

**İKİ-PARAMETRE İLE DEFORME  
KUANTUM GRUP BOZON GAZININ  
DÜŞÜK SICAKLIKLARDAKİ TERMODİNAMIĞI**

**Bayram DEVİREN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
FİZİK ANABİLİM DALI  
2005**

**LOW TEMPERATURE THERMODYNAMICS  
OF A TWO-PARAMETER DEFORMED QUANTUM GROUP  
BOSON GAS**

**Bayram DEVİREN**

**M. Sc. Thesis  
Physics Department  
2005**

**İKİ-PARAMETRE İLE DEFORME KUANTUM GRUP BOZON GAZININ  
DÜŞÜK SICAKLIKLARDAKİ TERMODİNAMİĞİ**

**Bayram DEVİREN**

**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Fizik Anabilim Dalı  
Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.**

**Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Abdullah ALĞIN**

**2005**

Bayram DEVİREN'in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı “**İKİ-PARAMETRE İLE DEFORME KUANTUM GRUP BOZON GAZININ DÜŞÜK SICAKLIKLARDAKİ TERMODİNAMİĞİ**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye:

Üye:

Üye:

*Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .....gün  
ve.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.*

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU  
Enstitü Müdürü

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

---

ÖZET.....	iii
SUMMARY.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. İDEAL BOSE GAZININ TERMO-İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ.....	6
2.1. Giriş.....	6
2.2. Büyük Kanonik Dağılımda İdeal Bose Gazının Termodinamik Özellikleri.....	8
2.3. İdeal Bose Gazının Düşük ve Yüksek Sıcaklıklardaki Davranışı.....	13
3. STANDART KUANTUM HARMONİK OSİLATÖR.....	24
3.1. Giriş.....	24
3.2. Standart Kuantum Harmonik Osilatör ve $SU(N)$ -Değişmezliği.....	25
3.3. İki-Parametre ile Deforme Bozonik Osilatör Cebiri (Fibonacci Osilatörleri).....	36
3.4. Fibonacci Osilatörlerinin Değişmezlik Grubu.....	37

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

---

4. İKİ-PARAMETERE İLE DEFORME KUANTUM GRUP BOZON GAZININ İSTATİSTİK MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ.....	40
4.1. Giriş.....	40
4.2. $SU_{q_1/q_2}(2)$ -Bozon Modeli.....	41
4.3. İki-Parametre ile Deforme Kuantum Grup Bozon Gazının Düşük Sıcaklıklardaki Davranışı.....	43
4.4. İki-Parametre ile Deforme Kuantum Grup Bozon Gazının Yüksek Sıcaklıklardaki Davranışı.....	49
4.5. $SU_{q_1/q_2}(2)$ -Bozon Gazının Düşük ve Yüksek Sıcaklıklardaki Isı Kapasitesi.....	51
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	54
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	57

## ÖZET

Bu çalışmada öncelikle ideal Bose gazının bazı temel termo-istatistiksel özellikleri incelendi. Daha sonra standart kuantum harmonik osilatör probleminden başlanarak,  $SU_{q_1/q_2}(2)$  kuantum grubu altında değişmezlik özelliği sergileyen iki-parametre ile deforme bozonik osilatör cebiri çalışıldı.

Bu çalışmanın temel amacı;  $SU_{q_1/q_2}(2)$  kuantum grubu altında değişmezlik sergileyen Fibonacci osilatörlerinin oluşturduğu bir bozon gazının termodinamik ve istatistiksel özelliklerinin incelenmesidir. Bu yolla elde edilen sonuçların inceleme altındaki deforme bir bozon gazının istatistiksel mekaniksel özelliklerine kuantum grup değişmezliğinin yeni olası etkilerini vereceği umulmaktadır.

Termodinamik limitte,  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -invariant bozonik Hamiltoniyen vasıtasıyla sistemin bazı önemli istatistiksel ve termodinamiksel fonksiyonları hesaplandı. Düşük ve yüksek sıcaklık limitlerinde sistemin ısı sığası,  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin fonksiyonları cinsinden elde edildi.

Serbest bozon gazının kritik sıcaklığından daha yüksek bir kritik sıcaklığa sahip iki-parametre ile genelleştirilmiş bozon gazının ısı sığası,  $\lambda$ -geçiş davranışı özelliğine sahiptir. Ayrıca iki-parametre ile genelleştirilmiş bozon modelinde Bose-Einstein yoğunlaşmasının gerçekleşme koşulları da tartışıldı. Bununla birlikte bu modelin,  $q_1 = q_2 = 1$  limitinde serbest bozon gazı sonuçlarını verdiği gösterildi.

## SUMMARY

In this study, some basic thermo-statistical properties of an ideal Bose gas are first reviewed. After starting from the standard quantum harmonic oscillator problem, the two-parameter deformed bosonic oscillator algebra invariant under the quantum group  $SU_{q_1/q_2}(2)$  is studied.

The main objective of this study is to investigate the thermodynamical and statistical properties of a bosonic gas including Fibonacci oscillators which are invariant under the quantum group  $SU_{q_1/q_2}(2)$ . It is aimed that the results obtained in this way will provide new possible effects of quantum group invariance to statistical mechanical properties of the deformed boson gas under consideration.

In the thermodynamical limit, several statistical and thermodynamical functions of the system through a  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -invariant bosonic Hamiltonian are calculated. In the low and high temperature limits, the heat capacity of the system is obtained in terms of some functions of the deformation parameters  $q_1$  and  $q_2$ .

At the critical temperature being higher than that of the free boson gas, the heat capacity of the two-parameter generalized boson gas exhibits a  $\lambda$ -point transition behaviour. Furthermore, the conditions under which the Bose-Einstein condensation would occur are discussed in the present two-parameter generalized boson model. However, it is proved that this model gives the free boson gas results in the limit  $q_1 = q_2 = 1$ .



## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın her aşamasında beni destek ve yardımlarıyla yönlendiren, büyük bir özen ve sabırla bana yol gösterip, her alanda gelişimimi tamamlamamı sağlayan sevgili hocam ve tez danışmanım, Yrd. Doç. Dr. Abdullah ALĞIN'a, üç-boyutlu grafiklerin çiziminde yardımcı olan Araş. Gör. Dr. Bayram Çetişli'ye teşekkürlerimi sunarım.

Bugünkü konumuma gelmemde en büyük rolü olan ve hayatımın her aşamasında her türlü destekleriyle yanımda bulunup, yardımlarını esirgemeyen çok değerli aileme sonsuz şükran ve en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunuyorum.

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa No
Şekil 2.1: $g_{3/2}(z)$ fonksiyonu.....	15
Şekil 2.2: $\bar{p} = \bar{0}$ seviyesinde ortalama yerleşme sayısı.....	18
Şekil 2.3: İdeal Bose gazının ısı sığası.....	21
Şekil 4.1: $1 \leq q_1 \leq 8, 1 \leq q_2 \leq 8$ şartını sağlayan $q_1$ ve $q_2$ model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak $(q_1, q_2)$ -deforme $\tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2)$ ve $\tilde{g}_{5/2}(1, q_1, q_2)$ fonksiyonları.....	46
Şekil 4.2: $q_1$ ve $q_2$ model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak $(q_1, q_2)$ -deforme kritik sıcaklık $T_c(q_1, q_2)$ ile deforme olmamış sıcaklığın $T_c(1, 1)$ 'in $T_c(q_1, q_2)/T_c(1, 1)$ oranı.....	47
Şekil 4.3: $1 \leq q_1 \leq 3$ ve $q_2$ deformasyon parametrelerinin belirli değerleri için $T/T_c(q_1, q_2)$ 'nin bir fonksiyonu olarak $C_v / \langle N \rangle > k$ ısı sığası.....	52
Şekil 4.4: $1 \leq q_1 \leq 4$ ve $q_2$ deformasyon parametrelerinin belirli değerleri için $T/T_c(q_1, q_2)$ 'nin bir fonksiyonu olarak $C_v / \langle N \rangle > k$ ısı sığası.....	52

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

---

$a$	Yoketme operatörü
$a^+$	Yaratma operatörü
$m$	Kütle
$N$	Sayı operatörü
$h$	Evrensel Planck sabiti
$\hbar$	$h/2\pi$
$\omega$	Açısal frekans
$\psi$	Dalga fonksiyonu
$P_x$	Momentum
$(q_1, q_2)$	Reel veya kompleks deformasyon parametreleri
${}^4\text{He}$	Helyum atomu
$\text{H}_2$	Hidrojen atomu
$\nu$	Özgül hacim
$\xi(x)$	Riemann-zeta fonksiyonu
$\mu$	Kimyasal potansiyel
$k$	Hooke sabiti
$T$	Sıcaklık
$\hat{\sigma}_i$	Pauli spin matrisi
$T_c$	Kritik sıcaklık
$\nu_c$	Kritik hacim
$\lambda_{dB}$	de Broglie dalga boyu
$\lambda_c$	Kritik termal dalga boyu
$ n\rangle$	Özket
$ 0\rangle$	Taban durum

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devamı)

---

$E_n$	n. seviyedeki enerji özdeğeri
$V$	Hacim
$\hat{J}_i$	Açısal momentum operatörü
$[N]$	Toplam deforme sayı operatörü
$(c_i, c_i^*)$	Fibonacci yoketme ve yaratma operatörleri
$N_0$	Taban durumdaki parçacık sayısı
$U(z, V, T)$	İç enerji fonksiyonu
$e^-$	Elektron
$p$	Proton
$n$	Nötron
$\langle n_p \rangle$	Ortalama parçacık sayısı
$\langle E \rangle$	Ortalama enerji
$C_V$	Isı sığası
$P$	Basınç
$z$	Fugasite (fugacity)
$Z(z, V, T)$	Büyük üleşim fonksiyonu
$SU(N)$	$N$ -boyutlu özel üniter grup
$SU_q(2)$	İki-boyutta özel üniter kuantum grubu
$GL_{p,q}(2)$	İki-boyutta genel lineer kuantum grubu
$su_q(2)$	İki-boyutlu özel üniter kuantum Lie cebiri
$SO(3)$	Üç boyutlu özel ortagonal grup
$SU_r(2)$	İki-boyutta özel üniter kuantum grubu ( $r = q_1/q_2$ )
AC	Arık-Coon
PW	Pusz-Woronowicz
MB	Macfarlane-Biedenharn

## 1. GİRİŞ

Klasik mekanikte bir fiziksel sistemle ilgili simetriler, korunum yasalarına işaret eder. Örneğin açısal momentum korunumu, uzaysal dönmeler altında “invaryans (değişmezlik)” demek olan dönme simetrisinin direk bir sonucudur. Geçtiğimiz yüzyılın ikinci yarısında Wigner gibi tanınmış bilim adamları, invaryanslığın yeni olayların anlaşılması ve bunlara uygun teorilerin gelişiminde çok önemli bir anahtar rol üstleneceğini belirtmişlerdir [Arfken ve Weber,1995]. Kuantum mekaniğinde açısal momentum kavramı ve spin, merkezi bir öneme sahiptir. Bunların genelleştirmeleri olan “izospin” nükleer fizikte, “tat, çeşni (flavour)” simetrisi parçacık fiziğinde, teorileri kurma ve çözmede vazgeçilemeyen araçlardandır.

İncelenen bir problemde simetri operasyonlarının seti “bir grup” oluşturur. Grup teorisi, invaryantları ve simetrileri çalışmada matematiksel bir araçtır. Grup teorisi fizikçiler tarafından çok kullanılan parite, açısal momentum, uzaysal yansımalar, geometri gibi prensiplerin formülasyonu ve birleştirilmesine yardımcı olur.

Örneğin geometri düşünülürse, grup teorisi burada temel bir role sahiptir. Oklid geometrisinde, iki vektörün skaler çarpımı ötelemeler altında değişmezdir. Simetriler, ilgili geometrinin karakteristiğidir. Özel rölativite teorisinde metrik veya dört vektörlerin skaler çarpımı Oklid geometrisinden farklıdır [Arfken ve Weber, 1995]. Örneğin metrik artık pozitif tanımlı değildir ve Lorentz dönüşümleri altında invaryantlık gösterir.

Öte yandan bir kristal için düşünülürse, simetri grubu sadece açılarının kesikli değerlerinde, dönmelerin (veya yansımaların) sonlu bir sayısını içerir. Böyle “kesikli” veya “sonlu” grupların teorisi kristalografi ve yoğun madde fiziğinin gelişimi için kullanışlı bir araçtır. Bundan başka dönmeler sürekli olarak değişen açılara bağlı oldukları zaman (örneğin, Euler açıları gibi) dönme grupları sonsuz sayıda elemana sahip olurlar. Bunlara “sürekli” gruplar (Lie grupları) adı verilir. Lie grup ve bunlara

eşlik eden cebirler, fizikte özellikle parçacık fiziğinde iç simetriler bağlamında son derece önemlidir. Esasen bu tezdeki araştırma konusunun amacı, klasik Lie gruplarından iki-boyutta özel üniter grup  $SU(2)$ 'nin, iki parametre ile deformasyonu olan  $SU_{q_1/q_2}(2)$  kuantum grubu altında değişmezlik sergileyen Fibonacci osilatörlerinin oluşturduğu bir bozon gazının termodinamik ve istatistiksel özelliklerinin incelenmesidir. Bu yolla deforme bir bozon gazının istatistiksel mekaniksel özelliklerine kuantum grup değişmezliğinin yeni olası etkilerini elde etmek amaçlanmaktadır.

Fizikte gruplar genellikle, sistemi değişmez (yani invaryant) bırakan operasyonların seti olarak ortaya çıkarlar. Bu aynı zamanda simetri'nde bir tanımlamasıdır. Gerçektende simetri, grup transformasyonları altında bir sistemin Hamiltoniyen'inin değişmezliği olarak tanımlanabilir [Arfken ve Weber,1995]. Bu anlamda da simetri, klasik mekanikte ve hatta kuantum mekaniğinde çok daha önemli bir yer tutar.

Mikro evren de esasen iki tip parçacık sınıflaması söz konusudur: Bozonlar ve Fermiyonlar. Bu parçacık ailelerinden herhangi birini içeren sistemlerin fiziksel özellikleri kuantum mekaniğinin prensipleri çerçevesinde çalışılabilir. Bu yapılırken eldeki problemin sahip olduğu simetri unsurlarından da yararlanmak çok kolaylık sağlar. Bu simetriler klasik Lie grup ve cebirleri ile tanımlanırlar. Bunların bir veya daha fazla parametre ile genelleştirilmiş halleri olan kuantum grupları ve onlara eşlik eden cebirleri son yıllarda matematiksel fizikten yüksek enerji fiziğine kadar çok geniş bir spektrumda uygulama alanı bulmuştur [Jimbo, 1986; Drinfeld, 1987; Faddeev et al., 1988; Alvarez-Gaume et al., 1989; de Vega, 1989; Pasquier ve Saleur, 1990; Woronowicz, 1997; Manin, 1989; Wess ve Zumino, 1990; Sviratcheva et al., 2004; Ballesteros et al., 2002; Bonatsos ve Daskoloyannis, 1999].

Bir kuantum grubu için cebirsel yapı ( $q$ -deforme cebir adı verilen), bu gruba karşılık gelen klasik Lie cebirinin bir parametre ile genelleştirilmiş halidir. Standart

kuantum harmonik osilatör cebirinin en basit deformasyonu olan  $q$ -bozonik osilatör cebiri ilk olarak Coon ve çalışma grubu tarafından ortaya atılmıştır [Coon et al., 1972; Arik ve Coon, 1976]. Bu  $q$ -bozonik osilatör cebiri daha sonra kuantum gruplarının doğmasında büyük bir rol oynadı (Bölüm 3.3). Ayrıca Macfarlane ve Biedenharn, iki bağımsız yeni  $q$ -deforme harmonik osilatör cinsinden  $su_q(2)$  kuantum cebirinin yeni bir gerçekleşimini ortaya koydular [Macfarlane, 1989; Biedenharn, 1989]. Bunun için açıl momentum kuantum teorisinin Schwinger yaklaşımından faydalandılar. Böylelikle  $SU(2)$  açıl momentum'un kuantum teorisindeki Schwinger oluşumunu genelleştirdiler [Schwinger, 1951].

Diğer taraftan uygulama alanlarının başka bir boyutu, istatistiksel mekanikte odaklanmıştır. Örneğin kuantum grupları ile genelleştirilmiş istatistiksel mekanik formülasyonu arasındaki olası ilişkiler çalışılmıştır [Tsallis, 1994; Abe, 1997; Lavagno ve Swamy, 2000; Lavagno ve Swamy, 2002; Ozeren et al., 1998]. Bu arada bozonik harmonik osilatör cebirinin  $q$ -deformasyonu olan  $q$ -osilatörlerinin kanonik dağılımını göz önüne alarak deformasyon parametresi  $q$ 'nun fiziksel yorumunu bulabilmek için bazı çalışmalarda yapılmıştır [Martin-Delgado, 1991; Neskovic ve Urosevic, 1992; Bonatsos, 1992]. Ayrıca  $q$ -deforme bozon ve fermiyonların oluşturduğu gazların istatistiksel ve termodinamik özellikleri de literatürde kapsamlı biçimde incelenmiştir [Monteiro et al., 1994; Lee ve Yu, 1990; Tuszynski et al., 1993; Chaichian et al., 1993; Kaniadakis et al., 1997; Su et al., 2003; Chang ve Chen, 2003; Song et al., 1993]. Dahası etkileşimsiz deforme bozonların oluşturduğu gazın termodinamik karakteristiklerinin iki parametrelili genelleştirilmiş halleri de çalışılmıştır [Gong, 1995; Daoud ve Kibler, 1995; Adamska ve Gavrilik, 2004].

$SU_q(2)$  kuantum grubu simetrisine sahip olan bir parametre ile deforme bozon gazının yüksek ve alçak sıcaklıklardaki termodinamiği son yıllarda özellikle Ubriaco tarafından çalışılmıştır [Ubriaco, 1997; Ubriaco, 1998; Ubriaco, 1998]. Bu çalışmalarda

sistemin bozonik parçacıkları arasındaki etkileşmeler,  $SU_q(2)$  kuantum grubu değişmezliği sergileyen osilatör cebiri aracılığıyla belirlenmiştir. Aslında bu etkileşmeler sistemin Hamiltonyen'inin kuantum grup değişmezliğinden kaynaklanmaktadır. Bu çalışmaların sonuçları, daha sonraki yıllarda iki-parametre ile deforme kuantum grup bozon ve fermiyon gazı modellerine genelleştirilmiştir [Algin, 2002; Algin et al., 2002; Arik ve Kornfilt, 2002; Kornfilt, 2005]. Bununla birlikte, farklı bir bozonik genelleştirme Jellal tarafından,  $p = q^*$ ,  $(p, q) \in C$  koşulu altında tanımlanan, iki-parametrelili kuantum grup  $GL_{p,q}(2)$ -değişmezliği sergileyen bozon gazı göz önüne alarak çalışılmıştır [Jellal, 2002].

Özellikle, parçacık cebiri  $SU_{p/q}(2)$  kuantum grubu altında invariant olan fermiyonik bir gazın yüksek sıcaklıklardaki termodinamik davranışı can alıcı bir öneme sahiptir [Algin et al., 2002]. Bu çalışmada, iki boyutlu uzay için  $SU_{p/q}(2)$ -fermion modelinin  $(p, q)$  deformasyon parametrelerinin bazı kritik değerlerinde sergilediği davranış, ilginç bir şekilde anyonik tipli bir davranışa benzediği gösterilmiştir. Ne var ki böyle bir davranışı, ne tek parametre ile deforme  $SU_q(2)$ -fermion gazı modelinde [Ubrico, 1997] ne de serbest fermion gaz modelinde bulmak mümkün değildir. Dolayısıyla böylesi ilginç sonuçlar,  $SU_{p/q}(2)$ -fermion modelinin bozonik versiyonunun termodinamik ve istatistiksel yönlerini çalışmak için bizi motive etmiştir.

İkinci bölümde, bazı temel kavramlar ile birlikte ideal Bose gazının termostatistiksel özellikleri incelenmiştir. Özellikle büyük kanonik dağılımda ideal Bose gazı için partiyon fonksiyonundan başlanarak, termodinamik özellikleri ele alınmıştır. Bu özellikleri incelerken yakın geçmişte doğrudan deneyle gözlenen Bose-Einstein yoğunlaşması üzerinde de durulmuştur. İleriki bölümlerdeki çalışmamız için gerekli temel termodinamik özellikler vurgulanmıştır.



Üçüncü bölümde, standart kuantum harmonik osilatörden başlayarak, önce standart kuantum harmonik osilatör cebirini ve sergilediği değişmezlik grubunu, ardından da standart kuantum harmonik osilatör cebirinin iki parametrelili deformasyonu olan Fibonacci osilatörleri incelenmiştir [Arik et al.,1992]. Ayrıca bu osilatörlerin değişmezlik grupları da açıklanmıştır. Bu tez araştırma konusunda gerekli olacak temel kuantum mekaniksel özellikler özetlenmiştir.

Bu çalışmanın asıl orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde de, iki-parametre ile deforme kuantum grup bozon gazının istatistik mekaniksel özellikleri incelenmiştir. Özellikle bu iki-parametre ile deforme kuantum grup bozon gazının düşük ve yüksek sıcaklıklardaki davranışları üzerinde durulmuş ve bu yolla elde edilen sonuçlar ortaya konmuştur.

Son bölümde de, dördüncü bölümde bulunan  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -bozon gazının düşük ve yüksek sıcaklıklardaki termodinamik davranışı ile ilgili sonuçlar tartışılacaktır.

## 2. İDEAL BOSE GAZININ TERMO-İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

### 2.1 GİRİŞ

Makroskopik bir bütün olarak ele alındığında, madde ve enerjiyle ilgili olarak karşımıza çıkan tüm özellikler, bu yapıyı oluşturan atom, molekül, iyon, elektron, foton gibi çok sayıda mikroskobik unsurun tek tek davranışları ve bu davranışların kökeninde yer alan belirli fizik ilkeleri ile çok yakından ilişkilidir. Her biri çok çeşitli ve birbirinden farklı etmenler altında birbiriyle değişik biçimlerde etkileşebilen bu mikroskobik unsurların tek tek hareketlerine bakıldığında her birinin davranışlarında tam bir gelişigüzellik ve karmaşanın ortaya çıktığı gözlenir. Kapalı bir kap içerisindeki gaz moleküllerinin, metal içindeki serbest elektronların ve bir ışık kaynağını terk eden fotonların tek tek davranışlarındaki karmaşa buna örnektir. Oysa bir an için, bakış açımızı genişletip sözünü ettiğimiz unsurların mümkün olabildiğince büyük sayıdaki bir bölümünün hareket ve davranışları toplu olarak incelenirse, yukarıda sözü edilen hareket ve davranışlardaki karmaşanın yerini belirli bir kısım davranış ilkelerine bıraktıkları görülür. Gerçekten, bütün taneciklerin, kendi aralarında veya diğer taneciklerle olan etkileşimlerinde uymak zorunda oldukları belirli fizik kuralları mevcut olup, bu husus, ancak çok sayıdaki unsurun genel davranışlarının belirli bir incelemesiyle ortaya konulabilir. Nitekim, madde ve enerjiyle ilgili, algılayabildiğimiz yada ölçebildiğimiz tüm özellikler, maddesel yapıyı oluşturan bu unsurların tek tek davranışları nicesinde değil tamamının veya çok büyük kısmının katıldıkları ortak davranışlar neticesinde ortaya çıkmaktadır. Burada sözü edilen genel davranış biçimlerinin belirlenmesi ise, adına istatistik fizik dediğimiz bilim dalının getirdiği belirli kurallara, diğer bir deyişle, olasılık ve dağılım ilkelerine bağlı olarak ortaya konulabilir. Fiziksel olaylara olan bakış açımızı bu şekilde değiştirdiğimiz zaman, klasik ve modern fiziğin, olaylara olan yaklaşım farklılığının giderek daha belirgin bir biçimde karşımıza çıktığı görülmektedir [Gündüz, 1999].

Parçacıkların yer değiştirmeleri sırasında  $\psi$  dalga fonksiyonu ya aynı kalır (simetrik) yahut da işaret değiştirir (anti-simetrik):

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\dots q_i \dots q_j \dots) = +\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\dots q_j \dots q_i \dots) \quad (\text{simetrik})$$

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\dots q_i \dots q_j \dots) = -\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\dots q_j \dots q_i \dots) \quad (\text{anti-simetrik})$$

Spin ile simetri arasındaki ilişkiyi 1940 yılında Pauli görelilik teorisine dayanarak buldu. Buna göre,

- Spinleri tamsayı ( $\hbar$  Planck sabiti biriminde 0,1,2,...) olan sistemlerin dalga fonksiyonu simetrik olur. Bu özelliği ilk bulan Hintli fizikçi S. N. BOSE (1858-1937)'nin anısına bozon adı verilen bu parçacıklar arasında fotonlar,  $^4\text{He}$  atomları,  $\alpha$  tanecikleri (Helyum çekirdekleri), hidrojen molekölü ( $\text{H}_2$ ) sayılabilir [Karaoğlu, 2003].
- Spinleri yarım tamsayı ( $\hbar$  Planck sabiti biriminde 1/2, 3/2, ...) olan parçacık sistemlerinin dalga fonksiyonu anti-simetrik olur. İtalyan fizikçi Enrico Fermi (1901-1954)'nin anısına fermiyon adı verilen bu parçacıklar arasında elektron ( $e^-$ ), proton (p), nötron (n) ve tek sayıda tanecikli çekirdekler sayılabilir [Karaoğlu, 2003].

Kuantum mekaniğinin öngördüğü bu simetri özelliği, istatistik mekanikte önemli rol oynamaktadır. Bu bölümde büyük kanonik dağılımında birbiriyle etkileşmeyen bağımsız bozonların oluşturduğu ideal Bose gazının termo-istatistiksel özelliklerini ele aldıktan sonra, ideal Bose gazının düşük ve yüksek sıcaklıklardaki davranışı incelenecektir. Bu davranışları incelerken yakın geçmişte doğrudan deneyle gözlenen Bose-Einstein yoğunlaşması olayı da açıklanacaktır.

## 2.2 BÜYÜK KANONİK DAĞILIMDA İDEAL BOSE GAZININ TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde gerek faz değişimleri ve kimyasal tepkimeler, gerekse kuantum istatistiği incelemelerinde kolaylık sağlayan büyük kanonik küme konusu ele alınacaktır. Büyük kanonik kümede, termodinamik bir sistemin çevresiyle hem enerji hemde parçacık alışverişi yapabildiği, fakat sistemin toplam enerjisinin ve parçacık sayısının sabit olduğunu varsayılacaktır [Apaydın, 2004; Huang, 1987; Greiner et al., 1995]. Bunların matematiksel ifadeleri;

$$E\{n_p\} = \sum_p \varepsilon_p n_p \quad (2.1)$$

$$N = \sum_p n_p \quad (2.2)$$

biçimindedir. Sistemin enerji düzeyini belirleyen  $n_p$  kuantum sayısı olmak üzere ideal gazlar için üleşim (partisyon) fonksiyonu,

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_p\}} g\{n_p\} e^{-\beta E\{n_p\}} \quad (2.3)$$

bağıntısı ile tanımlanabilir. Burada  $g\{n_p\}$  aynı enerji değerine sahip olan enerji düzeyindeki enerji durumlarının sayısını, yani çakışma sayısını belirlemektedir. Bose gazı için  $n_p$  gibi tam sayılar olmak üzere karşılık gelen haller,

$$g\{n_p\} = 1 \quad (2.4)$$

biçiminde ifade edilebilir. Toplam enerji ve parçacık sayısını göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
 Z(z, V, T) &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum_p n_p = N}} z^N e^{-\beta \varepsilon \{n_p\}} \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum_p n_p = N}} \prod_p (ze^{-\beta \varepsilon})^{n_p}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

biçiminde  $Z(z, V, T)$  büyük üleşim fonksiyonu yazılabilir. Burada fugasite (fugacity) adı verilen  $z$  değişkeni

$$z = e^{\beta \mu} \tag{2.6}$$

bağıntısıyla tanımlanır. (2.5) bağıntısında ifade edilen enerji ve parçacık sayısı değişen bu sistemin iç enerjisi ve parçacık sayısı, her iki büyüklüğün ortalama değerleri olacaktır. Şimdi her  $n_p$ 'yi birbirinden bağımsız olarak ele alınarak, (2.5) bağıntısı, daha genel bir biçimde yazılabilir:

$$Z(z, V, T) = \prod_p \left[ \sum_n (ze^{-\beta \varepsilon})^n \right] \tag{2.7}$$

burada  $\sum_n$  toplamı Bose gazı için  $n = 0, 1, 2, \dots$  değerleri üzerinden yapılır.

Bozon parçacıkları aynı bir  $r$  indisli kuantum durumunda istenildiği sayıda bulunabilir. O halde, parçacıkların doluluk sayısı  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$  değerlerini alabilir. Buradan üleşim fonksiyonu (2.7) denkleminde hareketle yazıldığında, oluşan geometrik serinin toplamı sonucunda

$$Z(z, V, T) = \prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}} \quad (2.8)$$

elde edilir [Karaoğlu, 2003].

Dengedeki bir sistemin termodinamik değişkenleri arasındaki ilişkiyi veren hal denklemi, incelenen ideal Bose gazı için (2.8) yardımıyla,

$$\frac{PV}{kT} = \log Z(z, V, T) = - \sum_p \log(1 - ze^{-\beta\epsilon_p}) \quad (2.9)$$

biçiminde elde edilir. Sistemin toplam parçacık sayısı ise şöyle ifade edilebilir [Karaoğlu, 2003]:

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log Z(z, V, T) = \sum_p \frac{ze^{-\beta\epsilon_p}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}} \quad (2.10)$$

Ortalama parçacık sayısı  $\langle n_p \rangle$  ise,

$$\begin{aligned} \langle n_p \rangle &\equiv \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum_p n_p = N}} n_p e^{-\beta \sum_p \epsilon_p n_p} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_p} \log Z \\ &= \frac{ze^{-\beta\epsilon_p}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde olup, bunun (2.10) denklemi olduğu görülür [Huang, 1987].

Bu noktada Bose gazının genel istatistiksel özelliklerini içine alan Bose-Einstein istatistiğinden söz etmek uygun olacaktır. Bose-Einstein istatistiğine uyan parçacıklar için bir Pauli dışarlama ilkesi yoktur. Bu nedenle, alçak sıcaklıklardaki davranışları

fermionlardan [Apaydın, 2004] çok farklı olur. Birbirinden uzak kalmak bir yana alçak sıcaklıklarda hep birlikte taban durumuna inmeye çalışırlar. Yine klasik istatistik mekanikle açıklanamayan kuantum etkiler bozon sistemlerinde de deneysel olarak gözlenir. Örneğin, fotonların karacisim ışınma spektrumu, sıvı helyumun ( $^4\text{He}$  izotopunun)  $2.17 \text{ } ^0\text{K}$  sıcaklığı altında süper-akışkan faza geçişi gibi olaylar sıralanabilir [Apaydın, 2004].

(2.9) ve (2.10) bağıntılarındaki  $p$  sayısı çok büyük olduğunda, hal denklemini veren  $P$  ve toplam parçacık sayısı  $N$  ifadeleri de çok büyük olur. Diğer bir deyişle, kesikli değerler arasındaki fark sifıra gider ve sürekli bir değişken sayılabilir. Bu durumda  $p$  üzerinden toplam yerine, sürekli değişken  $p$  üzerinden integral alınabilir.  $V \rightarrow \infty$  olduğunda  $\bar{p}$  'nin alabileceği değerler de sürekli olur. Bunun ifadesi,

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 p \quad (2.12)$$

gibidir. İdeal Bose gazının hal denklemleri (2.9), (2.10) ve (2.12)'den yararlanılarak elde edilebilir [Huang,1987]:

$$\frac{P}{kT} = -\frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \log(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) - \frac{1}{V} \log(1 - z) \quad (2.13a)$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{z^{-1} e^{-\beta p^2/2m} - 1} + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z} \quad (2.13b)$$

burada  $\nu = V/N$  'dir. Bu hal denklemlerinin çözümleri,

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \log(1 - z) \quad (2.14a)$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \quad (2.14b)$$

formunda yazılabilir. Burada  $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2/mkT)}$  termal dalga boyudur ve

$$g_{5/2}(z) \equiv -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \log(1 - ze^{-x^2}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{5/2}} \quad (2.15)$$

$$g_{3/2}(z) \equiv z \frac{\partial}{\partial z} g_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} \quad (2.16)$$

ile tanımlanır. (2.11) bağıntısı düşünüldüğünde (2.14b)'deki sağdan ikinci terim olan  $\frac{z}{1-z}$  niceliği  $\vec{p} = \vec{0}$ 'lı tek-parçacık seviyesi için  $\langle n_0 \rangle$  ortalama yerleşme sayısını verir yani,

$$\frac{z}{1-z} = \langle n_0 \rangle \quad (2.17)$$

dir. Örneğin, eğer sistemdeki bütün parçacıkların sonlu bir kesri  $\vec{p} = \vec{0}$  tek-parçacık seviyesini işgal ediyorsa veya  $N_0/V$  sonlu bir sayısı ise bu terim (2.14) bağıntısına katkıda bulunur.

Hem Bose hem de Fermi gazı için iç enerji,

$$U(z, V, T) = \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum_p n_p = N}} \left[ e^{-\beta \sum_p \varepsilon_p n_p} \sum_p \varepsilon_p n_p \right] = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\log Z(z, V, T)] \quad (2.18)$$



bağıntısından bulunabilir. (2.9) hal denklemine (2.14b) bağıntısından,

$$\frac{1}{V}U(z, V, T) = \frac{3}{2} \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (2.19)$$

elde edilebilir.  $N$ ,  $V$  ve  $T$  cinsinden  $U$ 'yu ifade etmek için fugasite (fugacity)'yi yok edilmelidir. Sonuç çok karmaşık bir fonksiyon olabilir. (2.14) ve (2.19) denklemlerini karşılaştırarak  $U$ 'nun basınçla doğrudan ilişkili olduğu,

$$U = \frac{3}{2} PV \quad (2.20)$$

görülebilir [Huang, 1987].

### 2.3 İDEAL BOSE GAZININ DÜŞÜK VE YÜKSEK SICAKLIKLARDAKİ DAVRANIŞI

$T=0$  K sıcaklığında bozonların tümünün tek parçacık taban enerji durumunda olabilecekleri bilinmektedir. Sıcaklık yükseldikçe bozonlar uyarılmış enerji durumlarına geçebilirler. O halde, bir bozon gazında bozonların tümünün uyarılmış enerji durumlarında bulunabilecekleri bir sıcaklık olabilir. Tanım olarak, bozonların tümünün uyarılmış enerji durumlarında bulunduğu sıcaklığa Bose sıcaklığı yada Bose-Einstein yoğunlaşma sıcaklığı denir. Bunu tam anlamıyla ifade etmek için (2.13) bağıntısındaki ideal Bose gazı hal denklemini ifadesinden yola çıkılabilir. (2.14) denklemleri  $V$  hacmini kapsayan  $m$  kütleli  $N$  tane parçacığın oluşturduğu ideal Bose gazının hal denklemini vermektedir. Hal denklemlerinin özellikleri üzerinde daha detaylı çalışmak için, sıcaklığın bir fonksiyonu olarak  $z$  fugasite (fugacity)'sini ve (2.14b)'nin çözümünden elde edilen  $\nu = V/N$  özgül hacmi bulunmalıdır. Bunu elde etmek için

$$g_n(z) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n} \quad (2.21)$$

fonksiyonlarının özel durumları olan  $g_{3/2}(z)$  ve  $g_{5/2}(z)$  fonksiyonlarının özellikleri çalışılmalıdır [Huang, 1987]. Bu fonksiyonlar daha önce [Robinson, 1951]'de çalışılmış ve [London, 1954]'de tablolaştırılmıştır.

$z$ 'nin monoton olarak artan fonksiyonu  $g_{3/2}(z)$ , 0 ve 1 arasındaki  $z$ 'nin gerçek değerleri için sınırlı ve pozitifdir. Bu denklemi ifade etmek için fugasite (fugacity)'nin  $0 \leq z \leq 1$  aralığı gereklidir. Küçük  $z$ 'ler için (2.14b) bağıntısı kuvvet serisine açarak  $g_{3/2}(z)$  kolayca bulunabilir:

$$g_{3/2}(z) = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \dots \quad (2.22)$$

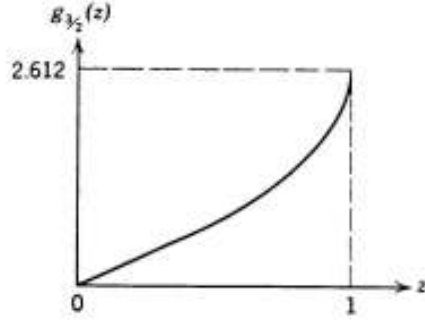
Bu fonksiyon  $z = 1$ 'de türevi ayrılır ancak değeri sonludur [Huang, 1987]:

$$g_{3/2}(1) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.612 \quad (2.23)$$

buradaki  $\zeta(x)$ , Riemann zeta fonksiyonudur. 0 ile 1 arasındaki bütün  $z$ 'ler için

$$g_{3/2}(z) \leq 2.612 \quad (2.24)$$

olur.  $g_{3/2}(z)$ 'nin  $0 \leq z \leq 1$  için grafiği Şekil 2.1'de gösterilmektedir.



Şekil 2.1:  $g_{3/2}(z)$  fonksiyonu [Huang,1987].

(2.14b) bağıntısının sağ tarafındaki ikinci terimin yerine  $\frac{z}{1-z} = \langle n_0 \rangle$  ortalama yerleşme sayısı ifadesi yerleştirilirse;

$$\lambda^3 \frac{\langle n_0 \rangle}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(z) \quad (2.25)$$

formlu bir denklem elde edilir. Bu bağıntıda  $\langle n_0 \rangle / V > 0$  olduğunda,

$$\frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(1) \quad (2.26)$$

olacaktır [Huang,1987]. Bu ise,  $\vec{p} = \vec{0}$  seviyesine parçacıkların sonlu bir kesrinin yerleşeceği anlamına gelir. Bu yerleşme olayı Bose-Einstein yoğunlaşması olarak bilinmektedir [Karaoğlu, 2003]. (2.26) koşulu, Bose-Einstein yoğunlaşmasının geçiş bölgesine karşılık gelen ideal Bose gazının termodinamik  $P-v-T$  uzayının bir alt uzayını tanımlar. Bu bölgede sistem, fazın birinin  $\vec{p} = \vec{0}$ , diğerinin  $\vec{p} \neq \vec{0}$ 'lı

parçacıkların oluşturduğu iki termo fazın karışımı olarak düşünülebilir. Yani (2.26) bölgesi yoğunlaşma bölgesine karşılık gelir. Bu,

$$\frac{\lambda^3}{\nu} = g_{3/2}(1) \quad (2.27)$$

şeklindeki iki-boyutlu yüzey ile  $P - \nu - T$ 'nin kalan kısmına karşılık gelir. Verilen bir  $\nu$  özgül hacmi için, (2.27) bağıntısından  $T_c$  kritik sıcaklığı bulunabilir.

$$\lambda_c^3 = \nu g_{3/2}(1) \quad (2.28)$$

olup,  $\lambda_c = \sqrt{(2\pi\hbar^2/mkT_c)}$  kritik termal dalga boyu ifadesinden yararlanılarak,

$$kT_c = \frac{2\pi\hbar^2/m}{[\nu g_{3/2}(1)]^{2/3}} \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır. Verilen bir  $T$  sıcaklığı için (2.27) bağıntısı  $\nu_c$  kritik hacmini tanımlar:

$$\nu_c = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1)} \quad (2.30)$$

$T_c$  ve  $\nu_c$  cinsinden yoğunlaşma bölgesi,  $T < T_c$  olan bölgedir.  $V \rightarrow \infty$  limitinde, fugasite (fugacity),

$$z = \begin{cases} 1 & \left( \frac{\lambda^3}{\nu} \geq g_{3/2}(1) \right) \\ g_{3/2}(1)'nin kökü = \lambda^3/\nu & \left( \frac{\lambda^3}{\nu} \leq g_{3/2}(1) \right) \end{cases} \quad (2.31)$$

olur [Huang, 1987]. (2.14b) bağıntısı daha genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{\langle n_0 \rangle}{V} + \left( \frac{\langle n_1 \rangle}{V} + \frac{\langle n_2 \rangle}{V} + \dots \right) \quad (2.32)$$

Parantezdeki her terim  $V \rightarrow \infty$  'da sifira yaklaşır [Huang, 1987].  $\langle n_1 \rangle / V$  ele alınırsa,

$$\frac{\langle n_1 \rangle}{V} = \frac{1}{V} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_1} - 1} \leq \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_1} - 1} \quad (2.33)$$

Burada  $2m\varepsilon_1 = (2\pi\hbar)^2 \frac{l_1}{V^{2/3}}$ ,  $l_1$  ise hepsi sıfır olmayan üç tamsayının karelerinin toplamıdır. Bundan dolayı,

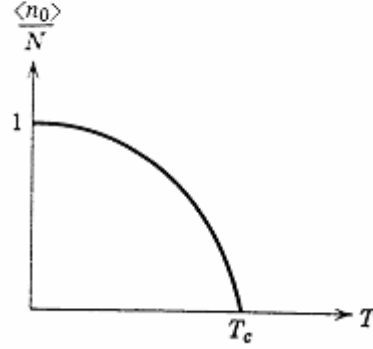
$$\frac{\langle n_1 \rangle}{V} \leq \frac{1}{V} \frac{2m\beta V^{2/3}}{(2\pi\hbar)^2 \beta^2 l_1} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0 \quad (2.34)$$

Bu ilk denklemin geçerli olduğunu gösterir.  $z$  ifadesi ve  $\langle n_0 \rangle = \frac{z}{1-z}$  'den;

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 0 & \left( \frac{\lambda^3}{\nu} \geq g_{3/2}(1) \right) \\ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = 1 - \frac{\nu}{\nu_c} & \left( \frac{\lambda^3}{\nu} \leq g_{3/2}(1) \right) \end{cases} \quad (2.35)$$

$\langle n_0 \rangle / N$  'nin grafiği Şekil 2.2'de gösterilmektedir.  $T < T_c$  olduğunda sistemdeki parçacıkların sonlu bir sayısı,  $\vec{p} = \vec{0}$  'lı tek bir seviyeyi işgal ettiğini göstermektedir.

Diğer taraftan (2.35) bağıntısı  $\langle n_p \rangle / N$ 'nin  $\bar{p} \neq \vec{0}$  için her zaman sıfır olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.2.  $\bar{p} = \vec{0}$  seviyesinde ortalama yerleşme sayısı [Huang,1987].

Dolayısıyla aşağıdaki durumlar söylenebilir:

1. **Durum:**  $T > T_c$  için, tüm parçacıkların sonlu bir kesri tarafından tek bir seviye işgal edilemez.
2. **Durum:** Parçacıklar tüm seviyeler üzerine dağılırlar.
3. **Durum:**  $T < T_c$  için,  $1 - (T/T_c)^{3/2}$  sonlu kesri,  $\bar{p} = \vec{0}$ 'lı seviyeyi işgal ederken, parçacıkların kalan kısmı  $\bar{p} \neq \vec{0}$  seviyesine yerleşirler.
4. **Durum:** Mutlak sıfırda bütün parçacıklar  $\bar{p} = \vec{0}$  seviyesini işgal ederler.

Bose-Einstein yoğunlaşması bazen “momentum uzayında yoğunlaşma” olarak tanımlanır. Bunun termodinamik tezahürü birinci-mertebe faz değişimindeki gibidir. Sadece hal denklemlerini incelendiğinde Bose-Einstein yoğunlaşması ve sıradan bir gaz-sıvı yoğunlaşması arasında hiçbir farkın olmadığı anlaşılır. Eğer ideal Bose gazının parçacıkları gravitasyonel bir alana yerleşmişse gaz-sıvı yoğunlaşmasındaki gibi [Lamb ve Nordsieck,1941] yoğunlaşma bölgesinde iki fazın uzaysal ayrılması olur.

“momentum uzayı yoğunlaşması” terimi sadece şu gerçeği vurgulamak için kullanılır: Bose-Einstein yoğunlaşmasının nedeni, herhangi bir şekilde parçacıklar arası etkileşimde değil, dalga fonksiyonunun simetrisinde yatmaktadır.

$z$ 'nin aşağıdaki gibi eş anlamlı denklemleri yazılabilir;

$$\begin{aligned} g_{3/2}(z) &= \frac{\lambda^3}{\nu} \\ \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} &= \frac{\nu_c}{\nu} \\ \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} &= \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

gibidir. Öte yandan düşük sıcaklıklarda yani  $\lambda^3/\nu > g_{3/2}(1)$ 'de  $z$ 'den bahsetmeye gerek yoktur. Çünkü bu bölgede  $z = 1$ 'dir.

(2.16a)'dan yararlanılarak hal denklemi,

$$\frac{P}{kT} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) & (\nu > \nu_c) \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & (\nu < \nu_c) \end{cases} \quad (2.37)$$

elde edilebilir. Burada

$$g_{5/2}(1) = \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = 1.342 \quad (2.38)$$

dir. İdeal Bose gazı için yazılan (2.13a) bağıntısındaki  $V^{-1} \log(1-z)$ 'li terim  $V \rightarrow \infty$  limitinde sıfır olur.  $\nu > \nu_c$  için aynı sonuç elde edilir.  $\nu < \nu_c$  için de bu doğrudur, çünkü  $(1-z) \propto V^{-1}$  ile orantılıdır.  $\nu < \nu_c$  için  $P, \nu$ 'den bağımsızdır.

Sistemin basıncı (2.37) bağıntısından faydalanılarak,

$$P_0(T) = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \quad (2.39)$$

bulunur. Burada  $g_{5/2}(1)$ , (2.38) bağıntısıyla tanımlıdır.

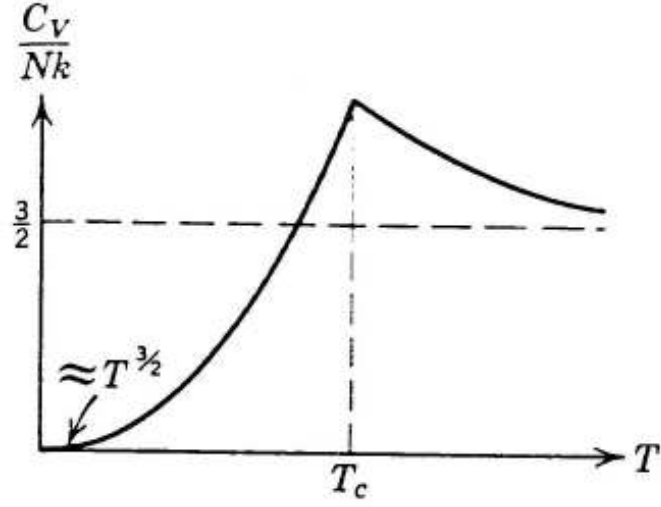
İdeal Bose gazı için iç enerji ve özgül ısı ifadeleri (2.19) ve (2.11) denklemlerinden yararlanılarak bulunabilir [Huang, 1987].

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} P_0 = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{kT\nu}{\lambda^3} g_{5/2}(z) & T > T_c \text{ için} \\ \frac{3}{2} \frac{kT\nu}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & T < T_c \text{ için} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\frac{C_V}{Nk} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{\nu}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} & T > T_c \text{ için} \\ \frac{15}{4} \frac{\nu}{\lambda^3} g_{5/2}(1) & T < T_c \text{ için} \end{cases} \quad (2.41)$$

İdeal Bose gazının ısı sıçması Şekil 2.3'de gösterilmektedir. Mutlak sıfır yakınlarında,  $C_V$ ,  $T^{3/2}$  ile orantılı olarak ortadan yok olur. Bu davranış  $C_V$ 'nin mutlak sıfır yakınlarında  $T^3$  ile orantılı olarak kaybolduğu bir foton gazı veya fonon gazıyla çelişir. Bu farkın nedeni,  $\varepsilon_p = p^2/2m$  parçacık spektrumu ve foton (veya fonon) spektrumundan daha yüksek hal yoğunluğuna sahip olmasındandır. Sonuç olarak, parçacık için elde edilebilir uyarılmış daha fazla mod vardır ve özgül ısı daha büyüktür.





Şekil 2.3: İdeal Bose gazının ısı sığası [Huang,1987].

Alçak sıcaklıklarda var olduğu bilinen tek Bose sistemi sıvı  $^4\text{He}$ 'dir.  $2.18 \text{ } ^\circ\text{K}$  sıcaklığında  $^4\text{He}$  önemli bir  $\lambda$  – geçiş özelliği sergiler. Bu noktada özgül ısısı logaritmik olarak sonsuz olur.  $^4\text{He}$  atomları Bose istatistiğine uyduğundan, bu geçişin moleküller arası etkileşimler ile modifiye olan Bose-Einstein yoğunlaşması olduğunu zannetmek doğaldır. Bu sonuç; böyle bir geçişin, atomları fermi istatistiğine uyan sıvı  $^3\text{He}$ 'de oluşmadığı gerçeğiyle desteklenebilir. (2.32)'de  $^4\text{He}$  için ilgili veriler konduğunda  $T_c = 3.14 \text{ } ^\circ\text{K}$  kabul edilebilir büyüklüğü hesaplanabilir [Huang,1987].

Son olarak sadece parçacık sayısı korunduğunda, Bose-Einstein yoğunlaşmasının meydana gelmesi yeniden vurgulanmalıdır. Örneğin fotonlar yoğunlaşmazlar. Zira her an doğup yok olabilirler [Gündüz,1999]. Ağır parçacıkların korunumu, fiziksel olarak gözlemlendiğinden, gerçek korunum yasasına, düşük enerjili bir yaklaşımdır. Gerçek korunum yasası da, korunan niceliğin parçacık sayısı ile anti-parçacık sayısı arasındaki farktır [Huang,1987]. Böylelikle rölativistik bir Bose gazı için Bose-Einstein yoğunlaşmasının herhangi bir tartışmasında anti-parçacıklarında hesaba katılmalıdır [Haber ve Weldon,1981].

Bose-Einstein yoğunlaşması tıpkı buharın su damlaları halinde yoğunlaşması gibidir. Ancak bu momentum uzayında bir yoğunlaşmadır. Yani bozonlar gazın hacmi içinde bir yere toplanmazlar. Sadece enerji ve momentumları sıfır olup statik kalırlar.

Bose-Einstein yoğunlaşması, Einstein tarafından daha 1925 yılında bozonik atomlardan (yani atomu oluşturan elektron, nötron ve protonların toplamı çift sayıya eşit olan atomlar) meydana gelen bir gaz belirli bir kritik sıcaklığın altına soğutulduğunda, gazı oluşturan atomların büyük bir çoğunluğu en düşük kuantum durumuna geçecektir şeklinde öngörülmüştür. Elbette bu durum kuantum istatistiğinin bir sonucu olan bu olay 1925 yılında Albert Einstein tarafından öngörülmüştür. Ancak, doğrudan gözlenmesi uzun zaman almıştır. Gerçi süper akışkanlar ve süper iletkenlerin anormal davranışlarının Bose-Einstein yoğunlaşmasından kaynaklandığı biliniyordu, ama 1995 yılında Anderson ve çalışma arkadaşları tarafından doğrudan gözlendi [Anderson et al., 1995].

Deneysel yöntemin temeli, gazı  $\lambda_{dB}$  'nin atomlar arası uzaklık mertebesine ulaşana kadar soğutmaya dayanmaktadır. Ancak atomlar arası etkileşimleri azaltmak için seyreltik gaz kullanılması gerekmektedir. Deneyde  $^{87}Rb$  atomları magnetik bir kapanda tutularak, doğrudan konumları ölçüldüğünde,  $0.170 \mu K$  sıcaklıkta Bose-Einstein yoğunlaşmasına geçiş olduğu gözlenmiştir. Kullanılan magnetik tuzaklama yöntemine bağlı olarak yoğunlaşan gazın şekli 10-50 mikron çapında bir yuvaraktır veya 15 mikron çaplı 300 mikron uzunluğunda bir sigara şeklindedir [Matthews et al., 1999].

Bose-Einstein yoğunlaşması bir çok yönden önem taşımaktadır. İlk olarak bu sistemler bilim adamları için atomların özelliklerini ve genel olarak kuantum fiziğinin bazı temel prensiplerini test edebilecekleri yeni ortamlar oluşturmuştur.

Bose-Einstein yoğunlaşmasının diğere önemli bir katkısı da atom lazerleri konusunda olması beklenmektedir. Atom lazerlerinin çalışma prensibi optik lazerlerle benzerdir. Eş fazlı madde dalgaları diğere atomları da aynı moda geçmeleri için uyarmaktadır, bu da kazanımı arttırmaktadır. Bu lazerlerin olası kullanım alanları arasında şunlar sıralanabilir: Lineer ve lineer olmayan atom optiğı, temel fiziksel büyüklüklerinin hassas ölçümü, atomik düzeyde madde büyütmesi, kuantum enformasyon işlenmesi ve litografik çözünürlüğünün arttırılması [Matthews et al., 1999].

Bose-Einstein yoğunlaşması bir tür faz geçisidir. Kritik olaylar teorisi ve kuantum istatistik mekanik ile beraber ileri düzeyde araştırmalarla incelenebilir.

### 3. STANDART KUANTUM HARMONİK OSİLATÖR

#### 3.1 GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin en önemli problemlerinden birisi kuantum harmonik osilatör problemidir. Pedagojik bakış açısından kuantum mekaniğinde temel kavram ve metotları örneklemek için kullanılmaktadır [Shankar,1994]. Pratik bakış açısından modern fiziğin bölümlerinde moleküler spektroskopi, katıhal fiziği, nükleer yapı, kuantum alan teorisi, kuantum optiği, kuantum istatistiksel mekanik gibi değişik uygulamalara sahiptir [Sakurai,1994].

Harmonik osilatör kuantum mekaniğinde önemli bir yere sahiptir. Moleküllerdeki kristal yapılarda tek tek atomların denge konumları civarındaki titreşim hareketlerinin ve bir kovuk içindeki elektromanyetik alan salınımlarının kuantum mekaniğin incelemelerinde harmonik osilatör önemli bir rol oynar. Ayrıca kuantum harmonik osilatör, özdeğer problemi tam çözülebilen belli başlı problemlerden olduğundan, bazı benzer fakat çözümü zor problemler için sık sık başvurulan önemli bir modeldir [Dereli ve Verçin,1998].

Bu bölümde esas olarak kuantum harmonik osilatör değişik yönleriyle incelenecektir. Bunun için öncelikle standart kuantum harmonik osilatör ve bunun  $SU(N)$ -değişmezliği gösterilecektir. Ardından Fibonacci osilatörü olarak da adlandırılan iki-parametre ile deforme bozonik osilatör cebiri tanıtılacaktır. Ayrıca bu bölümde son olarak Fibonacci osilatörlerinin değişmezlik grubu üzerinde durulacaktır.

### 3.2 STANDART KUANTUM HARMONİK OSİLATÖR VE $SU(N)$ – DEĞİŞMEZLİĞİ

Hooke yasası ile verilen geri çağırıcı  $\vec{F} = -k\vec{x}$  kuvvetin etkisi altında  $x = 0$  sabit denge noktası civarında, sürtünmesiz olarak  $\omega = (k/m)^{1/2}$  açısal frekansı ile basit harmonik hareket yapan bir esnek yayın ucundaki  $m$  kütesinden oluşan bir boyutlu basit harmonik osilatör klasik mekanikte temel bir sistemdir. Denge konumları civarında küçük genlikli salınımlar yapan çok serbestlik dereceli pek çok sistemin en genel salının hareketi her birinin kendine özgü frekansı olan normal kiplerinin bir çizgisel üst-üste gelimi olan bir harekettir [Dereli ve Verçin, 1998]. Tüm sistemin bir kipteki hareketi tek frekanslı bir salınım olup, her serbestlik derecesinin hareketi bir basit harmonik salınımcının hareketi ile özdeşdir. Geri çağırıcı  $k$  kuvvet sabiti ve  $V = (1/2)kx^2$  sistemin potansiyel enerji fonksiyonu olmak üzere, bu sistem için Hamiltoniyen,

$$H = T + V = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (3.1)$$

dir [Shankar, 1994]. Burada  $\omega$ , Hooke yasasının  $k$  salınım sabiti ile ilişkili klasik osilatörün  $\omega = (k/m)^{1/2}$  açısal frekansıdır.  $x$  ve  $P_x$  operatörleri Hermityendir. Buradan hareketle,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{iP_x}{m\omega} \right) \quad a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{iP_x}{m\omega} \right) \quad (3.2)$$

sırasıyla yoketme ve yaratma operatörü olarak bilinen iki yeni operatör tanımlanabilir [Sakurai, 1994]. Ayrıca standart kuantum harmonik osilatörün  $a$ ,  $a^+$  ve  $N$  operatörleri arasında,

$$[a, a^+] = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)(-i[x, P_x] + i[P_x, x]) = 1 \quad (3.3)$$

$$[N, a^+] = a^+ \quad (3.4)$$

$$[N, a] = -a \quad (3.5)$$

komütasyon ilişkileri mevcuttur ( $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ ). Sayı operatörü ise

$$N = a^+ a \quad (3.6)$$

ile tanımlıdır.  $N$  sayı operatörü de Hermityendir. Bu açıkça aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} a^+ a &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right) \left(x^2 + \frac{P_x^2}{m^2\omega^2}\right) + \left(\frac{i}{2\hbar}\right) [x, P_x] \\ &= \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Öyleyse sayı operatörü ile Hamiltoniyen operatörü arasında önemli bir ilişki söz konusudur:

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (3.8)$$

$H$ ,  $N$ 'nin lineer fonksiyonu olduğundan  $N$ 'de  $H$  ile eş zamanlı olarak diyagonalize edilebilir.  $N$  operatörünün enerji özvektörü  $|n\rangle$  ile bunun  $n$  özdeğeri arasında,

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.9)$$

bağıntısı vardır. (3.8) bağıntısından yararlanılarak

$$H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle \quad (3.10)$$

bulunur. Burada sözü edilen enerji özdeğerleri,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (3.11)$$

ile verilir.  $N$  operatörünün  $|n\rangle$  özketleri tarafından doldurulmuş Hilbert uzayında  $a$  ve  $a^+$  operatörlerinin bu ketslere etkisi;

$$Na^+|n\rangle = ([N, a^+] + a^+N)|n\rangle = (n+1)a^+|n\rangle \quad (3.12)$$

$$Na|n\rangle = ([N, a] + aN)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \quad (3.13)$$

ile verilir. Bu ilişkiler  $a^+|n\rangle$ , (veya  $a|n\rangle$ )'nin de, bir arttıran ( yada bir azaltan ) özdeğer ile  $N$ 'nin yine bir özvektörü olduğuna işaret eder.  $\hbar\omega$  enerjili bir kuantum birimini yaratma ( yada yoketme ) ile eş anlamlı olan  $n$ 'nin artması (yada azalması)'ndan dolayı,  $a^+$  (yada  $a$ ) için yaratma operatörü ( yada yoketme operatörü ) terimi uygun bir şekilde söylenebilir.

(3.13) bağıntısı,  $a|n\rangle$  ve  $|n-1\rangle$ 'in birbiriyle bir sabit çarpan farkı ile eşit olacağını söyler. Yani

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle \quad (3.14)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $c$ , hem  $|n\rangle$  hemde  $|n-1\rangle$ 'in normalizasyon gereksiniminden hesaplanabilen sayısal bir sabittir. Öncelikle

$$\langle n|a^+a|n\rangle = |c|^2 \quad (3.15)$$

oldugundan hareketle  $a^+a$  'nında sayı operatörü olmasından dolayı (3.15) bağıntısının sol tarafı kullanılarak,

$$n = |c|^2 \quad (3.16)$$

yazılabilir.  $c$ 'yi genelde gerçel ve pozitif olarak alarak, sonunda (3.12) ve (3.13) bağıntısında belirttiğimiz gibi  $N$  operatörünün  $|n\rangle$  özketleri tarafından doldurulmuş Hilbert uzayında  $a$  ve  $a^+$  operatörlerinin bu ketslere etkisi,

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (3.17)$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (3.18)$$

bulunur.  $a, a^+$  operatörleri ilginç bir özelliğe sahiptir. Sistemin taban durumu

$$a|0\rangle = 0 \quad (3.19)$$

ile tanımlanır. (3.17) bağıntısının her iki tarafına  $a$  yoketme operatörünün uygulandığını varsayarsak,



$$\begin{aligned}
a^2 |n\rangle &= \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle \\
a^3 |n\rangle &= \sqrt{n(n-1)(n-2)} |n-3\rangle \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

elde edilir. Böylece  $n \in \mathbb{Z}^+$  ile başlandığı sürece seri sıfırlanıncaya kadar her seferinde daha küçük  $n$ 'li operatör özketlerini bulunabilir. Tam sayı olmayan bir  $n$  ile başlanırsa,  $n$ 'nin negatif değerli özketlerine yol açarak, seri sonlanmayacaktır. Ayrıca  $a|n\rangle$ 'nin normu için pozitiflik gereksinimine de sahip olduğu görülebilir,

$$n = \langle n|N|n\rangle = (\langle n|a^+)(a|n\rangle) \geq 0 \tag{3.21}$$

Bu ifade  $n$ 'nin asla negatif olamayacağını belirtmektedir. Öyleyse  $n=0$  ile sonlanmalıdır. Öyle ki  $n$ 'nin alabileceği değerler negatif olmayan tam sayılardır.  $n$ 'nin olası en küçük değeri sıfırdır. Kuantum harmonik osilatörün taban durum enerjisi

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega \tag{3.22}$$

dir. Herhangi bir uyarılmış  $|n\rangle$  özketi,  $a^+$  yaratma operatörünü  $|0\rangle$  taban durumuna  $n$  kez uygulamasıyla elde edilebilir:

$$|n\rangle = \left[ \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle \tag{3.23}$$

$N$  operatörünün farklı iki özketi,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \tag{3.24}$$

şeklinde ortanormaldir. Bu yolla,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0,1,2,3,\dots) \quad (3.25)$$

enerji özdeğerleri ile  $N$  ve  $H$ 'nin eşzamanlı özketleri oluşturulur. (3.17), (3.18) ve  $\{|n\rangle\}$  için gerekli ortanormallikten matris elemanlarını,

$$\langle n' | a | n \rangle = \sqrt{n} \delta_{n',n-1} \quad \langle n' | a^+ | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} \quad (3.26)$$

elde edilebilir. Ayrıca

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+) \quad P_x = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^+) \quad (3.27)$$

beraber kullanarak  $x$  ve  $P_x$  operatörlerinin matris elemanlarını;

$$\langle n' | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}) \quad (3.28)$$

$$\langle n' | P_x | n \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}) \quad (3.29)$$

elde edilebilir. Bununla birlikte operatör yöntemiyle konum uzayında (3.19) vakum koşulundan hareketle kuantum harmonik osilatör enerji özketleri de bulunabilir [Sakurai, 1994].

## Çok Boyutlu Kuantum Harmonik Osilatör

Çok boyutlu harmonik osilatörden oluşan bir sistem için  $a_i^+$  yaratma ve  $a_i$  yoketme operatörleri arasında şu komütasyon ilişkileri vardır:

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij} \quad (3.30)$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0 \quad (3.31)$$

Burada  $i, j = 1, 2, \dots, N$  değerlerini alırlar.  $H_j$ 'lerin özfonksiyonları  $|n_j\rangle$ 'ler;

$$|n_1\rangle|n_2\rangle\dots|n_d\rangle = |n_1 n_2 n_3 \dots n_d\rangle = |n\rangle \quad (3.32)$$

$$H_1|n_1\rangle = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n_1\rangle, \dots, H_d|n_d\rangle = \left(n_d + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n_d\rangle \quad (3.33)$$

$$H|n_1 n_2 n_3 \dots n_d\rangle = E_n|n\rangle \quad (3.34)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_d$  kısaltması yapılmıştır [Erbil, 2001].

N-boyutlu olan bir sistem için toplam sayı operatörü,

$$N = \sum_{j=1}^d N_j = \sum_{j=1}^d a_j^+ a_j \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (3.35)$$

şeklindedir. Bu operatörü göz önüne alarak Hamilton operatörü,

$$H = \left( N + \frac{d}{2} \right) \hbar \omega \quad (3.36)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun özdeğeri de

$$E_n = \left( n + \frac{d}{2} \right) \hbar \omega \quad (3.37)$$

olur. Bu  $n$  kuantum sayıları  $\hbar \omega$  miktarının sayısı gibi yorumlanabilir [Erbil, 2001].

Standart kuantum harmonik osilatör veya kısaca bozonik osilatörlerin diğer bir önemli özelliği bunların  $SU(N)$  Lie grubu altında değişmezlik özelliği sergilemeleridir. Örneğin iki-boyutlu bir kuantum harmonik osilatör sistemi düşünülerek, bu değişmezlik özelliği gösterilebilir. Böyle bir sistem (3.30), (3.31) ve (3.35) bağıntılarında  $i, j = 1, 2$  alınarak elde edilen komütasyon ilişkilerini sağlar. O halde bu sistem klasik iki-boyutlu özel üniter grup  $SU(2)$  altında değişmezlik sergileyecektir. Bunu ispatlamak için,

$$\tilde{a} \rightarrow T a, \quad T \in SU(2), \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

şeklinde lineer bir dönüşüm;

$$\left[ \tilde{a}_i, \tilde{a}_j^+ \right] = \delta_{ij} \quad \left[ \tilde{a}_i, \tilde{a}_j \right] = 0 \quad \tilde{N}_i = \tilde{a}_i^+ \tilde{a}_i \quad i, j = 1, 2 \quad (3.39)$$

komütasyon ilişkilerine uygulanırsa, bunların değişmez kaldığı görülür. Fizikte,  $SU(2)$  Lie grubu çok önemli uygulama alanlarına sahiptir. Örneğin bu grubun spin ile olan ilişkisi nedeni ile izospin gibi nükleer fizik uygulamalarında çok önemli bir yer tutar. Bundan başka  $SU(2)$  grubunun jenatörleri üç adet  $\hat{\sigma}_i$  Pauli spin matrisleridir. Pauli matrisleri  $\hat{\sigma}_i = 2\hat{J}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bağıntısı ile açısal momentum operatörleri ile doğrudan

ilişkilidir. Dolayısıyla  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ 'de benzer açısal momentum komütasyon ilişkilerini sağlar. O halde  $SU(2)$  ile  $SO(3)$  grubu (üç boyutlu özel ortogonal grup) aynı Lie cebirlerine sahiptir [Greiner ve Maruhn, 1995]. Bu da,

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z \quad (3.40)$$

şeklindedir [Sakurai, 1987; Shankar, 1994].

(3.3) denklemi ile verilen standart kuantum harmonik osilatör komütasyon ilişkilerinin reel bir  $q$  parametresiyle deforme edilmiş (veya genelleştirilmiş) hali ilk kez Arık ve Coon tarafından [Arık ve Coon, 1976] ortaya atılmıştır.

$$aa^* - q^2 a^* a = 1, \quad 0 < q < 1 \quad (3.41)$$

Ayrıca bu  $q$ -deforme bozonik osilatör için  $a^* a = [N]$  ve  $aa^* = [N+1]$  olup,  $n \in \mathbb{Z}^+$  sayısı da  $[n]$  genelleştirilmiş tamsayısıyla yer değiştirecektir [Jackson, 1910]. Böylece  $a|0\rangle = 0$  ve  $[0] = 0$  koşulları kullanarak, genelleştirilmiş (veya deforme) sayı işlemcisinin spektrumu

$$[n] = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2} \quad (3.42)$$

şeklindedir. Bunun AC  $q$ -osilatörü ve çok boyutlu hali, klasik  $SU(N)$  grubu altında değişmezlik sergiler [Coon et al., 1972]. Öte yandan (3.41) denkleminin  $0 < q < 1$  için, yeniden ölçekleme ile elde edilen formu olan

$$aa^+ - q^2 a^+ a = 1 - q^2 \quad (3.43)$$

komütasyon ilişkisi de, özel üniter kuantum gruplarının oluşturulması için çok uygun bir formdadır [Arik ve Çelik,1993]. Buradan yola çıkarak kuantum grup değişmezliği sergileyen iki boyutlu  $q$ -deforme bozonik osilatör cebiri,

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 &= q c_2 c_1 \\
c_1 c_2^* &= q c_2^* c_1 \\
c_1 c_1^* - q^2 c_1^* c_1 &= 1 \\
c_2 c_2^* - q^2 c_2^* c_2 &= 1 + (q^2 - 1) c_1^* c_1
\end{aligned} \tag{3.44}$$

şeklindeki deforme komütasyon ilişkileri ile tanımlanır [Pusz ve Woronowicz,1989]. O halde (3.44)'deki PW  $q$ -bozon osilatör cebiri,  $SU_q(2)$  özel üniter kuantum matris grubu altında değişmezlik özelliğine sahiptir.

Bu sistemin toplam deforme sayı operatörü,

$$[N] = [N_1 + N_2] = c_1^* c_1 + c_2^* c_2 \tag{3.45}$$

ile ifade edilip, spectrumu da (3.42) denklemi ile belirlidir. (3.45) denkleminin bu hali aynen çok-boyutlu kuantum harmonik osilatörün yaratma ve yoketme işlemcileri cinsinden ifade edilen Hamiltoniyenine (3.38) benzediği için

$$H = c_1^* c_1 + c_2^* c_2 \tag{3.46}$$

yazılabilir. Bu  $H$  de  $SU_q(2)$  kuantum grubu altında değişmezlik sergiler. (3.44) ve (3.45) denklemleri  $q \rightarrow 1$  limitinde iki-boyutlu standart kuantum harmonik osilatör komütasyon ilişkilerini verirler. (3.44) ve (3.45)'de tanımlanan deforme bozonik osilatör cebirinin  $SU_q(2)$ - simetrisi gösterdiği aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

(3.43) ve (3.45)'de tanımlanan deforme bozon cebiri (veya PW-osilatör cebiri),

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

şeklindeki lineer bir dönüşüm altında değişmez kalırlar. Burada T dönüşüm matrisi olup,  $T \in SU_q(2)$ 'dir. T matrisinin elemanları birbiriyle komüt olmayıp, aşağıdaki komütasyon ilişkilerini sağlarlar [Woronowicz, 1987; Takhtajan, 1989; Vokos et al., 1989; Van der Jeugt, 1993]:

$$\begin{aligned} ab &= qba & aa^* + q^2bb^* &= 1 \\ ab^* &= qb^*a & a^*a + b^*b &= 1 \\ bb^* &= b^*b \end{aligned} \quad (3.48)$$

Eğer (3.44) ve (3.45)'deki tüm bağıntıları dönüşmüş olanları ( $c'_i$ 'ler) için tekrar yazılırsa sistemin değişmez kaldığı görülür. Bu ispatlamada T matrisinin elemanlarının  $c_1, c_1^*, c_2, c_2^*$  ile komüt oldukları varsayılmıştır.

### 3.3 İKİ PARAMETRE İLE DEFORME BOZONİK OSİLATÖR CEBİRİ (FİBONACCİ OSİLATÖRLERİ)

Kuantum grup değişmezliği sergileyen daha genel deforme osilatör yapıları olup olmadığı sorusu akla gelebilir [Chakrabarti ve Jagannathan, 1991]. Bu sorudan yola çıkarak en genel kuantum grubu değişmezliğine sahip bozonik osilatör cebiri 1992 yılında d-boyutlu Fibonacci osilatörleri olarak ortaya atıldı [Arik et al., 1992]. Birçok araştırmanın iki-parametrelili gösterimleri daha önceden çalışılmasına rağmen [Chakrabarti ve Jagannathan, 1991; Schirmacher et al., 1991; Fairlie ve Zachos, 1991; Isaev ve Malik, 1992], iki-parametre ile deforme  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -invariant bozonik osilatör cebiri, en genel kuantum grup invariant osilatör cebirinin gerçekleşmesi

amacıyla Arik ve çalışma grubu tarafından ilk kez ileri sürülmüştür [Arik et al., 1992]. Bu bölümde bir önceki bölümde incelediğimiz bozonik osilatör cebirinin  $SU(2)$ -grubu değişmezliğinden yararlanarak  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -değişmezliği gösteren  $(q_1, q_2)$ -deforme bozonik osilatör cebiri tanıtılacaktır.

İki parametre ile genelleştirilmiş bozonik osilatör cebiri (Fibonacci osilatör cebiri) aşağıdaki deforme komütasyon ilişkileri ile tanımlıdır:

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 &= \frac{q_1}{q_2} c_2 c_1 \\
c_1^* c_2^* &= \frac{q_2}{q_1} c_2^* c_1^* \\
c_1 c_2^* &= q_1 q_2 c_2^* c_1 \\
c_1 c_1^* - q^2 c_1^* c_1 &= q_2^{2N} \\
c_2 c_2^* - q^2 c_2^* c_2 &= q_2^{2N} + (q_1^2 - q_2^2) c_1^* c_1
\end{aligned} \tag{3.49}$$

olup, burada  $N$  toplam bozon sayısı operatörü ve  $q_1 \neq q_2 \in \mathfrak{R}^+$  deformasyon parametreleridir. Bu iki parametre ile deforme osilatör sisteminin Hamiltoniyeni de

$$H = c_1^* c_1 + c_2^* c_2 \tag{3.50}$$

olup, bunun spektrumu da aşağıdaki Fibonacci temel sayıları ile belirlidir:

$$[n] = \frac{q_2^{2n} - q_1^{2n}}{q_2^2 - q_1^2} \tag{3.51}$$

Bu aynı zamanda (3.42)'deki geleneksel  $q$ -temel tam sayılarının genelleştirilmiş halidir.



### 3.4 FİBONACCI OSİLATÖRLERİNİN DEĞİŞMEZLİK GRUBU

(3.49) ve (3.51) denklemleri ile tanımlanan iki-boyutlu Fibonacci osilatörleri çok ilginç özelliklere sahiptirler. Örneğin, çok boyutlu versiyonları spektrum dejenerliğine sahiptir.  $[N]$ 'nin  $|n\rangle$  özketleri, standart n-boyutlu harmonik osilatör ile aynı dejenerliğe sahiptir. (3.44) ile tanımlı  $q$ -osilatörlerinin fiziksel olarak çok önemli özelliklerini de paylaşır. Bu özellikler  $r = q_1/q_2$  olmak üzere  $SU_r(2)$  grubu altında kuantum grup değişmezliği sergiler. Kuantum Lie cebirlerinin oluşumunda, koharent haller şeklinde sıralanabilir [Arik et al,1992].

(3.39) - (3.51) denklemlerinde tanımlanan iki-boyutlu Fibonacci osilatörleri ayrıca önemli limit durumlara sahiptirler [Arik et al., 1997].  $q_1 = q_2 = 1$  limitinde iki-boyutta standart kuantum harmonik osilatör cebirini elde edilebilir.  $q_2 \rightarrow 1$  limitinde ise (3.44)-(3.46)'da tanımlanan PW-osilatörleri elde edilebilir [Pusz ve Woronowicz, 1989].  $q_2 \rightarrow q_1$  limitinde ise BM-osilatörü elde edilebilir [Biedenharn, 1989; Macfarlane, 1989].

(3.49) - (3.51)'de tanımlanan Fibonacci osilatörleri özel üniter kuantum matris grubu altında  $SU_r(2)$  değişmezlik özelliğine sahiptirler ( $r = q_1/q_2$ ). (3.47) ile verilen dönüşüme benzer şekilde yoketme operatörüne  $SU_r(2)$  kuantum grubunun aksiyonu

$$c' \rightarrow T c \quad (3.52)$$

şeklinde olup, bu lineer dönüşüm altında sistemin Hamiltoniyeni ve  $C_i$  'ler arasındaki komütasyon ilişkileri (3.49) ve (3.50) değişmez kalır. Burada (3.47) ile verilen sütun vektörü ile  $r = q_1/q_2$  olmak üzere T matrisi;

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad T \in SU_r(2) \quad (3.53)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

Bundan sonraki bölümde (3.49) - (3.51) denklemleri ile tanımlı Fibonacci osilatörleri sistemini deforme bir bozon gazı gözüyle bakarak bu gazın parçacık cebirinin  $SU_{q_1/q_2}(2)$  kuantum grubu altında değişmezlik özelliğine sahip olduğu gerçeğinden yola çıkılacaktır. Buradan hareketle  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -bozon gaz modelini kurup daha sonra onun termodinamik ve istatistiksel özellikleri incelenecektir.

## 4. İKİ PARAMETRE İLE DEFORME KUANTUM GRUP BOZON GAZININ İSTATİSTİK MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ

### 4.1 GİRİŞ

Bu bölümde  $SU_{q_1/q_2}(2)$  kuantum grubu simetrisine sahip bir bozonik kuantum gazının düşük ve yüksek sıcaklıklardaki termodinamik davranışı incelenecektir. Buradan elde edilecek sonuçlar, geçmişte kuantum grup bozon gazının düşük sıcaklık termodinamiği ile ilişkili olan çalışmaların [Ubriaco, 1997; Ubriaco, 1998; Ubriaco, 1998], iki-parametreliliğini genelleştirilmesini sağlayacaktır. Bunun için önce  $SU_q(2)$ -bozon modeli ve onun Hamiltoniyenini ortaya koyarak bazı kuantum mekaniksel özellikler üzerine durulacaktır. Özellikle iki-boyutlu bir bozon gazını düşünülecek, istenirse bu çok-boyuta daha sonra genelleştirilebilir. Bu modelden hareketle sistemin büyük kanonik dağılımdaki üleşim fonksiyonunu bularak, sistemin ısı kapasitesi, iç enerji, basınç gibi termodinamik fonksiyonları düşük ve yüksek sıcaklıklar limitlerinde incelenecektir. Özellikle  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin rolleri göz önüne alınarak, Bose-Einstein yoğunlaşması tartışılacaktır.

## 4.2 $SU_{q_1/q_2}(2)$ –BOZON MODELİ

Bu bölümde standart bozonik osilatörler  $(a_i)$  cinsinden, iki-parametre ile deforme bozonik osilatörlerin  $(c_i)$  temsillerinin bulunması amaçlanmaktadır. Bunu elde edebilmek için öncelikle, aynı enerjili farklı iki bozonik parçacık ailesi çeşidi için aşağıdaki üreticiler cinsinden ifade edilen Hamiltoniyen göz önüne alınacaktır [Algin, 2002]:

$$H_B = \sum_k \varepsilon_k (M_{1,k} + M_{2,k}) \quad (4.1)$$

burada  $M_{1,k}$  ve  $M_{2,k}$  deforme bozon sayı operatörleri olup,

$$M_{1,k} = c_{1,k}^* c_{1,k} \quad M_{2,k} = c_{2,k}^* c_{2,k} \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır.  $\varepsilon_k$ 'da  $k = 0, 1, 2, \dots$  enerji spektrumu ve  $k \neq k'$  için  $[c_{i,k}^*, c_{j,k'}] = 0$ 'dır. Buradan  $M_1$  ve  $M_2$  operatörleri arasındaki ilişki, verilen bir  $k$  değeri için aşağıdaki gibidir:

$$M_2 c_1 - q_1^{-2} c_1 M_2 = 0 \quad M_1 c_2 - q_2^{-2} c_2 M_1 = 0 \quad (4.3)$$

(3.23) bağıntısı ile verilen bir  $k$  değeri için  $|0,0\rangle$  vakum durumuna  $c^*$  operatörünün etki etmesiyle, Hamiltoniyenin normalize olmuş durumları bulunabilir:

$$|m_1, m_2\rangle = (1/\sqrt{[m_1]![m_2]!}) c_1^{*m_1} c_2^{*m_2} |0,0\rangle \quad (4.4)$$

Buradaki  $[m]$  Fibonacci temel sayısı (3.51) bağıntısının ile tanımlıdır. (3.30) ve (3.31) denklemlerini sağlayan  $a_{i,k}^*, a_{i,k}$  bozonik osilatörleri cinsinden  $C_i$  Fibonacci osilatörleri için yeni bir temsil ifade etmek istiyoruz. Bunun için aşağıdaki temsilleri belli bir  $k$  için öneriyoruz:

$$c_1 = (a_1^*)^{-1} [N_1] q_2^{N_2} \quad c_1^* = a_1^* q_2^{N_2} \quad (4.5)$$

$$c_2 = (a_2^*)^{-1} [N_2] q_1^{N_1} \quad c_2^* = a_2^* q_1^{N_1} \quad (4.6)$$

Bu yeni temsil vasıtası ile (4.1)'deki Hamiltoniyen

$$H_B = \sum_k \varepsilon_k [N_1 + N_2] \quad (4.7)$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradaki  $N_{i,k} = a_{i,k}^* a_{i,k}$  ve  $[N_1 + N_2]$  braket'inin spektrumu (3.51) bağıntısındaki Fibonacci temel sayılarıdır.

(4.7) ile ifade edilen bu yeni Hamiltoniyen, (4.1)'deki orijinal Hamiltoniyen ile karşılaştırıldığında; (4.5) ve (4.6) temsillerinin, iki farklı tür bozonik parçacık ailesinden oluşan sistem için etkileşimli bir Hamiltoniyene neden olduğu görülür. Ayrıca böyle bir etkileşim  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametreleri ile tespit edilmiştir. Bu da sistemin iki-parametrelili kuantum grup simetrisinin bir sonucudur. (4.1) - (4.7) bağıntılarından, serbest bozonik parçacıklardan oluşan etkileşimsiz sistem ise  $q_1 = q_2 = 1$  limit durumunda elde edilir. İki-parametre ile deforme kuantum grup invariant bozonik osilatörlerin oluşturduğu böyle bir gazın düşük sıcaklıklardaki termodinamiği gelecek bölümde tartışılacaktır.

### 4.3 İKİ PARAMETRE İLE DEFORME KUANTUM GRUP BOZON GAZININ DÜŞÜK SICAKLIKLARDAKİ DAVRANIŞI

Bu bölümde (4.7) bağıntısındaki Hamiltoniyen ile tanımlı  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -bozon gazının düşük sıcaklıklardaki (yüksek yoğunluk) termodinamik davranışı incelenecektir [Algin ve Deviren, 2005]. Sistemimizin  $Z_B$  büyük üleşim fonksiyonu;

$$Z_B = \prod_k \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_k [n_1+n_2]} e^{\beta \mu (n_1+n_2)} \quad (4.8)$$

dır. Burada iz, (4.4) bağıntısındaki durumlar üzerinden verilmiştir. (4.5) - (4.7) bağıntılarından, (4.8) ile ifade edilen büyük üleşim fonksiyonu,

$$Z_B = \prod_k \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{-\beta \varepsilon_k [n]} z^n \quad (4.9)$$

olur. Burada  $z = e^{\beta \mu}$  fugasite (fugacity)'dir.  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -bozon gazının düşük sıcaklık (yüksek yoğunluk)'taki davranışı incelenirken, termodinamik limitte, yukarıdaki büyük üleşim fonksiyonu

$$\ln Z_B = \ln \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n \right) + \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} p^2 dp \ln \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) e^{-\beta [n] \varepsilon} z^n \right) \quad (4.10)$$

biçiminde de yazılabilir.  $\bar{p} = \bar{0}$  durumu, ideal Bose gazındaki gibi özel bir rol oynar [Huang,1987]. Zira  $\ln Z_B$ ;  $z \rightarrow 1$ 'e giderken  $\bar{p} = \bar{0}$  terimi de ıraksar. Dolayısıyla bulunan toplamdaki ilk terim  $\bar{p} = \bar{0}$ 'lı terim için yazılmıştır. (3.49) - (3.51)

bağıntılarıyla tanımlanan  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -invariant bozon modelinin kuantum cebirsel yapısı,  $q_1$  ve  $q_2$  parametreleri arasında simetrik olmasına rağmen, (4.10) bağıntısındaki integralde bulunan serinin yakınsaması için tek kısıtlama  $SU_r(2)$  kuantum grubunun  $0 < r \leq 1$  tanımından gelir. Modelimiz için  $r = q_1/q_2$  olduğundan, bu çalışmanın bundan sonraki hesapları  $q_2 > q_1$  şartına sahiptir.

$\langle N \rangle$  ortalama parçacık sayısını aşağıdaki bağıntı ile bulunur:

$$\langle N \rangle = \beta^{-1} \left( \frac{\partial \ln Z_B}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (4.11)$$

Bu ifadesinde,

$$\langle N \rangle = \langle N_0 \rangle + \frac{V}{\lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{[n]^{3/2}} \quad (4.12)$$

ortalama parçacık sayısı bulunur. Burada  $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2/mkT)}$  termal dalga boyudur. (4.12) bağıntısı,

$$\lambda^3 \frac{\langle N_0 \rangle}{V} = \frac{\lambda^3}{\nu} - \tilde{g}_{3/2}(z, q_1, q_2) \quad (4.13)$$

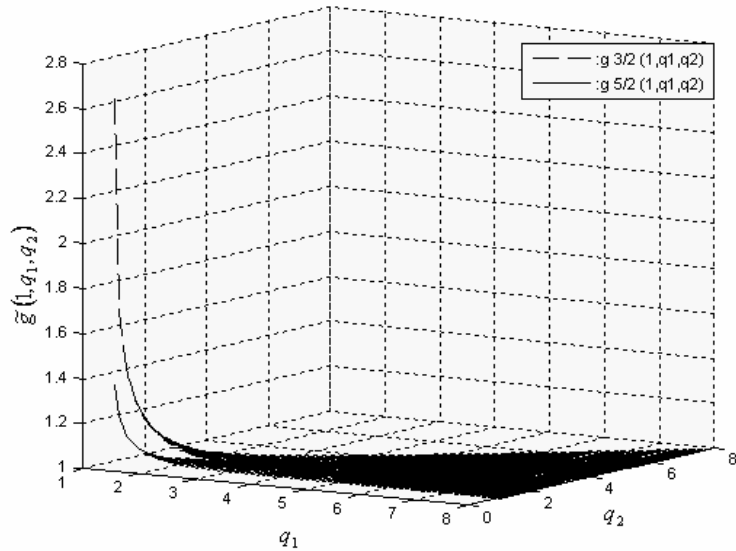
biçiminde de yazılabilir, burada  $\nu = V/\langle N \rangle$ 'dir ve  $(q_1, q_2)$ -deforme fonksiyon  $\tilde{g}_{3/2}(z, q_1, q_2)$  ise

$$\tilde{g}_{3/2}(z, q_1, q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{[n]^{3/2}} \quad (4.14)$$

ile tanımlıdır. Buradaki  $[n]$  Fibonacci temel sayısı (3.51) bağıntısıyla tanımlıdır.  $q_1 = q_2 = z = 1$  limit durumunda,  $\tilde{g}_{3/2}(1,1,1) = \zeta(3/2)$  Riemann-zeta fonksiyonu fonksiyonu bulunur. Modelimiz,

$$\frac{\lambda^3}{\nu} \geq \tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2) \quad (4.15)$$

şartı ile Bose-Einstein yoğunlaşması göstermektedir. Bu ise parçacıkların sonlu bir kesrinin  $\bar{p} = \bar{0}$ 'lı seviyeyi işgal etmesi demektir.  $(q_1, q_2)$ -deforme  $\tilde{g}_{3/2}(z, q_1, q_2)$  fonksiyonunun değeri deformasyon parametrelerine bağlıdır. Bundan dolayı bu parametreler, iki-parametrelili bozon gazı modelinin düşük sıcaklıklardaki davranışından sorumludur. Şekil 4.1,  $q_1$  ve  $q_2$  model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak  $(q_1, q_2)$ -deforme  $\tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2)$  fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.



Şekil 4.1:  $1 \leq q_1 \leq 8, 1 \leq q_2 \leq 8$  şartını sağlayan  $q_1$  ve  $q_2$  model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak  $(q_1, q_2)$ -deforme  $\tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2)$  ve  $\tilde{g}_{5/2}(1, q_1, q_2)$  fonksiyonlarının değişimi grafiği [Algin ve Deviren, 2005].



Modelin  $T_c(q_1, q_2)$  kritik sıcaklığı (4.15) bağıntısından;

$$T_c(q_1, q_2) = \frac{2\pi\hbar^2/mk}{\left[ \nu \tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2) \right]^{2/3}} \quad (4.16)$$

olarak bulunur.

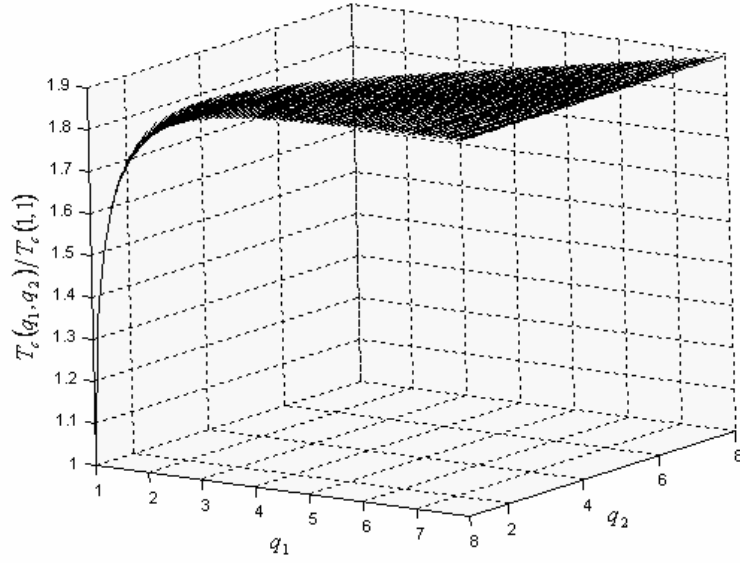
Böylece  $(q_1, q_2)$ –deforme fonksiyonu  $\tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2) < \tilde{g}_{3/2}(1, 1, 1) = \zeta(3/2) = 2.61$  koşuluna uyar. Bu da modelin kritik sıcaklığının, serbest bozon gazının  $T_c(1,1)$  kritik sıcaklığından çok daha büyük olması demektir. (4.16) ile tek-parametere ile deforme  $SU_q(2)$ – bozon modelinin [Ubricco, 1998] kritik sıcaklığını karşılaştırılabilir:

$$T_c(q_1, q_2) > T_c(q) > T_c(1,1) \quad (4.17)$$

Açık olarak burada sunulan iki-parametrelili bozon gazı ve serbest bozon gazının kritik sıcaklıkları arasında bir ilişki bulunabilir:

$$\frac{T_c(q_1, q_2)}{T_c(1,1)} = \left( \frac{2.61}{\tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2)} \right)^{2/3} \quad (4.18)$$

Şekil 4.2 de deformasyon parametrelerinin bir fonksiyonu olarak (4.18) bağıntısının grafiği gösterilmektedir.



Şekil 4.2:  $q_1$  ve  $q_2$  model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak,  $(q_1, q_2)$ –deforme kritik sıcaklık  $T_c(q_1, q_2)$  ile deforme olmamış kritik sıcaklık  $T_c(1,1)$ 'in  $T_c(q_1, q_2)/T_c(1,1)$  oranının değişim grafiği [Algin ve Deviren, 2005].

Sistemin  $U$  iç enerjisi,

$$U = -\frac{\partial \ln Z_B}{\partial \beta} + \mu \langle N \rangle \quad (4.19)$$

denkleminde yararlanılarak,

$$\frac{U}{\langle N \rangle} = \frac{3}{2} \frac{\nu k T}{\lambda^3} \tilde{g}_{5/2}(z, q_1, q_2) \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada  $(q_1, q_2)$ –deforme  $\tilde{g}_{5/2}(z, q_1, q_2)$  fonksiyonu

$$\tilde{g}_{5/2}(z, q_1, q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{[n]^{5/2}} \quad (4.21)$$

ile tanımlanır.

$q_1 = q_2 = z = 1$  limit değerinde  $\tilde{g}_{5/2}(1,1,1) = \zeta(5/2) = 1.34$  olur. Şekil 4.1,  $q_1$  ve  $q_2$  model parametrelerinin bir fonksiyonu olarak  $(q_1, q_2)$ -deforme  $\tilde{g}_{5/2}(1, q_1, q_2)$  fonksiyonunun grafiğini göstermektedir. Yukarıdaki sonuçlarla düşük sıcaklıklar  $T < T_c(q_1, q_2)$  için  $SU_r(2)$  bozon gazının ısı sığası,

$$C_V = (\partial U / \partial T)_V \quad (4.22)$$

bağıntısı kullanılarak bulunur. Düşük sıcaklıklar için kimyasal potansiyel  $\mu = 0$ 'dır. Sonuç olarak düşük sıcaklıklarda sistemin ısı sığası,

$$\frac{C_V}{k\langle N \rangle} = \frac{15}{4} \frac{\tilde{g}_{5/2}(1, q_1, q_2)}{\tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2)} \left( \frac{T}{T_c(q_1, q_2)} \right)^{3/2} \quad (4.23)$$

bulunur. Düşük sıcaklıklar için basınç;

$$P = \beta^{-1} (\partial \ln Z_B / \partial V)_{T, \mu} \quad (4.24)$$

bağıntısı kullanılarak

$$P(1, q_1, q_2) = kT \lambda^{-3} \tilde{g}_{5/2}(1, q_1, q_2) \quad (4.25)$$

elde edilir.

#### 4.4 İKİ PARAMETRE İLE DEFORME KUANTUM GRUP BOZON GAZININ YÜKSEK SICAKLIKLARDAKİ DAVRANIŞI

Bundan önceki bölümde,  $SU_{q_1/q_2}(2)$ -değişmezliği sergileyen bozon gazının büyük üleşim fonksiyonundan yararlanılarak ortalama parçacık sayısı, iç enerji, ısı sığası ve basınç gibi termodinamik özellikleri elde edilmiştir. Şimdi yüksek sıcaklık limitinde modelimizin ısı sığasını bulmak için, biraz farklı bir formda [Algin, 2002]'nin sonuçlarından yararlanılacaktır. Bu limitte

$$\ln Z_B = \frac{V}{\lambda^3} (2z + 4z^2 \xi(q_1, q_2) + \dots) \quad (4.26)$$

dir. Buradaki  $\xi(q_1, q_2)$  fonksiyonu,

$$\xi(q_1, q_2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (4.27)$$

ile tanımlıdır. (4.26) bağıntısından yararlanılarak yüksek sıcaklıklarda fugasite (fugacity),

$$z \approx \frac{\langle N \rangle}{2V} \lambda^3 \left( 1 - \frac{2\lambda^3 \xi(q_1, q_2) \langle N \rangle}{V} + \dots \right) \quad (4.28)$$

elde edilir. Bu durumda iç enerji,

$$U = \frac{3}{2} \frac{\langle N \rangle}{\beta} \left[ 1 - \frac{\lambda^3 \xi(q_1, q_2) \langle N \rangle}{V} + \dots \right] \quad (4.29)$$

olur. Bundan dolayı yüksek sıcaklıklarda  $T > T_c(q_1, q_2)$  ısı sığası,

$$\frac{C_V}{k\langle N \rangle} = \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{\lambda^3 \xi(q_1, q_2) \langle N \rangle}{2V} + \dots \right) \quad (4.30)$$

olur. (4.16) bağıntısından da yararlanılarak (4.30) denklemi,

$$\frac{C_V}{k\langle N \rangle} = \frac{3}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \xi(q_1, q_2) \tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2) \left( \frac{T_c(q_1, q_2)}{T} \right)^{3/2} + \dots \right] \quad (4.31)$$

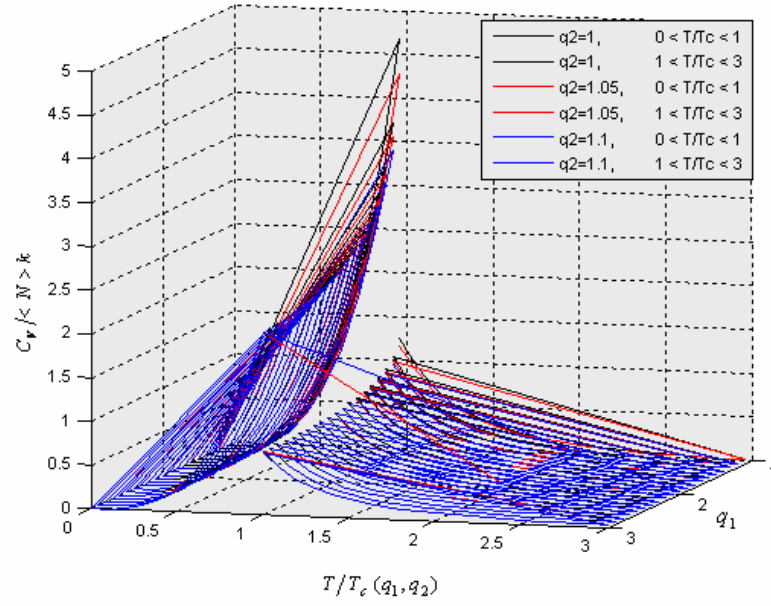
biçiminde yeniden yazılabilir.

#### 4.5 $SU_{q_1/q_2}(2)$ –BOZON GAZININ ALÇAK VE YÜKSEK SICAKLIKLARDAKİ ISI KAPASİTESİ

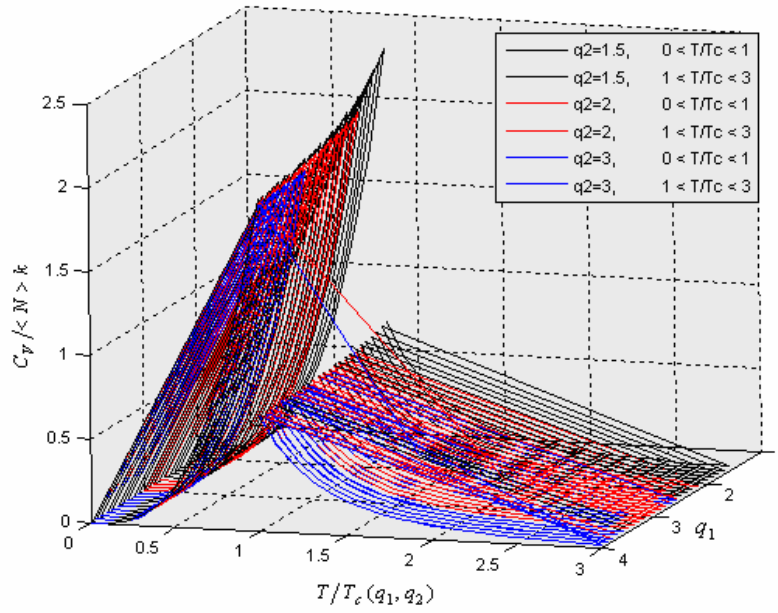
Daha önceki bölümlerde hesaplanan (4.23) ve (4.31)'deki ısı kapasitesi ifadeleri kullanılarak,  $T = T_c(q_1, q_2)$  limitinde ısı kapasitesindeki gap ( açıklık), aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\Delta C_V}{k\langle N \rangle} \approx \left\{ \frac{15 \tilde{g}_{5/2}(1, q_1, q_2)}{4 \tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2)} - \frac{3}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \xi(q_1, q_2) \tilde{g}_{3/2}(1, q_1, q_2) \right] \right\} \quad (4.32)$$

Şekil 4.3 ve 4.4'de  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin çeşitli değerlerinde  $T/T_c(q_1, q_2)$ 'nin bir fonksiyonu olarak ısı sığasının grafikleri gösterilmektedir.



Şekil 4.3:  $1 \leq q_1 \leq 3$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin belirli değerleri için  $T/T_c(q_1, q_2)$  'nin bir fonksiyonu olarak  $C_v / \langle N \rangle k$  ısı sığası [Algin ve Deviren, 2005].



Şekil 4.4:  $1 \leq q_1 \leq 4$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin belirli değerleri için  $T/T_c(q_1, q_2)$  'nin bir fonksiyonu olarak  $C_v / \langle N \rangle k$  ısı sığası [Algin ve Deviren, 2005].

Yukarıdaki sonuçlar göz önüne alınarak, sistemin termodinamiğine  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin etkisi son bölümde tartışılacaktır.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada iki farklı tip bozonik parçacık ailesi içeren bir gaza iki parametrelili kuantum grup simetrisi sokmanın termodinamiksel sonuçları araştırıldı. Özel olarak  $SU_{q_1/q_2}(2)$ –simetrikli iki-parametre ile deforme kuantum grup bozon gazının düşük sıcaklıktaki davranışı incelendi.  $SU_q(2)$ –invariant bozonik Hamiltoniyen aracılığı ile, sistemin büyük üleşim fonksiyonundan yararlanarak çeşitli termo-istatistiksel karakteristikler hesaplandı. Bu karakteristikler, modelin deformasyon parametrelerinin fonksiyonu cinsinden bulundu. Örneğin, ortalama parçacık sayısı, kritik sıcaklık, iç enerji ve basınç düşük sıcaklıklarda hesaplandı.

Daha sonra sistemin ısı sığası düşük ve yüksek sıcaklık limitlerinde bulundu. Bulunan tüm sonuçlar üzerine  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin etkisi üzerine odaklanıldı. (4.14) ve (4.21)'deki deforme fonksiyonlar, Fibonacci temel sayısı cinsinden ifade edilen seriler olarak bulundu. Şekil 4.1'de gösterildiği gibi bu deforme fonksiyonlar,  $q_1 = q_2 = z = 1$  limitinde  $\zeta(3/2)$  ve  $\zeta(5/2)$  ile verilen Riemann-zeta fonksiyonuna karşılık gelirler. Bu deforme fonksiyonların değerleri  $q_1 = q_2 = z = 1$  maksimum olup daha sonraki  $(q_1, q_2)$  değerlerinde azalmaktadırlar.  $q_1 = q_2 > 2$ 'den sonra neredeyse sabit kalmaktadırlar. Ne var ki bu deforme fonksiyonların değerleri ve buradan hareketle tüm termodinamik ve istatistiksel fonksiyonlar  $1 \leq (q_1, q_2) \leq 2$  aralığında çok hızlı bir şekilde değişmektedirler.

Diğer taraftan Şekil 4.3 ve 4.4'de görüldüğü gibi modelin ısı sığası kritik sıcaklıkta  $T = T_c(q_1, q_2)$  bir süreksizlik gösterir. Bu, Bose-Einstein yoğunlaşmasının, ikinci mertebe faz değişimi olarak adlandırılmasının nedenini teşkil eder. Bundan başka  $SU_{q_1/q_2}(2)$ –bozon modelinin ısı sığası,  $\lambda$  –geçiş davranışı özelliğine sahiptir. Böyle bir özellik serbest bozon gazında mevcut değildir. Böyle bir davranış süper akışkanlık



gibi bazı fiziksel olayların önemli karakteristiklerinden biridir. İlginç bir nokta da ikinci deformasyon parametresi arttığı zaman sistemin ısı sığasındaki süreksizlik azalmaktadır (Şekil 4.3 ve 4.4). Daha sonra  $q_1 = q_2 = z = 1$  limitinde bu süreksizlik ortadan kaybolmaktadır. Böylece serbest bir bozon gazının davranışı bu limitte elde edilebilir.

Ayrıca yoğunlaşma sıcaklığında  $SU_{q_1/q_2}(2)$ –bozon gazının ısı sığasındaki gap,  $q_2$  deformasyon parametresinin değerinin artmasıyla azalır ve  $q_1 \geq 2.2$ ,  $q_2 \geq 2.5$  değerlerinden sonra yaklaşık olarak sabit kalır. Yüksek sıcaklıklar için bu iki parametrelili deforme bozon gazının diğer bir ilginç özelliği,  $q_1^2 + q_2^2 \approx 4.16$  değerinde bir fermiyonik gaz gibi davranmasıdır [Algin, 2002]. Öte yandan  $q_2 > q_1 > 0$  aralığında alçak sıcaklıklarda, Bose-Einstein yoğunlaşmasını gösterir. Açık olarak serbest bozon gazı sonuçları  $q_1 = q_2 = z = 1$  limit değerinde bulunabilir.

$SU_{q_1/q_2}(2)$ –invariant bozonik osilatör sisteminin cebirsel yapısına  $q_1$  ve  $q_2$  deformasyon parametrelerinin diğer etkileri ise şöyledir: Model iki farklı tip bozonik osilatör ailesini içeren bir sistem olarak yorumlanabilir. Bu aileler birbiriyle  $(q_1, q_2)$  deformasyon parametreleri aracılığı ile kuantum grup  $SU_{q_1/q_2}(2)$ –simetrisinin belirlediği koşullarla etkileşmektedirler. Fakat bu iki bozonik aile kendi içlerinde de etkileşmemektedirler. Bundan dolayı bir anlamda, sistemin tüm davranışı  $q_1$  ve  $q_2$  model parametreleri ile karakterize edilmiştir.  $q_1 = q_2 = z = 1$  limiti alındığında iki farklı tip serbest bozonların oluşturduğu etkileşmeyen sistem yeniden elde edebiliriz.  $q_2 = 1$  limitinde bu iki bozonik parçacık ailesi,  $q_1$  deformasyon parametresiyle etkileşir, ancak bu durumda bozonik osilatör ailelerinden birisi, diğeri ile aynı fiziksel özelliklere sahip değildir.

Sonuç olarak bu iki-parametrelil  $SU_{q_1/q_2}(2)$ –bozon modelinin fermiyonik versiyonunun alçak sıcaklık davranışl, bu çalışmanın diğer bir y6nu olabilir. Bir diğer problemde, bu çalışmada yapılan analizin benzer kuantum grup simetrelil relativistik bozonik parçacıkları içeren bir gaza nasıl genişletileceğidir. Bundan başka bu  $r$  deformasyon parametresi, bir (1)'in k6klerine eşit olduğu zaman, iki-parametrelil  $SU_{q_1/q_2}(2)$ –bozon modelinin cebirsel ve istatistiksel sonuçlarını incelemek ilginç olabilir.

Gelecekte yukarıda belirtilen problemlerin 6z6mleri için bu tezin orijinal sonuçlarının ışık tutacağı d6ř6n6lmektedir.

## REFERANSLAR

---

Abe S 1997 *Phys. Lett. A* **224** 326

Adamska L V and Gavrilik A M 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 4787

Algin A 2002 *Phys. Lett. A* **292** 251

Algin A, Arik M and Arikan A S 2002 *Phys. Rev. E* **65** 026140

Algin A and Deviren B, 2005 *J. Phys. A, Math. Gen.* **38** 5945-5956

Alvarez-Gaume L, Gomez C and Sierra G 1989 *Nucl. Phys. B* **319** 155

Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., and Cornell E.A, 269: 198-201, 1995.

Apaydın, *İstatistik Fizik*, Hacettepe Yayınları, Ankara, 2004

Arfken G. B. and Weber H. S., “*Mathematical Methods for physicists*”, Forth Edition, Academic Press, p**223**, 1999, San Diego

## REFERANSLAR (Devamı)

---

Arik M., Çelik S., *Z. Phys. C* **59** (1993), 99-103

Arik M, Demircan E, Turgut T, Ekinçi L, Mungan M 1992 *Z. Phys. C* **55** 89

Arik M., Kornfilt J., Yıldız A., *Phys. Lett. A* **235** 1997 318

Arik M, Kornfilt J 2002 *Phys. Lett. A* **300** 392

Arik M. and Coon D. D, 1976, *J. Math. Phys.* **17**, 524

Baker M., Coon D. D. and Yu S., 1972 *Phys. Rev. D* **5**, 1429

Ballesteros A, Civitarese O, Herranz F J, Reboiro M 2002 *Phys. Rev. C* **66**  
064317

Biedenharn L. C., *J. Phys.* **A22**, L873 (1989)

Bonatsos D and Daskoloyannis C 1999 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **43** 537

Bonatsos D 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L101

## REFERANSLAR (Devami)

---

Chahrabarti R, Jagannathan R 1991 *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** L711

Chaichian M, Felipe R G and Montonen C 1993 *J. Phys. A: Math. Gen. A* **26** 4017

Chang Z and Chen S-X, *J. Phys. A: Math.Gen.* **35** (2002) 9731.

Daoud M, Kibler M 1995 *Phys. Lett. A* **206** 13

Dereli T., Verçin A., Metu Press, Ankara, p125-150, 1998

de Vega H J 1989 *Int. J. Mod. Phys. A* **4** 2371

Drinfeld V G 1987 Quantum groups *Proc. of Int. Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA) ed A M Gleason (Providence, RI: American Mathematical Society) p 798

Erbil H., Kuantum Mekaniği II, Cilt 2, Ege Üniversitesi Yayinevi, p250-257, Bornova, İzmir, 2001

Faddeev L D, Reshetikhin N Y and Takhtajan L A 1988 *Algebr. Anal.* **1** 129

## REFERANSLAR (Devamı)

---

Fairlie D B and Zachos C K 1991 *Phys. Lett. B* **256** 43

Gong R S 1995 *Phys. Lett. A* **199** 81

Greiner W and Maruhn J.A, “Nuclear models”, Springer-Verlag, p**21**, Berlin, 1995

Greiner W., Neise L., Stöcker H., “Thermodynamics and statistical mechanics”, Springer-Verlag, p**314**, New York, 1995

Gündüz E., Modern Fiziğe Giriş, Ege Üniversitesi Yayinevi, Bornova, İzmir, 1999

Haber H. E. and Weldon H. A., Thermodynamics of an Ultrarelativistic Ideal Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1497–1500 (1981)

Huang K 1987 *Statistical Mechanics* (New York: John Wiley&Sons)

Isaev A P and Malik R P 1992 *Phys. Lett. B* **280** 219

Jackson F. H., 1910 *Q. J. Pure: Appl. Math.* **41** 193

Jellal A 2002 *Mod. Phys. Lett. A* **17** 701

Jimbo M 1986 *Lett. Math. Phys.* **11**, 247

## REFERANSLAR (Devamı)

---

Kaniadakis G, Lavagno A, Quarati P 1997 *Phys. Lett. A* **227** 227

Karaoğlu B., İstatistik Mekaniğe Giriş, Seyir Yayıncılık, Ankara, 2003,

Kornfilt J 2005, *Balkan Phys. Lett.* **13** 1

Kulish P P and Reshetikhin N Y 1983 *J. Sov. Math.* **23** 2435

Lamb W and Nordsieck A, *Phys. Rev.* **59**, 677 (1941).

Lavagno A, Swamy P N 2000 *Phys. Rev. E* **61** 1218

Lavagno A, Swamy P N 2002 *Chaos Solitons and Fractals* **13** 437

Lee C R and Yu J P 1990 *Phys. Lett. A* **150** 63

London F., *Superfluids*, Vol. II (Wiley, New York, 1954).

Macfarlane A. J., *J. Phys.* **A22**, 4581 (1989)

## REFERANSLAR (Devamı)

---

Manin Y I 1989 *Commun. Math. Phys.* **123** 163

Martin-Delgado M A 1991 *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** L1285

Matthews M.R., Anderson B.P., Haljan P.C., Hall D.S., Wieman C.E., Cornell E.A.,  
*Vortices in a Bose-Einstein Condensate* *Phys. Rev. Lett.* **83**, pp. 2498 (1999)

Monteiro M A R, Roditi I, Rodrigues L M C S 1994 *Phys. Lett. A* **188** 11

Neskovic P. V., Urosevic B.V., *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 3379 (1992)

Ozeren S F, Tirnakli U, Buyukkilic F, Demirhan D 1998 *Eur. Phys. J.B* **2** 101

Pasquier V and Saleur H 1990 *Nucl. Phys. B* **330** 523

Pusz W, Woronowicz S L 1989 *Rep. Math. Phys.* **27** 231

Robinson J. E., *Phys. Rev.* **83**, 678 (1951)



## REFERANSLAR (Devami)

---

Sakurai J. J., Modern Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Amerika, p89-94, 1994

Schirrmacher A, Wess J, Zumino B 1991 *Z. Phys. C* **49** 317

Schwinger J., On angular momentum, U.S. AEC Report NYO-3071, 1951

Shankar R., Principles of Quantum Mechanics, second edition, Plenum Press, New York and London, p185-216, 1994

Su G, Chen J and Chen L 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 10141

Sviratcheva K D, Bahri C, Georgieva A I and Draayer J P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 152501

Tsallis C 1994 *Phys. Lett. A* **195** 329

Tuszynski J A, Rubin J L, Meyer J and Kibler M 1993 *Phys. Lett. A* **175** 173

Song H-S, Ding S-X and An I, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) 5197

Takhtajan L A 1989 *Adv. Studies Pure Math.* **19** 1

## REFERANSLAR (Devami)

---

Ubriaco M R 1997 *Phys. Rev. E* **55** 291

Ubriaco M R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 179

Ubriaco M R 1998 *Phys. Lett. A* **241** 1

Van der Jeugt J 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L405

Vokos S, Zumino B, Wess J 1989 *Symmetry in Nature*, Scuola Normale  
Superiore Pisa, Italy

Wess J and Zumino B 1990 *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **18** 302

Woronowicz S L 1987 *Commun. Math. Phys.* **111** 613.