

Minkowski Geometrileri Üzerine:
Taksi, Çin Dama ve α -Geometrileri Hakkında Genel Bir Analiz

Özcan Gelişgen

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2007

On The Minkowski Geometries:
A General Analysis About Taxicab, Chinese Checkers and α -Geometries

Özcan Gelişgen

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

October 2007

Minkowski Geometrileri Üzerine:
Taksi, Çin Dama ve α -Geometrileri Hakkında Genel Bir Analiz

Özcan Gelişgen

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Rüstem Kaya

Ekim 2007

Özcan Gelişgen'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Minkowski Geometrileri Üzerine: Taksi, Çin Dama ve α -Geometrileri Hakkında Genel Bir Analiz" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA (Danışman)

Üye : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Üye : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, bazı Minkowski geometrilerinin, uzaklıkla ilgili bir takım özellikleri incelenmiştir.

İlk bölümde, gerekli olan bazı tanımlar verilmiş; ilk olarak Minkowski geometri kavramı açıklanmıştır. Öklidyen geometri aksiyomları ifade edilip çalışma içinde gerekli olacak olan bazı doğrular ve düzlem bölgeleri için bir sınıflandırma üzerinde durulmuştur. Daha sonra Minkowski geometrilerinden Taksi, Çin Dama (CC) ve α -geometrileri hakkında genel bilgiler literatürden özetlenerek verilmiştir.

İkinci bölümde, Çin Dama düzlem geometrisinde üçgenler için Heron formülünün CC-benzeri verilmiştir. CC-düzleminin inversiyonları ve bunlarla ilgili bazı özellikler incelenmiştir. Daha sonra 3-boyutlu Çin Dama uzayında bir noktanın bir düzleme ve bir doğruya olan uzaklığı ile iki doğru arasındaki uzaklığı ifade eden formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde, α -düzlem geometrisinde Pisagor teoremi, Öklid bağıntıları, Stewart teoremi gibi Öklid düzleminde iyi bilinen kavramların benzerleri verilmiştir. α -düzlem geometrisi için elde edilen bu sonuçlar Taksi ve Çin Dama düzlemleri için mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Son bölümde, 3 ve n -boyutlu Taksi, Çin Dama ve α -uzaklıklarını özel hal olarak kapsayan daha genel bir metrik geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski geometrisi, Taksi geometrisi, Çin Dama geometrisi, α -geometrisi, Öklidyen olmayan geometri

SUMMARY

This thesis deals with some properties related with the distance of some Minkowski geometries.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First of all, the concept of Minkowski geometry is explained. Axioms of Euclidean geometry are given. And a classification of the lines and some regions in the plane is given. Later, general information about Taxicab, Chinese Checkers and α -geometries (which are special Minkowski geometries) is summarized from some known references.

In the second chapter, CC-version of Heron formulae is given in the CC plane geometry. Transformation of inversion and some properties of them are examined for Chinese Checkers plane. Later, distance formulas between a point and a line, a point and a plane and between two lines in three dimensional Chinese Checker space are given.

In the third chapter, α -version of some well-known properties of Euclidean plane as the theorem of Pythagorean, Euclid relations, Stewart's theorem are introduced. Obtaining results for α -plane geometry compared with same results of Taxicab and Chinese Checkers planes.

In the last chapter, we introduce the concept of α_i -distance, which is a generalization of Taxicab, Chinese Checker, and α -distances for \mathbb{R}^n .

Keywords: Minkowski geometry, Taxicab geometry, Chinese Checkers geometry, α -geometry, Non-Euclidean geometry

TEŞEKKÜR

Akademik kariyerimin başlangıcından itibaren bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım sayın

Prof. Dr. Rüstem KAYA'ya,

tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen her kararımda yanımda olan annem

Saime GELİŞGEN'e

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen tüm dostlarıma ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2007

Özcan GELİŞGEN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ.....	xiii
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Geometrik Yapılar ve Minkowski Geometrisi.....	1
1.2 Düzlem ve Uzay Taksi Geometri.....	7
1.3 Düzlem Çin Dama Geometrisi.....	13
1.4 Düzlem α -Geometrisi.....	18
2. ÇİN DAMA GEOMETRİSİ	23
2.1 Çin Dama Düzleminde Bir Üçgenin Alanı	23
2.2 Çin Dama Düzleminin İncersiyonları.....	46
2.3 Çin Dama Uzayında Uzaklık Formülleri	61
3. BAZI ÖKLİDYEN TEOREMLERİN α -DÜZLEM GEOMETRİSİNDEKİ BENZERLERİ	89
3.1 Pisagor Teoreminin α -Benzeri	91
3.2 Pisagor Teoreminin Bir Başka α -Benzeri	100
3.3 Öklid Bağntılarının α -Benzerleri	102
3.4 Stewart Teoreminin α -Benzeri.....	105
4. 3 VE n -BOYUTLU UZAYLARDA α_i UZAKLIĞI.....	127
4.1 Üç Boyutlu Uzayda α_i Uzaklığı.....	127
4.2 n -Boyutlu Uzayda α_i Uzaklığı	139
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	146

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

Sayfa

ÖZGEÇMİŞ 150

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	5
1.2	6
1.3	6
1.4 (a)-(b)	9
1.5	17
1.6	17
1.7	22
2.1	25
2.2	26
2.3	27
2.4	28
2.5	29
2.6	30
2.7	31
2.8	31
2.9	33
2.10	34
2.11	35
2.12	36
2.13	37
2.14	38
2.15	39
2.16	39
2.17	40
2.18	41
2.19	42
2.20	43
2.21	43

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.22	44
2.23	45
2.24	46
2.25	47
2.26 (a)-(d)	52
2.26 (e)-(h)	53
2.27	54
2.28 (a)-(b)	56
2.29 (a)-(b).....	57
2.30 (a)-(b).....	58
2.31 (a)-(b)	59
2.32 (a)-(b).....	60
2.33 (a)-(b).....	61
2.34	70
2.35 (a)-(b)	70
3.1 (a)-(d)	93
3.2 (a)-(b).....	95
3.3 (a)-(d).....	97
3.4 (a)-(b).....	98
3.5	102
3.6	105
3.7 (a)-(b).....	108
3.8 (a)-(b).....	109
3.9 (a)-(b).....	109
3.10 (a)-(b).....	110
3.11 (a)-(b).....	110
3.12 (a)-(b).....	111
3.13 (a)-(b).....	111

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.14 (a)-(b).....	112
3.15 (a)-(f).....	113
3.16 (a)-(b).....	114
3.17 (a)-(b).....	114
3.18 (a)-(b).....	115
3.19 (a)-(b).....	115
3.20	116
3.21	116
3.22	117
3.23	117
3.24	118
3.25	118
3.26	119
3.27	119
3.28	120
3.29	120
3.30	120
3.31	121
4.1 (a)-(b)	128
4.2	133
4.3	136
4.4	136
4.5	137
4.6	138
4.7	140

TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
3.1	Stewart Teoreminin α -Benzeri Δ Tablosu	106
3.2	Kenarortay Özelliği α -Benzeri Tablosu	122
3.3	Stewart Teoreminin CC-Benzeri Δ Tablosu.....	124
3.4	Kenarortay Özelliği CC-Benzeri tablosu.....	126

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Minkowski geometrilerini tanıtan ve inceleyen bir çok çalışmalar vardır. Bu bölüm tezi diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak amacı ile Minkowski geometrileri adına bilinen bazı kavram ve özellikler (Kaya, 2002), (Özcan ve Kaya, 2003), (Kaya ve Çolakoğlu, 2006), (Krause, 1975), (Martin, 1998), (Millmann and Parker, 1991), (Thompson, 1996) ve (Coxeter, 1961) kaynaklarından esas alınarak özetlendi.

1.1 Geometrik Yapılar ve Minkowski Geometrisi

(Thompson, 1996) da ifade edildiği gibi, Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca Space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğruları, açı ölçümü Öklidyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnızca bir fark vardır. Bu fark ise uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bu farklılık da alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Örneğin Öklidyen uzaydaki alışılmış kürenin yerine alınan "yeni birim küre" değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir, ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi geçerli değildir. Bu geometrilere örnek olarak Taksi geometri, Çin Dama geometrisi ve α -geometrisi verilebilir.

Önceki paragrafta bahsedilen Minkowski geometrilerine geçmeden Öklid geometrisinin aksiyomları verilmek istenirse, aşağıda verilen onüç aksiyom antik çağda Öklid tarafından düzlemsel geometri için verilen bir aksiyomlar kümesinin çağımızda indirgenmiş son -belki de en kullanışlı- şeklidir. Buna göre,

\mathbb{P} : noktalar kümesi,

\mathbb{L} : \mathbb{P} nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesi,

m : açı ölçüm fonksiyonu,

d_E : uzaklık fonksiyonu

olmak üzere aşağıda verilen onüç aksiyomu (E1-E13) sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ matematiksel yapısı *düzlem* olarak düşünülebilir.

[E1] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[E2] Her doğru en az iki nokta içerir. \mathbb{P} kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

[E1] ve [E2] aksiyomları *üzerinde olma* aksiyomları olarak bilinir.

Bunları izleyen dört aksiyom uzaklık fonksiyonununun sırayla *pozitif tanımlılık*, *simetrik* ve *üçgen eşitsizliğini* sağlamasıyla ilgilidir. Ayrıca *cetvel aksiyomu* denilen aksiyomu da sağlar. d_E için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir:

[E3] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d_E negatif olmayan bir $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_E(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[E4] $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dir.

[E5] $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir.

[E6] Verilen bir l doğrusu için bir $f_l : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm A, B noktaları için;

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d_E(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom *düzlem ayırma aksiyomudur*.

[E7] Verilen bir l doğrusu için \mathbb{P} nin H_1 ve H_2 gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır öyleki,

i) H_1 ve H_2 konvektir

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ (\mathbb{P} den l nin atılmışı demektir).

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$

olur.

Şimdi vereceğimiz dört özellik *açı ölçüm aksiyomu* diye anılır:

[E8] m , her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[E9] H yarı düzlemin kenarı üzerinde bir \overrightarrow{AB} ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek \overrightarrow{AP} ışını vardır.

[E10] Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

olur.

[E11] Eğer B , A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

olur.

Sıradaki aksiyom $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sisteminin “*kenar-açı-kenar*” aksiyomudur.

[E12] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eşdir.

Son olarak $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sistemi için ünlü *paralellik aksiyomunu* ifade edelim:

[E13] l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Şimdi geometrik yapıların incelenmesinde izlenen yolu takiple, daha basit yapıları geometriler üzerinde durarak Minkowski geometrisine geçişi sağlayan bilgiler (Martin, 1998) ve (Millmann and Parker, 1991) den özetlenilmektedir.

Tanım 1.1.1 \mathbb{P} elemanları noktalar olan bir küme ve \mathbb{L} de \mathbb{P} nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemine *soyut geometri* adı verilir.

- i) Her $A, B \in \mathbb{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in \mathbb{L}$ doğrusu vardır.
- ii) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

Tanım 1.1.2 $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ soyut geometri olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlarsa \mathcal{A} sistemine *incidence geometri* denir.

- i) \mathbb{L} deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.
- ii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Buna göre bir $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sisteminin incidence geometri olması için aşağıdaki üç aksiyomu sağlamalıdır:

- i) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.
- ii) Her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.
- iii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Öklid geometrisine metrik yaklaşım “A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor [1932]” çalışmasıyla Amerikan matematikçisi George David Birkhoff (1884-1944) a dayanır. Yukarıdaki E1 - E13 aksiyomları düzlemsel Öklid geometrisini metrik yaklaşımla düzenlemektedir. Bir incidence geometrinin metrik yaklaşımla incelenebilir olması için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç vardır:

Tanım 1.1.3 \mathcal{X} boş olmayan bir küme olmak üzere $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa \mathcal{X} kümesi üzerinde bir *metrik* tir denir. Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için,

- i) $d(P, Q) \geq 0$ ve $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- ii) $d(P, Q) = d(Q, P)$
- iii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Tanım 1.1.4 $l, [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometrinin bir doğrusu olsun. d de \mathbb{P} üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlarsa $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l için *cetveldir* denir.

- i) f fonksiyonu 1 : 1 ve örtendir.
- ii) l üzerindeki her P, Q nokta çifti için,

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. ii) şıkkındaki eşitliğe *cetvel denklemi* ve $f(P)$ ye de P nin f ye bağlı *koordinatı* denir.

Tanım 1.1.5 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometri olmak üzere d uzaklık fonksiyonu cetvel aksiyomunu sağlarsa ve her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ sistemine *metrik geometri* denir.

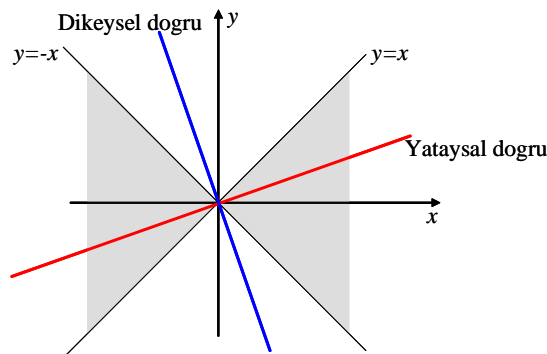
Minkowski geometrisi, \mathbb{P} Öklid geometrisindeki noktalar kümesi, \mathbb{L} Öklid geometrisindeki doğrular kümesi ve d herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisidir. O halde Minkowski geometrileri Öklidyen nokta ve doğrularla inşa edilen metrik geometrilerdir. Ancak açı ölçüm fonksiyonu ilavesi ve sağladıkları aksiyomlar ile aşağıdaki tanımları verilen geometrilerle de ilişkilendirilebilirler.

Tanım 1.1.6 Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye bir *Pasch geometrisi* denir.

Tanım 1.1.7 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ Pasch geometrisi ile birlikte m açı ölçüm fonksiyonu ile oluşturulan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ sistemine *Protractor geometri* denir. Kenar-Açı-Kenar aksiyomunu sağlayan Protractor geometriye *Absolute (mutlak) geometri* denir.

Analistik Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması ve Düzlemin Bölgelere Ayrılması

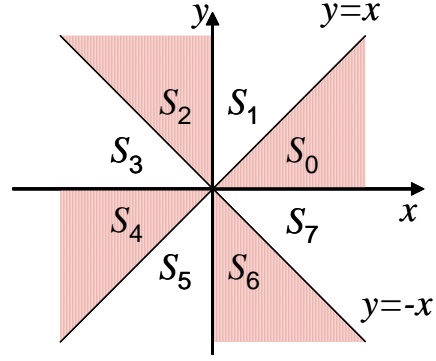
Analistik düzlemde $l \dots ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. l doğrusuna, $\left| -\frac{a}{b} \right| > 1$ ise, *dikeysel doğru*; $\left| -\frac{a}{b} \right| < 1$ ise, *yataysal doğru*; $\left| -\frac{a}{b} \right| = 1$ ise, *ayırmaç doğru* denir (Krause, 1975) (Şekil 1.1.).



Şekil 1.1.

\mathbb{R}^2 analitik düzlemi aşağıda belirtildiği gibi sekiz bölgeye ayrılabilir (Krause, 1975). Buna göre Şekil 1.2. de görüldüğü gibi sekiz bölge şöyledir:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{(x, y) | x \geq y \geq 0\} \\
S_1 &= \{(x, y) | y \geq x \geq 0\} \\
S_2 &= \{(x, y) | y \geq |x| \geq 0, x < 0\} \\
S_3 &= \{(x, y) | |x| \geq y \geq 0, x < 0\} \\
S_4 &= \{(x, y) | x \leq y \leq 0\} \\
S_5 &= \{(x, y) | y \leq x \leq 0\} \\
S_6 &= \{(x, y) | |y| \geq x \geq 0, y < 0\} \\
S_7 &= \{(x, y) | x \geq |y| \geq 0, y < 0\}
\end{aligned}$$



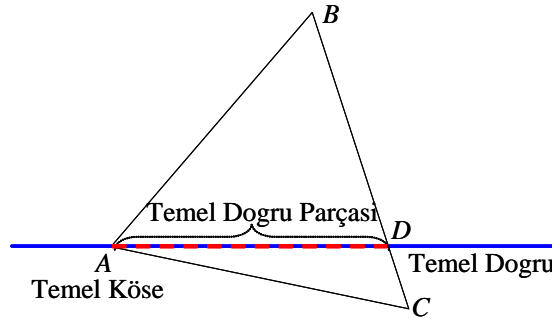
Şekil 1.2.

Ayrıca S_{i+1} , S_{i+2} , S_{i+3} ve S_{i+4} ifadeleri, sırasıyla, $S_{i+1(\text{mod } 8)}$, $S_{i+2(\text{mod } 8)}$, $S_{i+3(\text{mod } 8)}$ ve $S_{i+4(\text{mod } 8)}$ ifadelerini göstermektedir.

(Özcan ve Kaya, 2003) den alınan aşağıdaki tanım çalışmada sıkça kullanılmaktadır.

Tanım 1.1.8 $\triangle ABC$, analitik düzlem \mathbb{R}^2 de herhangi bir üçgen olsun. Üçgenin her köşesinde koordinat eksenlerine paralel olacak şekilde bir çift doğru vardır. Bu doğrulardan geçtiği köşenin karşısındaki kenarla kesişenlere $\triangle ABC$ üçgeninin *temel doğrusu* adı verilir. Temel doğrunun geçtiği köşeye de $\triangle ABC$ üçgeninin *temel köşesi* denir. Temel doğru üzerinde yatan ve temel köşe ile karşısındaki kenarla sınırlı doğru parçasına da *temel doğru parçası* adı verilir.

Bu tanıma göre analitik düzlemdeki herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin köşelerinden birinin daima bir veya iki temel doğruya sahip olduğu açıktır. Aşağıdaki Şekil 1.3. de herhangi $\triangle ABC$ üçgeninin temel köşe, temel doğru, temel doğru parçası görülmektedir.



Şekil 1.3.

Tanım 1.1.9 P_1 ve P_2 analitik n -uzayda herhangi iki nokta ve d de burada tanımlı bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu taktirde

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid d(P_1, X) + d(P_2, X) = d(P_1, P_2)\}$$

kümesine P_1 ve P_2 noktalarının *en kısa uzaklık kümesi* denir.

Bu küme d ye bağlı olarak P_1 den P_2 ye gidilebilen yolların birleşimidir.

1.2 Düzlem ve Uzay Taksi Geometri

20. yüzyılın başlarında H. Minkowski Taksi metriğini de kapsayan bir metrik ailesi verdi (Minkowski, 1967). Daha sonra K. Menger analitik düzlemde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık için iyi bilinen Öklidyen metrik yerine Taksi metriğini kullanarak Taksi düzlem geometri ile tanıştırdı (Menger, 1952). Sonralarda E. F. Krause düzlem Taksi geometrideki temel kavramları işleyen bir kitap yayınladı (Krause, 1975). Geçen yüzyıl boyunca Taksi geometri pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirildi. Bunlardan bazıları (Akça ve Kaya, 1997), (Akça ve Kaya, 2004a), (Akça ve Kaya, 2004b), (Bayar ve Ekmekçi, 2006), (Ho and Liu, 1996), (Kaya vd., 2000), (Kaya, 2006), (Laatsch, 1982), (Özcan vd., 2002), (Özcan ve Kaya, 2002), (Reynolds, 1980), (Schattschneider, 1984), (So and Al-Maskari, 1995), (So, 2002), (Thompson and Dray, 2000) ve (Tian et al., 1997) kaynaklarıdır.

Tanım 1.2.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki *Taksi uzaklık fonksiyonu* adı verilir.

Taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açık ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken K. Menger ve E. F. Krause bu noktalar arasındaki uzaklık için H. Minkowski

tarafından tanımlanan

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Taksi uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlemsel Taksi geometriyi geliştirdiler.

Tanımda verilen Taksi uzaklık fonksiyonu analitik düzlemde bir metrik belirtir.

Önerme 1.2.2 Analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu bir metrik-tir.

İspat: Metrik tanımı gereğince Taksi uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| \geq 0$ olduğundan $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ olup $d_T(P_1, P_2) \geq 0$ dir. Ayrıca

$$d_T(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkça $P_1 = P_2$ ise $d_T(P_1, P_2) = 0$ dir. O halde $d_T(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_T -uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Üstelik mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_T(P_1, P_2) = d_T(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_T -uzaklık fonksiyonu simetrik-tir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer özelliği gereğince

$$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$$

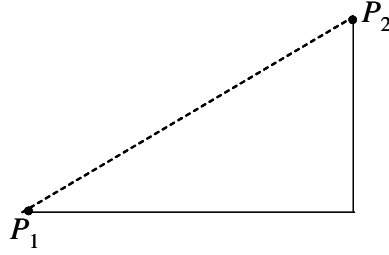
$$|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$$

olduğundan dolayı

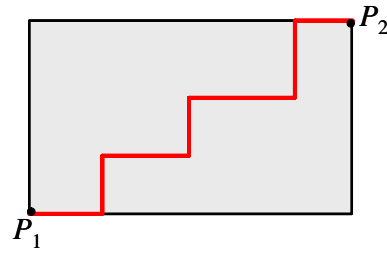
$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_T(P_1, P_3) + d_T(P_3, P_2) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle Taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu d_T bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 1.4.(a) de görüldüğü üzere her biri bir koordinat eksenine paralel olan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye gitmek için sadece Şekil 1.4.(a) daki yol değil aynı zamanda koordinat eksenlerine paralel hareket etmek üzere P_1P_2 köşegenli dikdörtgensel bölgede istenilen yol izlenebilir (Şekil 1.4.(b)).



Şekil 1.4.(a)



Şekil 1.4.(b)

Yardımcı Teorem 1.2.3 Analitik düzlemde farklı $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru l olsun ve d_E ile Öklidyen metrik gösterilsin. m , l doğrusunun eğimi ise

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

dir (Kaya, 2006).

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde farklı herhangi iki nokta olmak üzere $d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$ olacak şekilde bir λ parametresi vardır. Ayrıca P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$ dir.

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= \lambda d_E(P_1, P_2) \\ \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| &= \lambda \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \end{aligned}$$

olup $P_1 \neq P_2$ olduğundan $x_1 - x_2$ veya $y_1 - y_2$ den enaz biri sıfırdan farklıdır. Buna göre,

$$d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2) \Rightarrow \lambda = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan ise

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

olarak verilebilir. Burada eğer $x_1 = x_2$ veya $y_1 = y_2$ ise $d_T(P_1, P_2) = d_E(P_1, P_2)$ olduğu açıktır. Yani P_1 ile P_2 noktaları yatay veya dikey bir doğru üzerinde iken Taksi ve Öklidyen uzaklıklar eşittir.

Bu yardımcı teoreme göre herhangi bir doğru boyunca olan Taksi uzaklığı, aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığının sabit bir pozitif katıdır. Bu yardımcı teorem kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 1.2.4 P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaki üç nokta olsun. Bu taktirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ olmasıdır.

İspat: P_1, P_2 ve X analitik düzlemde doğrudaki üç nokta olsun. Önceki yardımcı teoremde dolayısı $\lambda = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_T(P_1, X) &= \lambda d_E(P_1, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_1, X) \\ d_T(P_2, X) &= \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_2, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ ise $\frac{1}{\lambda} d_T(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2, X) \Rightarrow d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ dir. Eğer $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ ise $\lambda d_E(P_1, X) = \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olur.

Sonuç 1.2.5 P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi farklı ve doğrudaki üç nokta olsun. Bu taktirde

$$\frac{d_T(P_1, X)}{d_T(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve Taksi uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat: P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaki üç nokta olsun. Önceki yardımcı teoremde dolayısı $\lambda = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_T(P_1, X) &= \lambda d_E(P_1, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_1, X) \\ d_T(P_2, X) &= \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_2, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_T(P_1, X)}{d_T(P_2, X)} = \frac{\lambda d_E(P_1, X)}{\lambda d_E(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

olur.

$n \geq 3$ olmak üzere n -boyutlu Taksi uzayları da, Taksi düzlemi ile benzer şekilde oluşturulur. n -boyutlu Taksi uzaylarında noktalar ve doğrular n -boyutlu Öklid uzaylarındaki noktalar ve doğruların aynısıdır. Açık ölçümü de Öklidyen durumdaki ile aynıdır. Üç ve n -boyutlu analitik uzayda alınan P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklid uzaklığı, sırasıyla,

$$\begin{aligned} d_E(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ d_E(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

iken bu noktalar arasındaki uzaklık için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \\ d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| \end{aligned}$$

Taksi uzaklık fonksiyonu kullanılarak üç ve n - boyutlu Taksi uzayları oluşturulur.

Yardımcı Teorem 1.2.6 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ analitik uzaydaki farklı iki nokta olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olmak üzere l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r) ise

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{|p| + |q| + |r|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} d_E(P_1, P_2)$$

dir (Akça ve Kaya, 2004a).

İspat: Üç boyutlu analitik uzayda farklı $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen l doğrusunun doğrultman vektörü $(p, q, r) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ dir. Ayrıca $d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$ olacak şekilde bir λ parametresi vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= \lambda d_E(P_1, P_2) \\ \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| &= \lambda \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ \Rightarrow |p| + |q| + |r| &= \lambda \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{|p| + |q| + |r|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{|p| + |q| + |r|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} d_E(P_1, P_2)$$

dir.

Düzlem için verilen sonuçlar benzer şekilde Taksi 3-uzayı için de verilebilir.

Sonuç 1.2.7 P_1, P_2 ve X analitik 3-uzayda herhangi doğrudan üç nokta olsun.

Bu taktirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ olmasıdır.

Sonuç 1.2.8 P_1, P_2 ve X analitik 3-uzayda herhangi farklı ve doğrudan olan üç nokta olsun. Bu taktirde

$$\frac{d_T(P_1, X)}{d_T(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve Taksi uzaklıklarının oranı aynıdır.

Üç boyutlu Taksi uzayında bir noktanın bir düzleme ve bir doğruya olan uzaklıkları ile iki doğrunun birbirine olan uzaklıkları (Akca ve Kaya, 2004a) da verildi. Buradaki sonuçlar özet olarak şöyledir:

Teorem 1.2.9 Bir $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının bir $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan Taksi uzaklığı

$$d_T(P, \mathcal{P}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max\{|A|, |B|, |C|\}}$$

dır.

Teorem 1.2.10 $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının

$$\frac{x - a}{p} = \frac{y - b}{q} = \frac{z - c}{r}$$

olarak verilen l doğrusuna olan Taksi uzaklığı

$$d_T(P, l) = \min \begin{cases} |p^{-1}| [|q(x_0 - a) - p(y_0 - b)| + |r(x_0 - a) - p(z_0 - c)|], & p \neq 0 \text{ ise} \\ |q^{-1}| [|p(y_0 - b) - q(x_0 - a)| + |r(y_0 - b) - q(z_0 - c)|], & q \neq 0 \text{ ise} \\ |r^{-1}| [|p(z_0 - c) - r(x_0 - a)| + |q(z_0 - c) - r(y_0 - b)|], & r \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

Teorem 1.2.11 Üç boyutlu Taksi uzayında

$$l \dots \frac{x - a}{p} = \frac{y - b}{q} = \frac{z - c}{r} = \lambda$$

ve

$$l' \dots \frac{x - a'}{p'} = \frac{y - b'}{q'} = \frac{z - c'}{r'} = \mu$$

olarak verilen herhangi iki doğru arasındaki Taksi uzaklığı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Eğer l ile l' paralel doğrular ise $A = (a, b, c) \in l$ olmak üzere $d_T(l, l') = d_T(A, l')$ dir.

Eğer l ile l' doğruları paralel değilse

$$d_T(l, l') = \min \begin{cases} |c' - c + [(a' - a)(qr' - rq') + (b' - b)(rp' - pr')](pq' - qp')^{-1}|, & pq' \neq qp' \text{ ise} \\ |a' - a + [(b' - b)(rp' - pr') + (c' - c)(pq' - qp')](qr' - rq')^{-1}|, & qr' \neq rq' \text{ ise} \\ |b' - b + [(c' - c)(pq' - qp') + (a' - a)(qr' - rq')](rp' - pr')^{-1}|, & rp' \neq pr' \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

1.3 Düzlem Çin Dama Geometrisi

E.F. Krause kitabında Çin Dama oyununda yapılan hareketi taklit eden bir metriğin nasıl oluşturulabileceği sorusunu ortaya attı (Krause, 1975). Bu sorunun cevabını da G. Chen verdi (Chen, 1992). Aradan geçen süreç boyunca Çin Dama geometrisi pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirildi. Bunlardan bazıları (Kaya vd., 2006), (Turan ve Özcan, 2004) (Turan ve Özcan, 2005), (Turan, 2004) ve (Uymaz, 2002) kaynaklarıdır.

Tanım 1.3.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.

$$d_c(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki *Çin Dama uzaklık fonksiyonu* adı verilir.

Çin Dama (CC) düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açık ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken bu noktalar arasındaki uzaklık için yukarıdaki tanımda verilen

$$d_c(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Çin Dama uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlem Çin Dama geometrisi oluşturulur.

Önerme 1.3.2 Analitik düzlemde tanımlanan Çin Dama uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0, |y_1 - y_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \geq 0$ dir. Ayrıca

$$d_c(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkça $P_1 = P_2$ ise $d_c(P_1, P_2) = 0$ dir. Bu takdirde $d_c(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_c -uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) = d_c(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_c -uzaklık fonksiyonu simetrik-tir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \\ &= t \end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right) |y_1 - y_3|\right) + \left(|x_3 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right) |y_3 - y_2|\right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.

Alt Durum II.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) |y_1 - y_3| \right) + \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) |y_3 - y_2| \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2}) (|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_3| \right) + \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) |x_3 - x_2| \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2}) (|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

dir.

III. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada II. duruma benzer olarak iki altdurum söz konusudur.

Altdurum III.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) |y_1 - y_3| \right) + \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) |y_3 - y_2| \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2}) (|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum III.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_3| \right) + \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) |x_3 - x_2| \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2}) (|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

dir.

IV. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1) |x_1 - x_3| \right) + \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) |x_3 - x_2| \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) \end{aligned}$$

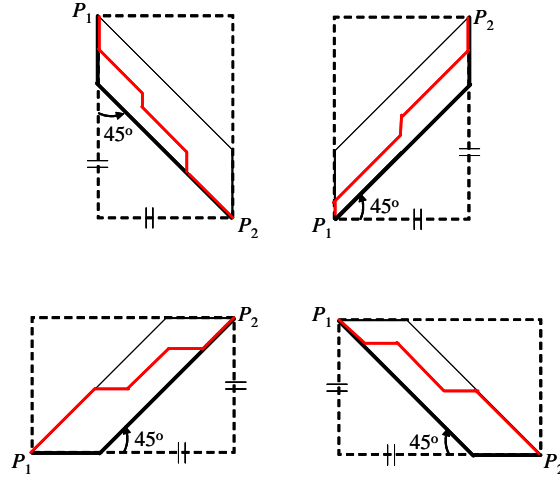
olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani Çin Dama uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

Buna göre Çin dama uzaklık fonksiyonu \mathbb{R}^2 de bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 1.5. de görüldüğü gibi biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri 1 veya -1 eğimli olan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye olan yolların birleşimi, yani P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi Şekil 1.5. de görüldüğü gibi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğeri kenar çifti ise diğeri koordinat eksenini ile 45° lik açı yapan paralelkenardır.



Şekil 1.5.

Tanım 1.3.3 Çin Dama düzleminde sabit bir noktadan sabit bir CC-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine *Çin Dama (CC) çemberi* denir. Sabit noktaya CC-çemberinin *merkezi*, sabit CC-uzaklığa da çemberin *yarıçapı* adı verilir.

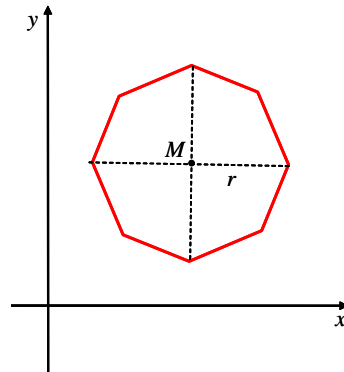
Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r CC-uzaklığında bulunan bütün noktalar

$$C = \{X = (x, y) : d_c(M, X) = r\}$$

yani

$$C = \left\{ X = (x, y) : \max\{|x - m_1|, |y - m_2|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x - m_1|, |y - m_2|\} = r \right\}$$

kümesini oluşturur. Buna göre C kümesi M merkezli, r yarıçaplı CC-çemberidir (Uymaz, 2002) (Şekil 1.6.).



Şekil 1.6.

Geometrik araştırmalardaki temel problemlerden biri d metriği ile donatılmış olarak verilen bir S uzayının G izometrilere grubunu tespit etmektir. Eğer S alışılmış metrikle verilmiş Öklid düzlemi ise G izometrilere grubunun düzlemin tüm ötelemeler, dönmeler, yansımalar ve kayma-yansımalarından oluştuğu bilinmektedir. Öklidyen düzlem için iyi bilinmektedir ki, $G = E(2)$, kendisinin iki altgrubu olan $O(2)$ ortagonal grup ve $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımıdır. Burada $O(2)$ birim çemberin simetrikleri grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

Çin Dama düzleminin izometrikleri için aşağıdaki önermeler (Kaya vd., 2006) dan verilebilir:

Önerme 1.3.4 Tüm Öklidyen ötelemeler \mathbb{R}_c^2 nin bir izometrisidir.

Önerme 1.3.5 Çin Dama düzleminde $y = mx$ doğrusuna ilişkin bir yansımının bir izometri olması için gerek ve yeter koşul

$$m \in \{0, \pm 1, \pm(\sqrt{2} - 1), \pm(\sqrt{2} + 1), \infty\}$$

olmasıdır.

Önerme 1.3.6 Çin Dama düzleminde d_c -uzaklığını koruyan sadece sekiz tane Öklidyen dönme vardır. Bir başka deyişle Çin Dama düzleminde izometrik dönmelerin kümesi

$$R_c = \left\{ r_\theta \mid \theta = k\frac{\pi}{4}, k = 0, 1, \dots, 7 \right\}$$

dir.

Bu önermeler yardımıyla Çin Dama düzleminin izometrikleri grubunun $D(8)$ dihedral grubu ile $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımı olduğu (Kaya vd., 2006) da gösterildi. Buradaki $D(8)$ dihedral grup Öklidyen düzgün sekizgenin simetrikleri grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

1.4 Düzlem α -Geometrisi

S. Tian α -uzaklığı adımı verdiği Taksi ve Çin Dama uzaklıklarını ikisinin de bir genelleştirilmiş olan bir metrik ailesi geliştirdi (Tian, 2005).

Tanım 1.4.1 $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.

$$\Delta_{P_1 P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad \text{ve} \quad \delta_{P_1 P_2} = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$\alpha \in [0, \pi/4]$ olmak üzere

$$d_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \Delta_{P_1 P_2} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \delta_{P_1 P_2}$$

olarak tanımlanan fonksiyona analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki α -uzaklık fonksiyonu denir.

Önerme 1.4.2 Analitik düzlemde, α -uzaklık fonksiyonu metrik belirtir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ ve $\alpha \in [0, \pi/4]$ için $\sec \alpha - \tan \alpha \geq 0$ olduğundan $d_\alpha(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_\alpha(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \Delta_{P_1 P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkça $P_1 = P_2$ ise $d_\alpha(P_1, P_2) = 0$ dır. Bu taktirde $d_\alpha(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_α -uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan $d_\alpha(P_1, P_2) = d_\alpha(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_α -uzaklık fonksiyonu simetrik-tir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} + \\ &\quad (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} + \\ &\quad (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \\ &= t \end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= (|x_1 - x_3| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |y_3 - y_2|) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.

Alt Durum II.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= (|x_1 - x_3| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |y_3 - y_2|) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (1 - (\sec \alpha - \tan \alpha)) (|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2|) \end{aligned}$$

olup burada $1 - (\sec \alpha - \tan \alpha) \geq 0$ ve $|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= (|y_1 - y_3| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |x_1 - x_3|) + (|y_3 - y_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |x_3 - x_2|) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (1 - (\sec \alpha - \tan \alpha)) (|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|) \end{aligned}$$

olup burada $1 - (\sec \alpha - \tan \alpha) \geq 0$ ve $|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

dir.

III. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada II. duruma benzer olarak iki altdurum söz konusudur.

Altdurum III.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= (|x_1 - x_3| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |y_3 - y_2|) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (1 - (\sec \alpha - \tan \alpha)) (|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olup burada $1 - (\sec \alpha - \tan \alpha) \geq 0$ ve $|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum III.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= (|y_1 - y_3| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |x_1 - x_3|) + (|y_3 - y_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |x_3 - x_2|) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (1 - (\sec \alpha - \tan \alpha)) (|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

olup burada $1 - (\sec \alpha - \tan \alpha) \geq 0$ ve $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

dir.

IV. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Bu taktirde

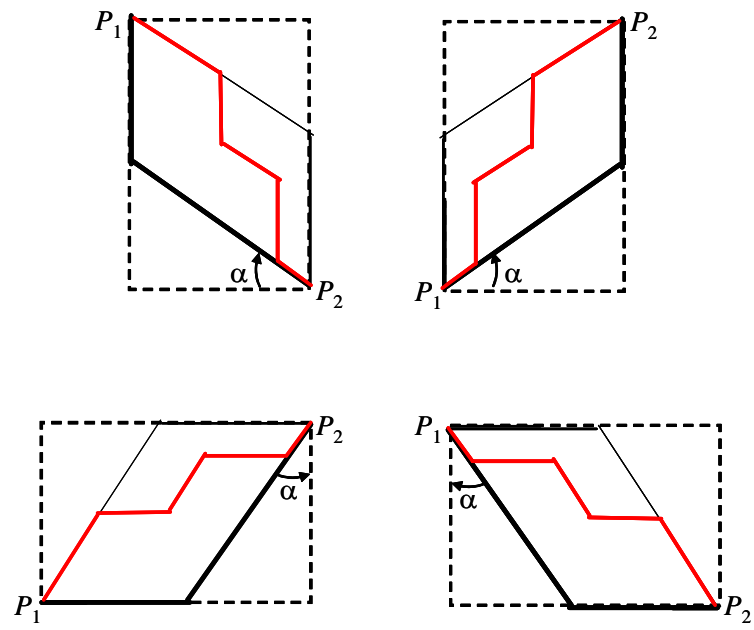
$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq t = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= (|y_1 - y_3| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |x_1 - x_3|) + (|y_3 - y_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |x_3 - x_2|) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani α -uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre α -uzaklık fonksiyonu \mathbb{R}^2 de bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 1.7. de görüldüğü gibi biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri diğer koordinat eksenine ile α açısı yapan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi Şekil 1.7. de görüldüğü gibi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat eksenine ile α açısı yapan paralelkenardır.



Şekil 1.7.

BÖLÜM 2

ÇİN DAMA GEOMETRİSİ

Bu bölümde Çin Dama düzleminde Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen Heron formülünün CC benzeri (Özcan ve Kaya, 2003) dekine benzer yolla verilmektedir. Ayrıca CC-düzleminde bir çemberin iç bölgesindeki merkezden farklı noktaları dış bölgedeki noktalara, dış bölgesindeki noktaları merkez hariç iç bölgesindeki noktalara dönüştüren inversiyon dönüşümleri incelenmektedir. Bu bölümde son olarak 3-boyutlu CC-uzayında bir noktanın bir düzleme ve bir doğruya olan uzaklık formülleri ile iki doğru arasındaki uzaklığı ifade eden formüller (Akça ve Kaya, 2004a) çalışmasında izlenen yöntemle benzer şekilde verilmektedir.

2.1 Çin Dama Düzleminde Bir Üçgenin Alanı

Bu kısımda Öklidyen düzlem için çok iyi bilinen Heron formülünün Çin Dama düzlemindeki karşılığı verilmektedir. Öklid düzleminde iyi bilinen

$$\text{Üçgenin Alanı} = (\text{Taban} \times \text{Yükseklik})/2$$

formülü Çin Dama düzleminde genel olarak geçerli değildir. Bu formülün geçerli olması için gerek ve yeter koşul tabanın koordinat eksenlerinden birine veya $y = \mp x$ doğrularından birine paralel olmasıdır. Çünkü bu hallerin herbirinde Öklidyen ve Çin Dama uzaklıkları aynıdır. Ayrıca bir üçgenin alanı üçgenin üç kenarının uzunlukları kullanılarak da hesaplanabilir. a, b, c herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $p = \frac{a + b + c}{2}$ yarı çevre olmak üzere üçgenin alanı A

$$A^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

şeklinde de bulunabilir. Bu formül Heron formülü olarak bilinir. Çin Dama düzleminde bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları

$$\mathbf{a} = d_c(B, C) \quad , \quad \mathbf{b} = d_c(A, C) \quad , \quad \mathbf{c} = d_c(A, B)$$

ve Çin Dama yarıçevresi

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$$

olsun. Ayrıca temel kavramlar kısmında belirtilen doğru sınıflandırılmasını ve temel köşe, temel doğru gibi kavramlar kullanılmaktadır. Aşağıdaki önermeler Heron formülünün bazı özel durumlardaki Çin Dama (CC) karşılıklarını vermektedir.

Önerme 2.1.1 CC-düzleminde, herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin bir kenarı, örneğin BC kenarı, koordinat eksenlerinden birisine veya $y = \mp x$ doğrularından birine paralel olsun. Ayrıca üçgenin B ve C köşelerindeki açılardan hiçbiri geniş açı değilse, $\triangle ABC$ üçgeninin alanı

$$A(\triangle ABC) = \begin{cases} \frac{\mathbf{a}}{2(\sqrt{2}-1)}(\mathbf{p}-\mathbf{a}) & , K1 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \frac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}}\right) & , K2 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \frac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right) & , K3 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \frac{\mathbf{a}}{2}\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}}\right) & , K4 \text{ koşulu geçerli ise} \end{cases}$$

dır. Burada Ki , $i = 1, 2, 3, 4$ koşulları aşağıdaki gibidir:

$K1$: BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB , AC kenarları yataysal (dikeysel) doğrular üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB , AC kenarlarından biri yataysal diğeri dikeyseldir.

$K2$: BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerinde, AC kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerindedir.

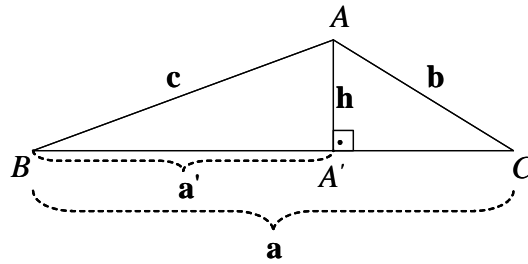
$K3$: BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerinde, AC kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerindedir.

$K4$: BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB , AC kenarları dikeysel (yataysal) doğrular üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerindedir.

İspat: BC kenarı x -eksenine paralel olacak şekilde bir ABC üçgeni gözöntüne

alınsın. Üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ile gösterilmek üzere $\mathbf{h} = d_c(A, A')$ ve $\mathbf{a}' = d_c(B, A')$ olsun. Buna göre üçgenin AB ve AC kenarlarının düzlemdeki pozisyonlarına göre dört durum mümkündür.

I. Durum: B ve C köşesindeki açılar $\pi/4$ den küçük olsun. Bir başka deyişle AB ve AC kenarları yataysal doğrular üzerinde olsun (Şekil 2.1.).



Şekil 2.1.

Burada oluşan $\triangle ABA'$ ve $\triangle AA'C$ üçgenleri ele alındığında

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}' + (\sqrt{2} - 1) \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \mathbf{h}$$

ve

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a} - \mathbf{a}') + (\sqrt{2} - 1) \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{h} = (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) / 2 (\sqrt{2} - 1)$$

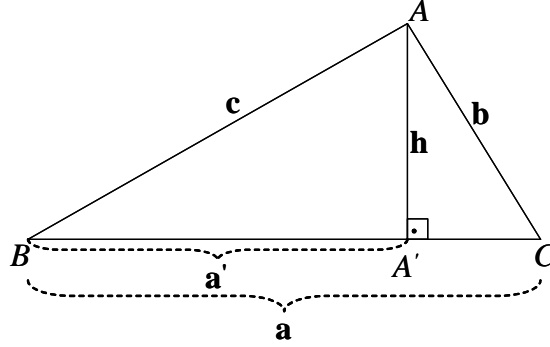
bulunur. Elde edilen bu değerler $A = \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{h}$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \left(\frac{-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2 (\sqrt{2} - 1)} \right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2 (\sqrt{2} - 1)} (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Çin Dama düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler izometri olduğundan dolayı yukarıda bulunan ifade, sırasıyla, BC kenarı y -eksenine paralel ve AB , AC kenarları dikeysel doğrular üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB , AC kenarlarından biri yataysal diğeri dikeysel iken de geçerlidir.

II. Durum: Şekil 2.2. deki gibi $\triangle ABC$ üçgeninin BC kenarı x -eksenine paralel, AB kenarı yataysal bir doğru üzerinde ve AC kenarı bir dikeysel doğru üzerinde olsun.



Şekil 2.2.

Benzer şekilde burada oluşan $\triangle ABA'$ ve $\triangle AA'C$ üçgenlerinden

$$c = a' + (\sqrt{2} - 1) h \Rightarrow a' = c - (\sqrt{2} - 1) h$$

ve

$$b = h + (\sqrt{2} - 1) (a - a') \Rightarrow h = \frac{-a + (\sqrt{2} + 1) b + c}{2\sqrt{2}}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler $A = \frac{1}{2}ah$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ah \\ &= \frac{1}{2}a \left(\frac{-a + (\sqrt{2} + 1) b + c}{2(\sqrt{2} - 1)} \right) \\ &= \frac{a}{2\sqrt{2}} \left(p - a + \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

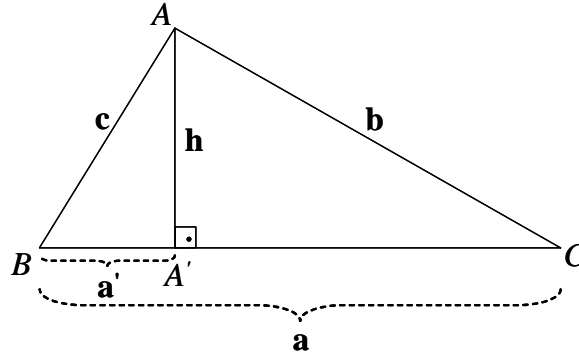
Çin Dama düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan dolayı yukarıda bulunan ifade, sırasıyla, BC kenarı y -eksenine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde iken de geçerlidir.

III. Durum: Varsayalım ki $\triangle ABC$ üçgeninin BC kenarı x -eksenine paralel, AB kenarı dikeysel bir doğru üzerinde ve AC kenarı bir yataysal doğru üzerinde olsun.

II. Duruma benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{h} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \left(\frac{-\mathbf{a} + \mathbf{b} + (\sqrt{2} + 1) \mathbf{c}}{2(\sqrt{2} - 1)} \right) \\
 &= \frac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}} \left(\mathbf{p} - \mathbf{a} + \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

sonucu bulunur.



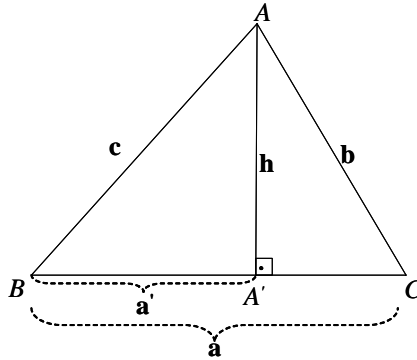
Şekil 2.3.

CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan dolayı elde edilen bu ifade, sırasıyla, BC kenarı y -eksenine paralel ve AB kenarı yataysal doğru üzerinde, AC kenarı dikeysel doğru üzerinde olması halinde ve de BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde olması halinde de geçerlidir.

IV. Durum: AB ve AC kenarları dikeysel doğrular üzerinde olsun. Diğer durumlarda olduğu gibi benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{h} \\
 &= \frac{\mathbf{a}}{2} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.



Şekil 2.4.

Diğer hallerde de belirtildiği gibi CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan dolayı elde edilen bu ifade, sırasıyla, BC kenarı y -eksenine paralel ve AB , AC kenarları yataysal doğrular üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde olması halinde de geçerlidir.

Önerme 2.1.2 CC-düzleminde, herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin bir kenarı, örneğin BC kenarı, koordinat eksenlerinden birisine veya $y = \mp x$ doğrularından birine paralel olsun. Ayrıca üçgenin B ve C köşelerindeki açılardan biri, örneğin B açısı, geniş açı ise, üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ve $\mathbf{a}' = d_c(B, A')$ olmak üzere $\triangle ABC$ üçgeninin alanı

$$A(\triangle ABC) = \begin{cases} \frac{\mathbf{a}}{2} (\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) & , K1 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \frac{\mathbf{a}}{2} \left(\mathbf{p} - \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}} \right) & , K2 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \frac{\mathbf{a}}{2} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1)\mathbf{a}' \right) & , K3 \text{ koşulu geçerli ise} \end{cases}$$

dır. Burada Ki , $i = 1, 2, 3$ koşulları aşağıdaki gibidir:

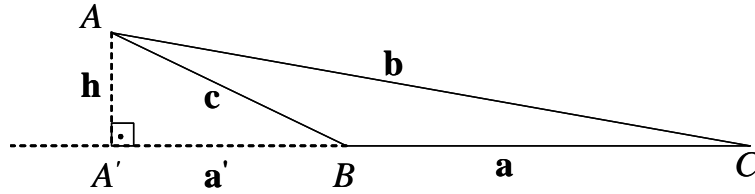
$K1$: BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB , AC kenarları yataysal (dikeysel) doğrular üzerindedir.

$K2$: BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerinde, AC kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB ile AC kenarları yataysal veya dikeysel doğrular üzerindedir.

K3 : BC kenarı x -eksenine (y -eksenine) paralel ve AB , AC kenarları dikeysel (yataysal) doğrular üzerindedir.

İspat: BC kenarı x -eksenine paralel ve B köşesindeki geniş açı olacak şekilde bir ABC üçgeni gözöntüne alınsın. Üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ile gösterilmek üzere $\mathbf{h} = d_c(A, A')$ ve $\mathbf{a}' = d_c(B, A')$ olsun. Buna göre üçgenin AB ve AC kenarlarının düzlemdeki pozisyonlarına göre üç durum mümkündür:

I. Durum: AB ve AC kenarları Şekil 2.5. de görüldüğü gibi yataysal doğrular üzerinde olsun.



Şekil 2.5.

Burada oluşan $\triangle ABA'$ ve $\triangle ACA'$ üçgenleri ele alındığında

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}' + (\sqrt{2} - 1) \mathbf{h} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}' = \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \mathbf{h} \\ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}'}{(\sqrt{2} - 1)} \end{cases}$$

ve

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}') + (\sqrt{2} - 1) \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$$

bulunur. Elde edilen bu değerler kullanılarak

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$$

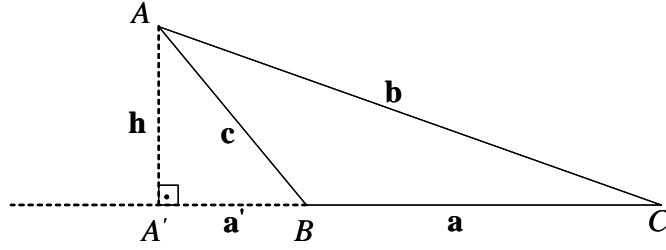
ve

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \left(\frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}'}{(\sqrt{2} - 1)} \right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2(\sqrt{2} - 1)} (\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Çin Dama düzleminde $\frac{\pi}{2}$ lik dönmeler izometri olduğundan dolayı yukarıda bulunan ifade BC kenarı y -eksenine paralel ve AB , AC kenarları dikeysel doğrular üzerinde olması halinde de geçerlidir.

II. Durum: Varsayalım ki AB kenarı dikeysel bir doğru üzerinde ve AC kenarı yataysal bir doğru üzerinde olsun (Şekil 2.6.).



Şekil 2.6.

Şekil 2.6 da görüldüğü gibi $\triangle ABA'$ ve $\triangle AA'C$ üçgenlerinden

$$c = h + (\sqrt{2} - 1) a' \Rightarrow a' = \frac{c - h}{\sqrt{2} - 1}$$

ve

$$b = (a + a') + (\sqrt{2} - 1) h \Rightarrow h = \frac{a - b + (\sqrt{2} + 1) c}{2}$$

bulunur. Bulunan bu değerler $A = \frac{1}{2}ah$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ah \\ &= \frac{1}{2}a \left(\frac{a - b + (\sqrt{2} + 1) c}{2} \right) \\ &= \frac{a}{2\sqrt{2}} \left(p - b + \frac{c}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

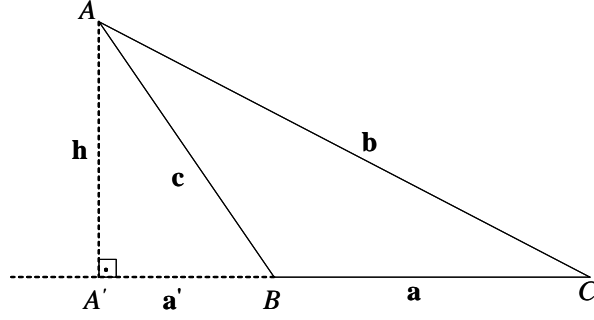
ifadesine ulaşılır.

CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan bu halde elde edilen sonuç, sırasıyla, BC kenarı y -eksenine paralel ve AB kenarı yataysal doğru üzerinde, AC kenarı dikeysel doğru üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB ile AC kenarları dikeysel doğru üzerinde veya yataysal doğru üzerinde iken de geçerlidir.

III. Durum: Farzedelim ki, AB ve AC kenarları dikeysel doğrular üzerinde olsun. Tıpkı I. Durumda olduğu gibi kolaylıkla

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{h} \\
&= \frac{\mathbf{a}}{2} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1) \mathbf{a}' \right)
\end{aligned}$$

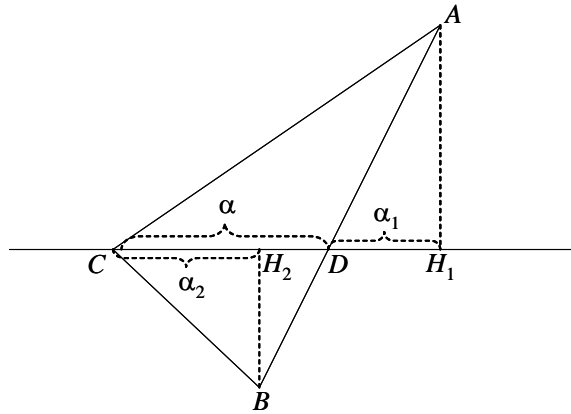
sonucu elde edilir.



Şekil 2.7.

Bu sonuç CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ lik dönme izometri olduğundan BC kenarı y -eksenine paralel ve AB , AC kenarları yataysal doğrular üzerinde iken de geçerlidir.

Şimdi temel kavramlar kısmında belirtilen temel köşe, temel doğru, temel doğru parçası kavramlarını kullanarak hiçbir kenarı herhangi bir koordinat eksenine paralel olmayan üçgenler için Heron formülünün CC-benzeri verilmektedir. Herhangi bir üçgenin enaz bir köşesi bir veya iki temel doğruya sahiptir. Aşağıdaki teoremden ele alınacak olan herhangi bir üçgenin C köşesi temel köşe olsun. Ayrıca C den geçen temel doğruya diğer A ve B köşelerinden inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olsun. Temel doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta D olmak üzere $\alpha = d_c(C, D)$, $\alpha_1 = d_c(C, H_1)$ ve $\alpha_2 = d_c(C, H_2)$ olarak alınmaktadır (Şekil 2.8.).



Şekil 2.8.

Aşağıdaki teorem Heron formülünün genel CC-benzerini vermektedir.

Teorem 2.1.3 CC-düzleminde, $\triangle ABC$ herhangi bir üçgen ve C temel köşesinden geçen temel doğruya diğer A ve B köşelerden inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olsun. Temel doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta D , $\alpha = d_c(C, D)$, $\alpha_1 = d_c(C, H_1)$ ve $\alpha_2 = d_c(C, H_2)$ olmak üzere $\triangle ABC$ üçgeninin alanı

$$A(\triangle ABC) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} (2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1)(\alpha_1 + \alpha_2)) & , K1 \text{ koşuluyla} \\ \frac{\alpha}{2(\sqrt{2} - 1)} (2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\alpha_1 + \alpha_2)) & , K2 \text{ koşuluyla} \\ \frac{\alpha}{2} (2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1)(\alpha_1 + (\sqrt{2} + 1)^2\alpha_2)) & , K3 \text{ koşuluyla} \\ \frac{\alpha}{2} (2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1)((\sqrt{2} + 1)^2\alpha_1 + \alpha_2)) & , K4 \text{ koşuluyla} \end{cases}$$

dır. Burada Ki , $i = 1, 2, 3$ koşulları aşağıdaki gibidir:

$K1$: Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar dikeysel (yataysal)dir veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar dikeyseldir

$K2$: Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar yataysal (dikeysel)dır veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar yataysaldır.

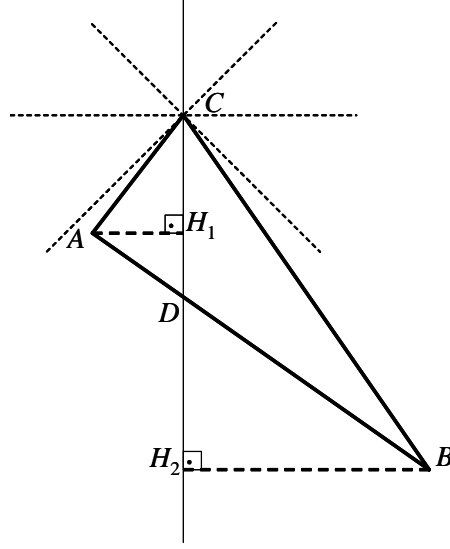
$K3$: Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a yataysal (dikeysel), b dikeysel (yataysal)dir veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a yataysal, b dikeyseldir.

$K4$: Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a dikeysel (yataysal), b yataysal (dikeysel)dır veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a dikeysel, b yataysaldır.

İspat: Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde C , $\triangle ABC$ üçgeninin temel köşesi, temel doğrunun AB kenarını kestiği nokta D olsun. Ayrıca A ve B köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olmak üzere $\alpha = d_c(C, D)$, $\alpha_1 = d_c(C, H_1)$ ve $\alpha_2 = d_c(C, H_2)$ olsun. Ayrıca $\triangle ABC$ üçgeninin yarı çevre uzunluğu \mathbf{p} olsun. O halde C den geçen temel doğru sayısına göre, öncelikle iki başlıca durum söz konusudur:

I. Durum: $\triangle ABC$ üçgeninin C temel köşesinden geçen bir tek temel doğru olsun. Buna göre $\triangle ABC$ üçgeninin kenarlarının eğimlerine göre sekiz alt durum vardır.

Altdurum 1.1: $\triangle ABC$ üçgeninin tüm kenarları dikeysel ve temel köşeden geçen temel doğru dikey olsun(Şekil 2.9.).



Şekil 2.9.

Şekil 2.9. dan da görülebileceği üzere

$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

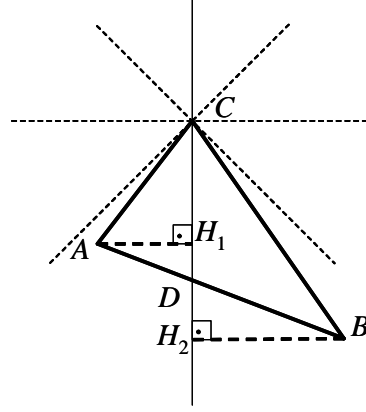
dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2(\sqrt{2} - 1)} (|AC| + |BC| - |CH_1| - |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2(\sqrt{2} - 1)} (2\mathbf{p} - |AB| - |CH_1| - |CH_2|) \\ &= \frac{\alpha}{2(\sqrt{2} - 1)} (2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan temel doğru yatay ve tüm kenarlar yataysal olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.2: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| > 1$

ve temel doğru dikey olsun(Şekil 2.10.).



Şekil 2.10.

Şekil 2.10. dan da görülebileceği üzere

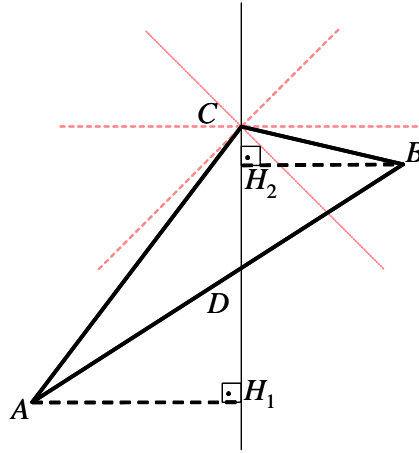
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1||CD|}{2} + \frac{|BH_2||CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2(\sqrt{2} - 1)} (|AC| + |BC| - |CH_1| - |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2(\sqrt{2} - 1)} (2\mathbf{p} - |AB| - |CH_1| - |CH_2|) \\ &= \frac{\alpha}{2(\sqrt{2} - 1)} (2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.3: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru dikey olsun(Şekil 2.11.).



Şekil 2.11.

Şekil 2.11. den de görülebileceği üzere

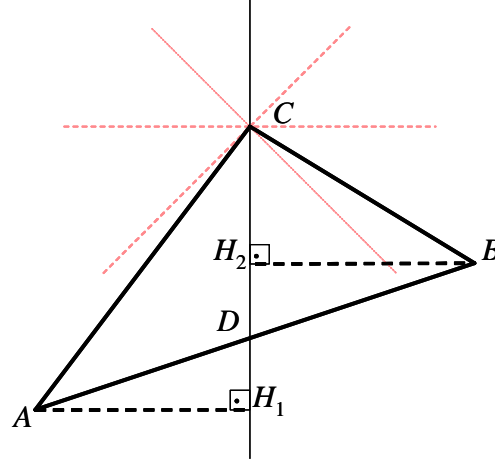
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left((\sqrt{2} + 1) |AC| + |BC| - (\sqrt{2} + 1) |CH_1| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2| \right) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2} |AC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 |CH_1| + |CH_2| \right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_1 + \alpha_2 \right) \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.4: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru dikey olsun(Şekil 2.12.).



Şekil 2.12.

Şekil 2.12. den de görülebileceği üzere

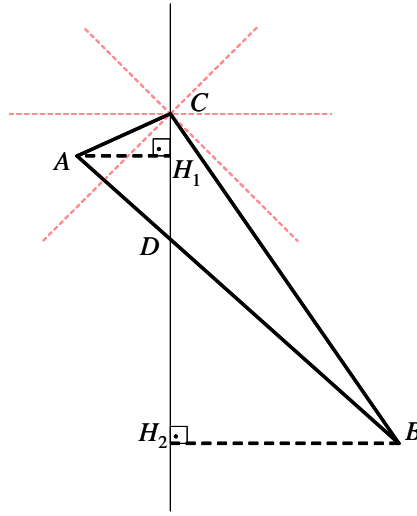
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left((\sqrt{2} + 1) |AC| + |BC| - (\sqrt{2} + 1) |CH_1| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2| \right) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2} |AC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 |CH_1| + |CH_2| \right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_1 + \alpha_2 \right) \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.5: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ ve temel doğru dikey olsun(Şekil 2.13.).



Şekil 2.13.

Şekil 2.13. den de görülebileceği üzere

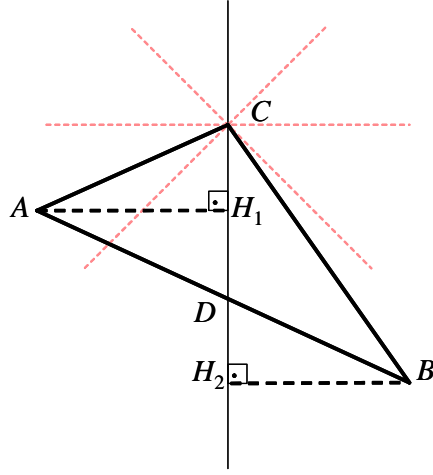
$$|AH_1| = |AC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AC| + (\sqrt{2} + 1) |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| - (\sqrt{2} + 1) |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2} |BC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) (|CH_1| + (\sqrt{2} + 1)^2 |CH_2|) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left(\alpha_1 + (\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_2 \right) \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.6: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ ve temel doğru dikey olsun(Şekil 2.14.).



Şekil 2.14.

Şekil 2.14. den de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = |AC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AC| + (\sqrt{2} + 1) |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| - (\sqrt{2} + 1) |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2} |BC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) (|CH_1| + (\sqrt{2} + 1)^2 |CH_2|) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left(\alpha_1 + (\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_2 \right) \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.7: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru dikey olsun (Şekil 2.15.). Ancak düzlemde bu koşullara uygun bir üçgen çizilemez. $c_1, c_2 \in (1, \infty)$ olmak üzere AC ve CB kenarları, sırasıyla, $y = \frac{1}{c_1}x$ ve $y = \frac{-1}{c_2}x$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = \left(-a, \frac{-a}{c_1}\right)$

ve $B = \left(b, \frac{-b}{c_2}\right)$ olsun. O halde AB kenarının eğimi için

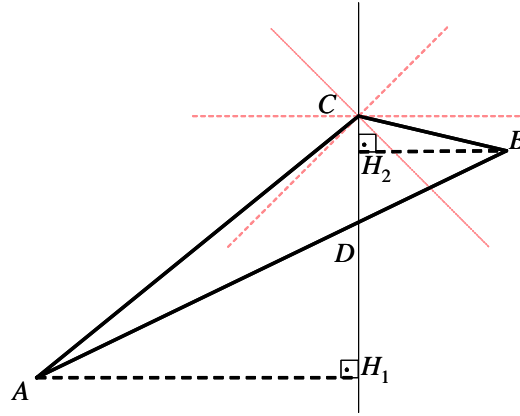
$$\frac{\left|\frac{-a}{c_1} + \frac{b}{c_2}\right|}{|a+b|} > 1$$

olmalıdır. Bu ise $\frac{-a}{c_1} + \frac{b}{c_2} > a+b$ veya $\frac{a}{c_1} - \frac{b}{c_2} > a+b$ koşullarını gerektirir. Bu eşitsizlikler düzenlendiğinde

$$\frac{-a(1+c_1)}{c_1} > \frac{b(c_2-1)}{c_2} \text{ ve } \frac{a(1-c_1)}{c_1} > \frac{b(1+c_2)}{c_2}$$

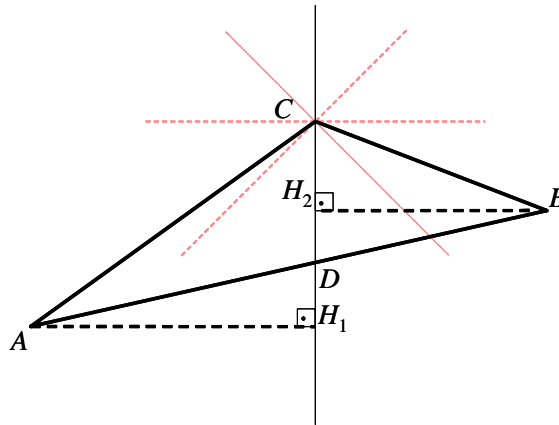
elde edilirki, burada her iki eşitsizlikte $- > +$ olma koşulu gelir ki bu bir çelişkidir.

Şekil 2.15. de görülen AB kenarı yataysaldır.



Şekil 2.15.

Altdurum 1.8: $\triangle ABC$ üçgeninin tüm kenarları yataysal ve temel köşeden geçen temel doğru dikey olsun(Şekil 2.16.).



Şekil 2.16.

Şekil 2.16. dan da görülebileceği üzere

$$|AH_1| = |AC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| \quad \text{ve} \quad |BH_2| = |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|$$

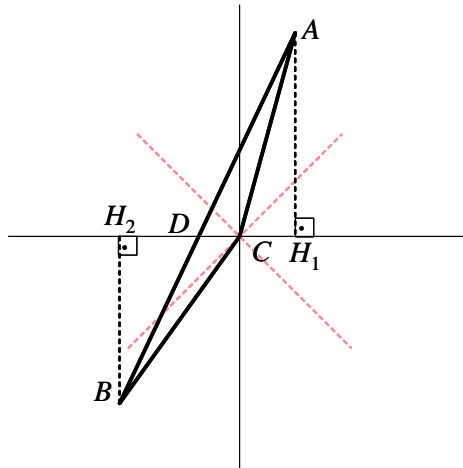
dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AC| + |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (2\mathbf{p} - |AB| - (\sqrt{2} - 1) (|CH_1| + |CH_2|)) \\ &= \frac{\alpha}{2} (2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2$ -lik dönmeler izometri olduğundan tüm kenarlar dikeysel ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

II. Durum: $\triangle ABC$ üçgeninin C temel köşesinden geçen iki temel doğru olsun. Bu durum içinde $\triangle ABC$ üçgeninin kenarlarının eğimlerine göre sekiz alt durum vardır.

Altdurum 2.1: $\triangle ABC$ üçgeninin tüm kenarları dikeysel olsun(Şekil 2.17.).



Şekil 2.17.

Şekil 2.17. den de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = |AC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| \quad \text{ve} \quad |BH_2| = |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|$$

dir. Bu durumda

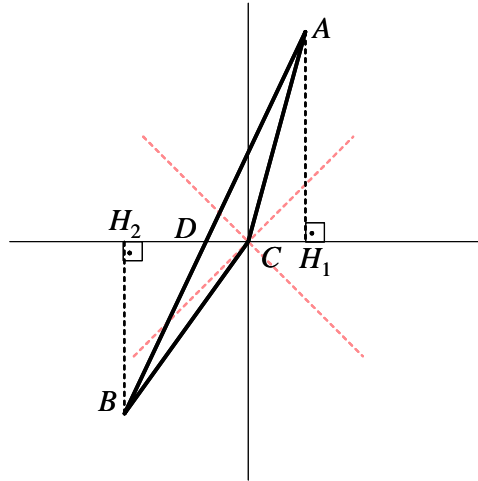
$$\begin{aligned}
A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\
&= \frac{|AH_1||CD|}{2} + \frac{|BH_2||CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\
&= \frac{|CD|}{2} (|AC| + |BC| - (\sqrt{2} - 1)|CH_1| - (\sqrt{2} - 1)|CH_2|) \\
&= \frac{|CD|}{2} (2\mathbf{p} - |AB| - (\sqrt{2} - 1)(|CH_1| + |CH_2|)) \\
&= \frac{\alpha}{2} (2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1)(\alpha_1 + \alpha_2))
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.2: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| > 1$ olsun(Şekil 2.18.). Ancak düzlemde bu koşullara uygun bir üçgen oluşturulamaz. $c_1, c_2 \in (1, \infty)$ olmak üzere BC ve AC kenarları, sırasıyla, $y = c_1x$ ve $y = c_2x$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = (-a, -c_1a)$ ve $B = (b, c_2b)$ olsun. O halde AB kenarının eğimi için

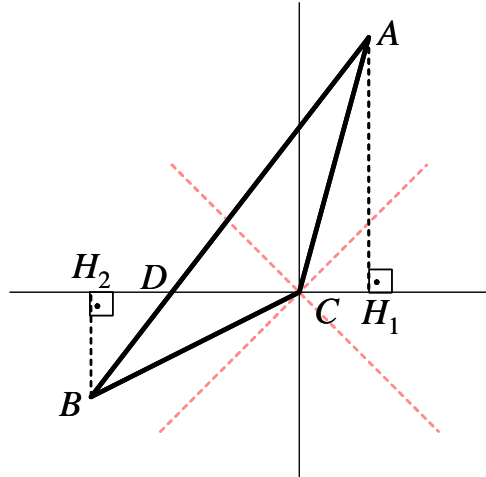
$$\frac{|c_1a + c_2b|}{|a + b|} < 1$$

olmalıdır. Bu ise $|c_1a + c_2b| < |a + b|$ koşulunu gerektirir. Fakat $c_1, c_2 \in (1, \infty)$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olduğundan bu eşitsizliğin çözüm kümesi boş kümedir. O halde bu koşullara uygun bir üçgen yoktur. Şekil 2.18. de görülen AB kenarı dikeyseldir.



Şekil 2.18.

Altdurum 2.3: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ olsun(Şekil 2.19.).



Şekil 2.19.

Şekil 2.19. dan da görülebileceği üzere

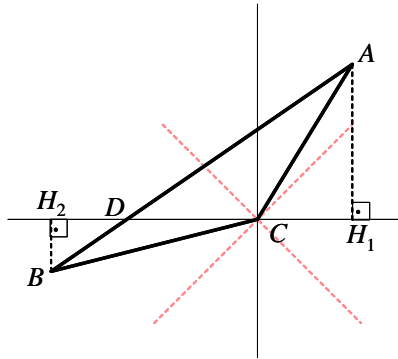
$$|AH_1| = |AC| - (\sqrt{2} - 1)|CH_1| \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1||CD|}{2} + \frac{|BH_2||CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AC| + (\sqrt{2} + 1)|BC| - (\sqrt{2} - 1)|CH_1| - (\sqrt{2} + 1)|CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (2\mathbf{p} + \sqrt{2}|BC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) (|CH_1| + (\sqrt{2} + 1)^2 |CH_2|)) \\ &= \frac{\alpha}{2} (2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) (\alpha_1 + (\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_2)) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.4: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ olsun(Şekil 2.20.).



Şekil 2.20.

Şekil 2.20 den de görülebileceği üzere

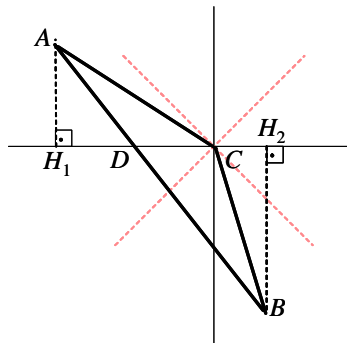
$$|AH_1| = |AC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AC| + (\sqrt{2} + 1) |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_1| - (\sqrt{2} + 1) |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2} |BC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) (|CH_1| + (\sqrt{2} + 1)^2 |CH_2|) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left(\alpha_1 + (\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_2 \right) \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.5: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ olsun(Şekil 2.21.).



Şekil 2.21.

Şekil 2.21. den de görülebileceği üzere

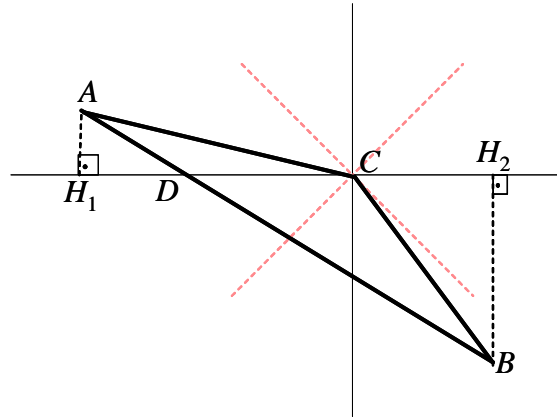
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left((\sqrt{2} + 1) |AC| + |BC| - (\sqrt{2} + 1) |CH_1| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2| \right) \\ &= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2} |AC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 |CH_1| + |CH_2| \right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_1 + \alpha_2 \right) \right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.6: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ olsun(Şekil 2.22.).



Şekil 2.22.

Şekil 2.22. den de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = |BC| - (\sqrt{2} - 1) |CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\
&= \frac{|AH_1||CD|}{2} + \frac{|BH_2||CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\
&= \frac{|CD|}{2} \left((\sqrt{2} + 1)|AC| + |BC| - (\sqrt{2} + 1)|CH_1| - (\sqrt{2} - 1)|CH_2| \right) \\
&= \frac{|CD|}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}|AC| - |AB| - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 |CH_1| + |CH_2| \right) \right) \\
&= \frac{\alpha}{2} \left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - (\sqrt{2} - 1) \left((\sqrt{2} + 1)^2 \alpha_1 + \alpha_2 \right) \right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

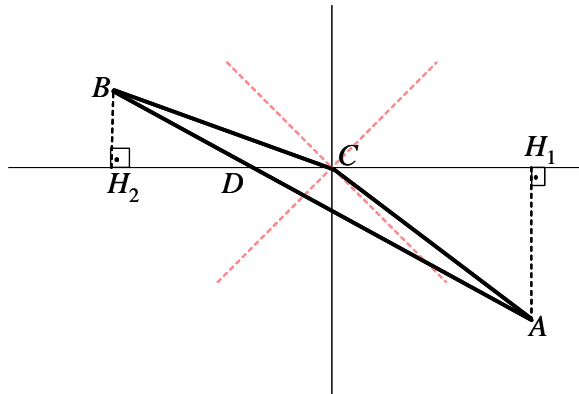
Altdurum 2.7: $\triangle ABC$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| < 1$ olsun (Şekil 2.23.). Ancak düzlemde bu koşullara uygun bir üçgen çizilemez. $c_1, c_2 \in (1, \infty)$ olmak üzere AC ve CB kenarları, sırasıyla, $y = \frac{-1}{c_1}x$ ve $y = \frac{-1}{c_2}x$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = \left(-a, \frac{a}{c_1}\right)$ ve $B = \left(b, \frac{b}{c_2}\right)$ olsun. O halde AB kenarının eğimi için

$$\frac{\left| \frac{a}{c_1} + \frac{b}{c_2} \right|}{|a + b|} > 1$$

olmalıdır. Bu ise $\frac{a}{c_1} + \frac{b}{c_2} > a + b$ koşulunu gerektirir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde

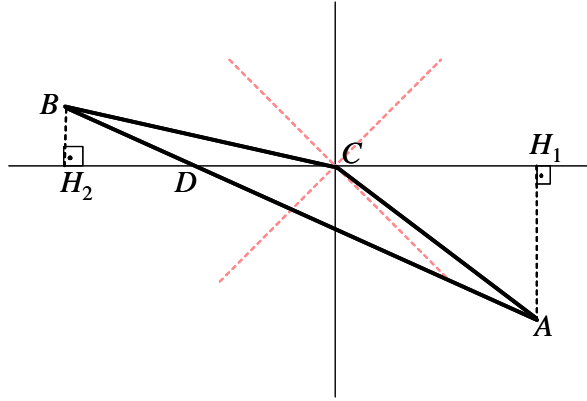
$$c_2a + c_1b > (c_1 + c_2)(a + b)$$

elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Şekil 2.23. de görülen AB kenarı yataysaldır.



Şekil 2.23.

Altdurum 2.8: $\triangle ABC$ üçgeninin tüm kenarları yataysal olsun(Şekil 2.24.).



Şekil 2.24.

Şekil 2.24. den de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{(\sqrt{2} - 1)} \quad \text{ve} \quad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{(\sqrt{2} - 1)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\triangle ABC) &= A(\triangle ACD) + A(\triangle BCD) \\ &= \frac{|AH_1| |CD|}{2} + \frac{|BH_2| |CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2} (|AH_1| + |BH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2(\sqrt{2} - 1)} (|AC| + |BC| - |CH_1| - |CH_2|) \\ &= \frac{|CD|}{2(\sqrt{2} - 1)} (2p - |AB| - (|CH_1| + |CH_2|)) \\ &= \frac{\alpha}{2(\sqrt{2} - 1)} (2p - c - (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Tüm durumlardaki sonuçlar birlikte ele alınırsa istenen formüle ulaşılmış olur.

2.2 Çin Dama Düzleminin İncisyonları

Bu kısımda Çin Dama düzleminde bir çemberin iç bölgesindeki merkezden farklı noktaları dışında bulunan noktalara, dış bölgedeki noktaları iç bölgedeki merkezden farklı noktalara dönüştüren ve incisyon adı verilen dönüştürme ile bu dönüştürmenin

özellikleri incelenmektedir. Uzaklıkları koruma özeliği taşımayan bu dönüşümlerin izometrilere grubu içinde kapsanmadıkları aşikardır.

ζ , Çin Dama düzleminde M merkezli, r yarıçaplı CC-çemberi olsun. M den farklı bir P noktası gözönüne alınsın. O halde MP ışını üzerinde

$$d_c(M, P) \cdot d_c(M, Q) = r^2 \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir tek Q noktası vardır. 2.1 denklemi, CC-düzleminde M den farklı bütün noktalar için birebir dönüşüm tanımlar.

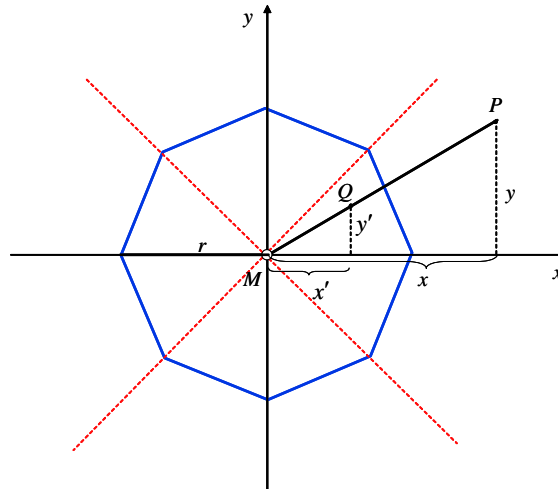
Tanım 2.2.1 CC-düzleminde, ζ , M merkezli ve r yarıçaplı CC-çemberi olmak üzere $I_{M,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{M\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}$ için

$$I_{M,r}(P) = Q \Leftrightarrow d_c(M, P) \cdot d_c(M, Q) = r^2$$

ve $M - P - Q$ veya $M - Q - P$ olacak şekilde tanımlanan $I_{M,r}$ dönüşümüne M merkezli r yarıçaplı Çin Dama çemberine göre *inversiyon* adı verilir.

Bu dönüşüm çemberin iç bölgesindeki noktaları çemberin dış bölgesindeki noktalara, çemberin dış bölgesindeki noktaları çemberin iç bölgesindeki noktalara ve çember üzerindeki noktaları kendilerine dönüştürür. Buna göre CC-düzleminde koordinatları verilen bir P noktasının dönüşüm altındaki görüntüsü olan Q noktasının koordinatları hesaplınsın.

P noktasının koordinatları (x, y) ve Q noktasının koordinatları (x', y') olsun. Çin Dama düzleminde ötelemeler uzaklığı invariant bıraktığından M orijin olarak alınabilir.



Şekil 2.25.

Şekil 2.25. den

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \quad (2.2)$$

dir. Ayrıca $d_c(M, P) \cdot d_c(M, Q) = r^2$ olduğundan

$$\left(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x|, |y|\} \right) \left(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\} \right) = r^2 \quad (2.3)$$

dir. 2.2 ve 2.3 den,

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \Rightarrow y' = \frac{x'y}{x} \quad \text{ve} \quad x' = \frac{y'x}{y}$$

olup

$$|x'| = \frac{|x| r^2}{\left(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x|, |y|\} \right)^2}$$

ve

$$|y'| = \frac{|y| r^2}{\left(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x|, |y|\} \right)^2}$$

dir. Ayrıca $M - P - Q$ veya $M - Q - P$ olduğundan dolayı x ile x' ve y ile y' nün işaretleri aynı olacaktır

$$x' = \frac{x r^2}{\left(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x|, |y|\} \right)^2} \quad (2.4)$$

$$y' = \frac{y r^2}{\left(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x|, |y|\} \right)^2}$$

olarak yazılabilir. Tersine $Q = (x', y')$ verildiğinde $P = (x, y)$ noktasının koordinatları benzer şekilde

$$x = \frac{x' r^2}{\left(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\} \right)^2} \quad (2.5)$$

$$y = \frac{y' r^2}{\left(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\} \right)^2}$$

olur. 2.4 ile 2.5 denklemleri tam olarak simetriktir. Bundan dolayı 2.4 denkleminde içerdeki noktanın koordinatları yerine x', y' yazılırsa, o noktanın görüntüsünün koordinatları x, y olur.

CC-düzleminde herhangi bir doğrunun inversiyon altındaki görüntüsü:

CC-düzleminde $ax + by + c = 0$ doğrusu ele alınsın. Doğru denkleminde 2.4 ve 2.5 kullanılırsa

$$ar^2x' + br^2y' + c \left(\max\{|x'| + (\sqrt{2}-1)|y'|, |y'| + (\sqrt{2}-1)|x'|\} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. 2.6 denklemini $ax + by + c = 0$ doğrusunun M merkezli ve r yarıçaplı CC-çemberine göre olan inversiyon altındaki görüntüsüdür. Buna göre öncelikle iki durum söz konusudur.

I. Durum: $|x'| \geq |y'|$ olsun. Bu durumda 2.6 denklemini

$$c \left(x'^2 + 2(\sqrt{2} - 1) |x'y'| + (3 - 2\sqrt{2}) y'^2 \right) + ar^2x' + br^2y' = 0$$

halini alır. Burada da iki alt durum söz konusudur.

I-(i) : $x'y' > 0$ ise

$$c x'^2 + 2(\sqrt{2} - 1)cx'y' + (3 - 2\sqrt{2})c y'^2 + ar^2x' + br^2y' = 0 \quad (2.7)$$

bulunur. Bu denklem için

$$d = \begin{vmatrix} c & (\sqrt{2} - 1)c \\ (\sqrt{2} - 1)c & (3 - 2\sqrt{2})c \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan 2.7 denklemini paraboliktir. Ayrıca

$$D = \begin{vmatrix} c & (\sqrt{2} - 1)c & ar^2/2 \\ (\sqrt{2} - 1)c & (3 - 2\sqrt{2})c & br^2/2 \\ ar^2/2 & br^2/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-cr^4}{4} \left((\sqrt{2} - 1)a - b \right)^2$$

dir. D nin durumuna göre 2.7 denkleminin tam olarak düzlemde ne belirttiği ifade edilebilir.

1. $c \neq 0$ ve $(\sqrt{2} - 1)a \neq b$ iken $D \neq 0$ olduğundan 2.7 denklemini parabol belirtir.
2. $c = 0$ iken 2.7 denklemini $ar^2x' + br^2y' = 0 \Rightarrow r^2(ax' + by') = 0 \stackrel{r \neq 0}{\Rightarrow} ax' + by' = 0$ olduğundan $ax + by = 0$ doğrusuna dönüşür.
3. $c \neq 0$ ve $(\sqrt{2} - 1)a = b$ iken $D = 0$ olduğundan c nin işaretine göre sanal veya gerçel paralel iki doğru gösterir.

I-(ii) : $x'y' < 0$ ise

$$c x'^2 - 2(\sqrt{2} - 1)cx'y' + (3 - 2\sqrt{2})c y'^2 + ar^2x' + br^2y' = 0 \quad (2.8)$$

bulunur. Bu denklem için

$$d = \begin{vmatrix} c & -(\sqrt{2}-1)c \\ -(\sqrt{2}-1)c & (3-2\sqrt{2})c \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan 2.8 denklemi paraboliktir. Ayrıca

$$D = \begin{vmatrix} c & -(\sqrt{2}-1)c & ar^2/2 \\ -(\sqrt{2}-1)c & (3-2\sqrt{2})c & br^2/2 \\ ar^2/2 & br^2/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-cr^4}{4} \left((\sqrt{2}-1)a + b \right)^2$$

dir. D nin durumuna göre 2.8 denkleminin tam olarak düzlemde ne belirttiği ifade edilebilir.

1. $c \neq 0$ ve $(\sqrt{2}-1)a \neq -b$ iken $D \neq 0$ olduğundan 2.8 denklemi parabol belirtir.
2. $c = 0$ iken 2.8 denklemi $ar^2x' + br^2y' = 0 \Rightarrow r^2(ax' + by') = 0 \xrightarrow{r \neq 0} ax' + by' = 0$ olduğundan $ax + by = 0$ doğrusuna dönüşür. Yani doğru invaryanttır.
3. $c \neq 0$ ve $(\sqrt{2}-1)a = -b$ iken $D = 0$ olduğundan c nin işaretine göre sanal veya gerçel paralel iki doğru gösterir.

II. Durum: $|x'| < |y'|$ olsun. Bu durumda 2.6 denklemi

$$c \left((3-2\sqrt{2})x'^2 + 2(\sqrt{2}-1)|x'y'| + y'^2 \right) + ar^2x' + br^2y' = 0$$

halini alır. Burada da iki alt durum söz konusudur.

II-(i) : $x'y' > 0$ ise

$$(3-2\sqrt{2})cx'^2 + 2(\sqrt{2}-1)cx'y' + cy'^2 + ar^2x' + br^2y' = 0 \quad (2.9)$$

bulunur. Bu denklem için

$$d = \begin{vmatrix} (3-2\sqrt{2})c & (\sqrt{2}-1)c \\ (\sqrt{2}-1)c & c \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan 2.9 denklemi paraboliktir. Ayrıca

$$D = \begin{vmatrix} (3-2\sqrt{2})c & (\sqrt{2}-1)c & ar^2/2 \\ (\sqrt{2}-1)c & c & br^2/2 \\ ar^2/2 & br^2/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-cr^4}{4} \left(a - (\sqrt{2}-1)b \right)^2$$

dir. D nin durumuna göre 2.9 denkleminin tam olarak düzlemde ne belirttiği ifade edilebilir.

1. $c \neq 0$ ve $a \neq (\sqrt{2} - 1)b$ iken $D \neq 0$ olduğundan 2.9 denklemi parabol belirtir.
2. $c = 0$ iken 2.9 denklemi $ar^2x' + br^2y' = 0 \xrightarrow{r \neq 0} ax' + by' = 0$ olduğundan $ax + by = 0$ doğrusuna dönüşür.
3. $c \neq 0$ ve $a = (\sqrt{2} - 1)b$ iken $D = 0$ olduğundan c nin işaretine göre sanal veya gerçel paralel iki doğru gösterir.

II-(ii) : $x'y' < 0$ ise

$$c x'^2 - 2(\sqrt{2} - 1)cx'y' + (3 - 2\sqrt{2})c y'^2 + ar^2x' + br^2y' = 0 \quad (2.10)$$

bulunur. Bu denklem için

$$d = \begin{vmatrix} (3 - 2\sqrt{2})c & -(\sqrt{2} - 1)c \\ -(\sqrt{2} - 1)c & c \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan 2.10 denklemi paraboliktir. Ayrıca

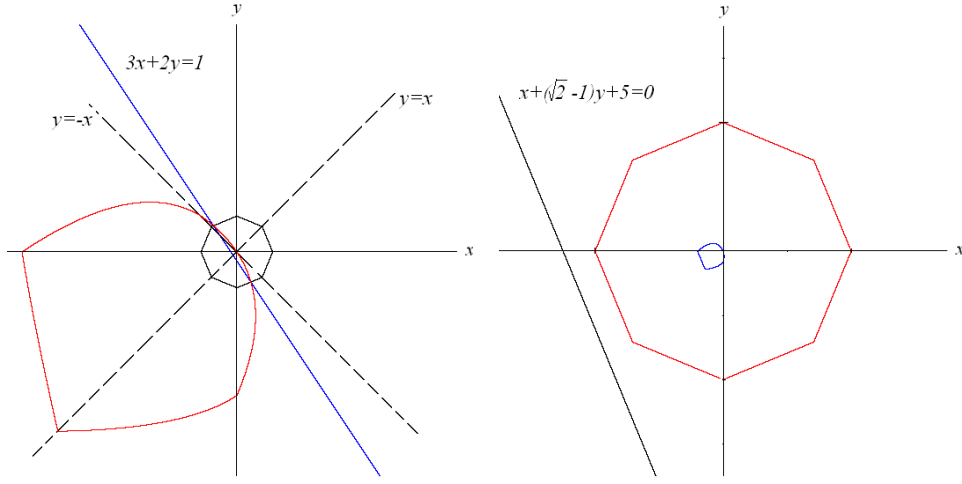
$$D = \begin{vmatrix} (3 - 2\sqrt{2})c & -(\sqrt{2} - 1)c & ar^2/2 \\ -(\sqrt{2} - 1)c & c & br^2/2 \\ ar^2/2 & br^2/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-cr^4}{4} \left(a + (\sqrt{2} - 1)b \right)^2$$

dir. D nin durumuna göre 2.10 denkleminin tam olarak düzlemde ne belirttiği ifade edilebilir.

1. $c \neq 0$ ve $a \neq -(\sqrt{2} - 1)b$ iken $D \neq 0$ olduğundan 2.10 denklemi parabol belirtir.
2. $c = 0$ iken 2.10 denklemi $ar^2x' + br^2y' = 0 \xrightarrow{r \neq 0} ax' + by' = 0$ olduğundan $ax + by = 0$ doğrusuna dönüşür. Yani doğru invaryanttır.
3. $c \neq 0$ ve $a = -(\sqrt{2} - 1)b$ iken $D = 0$ olduğundan c nin işaretine göre sanal veya gerçel paralel iki doğru gösterir.

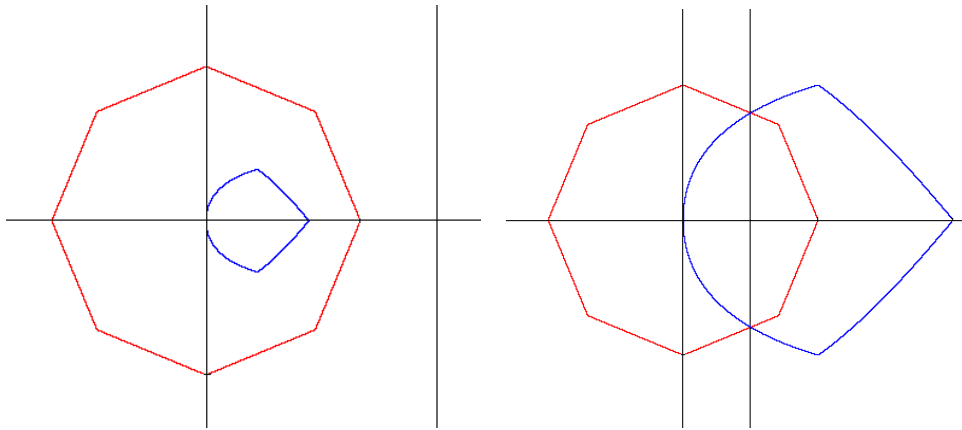
Böylelikle CC-düzlemindeki bir doğru S_i , $i = 0, \dots, 7$ bölgelerine göre farklı konik parçalarına dönüştürür. Dolayısıyla bir doğrunun inversiyon altındaki görüntüsü bu konik parçalarının birleşimidir.

Sonuç 2.2.2 CC-düzleminde M merkezli ve r yarıçaplı bir CC-çemberine göre inversiyon altında M den geçen doğrular invaryanttır.



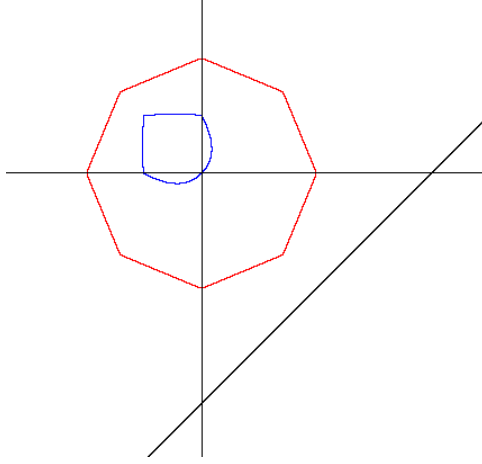
Şekil 2.26.(a)

Şekil 2.26.(b)

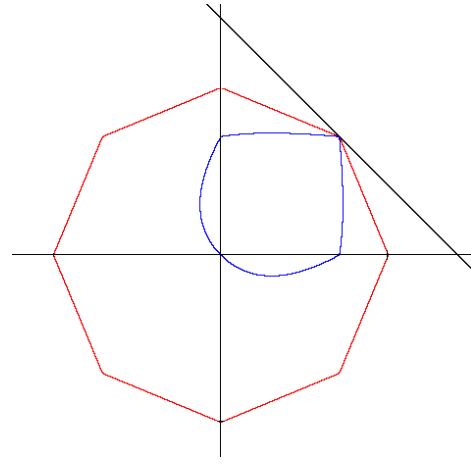


Şekil 2.26.(c)

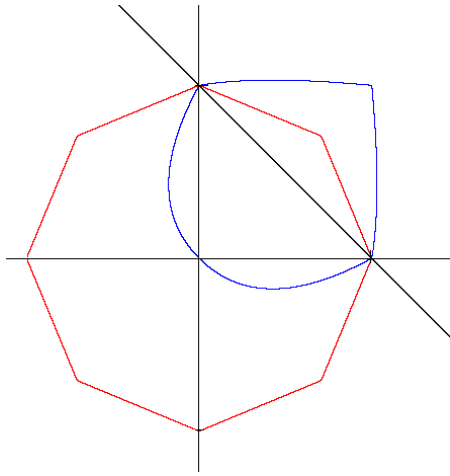
Şekil 2.26.(d)



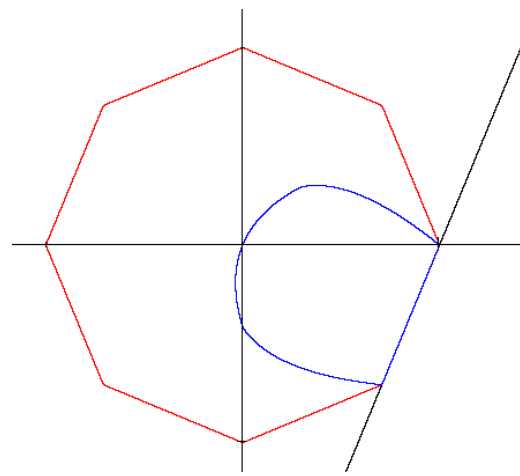
Şekil 2.26.(e)



Şekil 2.26.(f)



Şekil 2.26.(g)



Şekil 2.26.(h)

Şekil 2.26. (a)-(h) CC-düzleminde bazı doğruların inversiyon altındaki görüntülerini örnelemektedir.

CC-düzleminde çemberlerin inversiyon altındaki görüntüleri:

İnversiyon çemberi ζ_0 ; $\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x|, |y|\} = r$ olsun. ζ ; $\max\{|x - h|, |y - k|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x - h|, |y - k|\} = r_1$ çemberinin ζ_0 çemberine göre inversiyonu

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} - h \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} - k \right| \right\} +$$

$$(\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} - h \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} - k \right| \right\} = r_1$$

denkleminin çözüm kümesidir. Denklem oldukça karmaşık gözükmemekte olduğundan çemberleri sınıflandırarak işleme devam edilsin.

(a) İncersiyon çemberi ile merkezi aynı olan çemberlerin incersiyonu

O halde ζ çemberi

$$\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x|, |y|\} = r_1$$

olacağından ζ nin ζ_0 a göre incersiyonu

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} \right| \right\} +$$

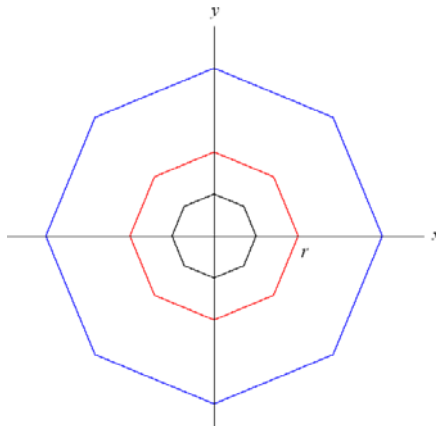
$$(\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} \right| \right\} = r_1$$

olup

$$\frac{r^2}{(\max\{|x'|,|y'\}|+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'\}|)^2} (\max\{|x'|, |y'\}| + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x'|, |y'\}|) = r_1$$

$$\Rightarrow \max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x'|, |y'|\} = \frac{r^2}{r_1}$$

elde edilir. Yani incersiyon çemberi ile aynı merkezli olan CC-çemberleri, aynı merkezli fakat yarıçapı $\frac{r^2}{r_1}$ olarak değışen çemberlere dönüştürler.



Şekil 2.27.

Sonuç 2.2.3 ζ_0 çemberine göre aynı merkezli birim çemberin inversiyonu yarıçapı r^2 olan aynı merkezli CC-çemberidir. Tersine ζ_0 birim çember ise aynı merkezli r_1 yarıçaplı çemberin ζ_0 çemberine göre inversiyonu aynı merkezli $\frac{1}{r_1}$ yarıçaplı CC-çemberidir.

(b) Bir köşesi inversiyon merkezi olan çemberlerin inversiyonu:

Inversiyon merkezi orijin olduğundan bir köşesi orijin (inversiyon merkezi) olan CC-çemberleri

a) $\max \{|x \mp r_1|, |y|\} + (\sqrt{2} - 1) \min \{|x \mp r_1|, |y|\} = r_1$

b) $\max \{|x|, |y \mp r_1|\} + (\sqrt{2} - 1) \min \{|x|, |y \mp r_1|\} = r_1$

c) $\max \{|x \mp r_1|, |y \mp r_1|\} + (\sqrt{2} - 1) \min \{|x \mp r_1|, |y \mp r_1|\} = \sqrt{2}r_1$

tiplerinden biridir. Dolayısıyla inversiyon altındaki görüntüler

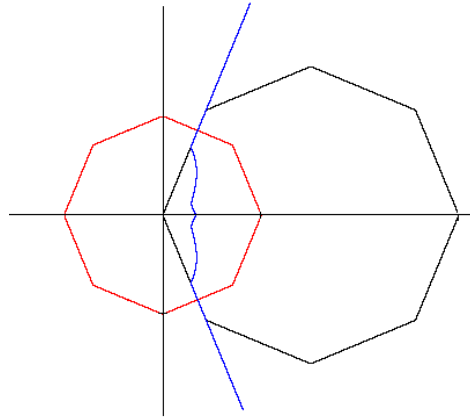
$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \right| \right\} = r_1,$$

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right| \right\} = r_1$$

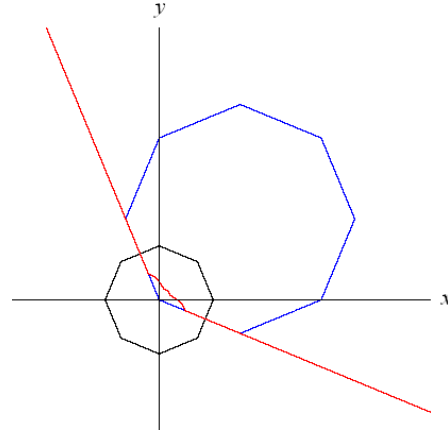
veya

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \mp r_1 \right| \right\} = \sqrt{2}r_1$$

denklemlerinin çözüm kümeleri olur.



Şekil 2.28.(a)



Şekil 2.28.(b)

Şekil 2.28.(a)-(b) bir köşesi orijinden geçen çemberleri örneklemektedir.

(c) İncersiyon merkezinden geçen çemberlerin incersiyonu:

İncersiyon merkezi orijin olduğundan orijinden (incersiyon merkezi) geçen CC-çemberleri $r_1, a \in \mathbb{R}^+$ için

a) $r_1 \geq (\sqrt{2} + 2)a$ olmak üzere

$$\max \left\{ |x \mp (r_1 - a)|, |y \mp (\sqrt{2} + 1)a| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |x \mp (r_1 - a)|, |y \mp (\sqrt{2} + 1)a| \right\} = r_1$$

b) $r_1 \geq \sqrt{2}a$ olmak üzere

$$\max \left\{ |x \mp a|, |y \mp (r_1 - (\sqrt{2} - 1)a)| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |x \mp a|, |y \mp (r_1 - (\sqrt{2} - 1)a)| \right\} = r_1$$

tiplerinden biridir. Dolayısıyla bu tipteki çemberlerin incersiyon altındaki görüntüleri

$$\phi = \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \quad \text{ve} \quad \omega = \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2}$$

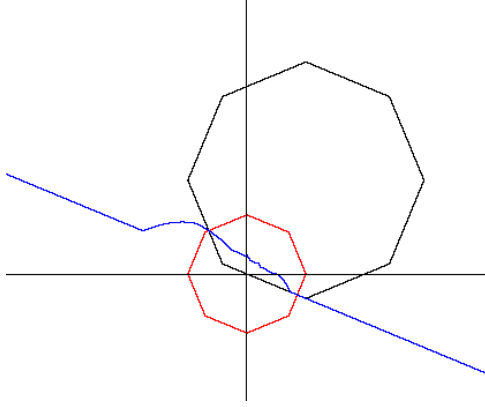
olmak üzere

$$\max \left\{ |\phi \mp (r_1 - a)|, |\omega \mp (\sqrt{2} + 1)a| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |\phi \mp (r_1 - a)|, |\omega \mp (\sqrt{2} + 1)a| \right\} = r_1$$

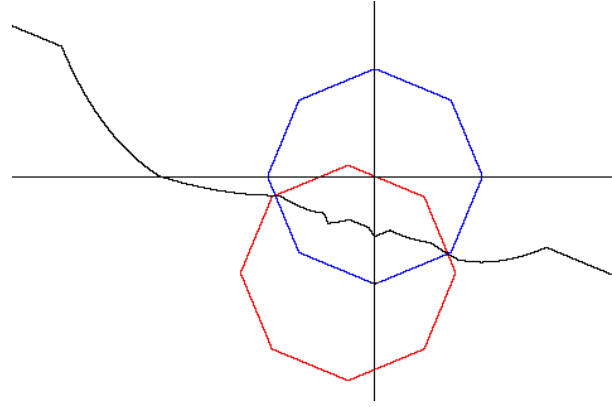
veya

$$\max \left\{ |\phi \mp a|, |\omega \mp (r_1 - (\sqrt{2} - 1)a)| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |\phi \mp a|, |\omega \mp (r_1 - (\sqrt{2} - 1)a)| \right\} = r_1$$

denklemlerinin çözüm kümesidir.



Şekil 2.29.(a)



Şekil 2.29.(b)

Şekil 2.29.(a)-(b) orijinden geçen çemberlerin inversiyon altındaki görüntülerini örneklemektedir.

(d) İnvrsiyon çemberi ile bir doğru parçası boyunca kesişen çemberlerin inversiyonu:

İnvrsiyon çemberi ile bir doğru boyunca kesişen CC-çemberleri r inversiyon çemberinin yarıçapı ve $r_1, a \in \mathbb{R}^+$ için

a) $r \geq a$ olmak üzere

$$\max \left\{ |x \mp (r_1 + a)|, |y \mp (\sqrt{2} + 1)(r - a)| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |x \mp (r_1 + a)|, |y \mp (\sqrt{2} + 1)(r - a)| \right\} = r_1$$

b) $r + r_1 \geq (\sqrt{2} - 1)a$ olmak üzere

$$\max \left\{ |x \mp a|, |y \mp (r + r_1 - (\sqrt{2} - 1)a)| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |x \mp a|, |y \mp (r + r_1 - (\sqrt{2} - 1)a)| \right\} = r_1$$

tiplerinden biridir. Dolayısıyla bu tipteki çemberlerin inversiyon altındaki görüntüleri

$$\phi = \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \quad \text{ve} \quad \omega = \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2}$$

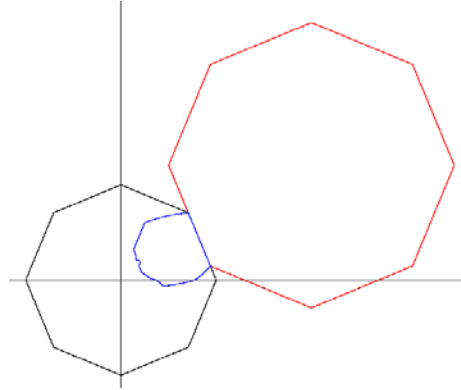
olmak üzere

$$\max \left\{ |\phi \mp (r_1 + a)|, |\omega \mp (\sqrt{2} + 1)(r - a)| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |\phi \mp (r_1 + a)|, |\omega \mp (\sqrt{2} + 1)(r - a)| \right\} = r_1$$

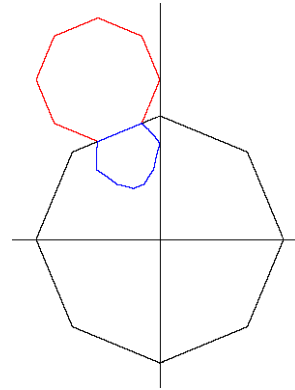
veya

$$\max \left\{ \left| \phi \mp a \right|, \left| \omega \mp (r+r_1 - (\sqrt{2}-1)a) \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \phi \mp a \right|, \left| \omega \mp (r+r_1 - (\sqrt{2}-1)a) \right| \right\} = r_1$$

denklemlerinin çözüm kümesidir.



Şekil 2.30.(a)



Şekil 2.30.(b)

Şekil 2.30.(a)-(b) bir doğru parçası boyunca kesişen çemberlerin inversiyon altındaki görüntülerini örnelemektedir.

(e) İnvasyon çemberi ile iki doğru parçası boyunca kesişen çemberlerin inversiyonu:

İnvasyon çemberi ile iki doğru boyunca kesişen CC-çemberleri r inversiyon çemberinin yarıçapı olmak üzere

a) $\max \{ |x \mp r_1|, |y| \} + (\sqrt{2} - 1) \min \{ |x \mp r_1|, |y| \} = r - r_1$

b) $\max \{ |x|, |y \mp r_1| \} + (\sqrt{2} - 1) \min \{ |x|, |y \mp r_1| \} = r - r_1$

c) $\max \{ |x \mp r_1|, |y \mp r_1| \} + (\sqrt{2} - 1) \min \{ |x \mp r_1|, |y \mp r_1| \} = r - \sqrt{2}r_1$

tiplerinden biridir. Dolayısıyla bu tipteki çemberlerin inversiyon altındaki görüntüleri

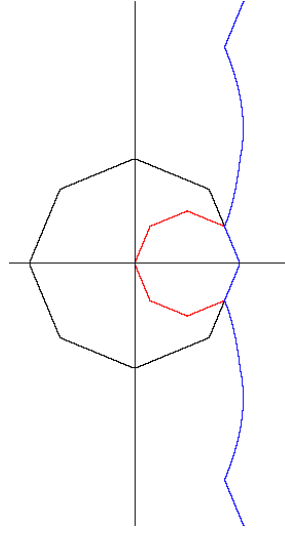
$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right\} = r - r_1,$$

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right\} = r - r_1,$$

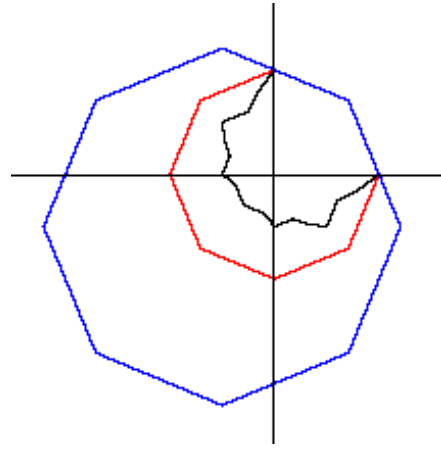
veya

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp r_1 \right\} = r - \sqrt{2}r_1,$$

denklemlerinin çözüm kümesidir.



Şekil 2.31.(a)



Şekil 2.31.(b)

Şekil 2.31.(a)-(b) inversiyon çemberi ile iki doğru parçası boyunca kesişen çemberlerin inversiyon altındaki görüntülerini örneklemektedir.

(f) İncersiyon çemberi ile bir noktada kesişen çemberlerin inversiyonu:

İncersiyon çemberi ile bir noktada kesişen CC-çemberleri r inversiyon çemberinin yarıçapı olmak üzere

a) $\max \{|x \mp (r + r_1)|, |y|\} + (\sqrt{2} - 1) \min \{|x \mp (r + r_1)|, |y|\} = r_1$

b) $\max \{|x|, |y \mp (r + r_1)|\} + (\sqrt{2} - 1) \min \{|x|, |y \mp (r + r_1)|\} = r_1$

c) $\max \left\{ \left| x \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right|, \left| y \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right| \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ \left| x \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right|, \left| y \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right| \right\} = r_1$

tiplerinden biridir. Dolayısıyla bu tipteki çemberlerin inversiyon altındaki görüntüleri

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp (r+r_1) \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right| \right\} + (\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp (r+r_1) \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right\} = r_1,$$

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp (r+r_1) \right| \right\} +$$

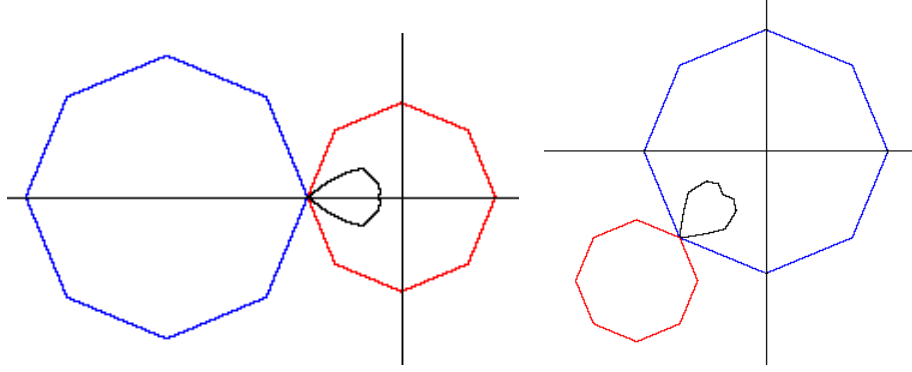
$$(\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp (r+r_1) \right\} = r_1,$$

veya

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right| \right\} +$$

$$(\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} \mp \frac{r+r_1}{\sqrt{2}} \right\} = r_1,$$

denklemlerinin çözüm kümesidir.



Şekil 2.32.(a)

Şekil 2.32.(b)

Şekil 2.32.(a)-(b) inversiyon çemberi ile bir noktada kesişen çemberlerin inversiyon altındaki görüntülerini örneklemektedir.

(g) İncersiyon çemberi ile iki noktada kesişen çemberlerin inversiyonu:

İncersiyon çemberi ile iki noktada kesişen CC-çemberleri r inversiyon çemberinin yarıçapı ve (h, k) çemberin merkezi için $r+r_1 > \max\{|h|, |k|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|h|, |k|\}$ olmak üzere

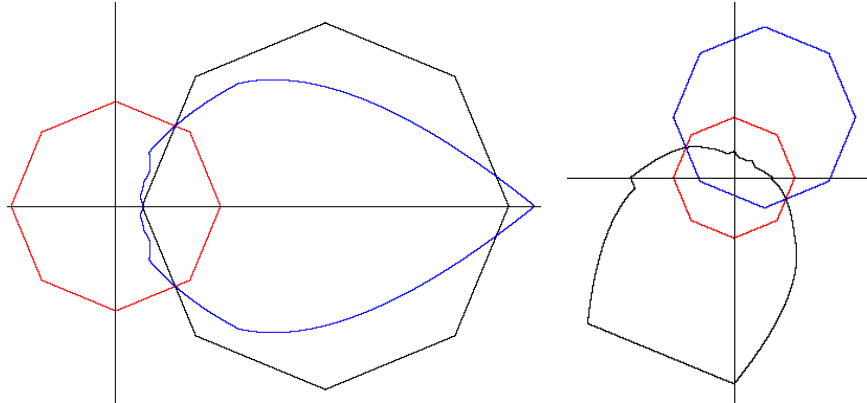
$$\max\{|x-h|, |y-k|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x-h|, |y-k|\} = r_1$$

formundadır. Dolayısıyla bu tipteki çemberlerin inversiyon altındaki görüntüleri

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} - h \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} - k \right| \right\} +$$

$$(\sqrt{2}-1) \min \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} - h \right|, \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|,|y'|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x'|,|y'|\})^2} - k \right\} = r_1,$$

denkleminin çözüm kümesidir.



Şekil 2.33.(a)

Şekil 2.33.(b)

Şekil 2.33.(a)-(b) inversiyon çemberi ile iki noktada kesişen çemberlerin inversiyon altındaki görüntülerini örneklemektedir.

2.3 Çin Dama Uzayında Uzaklık Formülleri

Bu kısımda ilk olarak Çin Dama metriği üç boyutlu uzaya genişletilmektedir. Üç boyutlu analitik uzayın lineer yapısı aynen korunarak üç boyutlu analitik uzay elde edilen metrikle donatılarak 3-boyutlu Çin Dama uzayı oluşturulmaktadır. Daha sonra (Akça ve Kaya, 2004a) ya benzer şekilde oluşturulan 3-boyutlu Çin Dama uzayında bir noktanın bir düzleme, ve bir doğruya olan uzaklığını ifade eden formüller ile herhangi iki doğru arasındaki uzaklık formülü verilmektedir (Gelişgen vd., 2006).

3-Boyutlu Analitik Uzayda Çin Dama Metriği

Tanım 2.3.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 3-boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olsun.

$$d_L(P_1, P_2) = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

ve

$$d_S(P_1, P_2) = \min \{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere

$$d_c(P_1, P_2) = d_L(P_1, P_2) + (\sqrt{2} - 1) d_S(P_1, P_2)$$

şeklinde tanımlanan $d_c : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna 3-boyutlu analitik uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklık fonksiyonu adı verilir.

Aşağıdaki önerme 3-boyutlu uzay için tanımlanan Çin Dama uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 2.3.2 3-boyutlu analitik uzayda tanımlanan d_c -uzaklık fonksiyonu metriktir.

İspat: d_c -uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu ve de üçgen eşitsizliğini sağladığı gösterilmelidir. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, \mathbb{R}^3 deki herhangi üç nokta olsun. P_1 ile P_2 arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \\ + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$, $|z_1 - z_2| \geq 0$ ve $(\sqrt{2} - 1) \geq 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_c(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} = 0 & \text{ve} \\ \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Buradan da $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = |z_1 - z_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkça $P_1 = P_2$ ise $d_c(P_1, P_2) = 0$ dır. O halde $d_c(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_c -uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Üstelik mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$, $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ ve $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) = d_c(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_c -uzaklık fonksiyonu simetriktir.

Şimdi tüm $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ olduğu gösterilmelidir. Bu ifadenin $d_S(P_1, P_2) = 0$ olduğunda sağlandığı açıktır. Çünkü

$$d_L(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \\ = \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|, |z_1 - z_3 + z_3 - z_2|\} \\ \leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|\} \\ = d_L(P_1, P_3) + d_L(P_3, P_2)$$

olup bu halde $d_c(P_1, P_2) = d_L(P_1, P_2)$ dir. Eğer $d_S(P_1, P_2) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \\
&+ (\sqrt{2} - 1) \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} \\
&= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|, |z_1 - z_3 + z_3 - z_2|\} \\
&+ \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|, \\
&|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |z_1 - z_3 + z_3 - z_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| + |z_1 - z_3 + z_3 - z_2|\} \\
&\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|\} \\
&+ \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, \\
&|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|\}
\end{aligned}$$

dir. Buna göre dokuz durum sözkonusudur:

I. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|, |z_1 - z_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|, |z_3 - z_2|$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\
&= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|)\right) + \\
&\quad \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_3 - y_2| + |z_3 - z_2|)\right) \\
&= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)
\end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|, |z_1 - z_3|$ ve $|y_3 - y_2| \geq |x_3 - x_2|, |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda mümkün olan üç altdurum vardır.

Altdurum II.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\
&= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|)\right) + \\
&\quad \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_3 - y_2| + |z_3 - z_2|)\right) \\
&= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2|)
\end{aligned}$$

olup $|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum II.2: $|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan

$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum II.3: $|z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|z_1 - z_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right) + \\ &\quad \left(|z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + \\ &\quad (\sqrt{2} - 2) (|x_1 - x_3| - |z_1 - z_3| + |y_3 - y_2| - |z_3 - z_2|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_1 - x_3| - |z_1 - z_3| \geq 0$, $|y_3 - y_2| - |z_3 - z_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

III. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|, |z_1 - z_3|$ ve $|z_3 - z_2| \geq |x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda mümkün olan üç altdurum vardır.

Altdurum III.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_3 - y_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|z_3 - z_2| - |x_3 - x_2|) \end{aligned}$$

olup $|z_3 - z_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum III.2: $|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_3 - x_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + \\ &\quad (\sqrt{2} - 2)(|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3| + |z_3 - z_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3| \geq 0, |z_3 - z_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum III.3: $|z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|z_1 - z_3| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right) + \\ &\quad \left(|z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2)(|x_1 - x_3| - |z_1 - z_3|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_1 - x_3| - |z_1 - z_3| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

IV. Durum: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|, |z_1 - z_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|, |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda mümkün olan üç altdurum vardır.

Altdurum IV.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1)(|y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1)(|y_3 - y_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2)(|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olup $|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum IV.2: $|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_3 - x_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2)(|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan

$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum IV.3: $|z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|z_1 - z_3| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right) + \\ &\quad \left(|z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + \\ &\quad (\sqrt{2} - 2)(|y_1 - y_3| - |z_1 - z_3| + |x_3 - x_2| - |z_3 - z_2|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|y_1 - y_3| - |z_1 - z_3| \geq 0, |x_3 - x_2| - |z_3 - z_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

V. Durum: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|, |z_1 - z_3|$ ve $|y_3 - y_2| \geq |x_3 - x_2|, |z_3 - z_2|$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1)(|x_1 - x_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1)(|x_3 - x_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur.

VI. Durum: $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|, |z_1 - z_3|$ ve $|z_3 - z_2| \geq |x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda mümkün olan üç altdurum vardır.

Altdurum VI.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\
&= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\
&\quad \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_3 - y_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\
&= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + \\
&\quad (\sqrt{2} - 2) (|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| + |z_3 - z_2| - |x_3 - x_2|)
\end{aligned}$$

olup $|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| \geq 0, |z_3 - z_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum VI.2: $|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\
&= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\
&\quad \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\
&= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|y_3 - y_2| - |z_3 - z_2|)
\end{aligned}$$

elde edilir. $|y_3 - y_2| - |z_3 - z_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum VI.3: $|z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\
&= \left(|z_1 - z_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right) + \\
&\quad \left(|z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \right) \\
&= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|y_1 - y_3| - |z_3 - z_2|)
\end{aligned}$$

olur. $|y_1 - y_3| - |z_3 - z_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

VII. Durum: $|z_1 - z_3| \geq |x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|, |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda mümkün olan üç altdurum vardır.

Altdurum VII.1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + (\sqrt{2} - 1) (|y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|x_3 - x_2| + (\sqrt{2} - 1) (|y_3 - y_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|z_1 - z_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olup $|z_1 - z_3| - |x_1 - x_3| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum VII.2: $|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |z_1 - z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|y_3 - y_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |z_3 - z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + \\ &\quad (\sqrt{2} - 2) (|z_1 - z_3| - |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|z_1 - z_3| - |y_1 - y_3| \geq 0, |x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum VII.3: $|z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \geq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|z_1 - z_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right) + \\ &\quad \left(|z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2} - 2) (|x_3 - x_2| - |z_3 - z_2|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|x_3 - x_2| - |z_3 - z_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2} - 2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

VIII. Durum: $|z_1 - z_3| \geq |x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|$ ve $|y_3 - y_2| \geq |x_3 - x_2|, |z_3 - z_2|$ olsun. Bu durumda mümkün olan üç altdurum vardır.

Altdurum VIII.1: $|x_1-x_3| + |x_3-x_2| \geq |y_1-y_3| + |y_3-y_2|, |z_1-z_3| + |z_3-z_2|$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |x_1-x_3| + |x_3-x_2| + (\sqrt{2}-1) (|y_1-y_3| + |y_3-y_2| + |z_1-z_3| + |z_3-z_2|) \\ &= \left(|x_1-x_3| + (\sqrt{2}-1) (|y_1-y_3| + |z_1-z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|x_3-x_2| + (\sqrt{2}-1) (|y_3-y_2| + |z_3-z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + \\ &\quad (\sqrt{2}-2) (|z_1-z_3| - |x_1-x_3| + |y_3-y_2| - |x_3-x_2|) \end{aligned}$$

olup $|z_1-z_3| - |x_1-x_3| \geq 0$, $|y_3-y_2| - |x_3-x_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2}-2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum VIII.2: $|y_1-y_3| + |y_3-y_2| \geq |x_1-x_3| + |x_3-x_2|, |z_1-z_3| + |z_3-z_2|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |y_1-y_3| + |y_3-y_2| + (\sqrt{2}-1) (|x_1-x_3| + |x_3-x_2| + |z_1-z_3| + |z_3-z_2|) \\ &= \left(|y_1-y_3| + (\sqrt{2}-1) (|x_1-x_3| + |z_1-z_3|) \right) + \\ &\quad \left(|y_3-y_2| + (\sqrt{2}-1) (|x_3-x_2| + |z_3-z_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2}-2) (|z_1-z_3| - |y_1-y_3|) \end{aligned}$$

elde edilir. $|z_1-z_3| - |y_1-y_3| \geq 0$ ve $\sqrt{2}-2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

Altdurum VIII.3: $|z_1-z_3| + |z_3-z_2| \geq |x_1-x_3| + |x_3-x_2|, |y_1-y_3| + |y_3-y_2|$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1-z_3| + |z_3-z_2| + (\sqrt{2}-1) (|x_1-x_3| + |x_3-x_2| + |y_1-y_3| + |y_3-y_2|) \\ &= \left(|z_1-z_3| + (\sqrt{2}-1) (|x_1-x_3| + |y_1-y_3|) \right) + \\ &\quad \left(|z_3-z_2| + (\sqrt{2}-1) (|x_3-x_2| + |y_3-y_2|) \right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) + (\sqrt{2}-2) (|y_3-y_2| - |z_3-z_2|) \end{aligned}$$

dir. $|y_3-y_2| - |z_3-z_2| \geq 0$ ve $\sqrt{2}-2 < 0$ olduğundan $d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$ bulunur.

IX. Durum: $|z_1-z_3| \geq |x_1-x_3|, |y_1-y_3|$ ve $|z_3-z_2| \geq |x_3-x_2|, |y_3-y_2|$

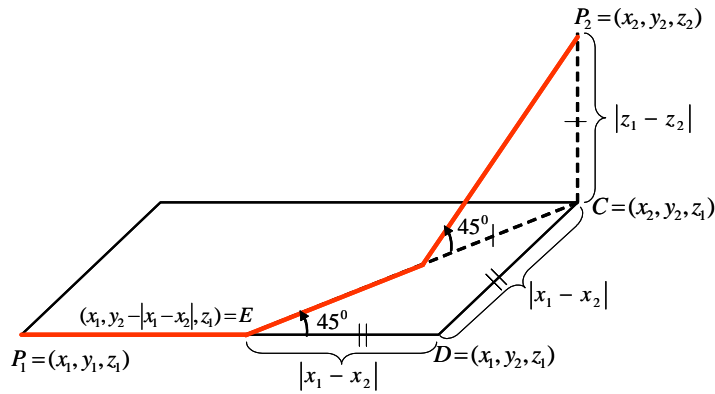
olsun. O halde

$$\begin{aligned}
 d_c(P_1, P_2) &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\
 &= \left(|z_1 - z_3| + (\sqrt{2} - 1) (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \right) + \\
 &\quad \left(|z_3 - z_2| + (\sqrt{2} - 1) (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \right) \\
 &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)
 \end{aligned}$$

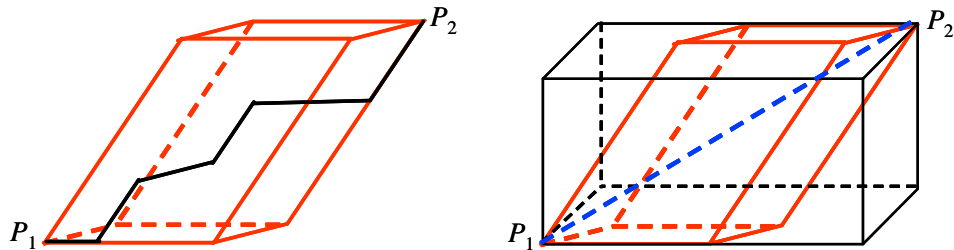
olur.

Bundan dolayı d_c -uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde d_c -uzaklık fonksiyonu metriktir.

\mathbb{R}^3 deki d_c -metriğinin tanımına göre P_1 ve P_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer ikisi de geri kalan koordinat eksenlerinden biri ile 45° lik açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir. Yani $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\{(\mp 1, 1, 0), (0, \mp 1, 1), (1, 0, \mp 1)\}$ ve $\{(\mp 1, 1, 1), (1, \mp 1, 1), (1, 1, \mp 1)\}$ kümelerinden birer doğrultu vektörüne sahip üç doğru parçasının birleşimidir. P_1 ile P_2 arasındaki en kısa d_c -uzaklığı da bu üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır.



Şekil 2.34.



Şekil 2.35.(a)

Şekil 2.35.(b)

3-boyutlu Çin Dama uzayı \mathbb{R}^3 , üç boyutlu analitik uzaydaki Öklidyen uzaklık fonksiyonu d_E yerine Çin Dama uzaklık fonksiyonu d_c alınarak oluşturulur. O halde Çin Dama uzayında noktalar, doğrular ve düzlemler Öklidyen durumdakiler ile aynıdır.

3-Boyutlu Çin Dama Uzayında Uzaklık Formülleri

Yardımcı Teorem 2.3.3 P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olsun. Eğer (p, q, r) , l doğrusunun doğrultu vektörü ise

$$\frac{d_E(P_1, P_2)}{(p^2+q^2+r^2)^{1/2}} = \frac{d_c(P_1, P_2)}{(\max\{|p|, |q|, |r|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|p|+|q|, |p|+|r|, |q|+|r|\})}$$

dir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, \mathbb{R}^3 deki herhangi iki nokta olsun. P_1 ve P_2 den geçen doğru l ise

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

dir. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (p, q, r)$ olduğundan

$$\begin{aligned} d_E(P_1, P_2) &= \mu d_c(P_1, P_2) \Rightarrow \mu = \frac{d_E(P_1, P_2)}{d_c(P_1, P_2)} \\ &\Rightarrow \mu = \frac{(p^2+q^2+r^2)^{1/2}}{\max\{|p|, |q|, |r|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|p|+|q|, |p|+|r|, |q|+|r|\}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.3.4 P_1 ile P_2 arasındaki Çin Dama uzaklığının minimum olması için gerek ve yeter koşul P_1 ve P_2 den geçen doğrunun doğrultu vektörünün

$$\Delta = \{(p, q, r) \mid p, q, r \in \{-1, 0, 1\} \text{ ve } (p, q, r) \neq (0, 0, 0)\}$$

olmasıdır.

Sonuç 2.3.5 P_1, P_2 ve X , \mathbb{R}^3 deki herhangi doğrudaki üç nokta ise $d_E(X, P_1) = d_E(X, P_2)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_c(X, P_1) = d_c(X, P_2)$ olmasıdır.

Sonuç 2.3.6 P_1, P_2 ve X , \mathbb{R}^3 deki herhangi doğrudaki farklı üç nokta ise

$$\frac{d_E(X, P_1)}{d_E(X, P_2)} = \frac{d_c(X, P_1)}{d_c(X, P_2)}$$

dir. Yani herhangi bir doğru boyunca Öklidyen ve Çin Dama uzunluklarının oranı aynıdır.

Önerme 2.3.7 Her Öklidyen öteleme \mathbb{R}_c^3 nin bir izometrisidir.

İspat: $A=(a, b, c)$, $X=(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A : \mathbb{R}_c^3 \rightarrow \mathbb{R}_c^3$, $T_A(X)=A+X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}_c^3$ için

$$\begin{aligned}
d_c(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= \max \{|a + x_1 - a - x_2|, |b + y_1 - b - y_2|, |c + z_1 - c - z_2|\} \\
&+ (\sqrt{2} - 1) \min\{|a + x_1 - a - x_2| + |b + y_1 - b - y_2|, \\
&|a + x_1 - a - x_2| + |c + z_1 - c - z_2|, |b + y_1 - b - y_2| + |c + z_1 - c - z_2|\} \\
&= \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \\
&+ (\sqrt{2} - 1) \min \{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} \\
&= d_c(P_1, P_2)
\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı T_A bir izometridir.

Teorem 2.3.8 Bir $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının bir $\mathcal{P} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, \mathcal{P}) = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2\sqrt{2} - 1) |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max \{|A + B + C|, |-A + B + C|, |A - B + C|, |A + B - C|\}} \\ \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max \{|A + B|, |A - B|, |A + C|, |A - C|, |B + C|, |B - C|\}} \\ \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max \{|A|, |B|, |C|\}} \end{array} \right.$$

dır. Burada paydadaki ifadelerin hiç biri sıfır değildir.

İspat: Çin Dama uzayı \mathbb{R}_c^3 de bir P noktasından herhangi bir \mathcal{P} düzlemine olan uzaklık

$$d_c(P, \mathcal{P}) = \min \{d_c(P, X) \mid X \in \mathcal{P}\}$$

olarak tanımlanabilir. Bu durumda $d_c(P, X)$ minimum ise P ve X den geçen doğru-
nun doğrultu vektörü Δ nın bir elemanı olmalıdır. Bu nedenle Δ nın her bir elemanın
doğrultu vektörü olduğu P den geçen l_i , $i = 1, \dots, 13$ doğruları göz önüne alınsın.
Ayrıca $P_i = l_i \cap \mathcal{P}$, $i = 1, \dots, 13$ olsun. Açıkça \mathcal{P} düzlemi tüm koordinat eksenlerine

paralel olamayacağından tanımlanan P_i noktalarından en az üç tanesi mevcuttur. Buna göre

$$d_c(P, \mathcal{P}) = \min \{d_c(P, P_i) \mid i = 1, \dots, 13\}$$

olur. p, q, r nin değerlerine göre üç temel durum söz konusudur.

I. Durum: $p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$ olsun. Bu durumda (p, q, r) vektörü $\{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer $(p, q, r) = (1, 1, 1)$ ise P den geçen l_1 doğrusunun standart denklemi

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = \lambda$$

dir. Buna göre l_1 doğrusu \mathcal{P} düzlemini $k_1 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A + B + C}$ olmak üzere $P_1 = (k_1 + x_0, k_1 + y_0, k_1 + z_0)$ noktasında keser. O halde P ile P_1 arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_1) &= \max \{|x_0 - k_1 - x_0|, |y_0 - k_1 - y_0|, |z_0 - k_1 - z_0|\} \\ &\quad + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_0 - k_1 - x_0| + |y_0 - k_1 - y_0|, |x_0 - k_1 - x_0| + |z_0 - k_1 - z_0|, \\ &\quad |y_0 - k_1 - y_0| + |z_0 - k_1 - z_0|\} \\ &= \max \{|k_1|, |k_1|, |k_1|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min \{2|k_1|, 2|k_1|, 2|k_1|\} \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1) |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A + B + C|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $(p, q, r) = (-1, 1, 1)$ ise bu doğrultuya sahip P den geçen l_2 doğrusunun düzlemlerle ortak noktası $k_2 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{-A + B + C}$ olmak üzere $P_2 = (k_2 + x_0, k_2 + y_0, k_2 + z_0)$ dir. Buna göre P ile P_2 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_2) = \frac{(2\sqrt{2} - 1) |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|-A + B + C|}$$

dir.

Eğer $(p, q, r) = (1, -1, 1)$ ise bu doğrultuya sahip P den geçen l_3 doğrusunun düzlemlerle ortak noktası $k_3 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A - B + C}$ olmak üzere $P_3 = (k_3 + x_0, k_3 + y_0, k_3 + z_0)$ dir. Buna göre P ile P_3 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_3) = \frac{(2\sqrt{2} - 1) |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A - B + C|}$$

dır.

Eğer $(p, q, r) = (1, 1, -1)$ ise bu doğrultuya sahip P den geçen l_4 doğrunun düzlemlerle ortak noktası $k_4 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A + B - C}$ olmak üzere $P_4 = (k_4 + x_0, k_4 + y_0, k_4 + z_0)$ dir. Buna göre P ile P_4 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_4) = \frac{(2\sqrt{2} - 1) |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A + B - C|}$$

dır.

II. Durum: p, q, r den yalnızca biri sıfır olsun. Bu durumda (p, q, r) vektörü $\{(\mp 1, 1, 0), (\pm 1, 0, 1), (0, \pm 1, 1)\}$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer $(p, q, r) = (1, 1, 0)$ ise P den geçen l_5 doğrusu

$$x - x_0 = y - y_0, z - z_0 = 0$$

dır. Bu durumda l_5 doğrusu \mathcal{P} düzlemini $k_5 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A + B}$ olmak üzere $P_5 = (k_5 + x_0, k_5 + y_0, z_0)$ noktasında keser. P ile P_5 arasındaki Çin Dama uzaklığı ise

$$\begin{aligned} d_c(P, P_5) &= \max\{|x_0 - k_5 - x_0|, |y_0 - k_5 - y_0|, |z_0 - z_0|\} \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x_0 - k_5 - x_0| + |y_0 - k_5 - y_0|, |x_0 - k_5 - x_0| + |z_0 - z_0|, \\ &\quad |y_0 - k_5 - y_0| + |z_0 - z_0|\} \\ &= \max\{|k_5|, |k_5|, 0\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{2|k_5|, |k_5|, |k_5|\} \\ &= \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A + B|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Aynı yolla $(p, q, r) = (1, -1, 0)$ ise bu doğrultuda P noktasından geçen l_6 doğrusunun düzlemlerle ortak noktası $k_6 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A - B}$ olmak üzere $P_6 = (k_6 + x_0, k_6 + y_0, z_0)$ dir. O halde P ile P_6 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_6) = \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A - B|}$$

dır.

Eğer $(p, q, r) = (1, 0, 1)$ ise bu doğrultuda P noktasından geçen l_7 doğrusunun düzlemlerle ortak noktası $k_7 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A + C}$ olmak üzere $P_7 = (k_7 + x_0, y_0, k_7 + z_0)$

dır. O halde P ile P_7 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_7) = \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A + C|}$$

dır.

Eğer $(p, q, r) = (1, 0, -1)$ ise bu doğrultulu P noktasından geçen l_8 doğrusunun düzlemle ortak noktası $k_8 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A - C}$ olmak üzere $P_8 = (k_8 + x_0, y_0, k_8 + z_0)$

dır. O halde P ile P_8 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_8) = \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A - C|}$$

dır.

Eğer $(p, q, r) = (0, 1, 1)$ ise bu doğrultulu P noktasından geçen l_9 doğrusunun düzlemle ortak noktası $k_9 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{B + C}$ olmak üzere $P_9 = (x_0, k_9 + y_0, k_9 + z_0)$

dır. O halde P ile P_9 arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_9) = \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|B + C|}$$

dır.

Eğer $(p, q, r) = (0, 1, -1)$ ise bu doğrultulu P noktasından geçen l_{10} doğrusunun düzlemle ortak noktası $k_{10} = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{B - C}$ olmak üzere $P_{10} = (x_0, k_{10} + y_0, k_{10} + z_0)$ dır. O halde P ile P_{10} arasındaki d_c -uzaklığı

$$d_c(P, P_{10}) = \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|B - C|}$$

dır.

III. Durum: p, q, r den herhangi ikisi sıfır olsun. Bu halde (p, q, r) vektörü $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ ise P den geçen l_{11} doğrusunun denklemi

$$x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0 = z - z_0$$

dır. Buna göre l_{11} doğrusu \mathcal{P} düzlemini $k_{11} = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A}$ olmak üzere

$P_{11} = (k_{11} + x_0, y_0, z_0)$ noktasında keser. P ile P_{11} noktaları arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_{11}) &= \max\{|x_0 - k_{11} - x_0|, |y_0 - y_0|, |z_0 - z_0|\} \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x_0 - k_{11} - x_0| + |y_0 - y_0|, |x_0 - k_{11} - x_0| + |z_0 - z_0|, \\ &\quad |y_0 - y_0| + |z_0 - z_0|\} \\ &= \max\{|k_{11}|, 0, 0\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|k_{11}|, |k_{11}|, 0\} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|A|} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Benzer yolla $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ ise bu doğrultuya sahip P den geçen l_{12} doğrusunun düzlemle arakesit noktası $k_{12} = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{B}$ olmak üzere $P_{12} = (x_0, k_{12} + y_0, z_0)$ dir. Buna göre P ile P_{12} arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P_{12}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|B|}$$

dir.

Eğer $(p, q, r) = (0, 0, 1)$ ise bu doğrultuya sahip P den geçen l_{13} doğrusunun düzlemle arakesit noktası $k_{13} = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{C}$ olmak üzere $P_{13} = (x_0, k_{12} + y_0, k_{13} + z_0)$ dir. Buna göre P ile P_{13} arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P_{13}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|C|}$$

dir.

Dikkat edilirse yukarıda elde edilen sonuçlar istenen formülü verir.

Aşağıdaki sonuç, teoremden hemen elde edilir.

Sonuç 2.3.9 Çin Dama düzlemindeki bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının herhangi bir $l : Ax + By + D = 0$ doğrusuna uzaklığı

$$d_c(P, l) = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2} |Ax_0 + By_0 + D|}{\max\{|A + B|, |A - B|\}} \\ \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\max\{|A|, |B|\}} \end{array} \right.$$

dir.

Teorem 2.3.10 $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının,

$$\frac{x - a}{p} = \frac{y - b}{q} = \frac{z - c}{r}$$

denklemini ile verilen l doğrusuna olan CC-uzaklığı

$$E_1 = |p^{-1}| [\max\{|pB - qA|, |pC - rA|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pB - qA|, |pC - rA|\},$$

$$E_2 = |q^{-1}| [\max\{|qA - pB|, |qC - rB|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|qA - pB|, |qC - rB|\},$$

$$E_3 = |r^{-1}| [\max\{|rA - pC|, |rB - qC|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|rA - pC|, |rB - qC|\},$$

$$E_4 = |(p - q)^{-1}| [\max\{|pB - qA|, |r(B - A) + (p - q)C|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pB - qA| + |r(B - A) + (p - q)C|, 2|pB - qA|\},$$

$$E_5 = |(p + q)^{-1}| [\max\{|pB - qA|, |r(-A - B) + (p + q)C|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pB - qA| + |r(-A - B) + (p + q)C|, 2|pB - qA|\},$$

$$E_6 = |(p - r)^{-1}| [\max\{|pC - rA|, |q(C - A) + (p - r)B|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pC - rA| + |q(C - A) + (p - r)B|, 2|pC - rA|\},$$

$$E_7 = |(p + r)^{-1}| [\max\{|pC - rA|, |q(-A - C) + (p + r)B|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pC - rA| + |q(-A - C) + (p + r)B|, 2|pC - rA|\},$$

$$E_8 = |(q - r)^{-1}| [\max\{|qC - rB|, |p(C - B) + (q - r)A|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|qC - rB| + |p(C - B) + (q - r)A|, 2|qC - rB|\},$$

$$E_9 = |(q + r)^{-1}| [\max\{|qC - rB|, |p(-B - C) + (q + r)A|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|qC - rB| + |p(-B - C) + (q + r)A|, 2|qC - rB|\},$$

$$E_{10} = |(p+q+r)^{-1}| [\max\{|(q+r)A - p(B+C)|, |(p+r)B - q(A+C)|, |(p+q)C - r(A+B)|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|(q+r)A - p(B+C)| + |(p+r)B - q(A+C)|, |(q+r)A - p(B+C)| + |(p+q)C - r(A+B)|, |(p+r)B - q(A+C)| + |(p+q)C - r(A+B)|\},$$

$$E_{11} = |(q-p+r)^{-1}| [\max\{|(q+r)A - p(B+C)|, |(r-p)B + q(A-C)|, |(q-p)C + r(A-B)|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|(q+r)A - p(B+C)| + |(r-p)B + q(A-C)|, |(q+r)A - p(B+C)| + |(q-p)C + r(A-B)|, |(r-p)B + q(A-C)| + |(q-p)C + r(A-B)|\},$$

$$E_{12} = |(p-q+r)^{-1}| [\max\{|(r-q)A + p(B-C)|, |(p+r)B - q(A+C)|, |(p-q)C + r(B-A)|\}] + (\sqrt{2} - 1) \min\{|(r-q)A + p(B-C)| + |(p+r)B - q(A+C)|, |(r-q)A + p(B-C)| + |(p-q)C + r(B-A)|, |(p+r)B - q(A+C)| + |(p-q)C + r(B-A)|\},$$

$$E_{13} = |(p+q-r)^{-1}| [\max\{|(q-r)A+p(C-B)|, |(p-r)B+q(C-A)|, |(p+q)C-r(A+B)|\} \\ + (\sqrt{2}-1) \min\{|(q-r)A+p(C-B)| + |(p-r)B+q(C-A)|, |(q-r)A+p(C-B)| \\ + |(p+q)C-r(A+B)|, |(p-r)B+q(C-A)| + |(p+q)C-r(A+B)|\}],$$

ve $A = a - x_0$, $B = b - y_0$, $C = c - z_0$ olmak üzere

$$d_c(P, l) = \min \left\{ \begin{array}{l} E_1 \quad , p \neq 0 \\ E_2 \quad , q \neq 0 \\ E_3 \quad , r \neq 0 \\ E_4 \quad , p \neq q \\ E_5 \quad , p \neq -q \\ E_6 \quad , p \neq r \\ E_7 \quad , p \neq -r \\ E_8 \quad , q \neq r \\ E_9 \quad , q \neq -r \\ E_{10} \quad , p + q + r \neq 0 \\ E_{11} \quad , p \neq q + r \\ E_{12} \quad , q \neq p + r \\ E_{13} \quad , r \neq p + q \end{array} \right.$$

dir.

İspat: Çin Dama uzayında bir P noktasının herhangi bir l doğrusuna olan uzaklığı

$$d_c(P, l) = \min \{d_c(P, X) \mid X \in l\}$$

olarak tanımlanabilir. Uzayda herhangi iki noktanın minimum uzaklıklar kümesi Şekil 1 de görüldüğü gibi bir paralelyüzdür. Bu noktaların konumlarına göre paralelyüzün yüzleri Δ kümesindeki vektörleri normal kabul eden düzlemlerin parçalarıdır. Buna göre α_i , $i=1, \dots, 13$ olarak $A, B, C \in \{-1, 0, 1\}$ ve $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ olacak şekildeki (A, B, C) normal doğrultusuna sahip P den geçen düzlemleri gösterelim. Ayrıca $\alpha_i \cap l := P_i$, $i = 1, \dots, 13$ olsun. Bu durumda tüm α_i ler gözönüne alınmalıdır. Eğer $(A, B, C) = (1, 0, 0)$ ise α_1 düzlemi $x - x_0 = 0$ dır. O halde α_1 düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası $P_1 = (x_0, \frac{q(x_0 - a) + pb}{p}, \frac{r(x_0 - a) + pc}{p})$ olarak elde

edilir. Buna göre P ile P_1 arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_c(P, P_1) &= \max \left\{ |x_0 - x_0|, \left| y_0 - \frac{q(x_0 - a) + pb}{p} \right|, \left| z_0 - \frac{r(x_0 - a) + pc}{p} \right| \right\} \\
&+ (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ |x_0 - x_0| + \left| y_0 - \frac{q(x_0 - a) + pb}{p} \right|, |x_0 - x_0| + \left| z_0 - \frac{r(x_0 - a) + pc}{p} \right|, \right. \\
&\left. \left| y_0 - \frac{q(x_0 - a) + pb}{p} \right| + \left| z_0 - \frac{r(x_0 - a) + pc}{p} \right| \right\} \\
&= \max \left\{ \left| \frac{p(y_0 - b) - q(x_0 - a)}{p} \right|, \left| \frac{p(z_0 - c) - r(x_0 - a)}{p} \right| \right\} \\
&+ (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ \left| \frac{p(y_0 - b) - q(x_0 - a)}{p} \right|, \left| \frac{p(z_0 - c) - r(x_0 - a)}{p} \right| \right\} \\
&= \max \left\{ \frac{|pB - qA|}{|p|}, \frac{|pC - rA|}{|p|} \right\} + (\sqrt{2} - 1) \min \left\{ \frac{|pB - qA|}{|p|}, \frac{|pC - rA|}{|p|} \right\} \\
&= E_1
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Benzer yolla diğer α_i ler içinde aynı hesaplamalar yapılarak gerekli uzaklıklar hesaplanabilir.

Eğer $(A, B, C) = (0, 1, 0)$ ise $\alpha_2 : y - y_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası $P_2 = \left(\frac{p(y_0 - b) + qa}{q}, y_0, \frac{r(y_0 - b) + qc}{q} \right)$ dir. Buradan da P ile P_2 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_c(P, P_2) &= |q^{-1}| \left(\max\{|qA - pB|, |qC - rB|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|qA - pB|, |qC - rB|\} \right) \\
&= E_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Eğer $(A, B, C) = (0, 0, 1)$ ise $\alpha_3 : z - z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası $P_3 = \left(\frac{p(z_0 - c) + ra}{r}, \frac{q(z_0 - c) + rb}{r}, z_0 \right)$ dir. Buradan da P ile P_3 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_c(P, P_3) &= |r^{-1}| \left(\max\{|rA - pC|, |rB - qC|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|rA - pC|, |rB - qC|\} \right) \\
&= E_3
\end{aligned}$$

olur.

Eğer $(A, B, C) = (1, -1, 0)$ ise $\alpha_4 : x - y - x_0 + y_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_4 = \left(\frac{p(x_0 - y_0 + b) + qa}{p - q}, \frac{q(x_0 - y_0 - a) + pb}{p - q}, \frac{r(x_0 - y_0 - a + b) + pc - qc}{p - q} \right)$$

dir. Buradan da P ile P_4 noktaları arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_4) &= |(p - q)^{-1}| (\max\{|pB - qA|, |r(B - A) + (p - q)C|\}) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pB - qA| + |r(B - A) + (p - q)C|, 2|pB - qA|\}) \\ &= E_4 \end{aligned}$$

dir.

Eğer $(A, B, C) = (1, 1, 0)$ ise $\alpha_5 : x + y - x_0 - y_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_5 = \left(\frac{p(x_0 + y_0 - b) + qa}{p + q}, \frac{q(x_0 + y_0 - a) + pb}{p + q}, \frac{r(x_0 + y_0 - a - b) + pc + qc}{p + q} \right)$$

dir. Buradan da P ile P_5 noktaları arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_5) &= |(p + q)^{-1}| (\max\{|pB - qA|, |r(-A - B) + (p + q)C|\}) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pB - qA| + |r(-A - B) + (p + q)C|, 2|pB - qA|\}) \\ &= E_5 \end{aligned}$$

olur.

Eğer $(A, B, C) = (1, 0, -1)$ ise $\alpha_6 : x - z - x_0 + z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_6 = \left(\frac{p(x_0 - z_0 + c) - ra}{p - r}, \frac{q(x_0 - z_0 - a + c) + pb - rb}{p - r}, \frac{r(x_0 - z_0 - a) + pc}{p - r} \right)$$

dir. Buradan da P ile P_6 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_6) &= |(p - r)^{-1}| (\max\{|pC - rA|, |q(C - A) + (p - r)B|\}) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pC - rA| + |q(C - A) + (p - r)B|, 2|pC - rA|\}) \\ &= E_6 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Eğer $(A, B, C) = (1, 0, 1)$ ise $\alpha_7 : x + z - x_0 - z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_7 = \left(\frac{p(x_0 + z_0 - c) + ra}{p + r}, \frac{q(x_0 + z_0 - a - c) + pb + rb}{p + r}, \frac{r(x_0 + z_0 - a) + pc}{p + r} \right)$$

dir. Buradan da P ile P_7 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_7) &= |(p+r)^{-1}| (\max\{|pC - rA|, |q(-A - C) + (p+r)B|\}) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|pC - rA| + |q(-A - C) + (p+r)B|, 2|pC - rA|\}) \\ &= E_7 \end{aligned}$$

dir.

Eğer $(A, B, C) = (0, 1, -1)$ ise $\alpha_8 : y - z - y_0 + z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_8 = \left(\frac{p(y_0 - z_0 - b + c) - ra}{q - r}, \frac{q(y_0 - z_0 + c) - rb}{q - r}, \frac{r(y_0 - z_0 - b) + qc}{q - r} \right)$$

dir. Buradan da P ile P_8 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_8) &= |(q-r)^{-1}| (\max\{|qC - rB|, |p(C - B) + (q-r)A|\}) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|qC - rB| + |p(C - B) + (q-r)A|, 2|qC - rB|\}) \\ &= E_8 \end{aligned}$$

olur.

Eğer $(A, B, C) = (0, 1, 1)$ ise $\alpha_9 : y + z - y_0 - z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_9 = \left(\frac{p(y_0 + z_0 - b - c) + ra}{q + r}, \frac{q(y_0 + z_0 - c) + rb}{q + r}, \frac{r(y_0 + z_0 - b) + qc}{q + r} \right)$$

dir. Buradan da P ile P_9 noktaları arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_9) &= |(q+r)^{-1}| (\max\{|qC - rB|, |p(-B - C) + (q+r)A|\}) \\ &\quad + (\sqrt{2} - 1) \min\{|qC - rB| + |p(-B - C) + (q+r)A|, 2|qC - rB|\}) \\ &= E_9 \end{aligned}$$

dir.

Eğer $(A, B, C) = (1, 1, 1)$ ise $\alpha_{10} : x + y + z - x_0 - y_0 - z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_{10} = \left(\frac{p(x_0 + y_0 + z_0 - a - b - c)}{p + q + r} + a, \frac{q(x_0 + y_0 + z_0 - a - b - c)}{p + q + r} + b, \frac{r(x_0 + y_0 + z_0 - a - b - c)}{p + q + r} + c \right)$$

dir. Buradan da P ile P_{10} noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_{10}) &= |(p+q+r)^{-1}| (\max\{|(q+r)A-p(B+C)|, |(p+r)B-q(A+C)|, \\ &|(p+q)C-r(A+B)|\}) + (\sqrt{2}-1) \min\{|(q+r)A-p(B+C)| + |(p+r)B-q(A+C)|, \\ &|(q+r)A-p(B+C)| + |(p+q)C-r(A+B)|, |(p+r)B-q(A+C)| + |(p+q)C-r(A+B)|\}) \\ &= E_{10} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Eğer $(A, B, C) = (-1, 1, 1)$ ise $\alpha_{11} : -x + y + z + x_0 - y_0 - z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_{11} = \left(\frac{p(-x_0+y_0+z_0+a-b-c)}{-p+q+r} + a, \frac{q(-x_0+y_0+z_0+a-b-c)}{-p+q+r} + b, \frac{r(-x_0+y_0+z_0+a-b-c)}{-p+q+r} + c \right)$$

dir. Buradan da P ile P_{11} noktaları arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_{11}) &= |(q-p+r)^{-1}| (\max\{|(q+r)A-p(B+C)|, |(r-p)B+q(A-C)|, \\ &|(q-p)C+r(A-B)|\}) + (\sqrt{2}-1) \min\{|(q+r)A-p(B+C)| + |(r-p)B+q(A-C)|, \\ &|(q+r)A-p(B+C)| + |(q-p)C+r(A-B)|, |(r-p)B+q(A-C)| + |(q-p)C+r(A-B)|\}) \\ &= E_{11} \end{aligned}$$

olur.

Eğer $(A, B, C) = (1, -1, 1)$ ise $\alpha_{12} : x - y + z - x_0 + y_0 - z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_{12} = \left(\frac{p(x_0-y_0+z_0-a+b-c)}{p-q+r} + a, \frac{q(x_0-y_0+z_0-a+b-c)}{p-q+r} + b, \frac{r(x_0-y_0+z_0-a+b-c)}{p-q+r} + c \right)$$

dir. Buradan da P ile P_{12} noktaları arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_{12}) &= |(p-q+r)^{-1}| (\max\{|(r-q)A+p(B-C)|, |(p+r)B-q(A+C)|, \\ &|(p-q)C+r(B-A)|\}) + (\sqrt{2}-1) \min\{|(r-q)A+p(B-C)| + |(p+r)B-q(A+C)|, \\ &|(r-q)A+p(B-C)| + |(p-q)C+r(B-A)|, |(p+r)B-q(A+C)| + |(p-q)C+r(B-A)|\}) \\ &= E_{12} \end{aligned}$$

dır.

Eğer $(A, B, C) = (1, 1, -1)$ ise $\alpha_{13} : x + y - z - x_0 - y_0 + z_0 = 0$ düzlemi ile l doğrusunun arakesit noktası

$$P_{13} = \left(\frac{p(x_0 + y_0 - z_0 - a - b + c)}{p + q - r} + a, \frac{q(x_0 + y_0 - z_0 - a - b + c)}{p + q - r} + b, \frac{r(x_0 + y_0 - z_0 - a - b + c)}{p + q - r} + c \right)$$

dir. Buradan da P ile P_{13} noktaları arasındaki d_c -uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(P, P_{13}) &= |(p+q-r)^{-1}| (\max\{|(q-r)A+p(C-B)|, |(p-r)B+q(C-A)|, \\ &|(p+q)C-r(A+B)|\} + (\sqrt{2}-1) \min\{|(q-r)A+p(C-B)| + |(p-r)B+q(C-A)|, \\ &|(q-r)A+p(C-B)| + |(p+q)C-r(A+B)|, |(p-r)B+q(C-A)| + |(p+q)C-r(A+B)|\}) \\ &= E_{13} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse hesaplanan değerler aranan formülü verir.

Aşağıdaki teorem Çin Dama uzayında herhangi iki doğru arasındaki uzaklığı ifade etmektedir.

Teorem 2.3.11 Çin Dama uzayında

$$l \dots \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r} = \lambda$$

ve

$$l' \dots \frac{x-a'}{p'} = \frac{y-b'}{q'} = \frac{z-c'}{r'} = \mu$$

olarak verilen herhangi iki doğru arasındaki Çin Dama uzaklığı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Eğer l ile l' paralel doğrular ise $A = (a, b, c) \in l$ olmak üzere $d_c(l, l') = d_c(A, l')$ dir.

Eğer l ile l' doğruları paralel değilse

$$K = \{|(q-r)(q'-p') - (q'-r')(q-p)|, |(p+q)(r'-q') - (p'+q')(r-q)|, \\ |(q+r)(p'+q') - (q'+r')(p+q)|, |(q+r)(q'-p') - (q'+r')(q-p)|\},$$

$$M = \{|r(p'-q') - r'(p-q)|, |q(p'-r') - q'(p-r)|, |p(r'-q') - p'(r-q)|, \\ |r(p'+q') - r'(p+q)|, |q(p'+r') - q'(p+r)|, |p(q'+r') - p'(q+r)|\},$$

$N = \{|qr' - q'r|, |pr' - p'r|, |pq' - p'q|\}$ olmak üzere

$$d_c(l, l') = \min \begin{cases} \frac{(2\sqrt{2}-1) |(qr'-q'r)(a'-a) + (rp'-r'p)(b'-b) + (pq'-p'q)(c'-c)|}{\max K} & , K \neq 0 \text{ ise} \\ \frac{\sqrt{2} |(qr'-q'r)(a'-a) + (rp'-r'p)(b'-b) + (pq'-p'q)(c'-c)|}{\max M} & , M \neq 0 \text{ ise} \\ \frac{|(qr'-q'r)(a'-a) + (rp'-r'p)(b'-b) + (pq'-p'q)(c'-c)|}{\max N} & , N \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat: Çin Dama uzayındaki herhangi iki doğru arasındaki uzaklık

$$d_c(l, l') = \min \{d_c(X, X') \mid X \in l, X' \in l'\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer l ve l' doğruları paralel ise $(p, q, r) = (p', q', r')$ alınabilir. Ayrıca genelliği bozmaksızın l' üzerindeki herhangi bir P noktası da $P = (a' + \mu p, b' + \mu q, c' + \mu r)$ şeklinde alınabilir. O halde iki doğru arasındaki uzaklık $d_c(P, l') = d_c(A, l')$ olduğundan Teorem 2.3.10 da verilen bir noktanın bir doğruya uzaklığı formülü kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilir.

l ve l' paralel olmayan doğrular ise $pq' - p'q, qr' - q'r, pr' - p'r$ ifadelerinden en az birisi sıfırdan farklıdır. Aksi takdirde bu doğrular paralel olurlardı. l üzerinde $P = (p\lambda + a, q\lambda + b, r\lambda + c)$ ve l' üzerinde $P' = (p'\mu + a', q'\mu + b', r'\mu + c')$ noktaları göz önüne alınsın. Bu halde $d_c(P, P')$ minimum ise P ve P' noktalarından geçen l'' doğrusunun doğrultu vektörü Δ nın bir elemanıdır. p, q, r nin değerlerine göre mümkün olan üç temel durum vardır.

I. Durum: $p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$ olsun. Bu durumda (p, q, r) vektörü $\{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer P ve P' den geçen l'' doğrusunun doğrultu vektörü $(p, q, r) = (1, 1, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan

$$\lambda = \frac{(q' - p')[(b' - c') - (b - c)] - (r' - q')[(a' - b') - (a - b)]}{(q - r)(q' - p') + (q - p)(r' - q')}$$

ve

$$\mu = \frac{(q - r)[(a' - b') - (a - b)] + (q - p)[(b' - c') - (b - c)]}{(q - r)(q' - p') + (q - p)(r' - q')}$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığının hesaplanmasında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d_c(P, P') &= \max \{|p\lambda + a - p'\mu - a'|, |q\lambda + b - q'\mu - b'|, |r\lambda + c - r'\mu - c'|\} \\ &+ (\sqrt{2} - 1) \min \{|p\lambda + a - p'\mu - a'| + |q\lambda + b - q'\mu - b'|, |p\lambda + a - p'\mu - a'| \\ &+ |r\lambda + c - r'\mu - c'|, |q\lambda + b - q'\mu - b'| + |r\lambda + c - r'\mu - c'|\} \\ &= \frac{(2\sqrt{2} - 1) |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|(q - r)(q' - p') - (q' - r')(q - p)|} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde l_2'' doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (-1, 1, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{-1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ bulunur. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{(2\sqrt{2} - 1) |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|(p + q)(r' - q') - (p' + q')(r - q)|}$$

olur.

Eğer l_3'' doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1, -1, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{-1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ elde edilir. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{(2\sqrt{2} - 1) |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|(q + r)(p' + q') - (q' + r')(p + q)|}$$

dir.

Eğer l_4'' doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1, 1, -1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{-1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ bulunur. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{(2\sqrt{2} - 1) |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|(q + r)(q' - p') - (q' + r')(q - p)|}$$

dir.

II. Durum: p, q, r den yalnızca biri sıfır olsun. Bu takdirde

$(p, q, r) \in \{(\mp 1, 1, 0), (\pm 1, 0, 1), (0, \pm 1, 1)\}$ olur. Eğer $(p, q, r) = (1, 1, 0)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{0}$$

olduğundan

$$\lambda = \frac{r'[(a' - b') - (a - b)] - (p' - q')(c' - c)}{r'(p - q) - r(p' - q')}$$

ve

$$\mu = \frac{r[(a' - b') - (a - b)] + (q - p)(c' - c)}{r'(p - q) - r(p' - q')}$$

olarak bulunur. Bu değerler P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığının hesaplanmasında kullanılırsa

$$d_c(P, P') = \frac{\sqrt{2} |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|r(p' - q') - r'(p - q)|}$$

şeklinde bulunur.

Benzer yolla l''_6 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (-1, 1, 0)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{-1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{-1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{0}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ bulunur. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{\sqrt{2} |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|r(p' + q') - r'(p + q)|}$$

olur.

Eğer l''_7 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1, 0, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{0} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ elde edilir. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{\sqrt{2} |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|q(p' - r') - q'(p - r)|}$$

dir.

Eğer l''_8 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (-1, 0, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{-1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{0} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ elde edilir. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{\sqrt{2} |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|q(p' + r') - q'(p + r)|}$$

olarak bulunur.

Benzer yolla l''_9 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (0, 1, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{0} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ bulunur. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{\sqrt{2} |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|p(r' - q') - p'(r - q)|}$$

olur.

Benzer yolla l''_{10} doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (0, -1, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{0} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{-1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ bulunur. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{\sqrt{2} |(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|p(q' + r') - p'(q + r)|}$$

dir.

III. Durum: p, q, r den herhangi ikisi sıfır olsun. Bu halde (p, q, r) vektörü $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesinin bir elemanıdır. Eğer P ve P' den geçen l''_{11} doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{1} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{0} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{0}$$

olduğu için

$$\lambda = \frac{r'(b' - b) - q'(c' - c)}{qr' - q'r}$$

ve

$$\mu = \frac{r(b' - b) - q(c' - c)}{qr' - q'r}$$

elde edilir. Bu değerleri P ile P' arasındaki d_c -uzaklığını hesaplamak için kullanılırsa

$$d_c(P, P') = \frac{|(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|qr' - q'r|}$$

olur.

Aynı yöntemle l''_{12} doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{0} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{1} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{0}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ bulunur. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{|(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|pr' - p'r|}$$

dir.

Eğer l''_{13} doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (0, 0, 1)$ ise

$$\frac{p\lambda + a - p'\mu - a'}{0} = \frac{q\lambda + b - q'\mu - b'}{0} = \frac{r\lambda + c - r'\mu - c'}{1}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar ile λ ve μ elde edilir. Buna göre P ile P' arasındaki Çin Dama uzaklığı

$$d_c(P, P') = \frac{|(qr' - q'r)(a' - a) + (rp' - r'p)(b' - b) + (pq' - p'q)(c' - c)|}{|pq' - p'q|}$$

şeklinde bulunur.

Dikkat edilirse incelen durumlarda elde edilen sonuçlar istenen formülü verir.

BÖLÜM 3

BAZI ÖKLİDYEN TEOREMLERİN α -DÜZLEM GEOMETRİSİNDEKİ BENZERLERİ

Bu bölümde, Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen bazı özelliklerin α -düzlem geometrisindeki karşılıkları verilmektedir. Temel Kavramlar bölümünde belirtildiği gibi α -uzaklığı Songlin Tian tarafından (Tian, 2005) de verildi. Analitik düzlemde lineer yapı aynen korunarak, bu düzlemdeki $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık fonksiyonu d_E yerine $\alpha \in [0, \pi/4]$,

$$\Delta_{P_1P_2} := \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad \text{ve} \quad \delta_{P_1P_2} := \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

olmak üzere

$$d_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \Delta_{P_1P_2} + (\sec \alpha - \tan \alpha)\delta_{P_1P_2}$$

uzaklık fonksiyonu alınarak α -düzlemi oluşturulmaktadır. Yani α -düzleminde noktalar ve doğrular Öklidyen düzlemdeki noktalar ve doğrular ile aynı olup, açı ölçümünde Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılmaktadır. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. α -düzleminde uzaklık fonksiyonu farklı olduğundan Öklidyen düzlemdeki uzaklık kavramını içeren konuların α -düzlemindeki benzerlerinin çalışılması ilginç gözükmemektedir. Aşağıdaki yardımcı teorem ve sonuçlar bu bölümünün içinde oldukça sıkça kullanılmaktadır.

Yardımcı Teorem 3.0.1 Analitik düzlemde farklı $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru l olsun ve d_E ile Öklidyen metrik gösterilsin. m , l doğrusunun eğimi ise

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \frac{M}{\sqrt{1+m^2}} d_E(P_1, P_2), \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde farklı herhangi iki nokta

olmak üzere $d_\alpha(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$ olacak şekilde bir λ parametresi vardır.

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &= \lambda d_E(P_1, P_2) \\ &\Rightarrow (\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}) \\ &= \lambda \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \end{aligned}$$

olup $P_1 \neq P_2$ olduğundan $x_1 - x_2$ veya $y_1 - y_2$ den enaz biri sıfırdan farklıdır. Ayrıca $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ifadesi $P_1 P_2$ doğrusunun eğimidir. Buna göre,

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2) \Rightarrow \lambda = \frac{(\max\{1, |m|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{1, |m|\})}{\sqrt{1 + m^2}}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan ise

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \frac{M}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2), \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak verilebilir.

Bu yardımcı teoreme göre herhangi bir doğru boyunca olan α -uzaklığı, aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığının sabit bir pozitif katıdır. Bu yardımcı teoremi kullanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.0.2 P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaki üç nokta olsun. Bu takdirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_\alpha(P_1, X) = d_\alpha(P_2, X)$ olmasıdır.

İspat: P_1, P_2 ve X analitik düzlemde doğrudaki üç nokta olsun. Önceki yardımcı teoremden dolayı $M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ için

$\lambda = \frac{M}{\sqrt{1 + m^2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, X) &= \lambda d_E(P_1, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_\alpha(P_1, X) \\ d_\alpha(P_2, X) &= \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_2, X) = \frac{1}{\lambda} d_\alpha(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ ise $\frac{1}{\lambda} d_\alpha(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_\alpha(P_2, X) \Rightarrow d_\alpha(P_1, X) = d_\alpha(P_2, X)$

dir. Eğer $d_\alpha(P_1, X) = d_\alpha(P_2, X)$ ise $\lambda d_E(P_1, X) = \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$

olur.

Sonuç 3.0.3 P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi farklı ve doğrudan olan üç nokta olsun. Bu taktirde

$$\frac{d_\alpha(P_1, X)}{d_\alpha(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve α -uzaklıklarının oranı eşittir.

İspat: P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudan olan üç nokta olsun. Önceki yardımcı teoremden dolayı $M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ için $\lambda = \frac{M}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, X) &= \lambda d_E(P_1, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_\alpha(P_1, X) \\ d_\alpha(P_2, X) &= \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_2, X) = \frac{1}{\lambda} d_\alpha(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_\alpha(P_1, X)}{d_\alpha(P_2, X)} = \frac{\lambda d_E(P_1, X)}{\lambda d_E(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

olur.

3.1 Pisagor Teoreminin α -Benzeri

Öklidyen düzlemde herhangi bir $\triangle ABC$ dik üçgeni alınsın. BC bu dik üçgenin hipotenüsü ve $a = d_E(B, C)$, $b = d_E(A, C)$, $c = d_E(A, B)$ olmak üzere Pisagor teoremi olarak bilinen kenar uzunlukları arasında $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı geçerlidir. Bu teorem geometrinin en önemli teoremlerinden biridir. Geometri, sayılar teorisi, cebir ve uygulamalı matematik gibi matematik disiplinlerinin pek çok kavramları ve teoremleri ya bu teoreme dayanır yada bu teoremle ilgilidir. Bu kısımda Pisagor teoremi olarak bilinen bu teoremin α -düzlemindeki karşılıkları incelenmektedir.

Teorem 3.1.1 α -düzleminde, $\triangle ABC$, A köşesinde dik açığa sahip olan bir dik üçgen olsun. \mathbf{a} bu dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu, \mathbf{b} ve \mathbf{c} de bu dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları olsun. Bu durumda dik üçgenin B ve C köşelerinden A köşesinden geçen temel doğruya inilen dikme ayaklarının temel köşe ile olan uzaklıkları, sırasıyla, h_1 ve h_2 olsun. Ayrıca $\gamma_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\gamma_2 = \min\{h_1, h_2\}$ ve

$w = (\sec \alpha - \tan \alpha)$ olmak üzere

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2((\tan \alpha) \gamma_1 + w\gamma_2) & , K1 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2(\sec \alpha) \gamma_2 & , K2 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - \frac{2}{1 + \sin \alpha} \gamma_2 & , K3 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2 \left(\gamma_1 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \gamma_2 \right) & , K4 \text{ koşuluyla} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2w\gamma_2 & , K5 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} & , K6 \text{ koşuluyla} \end{cases}$$

dır. Burada $Ki, i = 1, 2, \dots, 6$ koşulları aşağıdaki gibidir:

$K1$: A dan geçen bir tek yatay(dikey) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin yataysal(dikeysel) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerinde değildir.

$K2$: A dan geçen bir tek yatay(dikey) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin yataysal(dikeysel) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerindedir.

$K3$: A dan geçen bir tek dikey(yatay) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin dikeysel(yataysal) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerinde değildir.

$K4$: A dan geçen bir tek dikey(yatay) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin dikeysel(yataysal) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerindedir.

$K5$:Dik kenarlar ayıraç doğrusudur.

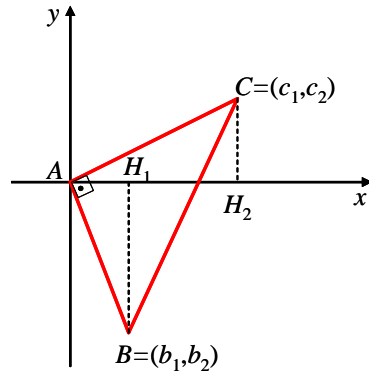
$K6$: A dan geçen çift temel doğru vardır.

İspat: Genelliği bozmaksızın \mathbb{R}^2 deki tüm ötelemeler α -uzaklığı için birer izometri olduğundan dik üçgenin A köşesi orijinde alınabilir. $\triangle ABC$, A köşesinde dik açığa sahip bir dik üçgen olduğundan A köşesi temel köşedir. Diğer bir bakış açısıyla, bu üçgenin her zaman A noktasından geçen bir veya iki temel doğruya sahip olduğu söylenebilir. O halde $A = (0, 0)$, $B = (b_1, b_2)$ ve $C = (c_1, c_2)$ olsun. B ve C

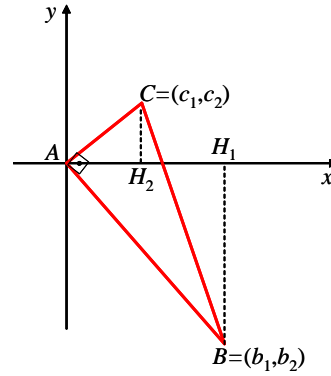
köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olsun. Ayrıca $h_1 = d_\alpha(A, H_1)$ ve $h_2 = d_\alpha(A, H_2)$ olsun. Buna göre temel doğrulara ilişkin başlıca iki durum vardır:

I Durum: A temel köşesinden geçen bir tek temel doğru olsun. Bu durum, temel doğrunun ve hipotenüsün durumuna göre üç alt durumuna ayrılabilir.

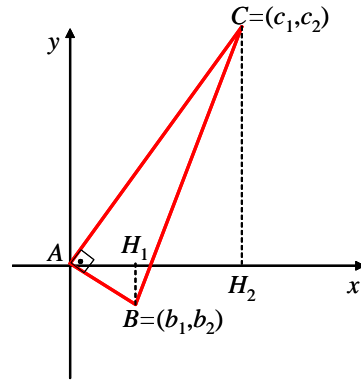
I_a: A temel köşesinden geçen temel doğru yatay ve hipotenüs yani BC kenarı dikeysel bir doğru üzerinde olsun. (Şekil 3.1. (a)-(d)).



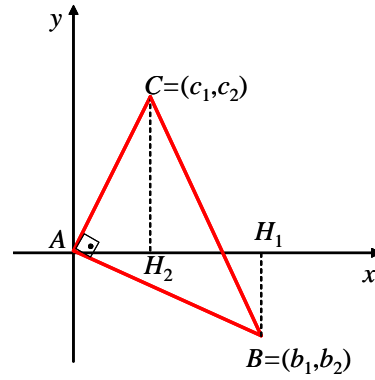
Şekil 3.1.(a)



Şekil 3.1.(b)



Şekil 3.1.(c)



Şekil 3.1.(d)

$\triangle ABC$ bir dik üçgen olduğundan dolayı AB ve AC kenarlarından biri yataysal iken diğeri dikeyseldir. O halde

$$\mathbf{b} = |c_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_2| \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = |b_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1|$$

veya

$$\mathbf{b} = |c_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = |b_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_2|$$

olmalıdır. Ayrıca hipotenüs yani BC kenarında dikeysel olduğundan $\mathbf{a} = (|b_2| + |c_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) \||b_1| - |c_1|\|$ dir.

Eğer $\mathbf{b} = |c_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_2|$ ve $\mathbf{c} = |b_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1|$ ise bu bağıntılardan

$$|b_2| = \mathbf{c} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1| \quad \text{ve} \quad |c_2| = \frac{\mathbf{b} - |c_1|}{(\sec \alpha - \tan \alpha)}$$

şeklinde elde edilen eşitlikler \mathbf{a} da kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (|b_2| + |c_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) \||b_1| - |c_1|\| \\ &= \mathbf{c} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1| + \frac{\mathbf{b} - |c_1|}{(\sec \alpha - \tan \alpha)} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \||b_1| - |c_1|\| \\ &= \mathbf{c} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \mathbf{b} - (\sec \alpha + \tan \alpha) |c_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) (\||b_1| - |c_1|\| - |b_1|) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|b_1| = h_1$ ve $|c_1| = h_2$ olup $|h_1 - h_2|$ nin değerine göre eğer $h_1 - h_2 \geq 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \mathbf{b} - 2((\tan \alpha) h_2 + (\sec \alpha - \tan \alpha) h_1)$$

ve eğer $h_1 - h_2 < 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \mathbf{b} - 2h_2 \sec \alpha$$

bulunur.

Eğer $\mathbf{b} = |c_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1|$ ve $\mathbf{c} = |b_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_2|$ ise bu bağıntılardan

$$|b_2| = \frac{\mathbf{c} - |b_1|}{(\sec \alpha - \tan \alpha)} \quad \text{ve} \quad |c_2| = \mathbf{b} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1|$$

olarak bulunan eşitliklerin \mathbf{a} da kullanılması ile

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (|b_2| + |c_2|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) \||b_1| - |c_1|\| \\ &= (\sec \alpha + \tan \alpha) (\mathbf{c} - |h_1|) + \mathbf{b} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |h_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) \||h_1| - |h_2|\| \\ &= \mathbf{b} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \mathbf{c} - (\sec \alpha + \tan \alpha) |h_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) (\||h_1| - |h_2|\| - |h_1|) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $|h_1 - h_2|$ nin değerine göre eğer $h_1 - h_2 \geq 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \mathbf{c} - 2h_1 \sec \alpha$$

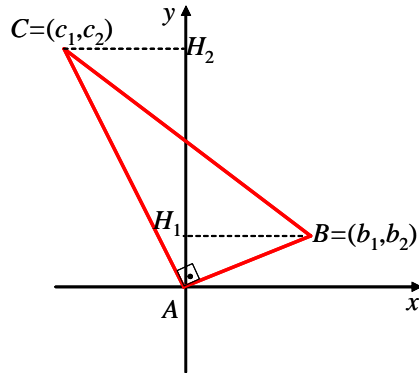
ve eğer $h_1 - h_2 < 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \mathbf{c} - 2((\tan \alpha) h_1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) h_2)$$

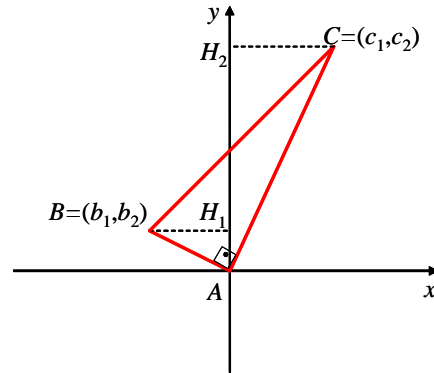
bulunur. Yani, $\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2((\tan \alpha) \gamma_1 + w\gamma_2)$ veya $\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sec \alpha + \tan \alpha) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2(\sec \alpha) \gamma_2$ dir. Bu farkı da yataysal kenardan inilen dikme ayağının temel doğru parçası üzerinde olup olmaması belirler.

Analitik düzlemdeki herhangi bir nokta etrafındaki $\pi/2$ lik dönme dönüşümü α -uzaklığı için bir izometri olduğundan bu ifade temel doğru parçası dikey ve hipotenüs yataysal olduğunda geçerlidir.

I_b: A temel köşesinden geçen temel doğru dikey ve BC kenarı yani hipotenüs dikeysel bir doğru olsun. (Şekil 3.2. (a)-(b)).



Şekil 3.2.(a)



Şekil 3.2.(b)

O halde $\triangle ABC$ dik üçgeni için dik kenarlar

$$\mathbf{b} = |c_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = |b_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_2|$$

veya

$$\mathbf{b} = |c_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_2| \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = |b_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1|$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca hipotenüs yani BC kenarı da dikeysel olduğundan $\mathbf{a} = ||c_2| - |b_2|| + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|b_1| + |c_1|)$ dir.

Eğer $\mathbf{b} = |c_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1|$ ve $\mathbf{c} = |b_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_2|$ ise bu bağıntılardan

$$|b_1| = \mathbf{c} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_2| \quad \text{ve} \quad |c_1| = \frac{\mathbf{b} - |c_2|}{(\sec \alpha - \tan \alpha)}$$

şeklinde elde edilen eşitlikler \mathbf{a} da kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= ||b_2| - |c_2|| + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|b_1| + |c_1|) \\ &= ||b_2| - |c_2|| + (\sec \alpha - \tan \alpha) \left(\mathbf{c} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_2| + \frac{\mathbf{b} - |c_2|}{(\sec \alpha - \tan \alpha)} \right) \\ &= \mathbf{b} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \mathbf{c} - (\sec \alpha - \tan \alpha)^2 |b_2| - |c_2| + ||c_2| - |b_2||\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|b_2| = h_1$ ve $|c_2| = h_2$ olup $|h_1 - h_2|$ nin değerine göre eğer $h_2 - h_1 \geq 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \mathbf{c} - \frac{2}{1 + \sin \alpha} h_1$$

ve eğer $h_2 - h_1 < 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \mathbf{c} - 2 \left(h_2 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} h_1 \right)$$

bulunur.

Eğer $\mathbf{b} = |c_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_2|$ ve $\mathbf{c} = |b_2| + (\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1|$ ise bu bağıntılardan

$$|b_1| = \frac{\mathbf{c} - |b_2|}{(\sec \alpha - \tan \alpha)} \text{ ve } |c_1| = \mathbf{b} - (\sec \alpha - \tan \alpha) |c_2|$$

olarak bulunan eşitliklerin \mathbf{a} da kullanılması ile

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= ||c_2| - |b_2|| + (\sec \alpha - \tan \alpha) (|b_1| + |c_1|) \\ &= |h_2 - h_1| + (\sec \alpha - \tan \alpha) \left(\frac{\mathbf{c} - h_1}{(\sec \alpha - \tan \alpha)} + \mathbf{b} - (\sec \alpha - \tan \alpha) h_2 \right) \\ &= \mathbf{c} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \mathbf{b} - (\sec \alpha - \tan \alpha)^2 h_2 - h_1 + |h_2 - h_1|\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $|h_2 - h_1|$ nin değerine göre eğer $h_2 - h_1 \geq 0$ ise

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \mathbf{b} - 2 \left(h_1 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} h_2 \right)$$

ve eğer $h_1 - h_2 < 0$ ise

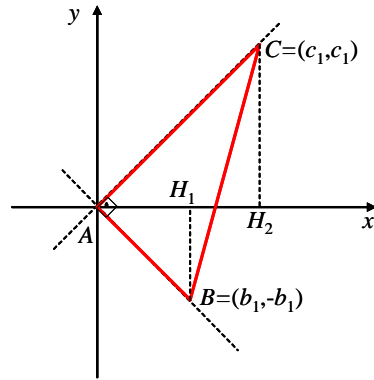
$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \mathbf{b} - \frac{2}{1 + \sin \alpha} h_2$$

bulunur. Yani, $\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - \frac{2}{1 + \sin \alpha} \gamma_2$ veya

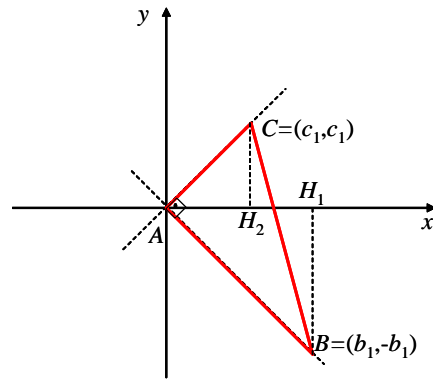
$\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2 \left(\gamma_1 - \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \gamma_2 \right)$ dir. Bu farkı da yataysal kenardan inilen dikme ayağının temel doğru parçası üzerinde olup olmaması belirler.

Analistik düzlemdeki herhangi bir nokta etrafındaki $\pi/2$ lik dönme dönüşümü α -uzaklığı için bir izometri olduğundan bu ifade temel doğru parçası yatay ve hipotenüs yataysal olduğunda geçerlidir.

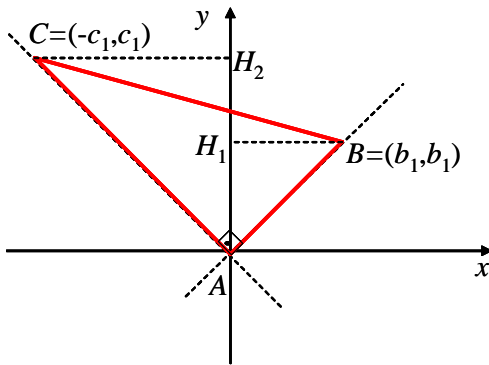
I_c: A temel köşesinden geçen temel doğru yatay veya dikey ve AB ile AC kenarları ayırıcı doğrusu üzerinde olsunlar. (Şekil 3.3. (a)-(d)).



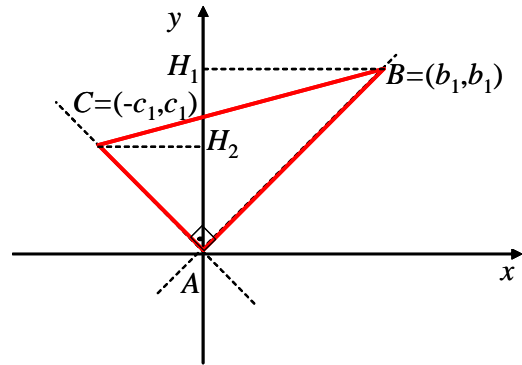
Şekil 3.3.(a)



Şekil 3.3.(b)



Şekil 3.3.(c)



Şekil 3.3.(d)

O halde $\triangle ABC$ dik üçgeni için dik kenarlar

$$\mathbf{b} = (1 + \sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = (1 + \sec \alpha - \tan \alpha) |b_1|$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca hipotenüsün uzunluğunda

$\mathbf{a} = (|b_1| + |c_1|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) ||b_1| - |c_1||$ dir. Burada $|b_1| = h_1$ ve $|c_1| = h_2$ olup

$|h_1 - h_2|$ değerlerine göre, eğer $h_1 - h_2 \geq 0$ ise

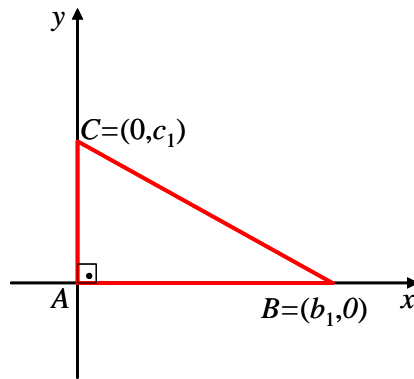
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (|b_1| + |c_1|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) ||b_1| - |c_1|| \\ &= (1 + \sec \alpha - \tan \alpha) |b_1| + (1 + \sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| - 2(\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2(\sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| \end{aligned}$$

veya $h_1 - h_2 < 0$ ise

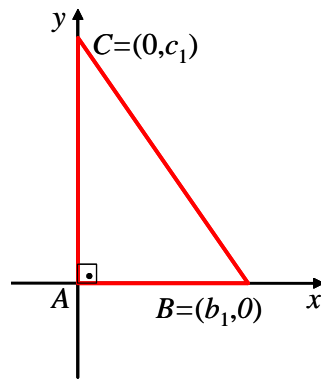
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (|b_1| + |c_1|) + (\sec \alpha - \tan \alpha) ||b_1| - |c_1|| \\ &= (1 + \sec \alpha - \tan \alpha) |b_1| + (1 + \sec \alpha - \tan \alpha) |c_1| - 2(\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1| \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2(\sec \alpha - \tan \alpha) |b_1| \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2w\gamma_2$ dir.

II. Durum: A temel köşesinden geçen iki temel doğru olsun. O halde $\triangle ABC$ dik üçgeninin dik kenarları temel doğrular üzerindedir. (Şekil 3.4. (a)-(b)).



Şekil 3.4.(a)



Şekil 3.4.(b)

O halde kolaylıkla

$$\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$$

olduğu söylenebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

α -uzaklık fonksiyonunda $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/4$ alındığında, sırasıyla, Taksi ve Çin Dama uzaklık fonksiyonları elde edildiği temel kavramlar kısmında ifade edilmişti. Buna göre α -düzlemi için Pisagor teoremi için elde edilen sonuçlarda $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/4$ alınırsa, sırası ile, Taksi ve Çin Dama düzlemleri için karşılıkları bulunmuş olur.

Sonuç 3.1.2 Taksi düzleminde, $\triangle ABC$, A köşesinde dik açığa sahip olan bir dik üçgen olsun. \mathbf{a} bu dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu, \mathbf{b} ve \mathbf{c} de bu dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları olsun. Bu durumda dik üçgenin B ve C köşelerinden A köşesinden geçen temel doğruya inilen dikme ayaklarının temel köşe ile olan uzaklıkları, sırasıyla, h_1 ve h_2 olsun. Bu durumda $\gamma = \min \{h_1, h_2\}$ olmak üzere

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\gamma & , A \text{ dan geçen bir tek temel doğru var ise} \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} & , A \text{ dan geçen iki temel doğru var ise} \end{cases}$$

dir [bakınız (Kaya ve Çolakoğlu, 2006)].

Sonuç 3.1.3 Çin Dama düzleminde, $\triangle ABC$, A köşesinde dik açığa sahip olan bir dik üçgen olsun. \mathbf{a} bu dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu, \mathbf{b} ve \mathbf{c} de bu dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları olsun. Bu durumda dik üçgenin B ve C köşelerinden A köşesinden geçen temel doğruya inilen dikme ayaklarının temel köşe ile olan uzaklıkları, sırasıyla, h_1 ve h_2 olsun. Ayrıca $w = \sqrt{2} - 1$, $\gamma_1 = \max \{h_1, h_2\}$ ve $\gamma_2 = \min \{h_1, h_2\}$ ve olmak üzere

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sqrt{2} + 1) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2(\gamma_1 + w\gamma_2) & , K1 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + (\sqrt{2} + 1) \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2\sqrt{2}\gamma_2 & , K2 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2\sqrt{2}w\gamma_2 & , K3 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} - 2(\gamma_1 - w\gamma_2) & , K4 \text{ koşuluyla} \\ \max\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} + w \min\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} & , K5 \text{ koşuluyla} \end{cases}$$

dır. Burada Ki , $i = 1, 2, \dots, 5$ koşulları aşağıdaki gibidir:

$K1$: A dan geçen bir tek yatay(dikey) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin yataysal(dikeysel) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerinde değildir.

$K2$: A dan geçen bir tek yatay(dikey) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin yataysal(dikeysel) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerindedir.

$K3$: A dan geçen bir tek dikey(yatay) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin dikeysel(yataysal) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerinde değildir.

$K4$: A dan geçen bir tek dikey(yatay) temel doğru var, BC kenarı dikeysel(yataysal) ve dik üçgenin dikeysel(yataysal) kenarından inilen dikme ayağı temel doğru parçası üzerindedir.

$K5$:Dik kenarlar ayıraç doğrusu veya A dan geçen çift temel doğru vardır [bakınız (Gelişgen ve Kaya, 2006c)].

3.2 Pisagor Teoreminin Bir Başka α -Benzeri

Bu kısımda dik üçgenin dik kenarlarından birinin ve hipotenüsünün eğimleri kullanılarak α -düzleminde Pisagor teoreminin bir diğer karşılığı verilmektedir.

O orijin ve $O \neq P = (x, y)$ analitik düzlemde herhangi bir nokta olmak üzere $d_E(O, P) = \lambda d_\alpha(O, P)$ olacak şekilde bir λ parametresi vardır.

$$\begin{aligned} d_E(O, P) = \lambda d_\alpha(O, P) &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = (\max\{|x|, |y|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x|, |y|\}) \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(\max\{|x|, |y|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{|x|, |y|\})} \end{aligned}$$

olup $O \neq P$ olduğundan x veya y enaz biri sıfırdan farklıdır. O halde $\frac{y}{x}$ OP doğrusunun eğimidir. Buna göre,

$$d_E(O, P) = \lambda d_\alpha(O, P) \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{(\max\{1, |m|\} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min\{1, |m|\})}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan ise

$$d_E(O, P) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{M} d_\alpha(O, P) \quad , \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak verilebilir. Analitik düzlemin tüm ötelemeleri α -uzaklığı için birer izometri olduğundan bu ifade analitik düzlemdeki herhangi iki nokta P ve Q içinde aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$d_E(P, Q) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{M} d_\alpha(P, Q) \quad , \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu ifadeler yardımı ile aşağıdaki teorem ile α -düzlemi için Pisagor teoreminin dik üçgendeki kenarların eğimleri kullanılarak bir başka benzeri verilmektedir.

Teorem 3.2.1 α -düzleminde, \mathbf{a} dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu, \mathbf{b} ve \mathbf{c} de dik üçgenin ayaklarının uzunlukları olsun. Hipotenüsün eğimi m_1 ve dik üçgenin ayaklarından birinin eğimi ise m_2 ise

$$S(m_1, m_2) = \frac{(1 + m_2^2)}{(1 + m_1^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2 \text{ ve } M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathbf{a}^2 = S(m_1, m_2)(\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$$

dir.

İspat: Yukarıda da ifade edildiği gibi analitik düzlemde herhangi P ve Q noktalarından geçen l doğrusunun eğimi m olmak üzere

$$d_E(P, Q) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{M} d_\alpha(P, Q) \quad , \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. α -düzleminde herhangi bir dik üçgen için , \mathbf{a} bu üçgenin hipotenüsünün uzunluğu, \mathbf{b} ve \mathbf{c} de bu dik üçgenin ayaklarının uzunlukları olsun. a , b ve c ile aynı dik üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları gösterilsin. Ayrıca m_1 ve m_2 ile, sırasıyla, hipotenüsün ve ayaklardan birinin eğimi olsun. Bu dik üçgenin ayaklarından birinin eğimi m_2 iken diğer ayağının eğimi $-1/m_2$ olur. Ancak dikkat edilirse $\frac{\sqrt{m^2 + 1}}{M(m)}$ ifadesinde $m = m_2$ veya $m = -1/m_2$ alınması halinde sonuç aynı olur. O halde bu dik üçgenin kenarları için

$$a = \frac{\sqrt{1 + m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{a} \quad , \quad b = \frac{\sqrt{1 + m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{b} \quad , \quad c = \frac{\sqrt{1 + m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{c}$$

bağıntıları geçerlidir. Pisagor teoreminde Öklidyen haldeki a , b ve c kenar uzunluklarının yerine α -düzlemindeki karşılıkları kullanılırsa

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 &\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1 + m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{b} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 + m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{c} \right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{(1 + m_1^2)}{(M(m_1))^2} \mathbf{a}^2 = \frac{(1 + m_2^2)}{(M(m_2))^2} (\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) \\ &\Rightarrow \mathbf{a}^2 = \frac{(1 + m_2^2)}{(1 + m_1^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2 (\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) \end{aligned}$$

bulunur. $S(m_1, m_2) = \frac{(1 + m_2^2)}{(1 + m_1^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2$ olmak üzere son eşitlikten

$$\mathbf{a}^2 = S(m_1, m_2)(\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$$

bulunur.

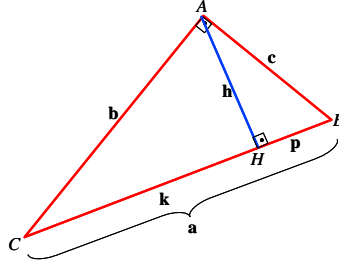
Ancak burada kullanılan m_1 ile m_2 tamamı ile birbirinden bağımsız olan parametreler değildir. Kolaylıkla $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ olduğu gösterilebilir.

3.3 Öklid Bağıntılarının α - Benzerleri

Öklidyen düzlemde herhangi bir $\triangle ABC$ dik üçgeni alınsın. BC bu dik üçgenin hipotenüsü ve $a = d_E(B, C)$, $b = d_E(A, C)$, $c = d_E(A, B)$ olsun. A köşesinden hipotenüseye inilen dikme ayağı H ve $h = d_E(A, H)$, $p = d_E(B, H)$, $k = d_E(C, H)$ olmak üzere Öklid bağıntıları olarak bilinen kenar uzunlukları arasında

$$(i) \quad h^2 = pk \quad (ii) \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{k}{p}} \quad (iii) \quad b^2 = ka \quad (iv) \quad c^2 = pa \quad (v) \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

bağıntıları geçerlidir.



Şekil 3.5.

Bu kısımda bu bağıntıların α -düzlemindeki benzerleri dik üçgenin kenarlarının eğimleri cinsinden verilmektedir.

Teorem 3.3.1 $\triangle ABC$, α -düzleminde A köşesinde dik açığa sahip olan bir dik üçgen ve H noktası da A köşesinden BC kenarına inilen dikmenin ayağı olsun. $\mathbf{a} = d_\alpha(B, C)$, $\mathbf{b} = d_\alpha(A, C)$, $\mathbf{c} = d_\alpha(A, B)$, $\mathbf{h} = d_\alpha(A, H)$, $\mathbf{p} = d_\alpha(B, H)$, $\mathbf{k} = d_\alpha(C, H)$ ve m_1, m_2 , sırasıyla, hipotenüsün ve dik üçgenin ayaklarından birinin eğimi ise

$$S(m_1, m_2) = \frac{(1 + m_2^2)}{(1 + m_1^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2 \quad \text{ve} \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{h}^2 &= \mathbf{pk} & \text{(ii)} \quad \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} &= \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}} & \text{(iii)} \quad \mathbf{b}^2 &= \frac{1}{S(m_1, m_2)} \mathbf{ka} \\ \text{(iv)} \quad \mathbf{c}^2 &= \frac{1}{S(m_1, m_2)} \mathbf{pa} & \text{(v)} \quad S(m_1, m_2) \frac{1}{\mathbf{h}^2} &= \frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{1}{\mathbf{c}^2} \end{aligned}$$

dir.

İspat: Önceki kısımda belirtildiği gibi analitik düzlemde herhangi P ve Q noktalarından geçen l doğrusunun eğimi m olmak üzere

$$d_E(P, Q) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{M} d_\alpha(P, Q) \quad , \quad M = \begin{cases} 1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) |m| & , \quad |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sec \alpha - \tan \alpha) + |m| & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. α -düzleminde herhangi bir dik üçgen için, \mathbf{a} bu üçgenin hipotenüsünün uzunluğu, \mathbf{b} ve \mathbf{c} de bu dik üçgenin ayaklarının uzunlukları, A köşesinden hipotenüse inilen dikmenin uzunluğu \mathbf{h} ve \mathbf{p} , \mathbf{k} da, sırasıyla, A dan hipotenüse inilen dikme ayağı ile B , C köşeleri arasındaki uzunluk olsun. a , b , c , h , k ve p ile aynı dik üçgenin ilgili uzunluklarının Öklidyen uzunlukları gösterilsin. Ayrıca m_1 ve m_2 , sırasıyla, hipotenüsün ve ayaklardan birinin eğimi gösterilsin. Bu dik üçgenin ayaklarından birinin eğimi m_2 iken diğer ayağının eğimi $-1/m_2$ olur. Benzer şekilde hipotenüsün eğimi m_1 iken A dan inilen dikmenin eğimi $-1/m_1$ olur. Dikkat edilirse $\frac{\sqrt{1+m^2}}{M(m)}$ ifadesinin m ve $-1/m$ için aldığı değerler aynıdır. O halde bu dik üçgenin yukarıda ifade edilen kenarları için

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{a} & , \quad b &= \frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{b} & , \quad c &= \frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{c} \\ k &= \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{k} & , \quad p &= \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{p} & , \quad h &= \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{h} \end{aligned}$$

bağıntıları geçerlidir. Öklid bağıntılarında kenarların bu değerleri kullanılırsa:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad h^2 = pk &\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{h} \right)^2 = \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{p} \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{k} \\ &\Rightarrow \frac{(1+m_1^2)}{(M(m_1))^2} \mathbf{h}^2 = \frac{(1+m_1^2)}{(M(m_1))^2} \mathbf{pk} \\ &\Rightarrow \mathbf{h}^2 = \mathbf{pk} \\ \text{(ii)} \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}} &\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{b}}{\frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{c}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{k}}{\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{p}}} \Rightarrow \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad b^2 = ka &\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{b} \right)^2 = \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{k} \frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{a} \\
&\Rightarrow \frac{(1+m_2^2)}{(M(m_2))^2} \mathbf{b}^2 = \frac{(1+m_1^2)}{(M(m_1))^2} \mathbf{k} \mathbf{a} \\
&\Rightarrow \mathbf{b}^2 = \frac{(1+m_1^2)}{(1+m_2^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2 \mathbf{k} \mathbf{a} \\
&\Rightarrow \mathbf{b}^2 = \frac{1}{S(m_1, m_2)} \mathbf{k} \mathbf{a} \\
\text{(iv)} \quad c^2 = pa &\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{m_2^2+1}}{M(m_2)} \mathbf{c} \right)^2 = \frac{\sqrt{m_1^2+1}}{M(m_1)} \mathbf{p} \frac{\sqrt{m_1^2+1}}{M(m_1)} \mathbf{a} \\
&\Rightarrow \frac{(1+m_2^2)}{(M(m_2))^2} \mathbf{c}^2 = \frac{(1+m_1^2)}{(M(m_1))^2} \mathbf{p} \mathbf{a} \\
&\Rightarrow \mathbf{c}^2 = \frac{(1+m_1^2)}{(1+m_2^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2 \mathbf{p} \mathbf{a} \\
&\Rightarrow \mathbf{c}^2 = \frac{1}{S(m_1, m_2)} \mathbf{p} \mathbf{a} \\
\text{(v)} \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+m_1^2}}{M(m_1)} \mathbf{h} \right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{b} \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{1+m_2^2}}{M(m_2)} \mathbf{c} \right)^2} \\
&\Rightarrow \frac{(M(m_1))^2}{(1+m_1^2)} \frac{1}{\mathbf{h}^2} = \frac{(M(m_2))^2}{(1+m_2^2)} \frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{(M(m_2))^2}{(1+m_2^2)} \frac{1}{\mathbf{c}^2} \\
&\Rightarrow \frac{(M(m_1))^2}{(1+m_1^2)} \frac{1}{\mathbf{h}^2} = \frac{(M(m_2))^2}{(1+m_2^2)} \left(\frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{1}{\mathbf{c}^2} \right) \\
&\Rightarrow \frac{(1+m_2^2)}{(1+m_1^2)} \left(\frac{M(m_1)}{M(m_2)} \right)^2 \frac{1}{\mathbf{h}^2} = \frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{1}{\mathbf{c}^2} \\
&\Rightarrow S(m_1, m_2) \frac{1}{\mathbf{h}^2} = \frac{1}{\mathbf{b}^2} + \frac{1}{\mathbf{c}^2}
\end{aligned}$$

olarak Öklid bağıntıların α -düzlemindeki benzerleri bulunur.

Bir önceki kısımda belirtildiği üzere burada kullanılan m_1 ile m_2 tamamen bağımsız olan parametreler olmadığı

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

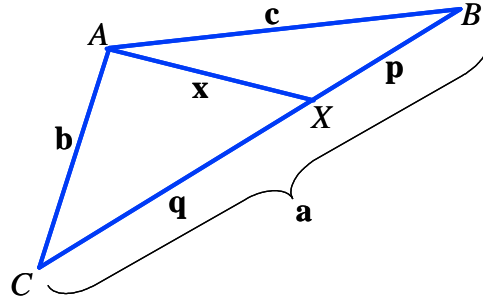
bağıntısı ile gösterilebilir.

3.4 Stewart Teoreminin α -Benzeri

Öklidyen düzlemde herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeni alınsın. Bu üçgen için $X \in BC$ ve $a = d_E(B, C)$, $b = d_E(A, C)$, $c = d_E(A, B)$, $p = d_E(B, X)$, $q = d_E(C, X)$, $x = d_E(A, X)$ olmak üzere

$$x^2 = \frac{b^2 p + c^2 q}{p + q} - pq$$

dir. Bu ifade Stewart teoremi olarak bilinir. Bu kısımda Stewart teoreminin α -düzlemindeki karşılığı incelenmektedir.



Şekil 3.6.

Teorem 3.4.1 α -düzleminde (\mathbb{R}_α^2), herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $\mathbf{a} = d_\alpha(B, C)$, $\mathbf{b} = d_\alpha(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_\alpha(A, B)$ olsun. $X \in BC$ ve $\mathbf{p} = d_\alpha(B, X)$, $\mathbf{q} = d_\alpha(C, X)$, $\mathbf{x} = d_\alpha(A, X)$ ve de Δ aşağıdaki tabloda verildiği gibi olmak üzere

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c} - \Delta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

dır.

Δ	Temel Doğru Sayısı	AB böl.	AX böl.	AC böl.
0	0	S_i	S_i	$S_i \quad \forall i$
$(1-w) \gamma - \delta p$	0	S_i	S_i	$S_{i+1} \quad \forall i$
$(1-w) \theta - \beta q$	0	S_i	S_{i+1}	$S_{i+1} \quad \forall i$
$2wq\min\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+1} \quad \forall i$
$2wp\min\{\gamma, \delta\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+1} \quad \forall i$
$(1-w) \gamma - \delta p + 2wq\min\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+2} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$(1+w)p\max\{\gamma + \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta + \frac{w-1}{w+1}\gamma\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+2} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$(1+w)q\min\{\theta - \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta - \frac{w-1}{w+1}\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+2} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$2wp\min\{\gamma, \delta\} + (1-w) \theta - \beta q$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+2} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$(1+w)q\max\{\theta + \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta + \frac{w-1}{w+1}\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+2} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$(1+w)p\min\{\gamma - \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta - \frac{w-1}{w+1}\gamma\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+2} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$(1-w) \gamma - \delta p + (1+w)q\max\{\theta + \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta + \frac{w-1}{w+1}\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$(1+w)p\max\{\gamma + \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta + \frac{w-1}{w+1}\gamma\} + (1-w)q \theta - \beta $	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$2q\max\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+3}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$2p\max\{\gamma, \delta\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+3} \quad \forall i$
$(1+w)p\min\{\gamma - \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta - \frac{w-1}{w+1}\gamma\} + 2wq\min\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$(1+w)(\gamma + \delta)p$	2	S_i	S_i	$S_{i+3} \quad \forall i$
$2wp\min\{\gamma, \delta\} + (1+w)q\min\{\theta - \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta - \frac{w-1}{w+1}\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$(1+w)(\theta + \beta)q$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$2p\max\{\gamma, \delta\} + 2wq\min\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+4} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$(1+w)p\max\{\gamma + \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta + \frac{w-1}{w+1}\gamma\} +$ $(1+w)q\min\{\theta - \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta - \frac{w-1}{w+1}\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+4} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$(1-w) \gamma - \delta p + (1+w)(\theta + \beta)q$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+4} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$2wp\min\{\gamma, \delta\} + 2q\max\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+4} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$(1+w)p\min\{\gamma - \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta - \frac{w-1}{w+1}\gamma\} +$ $(1+w)q\max\{\theta + \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta + \frac{w-1}{w+1}\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+4} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$(1+w)(\gamma + \delta)p + (1-w) \theta - \beta q$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+4} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$2pb$	2	S_i	S_i	$S_{i+4} \quad \forall i$
$2qc$	2	S_i	S_{i+4}	$S_{i+4} \quad \forall i$

Tablodaki değerler için $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $|b_1| = \theta$, $|b_2| = \beta$, $|c_1| = \gamma$, $|c_2| = \delta$ ve $w = (\sec \alpha - \tan \alpha)$ dir.

İspat: \mathbb{R}^2 deki tüm ötelemeler α -uzaklığı için birer izometri olduğundan genellikle bozmaksızın $\triangle ABC$ üçgeninin A köşesi orijinde alınabilir. Ayrıca $B=(b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $|b_1| = \theta$, $|b_2| = \beta$, $|c_1| = \gamma$, $|c_2| = \delta$ ve $w = (\sec \alpha - \tan \alpha)$ olsun. Böylece

$$\mathbf{b} = \max \{ \gamma, \delta \} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min \{ \gamma, \delta \}$$

$$\mathbf{c} = \max \{ \theta, \beta \} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min \{ \theta, \beta \}$$

$$\mathbf{x} = \max \{ |x_1|, |x_2| \} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \min \{ |x_1|, |x_2| \}$$

olur. Burada A köşesinden geçen temel doğruların sayısına göre üç temel durum vardır:

I. Durum: $\triangle ABC$ üçgeninin A köşesinden geçen hiç temel doğru olmasın. A köşesi orijinde olduğundan AB ve AC kenarları aynı bölgededirler. Bu nedenle α -uzaklığı için aynı doğru üzerindeki noktalar arasındaki Öklidyen uzaklıklar eşit iken α -uzaklığın eşit olduğu ve Öklidyen uzaklıklar oranı ile α -uzaklıları arasındaki oranın aynı olduğu biliniyor (Önerme 3.0.2 ve Önerme 3.0.3). Bu önermeler yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} &= \frac{\gamma - x_1}{\gamma - \theta} \Rightarrow x_1 = \gamma - \frac{\mathbf{q}(\gamma - \theta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \Rightarrow x_1 = \frac{\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} &= \frac{x_2 - \beta}{\delta - \beta} \Rightarrow x_2 = \beta + \frac{\mathbf{q}(\delta - \beta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \Rightarrow x_2 = \frac{\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre AB , AC ve AX kenarlarının pozisyonuna göre birinci bölgede dört durum söz konusudur. $\pi/2$ lik dönmeler α -düzleminde bir izometri olduğundan diğer bölgelerde geçerlidir. Buna göre S_i ler temel kavramlar bölümünde ifade edilen düzlemin parçalanmasındaki bölgeler olmak üzere:

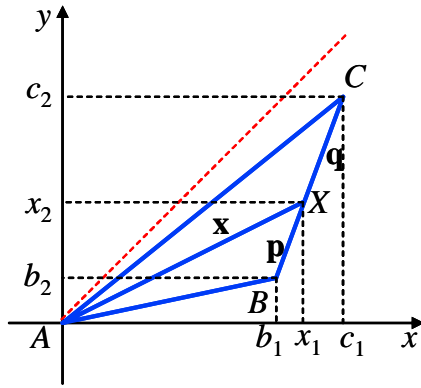
Eğer AB , AC ve AX kenarları Şekil 3.7.(a) ve (b) deki gibi aynı S_i bölgesinde iseler,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= d_\alpha(A, X) = \frac{\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \frac{\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{p}(\gamma + (\sec \alpha - \tan \alpha)\delta) + \mathbf{q}(\theta + (\sec \alpha - \tan \alpha)\beta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

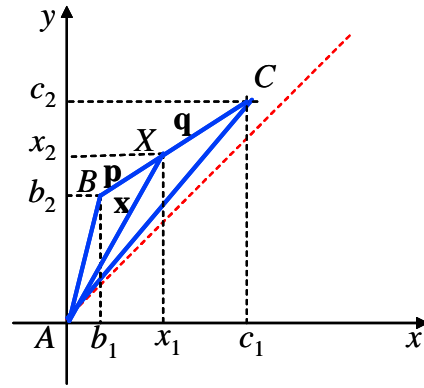
veya

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= d_{\alpha}(A, X) = \frac{\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \frac{\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\
 &= \frac{\mathbf{p}(\delta + (\sec \alpha - \tan \alpha)\gamma) + \mathbf{q}(\beta + (\sec \alpha - \tan \alpha)\theta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\
 &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 3.7.(a)



Şekil 3.7.(b)

Eğer Şekil 3.8.(a)-(b) deki gibi AB ve AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+1} bölgesinde iseler,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= d_{\alpha}(A, X) = \frac{\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \frac{\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\
 &= \frac{\mathbf{p}(\gamma + (\sec \alpha - \tan \alpha)\delta) + \mathbf{q}(\theta + (\sec \alpha - \tan \alpha)\beta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\
 &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1 - (\sec \alpha - \tan \alpha))(\gamma - \delta)\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

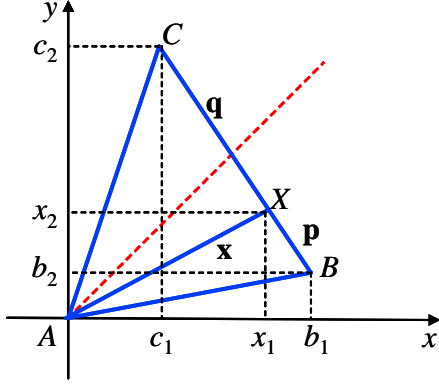
veya

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= d_{\alpha}(A, X) = \frac{\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} + (\sec \alpha - \tan \alpha) \frac{\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\
 &= \frac{\mathbf{p}(\delta + (\sec \alpha - \tan \alpha)\gamma) + \mathbf{q}(\beta + (\sec \alpha - \tan \alpha)\theta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\
 &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1 - (\sec \alpha - \tan \alpha))(\delta - \gamma)\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

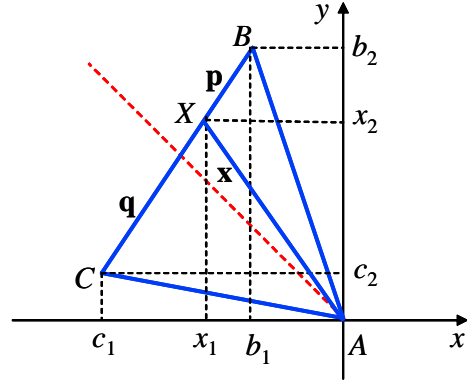
olduğundan

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1 - (\sec \alpha - \tan \alpha)) |\delta - \gamma| \mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

bulunur.



Şekil 3.8.(a)

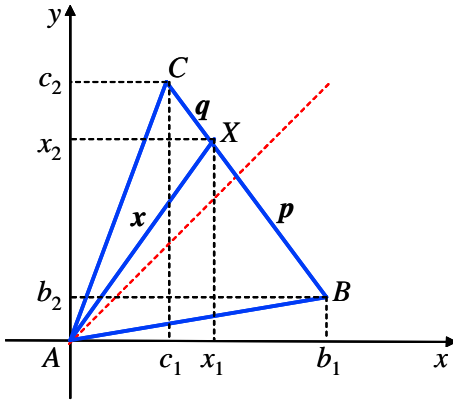


Şekil 3.8.(b)

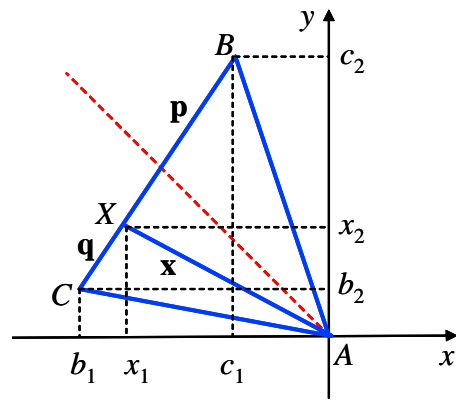
Eğer Şekil 3.9.(a)-(b) deki gibi AB kenarı S_i bölgesinde ve AC ve AX kenarları S_{i+1} bölgesinde iseler benzer şekilde

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1 - (\sec \alpha - \tan \alpha)) |\theta - \gamma| \mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

elde edilir.



Şekil 3.9.(a)



Şekil 3.9.(b)

II. Durum: $\triangle ABC$ üçgeninin A köşesinden geçen bir tek temel doğru olsun. A köşesi orijinde olduğundan AB ve AC kenarları birbirlerine komşu olan bölgededirler. Yani $b_1c_1 < 0$ veya $b_2c_2 < 0$ dır. Bir önceki durumda belirtildiği gibi Önerme 3.0.2 ve Önerme 3.0.3 yardımıyla AB , AC ve AX kenarlarının düzlemdeki pozisyonlarına göre

$$x_1 = \frac{\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{\mathbf{p}\delta - \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{-\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

veya

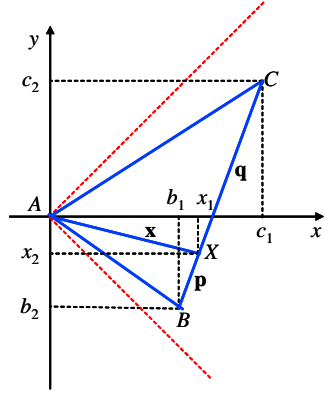
$$x_1 = \frac{\mathbf{p}\gamma - \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad \text{veya} \quad x_1 = \frac{-\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olarak hesaplanır. Bu değerler alınan bölgeye göre kullanılarak aşağıdaki gibi sonuçlar elde edilir:

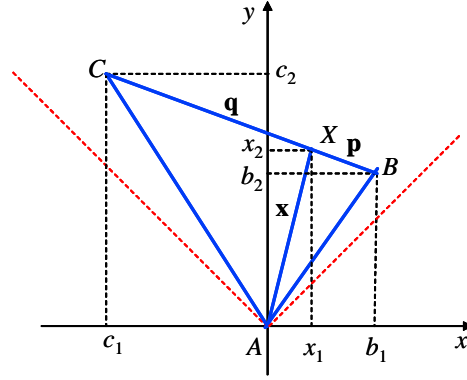
Eğer AB , AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+1} bölgesinde ise S_i nin yataysal ve dikeysel olma durumları göz önüne alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2(\sec \alpha - \tan \alpha)\mathbf{p} \min \{\gamma, \delta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

bulunur (Şekil 3.10.(a)-(b)).



Şekil 3.10.(a)

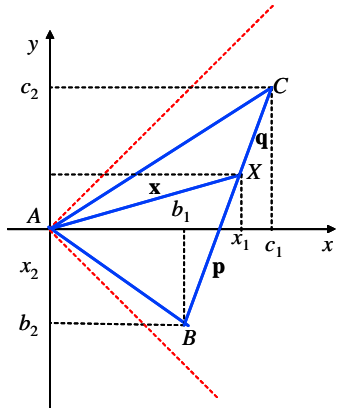


Şekil 3.10.(b)

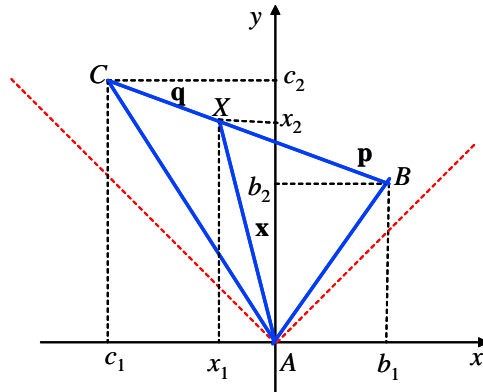
Eğer AB kenarı S_i bölgesinde ve AC , AX kenarları S_{i+1} bölgesinde ise benzer şekilde S_i nin yataysal veya dikeysel olma durumu dikkate alınarak

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2(\sec \alpha - \tan \alpha)\mathbf{q} \min \{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olur (Şekil 3.11.(a)-(b)).



Şekil 3.11.(a)

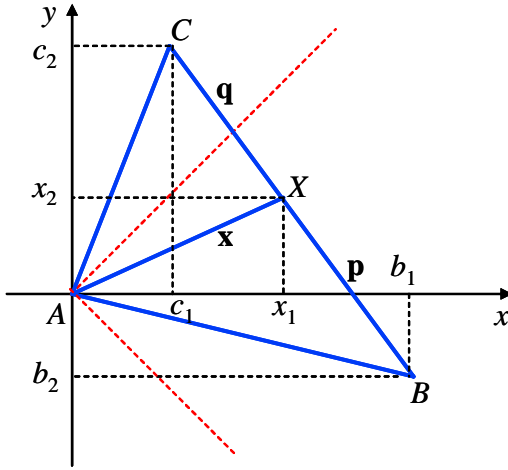


Şekil 3.11.(b)

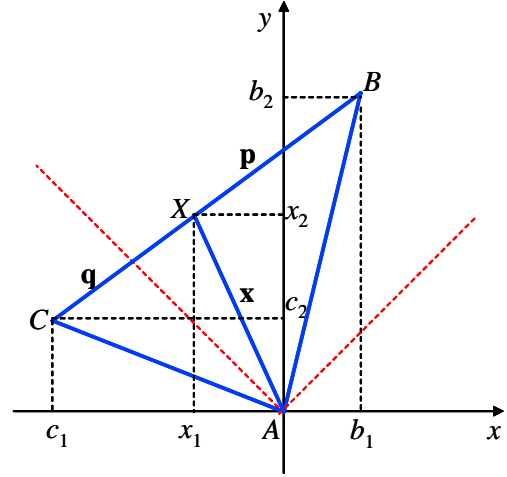
Eğer AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için S_i , S_{i+1} ve S_{i+2} bölgelerinde ise gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1-w)|\gamma - \delta| \mathbf{p} + 2w\mathbf{q} \min\{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olur (Şekil 3.12.(a)-(b)).



Şekil 3.12.(a)

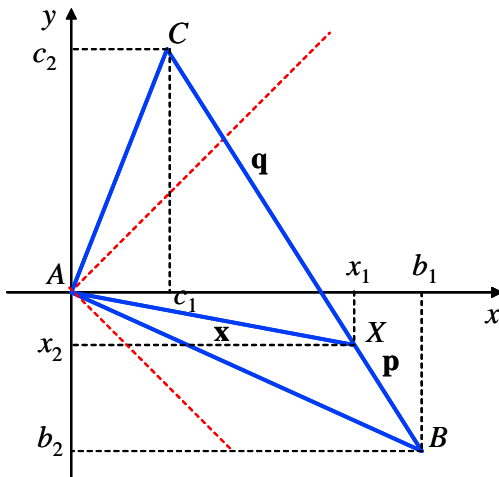


Şekil 3.12.(b)

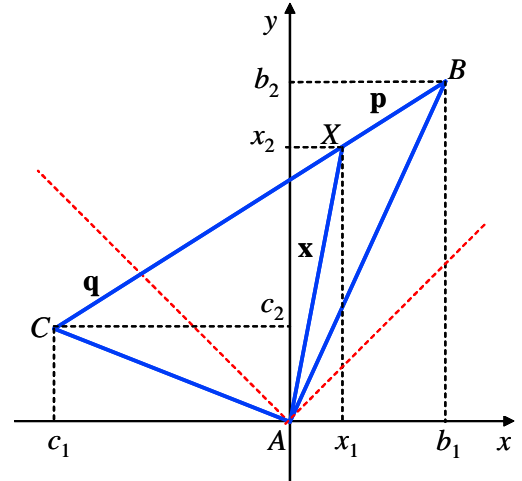
Eğer $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için AB , AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+2} bölgesinde ise gerekli hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{\mathbf{p}((w-1) \min\{\gamma, \delta\} + (1+w) \max\{\gamma, \delta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)\mathbf{p} \max\{\gamma + \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta + \frac{w-1}{w+1}\gamma\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

bulunur (Şekil 3.13.(a)-(b)).



Şekil 3.13.(a)

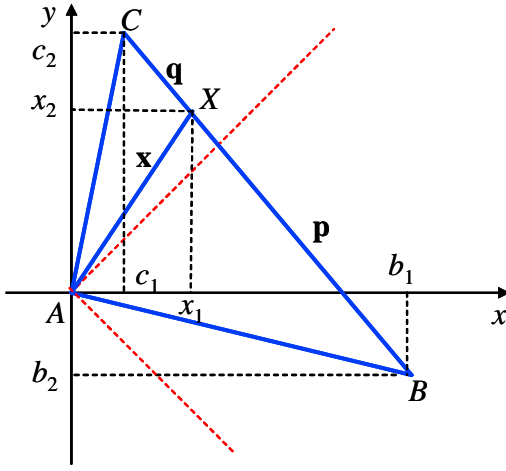


Şekil 3.13.(b)

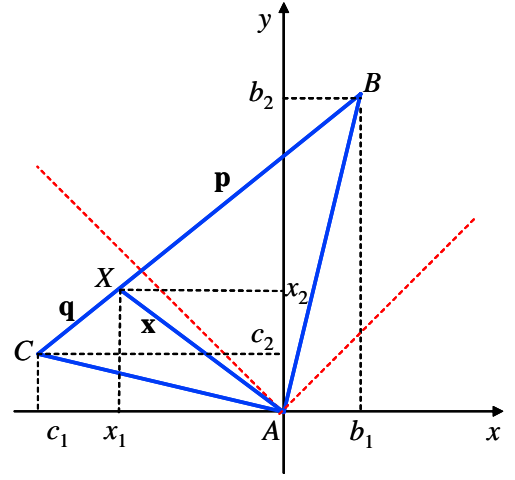
Eğer $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için AB kenarı S_i bölgesinde ve AC , AX kenarları S_{i+2} bölgesinde ise gerekli işlemler ile

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{\mathbf{q}((1-w)\max\{\theta, \beta\} + (1+w)\min\{\theta, \beta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)\mathbf{q}\min\{\theta - \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta - \frac{w-1}{w+1}\theta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

elde edilir (Şekil 3.14.(a)-(b)).



Şekil 3.14.(a)



Şekil 3.14.(b)

Yukarıda $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için yapılan işlemlerin aynısı $i \in \{0, 2, 4, 6\}$ için benzer şekilde tekrarlanırsa AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, S_i , S_{i+1} ve S_{i+2} bölgelerinde iken (Şekil 3.15.(a)-(b))

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2w\mathbf{p}\min\{\gamma, \delta\} + (1-w)|\theta - \beta|\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

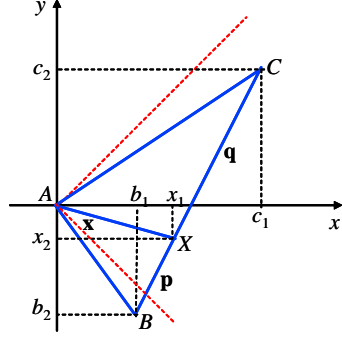
AB , AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+2} bölgesinde iken (Şekil 3.15.(c)-(d))

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{\mathbf{p}((1-w)\max\{\gamma, \delta\} + (1+w)\min\{\gamma, \delta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)\mathbf{p}\min\{\gamma - \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta - \frac{w-1}{w+1}\gamma\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

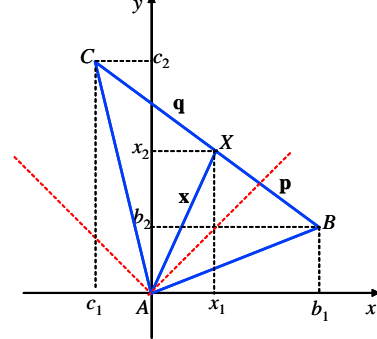
ve AB kenarı S_i bölgesinde ve AC , AX kenarları S_{i+2} bölgesinde iken (Şekil 3.15.(e)-(f))

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{\mathbf{q}((w-1)\min\{\theta, \beta\} + (1+w)\max\{\theta, \beta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)\mathbf{q}\max\{\theta + \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta + \frac{w-1}{w+1}\theta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

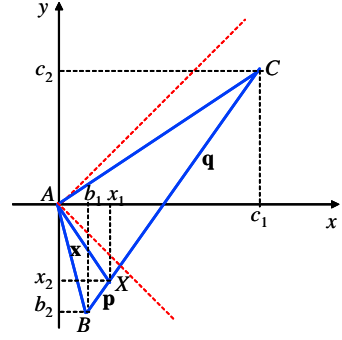
bulunur.



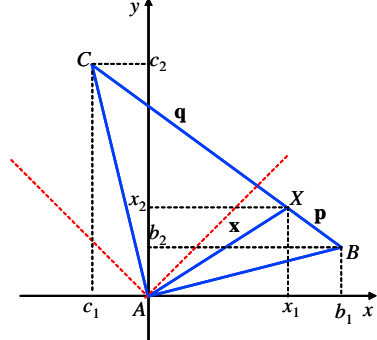
Şekil 3.15.(a)



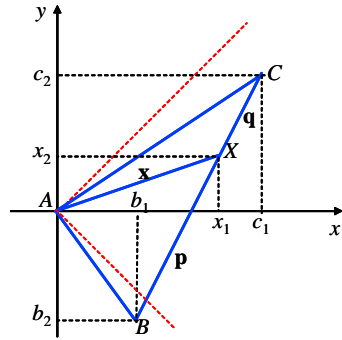
Şekil 3.15.(b)



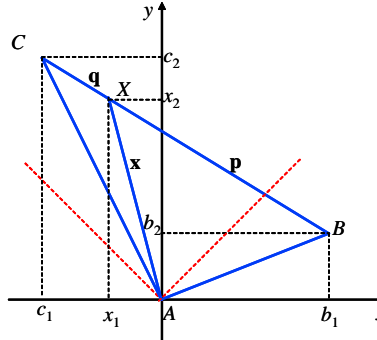
Şekil 3.15.(c)



Şekil 3.15.(d)



Şekil 3.15.(e)

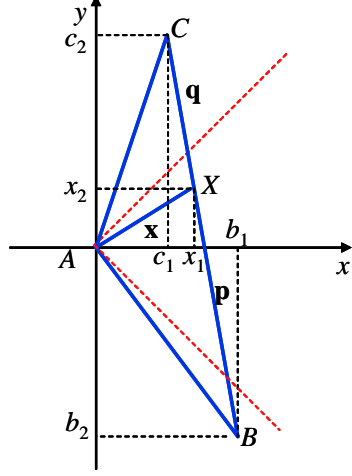


Şekil 3.15.(f)

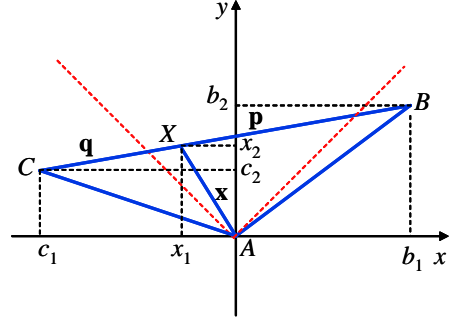
Eğer AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, S_i , S_{i+2} ve S_{i+3} bölgelerinde ise gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1-w)|\gamma - \delta| \mathbf{p} + \mathbf{q} ((w-1) \min\{\theta, \beta\} + (1+w) \max\{\theta, \beta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1-w)|\gamma - \delta| \mathbf{p} + (1+w) \mathbf{q} \max\{\theta + \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta + \frac{w-1}{w+1}\theta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

olur (Şekil 3.16.(a)-(b)).



Şekil 3.16.(a)

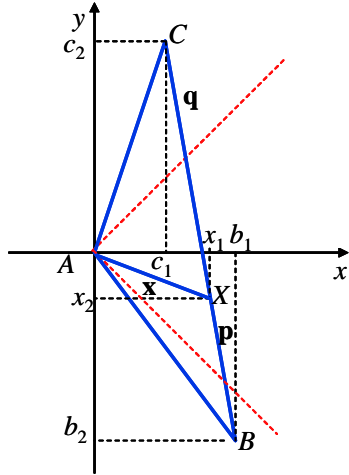


Şekil 3.16.(b)

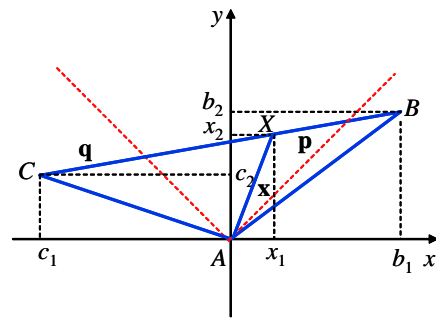
AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, S_i , S_{i+1} ve S_{i+3} bölgelerinde iken gerekli işlemler ile

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{((w-1) \min\{\gamma, \delta\} + (1+w) \max\{\gamma, \delta\}) \mathbf{p} + \mathbf{q}(1-w) |\theta - \beta|}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w) \mathbf{p} \max\{\gamma + \frac{w-1}{w+1} \delta, \delta + \frac{w-1}{w+1} \gamma\} + \mathbf{q}(1-w) |\theta - \beta|}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

elde edilir (Şekil 3.17.(a)-(b)).



Şekil 3.17.(a)

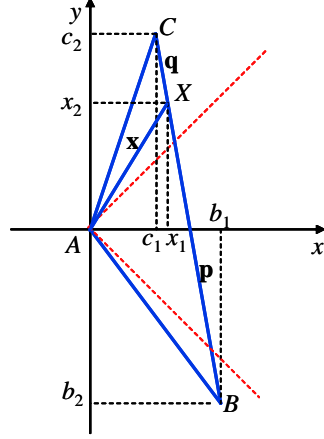


Şekil 3.17.(b)

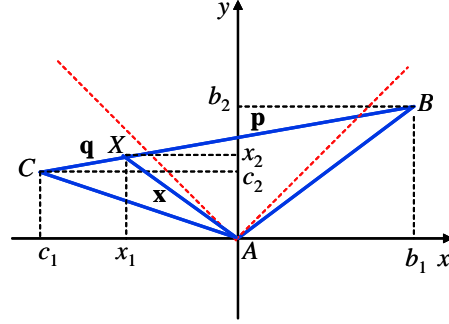
Eğer AB kenarı S_i bölgesinde ve AX , AC kenarları S_{i+3} bölgesinde ise S_i nin yataysal ve dikeysel olma durumları göz önüne alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2\mathbf{q} \max\{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

bulunur (Şekil 3.18.(a)-(b)).



Şekil 3.18.(a)

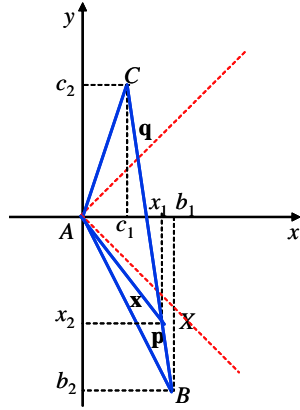


Şekil 3.18.(b)

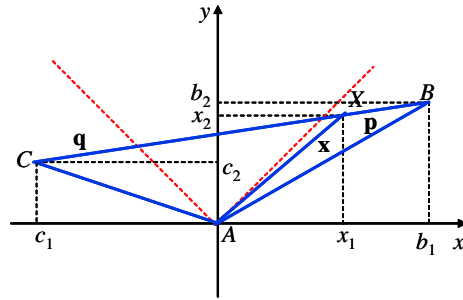
Eğer AB , AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+3} bölgesinde ise S_i nin yataysal ve dikeysel olma durumları göz önüne alınarak yapılan gerekli işlemler ile

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2\mathbf{p} \max\{\gamma, \delta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

elde edilir (Şekil 3.19.(a)-(b)).



Şekil 3.19.(a)



Şekil 3.19.(b)

III. Durum: $\triangle ABC$ üçgeninin A köşesinden geçen iki temel doğru olsun. A köşesi orijinde olduğundan AB ve AC kenarları birbirlerine karşı olan bölgededirler. Yani $b_1b_2 < 0$ ve $c_1c_2 < 0$ dır. Bir önceki durumda belirtildiği gibi Önerme 3.0.2 ve Önerme 3.0.3 yardımıyla AB , AC ve AX kenarlarının düzlemdeki pozisyonlarına göre

$$x_1 = \frac{-\mathbf{p}\gamma + \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad \text{veya} \quad x_1 = \frac{\mathbf{p}\gamma - \mathbf{q}\theta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

ve

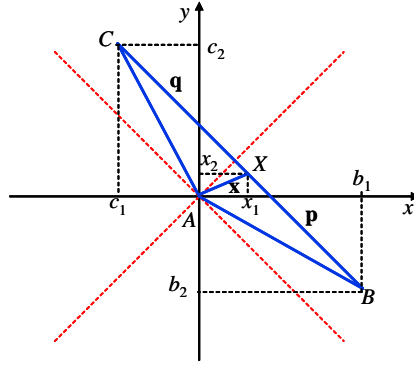
$$x_2 = \frac{-\mathbf{p}\delta + \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{\mathbf{p}\delta - \mathbf{q}\beta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olarak hesaplanır. Bu değerler alınan bölgeye göre kullanılarak aşağıdaki gibi sonuçlar elde edilir:

Eğer AB , AX , AC kenarları, sırasıyla, S_i , S_{i+1} , S_{i+3} bölgesinde ise S_i nin yataysal ve dikeysel olma durumları göz önüne alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{((1-w)\max\{\gamma, \delta\} + (1+w)\min\{\gamma, \delta\})\mathbf{p} + 2w\mathbf{q}\min\{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)\mathbf{p}\min\{\gamma - \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta - \frac{w-1}{w+1}\gamma\} + 2w\mathbf{q}\min\{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

bulunur (Şekil 3.20.).

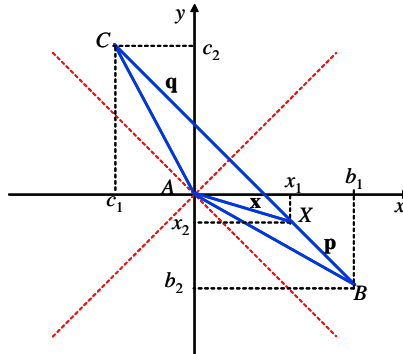


Şekil 3.20.

Eğer AB , AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+3} bölgesinde ise benzer şekilde S_i nin yataysal veya dikeysel olma durumu dikkate alınarak

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)(\gamma + \delta)\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olur (Şekil 3.21.).

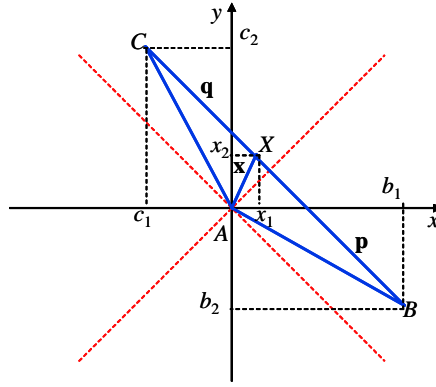


Şekil 3.21.

Eğer AB , AX , AC kenarları, sırasıyla, S_i , S_{i+2} , S_{i+3} bölgesinde ise gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2w \min \{\gamma, \delta\} \mathbf{p} + \mathbf{q} \left((1-w) \max \{\theta, \beta\} + (1+w) \min \{\theta, \beta\} \right)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2w \min \{\gamma, \delta\} \mathbf{p} + (1+w) \mathbf{q} \min \left\{ \theta - \frac{w-1}{w+1} \beta, \beta - \frac{w-1}{w+1} \theta \right\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

elde edilir (Şekil 3.22.).

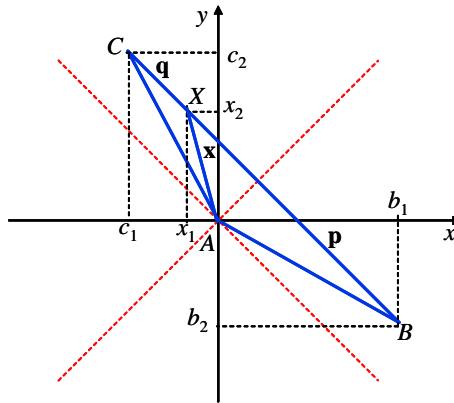


Şekil 3.22.

Eğer AB kenarı S_i bölgesinde ve AX , AC kenarları S_{i+3} bölgesinde ise gerekli işlemler sonucunda

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)(\theta + \beta) \mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

bulunur (Şekil 3.23.).

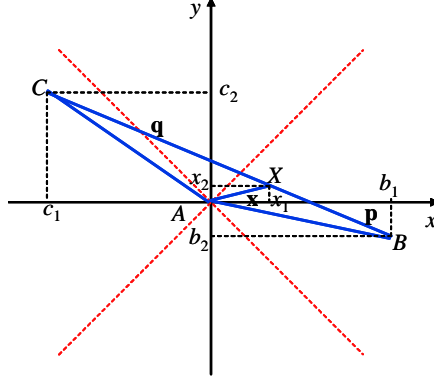


Şekil 3.23.

Eğer AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için S_i , S_{i+1} ve S_{i+4} bölgelerinde ise gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2 \max \{\gamma, \delta\} \mathbf{p} + 2w \mathbf{q} \min \{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olur (Şekil 3.24.).

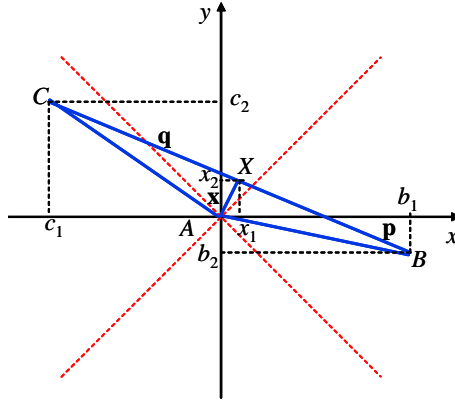


Şekil 3.24.

Eğer $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, S_i , S_{i+2} ve S_{i+4} bölgelerinde iseler uygun işlemler yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{((w-1) \min \{\gamma, \delta\} + (1+w) \max \{\gamma, \delta\}) \mathbf{p} + \mathbf{q} ((1-w) \max \{\theta, \beta\} + (1+w) \min \{\theta, \beta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w) \mathbf{p} \max \left\{ \gamma + \frac{w-1}{w+1} \delta, \delta + \frac{w-1}{w+1} \gamma \right\} + (1+w) \mathbf{q} \min \left\{ \theta - \frac{w-1}{w+1} \beta, \beta - \frac{w-1}{w+1} \theta \right\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

bulunur (Şekil 3.25.).

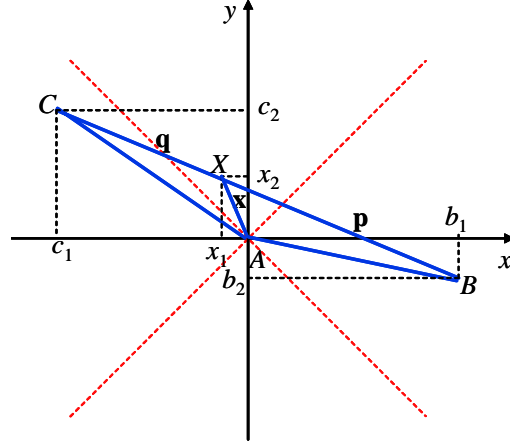


Şekil 3.25.

Eğer $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, S_i , S_{i+3} ve S_{i+4} bölgelerinde iseler gerekli işlemler kullanılarak

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1-w) |\gamma - \delta| \mathbf{p} + \mathbf{q} (1+w) (\theta + \beta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

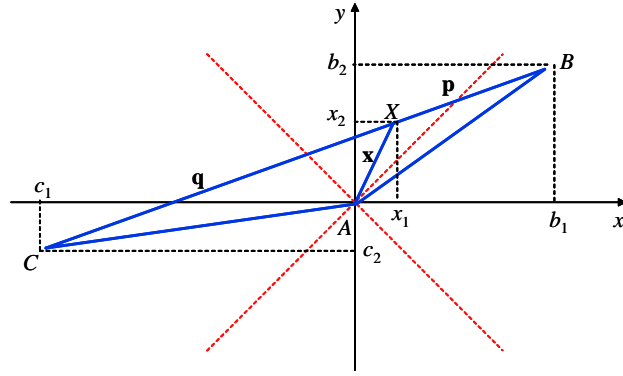
elde edilir (Şekil 3.26.).



Şekil 2.26.

Yukarıda $i \in \{1, 3, 5, 7\}$ için yapılan işlemlerin aynısı $i \in \{0, 2, 4, 6\}$ için benzer şekilde tekrarlanırsa AB , AX ve AC kenarları, sırası ile, S_i , S_{i+1} ve S_{i+4} bölgelerinde iken (Şekil 3.27.)

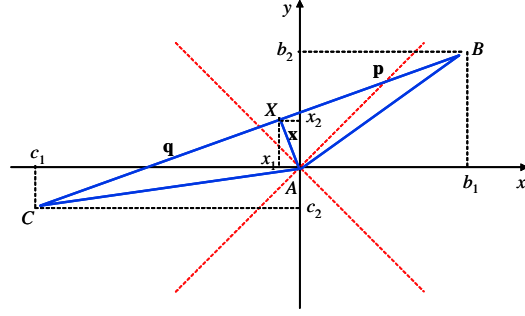
$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{(1+w)(\gamma + \delta)\mathbf{p} + \mathbf{q}(1-w)|\theta - \beta|}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$



Şekil 3.27.

AB , AX ve AC kenarları, sırasıyla, S_i , S_{i+2} ve S_{i+4} bölgelerinde iken (Şekil 3.28.)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{((1-w)\max\{\gamma, \delta\} + (1+w)\min\{\gamma, \delta\})\mathbf{p} + \mathbf{q}((w-1)\min\{\theta, \beta\} + (1+w)\max\{\theta, \beta\})}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{\mathbf{b}\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{c}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \\ &= \frac{(1+w)\mathbf{p}\min\left\{\gamma - \frac{w-1}{w+1}\delta, \delta - \frac{w-1}{w+1}\gamma\right\} + (1+w)\mathbf{q}\max\left\{\theta + \frac{w-1}{w+1}\beta, \beta + \frac{w-1}{w+1}\theta\right\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \end{aligned}$$

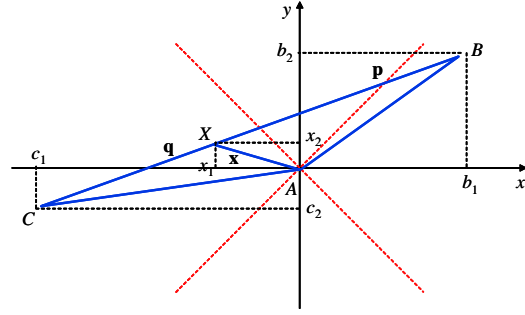


Şekil 3.28.

ve AB , AX ve AC kenarları, sırasıyla, S_i , S_{i+3} ve S_{i+4} bölgelerinde iken (Şekil 3.29.)

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2w \min \{\gamma, \delta\} \mathbf{p} + 2\mathbf{q} \max \{\theta, \beta\}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

bulunur.

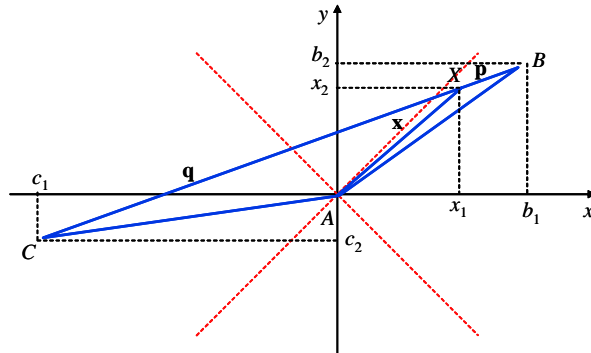


Şekil 3.29.

Eğer AB , AX kenarları S_i bölgesinde ve AC kenarı S_{i+4} bölgesinde ise benzer şekilde S_i nin yataysal veya dikeysel olma durumu dikkate alınarak

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2\mathbf{pb}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

olur (Şekil 3.30.).

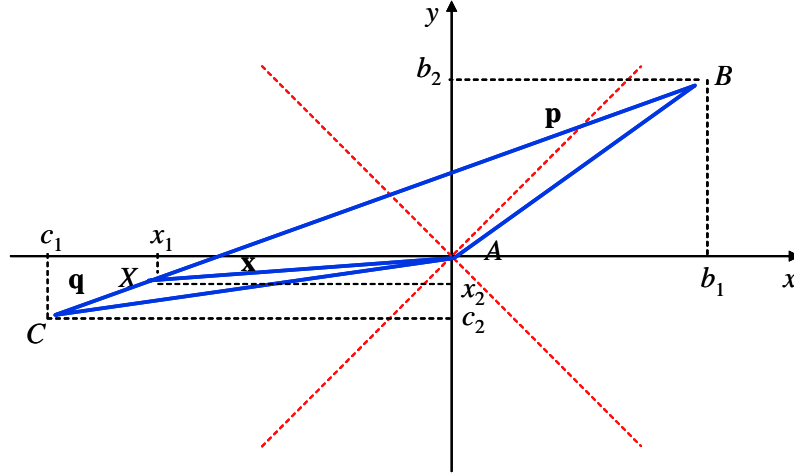


Şekil 3.30.

Eğer AB kenarı S_i bölgesinde ve AX , AC kenarları S_{i+4} bölgesinde ise gerekli işlemler sonucunda

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} - \frac{2\mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$$

bulunur (Şekil 3.31.).



Şekil 3.31.

Bu elde olunan sonuçlar birleştirildiğinde istenen sonuç elde edilmiş olur.

Öklidyen düzlemde herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeni alınsın. Bu üçgen için X noktası BC kenarının orta noktası ve $a=d_E(B, C)$, $b=d_E(A, C)$, $c=d_E(A, B)$, $V_a=d_E(A, X)$ olmak üzere

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - a^2/2$$

dir. Bu ifade Kenarortay özeliği olarak bilinir. Aşağıdaki sonuç kenarortay özeliğinin α -düzlemindeki karşılığını vermektedir. Bu sonucu elde etmek için bir önceki teoremden $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ almak yeterlidir.

Sonuç 3.4.2 α -düzleminde (\mathbb{R}_α^2) , herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $\mathbf{a} = d_\alpha(B, C)$, $\mathbf{b} = d_\alpha(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_\alpha(A, B)$ olsun. X noktası BC kenarının orta noktası ve $V_a = d_\alpha(A, X)$ olmak üzere $2V_a$ aşağıdaki tablodaki gibi verilir.

$2V_a$	Temel Doğru Sayısı	AB böl.	AX böl.	AC böl.
$b+c$	0	S_i	S_i	$S_i \quad \forall i$
$b+c-(1-w) \gamma-\delta $	0	S_i	S_i	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c-(1-w) \theta-\beta $	0	S_i	S_{i+1}	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c-2w\min\{\theta,\beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c-2w\min\{\gamma,\delta\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c-(1-w) \gamma-\delta -2w\min\{\theta,\beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+2} \quad i \in \{1,3,5,7\}$
$b+c-(1+w)\max\{\gamma+\frac{w-1}{w+1}\delta, \delta+\frac{w-1}{w+1}\gamma\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+2} \quad i \in \{1,3,5,7\}$
$b+c-(1+w)\min\{\theta-\frac{w-1}{w+1}\beta, \beta-\frac{w-1}{w+1}\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+2} \quad i \in \{1,3,5,7\}$
$b+c-2w\min\{\gamma,\delta\}-(1-w) \theta-\beta $	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+2} \quad i \in \{0,2,4,6\}$
$b+c-(1+w)\max\{\theta+\frac{w-1}{w+1}\beta, \beta+\frac{w-1}{w+1}\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+2} \quad i \in \{0,2,4,6\}$
$b+c-(1+w)\min\{\gamma-\frac{w-1}{w+1}\delta, \delta-\frac{w-1}{w+1}\gamma\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+2} \quad i \in \{0,2,4,6\}$
$b+c-(1-w) \gamma-\delta -(1+w)\max\{\theta+\frac{w-1}{w+1}\beta, \beta+\frac{w-1}{w+1}\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-(1+w)\max\{\gamma+\frac{w-1}{w+1}\delta, \delta+\frac{w-1}{w+1}\gamma\}-(1-w) \theta-\beta $	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-2\max\{\theta,\beta\}$	1	S_i	S_{i+3}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-2\max\{\gamma,\delta\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-(1+w)\min\{\gamma-\frac{w-1}{w+1}\delta, \delta-\frac{w-1}{w+1}\gamma\}-2w\min\{\theta,\beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-(1+w)(\gamma+\delta)$	2	S_i	S_i	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-2w\min\{\gamma,\delta\}-(1+w)\min\{\theta-\frac{w-1}{w+1}\beta, \beta-\frac{w-1}{w+1}\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-(1+w)(\theta+\beta)$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c-2\max\{\gamma,\delta\}-2w\min\{\theta,\beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+4} \quad i \in \{1,3,5,7\}$
$b+c-(1+w)\max\{\gamma+\frac{w-1}{w+1}\delta, \delta+\frac{w-1}{w+1}\gamma\}-$ $(1+w)\min\{\theta-\frac{w-1}{w+1}\beta, \beta-\frac{w-1}{w+1}\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+4} \quad i \in \{1,3,5,7\}$
$b+c-(1-w) \gamma-\delta -(1+w)(\theta+\beta)$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+4} \quad i \in \{1,3,5,7\}$
$b+c-2w\min\{\gamma,\delta\}-2\max\{\theta,\beta\}$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+4} \quad i \in \{0,2,4,6\}$
$b+c-(1+w)\min\{\gamma-\frac{w-1}{w+1}\delta, \delta-\frac{w-1}{w+1}\gamma\}-$ $(1+w)\max\{\theta+\frac{w-1}{w+1}\beta, \beta+\frac{w-1}{w+1}\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+4} \quad i \in \{0,2,4,6\}$
$b+c-(1+w)(\gamma+\delta)-(1-w) \theta-\beta $	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+4} \quad i \in \{0,2,4,6\}$
$ b-c $	2	S_i	S_i	$S_{i+4} \quad \forall i$
$ b-c $	2	S_i	S_{i+4}	$S_{i+4} \quad \forall i$

Tablodaki değerler için $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $|b_1| = \theta$, $|b_2| = \beta$, $|c_1| = \gamma$, $|c_2| = \delta$ ve $w = (\sec \alpha - \tan \alpha)$ dir.

α -uzaklık fonksiyonunda $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/4$ alındığında, sırasıyla, Taksi ve Çin Dama uzaklık fonksiyonlarının elde edildiği temel kavramlar kısmında ifade edilmişti. Buna göre α -düzlemi için Stewart teoremi ve Kenarortay özelliği için elde edilen sonuçlarda $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/4$ alınırsa, sırası ile, Taksi ve Çin Dama düzlemleri için karşılıkları bulunmuş olur.

Sonuç 3.4.3 Taksi düzleminde (\mathbb{R}_T^2) , herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $\mathbf{a} = d_T(B, C)$, $\mathbf{b} = d_T(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_T(A, B)$ olsun. $X \in BC$ ve $\mathbf{p} = d_T(B, X)$, $\mathbf{q} = d_T(C, X)$, $\mathbf{x} = d_T(A, X)$ ve de

$D =$ Temel doğru ile karşı kenarın kesişim noktası,

$E = D$ noktası X ve E arasında olacak şekilde B veya C köşelerinden biri

$E' =$ Aynı temel doğru üzerine üçgenin üçüncü köşesinin dik izdüşüm noktası

$\theta = d_T(\text{Temel doğru}, E)$, $\beta = d_T(\text{Temel köşe}, E')$ olmak üzere

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} & A \text{ köşesinden geçen hiç temel doğru yok ise,} \\ \frac{(\mathbf{b} - 2\alpha)\mathbf{p} + \mathbf{qc}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} & A \text{ köşesinden geçen bir tek temel doğru var ve} \\ & D \text{ noktası } X \text{ ile } C \text{ noktaları arasında ise,} \\ \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{q}(\mathbf{c} - 2\alpha)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} & A \text{ köşesinden geçen bir tek temel doğru var ve} \\ & D \text{ noktası } X \text{ ile } B \text{ noktaları arasında ise,} \\ \frac{(\mathbf{b} - 2\alpha)\mathbf{p} + \mathbf{q}(\mathbf{c} - 2\beta)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} & A \text{ köşesinden geçen iki temel doğru var ve } X \text{ noktası} \\ & \text{temel doğruların kesişim noktası ile karşı kenar} \\ & \text{arasında, } D \text{ noktası } X \text{ ile } C \text{ noktaları arasında ise} \\ \frac{(\mathbf{b} - 2\beta)\mathbf{p} + \mathbf{q}(\mathbf{c} - 2\alpha)}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} & A \text{ köşesinden geçen iki temel doğru var ve } X \text{ noktası} \\ & \text{temel doğruların kesişim noktası ile karşı kenar} \\ & \text{arasında, } D \text{ noktası } X \text{ ile } B \text{ noktaları arasında ise} \\ \frac{|\mathbf{bp} - \mathbf{qc}|}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} & A \text{ köşesinden geçen iki temel doğru var ve} \\ & X \text{ noktası temel doğruların kesişim noktası ile} \\ & \text{karşı kenar arasında değil ise,} \end{cases}$$

dır [bakınız (Kaya ve Çolakoğlu, 2006)].

Sonuç 3.4.4 Çin Dama düzleminde (\mathbb{R}_c^2) , herhangi bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $\mathbf{a} = d_c(B, C)$, $\mathbf{b} = d_c(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_c(A, B)$ olsun. $X \in BC$ ve $\mathbf{p} = d_c(B, X)$, $\mathbf{q} = d_c(C, X)$, $\mathbf{x} = d_c(A, X)$ ve de Δ aşağıdaki tabloda verildiği gibi olmak üzere $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{bp} + \mathbf{qc} - \Delta}{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$ dir.

Δ	Temel Doğru Sayısı	AB böl.	AX böl.	AC böl.	
0	0	S_i	S_i	S_i	$\forall i$
$\sqrt{2} w \gamma - \delta \mathbf{p}$	0	S_i	S_i	S_{i+1}	$\forall i$
$\sqrt{2} w \theta - \beta \mathbf{q}$	0	S_i	S_{i+1}	S_{i+1}	$\forall i$
$2w \mathbf{q} \min\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	S_{i+1}	$\forall i$
$2w \mathbf{p} \min\{\gamma, \delta\}$	1	S_i	S_i	S_{i+1}	$\forall i$
$\sqrt{2} w \gamma - \delta \mathbf{p} + 2w \mathbf{q} \min\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	S_{i+2}	$i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$\sqrt{2} \mathbf{p} \max\{\gamma w \delta, \delta - w \gamma\}$	1	S_i	S_i	S_{i+2}	$i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$\sqrt{2} \mathbf{q} \min\{\theta + w \beta, \beta + w \theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	S_{i+2}	$i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$2w \mathbf{p} \min\{\gamma, \delta\} + \sqrt{2} w \theta - \beta \mathbf{q}$	1	S_i	S_{i+1}	S_{i+2}	$i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$\sqrt{2} \mathbf{q} \max\{\theta - w \beta, \beta - w \theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	S_{i+2}	$i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$\sqrt{2} \mathbf{p} \min\{\gamma + w \delta, \delta + w \gamma\}$	1	S_i	S_i	S_{i+2}	$i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$\sqrt{2} w \gamma - \delta \mathbf{p} + \sqrt{2} \mathbf{q} \max\{\theta - w \beta, \beta - w \theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	S_{i+3}	$\forall i$
$\sqrt{2} \mathbf{p} \max\{\gamma w \delta, \delta - w \gamma\} + \sqrt{2} w \mathbf{q} \theta - \beta $	1	S_i	S_{i+1}	S_{i+3}	$\forall i$
$2 \mathbf{q} \max\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+3}	S_{i+3}	$\forall i$
$2 \mathbf{p} \max\{\gamma, \delta\}$	1	S_i	S_i	S_{i+3}	$\forall i$
$\sqrt{2} \mathbf{p} \min\{\gamma + w \delta, \delta + w \gamma\} + 2w \mathbf{q} \min\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	S_{i+3}	$\forall i$
$\sqrt{2} (\gamma + \delta) \mathbf{p}$	2	S_i	S_i	S_{i+3}	$\forall i$
$2w \mathbf{p} \min\{\gamma, \delta\} + \sqrt{2} \mathbf{q} \min\{\theta + w \beta, \beta + w \theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	S_{i+3}	$\forall i$
$\sqrt{2} (\theta + \beta) \mathbf{q}$	2	S_i	S_{i+3}	S_{i+3}	$\forall i$
$2 \mathbf{p} \max\{\gamma, \delta\} + 2w \mathbf{q} \min\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	S_{i+4}	$i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$\sqrt{2} \mathbf{p} \max\{\gamma w \delta, \delta - w \gamma\} + \sqrt{2} \mathbf{q} \min\{\theta + w \beta, \beta + w \theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	S_{i+4}	$i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$\sqrt{2} w \gamma - \delta \mathbf{p} + \sqrt{2} (\theta + \beta) \mathbf{q}$	2	S_i	S_{i+3}	S_{i+4}	$i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$2w \mathbf{p} \min\{\gamma, \delta\} + 2 \mathbf{q} \max\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+3}	S_{i+4}	$i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$\sqrt{2} \mathbf{p} \min\{\gamma + w \delta, \delta + w \gamma\} + \sqrt{2} \mathbf{q} \max\{\theta - w \beta, \beta - w \theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	S_{i+4}	$i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$\sqrt{2} (\gamma + \delta) \mathbf{p} + \sqrt{2} w \theta - \beta \mathbf{q}$	2	S_i	S_{i+1}	S_{i+4}	$i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$2 \mathbf{p} \mathbf{b}$	2	S_i	S_i	S_{i+4}	$\forall i$
$2 \mathbf{q} \mathbf{c}$	2	S_i	S_{i+4}	S_{i+4}	$\forall i$

Tablodaki değerler için $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $|b_1| = \theta$, $|b_2| = \beta$, $|c_1| = \gamma$, $|c_2| = \delta$ ve $w = (\sqrt{2} - 1)$ dır.

Sonuç 3.4.5 Taksi düzleminde (\mathbb{R}_T^2) , herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $\mathbf{a} = d_T(B, C)$, $\mathbf{b} = d_T(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_T(A, B)$ olsun. X noktası BC kenarının orta noktası ve $V_a = d_T(A, X)$ ve de

$D =$ Temel doğru ile karşı kenarın kesişim noktası,

$E = D$ noktası X ve E arasında olacak şekilde B veya C köşelerinden biri

$E' =$ Aynı temel doğru üzerine üçgenin üçüncü köşesinin dik izdüşüm noktası

$\theta = d_T(\text{Temel doğru}, E)$, $\beta = d_T(\text{Temel köşe}, E')$ olmak üzere

$$\mathbf{x} = \begin{cases} b + c & A \text{ köşesinden geçen hiç temel doğru yok ise,} \\ b + c - 2\alpha & A \text{ köşesinden geçen bir tek temel doğru var ise,} \\ b + c - 2(\alpha + \beta) & A \text{ köşesinden geçen iki temel doğru var ve} \\ & X \text{ noktası temel doğruların kesişim noktası ile} \\ & \text{karşı kenar arasında ise} \\ |b - c| & A \text{ köşesinden geçen iki temel doğru var ve} \\ & X \text{ noktası temel doğruların kesişim noktası ile} \\ & \text{karşı kenar arasında değil ise,} \end{cases}$$

dır [bakınız, (Kaya ve Çolakoğlu, 2006)].

Sonuç 3.4.6 Çin Dama düzleminde (\mathbb{R}_c^2) , herhangi bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $\mathbf{a} = d_c(B, C)$, $\mathbf{b} = d_c(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_c(A, B)$ olsun. X noktası BC kenarının orta noktası ve $V_a = d_c(A, X)$ olmak üzere $2V_a$ aşağıdaki tablodaki gibi verilir.

$2V_a$	Temel Doğru Sayısı	AB böl.	AX böl.	AC böl.
$b+c$	0	S_i	S_i	$S_i \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} w \gamma - \delta $	0	S_i	S_i	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} w \theta - \beta $	0	S_i	S_{i+1}	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c - 2w \min\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c - 2w \min\{\gamma, \delta\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+1} \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} w \gamma - \delta - 2w \min\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+2} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b+c - \sqrt{2} \max\{\gamma - w\delta, \delta - w\gamma\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+2} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b+c - \sqrt{2} \min\{\theta + w\beta, \beta + w\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+2} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b+c - 2w \min\{\gamma, \delta\} - \sqrt{2} w \theta - \beta $	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+2} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$b+c - \sqrt{2} \max\{\theta - w\beta, \beta - w\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+2} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$b+c - \sqrt{2} \min\{\gamma + w\delta, \delta + w\gamma\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+2} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$b+c - \sqrt{2} w \gamma - \delta - \sqrt{2} \max\{\theta - w\beta, \beta - w\theta\}$	1	S_i	S_{i+2}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} \max\{\gamma - w\delta, \delta - w\gamma\} - \sqrt{2} w \theta - \beta $	1	S_i	S_{i+1}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - 2 \max\{\theta, \beta\}$	1	S_i	S_{i+3}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - 2 \max\{\gamma, \delta\}$	1	S_i	S_i	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} \min\{\gamma + w\delta, \delta + w\gamma\} - 2w \min\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} (\gamma + \delta)$	2	S_i	S_i	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - 2w \min\{\gamma, \delta\} - \sqrt{2} \min\{\theta + w\beta, \beta + w\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - \sqrt{2} (\theta + \beta)$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+3} \quad \forall i$
$b+c - 2 \max\{\gamma, \delta\} - 2w \min\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+4} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b+c - \sqrt{2} \max\{\gamma - w\delta, \delta - w\gamma\} - \sqrt{2} \min\{\theta + w\beta, \beta + w\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+4} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b+c - \sqrt{2} w \gamma - \delta - \sqrt{2} (\theta + \beta)$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+4} \quad i \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b+c - 2w \min\{\gamma, \delta\} - 2 \max\{\theta, \beta\}$	2	S_i	S_{i+3}	$S_{i+4} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$b+c - \sqrt{2} \min\{\gamma + w\delta, \delta + w\gamma\} - \sqrt{2} \max\{\theta - w\beta, \beta - w\theta\}$	2	S_i	S_{i+2}	$S_{i+4} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$b+c - \sqrt{2} (\gamma + \delta) - \sqrt{2} w \theta - \beta $	2	S_i	S_{i+1}	$S_{i+4} \quad i \in \{0, 2, 4, 6\}$
$ b - c $	2	S_i	S_i	$S_{i+4} \quad \forall i$
$ b - c $	2	S_i	S_{i+4}	$S_{i+4} \quad \forall i$

Tablodaki değerler için $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $|b_1| = \theta$, $|b_2| = \beta$, $|c_1| = \gamma$, $|c_2| = \delta$ ve $w = (\sqrt{2} - 1)$ dir.

BÖLÜM 4

3 VE n -BOYUTLU UZAYLARDA α_i -UZAKLIĞI

Temel Kavramlar bölümünde belirtildiği gibi α -uzaklığı Songlin Tian tarafından (Tian, 2005) de verildi. Daha sonra (Gelişgen ve Kaya, 2006a) ve (Gelişgen ve Kaya, 2006b) de α -uzaklıkları, sırasıyla, 3 ve n -boyutlu uzaya genelleştirildi. Bu bölümde, Taksi ve Çin Dama uzaklıklarını özel hal olarak kapsayan ve düzlemde $P_1=(x_1, y_1)$, $P_2=(x_2, y_2)$ noktaları ile $\alpha \in [0, \pi/4]$ açısı için $d_L(P_1, P_2) := \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ ve $d_S(P_1, P_2) := \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ olmak üzere

$$d_\alpha(P_1, P_2) = d_L(P_1, P_2) + (\sec \alpha - \tan \alpha)d_S(P_1, P_2)$$

biçiminde (Tian, 2005) de tanımlanan α -uzaklığını her doğrultuda değişik α_i -uzaklıkları esas alınarak (Gelişgen ve Kaya, 2006a) ve (Gelişgen ve Kaya, 2006b) deki çalışmalar daha da genelleştirilmektedir. Bu bölümde 3 ve n -boyutlu Taksi, Çin Dama ve α -uzaklıklarını özel hal olarak kapsayan daha genel bir metrik olan α_i -uzaklığı geliştirilmektedir.

4.1 Üç Boyutlu Uzayda α_i -Uzaklığı

Tanım 4.1.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 3-boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olsun. $K = \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$ olmak üzere

$$K_1 = d_L(P_1, P_2) = \max K = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

$$K_2 = \max\{K \setminus K_1\} \quad \text{ve} \quad K_3 = K \setminus \{K_1 \cup K_2\}$$

kümeleri tanımlansın. $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ olmak üzere

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = K_1 + (\sec \alpha_1 - \tan \alpha_1) K_2 + (\sec \alpha_2 - \tan \alpha_2) K_3$$

şeklinde tanımlanan $d_{\alpha_i} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna 3-boyutlu analitik uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki α_i -uzaklık fonksiyonu adı verilir.

\mathbb{R}^3 de P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Taksi, Çin Dama ve α -uzaklıkları, sırasıyla,

$$d_T(P_1, P_2) = K_1 + K_2 + K_3$$

$$d_c(P_1, P_2) = K_1 + (\sqrt{2} - 1)(K_2 + K_3)$$

$$d_\alpha(P_1, P_2) = K_1 + (\sec \alpha - \tan \alpha)(K_2 + K_3)$$

olarak ifade edilebilir. Dikkat edilirse $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$, $\alpha_1 = \pi/4 = \alpha_2$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_c(P_1, P_2)$ ve $\alpha_1 = \alpha = \alpha_2$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2)$ dir. Üstelik $K_3 > 0$ ise tüm $\alpha, \alpha_i \in (0, \pi/4)$ için

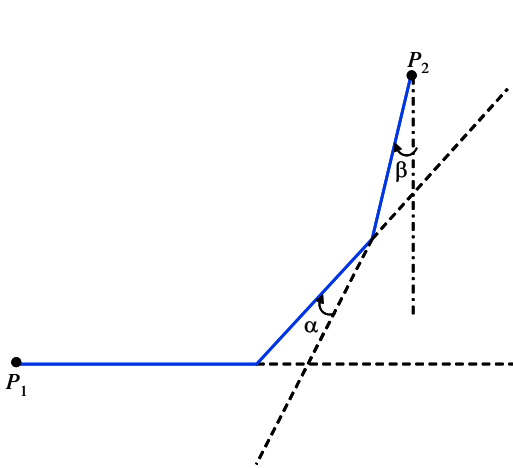
$$d_E(P_1, P_2) < d_c(P_1, P_2) < d_{\alpha_i}(P_1, P_2) < d_\alpha(P_1, P_2) < d_T(P_1, P_2)$$

dir. Bir diğer özellikte $K_2 = 0$ ise P_1 ve P_2 den geçen doğru koordinat eksenlerinden birine paralel olduğundan tüm $\alpha, \alpha_i \in (0, \pi/4)$ için

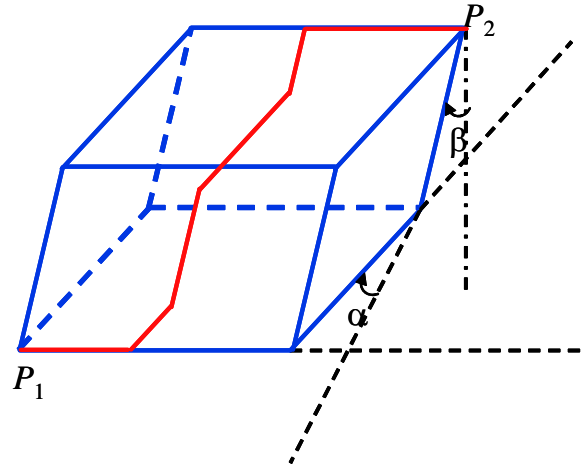
$$d_E(P_1, P_2) = d_c(P_1, P_2) = d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$$

olur.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 4.1.(a) da görüldüğü üzere biri koordinat eksenlerinden birine paralel olan ve diğerleri geri kalan koordinat eksenlerinden biri ile α_1 ve α_2 açısı yapan üç doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır.



Şekil 4.1.(a)



Şekil 4.1.(b)

Analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları için P_1P_2 köşegenli dikdörtgen prizma tarafından sınırlanan bölge $S_{P_1P_2}$ ile gösterilsin. Aşağıdaki önermeler d_{α_i} -uzaklığının tanımından elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.2 d_{α_i} -uzaklığı, analitik 3-uzayın tüm ötelemeleri altında invaryanttır.

İspat: Yardımcı teoremin ifadesine göre $A = (a, b, c)$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için $T_A(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c)$ olacak şekildeki $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ öteleme dönüşümü \mathbb{R}^3 deki herhangi iki nokta arasındaki d_{α_i} -uzaklığını değiştirmez. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ noktalarının T_A ötelemesi altında görüntüleri için

$$\begin{aligned} K &= \{|a + x_1 - a - x_2|, |b + y_1 - b - y_2|, |c + z_1 - c - z_2|\} \\ &= \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

olduğundan tüm $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= K_1 + (\sec \alpha_1 - \tan \alpha_1) K_2 + (\sec \alpha_2 - \tan \alpha_2) K_3 \\ &= d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle T_A bir izometridir.

Sonuç 4.1.3 P_1, P_2, P_3 ve P_4 analitik-3 uzaydaki herhangi dört nokta olsun. $S_{P_1P_2}$ ile $S_{P_3P_4}$ dikdörtgen prizmaları eş iseler her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ olmak üzere $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_{\alpha_i}(P_3, P_4)$ dır.

Önerme 4.1.4 P_1 ve P_2 üç boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde tüm $P_3, P_4 \in S_{P_1P_2}$ ise her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \geq d_{\alpha_i}(P_3, P_4)$ dir.

İspat: $P_1=(x_1, y_1, z_1)$, $P_2=(x_2, y_2, z_2)$, $P_3=(x_3, y_3, z_3)$ ve $P_4=(x_4, y_4, z_4)$ olsun. Ayrıca $P_3, P_4 \in S_{P_1P_2}$ olsun. Bu durumda $|x_1 - x_2| \geq |x_3 - x_4|$, $|y_1 - y_2| \geq |y_3 - y_4|$ ve $|z_1 - z_2| \geq |z_3 - z_4|$ olduğundan dolayı $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \geq d_{\alpha_i}(P_3, P_4)$ elde edilir.

P_1 ve P_2 nin analitik-3 uzaydaki konumlarına göre P_1 ile P_2 arasındaki uzaklık d_{α_i} nin aşağıda belirtildiği şekilde mümkün olan altı durumu vardır: $w_1 = \sec \alpha_1 - \tan \alpha_1$ ve $w_2 = \sec \alpha_2 - \tan \alpha_2$ olmak üzere

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = \begin{cases} a_1 = |x_1 - x_2| + w_1 |y_1 - y_2| + w_2 |z_1 - z_2|, & |x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \geq |z_1 - z_2| \text{ ise} \\ a_2 = |x_1 - x_2| + w_1 |z_1 - z_2| + w_2 |y_1 - y_2|, & |x_1 - x_2| \geq |z_1 - z_2| \geq |y_1 - y_2| \text{ ise} \\ a_3 = |y_1 - y_2| + w_1 |x_1 - x_2| + w_2 |z_1 - z_2|, & |y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| \geq |z_1 - z_2| \text{ ise} \\ a_4 = |y_1 - y_2| + w_1 |z_1 - z_2| + w_2 |x_1 - x_2|, & |y_1 - y_2| \geq |z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2| \text{ ise} \\ a_5 = |z_1 - z_2| + w_1 |x_1 - x_2| + w_2 |y_1 - y_2|, & |z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \text{ ise} \\ a_6 = |z_1 - z_2| + w_1 |y_1 - y_2| + w_2 |x_1 - x_2|, & |z_1 - z_2| \geq |y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Önerme 4.1.5 P_1 ve P_2 , 3-boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olsun. a_i , $i = 1, \dots, 6$ yukarıda tanımlanan d_{α_i} değerlerini gösterebilir. Bu takdirde,

$$a_1 \geq a_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad |x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \geq |z_1 - z_2| \text{ ise}$$

$$a_2 \geq a_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad |x_1 - x_2| \geq |z_1 - z_2| \geq |y_1 - y_2| \text{ ise}$$

$$a_3 \geq a_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad |y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| \geq |z_1 - z_2| \text{ ise}$$

$$a_4 \geq a_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad |y_1 - y_2| \geq |z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2| \text{ ise}$$

$$a_5 \geq a_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad |z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \text{ ise}$$

$$a_6 \geq a_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad |z_1 - z_2| \geq |y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| \text{ ise}$$

dir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ ve $w_1 = \sec \alpha_1 - \tan \alpha_1$ ve $w_2 = \sec \alpha_2 - \tan \alpha_2$ olsun. Eğer $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \geq |z_1 - z_2|$ ise

$$\begin{aligned} a_1 &= |x_1 - x_2| + w_1 |y_1 - y_2| + w_2 |z_1 - z_2| \\ &= |x_1 - x_2| + w_1 |z_1 - z_2| + w_2 |y_1 - y_2| + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \\ &= a_2 + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \end{aligned}$$

olacak şekilde yazılabilir. Dikkat edilirse her $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ için $(w_1 - w_2) \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2| \geq 0$ olduğundan

$$|x_1 - x_2| + w_1 |y_1 - y_2| + w_2 |z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2| + w_1 |z_1 - z_2| + w_2 |y_1 - y_2|$$

elde edilir. Bir başka deyişle $a_1 \geq a_2$ bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_3 + (1 - w_1)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_4 + (1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \\
&= a_5 + (1 - w_1)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \\
&= a_6 + (1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|)
\end{aligned}$$

olarak yazılabildiğinden ve $(1 - w_1) \geq 0$, $(1 - w_2) \geq 0$, $(w_1 - w_2) \geq 0$, $(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \geq 0$, $(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \geq 0$ ve $(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \geq 0$ olduğundan açıkça $a_1 \geq a_i$ olduğu görülür.

Eğer $|x_1 - x_2| \geq |z_1 - z_2| \geq |y_1 - y_2|$ ise

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + (w_1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_3 + (1 - w_1)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) + (w_1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_4 + (1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_5 + (1 - w_1)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \\
&= a_6 + (1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) + (w_1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|)
\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden ve de $(1 - w_1) \geq 0$, $(1 - w_2) \geq 0$, $(w_1 - w_2) \geq 0$, $(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \geq 0$, $(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \geq 0$ ve $(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \geq 0$ olduğundan açıkça $a_2 \geq a_i$, $i = 1, \dots, 6$ olduğu görülür.

Eğer $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| \geq |z_1 - z_2|$ ise

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1 + (1 - w_1)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_2 + (1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) + (w_1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \\
&= a_4 + (w_1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \\
&= a_5 + (1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \\
&= a_6 + (1 - w_1)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) + (w_1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|)
\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden ve ayrıca $(1 - w_1) \geq 0$, $(1 - w_2) \geq 0$, $(w_1 - w_2) \geq 0$, $(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \geq 0$, $(|x_1 - x_2| - |z_1 - z_2|) \geq 0$ ve $(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \geq 0$ olduğundan dolayı $a_3 \geq a_i$, $i = 1, \dots, 6$ olduğu görülür.

Eğer $|y_1 - y_2| \geq |z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2|$ ise

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_1 + (1 - w_1)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) + (w_1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_2 + (1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_3 + (w_1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_5 + (1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) + (w_1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_6 + (1 - w_1)(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|)
\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden ve de üstelik $(1 - w_1) \geq 0$, $(1 - w_2) \geq 0$, $(w_1 - w_2) \geq 0$, $(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \geq 0$, $(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \geq 0$ ve $(|y_1 - y_2| - |z_1 - z_2|) \geq 0$ olduğundan dolayı $a_4 \geq a_i$, $i = 1, \dots, 6$ elde edilir.

Eğer $|z_1 - z_2| \geq |x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ise

$$\begin{aligned}
a_5 &= a_1 + (1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) + (w_1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_2 + (1 - w_1)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_3 + (1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_4 + (1 - w_1)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) + (w_1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_6 + (w_1 - w_2)(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|)
\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden ve ayrıca $(1 - w_1) \geq 0$, $(1 - w_2) \geq 0$, $(w_1 - w_2) \geq 0$, $(|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \geq 0$, $(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \geq 0$ ve $(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \geq 0$ olduğundan $a_5 \geq a_i$, $i = 1, \dots, 6$ elde olunur.

Eğer $|z_1 - z_2| \geq |y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|$ ise

$$\begin{aligned}
a_6 &= a_1 + (1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_2 + (1 - w_1)(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_3 + (1 - w_2)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \\
&= a_4 + (1 - w_1)(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \\
&= a_5 + (w_1 - w_2)(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|)
\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden ve ayrıca $(1 - w_1) \geq 0$, $(1 - w_2) \geq 0$, $(w_1 - w_2) \geq 0$, $(|y_1 - y_2| - |x_1 - x_2|) \geq 0$, $(|z_1 - z_2| - |x_1 - x_2|) \geq 0$ ve $(|z_1 - z_2| - |y_1 - y_2|) \geq 0$ olduğundan dolayı $a_6 \geq a_i$, $i = 1, \dots, 6$ bulunur.

Aşağıdaki teorem 3-boyutlu analitik uzayda her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için α_i uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.1.6 Her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için α_i uzaklık fonksiyonu \mathbb{R}^3 de bir metrik belirtir.

İspat: d_{α_i} -uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğu ve de üçgen eşitsizliğini sağladığı gösterilmelidir. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, \mathbb{R}^3 deki herhangi üç nokta olsun. P_1 ile P_2 noktaları arasındaki α_i -uzaklığı $K_1 = d_L(P_1, P_2) = \max K = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$, $K_2 = \max \{K \setminus K_1\}$ ve $K_3 = K \setminus \{K_1 \cup K_2\}$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = K_1 + (\sec \alpha_1 - \tan \alpha_1) K_2 + (\sec \alpha_2 - \tan \alpha_2) K_3$$

olarak tanımlanmıştır. Burada mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$, $|z_1 - z_2| \geq 0$, $(\sec \alpha_1 - \tan \alpha_1) \geq 0$ ve $(\sec \alpha_2 - \tan \alpha_2) \geq 0$ olduğundan $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \geq 0$ dir. Ayrıca

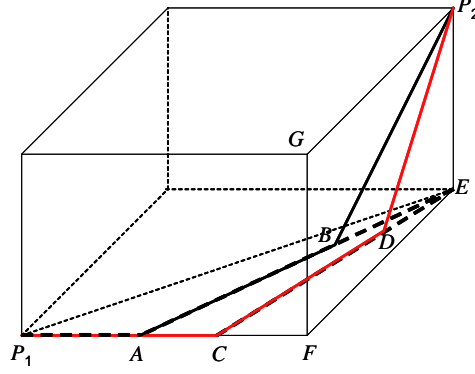
$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = |z_1 - z_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkça $P_1 = P_2$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = 0$ dir. O halde $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_{α_i} -uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Üstelik mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$, $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ ve $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ olduğundan $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_{\alpha_i}(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_{α_i} -uzaklık fonksiyonu simetriktir.

Şimdi her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ olduğu gösterilmelidir. Açıkça $K_2 = 0$ ise d_{α_i} maksimum metriğine ve $K_3 = 0$ olması halinde ise d_{α_i} uzaklık fonksiyonu düzlem α -uzaklığına dönüşeceğinden üçgen eşitsizliği sağlanacaktır. O halde $K_2 > 0$ olsun. Yardımcı Teorem 4.1.2 gereğince genelliği bozmaksızın P_1 noktasını orijinde alınabilir. Ayrıca $x_2 > y_2 > z_2$ olacak şekilde $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktasını alınsın. Aşağıdaki şekilden görüleceği gibi $A = (x_2 - y_2, 0, 0)$, $B = (x_2 - z_2/\sqrt{2}, y_2 - z_2/\sqrt{2}, 0)$, $C = (x_2 - y_2 \tan \alpha_1, 0, 0)$,

$D = (x_2 - \frac{\tan \alpha_1 \tan \alpha_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1}} z_2, y_2 - \frac{\tan \alpha_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_1}} z_2, 0)$, $E = (x_2, y_2, 0)$, $F = (x_2, 0, 0)$ ve $G = (x_2, 0, z_2)$ noktaları alınmsın.



Şekil 4.2.

Şimdi xy -düzleminde $R_1 = \triangle P_1EA$, $R_2 = \triangle AEC$, $R_3 = \triangle CEF$ ve $R_4 = \{(x, y, 0) : x \geq 0 \text{ ve } y < 0, \text{ veya } x > x_2 \text{ ve } y \geq 0\}$ üçgensel bölgeleri gözönüne alınmsın. Ayrıca \mathcal{P} ile P_1 , P_2 ve G noktalarından geçen düzlem gösterilsin. $S_{P_1P_2}$ dikdörtgen prizmanın S_1 , S_2 ve S_3 altkümeleri de \mathcal{P} düzlemi ile xy -düzlemi arasında kalan ve dik izdüşümleri, sırasıyla, R_1 , R_2 ve R_3 bölgelerine düşen noktalardan oluşsun. Üstelik S_4 ile de 3-boyutlu analitik uzayın \mathcal{P} düzlemine göre aynı tarafta kalan ve dik izdüşümleri R_4 bölgesinde olan noktaların oluşturduğu altküme gösterilsin. Bu tanımlardan sonra $P_3 \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ noktaları için üçgen eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

I. Durum: $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in S_1$ varsayılımsın. Bu durumda, hemen $x_3 \geq y_3$, $x_3 \geq z_3$ ve $x_2 - x_3 \geq y_2 - y_3$ olduğu ifade edilir. Fakat $y_3 \geq z_3$, $y_2 - y_3 \leq z_2 - z_3$ veya $y_3 < z_3$, $y_2 - y_3 > z_2 - z_3$ ve $x_2 - x_3 \geq z_2 - z_3$ veya $x_2 - x_3 < z_2 - z_3$ dir. O halde bu eşitsizliklerden aşağıdaki altdurumlar elde edilir:

i) $d_{\alpha_i}(P_1, P_3) = x_3 + w_1 y_3 + w_2 z_3$ ve

$$d_{\alpha_i}(P_3, P_2) = (x_2 - x_3) + w_1(z_2 - z_3) + w_2(y_2 - y_3),$$

ii) $d_{\alpha_i}(P_1, P_3) = x_3 + w_1 y_3 + w_2 z_3$ ve

$$d_{\alpha_i}(P_3, P_2) = (z_2 - z_3) + w_1(x_2 - x_3) + w_2(y_2 - y_3),$$

$$\text{iii)} \quad d_{\alpha_i}(P_1, P_3) = x_3 + w_1 z_3 + w_2 y_3 \quad \text{ve}$$

$$d_{\alpha_i}(P_3, P_2) = (x_2 - x_3) + w_1(y_2 - y_3) + w_2(z_2 - z_3).$$

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\text{i)} \quad d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$$

$$= x_3 + w_1 y_3 + w_2 z_3 + (x_2 - x_3) + w_1(z_2 - z_3) + w_2(y_2 - y_3)$$

$$= x_2 + w_1 y_2 + w_2 z_2 + (w_1 - w_2)((z_2 - z_3) - (y_2 - y_3))$$

$$= d_{\alpha_i}(P_1, P_2) + (w_1 - w_2)((z_2 - z_3) - (y_2 - y_3))$$

$$\geq d_{\alpha_i}(P_1, P_2)$$

burada $(w_1 - w_2)((z_2 - z_3) - (y_2 - y_3)) \geq 0$ dir.

$$\text{ii)} \quad d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$$

$$= x_3 + w_1 y_3 + w_2 z_3 + (z_2 - z_3) + w_1(x_2 - x_3) + w_2(y_2 - y_3)$$

$$= x_2 + w_1 y_2 + w_2 z_2 + (z_2 - z_3) + w_1(x_2 - x_3) +$$

$$w_2(y_2 - y_3) - ((x_2 - x_3) + w_1(y_2 - y_3) + w_2(z_2 - z_3))$$

$$= d_{\alpha_i}(P_1, P_2) + a_5 - a_1$$

$$\geq d_{\alpha_i}(P_1, P_2)$$

burada Önerme 3.1.5 den dolayı $a_5 \geq a_1$ dir.

$$\text{iii)} \quad d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$$

$$= x_3 + w_1 y_3 + w_2 z_3 + (x_2 - x_3) + w_1(y_2 - y_3) + w_2(z_2 - z_3)$$

$$= x_2 + w_1 y_2 + w_2 z_2 + (w_1 - w_2)(z_3 - y_3)$$

$$= d_{\alpha_i}(P_1, P_2) + (w_1 - w_2)(z_3 - y_3)$$

$$\geq d_{\alpha_i}(P_1, P_2)$$

burada $(w_1 - w_2)(z_3 - y_3) \geq 0$ dir.

Yani I. Durum için $d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2) \geq d_{\alpha_i}(P_1, P_2)$ dir.

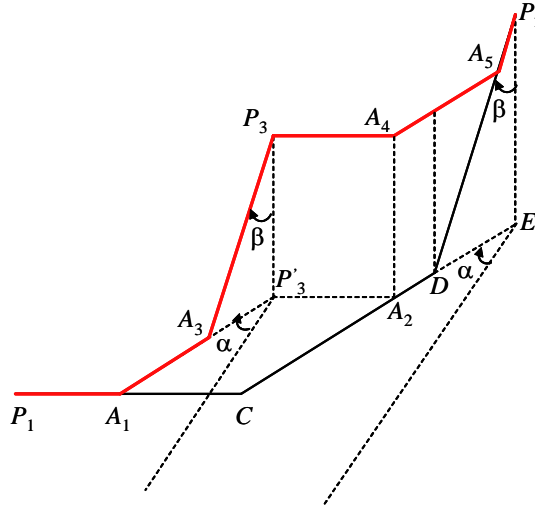
II. Durum: Varsayalım ki $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in S_2$ olsun. Bu durum için x_3, y_3 ve z_3 değerlerine göre mümkün olan iki altdurum vardır:

i) $x_3 \geq y_3 \geq z_3$ olsun. P'_3 noktası P_3 noktasının xy -düzlemine olan dik izdüşümü olsun. P'_3 noktasından geçen CD doğrusu ile x -eksenine paralel olan ve, sırasıyla, P_1C ve CD doğruları ile A_1 ve A_2 noktalarında kesişen doğru parçaları göz önüne alınsın. P_3 noktasından geçen DP_2 doğrusuna paralel olan ve $A_1P'_3$ doğru parçasını A_3 noktasında kesen doğru parçası çizilsin. Şimdi $P_3P'_3A_2A_4$ dikdörtgeni göz önüne

alınarak A_4 noktasından geçen ve CD doğrusuna paralel olup DP_2 doğru parçası ile A_5 noktasında kesişen doğru parçası çizilsin. (Bakınız Şekil 4.3.) Bu durumda şekilden de kolaylıkla görülebileceği gibi $|A_1C| = |P'A_2| = |P_3A_4|$ ve $|A_2D| + |A_3P'| = |A_4A_5|$ dir. Üstelik $d_{\alpha_i}(P_1, P_3) = |P_1A_1| + |A_1A_3| + |A_3P_3|$ ve

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(P_1, P_2) &= |P_1C| + |CD| + |DP_2| \\ &= |P_1A_1| + |A_1C| + |A_1A_3| + |A_4A_5| + |A_3P_3| + |A_5P_2| \\ &= |P_1A_1| + |A_1A_3| + |A_3P_3| + |A_1C| + |A_4A_5| + |A_5P_2| \\ &= d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + |P_3A_4| + |A_4A_5| + |A_5P_2| . \end{aligned}$$

olur. Burada Önerme 4.1.5 gereğince $|P_3A_4| + |A_4A_5| + |A_5P_2| \leq d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ dir. O halde $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ elde edilir.



Şekil 4.3.

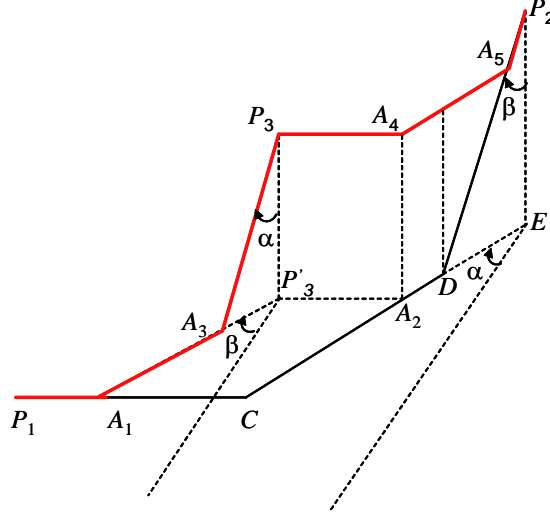
ii) $x_3 \geq z_3 \geq y_3$ olsun. A_2, A_4 ve A_5 noktaları yukarıdaki (i) halinde elde edilen şekildeki noktalar olsun. P'_3 noktasından geçen y -ekseni ile α_2 açısı yapan doğru parçası çizildiğinde P_1C doğrusunu kestiği nokta A_1 dir. Ayrıca A_3 noktasında P_3 noktasından geçen z -ekseni ile α_1 açısı yapan doğru parçasının $A_1P'_3$ doğru parçasını kestiği nokta olsun. Buna göre Şekil 4.4. den görüldüğü gibi

$$|P_1A_1| = x_3 - \tan \alpha_1 y_3, \quad |A_1A_3| = \sec \alpha_2 y_3 - \tan \alpha_1 z_3, \quad |A_3P_3| = \sec \alpha_1 z_3$$

$$|P_3A_4| = (x_2 - x_3) - \tan \alpha_1 (y_2 - y_3), \quad |A_4A_5| = \sec \alpha_1 (y_2 - y_3) - \tan \alpha_2 (z_2 - z_3),$$

$$|A_5P_2| = \sec \alpha_2 (z_2 - z_3)$$

dir.



Şekil 4.4.

$d_{\alpha_i}(P_1, P_3) = |P_1A_1| + |A_1A_3| + |A_3P_3|$ ve Önerme 3.1.5 gereğince $d_{\alpha_i}(P_3, P_2) \geq |P_3A_4| + |A_4A_5| + |A_5P_2|$ olduğundan ve $(w_1 - w_2) \geq 0$ ile $(z_2 - z_3) \geq 0$ olup

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2) &\geq |P_1A_1| + |A_1A_3| + |A_3P_3| + |P_3A_4| + |A_4A_5| + |A_5P_2| \\ &= x_2 + w_1y_2 + w_2z_2 + (w_1 - w_2)(z_2 - z_3) \\ &\geq d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

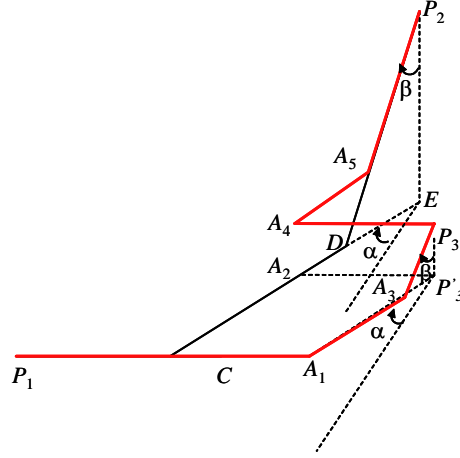
elde edilir. Böylece $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ dir.

III. Durum: Varsayalım ki $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in S_3$ olsun. Bu durumda da II. Durumdaki gibi iki alt durum vardır.

i) A_i noktaları II. Durumdakine benzer şekilde elde edilmek üzere

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(P_1, P_2) &= |P_1C| + |CD| + |DP_2| \\ &= |P_1C| + |A_1A_3| + |A_4A_5| + |A_3P_3| + |A_5P_2| \\ &= |P_1C| + |A_1A_3| + |A_3P_3| + |A_4A_5| + |A_5P_2| \\ &= d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + |A_4A_5| + |A_5P_2| - |CA_1| \\ &= d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2) - 2|CA_1| \\ &\leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.



Şekil 4.5.

ii) II. Durumdaki gibi

$$|P_1A_1| = x_3 - \tan \alpha_2 y_3, \quad |A_1A_3| = \sec \alpha_2 y_3 - \tan \alpha_1 z_3, \quad |A_3P_3| = \sec \alpha_1 z_3$$

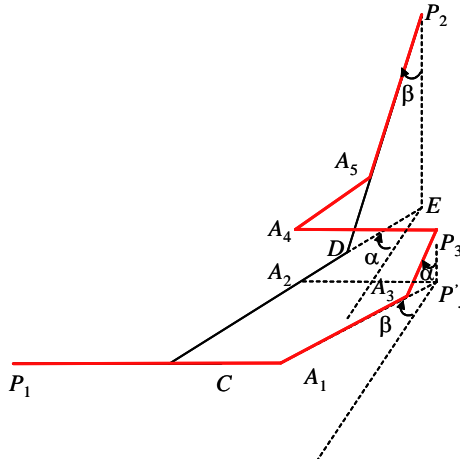
$$|P_3A_4| = (x_2 - x_3) - \tan \alpha_1 (y_2 - y_3), \quad |A_4A_5| = \sec \alpha_1 (y_2 - y_3) - \tan \alpha_2 (z_2 - z_3),$$

$$|A_5P_2| = \sec \alpha_2 (z_2 - z_3)$$

elde edilir. $d_{\alpha_i}(P_1, P_3) = |P_1A_1| + |A_1A_3| + |A_3P_3|$ ve Önerme 3.1.5 gereğince $d_{\alpha_i}(P_3, P_2) \geq |P_3A_4| + |A_4A_5| + |A_5P_2|$ olduğundan ve $(w_1 - w_2) \geq 0$ ile $(z_3 - y_3) \geq 0$ olup

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2) &\geq |P_1A_1| + |A_1A_3| + |A_3P_3| + |P_3A_4| + |A_4A_5| + |A_5P_2| \\ &= x_2 + w_1 y_2 + w_2 z_2 + (w_1 - w_2)(z_3 - y_3) \\ &\geq d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ dir.



Şekil 4.6.

IV. Durum: Farzedelim ki $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in S_3$ olsun.

$P_4 = (\min \{x, x_2\}, \min \{\max \{0, y\}, y_2\}, 0)$ noktası olarak alınsın. P_4 noktası tanımı gereğince P_1F veya FE doğru parçasının üzerinde bulunan bir noktadır. Önerme 4.1.4 gereğince,

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_4) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) \quad \text{ve} \quad d_{\alpha_i}(P_4, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$$

dir. II. ve III. durumlardaki sonuçlar yardımıyla

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_4) + d_{\alpha_i}(P_4, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. O halde d_{α_i} uzaklığı üçgen eşitsizliğini sağlar. Tüm bunlar ışığında d_{α_i} uzaklığı \mathbb{R}^3 de her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için bir metrik ailesi ifade eder.

Bu kısmın başında da gösterildiği üzere 3-boyutlu analitik uzayda geliştirilen bu metrik Taksi, Çin Dama ve α -uzaklıklarını özel hal olarak kapsamaktadır.

4.2 n -Boyutlu Uzayda α_i -Uzaklığı

Tanım 4.2.1 $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n -boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olsun. $K = \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$ olmak üzere

$$K_1 = d_L(P_1, P_2) = \max K = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

$$K_i = \max \left\{ K \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} K_k \right\}, \quad i = 2, \dots, n$$

şeklinde K_i kümeleri tanımlansın. $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(P_1, P_2) &= K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\sec \alpha_j - \tan \alpha_j) K_{j+1} \\ &= K_1 + (\sec \alpha_1 - \tan \alpha_1) K_2 + \dots + (\sec \alpha_{n-1} - \tan \alpha_{n-1}) K_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $d_{\alpha_i} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna n -boyutlu analitik uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki α_i -uzaklık fonksiyonu adı verilir.

\mathbb{R}^n de P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Taksi, Çin Dama ve α -uzaklıkları, sırasıyla,

$$d_T(P_1, P_2) = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$$

$$d_c(P_1, P_2) = K_1 + (\sqrt{2} - 1) \sum_{i=1}^n K_i$$

$$d_\alpha(P_1, P_2) = K_1 + (\sec \alpha - \tan \alpha) \sum_{i=1}^n K_i$$

olarak ifade edilebilir. Dikkat edilirse tüm $\alpha_i = 0$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$, tüm $\alpha_i = \pi/4$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_c(P_1, P_2)$ ve tüm $\alpha_i = \alpha \in [0, \pi/4]$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2)$ dir. Üstelik $K_2 > 0$ olmak üzere eğer tüm $\alpha, \alpha_i \in (0, \pi/4)$ ve $\alpha > \alpha_i$ ise

$$d_E(P_1, P_2) < d_c(P_1, P_2) < d_\alpha(P_1, P_2) < d_{\alpha_i}(P_1, P_2) < d_T(P_1, P_2)$$

eğer tüm $\alpha, \alpha_i \in (0, \pi/4)$ ve $\alpha < \alpha_i$ ise

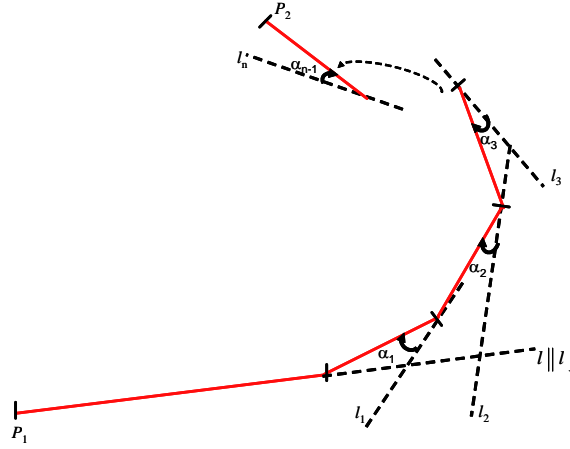
$$d_E(P_1, P_2) < d_c(P_1, P_2) < d_{\alpha_i}(P_1, P_2) < d_\alpha(P_1, P_2) < d_T(P_1, P_2)$$

dir. Bir diğer özellikte $K_2 = 0$ ise P_1 ve P_2 den geçen doğru koordinat eksenlerinden birine paralel olduğundan tüm $\alpha, \alpha_i \in (0, \pi/4)$ için

$$d_E(P_1, P_2) = d_c(P_1, P_2) = d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2)$$

olur.

l , P_1 noktasından geçen j . koordinat eksenine paralel olan doğru ve l_1, l_2, \dots, l_n her biri j . koordinat ekseninden farklı olan bir koordinat eksenine paralel olan doğrular olsun. Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 4.7. de görüldüğü üzere biri koordinat eksenlerinden birine paralel olan ve diğerleri geriye kalan koordinat eksenlerinden biri ile α_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) açısı yapan n doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki n doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır.



Şekil 4.7.

Aşağıdaki önermeler d_{α_i} -uzaklığının tanımından hemen elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.2 d_{α_i} -uzaklığı, analitik n -uzayın tüm ötelemeleri altında invarianttır. Yani, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \ni T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, \dots, x_n + a_n)$$

dönüşümü \mathbb{R}^n deki herhangi iki nokta arasındaki uzaklığı değiştirmez.

İspat: Yardımcı teoremin ifadesine göre $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $X=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $T_A(x_1, x_2, \dots, x_n)=(x_1+a_1, x_2+a_2, \dots, x_n+a_n)$ olacak şekildeki $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ öteleme dönüşümü \mathbb{R}^n deki herhangi iki nokta arasındaki d_{α_i} -uzaklığını değiştirmez. $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ noktalarının T_A ötelemesi altında görüntüleri için

$$\begin{aligned} K &= \{|x_1 + a_1 - y_1 - a_1|, |x_2 + a_2 - y_2 - a_2|, \dots, |x_n + a_n - y_n - a_n|\} \\ &= \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} \end{aligned}$$

olduğundan tüm $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{\alpha_i}(T_A(P_1), T_A(P_2)) &= K_1 + (\sec \alpha_1 - \tan \alpha_1) K_2 + \dots + (\sec \alpha_{n-1} - \tan \alpha_{n-1}) K_n \\ &= K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\sec \alpha_j - \tan \alpha_j) K_{j+1} \\ &= d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle T_A bir izometridir.

Önerme 4.2.3 $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n -boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde, $w_j = \sec \alpha_j - \tan \alpha_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ise $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, $k \in K = I \setminus \{i\}$ ikinci toplamda i, j, k sadece birer kez kullanılmak üzere

$$K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j K_{j+1} \geq K_i + \sum_{\substack{j=1 \\ k \in K}}^{n-1} w_j K_k$$

olur.

İspat: $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. İlk olarak i tek elemanlı bir indis kümesinin elemanı ise, yani $n = 1$ ise $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, $k \in I \setminus \{i\}$ olmak üzere

$$K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j K_{j+1} \geq K_i + \sum_{j=1}^{n-1} w_j K_k$$

eşitsizliği doğrudur. Varsayalım ki $i' \in I' = \{1, 2, \dots, n-1\}$, $k \in I' \setminus \{i'\}$ için

$$K_1 + \sum_{j=1}^{n-2} w_j K_{j+1} \geq K_{i'} + \sum_{j'=1}^{n-2} w_{j'} K_{k'}$$

eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda $i, n-1$ elemanlı bir kümenin elemanı olarak alınmış oldu. Bir başka deyişle $n-1$ için eşitsizliğin geçerli olduğu kabul edilmiş oldu. Bu nedenle i, n elemanlı kümeye ait olduğunda da eşitsizliğin geçerli olduğu gösterilmelidir. Buna göre,

$$\begin{aligned} K_1 + \sum_{j=1}^{n-2} w_j K_{j+1} &\geq K_{i'} + \sum_{j'=1}^{n-2} w_{j'} K_{k'} \\ \Rightarrow K_1 + \sum_{j=1}^{n-2} w_j K_{j+1} + w_{n-1} K_n &\geq K_{i'} + \sum_{j'=1}^{n-2} w_{j'} K_{k'} + w_{n-1} K_n \\ \Rightarrow K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j K_{j+1} &\geq K_{i'} + \sum_{j'=1}^{n-2} w_{j'} K_{k'} + w_{n-1} K_n. \end{aligned}$$

olur. Bu ifade kullanılarak aşağıdaki gibi $j'' \in I' \setminus \{s\}$, $k'' \in I \setminus \{i, m\}$ için eşitsizliğin sağlandığı gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
K_i + \sum_{j=1}^{n-1} w_j K_k &= K_i + \sum w_{j''} K_{k''} + w_s K_n + w_{n-1} K_m \\
&= K_i + \sum w_{j''} K_{k''} + w_s K_n + w_{n-1} K_m + w_s K_m + w_{n-1} K_n - w_s K_m - w_{n-1} K_n \\
&= K_i + \sum_{j'=1}^{n-2} w_{j'} K_{k'} + w_{n-1} K_n + (w_s - w_{n-1})(K_n - K_m) \\
&\leq K_i + \sum_{j'=1}^{n-2} w_{j'} K_{k'} + w_{n-1} K_n \\
&\leq K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j K_{j+1}
\end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki teorem her $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ için α_i -uzaklığının bir metrik olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 4.2.4 Her $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ için \mathbb{R}^n de α_i -uzaklığı bir metrik ailesi belirtir.

İspat: d_{α_i} -uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğu ve de üçgen eşitsiliğini sağladığı gösterilmelidir. $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve $P_3 = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, \mathbb{R}^n deki herhangi üç nokta olsun. P_1 ile P_2 noktaları arasındaki α_i -uzaklığı $K_1 = d_L(P_1, P_2) = \max K = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$, $K_i = \max \left\{ K \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} K_k \right\}$ olmak üzere her $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ için

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = K_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\sec \alpha_j - \tan \alpha_j) K_{j+1}$$

olarak tanımlanmıştı. Burada mutlak değer tanımı gereğince için $|x_i - y_i| \geq 0$ ve her $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ için $(\sec \alpha_i - \tan \alpha_i) \geq 0$ olduğundan $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \dots = |x_n - y_n| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkça $P_1 = P_2$ ise $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = 0$ dır. O halde $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_{α_i} -uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Üstelik mutlak değer tanımı gereğince $i=1, 2, \dots, n$ olmak üzere $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ olduğundan $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_{\alpha_i}(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_{α_i} -uzaklık fonksiyonu simetrik-tir.

Şimdi her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ için $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ olduğu gösterilmelidir. Her $\alpha_i \in [0, \pi/4]$ ve $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ için

$$\begin{aligned}
d_{\alpha_i}(P_1, P_2) &= K_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) K_{k+1} \\
&= |x_j - y_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |x_k - y_k| \\
&= |x_j - z_j + z_j - y_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |x_k - z_k + z_k - y_k| \\
&\leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) (|x_k - z_k| + |z_k - y_k|) \\
&= \left(|x_j - z_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |x_k - z_k| \right) + \\
&\quad \left(|z_j - y_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |z_k - y_k| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda elde edilen ifadeler için Önerme 3.2.4 den dolayı

$$|x_j - z_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |x_k - z_k| \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3)$$

ve

$$|z_j - y_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |z_k - y_k| \leq d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
d_{\alpha_i}(P_1, P_2) &\leq \left(|x_j - z_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |x_k - z_k| \right) + \\
&\quad \left(|z_j - y_j| + \sum_{k=1}^{n-1} (\sec \alpha_k - \tan \alpha_k) |z_k - y_k| \right) \\
&\leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)
\end{aligned}$$

olup $d_{\alpha_i}(P_1, P_2) \leq d_{\alpha_i}(P_1, P_3) + d_{\alpha_i}(P_3, P_2)$ bulunur. Yani d_{α_i} üçgen eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak d_{α_i} \mathbb{R}^n de bir metrik ailesi belirtir.

Bu kısmın başlarında da ifade edildiği gibi α_i -uzaklığı her $\alpha_i = 0$, $\alpha_i = \pi/4$ ve $\alpha_i = \alpha \in [0, \pi/4]$ için, sırasıyla, Taksi, Çin Dama ve α -uzaklıklarına eşittir. Şöyleki:

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_T(P_1, P_2) \Leftrightarrow \forall \alpha_i = 0$$

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_c(P_1, P_2) \Leftrightarrow \forall \alpha_i = \pi/4$$

$$d_{\alpha_i}(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2) \Leftrightarrow \forall \alpha_i = \alpha \in [0, \pi/4].$$

O halde geliştirilen bu d_{α_i} metriği n -boyutlu analitik uzay için Taksi, Çin Dama ve α - metriklerini özel hal olarak kapsamaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akça, Z. ve Kaya, R., 1997, On the Taxicab Trigonometry, Journal of Inst. of Math. &Comp. Sci., 10, 3, 151-159.
- Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, 27, 5, 521-532.
- Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces, Hadronic Journal Supplement, 19, 491-501.
- Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2006, On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions, Internationnal Journal of Mathematics and Analysis, 1, 3, 249-259.
- Chen, G. , 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University, 43p.
- Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Inst., 443p.
- Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, On α -Distance in Three Dimensional Space, Applied Sciences, 8, 65-69.
- Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, Generalization of α -Distance to n-Dimensional Space, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 10, 33-37.
- Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, CC – Analog of the Theorem of Pythagoras, Algebras, Groups and Geometries, 23, 2, 179-188.
- Gelişgen, Ö., Kaya, R. ve Özcan, M., 2006, Distance Formulae in the Chinese Checker Space, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 35-44.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Ho, Y.P. and Liu, Y., 1996, Parabolas in Taxicab Geometry, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 2, 63-72.
- Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ. ve Özcan, M., 2000, General Equation for Taxicab Conics and their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 135-148.
- Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p.
- Kaya, R., 2004, Area Formula For Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon, 12, 4, 219-220.
- Kaya, R. ve Çolakoglu, H. B., 2006, Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 69-81.
- Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2006, Group of Isometries of CC-Plane, Missouri J. of Math. Sci., 18, 3, 221-233.
- Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 88p.
- Laatsch, R., 1982, Pyramidal Sections in Taxicab Geometry, Mitt. Mathematics Magazine, 55, 205-212.
- Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, 509p.
- Menger, K., 1952, You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL.
- Milman, R. S. and Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Minkowski, H., 1967, *Gesammelte Abhandlungen*, Chelsea Publishing Co. New York, 836p.
- Özcan, M., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., 2002, The Taxicab Lengths Under Rotations, *The Pi Mu Epsilon Journal*, 11, 7, 381-384.
- Özcan, M. ve Kaya, R., 2002, On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 14, 2, 107-117.
- Özcan, M. ve Kaya, R., 2003, Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 15, 3, 178-185.
- Reynolds, B. E., 1980, Taxicab Geometry, *Pi Mu Epsilon Journal*, 7, 77-88.
- Schattschneider, D. J., 1984, The Taxicab Group, *Amer. Math. Monthly* 91, 423-428.
- So, S. S. and Al-Maskari, Z. S., 1995, Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry, *Kansas Science Teacher (J. of Math. and Sciece Teaching)*, 11, 14-18.
- So, S. S., 2002, Recent Developments in Taxicab Geometry, *Cubo Mathematica Educational*, 4, 2, 79-96.
- Thompson, A. C., 1996, *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, 346p.
- Thompson, K. and Dray, T., 2000, Taxicab Angles and Trigonometry, *Pi Mu Epsilon*, 11, 87-96.
- Tian, S., So, S. S. and Chen, G., 1997, Concerning Circles in Taxicab Geometry, *J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 28, 727-733.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Tian, S., 2005, Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 17, 1, 35-40.

Turan. M., 2004, Çin Dama Düzleminde Konikler Üzerine, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 149p.

Turan, M. ve Özcan, M., 2004, Two-foci CC-Ellipses, International Pure And Applied Mathematics (IJPAM), 16, 1, 119-127.

Turan, M.ve Özcan, M., 2005, Two-foci CC-Hyperbalos, International Pure And Applied Mathematics (IJPAM), 16, 4, 509-520.

Uymaz, A.Ç., 2002, Çin Dama Çemberi ve Özellikleri, Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 227p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Özcan Gelişgen

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Eskişehir, 13.03.1979

Medeni hali: Bekar

Adres bilgileri:

Ev adresi: Şarhöyük Mh.

Şeker Sk. No:20

26230-Eskişehir

İş adresi: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Ed. Fak. Matematik Bölümü

26480-Eskişehir

E-posta: gelisgen@ogu.edu.tr, gelisgen@gmail.com

Eğitim Bilgileri:

Doktora:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

(2003-2007)

Yüksek Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

(2000-2003)

Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

(1996-2000)

İş Deneyimi:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi)

(2000-)