denkleminin özel bir hali Abel integral denklemidir. (1.1) denkleminde

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{(t^p - s^p)^a}$$

olarak alınmıştır.

$$\int_0^t \frac{H(t, s)x(s)}{(t^p - s^p)^a} ds = y(t), \quad t > 0$$

burada $0 < \alpha < 1$ ve $p > 0$ şeklindedir. Özellikle önemli durumlar $p = 1$ ve $p = 2$ durumlarıdır. Her iki durumda da $\alpha = \frac{1}{2}$ dir.

$H(t, s)$ fonksiyonu düzgün yakınsak olarak varsayılmıştır. [Bu ifade aynı zamanda çoğunlukla sürekli integrallenebilirdir] Bu integral denklemlerin uygulama alanı çok olduğundan çözüm için özel sayısal metotlar geliştrilmiştir.

1.1.4 FREDHOLM' ÜN I. TİP İNTEGRAL DENKLEMİ

Bu denklem

$$\int_D K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in D$$

biçiminde yapılanmışdır.

Burada K ve D nin Fredholm'ün II. Tip integral denklemindeki aynı özelliklere sahip olduğu kabul edilir. Bu gibi denklemlerde bozuk yapılı olarak nitelendirililer. Temel olarak II. Tip integral denklemlere benzerlik göstermektedirler. Pratik kullanımlar için bu denklemler iki kategoriye ayrılmışlardır. $K(t,s)$ çekirdeği düzgün yapılı olduğu zaman integral denklem I. kategori olarak adlandırılır.

1.1.5 FREDHOLM' ÜN II. TİP İNTEGRAL DENKLEMİ

Bu tip integral denklemlerin genel hali;

$$\lambda x(t) - \int_D K(t,s)x(s)ds = y(t)\ ,\ t \in D\ , \lambda \neq 0$$

şeklindedir. D, R^m de kapalı bir bölge ve $m \geq 1$ dir.

Çekirdek fonksiyonu $K(t,s)$ tam olarak integrallenebilir olarak varsayılmaktadır. Bunun yanında Fredholm Alternatif teoreminin şartlarını da sağladığı öngörülmüştür. $y \neq 0$ için, y ve λ verilmiş olup x bilinmeyendir. Homojen olmayan bu denklem de $y = 0$ için, denklem özdeğer problemi halini alır. Bu durumda özdeğer olarak λ ve x özdeğerleri aranır.

1.1.6 WIENER-HOPF İNTEGRAL DENKLEMİ

Bu integral denklem,

$$\lambda x(t) - \int_0^\infty k(t-s)x(s)ds = y(t)\quad ,\quad 0 \leq t \leq \infty$$

şeklindedir.

Orijinal olarak bu gibi integral denklemler ısı transfer denklemlerinde, düzlemsel problemlerin sadece düzgün yakınsak olduğu durumlar için sınır değer problemlerinin çözülmesinde kullanılır.

1.1.7 CAUCHY TEKİL İNTEGRAL DENKLEMİ

Γ açık veya kapalı sınırlı bir alan olsun. Kompleks düzlemde Cauchy tekil integral denklemi;

$$a(z)\phi(z) + \frac{b(z)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\Gamma}K(z,\zeta)d\zeta = \Psi(z)\ ,\ z \in \Gamma$$

olup, a, b, Ψ ve K verilmiş kompleks değerli fonksiyonlardır. ϕ bilinmeyen fonksiyon, K integrallenebilir olarak Fredholm integral operetörü ile yakından ilişkilidir. Ayrıca bu integral denklem esas (öncül) değer denklemi olarak adlandırılır.

1.2 İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklemler altı değişik şekilde sınıflandırılır:

1- Tekil (singüler) İntegral denklemler

2- Homojenliğine göre integral denklemler

3- Yapılarına göre sınıflandırmalar

4- İntegral sınırlarına göre sınıflandırmalar

5- İntegro-Diferensiyel denklemler

6- Parametreli denklemler

1.2.1 TEKİL (SİNGÜLER) İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliğine bağlı olarak yapılır. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem Tekil (singüler) olmayan integral denklemdir. Eğer $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse integral denklem Tekil (singüler) integral denklem olarak adlandırılır [1].

Örnek 1.2.1 *$0 < a < 1$ olmak üzere $f(x) = \int \frac{u(t)dt}{(x-t)^a}$ şeklindeki bir integral denklem bu sınıfa girmektedir. Çünkü,*

$x = t$ noktasında $K(x,t) = \frac{1}{(x-t)^a}$ fonksiyonu süreksizdir. Ayrıca integral denklemin bir sınırı ∞ olursa integral denklem singüler olur.

Buna örnek olarak;

$$f(x) = \int_0^\infty \sin xtu(t)dt \qquad \text{(Fourier-Sinüs Transformasyonu)}$$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}u(t)dt \qquad \text{(Laplace Transformasyonu)}$$

verilebilir.

1.2.2 HOMOJENLİĞİNE GÖRE İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

İntegral denklem bilinmeyen $U(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları açısından sınıflandırılır.

$$U(x) = \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

homojen integral denklem olarak adlandırılır. Bununla beraber;

$$U(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

denklemi homojen olmayan integral denklemdir. Burada $f(x)$ homojenliği bozmaktadır.

$$U(x) = \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

homojen integral denkleminde $U(x) = 0$ için bir çözüm vardır. Bu çözüme aşikar çözüm denir.

1.2.3 YAPILARINA GÖRE İNTEGRAL DENKLEMLER

Yapılarına göre integral denklemler 3 şekilde incelenir.

1.tür: Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde bulunuyorsa bu tip denklemlere 1. tür integral denklem denir. Örnek olarak;

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

olarak verilebilir.

2.tür: Bilinmeyen fonksiyon integralin hem içinde hem dışında bulunuyorsa bu tip integral denkleme 2. tür integral denir. Örnek olarak;

$$U(x) = \int_a^b K(x.,t)U(t)dt$$

veya

$$U(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

3.tür: $\phi(x), f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilindiğinde;

$$\phi(x) \cdot u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki integral denklemdir. Bu tip integrale örnek olarak;

$$x \cdot u(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2t^2u(t)dt$$

verilebilir. 1. ve 2. tür integral denklemler 3. tür integral denklemin $\phi(x) = 0$ ve $\phi(x) = 1$ durumları için özel halleridir.

1.2.4 İNTEGRAL SINIRLARINA GÖRE İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılmasıda integral denklemin sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Sınırları değişken olan integral denklemlere Volterra integral denklemi denir.

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$U(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)U(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki integral denklemler Volterra integral denklemidir.

Eğer integral denklemin sınırı $x = b$ şeklinde sınır sabit sayı ise bu integral denklem Fredholm integral denklemi olarak adlandırılır.

$$U(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

$$\phi(x)U(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)U(t)dt$$

Fredholm integral denklemine örneklerdir.

1.2.5 İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun türevlerinin bulunduğu bir integral denklem İntegro-Difrensiyel denklem denir.

$$U'(x) = F\left\{x, u(x), \int_0^x K(x,t,u(t),U'(t)dt\right\}$$

denklemi bu tip integral denklemdir. İçinde hem bilinmeyen hem de bilinmeyenin türevleri bulunmaktadır.

1.2.6 PARAMETRELİ DENKLEMLER

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olan bir parametre olmak üzere tanımı yapılmış olan integral denklemler λ parametresinin dahil edilmesi ile daha genel bir yapıya kavuşacaktır.

$$U(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)U(t)dt \qquad \text{(II. Tip Volterra integral denklemi)}$$

$$U(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)U(t)dt \qquad \text{(II. Tip Fredholm integral denklemi)}$$

Bölüm 2

FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLER

Bu bölümde Fredholm integral denklemlerinin özelliklerini ve çözüm metodlarını inceleyeceğiz. Bu denklemlerim lineer ve $K(x,t)$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ karesel bölgede sürekli ve tanımlı oldukları kabul edilmiştir.

2.1 FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde Fredholm integral denklemlerinin çözüm yöntemleri incelenerek, örnekler verilecektir.

2.1.1 SABİT ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLER

Bir Fredholm integral denkleminde $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun sabit olduğunu farz edelim. C bu sabiti göstermek üzere,

$$K(x,t) = C$$

için integral denklemi;

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b CU(t)dt$$

şeklinde olur. Bu denklem,

$$U(x) = f(x) + \lambda C \int_a^b U(t)dt$$

ve $\lambda C = \mu$ alınmak üzere,

$$U(x) = f(x) + \mu \int_a^b U(t)dt$$

olarak yazılabilir. Belirli integralin sınırı sabit olduğundan bu integralin sonlu bir değeri olacaktır. Bu sonlu değeri A ile gösterirsek;

$$A = \int_a^b U(t)dt$$

olup denklem

$$U(x) = f(x) + \mu A$$

şeklini alır. Bu çözümün integral denklemi sağlaması gerekir. O halde;

$$f(x) + \mu A = f(x) + \mu \int_a^b \{f(t) + \mu A\}\, dt$$

olup buradan

$$A\left[1-\mu\int_a^b dt\right]=\int f(t)dt$$

veya

$$A=\frac{1}{1-\mu(b-a)}\int_a^b f(t)dt$$

bulunur.

Buradan A'nın bir anlamının olması için $1-\mu(b-a)\neq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olduğundan integralin değeride bilinmektedir. A için bulunan değer $u(x)=f(x)+\mu A$ denkleminde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x)+\mu\left[\frac{1}{1-\mu(b-a)}\int_a^b f(t)dt\right] \\ &= f(x)+\frac{\mu}{1-\mu(b-a)}\int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

olarak integral bulunur.

$\mu=\lambda C$ değeri denklemde yerine koyulursa,

$$u(x)=f(x)+\frac{\lambda C}{1-\lambda C(b-a)}\int_a^b f(t)dt$$

sonucuna varılır.

Görüldüğü gibi ikinci tarafta hep bilinen değerler olup $u(x)$ değeri doğrudan bulunabilecektir. Bu ifade sabit çekirdekli integral denklemin çözümüdür. Bunun yanında bu ifade sadece Fredholm integral denkleminin çözümüdür.

Örnek 2.1.1

$$u(x)=x^2+\lambda\int_0^1 2u(t)dt$$

integral denklemi $K(x,t)=2$ *olan sabir çekirdekli bir integral denklemin çözümünü bulalım.*

$A = \int_0^1 u(t)dt$ olarak alınırsa $u(x) = x^2 + 2\lambda A$ olur. Bu değeri denklemde yerine koyarsak;

$$x^2 + 2\lambda A = x^2 + 2\lambda \int_0^1 (t^2 + 2\lambda A)dt$$

ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$A = \int_0^1 t^2 dt + 2\lambda A \int dt$$

$$A = \left| \frac{t^3}{3} \right|_0^1 + \ 2\lambda A$$

ve

$$A(1 - 2\lambda) = \frac{1}{3}$$

olup buradan

$$A = \frac{1}{3(1 - 2\lambda)}$$

bulunur. Bu ifade $u(x) = x^2 + 2\lambda A$ ifadesi yerine koyulursa,

$$u(x) = x^2 + \frac{2\lambda}{3(1 - 2\lambda)}$$

çözümü bulunur.

2.1.2 DEJENERE ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLER

Bir integral denklemde $K(x,t)$ çekirdeği; $K(x,t) = r(x)s(t)$ şeklinde ise bu çekirdeğe Dejenere Çekirdek denir. Bu şekilde bir çekirdek fonksiyon olan integral denklem;

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x)s(t)U(t)dt$$

olur. Bu denklem 2. dereceden Fredholm integral denklemidir. Bu denklem de $r(x)$, t den bağımsız olduğu için;

$$U(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b s(t)U(t)dt$$

şeklinde yazılır.

Dejenere çekirdekli integral denklemlerin çözümünü sabit çekirdekli integral denklemlerde olduğu gibi düşünürsek, A integralin sabit değeri olmak üzere;

$$A = \int_a^b s(t)U(t)dt$$

denildiğinde

$$U(x) = f(x) + \lambda A r(x)$$

şeklini alır. Bulunan bu ifade çözümdür. Bu durumda;

$$f(x) + \lambda A r(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b \{f(t) + \lambda A r(t)\}\, s(t)dt$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$A \left[1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t)dt \right] = \int_a^b f(t)s(t)dt$$

$$1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t)dt \neq 0$$

olmak üzere

$$A = \frac{\int_a^b f(t)s(t)dt}{1 - \int_a^b r(t)s(t)dt}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin ikinci yanındaki integraller $f(x), r(x)$ ve $s(x)$ bilinen fonksiyonlar olduklarından hesaplanabilirler. Öyleyse A belirlenebilecektir. Bu sonuç kullanılırsa $u(x)$çözüm fonksiyonu;

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda \int\limits_a^b f(t)s(t)dt}{1 - \int\limits_a^b r(t)s(t)dt} r(x)$$

olarak bulunur. Bu sonuç dejenere çekirdekli Fredholm integral denkleminin çözüm denklemi olarak ele alınabilir.

II. Tip Fredholm İntegral Denklemlerin Çözümleri İçin Bir Genel Teknik

Denklemimizi aşağıdaki gibi alalım;

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,\xi)y(\xi)d\xi \quad (1)$$

$K(x,\xi)$ çekirdeğini paraçalanabilir olarak kabul edersek,çekirdek fonksiyonu;

$$K(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\beta_i(\xi)$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadeyi (1)'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \int_a^b \beta_j(\xi)y(\xi)d\xi \\ &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_j(x) \ (2) \end{aligned}$$

Bu arada dikkat edilirse denklemde bulunan y(x) değerleri, c_j katsayıları bilindiği takdirde,(1) denkleminin bir çözümünü vermektedir. İhtiyacımız olan c_j katsayılarını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

(2) denklemini $\beta_i(x)$ ile çarpıp integralini alırsak,

$$\int_a^b y(x)\beta_i(x)dx = \int_a^b f(x)\beta_i(x)dx + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b a_j(x)\beta_i(x)dx$$

veya buna denk olarak

$$c_i = f_i + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij}$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$c_1, ..., c_n$$

bilinmeyen değişkenlerine ve

$$c_i = f_i + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} \ , \ 1 \leq i \leq n$$

şeklinde n tane denkleme sahip olan lineer sisteme sahip oluruz.

Bulunan değerlerin matris formu ise aşağıdaki şekildedir.

$$(I - \lambda A)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{f}$$

$A, \overrightarrow{c}$ ve $\overrightarrow{f}$ ifadelerinin açık şekli,

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & \ddots & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$,ve $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$

olarak verilir.

Örnek 2.1.2 $u(x) = x + \int_0^2 e^{x+t}u(t)dt$ *integral denklemini çözelim*

Verilen integral denklemde çekirdek fonksiyon

$$K(x,t) = e^{x+t} = e^x \cdot e^t$$

olarak alınır. Böylelikle çekirdek fonksiyon dejenere çekirdek tipli olur. Burada $r(x)s(t) = e^x \cdot e^t$ eşitliğinden dolayı $r(x) = e^x$ ve $s(t) = e^t$ olarak belirlenir.

Verilen integral denklemde integral t' ye göre alınacağından;

$$U(x) = x + e^x \int_0^2 e^t U(t)dt$$

şeklinde yazılır ve $A = \int_0^2 e^t U(t)dt$ olarak alınırsa denklem

$$U(x) = x + Ae^x$$

biçiminde yazılabilir. Bulunan bu ifadeyi verilen denklemde yerine yazarsak;

$$x + Ae^x = x + e^x \int_0^2 e^t \left\{t + Ae^t\right\} dt$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi düzenlersek;

$$A = \int_0^2 te^t dt + A \int_0^2 e^{2t} dt$$

olarak bulunur. Bulunan iki integrali ayrı ayrı çözersek

$$\int_0^2 te^t dt = \left|(t-1)e^t\right|_0^2 = 1 + e^2$$

$$\int_0^2 e^{2t} dt \left|\frac{1}{2}e^{2t}\right|_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

bulunur. Bu ifadeleri kullanarak

$A = 1 + e^2 + \frac{1}{2}A(e^4 - 1)$ ifadesinden $A = \frac{2(1+e^2)}{3-e^4}$ ifadesi bulunur. Bu değeri $u(x) = x + Ae^x$ ifadesinde yerine yazarsak;

$$u(x) = x + \frac{2(1 + e^2)}{3 - e^4} e^x$$

çözümüne ulaşırız.

Örnek 2.1.3 $f(t), [-1,1]$ *üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,*

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (ts^2 + st^2) dt x(s) ds = f(t)$$

integral denklemini çözelim.

Verilen integral denklemdeki çekirdekte

$$a_1(t) = t\ ,\ b_1(s) = s^2,\ a_2(t) = t^2, b_2(s) = s$$

şeklinde alınabilir [2]. Burada;

$K(t,s) = K(s,t)$ olduğundan simetrik çekirdeğe sahip bir denklemdir.

$$k_{ij} = \int_a^b a_j(s) b_i(s) ds \quad ve \quad \eta_i = \int_a^b f(s) b_i(s) ds$$

olmak üzere k_{ij} ve η_i ifadelerini hesaplayalım.

$$k_{11} = \int_{-1}^{1} a_1(s) b_1(s) ds = \int_{-1}^{1} ss^2 ds = \int_{-1}^{1} s^3 ds = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_{11} = 0$$

$$k_{12} = \int_{-1}^{1} a_2(s) b_1(s) ds = \int_{-1}^{1} s^2 s^2 ds = \int_{-1}^{1} s^4 ds = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad k_{12} = \frac{2}{5}$$

$$k_{21} = \int_{-1}^{1} a_1(s) b_2(s) ds = \int_{-1}^{1} ssds = \int_{-1}^{1} s^2 ds = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad k_{21} = \frac{2}{3}$$

$$k_{22} = \int_{-1}^{1} a_2(s)b_2(s)ds = \int_{-1}^{1} ss^2 ds = \int_{-1}^{1} s^3 ds = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_{22} = 0$$

$$\eta_1 = \int_{-1}^{1} f(s)s^2 ds \qquad \text{ve} \quad \eta_2 = \int_{-1}^{1} f(s)ds$$

Bulunan değerler aşağıda bulunan lineer denklem sisteminde yerine koyulacaktır.

$$(1 - \lambda k_{11})\xi_1 - \lambda k_{12}\xi_2 - ... - \lambda k_{1n}\xi_n = \eta_1$$
$$-\lambda k_{21}\xi_1 + (1 - \lambda k_{22})\xi_2 - ... - \lambda k_{2n}\xi n = \eta_2$$
$$...$$
$$-\lambda k_{n1}\xi_1 - \lambda k_{n2}\xi - ... + (1 - \lambda k_{nm})\xi_2 = \eta_n$$

Bu lineer denklem sisteminde problem, $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ değerlerinin bulunmasına dönüşmüştür. Bu durumda;

$$\begin{cases} (1 - \lambda \cdot 0)\xi_1 - \lambda \frac{2}{5}\xi_2 = \eta_1 \\ \frac{-2}{3}\lambda\xi_1 + (1 - \lambda \cdot 0)\xi_2 = \eta_2 \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. İşlemler yapıldıktan sonra;

$$\xi_1 - \frac{2}{3}\lambda\xi_2 = \eta_1 \quad ve \quad \frac{-2}{3}\xi_1 + \xi_2 = \eta_2$$

bulunur. Bu durumda determinant

$$\Delta(\lambda) = 1 + \frac{4}{15}\lambda^2$$

bulunur.

$\xi = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ifadesinden dolayı $\Delta(\lambda)$ değerinin sıfır olmaması gerekmektedir. Yani $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ için oluşan sistemin her $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ için tek bir çözüm vardır.

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad ve \qquad \xi_2 = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

ifadelerinden;

$$\xi_1 = \frac{\eta_1 + \frac{2}{5}\lambda\eta_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} \qquad ve \qquad \xi_2 = \frac{\frac{2}{3}\lambda\eta_1 + \eta_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2}$$

çözümü vardır. Diğer yandan integral denklemin çözümü;

$$x(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i(t)$$

şeklindedir. Bulunan ifadeleri yerine koyarak çözümü bulabiliriz. O halde

$\forall f \in C[1, -1]$ için tek bir

$$x(t) = f(t) + \xi_1 \lambda t + \xi_2 \lambda t$$

çözümü vardır. Buradan,

$$x(t) = f(t) + \frac{\eta_1 + \frac{2}{5}\lambda\eta_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2}\lambda t + \frac{\frac{2}{3}\lambda\eta_1 + \eta_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2}\lambda t$$

çözümünü buluruz.

2.1.3 İTERE ÇEKİRDEK

Genel olarak bir integral denklemde $K(x,t)$ ile gösterdiğimiz bir çekirdek fonksiyon bulunacaktır. Bu çekirdeğin;

$K_2(x,t)$; $K_3(x,t); ...; K_n(x,t)$ ile gösterilen ve sırasıyla 2. mertebeden ,3. mertebeden ;...;n. mertebeden itere çekirdek denilen değişik şekilleri de tanımlanır. Örneğin 2. mertebeden bir itere çekirdek, y değişken olmak üzere,

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,y)K(y,t)dy$$

şeklindedir.

3. mertebeden bir itere çekirdek ise;

$$\begin{aligned} K_3(x,t) &= \int_a^b K(x,y)K_2(y,t)dy \\ &= \int_a^b K(x,y_1)\left[\int_a^b K(y_1,y_2)K(y_2,t)dy_2\right]dy_1 \\ &= \int_a^b\int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)K(y_2,t)dy_2dy_1 \end{aligned}$$

şeklinde ifade etmek mümkündür.

Burada gözüktüğü gibi itere çekirdekleri bulmak için bir önceki itere çekirdeğin bilinmesi gerekmektedir. Bu hesaplamalar sonucunda genel olarak n. mertebeden bir itere çekirdek;

$$K_n(x,t) = \int_a^b ...(n-1)... \int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)...K(y_{n-1},t)dy_1dy_2...dy_{n-1}$$

bağıntısı ile bulunabilir.

İtere çekirdeğin başka bir ifadesi ise h ve k pozitif tam sayılar olmak üzere;

$$K_{(h+k)}(x+t) = \int_a^b K_{(h)}(x,y)K_{(k)}(y,t)dy$$

veya

$$K_{(h)}(x,t) = \int_a^b K_{(k)}(x,y)K_{(h-k)}(y-t)dy$$

olarak verilir.

Bu verilen tanım bir önceki tanıma uymaktadır. Burada $K(x,t)$ çekirdeğin yeni değişkenler üretmek süreci ile parçalanabileceği ve böylece daha yüksek mertebeden itere çekirdeklerin yazılabileceği anlaşılmaktadır.Yukarıda dikkat edilirse yeni bulunan değişken sayısıyla itere çekirdekteki integral sayısı birbirine eşittir. Yani ne kadar çok değişken olursa o kadar integral katı ortaya çıkacaktır. Şimdi örnekler vererek itere çekirdek yöntemini anlamaya çalışalım.

Örnek 2.1.4 *$a = 0$ ve $b = 0$ ise $K(x,t) = x - t$ çekirdek fonksiyonu için itere çekirdekleri bulalım.*

$K_1(x,t) = K(x,t) = x - t$ olarak alırız. (1. mertebeden itere çekirdek, çekirdek fonksiyonun kendi olarak alınır.)

$$\begin{aligned}
K_2(x,t) &= \int_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1 \\
&= \int_0^1 (x - t_1)(t_1 - t)dt_1 \\
&= \int_0^1 (xt_1 - xt - t^2 + tt_1)dt_1 \\
&= \tfrac{x}{2} + \tfrac{t}{2} - xt - \tfrac{1}{3} \\
&= \tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3(x,t) &= \int_0^1 K(x,t_1)K(t_1,t)dt_1 \\
&= \int_0^1 (x - t_1)(\tfrac{t_1+t}{2} - tt_1 - \tfrac{1}{3})dt_1 \\
&= \int_0^1 (x\tfrac{t_1+t}{2} - xtt_1 - \tfrac{x}{3} - t_1\tfrac{t_1+t}{2} + t_1^2 t)dt_1 \\
&= \tfrac{x}{2}(\tfrac{1}{2} + t) - xt\tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3} + \tfrac{t}{2}) + \tfrac{t}{3} + \tfrac{1}{6} \\
&= \tfrac{x}{4} + \tfrac{xt}{2} - \tfrac{xt}{2} - \tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{t}{4} + \tfrac{t}{3} + \tfrac{1}{6} \\
&= \tfrac{x}{4} - \tfrac{x}{3} + \tfrac{t}{3} - \tfrac{t}{4} \\
&= \tfrac{3x-4x+4t-3t}{12} \\
&= \tfrac{t-x}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4(x,t) &= \int_a^b K(x,t_1)K_3(t_1,t)dt_1 \\
&= \int_0^1 (x-t_1)\tfrac{t-t_1}{2}dt_1 \\
&= \tfrac{-1}{12}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3}) \\
K_5(x,t) &= \int_a^b K(x,t_1)K_4(t_1,t)dt_1 \\
&= \tfrac{-1}{12}\int_0^1 (x-t_1)(\tfrac{t_1-t}{2} - tt_1 - \tfrac{1}{3})dt_1 \\
&= \tfrac{x-t}{12^2} \\
K_6(x,t) &= \int_a^b K(x,t_1)K_5(t_1,t)dt_1 \\
&= \int_0^1 (x-t)\tfrac{t_1-t}{12^2}dt_1 \\
&= \tfrac{1}{12^2}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi çift indisli itere çekirdekler ile tek indisli çekirdekler birbirlerine benzemektedirler. Bu duruma bu şekilde devam edilerek genel bir şekilde ifade edilmek istenirse;

$k = 1, 2, 3, ...$ değerleri için

$n = 2k - 1$ ise

$$K_n(x,t) = K_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t)$$

$n = 2k$ ise

$$K_n(x,t) = K_{2k}(x,t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3})$$

şekilde itere çekirdekler bulunur.

Örnek 2.1.5 $K(x,t) = xe^t$; $a = 0$ *ve* $b = 1$ *sınır değerleri için itere çekirdeklerini bulalım*

$K_1(x,t) = K(x,t) = xe^t$ *olarak alalım.*

$$\begin{aligned}
K_2(x,t) &= \int\limits_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1 \\
&= \int\limits_0^1 xe^{t_1}t_1e^t dt_1 = xe^t\int\limits_0^1 e^{t_1}t_1dt_1 \\
&= xe^t \\
K_3(x,t) &= \int\limits_a^b K(x,t_1)K_2(t_1,t)dt_1 \\
&= \int\limits_0^1 xet^{t_1}t_1e^t dt_1 = xe^t\int\limits_0^1 e^{t_1}t_1dt_1 \\
&= xe^t \\
& \quad ...
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi mertebenin artması itere çekirdeği değiştirmemektedir. Bundan dolayı ;

$k = 1, 2, 3, ...$ için $K_n(x,t) = xe^t$ olarak genelleştirme yapılır.

Örnek 2.1.6 $K(x,t) = e^x cost$; $a = 0$ *ve* $b = \pi$ *sınır aralığında itere çekirdekleri bulalım.*

$K_1(x,t), = K(x,t) = e^x \cos t$ olarak alalım:

$$\begin{aligned}
K_2(x,t) &= \int\limits_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1 \\
&= \int\limits_0^\pi e^x \cos t_1 e^{t_1} \cos t dt_1 \\
&= e^x \cos t \int\limits_0^\pi e^{t_1} \cos t_1 dt_1 \\
&= e^x \cos t \left[\frac{e^{t_1}}{2}(\cos t_1 + \sin t_1) \Big|_0^\pi \right] \\
&= e^x \cos t \left[\frac{e^\pi}{2}(-1+0) - \frac{e^\pi}{2}(1+0) \right] \\
&= -e^{x+\pi} \cos t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3(x,t) &= \int\limits_a^b K(x,t_1)K_2(t_1,t)dt_1 \\
&= \int\limits_0^\pi -e^x \cos t_1 e^{t_1+\pi}\cos t dt_1 \\
&= -e^x \cos t e^\pi \int\limits_0^\pi \cos t_1 e^{t_1} dt_1 \\
&= -e^{x+t}\cos t(-e^\pi) \\
&= e^{x+2\pi}\cos t \\
K_4(x,t) &= \int\limits_a^b K(x,t_1)K_3(t_1,t)dt_1 \\
&= \int\limits_0^\pi e^x \cos t_1 e^{t_1+2\pi}\cos t dt_1 \\
&= e^x e^{2\pi}\cos t \int\limits_0^\pi e^{t_1}\cos t_1 dt_1 \\
&= e^{x+2\pi}\cos t(-e^\pi) \\
&= -e^{x+3\pi}
\end{aligned}$$

Bulduğumuz itere çekirdeklerden görüldüğü gibi tek sayılı indise sahip olan itere çekirdekler ile çift indise sahip olan itere çekirdekler arasında bir bağıntı bulunmaktadır. $k = 1, 2, 3, ...$ için;

$n = 2k$ için

$$K_n(x,t) = K_{2k}(x,t) = -e^{x+(n-1)\pi}\cos t$$

$n = 2k - 1$ için

$$K_n(x,t) = K_{2k-1}(x,t) = e^{x+(n-1)\pi}\cos t$$

olarak bulunur.

Örnek 2.1.7 $K(x,t) = x + sint$; $a = -\pi$ *ve* $b = \pi$ *sınır değerleri için itere çekirdekleri bulalım,*

$K(x,t) = K_1(x,t) = x + \sin t$ olarak alınır.

$$\begin{aligned}
K_2(x,t) &= \int_{-\pi}^{\pi} K(x,t)K_1(t_1,t)dt_1 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (x+\sin t_1)(t_1+\sin t)dt_1 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (xt_1 + x\sin t + t_1 \sin t_1 + \sin t_1)dt_1 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} xt_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} x\sin t dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} t_1 \sin t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin t_1 + \sin t dt_1 \\
&= \tfrac{xt_1^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} + xt\sin t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \tfrac{t_1^2 \sin t}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \sin t \left[-\cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\
&= \tfrac{x\pi^2}{2} - \tfrac{x\pi^2}{2} + x\pi \sin t + x\pi \sin t + \tfrac{\pi^2 \sin t}{2} - \tfrac{\pi^2 \sin t}{2} + \sin t \cdot 0 \\
&= 2x\pi \sin t
\end{aligned}$$

bulunur.

2.1.4 ARDIŞIK YAKLAŞIMLAR METODU (PİCARD METODU)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy \tag{2.1}$$

integral denklemini gözönüne alalım. İlk yaklaşım olarak $\lambda = 0$ olarak düşünelim. $\lambda = 0$ için ;$u(x) = f(x)$ olup bunu

$u_0(x)$ ile gösterelim. (2.1) denkleminde aynı notasyonu kullanmak gerekirse;

$$u_1(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir.

Burada integral x'in bir fonksiyonu olacağından bu integrali;

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy \tag{2.3}$$

ile gösterdiğimiz takdirde (2.2) denklemi;

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\phi_1(x) \tag{2.4}$$

şeklinde yazılır. Aynı yazıma uygun olması bakımından

$$u_0(x) = f(x) = \phi_0(x) \tag{2.5}$$

ile gösterilir.

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)u_1(y)dy \tag{2.6}$$

şeklinde olacaktır. (2.5) eşitliğinin gerektirdiğinde (2.4) denkleminde uygularsak yani $f(x)$ yerine $\phi_0(x)$ yazıp denklemde yerine yazarsak;

$$u_1(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) \tag{2.7}$$

olup,

$$\begin{aligned} u_2(x) = &\quad f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\left[\phi_0(y) + \lambda\phi_1(y)\right]dy \\ u_2(x) = &\quad f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\phi_0(y)dy + \lambda^2\int_a^b K(x,y)\phi_1(y)dy \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapıldığında;

$$\phi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\phi_1(y)dy$$

yazılır. Buradan

$$u_2(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x)$$

ifadesine ulaşılır.

Böyle devam edildiğinde

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), ..., u_{n-1}(x), u_n(x)$$

şeklinde bir fonksiyon dizisi elde edilir.

Sonuçta;

$$u_n(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + ... + \lambda^n\phi_n(x)$$

şeklinde bir seri oluşacaktır.

Burada $(n = 1, 2, 3, ...)$ için,

$$\phi_0(x) = f(x) \ ve \ \ \phi_n(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\phi_{n-1}(y)dy$$

dır.

Örnek 2.1.8

$$u(x) = \sin x - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xyu(y)dy$$

integral denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözelim [1].

Aranılan sonuç

$$u(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + ... + \lambda^n\phi_n(x) + ... \qquad (2.8)$$

serisinden elde edilecektir. $\lambda = \frac{1}{4}$ olarak verildiğinden

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x)$$

fonksiyonlarının hesaplanması gerekmektedir. Bunları $\phi_0(x) = f(x)$ ve $(n = 1, 2, 3, ...)$ için;

$$\phi_n(x) = \int\limits_a^b K(x,y)\phi_{n-1}(y)dy$$

ifadeleri ile hesaplayacağız.

$$\phi_0(x) = f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$$

olarak alınacaktır.

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_0(y)dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy(\sin y - \tfrac{y}{4})dy \\
&= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y\sin y - \tfrac{1}{4}y^2)dy \\
&= (1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_1(y)dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})ydy \\
&= (1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy^2dy \\
&= (1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})x \\
\phi_3(x) &= \int_a^b K(x,y)\phi_2(y)dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})ydy \\
&= (1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy^2dy \\
&= (1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})^2x
\end{aligned}$$

işlemlere bu şekilde devam edilirse,

$$\phi_n(x) = (1 - \frac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\frac{\pi^3}{3\cdot 8})^{n-1}x$$

olarak bulunur. (2.8) serisini oluşurmak istersek,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sin x - \tfrac{x}{4} + \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})x + \tfrac{1}{4^2}(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})x \\
&\quad +(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})^2x + ... + \tfrac{1}{4^n}(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})^{n-1}x \\
u(x) &= \sin x - \tfrac{x}{4} + \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8})x\left[1 + \tfrac{1}{4}\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8} + \tfrac{1}{4^2}(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})^2 + ... + \tfrac{1}{4^{n-1}}(\tfrac{\pi^3}{3\cdot 8})^{n-1} + ...\right]
\end{aligned}$$

olup köşeli parantezin içindeki geometrik serinin ortak çarpanı;

$$q = \frac{\pi^3}{3\cdot 4\cdot 8}$$

şeklindedir. Bu serinin toplamı S ile gösterilirse;

$$S = \frac{1}{1 - \frac{\pi^3}{3 \cdot 4 \cdot 8}}$$

olarak bulunur. Bu ifade seride yerine koyulursa;

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x - \tfrac{x}{4} + \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{\pi^3}{3 \cdot 4 \cdot 8})x \tfrac{1}{1 - \frac{\pi^3}{3 \cdot 4 \cdot 8}} \\ &= u(x) \sin x - \tfrac{x}{4} + \tfrac{x}{4} \\ &= \sin x \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.1.9

$$u(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t dt$$

integral denklemini ardışık yaklaşımlar metodu ile çözelim.

İlk yaklaşım olarak $f(x) = \phi_0(x) = \sin x$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_a^b K(x,y) \phi_0(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \sin y dy \\ &= \sin x sost \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \\ &= \sin x \cos t \left[- \cos y \mid_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= \sin x \cos t \\ \phi_2(x) &= \int_a^b K(x,y) \phi_1(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \sin y \cos t dy \\ &= \sin x \cos^2 t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \\ &= \sin x \cos^2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(x) &= \int\limits_a^b K(x,y)\phi_2(y)dy \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \sin y \cos^2 t dt \\
&= \sin x \cos^3 t \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \\
&= \sin x \cos^3 t
\end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$\phi_n(x) = \sin x \cos^n t$$

şeklinde genel ifade bulunur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sin x + \lambda(\sin x \cos t) + \lambda^2(\sin x \cos^2 t) + \lambda^3(\sin x \cos^3 t) \\
&\quad +... + \lambda^n(\sin x \cos^n t) + ... \\
u(x) &= \sin x + \lambda \sin x \cos t \left[1 + \lambda \cos t + \lambda^2 \cos^2 t + ... + \lambda^{n-1} \cos^{n-1} t + ...\right]
\end{aligned}$$

köşeli parantezin içindeki ifadeye A diyelim. A serisi geometrik bir seridir ve bu serinin ortak çarpanı;

$$r = \lambda \cos t \quad \text{ve} \quad S = \frac{1}{1-\lambda \cos t}$$

olarak bulunur. Bulunan A değerini yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sin x + \lambda \cos t \sin x \frac{1}{1-\lambda \cos t} \\
&= \frac{\lambda \cos t \sin x - \lambda \sin x \cos t + \sin x}{1-\lambda \cos t} \\
&= \frac{\sin x}{1-\lambda \cos t}
\end{aligned}$$

çözümü bulunur.

2.1.5 ÇÖZÜCÜ ÇEKİRDEK(RESOLVANT)

Bir integral denklem genel olarak;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

biçiminde ifade edildiğini önceki kısımda görmüştük. Bu ifade dejenere çekirdeğin genel hal durumundan faydalanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D(x,t;\lambda) = \left[\left[\sum_{i=1}^{n} r_i(x) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij} \right] s_i(t) \right]$$

olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} f(t)dt$$

ifadesindeki $\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$ oranı $\Gamma(x,t;\lambda)$ ile gösterilir ve buna çözücü çekirdek veya Resolvant denir.Burada

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi integralde yerine koyarsak;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda) f(t)dt$$

biçiminde denklem ifade edilebilir.

2.1.6 ÇEKİRDEK İLE ÇÖZÜCÜ ÇEKİRDEK ARASINDAKİ İLİŞKİ

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denkleminde $t = y$ alarak, integrasyon değişkenini y ile gösterelim.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

ifadesi oluşur. Daha önceki ifadeleri karşılaştırırsak;

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)f(t)dt$$

yazılır. Sadeleştirmeler yapıldığında;

$$\int_a^b K(x, y) \left[f(y) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)f(t)dt \right] dy = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)f(t)dt$$

$$\int_a^b K(x, y) \left[f(y) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)f(t)dt \right] dy - \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)f(t)dt = 0$$

$$\int_a^b \left[K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, y)\Gamma(x, t; \lambda)dy - \Gamma(x, t; \lambda) \right] f(t)dt = 0$$

olarak bulunur. Burada $f(t) \neq 0$ olacaktır.Bu ise ifadenin sıfır olmaması ile mümkündür.Buna göre;

$$K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, y)\Gamma(x, t; \lambda)dy - \Gamma(x, t; \lambda) = 0$$

ifadesinden;

$$\Gamma(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_a^b K(x, y)\Gamma(x, t; \lambda)dy$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade $K(x, t)$ ile $\Gamma(x, t; \lambda)$ çözücü çekirdek arasındaki ilişkiyi belirleyen bağıntıdır.

2.1.7 ÇÖZÜCÜ ÇEKİRDEĞİN İTERE ÇEKİRDEKLER YARDIMIYLA BULUNMASI

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

Fredholm integral denklemini gözönüne alalım. Ardışık yaklaşımlar metodunun uygulanması ile;

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\lambda^n$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \int_a^b K(x,t)\phi_0(t) = \int_a^b K_1(x,t)f(t)dt \\
\phi_2(x) &= \int_a^b K(x,t)\phi_1(t) = \int_a^b K_2(x,t)f(t)dt \\
\phi_3(x) &= \int_a^b K(x,t)\phi_2(t) = \int_a^b K_3(x,t)f(t)dt
\end{aligned}$$

şeklinde olup $\phi_n(x)$ fonksiyonları itere çekirdek yardımıyla bulunabilir. $K_n(x)$ fonksiyonları ise $n = 2, 3, 4, ...$ olmak üzere;

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K_{n-1}(t_1,t)dt_1$$

şeklinde ifade edilir.

Resolvantı bulmak için

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\lambda^n$$

serisini kullanırsak

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\lambda^{n-1}$$

olur.Bu şekilde elde edilen seride düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda) f(t)dt$$

ifadesine ulaşılır.

Yukarıda görüldüğü gibi integral denklemin resolvantı itere çekirdek yardımıyla

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Örnek 2.1.10 $u(x) = x - 2\int_0^1 (x-t)u(t)dt$ $\Gamma(x,t;\lambda)$ *resolvantını oluşturmak suretiyle bu denklemin çözümünü bulalım.*

$K(x,t) = x-t$ çekirdek fonksiyonları için itere çekirdekler Örnek(2.1.4)'te bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
K_1(x,t) &= x-t \\
K_2(x,t) &= \tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3} \\
K_3(x,t) &= \tfrac{t-x}{12} \\
K_4(x,t) &= \tfrac{-1}{12}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3}) \\
K_5(x,t) &= \tfrac{x-t}{12^2} \\
K_6(x,t) &= \tfrac{1}{12^2}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3},) \\
. &\quad . \\
. &\quad . \\
. &\quad . \\
K_n(x,t) &= K_{2k-1}(x,t) = \tfrac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t) \\
K_n(x,t) &= K_{2k}(x,t) = \tfrac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})
\end{aligned}$$

olduklarını biliyoruz. Şimdi $\phi_n(x)$ ifadelerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \int_0^1 K_1(x,t)f(t)dt = \int_0^1 (x-t)dt = \tfrac{3x-2}{6} \\
\phi_2(x) &= \int_0^1 K_2(x,t)f(t)dt = \int_0^1 (\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})tdt = \tfrac{-x}{12} \\
\phi_3(x) &= \int_0^1 K_3(x,t)f(t)dt = \int_0^1 \tfrac{t-x}{12} tdt = \tfrac{3x-2}{6 \cdot 12} \\
\phi_4(x) &= \int_0^1 K_4(x,t)f(t)dt = \int_0^1 \tfrac{-1}{12}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})tdt = \tfrac{x}{12^2} \\
\phi_5(x) &= \int_0^1 K_5(x,t)f(t)dt = \int_0^1 \tfrac{x-t}{12^2} tdt = \tfrac{3x-2}{6 \cdot 12^2} \\
\phi_6(x) &= \int_0^1 K_6(x,t)f(t)dt = \int_0^1 \tfrac{1}{12}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})tdt = \tfrac{-x}{12}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + ... + \lambda^{n-1} K_n(x,t) + ...$$

şeklindedir.

$\lambda = 2$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\Gamma(x,t;\lambda) &= x - t = +(-2)(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3}) + (-2)^2(\tfrac{t-x}{12})t \\
&\quad +(-2)^3\left[\tfrac{-1}{12}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})\right] + (-2)^4(\tfrac{x-t}{12^2}) \\
&\quad +(-2)^5\left[\tfrac{1}{12^2}(\tfrac{x+t}{2} - xt - \tfrac{1}{3})\right] + ...
\end{aligned}$$

$$\Gamma(x,t;\lambda) = (1 - \frac{2^2}{12} + \frac{2^4}{12^2} - ...)(x-t) - 2(1 - \frac{2^2}{12} + \frac{2^4}{12^2} - ...)(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3})$$

olup burada parantez içindeki serinin ortak çarpanı

$$q = \frac{-2^2}{12} = \frac{-1}{3}$$

şeklinde bulunur. Bu geometrik serinin toplamı

$$S = \frac{1}{1 - (\frac{-1}{3})} = \frac{3}{4}$$

dir. Bu durumda resolvant

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{1}{2}(1 + 3t(x-1)$$

şeklinde bulunur.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda) f(t) dt$$

denkleminden yola çıkılırsa;

$$\begin{aligned} u(x) &= x - 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left\{1 + 3t(x-1)\right\} tdt \\ &= x - \int tdt - 3(x-1)\int t^2 dt \\ &= x - \frac{1}{2} - (x-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

çözümüne ulaşılır.

Bölüm 3

VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Volterra integral denklemleri uygulama alanı bakımından Fredholm integral denklemlerinden sonra en geniş alana sahiptir. Bundan dolayı üzerinde bir çok çalışma yapılmış ve çözüm yöntemleri üretilmiştir.

$$\int_a^x K(x,t)u(t)dt = \phi(x)$$

şeklindeki denklem I. Tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde bir bağıntıya II. Tip lineer Volterra integral denklemi denir. Burada λ bir parametredir.

Eğer $f(x) = 0$ ise;

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde denkleme ise II. Tip lineer homojen Volterra integral denklemi denir.

Volterra integral denklemlerini Fredholm integral denklemlerinden ayıran tek fark intgeral sınırlarından birinin x olmasıdır. Genel olarak sınırlar yukarıdaki denklemlerde olduğu gibidir. Diğer yandan x alt sınır olarak verilir ise,

$$\int_x^b K(x,t)u(t)dt = -\int_b^x K(x,t)u(t)dt$$

yazılabilecektir.

3.1 VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde Volterra integral denklemlerinin çözüm yöntemleri incelenerek, örnekler verilecektir.

3.1.1 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE İNTEGRAL DENKLEM ÇÖZÜM YÖNTEMİ

KONVOLİSYON: Eğer $t \geq 0$ için f ve g fonksiyonları parçalı sürekli ise, f ve g fonksiyonlarının konvolisyonu $f * g$ ile gösterilir [3] ve

$$f * g \;=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

integraliyle tanımlanır.

Örnek 3.1.1 *$f(\tau) = e^t$ ve $g(t)$=$\sin t$ fonkiyonlarının konvolisyonu iki defa kısmi integral alma ile,*

$$
\begin{aligned}
e^t * \sin t &= \int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau \\
&= e^\tau \sin(t-\tau) \Big|_0^t + \int_0^t e^\tau \cos(t-\tau)d\tau \\
&= [e^\tau \sin(t-\tau) + e^\tau \cos(t-\tau)] \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$e^t * \sin t = \frac{1}{2}(e^t - \sin t - \cos t)$$

şeklinde bulunur.

3.1.2 KONVOLİSYON TEOREMİ

Eğer $t \geq 0$ için $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden ise,

$\pounds\{f * g\} = \pounds\{f(t)\}\,\pounds\{g(t)\} = F(s)G(s)$ olarak bulunur.

Örnek 3.1.2 $\pounds\left\{\int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau\right\}$ *dönüşümünü hesaplayınız.*

$f(t) = e^t$ ve $g(t) = sint$ alınarak, konvolisyon teoreminden,

$$
\begin{aligned}
\pounds\left\{\int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau\right\} &= \pounds\left\{e^t\right\}\pounds\{\sin t\} \\
&= \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Eğer $\pounds^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise, integrallerin ter Laplace dönüşümü,

$$\pounds^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)du\right\} = \frac{\pounds^{-1}\{F(s)\}}{t} = \frac{f(t)}{t}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.3

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right\} = e^t - 1$$

olduğundan,

$$\pounds^{-1}\left\{\int_s^{\infty} (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u})du\right\} = \pounds^{-1}\left\{\ln(1-\frac{1}{s})\right\} = \frac{e^t-1}{t}$$

bulunur.

Konvolisyon teoremi,iki Laplace dönüşümünün çarpımının ters Laplace dönüşümünü bulmak için de kullanılabilir. Konvolisyon teoremi ters Laplace dönüşümü için,

$$f * g = \pounds^{-1}\{F(s)G(s)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 3.1.4 $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)(s+1)}\right\}$ *ters Laplace dönüşümünü konvolisyon teoreminden yararlanarak hesaplayalım.*

$$F(s) = \frac{1}{s-4} \qquad\qquad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

olarak alınırsa,

$$\pounds^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{4t},\ \ \pounds^{-1}\{G(s)\} = g(t) = e^{-t}$$

olduğundan, ters Laplace dönüşümü için konvolisyon teoreminden,

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)(s+1)}\right\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{4\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau \\
&= e^{-\tau}\int_0^t e^{5\tau}d\tau = e^{-\tau}\frac{1}{5}e^{5\tau}\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{5}e^{4t} - \frac{1}{5}e^{-t}
\end{aligned}$$

bulunur.

3.1.3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Volterra integral denklemleri, g(t) ve h(t) verilmiş fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

şeklindedir. Konvolisyon yöntemi kullanılarak Volterra integral denklemleri çözülebilir.

Örnek 3.1.5 $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ *Volterra integral denklemini çözelim.*

Laplace dönüşümü yapılırsa,konvolisyon teoreminden,

$$\begin{aligned}
\pounds\{f(t)\} &= 3\pounds\left\{t^2\right\} - \pounds\{f(t)\}\,3\pounds\left\{e^t\right\} \\
&= 3\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \pounds\{f(t)\}\,3\pounds\left\{e^t\right\} \\
F(s) &= \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s)\frac{1}{s-1}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\left[1+\frac{1}{s-1}\right]F(s) &= \frac{6}{s^3}-\frac{1}{s+1}\\ F(s) &= \frac{6(s-1)}{s^4}-\frac{(s-1)}{s(s+1)}\\ &= \frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}f(t) &= 3\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}-\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2\pounds^{-1}\frac{1}{s+1}\\ &= 3t^2+-t^3+1-2e^{-t}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

3.1.4 VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNDE ÇÖZÜCÜ ÇEKİRDEK

II. Tip Volterra integral denkleminin,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde olan ifadesinde $K(x,t)$ fonksiyonu $0\le x\le a, 0\le t\le x$ ve $f(x)$ fonksiyonu $0\le x\le a$ aralıklarında süreklidirler [1].

Bu denklemi tam seri şeklinde açalım.

$$u(x)=u_0(x)+\lambda u_1(x)+\lambda^2u_2(x)+...+\lambda^n u_n(x)+...$$

Bu seri λ parametresine göre bir kuvvet serisidir. Bu seriyi yukarıdaki integral denklemde $u(x)$ yerine yazalım;

$$\begin{aligned} & u_0(x)+\lambda u_1(x)+\lambda^2 u_2(x)+...+\lambda^n u_n(x)+... \\ = \quad & f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\left\{u_0(t)+\lambda u_1(t)+\lambda^2 u_2(t)+...+\lambda^n u_n(t)+...\right\}dt \end{aligned}$$

Eşitliğin sağ yanını λ'ya göre düzenler ve λ'nın aynı kuvvetli terimleri için eşitliğin her iki yanındaki terimleri karşılıklı olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u_1(x) &= \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt \\ u_2(x) &= \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt \\ ... & \quad ... \\ u_n(x) &= \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt \end{aligned}$$

bulunur. $u_0(x)=f(x)$ olduğundan bununla ikinci bağıntıya gidilirse;

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt$$

olur. Benzer şekilde $u_2(x)$ için;

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt \\ &= \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt \\ &= \int_0^x f(t_1)dt_1\int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt \\ &= \int_0^x K_{(2)}(x,t_1)f(t_1)dt_1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada,

$$K_{(2)}(x,t_1)=\int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt$$

demektir.

İşlemleri böyle sürdürdüğümüz durumda genel olarak $(n = 1, 2, 3, ...)$ için,

$$u_n(x) = \int_0^x K_{(n)}(x,t) f(t) dt$$

olduğu görülecektir.

$K_{(n)}(x,t)$ fonksiyonları itere çekirdekler olarak adlandırılmaktadırlar. Bu fonksiyonlar $(n = 1, 2, 3, ...)$ için,

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_n(z,t) dz$$

rekürans bağıntıları yardımıyla tanımlanmışlardır.

Seri açılımı yukarıdaki işlemler sonucunda,

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_0^x K_{(i)}(x,t) f(t) dt$$

şeklinde yazılabilir.

$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t)$ serisi $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu sürekli olarak kabul edildiğinden mutlak ve düzgün yakınsak olup buna Resolvant veya Çözücü Çekirdek denir. Fredholm integral denklemlerinde olduğu gibi $\Gamma(x,t;\lambda)$ ile gösterilmektedir.

Bu durumda

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t)$$

yazılabilmektedir.

İtere çekirdekler ve çözücü çekirdek integral denklemdeki alt sınır değerinden bağımsızdırlar.

$\Gamma(x,t;\lambda)$ resolvantı için integral denklemden fonksiyonel bir bağıntı elde etmek mümkündür.

$$\Gamma(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_0^x K(x,s) \Gamma(s,t;\lambda) ds$$

dir.

Bu bağıntı sınır değerleri dışında Fredholm integral denklemleri ile aynı özellikleri taşımaktadır. Fredholm integral denklemlerinde elde edilen özelliklerden farklı bir yapıda özellik yoktur. Önemli olan fark sınır değerde ve bundan dolayı ortaya çıkan sonuçlardadır.

$\Gamma(x,t;\lambda)$ hesaplanabildiği takdirde Volterra integral denkleminin çözümü,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x,t;\lambda) f(t)dt$$

olarak bulunacaktır. Bu ifade Fredholm integral denklemlerinde bulunan ifadeler ile benzerdir.

Örnek 3.1.6 $u(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} u(t)dt$ *integral denkleminin çözümünü resolvant yardımıyla çözelim.*

$K(x,t) = e^{x^2-t^2}$ olup $\lambda = 1$ dir. İtere çekirdekleri hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
K_1(x,t) &= K(x,t) = e^{x^2-t^2} \\
K_2(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_1(z,t)dz \\
&= \int_t^x e^{x^2-z^2} \cdot e^{z^2-t^2} dz \\
&= \int_t^x e^{x^2-t^2} dz \\
&= e^{x^2-t^2} \int_t^x dz \\
&= (x-t)e^{x^2-t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{(3)}(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_{(2)}(z,t)dz \\
&= \int_t^x e^{x^2-z^2}(z-t)e^{z^2-t^2}dz \\
&= e^{x^2-t^2} \int (z-t)dz \\
&= \tfrac{(x-t)^2}{2} e^{x^2-t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{(4)}(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K_{(3)}(z,t)dz \\
&= \int_t^x e^{x^2-z^2}\tfrac{(z-t)^2}{2}e^{z^2-t^2}dz \\
&= \tfrac{1}{2}e^{x^2-t^2}\int_t^x (z-t)^2 dz \\
&= \tfrac{(x-t)^3}{2\cdot 3}e^{x^2-t^2}
\end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse;

$$K_{(n+1)}(x,t) = \frac{(x-t)^n}{n!}e^{x^2-t^2}$$

olarak bulunur. Dolayısyla bu problem için resolvant;

$$\Gamma(x,t;1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-t)^n}{n!}e^{x^2-t^2}$$

$$\Gamma(x,t;1) = e^{x-t}\cdot e^{x^2-t^2}$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

Resolvant bu şekilde ifade edildiğinde integral denklem;

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t}e^{x^2-t^2}e^{t^2}dt \\
u(x) &= e^{x^2} + e^{x^2+x}\int_0^x e^{-t}dt
\end{aligned}$$

şeklini alır. Sonuç olarak

$$u(x) = e^{x^2+x}$$

çözümüne ulaşılır.

3.2 VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN GAMA-BETA FONKSİYONLARINDAN YARARLANILARAK ÇÖZÜLMESİ

3.2.1 GAMA VE BETA FONKSİYONLARI

Gama ve Beta fonksiyonları başlı başına bir inceleme konusudur. Burada Volterra integral denklemlerini çözmemiz için yeterli olan bilgiyi inceleyeceğiz ve daha fazla detaya girmeyeceğiz.

Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \ (1.1)$$

şeklinde bir integral ile tanımlanmıştır. Burada x , $Re(x) > 0$ olan herhangi bir kompleks sayıdır. Özel olarak x=1 için,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \ (1.2)$$

olur. (1.1) fonksiyonuna kısmi integrasyon uygulayalım.

$$e^t = u \ , t^{x-1} dt = dv$$

alınırsa,

$$du = -e^{-t} dt, v = \frac{1}{x} t^x$$

olup

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

bulunur. Buradan Gama fonksiyonları için önemli olan

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntı kullanılarak Gama fonksiyonlarının nümerik değerler elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2 = 2! \\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 6 = 3!
\end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse, genel olarak pozitif n sayısı için,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

bulunur.

Beta Fonksiyonu,

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. Burada $Re\, m > 0$, $Re\, n > 0$ olarak alınacaktır. Beta ve Gama fonksiyonları arasında öenmli bir bağıntı,

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

şeklindedir. Ayrıca kolayca görüleceği gibi,Beta fonkisyonu için,

$$B(n,m) = B(m,n)$$

özelliği mevcuttur.

3.2.2 GAMA VE BETA FONKSİYONLARI İLE VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$\int\limits_0^x (x-t)^n u(t)dt = x^m$ şeklindeki Volterra I. Tip integral denklemini göz önüne alalım. Bu tip denklemler Gama-Beta fonksiyonları yardımı ile çözülebilmektedir.

Yukarıdaki integral denklem denklem için $m \geq 0, n > -1$ olup m ve n reel sayılardır. Bu integral denklemin her iki yanını $r > -1$ ve reel olmak üzere $(z-x)^r$ ile çarpalım ve x'e göre 0 ile z arasında integralini alalım.

$$\int\limits_0^z (z-x)^r \left[\int\limits_0^x (x-t)^n u(t)dt \right] dx = \int\limits_0^z x^m (z-x)^r dx$$

olur. Burada $x = vz$ alalım. Eşitliğin sağındaki integral $(m+r+1 > m \geq 0)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \int\limits_0^z x^m (z-x)^r dx &= z^{m+r+1} \int\limits_0^1 v^m (1-v)^r dv \\ &= z^{m+r+1} B(m+1, r+1) \\ &= z^{m+r+1} \tfrac{\Gamma(m+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)} \end{aligned}$$

sonucunu verir.

Eşitliğin birinci yanının hesabı yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int\limits_0^z (z-x)^r \left[\int\limits_0^x (x-t)^n u(t)dt \right] dx &= \int\limits_0^z \left[\int\limits_t^x (z-x)^r (x-t)^n u(t)dt \right] dx \\ &= \int\limits_0^z \left[\int\limits_t^z (z-x)^r (x-t)^n dx \right] u(t)dt \end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenerek yazılabilir. Burada $x = t + v(z-t)$ alalım,

$$\begin{aligned} \int (z-x)^r (x-t)^n dx &= (z-t)^{n+r+1} \int v^n (1-v)^r dv \\ &= (z-t)^{n+r+1} B(n+1, r+1) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)} \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}$$

çarpanı sabit olacağından integral dışına atılarak ve $\Gamma(r+1)$ her iki yandan sadeleştirilerek,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+r+2)}\int(z-t)^{n+r+1}u(t)dt = z^{m+r+1}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

bulunur. $n+r+1 = h$ olacak şekilde negatif olmayan bir h sayısı bulunacaktır. Buna göre,

$\Gamma(n+r+2) = \Gamma(h+1)$ olur. Diğer taraftan $r = h-n-1$ yazılacağından $m+r+2 = m+h-n+1$ olup,

$$\Gamma(m+r+2) = \Gamma(m+h+-n+1)$$

demektir. İfade yeniden düzenlenirse,

$$\int(z-t)^h u(t)dt = z^{m+h-n}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(h+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}$$

olarak bulunur.

Gama-Beta fonksiyonların özelliklerinden dolayı $\Gamma(h+1) = h!$ alınırsa;

$$\int\frac{(z-t)^h}{h!}u(t)dt = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h+-n+1)}z^{m+h-n}$$

şeklinde yazar ve z ye göre her iki tarafın $h+1$ defa türevi alınırsa,

$$u(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)}z^{m-n-1}$$

bulunur. Bulunan bu ifade integral denklemin çözümüdür. Dolayısıyla Volterra integral denkleminin Γ fonksiyonu yardımıyla çözülebileceği anlaşılmaktadır.

Örnek 3.2.1 $\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2u(t)dt = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ *integral denklemin çözümünü* Γ *fonksiyonu yardımı ile çözelim.*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ...$$

olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + ...$$

yazılabilir. Bu kullanılarak integral denklem,

$$\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt = \frac{2}{4!}x^4 - \frac{2}{6!}x^6 + \frac{2}{8!}x^8 - ...$$

şeklinde yazılabilecektir. Böylece ikinci yan cebirsel toplam şekline dönüştürülmüş olup bunun her terimi için ayrı ayrı çözüm araştılacaktır. Terimler sırasına göre ara çözümler $u_{1(x)}, u_2(x), ...$ ise integral denklemin çözümü,

$$u(x) = \frac{2}{4!}u_1(x) - \frac{2}{6!}u_2(x) + \frac{2}{8!}u_3(x) - \frac{2}{10!}u_4(x) + ...$$

toplamı ile bulunabilecektir. Burada ara çözümleri tek hesaplamamız gerekir.

$u_1(x)$ için $n = 2$, $m = 4$ ve

$$\begin{aligned} \Gamma(m+1) &= \Gamma(5) = 4! \\ \Gamma(n+1) &= \Gamma(3) = 2! \\ \Gamma(m-n) &= \Gamma(2) = 1! \\ m-n-1 &= 4-2-1 = 1 \end{aligned}$$

olup

$$u_1(x) = \frac{4!}{2!1!}x$$

bulunur.

$u_2(x)$ için $n = 2$ ve $m = 6$ ve

$$\begin{aligned} \Gamma(m+1) &= \Gamma(7) = 6! \\ \Gamma(n+1) &= \Gamma(3) = 2! \\ \Gamma(m-n) &= \Gamma(6) = 5! \\ m-n &= 8-2-1 = 5 \end{aligned}$$

olup

$$u_3(x) = \frac{8!}{2!5!}x^5$$

bulunur.

$u_4(x)$ için $n = 2, \quad m = 10$

$$\begin{aligned}
\Gamma(m+1) &= \Gamma(11) = 10! \\
\Gamma(n+1) &= \Gamma(3) = 2! \\
\Gamma(m-n) &= \Gamma(8) = 7! \\
m-n-1 &= 10-2-1 = 7
\end{aligned}$$

olup

$$u_4(x) = \frac{10!}{2!7!}x^7$$

bulunur. Bulduğumuz değerleri yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
u(x) &= \tfrac{2}{4!}\tfrac{4!}{2!1}x - \tfrac{2}{6!}\tfrac{6!}{2!3!}x^3 + \tfrac{2}{8!}\tfrac{8!}{2!5!}x^5 - \tfrac{2}{10!}\tfrac{10!}{2!7!}x^7 + ... \\
&= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + ... \\
&= \sin x
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2.3 İNTEGRAL DENKLEMLERLE DİFERANSİYEL DENKLEMLER ARASINDAKİ İLİŞKİ

Başlangıç koşullarıyla verilmiş, değişken veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem, Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilmektedir [4]. Dolayısıyla, bir integral denklem, başlangıç koşulları için sağlanan diferansiyel denklemin bir sınır değer problemi olarak da gözöününe alınabilir.

3.2.4 DİFERANSİYEL DENKLEMİN İNTEGRAL DENKLEME DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \quad (3.2.1)$$

lineer diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Burada (i=1,2,...,n) olmak üzere a$_i(x)$ fonksiyonları için başlangıç noktası bir düzgün noktadır. Ayrıca sayıları n tane olan ,

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, ..., y^{(n-1)}(o) = c_{n-1} \quad (3.2.2)$$

başlangıç koşullarının da verilmiş olduklarını farzedelim.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \quad (3.2.3)$$

dönüşümünü uygulayalım. Bu ifade,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) = u(x)$$
$$\int_0^x d(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) = \int_0^x u(x)dx$$
$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x)dx + c_{n-1} \quad (3.2.4)$$

şeklinde hesaplanarak türev mertebesi bir mertebe düşürülmüş olur. Benzer şekilde hareket edilerek,

$$\begin{aligned}
\int_0^x d\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) &= \int_0^x \left[\int_0^x u(x)dx + c_{n-1}\right] dx \\
\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_{n-1}\int_0^x dx + c_{n-2} \\
&= \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_{n-1}x + c_{n-2} \quad (3.2.5)
\end{aligned}$$

ve böylece devam edilirse;

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} &= \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x)dxdxdx + \frac{1}{2!}c_{n-1}x^2 + c_{n-2}x + c_{n-3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy}{dx} &= \int_0^x ...(n-1)... \int_0^x u(x)dx...dx + \frac{1}{(n-2)!}c_{n-1}x^{n-2} \\
&+ \frac{1}{(n-3)!}c_{n-2}x^{n-3} + ... + c_1
\end{aligned}$$

ve bir kere daha integral alınarak,

$$\begin{aligned}
y &= \int_0^x ...(n)... \int_0^x u(x)dx...dx + \frac{1}{(n-1)!}c_{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2} \\
&+ ... + c_1(x) + c_0 \quad (3.2.6)
\end{aligned}$$

bulunur.

Burada da görüldüğü gibi sık sık çok katlı (n katlı) integrallerle işlem yapmak zorunda kalınacaktır. Bunu göstermek üzere,

$$\int ...(n)... \int$$

şeklindeki notasyon kullanılacaktır. İntegraller arasındaki (n) , katlılık mertabesini belirtmektedir. Bulduğumuz ifadeleri (3.2.1) denkleminde yerine yazalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}
& u(x) + a_1(x)\int_0^x u(x)dx + c_{n-1}a_1(x) + a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx + c_{n-1}xa_2(x) \\
& +c_{n-2}a_2(x) + a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx\frac{1}{2!}c_{n-1}x^2a_3(x) + c_{n-2}xa_3(x) \\
& +c_{n-3}a_3(x) + ... + a_{n-1}(x)\int_0^x ...(n-1)... \int_0^x u(x)dx...dx + \\
& +\frac{1}{(n-2)!}c_{n-1}x^{n-2}a_{n-1}(x) + \frac{1}{(n-3)!}c_{n-2}x^{n-3}a_{n-1}(x) + ... + c_1a_{n-1}(x) \\
& +a_n(x)\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(x)dx...dx + \frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}a_n(x) \\
& +\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}a_n(x) + ... + c_1xa_n(x) + c_0a_{n(x)} \\
= \; & f(x) \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi de

$$\begin{aligned}
& u(x) + a_1(x)\int_0^x u(x)dx + a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx + a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx \\
& +... + a_n(x)\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(x)dx...dx = f(x) - c_{n-1}a_1(x) - c_{n-1}xa_2(x) \\
& -... - \frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}a_n(x) - ... - c_{n-2}a_2(x) - c_{n-2}xa_3(x) \\
& -... - \frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}a_n(x) - ... - c_1a_{n-1}(x) - c_1xa_n(x) - c_0a_n(x) \quad (3.2.8)
\end{aligned}$$

şeklinde düzenleyelim. Eşitliğin sağ yanı x in bir fonksiyonu olup bunu F(x) ile gösterelim. Burada ,

$$\begin{aligned} a_1(x) + a_2(x) + \frac{x^2}{2!}a_3(x) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}a_n(x) &= f_{n-1}(x) \\ a_{2(x)} + xa_3(x) + ... + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}a_n(x) &= f_{n-2}(x) \ (3.2.9) \end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse,

$$\begin{aligned} a_{n-1}(x) + xa_n(x) &= f_1(x) \\ a_n(x) &= f_0(x) \end{aligned}$$

ile göstermek suretiyle,

$$F(x) = f(x) - \{c_{n-1}f_{n-1}(x) + c_{n-2}f_{n-2}(x) + ... + c_1f_1(x) + c_0f_0(x)\} \quad (3.2.10)$$

olduğu görülür. Eşitliğin sol yanı ise,

$$\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(t)dt...dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t) \quad (3.2.11)$$

bağıntısı yardımıyla tek katlı integral olarak ifade edilebilmektedir. Buna göre,

$$u(x) + a_1(x)\int_0^x u(t)dx + ... + a_n(x)\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(x)dx...dx = F(x) \ (3.2.12)$$

bağıntısı (3.2.11) ifadesi yardımıyla

$$\begin{aligned} & u(x) + a_1(x)\int_0^x u(t)dt + a_2(x)\int_0^x (x-t)u(t) + ... + a_n(x)\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt \\ = \; & F(x) \ (3.2.13) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilecektir.Bu ifade ise belirli intagrelin özelliklerinden yararlanılarak,

$$u(x)+\int_0^x\left[a_1(x)+a_2(x)(x-t)+a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!}+...+a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]u(t)dt$$
$$= \quad F(x) \ (3.2.14)$$

olarak yazılabilir. Burada köşeli parantez içerisindeki ifade K(x,t) fonksiyonu olarak gözönüne alınırsa,

$$K(x,t)=a_1(x)+a_2(x)(x-t)+a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!}+...+a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \ (3.2.15)$$

olur. Bu çekirdek fonksiyon olup yerine yazılrsa,

$$u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=F(x) \ (3.2.16)$$

şeklindeki II.tür Volterra integral denklemine ulaşılır. Sonuçta (3.2.1) diferansiyel denklemi integral denkleme dönüştürülmüş olmaktadır.

Örnek 3.2.2

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x) \ \textit{(3.2.17)}$$

diferansiyel denklemini,

$$y(0)=c_0, y'(0)=c_1$$

başlangıç koşulları altında integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=u(x)$$

diyelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{dy'}{dx}$$

olup

$$\frac{dy'}{dx} = u(x)$$

den

$$\begin{aligned}
\int_0^x dy' &= \int_0^x u(x)dx \\
y' \Big|_0^x &= \int_0^x u(x)dx \\
y'(x) - y'(0) &= \int_0^x u(x)dx \\
y'(x) - c_1 &= \int_0^x u(x)dx \\
y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \int_0^x u(x)dx + c_1
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\begin{aligned}
\int_0^x dy &= \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_1 \int_0^x dx \\
y \Big|_0^x &= \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_1 x \Big|_0^x \\
y(x) - y(0) &= \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_1(x-0) \\
y(x) &= \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_1 x + c_0
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.11) bağıntısı gereğince,

$$\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

yazılabileceğinden bunlar (3.2.17) denkleminde yerine konularak,

$$\begin{aligned}(u(x)+p(x)\left[\int_0^x u(x)dx + c_1\right] + q(x)\left[\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx + c_1x + c_0\right] &= f(x)\\ u(x)+p(x)\int_0^x u(t)dt + c_1p(x) + q(x)\int_0^x (x-t)u(t)dt + (c_1x+c_0)q(x) &= f(x)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade,

$$u(x) + \int_0^x \left[p(x) + (x-t)q(x)\right]u(t)dt = f(x) - \left[c_1p(x) + c_0q(x) + c_1xq(x)\right]$$

şeklinde düzenlenir ve

$$p(x) + (x-t)q(x) = K(x,t)$$

$$f(x) - \{c_1p(x) + c_0q(x) + c_1xq(x)\} = F(x)$$

ile gösterilirse (3.2.17) diferansiyel denkleminin,

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

şeklinde bir Volterra integral denklemine dönüştüğü görülür.

3.2.5 İNTEGRAL DENKLEMLERİN DİFERANSİYEL DENKLEME DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Bir integral denklemin bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilmesi için "LEIBNITZ FORMÜLÜ"nün uygulanması yeterlidir. Bu formül integral işareti altında türev alma işlemini gerçekleştirir. Leibnitz formülü,

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt + F\left\{(x, B(x)\right\}\frac{dB}{dx} - F\left\{x, A(x)\right\}\frac{dA}{dx}$$

olup, burada A(x) ve B(x)' in sabitler olması halinde,

$$\frac{dA}{dx} = 0, \frac{dB}{dx} = 0$$

olacağından formül,

$$\frac{d}{dx}\int_{A}^{B} F(x,t)dt = \int_{A}^{B} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt$$

olarak kullanılır.

Örnek 3.2.3

$$u(x) = x + \lambda\int_{0}^{x} xu(t)dt$$

integral denklemini diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Her iki yanın türevi alınarak,

$$\begin{aligned}
\frac{du(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}x + \lambda\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} xu(t)dt \\
u'(x) &= 1 + \lambda\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} xu(t)dt
\end{aligned}$$

bulunur. Leibnitz formülünü uygulanarak,

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} xu(t)dt = \int_{0}^{x} u(t)dt + xu(x)$$

bulunacağından

$$u'(x) = 1 + \lambda \left[u'(x)u(t)dt + xu(x) \right]$$

olur. İfadenin içinde henüz integral bulunduğundan, bundan kurtulmak üzere tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{du'(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}(1) + \lambda \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt + \lambda \frac{d}{dx}\{xu(x)\} \\ u''(x) &= 0 + \lambda u(x) + \lambda \{u(x) + xu'(x)\} \end{aligned}$$

ve buda düzenlenerek aranan diferansiyel denklem,

$$u''(x) - \lambda x u'(x) - 2\lambda u(x) = 0$$

şeklinde bulunur.

3.2.6 ÇÖZÜCÜ ÇEKİRDEĞİN DİFERANSİYEL DENKLEM YARDIMIYLA BULUNMASI

Volterra integral denkleminin resolvantının bulunmasının bir diğer yolu ise diferansiyel denklem yardımı ile bulunmasıdır.

$$K(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + ... + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

denklemi $(x-t)$ nin kuvvetlerinden oluşmaktadır. Resolvant bulununcada Fredholm integral denklemi için bulunan resolvant ifadesindeki gibi yol ile çözüm bulunacaktır. $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ fonksiyonları $(0, a)$ aralığında sürekli ve tanımlıdır.

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + ... + a_{n-1}(x)g \right] = 0$$

diferensiyel denkleminin,

$$g \Big|_{x=t} = \frac{dg}{dx}\Big|_{x=t} = \frac{d^2 g}{dx^2}\Big|_{x=t} = ... = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\Big|_{x=t} = 0$$

$$\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\Big|_{x=t} = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan ve çözümü $g(x, t; \lambda)$ gibi bir fonksiyon olsun. Bu durumda resolvant;

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu $(t - x)$ in bir fonksiyonu olarak

$$K(x, t) = b_0(t) + b_1(t)(t - x) + ... + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t - x)^{n-1}$$

şeklinde verilmiş ise resolvant;

$$\Gamma(x, t; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(t, x, \lambda)}{dt^n}$$

eşitliği ile ifade edilecektir. Burada $g(t, x; \lambda)$ fonksiyonu başlangıç koşullarını sağlayan;

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda \left[b_0(t) \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + b_1(t) \frac{d^{n-2} g}{dt^{n-2}} + ... + b_{n-1}(t) g \right] = 0$$

diferensiyel denklemin çözümüdür.

Yukarıda gözüktüğü gibi resolvant diferensiyel denklem yardımı ile bulunabildiğinde, diferensiyel denklemler için çözüm yöntemleri resolvant için kullanılabilir.

Örnek 3.2.4 *Çekirdek fonksiyonu $K(x, t) = x - t$ olan bir Volterra integral denklemine ait resolvantı diferensiyel denklemler yöntemi ile bulalım.* $(\lambda = 1)$

$K(x, t) = x - t$ fonkiyonu yukarıda verilen genel denkleme bakıldığında $a_1(x) = 1$ olması gerektiği ve ve diğer katsayıların sıfır olduğu anlaşılır. Buna göre $K(x, t) = x - t$ çekirdeğine sahip denklem için oluşturulacak olan diferensiyel denklem;

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - a_0(x) \frac{dg}{dx} - a_1(x) g = 0$$

şeklinde oluşturulur. $a_0(x) = 0$, $a_1(x) = 1$ yerlerine koyulursa;

$$\frac{d^2g}{dx^2} - g = 0$$

denklemi hesaplanır. Bu denklemin çözümü $g(x,t) = g(x,t;1)$ olduğundan;

$$\frac{d^2g(x,t;1)}{dx^2} - g(x,t;1) = 0$$

olarak yazılabilir. Difrensiyel denklem çözüm yöntemlerini kullanarak denklemin çözümü,

$$g(x,t;1) = c_1e^{-x} + c_2e^{x}$$

olur.Bulunacak çözüm aynı zamanda t'nin de fonksiyonu olması gerektiğinden, c_1 ve c_2 keyfi sabitleri t'nin birbirinden bağımsız birer fonksiyonu olarak alabiliriz. Bu durumda çözüm;

$$g(x,t;1) = c_1(t)e^{-x} + c_2(t)e^{x}$$

şeklinde t ye bağlı olarak yazılır. Sonuç olarak;

$$\frac{dg(x,t;1)}{dx} = -c_1(t)e^{-x} + c_2(t)e^{x}$$

olup bu iki ifade birlikte alınarak başlangıç koşulları uygulanırsa;

$$\begin{aligned} c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{t} &= 0 \\ -c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{t} &= 1 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü ise;

$$c_1(t) = \frac{-1}{2}e^{t} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{1}{2}e^{-t}$$

dir.

Bütün bulunan değerleri yerine koyarsak;

$$\begin{aligned} g(x,t;1) &= \tfrac{-1}{2}e^{t}e^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{-t}e^{x} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[e^{x-t} - e^{-(x-t)}\right] \\ &= sh(x-t) \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla problemimiz koşullarına uyan resolvant

$$\Gamma(x,t;1) = \frac{d^2(g,x;1)}{dx^2}$$

şeklinde olacağından aranan çözüm

$$\Gamma(x,t;1) = sh(x-t)$$

bulunur.

Kaynaklar

[1] AKSOY Y., İntegral Denklemler, Cilt I, Y.T.Ü Yayınları, No: FE.DK.-98.0343, İstanbul, (1998).

[2] MUSAYEV B. , ALP M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya-2000.

[3] ÖZER M.N. , ESER D., Diferensiyel Denklemler, Birlik Yayıncılık, Eskişehir-2000.

[4] BAYIN S.Ş , Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, ODTÜ Yayıncılık, Eylül-2000.

[5] ATKINSON K.E , The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, University of Iowa, 1997.