Geri Çekme, İleri İtme Çaprazlanmış Modüller, $\mathbf{Cat}^1$-Cebirler ve Simplisel Cebirler

Özgün Gürmen

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Kasım 2007

Pullback and Pushout Structures of Crossed Modules, Cat^1-Algebras and Simplicial Algebras

Özgün Gürmen

DOCTORAL DISSERTATION
Department of Mathematics
November 2007

Özgün Gürmen' ın DOKTORA TEZİ TEZİ olarak hazırladığı "**Geri Çekme, İleri İtme Çaprazlanmış Modüller,**
Cat^1-Cebirler ve Simplisel Cebirler" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

...../...../ 2007

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ (Danışman)

Üye: Doç. Dr. Murat ALP, (Danışman)

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Abdullah ALĞIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

Geri Çekme, İleri İtme Çaprazlanmış Modüller, Cat^1-Cebirler ve Simplisel Cebirler

Özgün Gürmen

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Doç. Dr. Murat ALP

Kasım 2007

Geri Çekme, İleri İtme Çaprazlanmış Modüller, Cat^1-Cebirler ve Simplisel Cebirler

Özgün Gürmen

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde tez içerisinde sıklıkla kullanılan kavramlar yer almaktadır. Bu kavramlar bilinen kavramlar olup kategoriksel olarak geri çekme, ileri itme, değişmeli cebirler üzerinde tanımlanmış olan çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış modül örneklerini, cat^1 cebirler ve simplisel cebirleri içermektedir. Bu tanımlamaları pekiştirecek örnekler verilmiştir. İkinci bölümde, değişmeli cebirler üzerinde geri çekme çaprazlanmış modüller ve ileri itme çaprazlanmış modüller tanımlanmış bununla ilgili özellikler ve örnekleri de bu bölüm içerisinde ayrıntılı olarak sunulmuştur. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde tanımladığımız tüm yapılar cat^1-cebir cebirsel sistemi için gösterilmiştir. Son bölümde ko-indirgenmiş yapılar simplisel cebirler için tanımlanmıştır. Elde edilen bu üç kategori arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış modül, Cat^1-cebir, Simplisel cebir, Geri çekme, İleri itme

Pullback and Pushout Structures of Crossed Modules, Cat^1-Algebras and Simplicial Algebras

Özgün Gürmen

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. The first chapter includes the elementary theory of crossed modules of commutative algebras. Some categorical examples of this theory are deeply examined. It also contains some definitions of cat^1-commutative algebras and simplicial commutative algebras. Chapter two generalises the induced modules which are called the pushout and pullback crossed modules of commutative algebras. Some examples of these are fully discussed. Chapter three and four consists of the (co)-induced version of cat^1-commutative algebras and simplicial commutative algebras respectively. Finally we give the relation among these structures.

Keywords: Crossed Modules of commutative algebras, Cat^1-commutative algebras, Simplicial commutative algebras, Pullback, Pushout

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Hocalarım, Sayın;

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ ve **Doç. Dr. Murat ALP** e

desteği için Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN'a, ayrıca, her zaman yanımda olan ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen aileme, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

ÖNSÖZ

Modül teoride, $\phi : S \to R$ halka homomorfizmi ve bir M, R-modülü verildiğinde

$$\begin{array}{rcl} S \times M & \longrightarrow & M \\ (s,m) & \longmapsto & s \cdot m = \phi(s)m \end{array}$$

işlemi yardımıyla M, bir S-modül olur. Bununla birlikte $f : M_1 \to M_2$, R-modül homomorfizmi için

$$f(s \cdot m) = f(\phi(s)m) = \phi(s)f(m) = s \cdot f(m)$$

işlemiyle f bir S-modül homomorfizmidir. Böylece

$$\phi^* :_R \mathbf{Mod} \longrightarrow_S \mathbf{Mod}$$

funktoru elde edilir. Buradan $M \in \mathrm{Ob}(_R\mathbf{Mod})$ için

$$M \rightsquigarrow \phi^*(M)$$

objelerin korunması işlemi ϕ yardımıyla (veya boyunca) "*kısıtlama*" olarak adlandırılır.

Tersine, ilk olarak R, halkasının ϕ yardımıyla

$$\begin{array}{rcl} S \times R & \longrightarrow & R \\ (s,r) & \longmapsto & s \cdot r = \phi(s)r \end{array}$$

işlemiyle bir S-modül olduğunu belirtelim. Herhangi bir N, S-modül verildiğinde $R \otimes_R N$ şeklinde bir R-modül elde edilir. Buradan

$$\phi_* :_S \mathbf{Mod} \longrightarrow_R \mathbf{Mod}$$

funktoru elde edilir. Dolayısıyla $N \in \mathrm{Ob}(_S\mathbf{Mod})$ için

$$N \rightsquigarrow \phi_*(N) = R \otimes_R N$$

objelerin korunması işlemi ϕ yardımıyla (veya boyunca) "*genişleme*" olarak adlandırılır. Ayrıca ϕ_* ve ϕ^* funktorlarının belirttiği duruma "*halkaların değişimi*" veya "*taban değişimi*" olarak bilinmektedir. Ayrıntılı bilgi için Ek A ya bakınız.

Grup teoride bir çok yapının daha yüksek boyutlara genelleştirmesi yapılmaktadır. Yukarıda kısaca tanımını verdiğimiz "*kısıtlama*" ve "*genişleme*" kavramlarını Brown ve Higgins (1978) tarafından 2-boyutlu grup olarak gözönüne alınabilen çaprazlanmış modül kavramına taşımışlardır. Bu genelleştirmeden elde edilen yapıları "*ko-indirgenmiş*" ve "*indirgenmiş*" olarak adlandırmışlardır. Bu yapıların elde edilmesinde cebirsel topolojinin en önemli yapı taşlarından biri olan kategori teori kullanılmıştır. Sırasıyla bu kategoriksel aletler "geri çekme (pullback)" ve "ileri itme (pushout)" dir. Daha sonra doğal olarak farklı matematiksel yapılar üzerinde incelenmiştir. Örneğin değişmeli cebirler için Porter (1985), Shammu (1992) (herhangi cebir için) ve Lie cebirler için Casas ve Ladra (2000) çalışmaları literatürde mevcuttur. Fakat herbir çalışma çaprazlanmış modüller için incelenmiştir. Tabiiki çaprazlanmış modüllere kategoriksel denk olan örneğin cat^1-obje (grup, cebir, Lie cebir gibi) ve Moore kompleksi bir olan Simplisel obje (grup, cebir, Lie cebir) farklı cebirsel sistemler için "kısıtlama" ve "genişleme" kavramları gözönüne alınabilir. Bu tezde bu yapıların çaprazlanmış modüller, cat^1-cebirler ve simplisel cebirlere genelleştirmesi verilecektir. Yalnız Brown ve Loday (1986) n-boyutlu cebirsel model olan cat^n-gruplar için "indirgenmiş" yapısını tanımlamışlardır. Daha sonra bu yapı $n=1$ için Alp (1997) doktora tezinde ayrıntılı olarak incelemiş olup GAP (Groups Algorithms Programming) uyarlaması verilmiştir.

Bu tezin özgün motivasyonu grup teoride verilen (ko)-indirgenmiş çaprazlanmış modül ve cat^1-grup yapısını, değişmeli cebirler teorisine genelleştirmek olacaktır. Ayrıca homolojiksel ve homotopiksel teoride en önemli yapı taşlarından olan "simplisel obje" (obje= cebirler alınacak) kavramını "(ko)-indirgenmiş" yapısına genişletmek olacaktır. Bu verdiğimiz yapıların "Değişmeli Cebirler Teorisine" bir çok yenilikler getireceğine inanıyoruz. Örneğin Koszul yapısına farklı bir gözle bakıp indirgenmiş bir yapı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte André (1974)ve Quillen (1970) tarafından oluşturulan "adım-adım" yapısının "indirgenmiş simplisel cebir" den ibaret olduğu belirtilmiştir. Ayrıca kotanjant kompleks uygulaması verilmiştir.

Brown-Higgins (1978) indirgenmiş çaprazlanmış modül yapısını kısaca özetleyelim: $\phi : P \to Q$ grup homomorfizmi ve $\mu : M \to P$ çaprazlanmış P-modülü verildiğinde M ve ϕ yardımıyla Q üzerinde yeni bir N modülü elde edilir. Q nun N üzerine etkisiyle $N \to Q$ çaprazlanmış Q-modülü aranan "indirgenmiş" yapıdır. Dolayısıyla $m \in M$ ve $q \in Q$ için $q \cdot m$ şeklindeki yeni elemanlara ihtiyaç vardır. Böylece (m,q) ikilileri üzerinde serbest grup ve bu ikililerin arasında oluşturduğu normal altgrup alınarak istenen yapı oluşturulmuştur. Bu durumun değişmeli cebirler versiyonu Bölüm 2 de ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

0.1 Tezin Yapısı

Birinci bölümde, tez içerisinde kullandığımız temel kavramlar detaylı olarak incelenmiştir. İlk olarak çaprazlanmış modüller (crossed modules) kavramı tanımlanmıştır. Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül ilk olarak 1949 yılında Whitehead tarafından relatif homotopi gruplarla ilgili çalışmasında tanımlan-mıştır. Daha sonra bu kavram diğer matematiksel yapılar için önemli yer tutmuştur. Loday (1982) cebirsel K-Teori de Lie cebirler üzerinde çaprazlan-mış modül kavramını kullanmıştır. Bu tezde verilen tüm yapılar değişmeli cebirler üzerinde incelendiğinden Lichtenbaum ve Schlessinger (1967) farklı isim (3-terimli genişleme) altında ve Gerstanhaber (1966) çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını kullanmışlardır. Daha sonra Porter (1985) değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını formal olarak literatüre kazandırmıştır. Hopf cebirler (Woronowicz, 1989), Leibniz cebirler (Casas, 1999) gibi farklı cebirsel yapılar üzerinde tanımlamaları yapılmıştır. Tüm bu cebirsel yapılar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin kategoriksel ve cebirsel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu bölümde çaprazlanmış modüller kategorisine denk olan cat^1-cebirler ve simplisel cebirler (Moore kompleksi 1 olan) kategorisel yapılarıda verilmiştir.

İkinci bölümde (ko)-indirgenmiş çaprazlanmış modül kavramı üzerinde durulmuştur. İndirgenmiş çaprazlanmış modüller ilk olarak Brown ve Higgins tarafından 1978 de tanımlanmıştır ve cebirsel topolojide bir çok uygulamaları verilmiştir. Örneğin, indirgenmiş yapı Van-Kampen teoreminde kullanılmıştır.

Modül teoride, bir halka morfizmi üzerinde taban değiştirmeye karşılık gelen geri çekme ve ileri itme çaprazlanmış modülü, bu çalışmada Porter (1986) tarafından verilen aşağıdaki tanım üzerinden incelenecektir.

Porter, $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül ve $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi olmak üzere $\mathbf{Ceb}_k$ kategorisinde

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & C \\ {\scriptstyle \partial^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ S & \xrightarrow[\phi]{} & R \end{array}$$

geri çekme (pullback) diyagramını elde etmiştir. Burada

$$D = \{(c,s) \mid \phi(s) = \partial(c),\ s \in S, c \in C\} \subseteq C \times S$$

olup D üzerinde S etkisi $s\cdot(c,s')=(\phi(s)\cdot c,ss')$ dir. Böylece $\partial^{*}:D\to S$ homomorfizmi çaprazlanmış S-modüldür ve

$$\phi^{*}:\mathbf{XMod}/R\longrightarrow\mathbf{XMod}/S$$

funktorunu tanımlamıştır. Bu funktoru da ϕ yardımıyla elde edilmiş ko-indirgenmiş çaprazlanmış funktor olarak adlandırmıştır. Fakat biz geri çekme funktoru diyeceğiz.

Benzer şekilde dual kavramı olan ileri itmeyi elde etmiştir. Burada elde edilen morfizm yardımıyla indirgenmiş çaprazlanmış modül ve ϕ^{*} funktorunun sol ekinin, yani,

$$\phi_{*}:\mathbf{XMod}/S\longrightarrow\mathbf{XMod}/R$$

funktorunun varlığını göstermiştir. Bu funktoru ise ileri itme funktoru olarak adlandıracağız.

Burada $\left(\phi^{*},\phi_{*}\right)$ ikilisinin yani ileri itme ve geri çekme funktorlarınýn bir adjoint ikili olduğu ifade edilmiştir. Fakat vermiş olduğu tüm yapılar açık bir şekilde ifade edilmemiştir. Bölüm 2 de Porter (1986) da verilen tüm sonuçları açık olarak yazacağız. Ayrıca farklı sonuçları elde edip indirgenmiş çaprazlanmış modül yapısı geliştirilmiştir.

Bölüm 3 te, geri çekme ve ileri itme cat^{1}-cebirler incelenmiştir. İlk olarak Loday (1982) gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin cat^{1}grup yapısına denkliğini göstermiştir. Bölüm 1 de bu denkliğin bir değişmeli cebirler versiyonu verilmiştir. Bu denklik kullanılarak indirgenmiş cat^{1}-cebirler için aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

(C,R,∂) çaprazlanmış R-modül ve $\left(\phi^{*}(C),S,\partial^{*}\right)$ geri çekmesi olsun. $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ sırasıyla (C,R,∂) ve $\left(\phi^{*}(C),S,\partial^{*}\right)$ çaprazlanmış modüllerinden elde edilen cat^{1}-değişmeli cebirler ise

$$\mathfrak{D}\cong\phi^{*}(\mathfrak{C})$$

olur. Diyagram olarak,

$$\begin{tikzcd}
\phi^{*}(R\ltimes C) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, shift right, "t^{\bullet}"'] \arrow[d, shift left, "s^{\bullet}"] & R\ltimes C \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
\phi^{*}(R)=S \arrow[r, "\phi"'] \arrow[u, bend left=60, "e^{\bullet}"] & R \arrow[u, bend right=60, "e"']
\end{tikzcd}$$

dir.

Ayrıca indirgenmiş cat[1]-cebir inşasında kullanılan Çeks_*Çekt_* ideallerinin üreteçleri ile ilgi bazı sonuçlar verilmiştir.

Bölüm 4 te (ko)-indirgenmiş kavramı simplisel cebirler için incelenmiştir.

İndirgenmiş çaprazlanmış modüllerin bir uygulaması olan serbest çaprazlanmış modül kavramı, simplisel versiyonda André (1974)ve Quillen (1970) tarafından tanımlanan "adım-adım" yapısı yardımıyla simplisel cebirler kavramının oluşturulduğu gösterildi.

BÖLÜM 1

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER, Cat^1-CEBİRLER, SİMPLİSEL CEBİRLER

1.1 Giriş

Bu bölümde, bölüm 2, 3 ve 4 te vereceğimiz kavramların daha iyi anlaşılması için bilinen cebirsel yapılar verilecektir. İlk olarak bu tezin yapı taşı olan çaprazlanmış modüller (crossed modules) kavramı detaylı olarak incelenmiştir. Özellikle cebirsel ve funktoriyel örnekler ayrıntılı bir biçimde analiz edilmiştir. Daha sonra çaprazlanmış modül yapısına denk kategori olan, cat^1-cebirler ve simplisel cebir kavramları tanıtılmıştır.

Bu tezde vereceğimiz tüm yapılar değişmeli cebirler üzerinde incelenmiştir. Bu yüzden tez içerisinde değişmeli kelimesi telaffuz edilmeyecektir.

$f : k \to R$ değişmeli halka homomorfizmi olsun.

$$\begin{array}{rcl} k \times R & \longrightarrow & R \\ (k,r) & \longmapsto & k \cdot r = f(k)r \end{array}$$

işlemiyle R bir k-modül yapısı oluşturur. O halde R, hem halka hem de modül yapısına sahiptir. Bu durumda R ye bir k**-cebir** denir. Dolayısıyla k-cebir homomorfizmi halka ve modül homomorfizmi olmaktadır. Örneğin; $k = \mathbb{Z}$ alınırsa

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & R \\ z & \longmapsto & z \cdot 1_R \end{array}$$

işlemiyle her R halkası bir $\mathbb{Z}$-cebirdir. Ayrıca $k[X]$ polinomlar halkası bir k-cebirdir.

C ve R değişmeli k-cebirler olsun.

$$\begin{array}{rcl} f : R \times C & \longrightarrow & R \\ (r,c) & \longmapsto & f(r,c) = r \cdot c \end{array}$$

fonksiyonu her $k \in k$, $c,\ c' \in C,\ r,\ r' \in R$ için ,

$$\begin{array}{ll} (i) & k(r \cdot c) = (kr \cdot c) = (r \cdot kc) \\ (ii) & r \cdot (c + c') = r \cdot c + r \cdot c' \\ (iii) & (r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c \\ (iv) & r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c') \\ (v) & rr' \cdot c = r \cdot (r' \cdot c) \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise f ye R nin C üzerine **değişmeli cebir etkisi** denir.

1.2 Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Whitehead (1949) tarafından verilmiştir. Bu kavram homotopi teoride önemli bir yer tutmuştur. Cebirsel olarak, çaprazlanmış modüller, grup kavramının iki boyutlu bir genelleştirmesi olarak açıklanabilir. Daha sonra bu kavramın, Lie cebirler (Casas, 1991), değişmeli cebirler (Porter, 1985), Hopf cebirler (Woronowicz, 1989), Leibniz cebirler (Casas, 1999) versiyonları tanımlanmıştır.

Biz, yalnızca değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kavramını inceleyeceğiz.

k; birimli, değişmeli sabit bir halka ve R; değişmeli k-cebir olsun. Aksi belirtilmedikçe tüm k-cebirler birimli değildir.

Tanım 1.1 C bir R-cebir olsun.

$$\begin{array}{ccc} R\times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & r\cdot c \end{array}$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere

$$\partial : C \longrightarrow R$$

R-cebirlerin morfizmi, her $c, c' \in C$ için

$$\partial(c)\cdot c' = cc'$$

şartını sağlıyor ise $\mathfrak{X}$=(C,R,∂) üçlüsüne $\left(\text{veya } \partial : C \to R\right)$ bir **çaprazlanmış R-modül** denir. Bu şart Peiffer şartı olarak adlandırılır.

Uyarı: $\partial : C \to R$, R-cebirlerin morfizmi olduğundan her $r \in R$ ve $c \in C$ için

$$\partial(r\cdot c) = r\partial c$$

şartını sağlaması gerekir. Bu şart ön çaprazlanmış modül şartı olarak adlandırılır.

Not: Tez içerisinde ön çaprazlanmış modül şartı, CM1 ve Peiffer şartı, CM2 ile gösterilmiştir.

1.2.1 Çaprazlanmış Modül Örnekleri

Örnek 1. R halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $I \subseteq R$ olduğundan

$$\begin{array}{cccc} \partial = i: & I & \hookrightarrow & R \\ & a & \longmapsto & a \end{array}$$

içine (gömme) homomorfizmini alalım. Bu durumda (I,R,i) üçlüsü bir çaprazlanmış R-modüldür. Burada $I \trianglelefteq R$ olduğundan

$$\begin{array}{ccc} R\times I & \longrightarrow & I \\ (r,a) & \longmapsto & r\cdot a = ra \end{array}$$

etkisi tanımlanabilir.

Tersine,

Önerme 1.2 (C,R,∂) bir çaprazlanmış R-modül ise $\partial(C) \trianglelefteq R$ dir.

İspat. $\partial : C \to R$, R-cebir morfizmi olduğundan her $r \in R$ ve $\partial(c) \in \partial(C)$ için

$$r\partial c = \partial(r\cdot c) \in \partial(C)$$

olup $\partial(C) \trianglelefteq R$ dir. □

Böylece çaprazlanmış modüllerin, idealler yerine alınabileceğini söyleyebiliriz.

Örnek 2. R bir halka ve M, bir R-modül olsun. Her M, R-modülü

$$\begin{array}{ccc} M\times M & \longrightarrow & M \\ (m_1,m_2) & \longmapsto & m_1m_2 = 0 \end{array}$$

işlemiyle R-cebir yapısı oluşturur. Buradan

$$\begin{array}{cccc} \partial = 0: & M & \longrightarrow & R \\ & m & \longmapsto & \partial(m) = 0 \end{array}$$

homomorfizmi, bir çaprazlanmış R-modüldür. Çünkü,

$$\begin{array}{ccc} R\times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r\cdot m = rm \end{array}$$

etkisiyle

$$\partial(m)\cdot m' = 0\cdot m' = 0 = mm'$$

olur. Yani $(M,R,0)$ çaprazlanmış R-modüldür.

Tersine; $\partial : C \to R$, çaprazlanmış R-modülü verildiğinde, modül yapısının nasıl oluşturulduğunu gösterelim.

Önerme 1.3 $\partial : C \to R$, çaprazlanmış R-modül ve $I = \partial(C)$ olsun.

(i) Çek$\partial \trianglelefteq C$ dir.
(ii) Çek∂; R/I-modül yapısına sahiptir.
(iii) C/C^2 ve I/I^2, R/I-modüldür.

İspat. (i) $a \in$Çek∂ ve $c \in C$ olsun.

$$\begin{array}{rcll} \partial(ac) & = & \partial(a)\partial(c) & \\ & = & 0\partial(c) & \\ & = & 0c & (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = & 0 & \end{array}$$

olup $ac \in$Çek∂ dır.

(ii) İlk olarak, Çek∂ nın I üzerine etkisinin sıfır olduğunu göstereceğiz. Yani,

$$\begin{array}{rcl} I \times \text{Çek}\partial & \longrightarrow & \text{Çek}\partial \\ (x,a) & \longmapsto & x \cdot a \end{array}$$

olmak üzere $x \cdot a = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcll} x \cdot a & = & \partial(c) \cdot a & (\because x = \partial(c);\ c \in C\ ) \\ & = & ca & (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = & c\partial(a) & (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = & c0 = 0 & \end{array}$$

olup $x \cdot a = 0$ dır. Böylece R/I nın Çek∂ üzerine etkisi,

$$\begin{array}{rcl} R/I \times \text{Çek}\partial & \longrightarrow & \text{Çek}\partial \\ (r+I,a) & \longmapsto & (r+I)\cdot a = ra \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Çünkü I' nın Çek∂ üzerine etkisi sıfırdır. Bu etkiyle birlikte Çek∂ nın, bir R/I-modül yapısına sahip olduğu kolayca gösterilir.

(iii) Öncelikle $C,\ R$-cebir olduğundan

$$\begin{array}{rcl} R \times C/C^2 & \longrightarrow & C/C^2 \\ (r, c+C^2) & \longmapsto & r \cdot (c+C^2) = rc + C^2 \end{array}$$

etkisi vardır. $ii)$ ye benzer şekilde I nın C/C^2 üzerine etkisinin sıfır olduğunu göstermeliyiz.

$x = \partial(c') \in \partial(C)$ ve $c + C^2 \in C/C^2$ için

$$\begin{array}{rcl} x \cdot (c+C^2) & = & xc + C^2 \\ & = & \partial(c')c + C^2 \\ & = & c'c + C^2 \in C^2/C^2 \cong \{0\} \end{array}$$

olup $x \cdot (c+C^2) = 0$ dır. O halde,

$$\begin{tikzcd} R \times C/C^2 \arrow[r] \arrow[d] & C/C^2 \arrow[d, equal] \\ R/I \times C/C^2 \arrow[r] & C/C^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (r, c+C^2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & rc + C^2 \arrow[d, equal] \\ (r+I, c+C^2) \arrow[r, mapsto] & (r+I)(c+C^2) \end{tikzcd}$$

etkisi tanımlanabilir. Böylece bu etkiyle birlikte C/C^2, bir R/I-modül yapısı oluşturur. Benzer şekilde I/I^2 nin bir R/I-modül yapısı oluşturduğu kolayca gösterilir. $\square$

Not: Bu iki örnek, çaprazlanmış modüllerin modüller ve ideallerin genel-leşmesi olduğunu gösterir.

Örnek 3. C, değişmeli R-cebir ve $Ann(C)=0$ $\left(\text{veya } C^2=C\right)$ olsun.

$$\mathcal{M}(C)=\{\lambda \mid \lambda : C\to C,\ \lambda\left(cc'\right)=\lambda(c)c'\ ; c,c'\in C\}$$

C nin çarpanlarının R-cebiri verilsin. (Bakınız Arvasi ve Ege, 2003)

$$\begin{array}{rcl} \partial : C & \longrightarrow & \mathcal{M}(C) \\ c & \longmapsto & \lambda_c : \begin{array}{rcl} C & \longrightarrow & C \\ c' & \longmapsto & cc' \end{array} \end{array}$$

çaprazlanmış modüldür. C üzerinde $\mathcal{M}(C)$ etkisi

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(C)\times C & \longrightarrow & C \\ (\lambda,c) & \longmapsto & \lambda\cdot c=\lambda(c) \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{llcll} CM1. & \partial(\lambda\cdot c) & = & \partial(\lambda(c)) & \\ & & = & \lambda_{\lambda(c)} & \left(\because \lambda_{\lambda(c)}(c')=\lambda(c)c'=\lambda(cc')=\lambda(\lambda_c(c'))\right) \\ & & = & \lambda\lambda_c & \\ & & = & \lambda\partial(c) & \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} CM2. & \partial(c)\cdot c' & = & \lambda_c\cdot c' \\ & & = & \lambda_c(c') \\ & & = & cc' \end{array}$$

olup $(C,\mathcal{M}(C),\partial)$ çaprazlanmış modüldür.

Örnek 4.

$$\theta : L\longrightarrow M$$

R-modüllerin bir morfizmi olsun. Her $r,r'\in R$, her $m,m'\in M$ için,

$$(r,m)(r',m')=(rr',rm'+r'm)$$

çarpımını alarak

$$R\ltimes M$$

yarı-direkt çarpımını tanımlayabiliriz. Böylece

$$\begin{tikzcd} (R\ltimes M)\times L \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & L \\ & R\times L \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup L nin $R \ltimes M$ üzerine etkisi

$$\begin{tikzcd} ((r,m),l) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (r,m)\cdot l = rl \\ & (r,l) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

şeklindedir. Burada p projeksiyondur. Tanımlanan bu etkiyle birlikte L, $R \ltimes M$-modül yapısı oluşturur. Böylece

$$\begin{array}{rccc} \partial: & L & \longrightarrow & R \ltimes M \\ & l & \longmapsto & (0, \theta(l)) \end{array}$$

çaprazlanmış $R \ltimes M$ modüldür. Çünkü her $l,\ l' \in L$ için

$$\begin{array}{rcl} \partial(l)\cdot l' & = & (0,\theta(l))\cdot l' \\ & = & 0l' = 0 \\ & = & l l' \end{array}$$

(Not: Burada L ve M, R-modüllerini sıfır çarpımı alınarak R-cebir yapısı oluşturduğunu hatırlatalım. Yani,

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \longrightarrow & L \\ (l,l') & \longmapsto & l l' = 0 \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} M \times M & \longrightarrow & M \\ (m,m') & \longmapsto & m m' = 0 \end{array}$$

olup çarpım

$$\begin{array}{rcl} (r,m)(r',m') & = & (rr', rm' + r'm + mm') \\ & = & (rr', rm' + r'm + 0) \\ & = & (rr', rm' + r'm) \end{array}$$

şeklinde alınmaktadır.)

1.2.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

$\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül ve $\partial' : C' \to R'$çaprazlanmış R'-modül olsun.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "\varphi\times\theta"] \arrow[d] & R' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları gözönüne alındığında

$$\begin{tikzcd} (r,c) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\varphi(r),\theta(c)) \arrow[d, mapsto] \\ r\cdot c \arrow[r, mapsto] & \theta(r\cdot c)=\varphi(r)\cdot\theta(c) \end{tikzcd}$$

olup

$$\theta(r\cdot c)=\varphi(r)\cdot\theta(c)$$

elde edilir. Böylece

$$(\theta,\varphi):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$$

homomorfizm çiftine, **çaprazlanmış modül morfizmi** denir. Bununla birlikte kompozisyon

$$(\theta,\varphi)\circ(\theta',\varphi')=(\theta'\circ\theta,\varphi'\circ\varphi)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda k, sabit halkası için değişmeli k-cebir k-**Ceb** (veya **Ceb**) kategorisinde, çaprazlanmış R-modüller kategorisini tanımlayabiliriz. Bu kategoriyi $\mathbf{XMod}_k$ (veya **XMod**) ile göstereceğiz.

Eğer $R=R'$ alırsak

$$\theta(r\cdot c)=r\theta(c)$$

olup, değişmeli diyagramımız

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

olmak üzere θ çaprazlanmış R-modül morfizmidir. R üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış R-modül morfizmi olduğundan **XMod** un bir alt kategorisi elde edilir. Bu kategoriyi de $\mathbf{XMod}/R$ ile göstereceğiz. Aksi belirtilmediği sürece tezin tamamında bu kategori üzerinde çalışacağız.

Çaprazlanmış modüller ile ilgili aşağıda belirteceğimiz uyarılar Shammu (1992) tarafından verilmiştir.

Uyarılar:

(i)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

ve Çek$\partial' = 0$ ise $f = g$ dir. Çünkü $c \in C$ için;

$$\begin{aligned}
\partial'\big(f(c) - g(c)\big) &= \partial' f(c) - \partial' g(c) \\
&= \partial(c) - \partial(c) \qquad \big(\because\ \partial' f = \partial = \partial' g\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $f(c) - g(c) \in$Çek$\partial' = 0$ dır.

Örneğin, $C' = I \trianglelefteq R$ ve $\partial' = i : I \hookrightarrow R$ içine çaprazlanmış modül alınırsa ∂' nün çekirdeği sıfır olup

$$f : (C, R, \partial) \longrightarrow (I, R, i)$$

biricik çaprazlanmış modül morfizmi vardır.

(ii)

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\partial=0"'] & & R \arrow[dl, "\partial'=id_R"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

diyagramı alınırsa $f = 0$ olur. Ayrıca Çek$\partial' = 0$ olduğundan f tek olup

$$\mathbf{XMod}/R((M, R, 0), (R, R, id_R)) = \{0 : M \longrightarrow R\}$$

elde edilir.

(iii)

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id_R"'] & & C \arrow[dl, "\partial"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

diyagramı alınırsa $\partial f = id_R$ olup $\partial(C) = R$ olduğu kolayca gösterilir. Böylece ∂ örtendir.

Tanım 1.4 (θ, φ) çaprazlanmış modül morfizmi olsun. θ ve φ morfizmleri bire-bir ise (θ, φ) ikilisi de bire-birdir. Benzer şekilde θ ve φ morfizmleri örten ise (θ, φ) ikilisi de örtendir.

1.2.3 Funktoriyel Örnekler

1. Herhangi R, k-cebiri alındığında, her zaman çaprazlanmış modül yapısı,

$$F : \mathbf{Ceb} \longrightarrow \mathbf{XMod}$$

funktoru ile elde edilir. Bu funktorun objeleri

$$F(R) = (R, R, Id_R)$$

ve morfizmleri; $f : R \to S$, k-cebir morfizmi olmak üzere

$$F(f) = \left(\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_R"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\ R \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd} \right) = (f, f)$$

dir.

Tersine, (C, R, ∂) çaprazlanmış modül verildiğinde

$$G : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Ceb}$$

funktoru tanımlanabilir. Objeleri,

$$G(C, R, \partial) = R$$

(taban) şeklinde k-cebire gönderilebilir. Buradan morfizmler

$$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$G(\theta, \varphi) = G \left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd} \right) = (\varphi : R \longrightarrow R')$$

şeklinde k-cebir morfizmleri olarak tanımlanır.

Böylece (F, G) ikilisi bir adjoint ikili oluşturur. (Bkz. Shammu, 1992)

Ayrıca diğer

$$G' : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Ceb}$$

funktoru tanımlanabilir. Objeler,

$$G'(C, R, \partial) = C$$

k-cebiridir. Çünkü C, R-cebiri olup

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & R \\ k & \longmapsto & f(k) \end{array} \qquad \text{ve} \qquad \begin{array}{ccc} k \times C & \longrightarrow & C \\ (k, c) & \longmapsto & k \cdot c = f(k)c \in C \end{array}$$

işlemiyle C bir k-cebirdir. Benzer şekilde

$$G'(\theta, \varphi) = G' \left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd} \right) = (\theta : C \longrightarrow C')$$

olup θ, bir k-cebir morfizmidir. Buradan (F,G') ikilisi adjoint ikilidir. Yani, $\mathfrak{X}=(C,R,\partial)\in Ob(\mathbf{XMod})$ ve $A\in Ob(\mathbf{Ceb})$

$$\begin{array}{rrcl}\phi: & \mathbf{Ceb}(G'(C,R,\partial),A) & \longrightarrow & \mathbf{XMod}((C,R,\partial),F(A)) \\ & f & \longmapsto & (f_0\partial,f)\end{array}$$

izomorfizmdir. $\mathfrak{X}$ ve A nın F ve G' doğallığı okuyucuya bırakılmıştır.

2. Önerme 1.2.2. gereğince R-$\mathbf{Id}\mathcal{C}$; R, k-cebirlerinin ideallerinin kategorisi olsun.

$$F:\mathbf{XMod}/R\longrightarrow R\text{-}\mathbf{Id}\mathcal{C}$$

funktoru tanımlanabilir, bu funktorun objeleri

$$F(C,R,\partial)=\partial(C)\trianglelefteq R$$

ve morfizmleri

$$F\left(\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & R & \end{tikzcd}\right)=(\partial(C)\longrightarrow\partial(C'))$$

şeklinde R-cebirlerin ideallerinin morfizmleridir.

Tersine, kısım 1.2.1 Örnek 1. gereğince,

$$G:R\text{-}\mathbf{Id}\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{XMod}/R$$

funktorunun objeleri $I\trianglelefteq R$ için

$$G(I)=(I,R,i)$$

ve morfizmler $I,\ J\trianglelefteq R$ olmak üzere $f:I\hookrightarrow J$ gömme fonksiyonu alınırsa

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & J \arrow[dl, hook', "i_2"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü her $x\in I$ için

$$i_2f(x)\ \ =i_2\big(f(x)\big)=i_2(x)=x=i_1(x)$$

olup $i_2f=i_1$dir. Böylece

$$G\left(\begin{tikzcd} I \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & J \arrow[dl, hook', "i_2"] \\ & R & \end{tikzcd}\right)=\big(f,id_R\big)=f$$

çaprazlanmış modül morfizmidir.

Buradan (F,G) adjoint ikili oluşturur. (Bkz. Shammu, 1992)

3. Örnek 1. ve Önerme 1.3 (ii) gereğince

$$ {}_R\mathbf{Mod} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{XMod}/R $$

funktoru tanımlanabilir.

$M,\ R$-modül ise

$$F(M) = (0 : M \longrightarrow R)$$

ve $f : M \to N,\ R$-modül morfizmi için

$$F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$$

olup

$$F(f) = \left(\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ R & \xrightarrow[id_R]{} & R \end{array} \right) = (f, id_R) = f$$

çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

$\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül morfizmi ise $F(\partial)$=Çek(∂),

$$\begin{array}{rcl} R \times \text{Çek}\partial & \longrightarrow & \text{Çek}\partial \\ (r,a) & \longmapsto & r \cdot a = ra \end{array}$$

işlemiyle Çek∂, R-modüldür. Çünkü $a \in$Çek∂ olduğundan

$$\partial r(a) \quad = r\partial(a) = r \cdot 0 = 0$$

olup $r(a) \in$Çek∂ dır. $(f, id_R) : (C, R, \partial) \to (C', R, \partial')$ çaprazlanmış R-modül morfizmi ise

$$G(f, id_R) = (\text{Çek}\partial \longrightarrow \text{Çek}\partial')$$

R-modül morfizmidir. Bu durumda (F,G) adjoint ikili oluşturur. (Bkz. Shammu, 1992)

4. $(Forgetful\ \ddot{o}rnekleri)$

Objeleri k-cebir morfizmleri ve morfizmleri değişmeli diyagramlar olacak şekilde $\mathbf{Ceb}^2$ kategorisini alalım. Bu durumda

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Ceb}^2$$

forgetful funktoru tanımlanabilir. Şöyleki $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül morfizmi için

$$F(\partial) = \partial$$

olup Peiffer şartını sağlamayan $\partial : C \to R$, k-cebir morfizmidir.

$$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

morfizmi için

$$F(\theta,\varphi) = \left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd} \right)$$

yalnız k-cebir morfizmlerinden oluşan değişmeli diyagram elde edilir.

Benzer şekilde

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Hlk}^2 \\ \mathbf{Mod}^2 \\ \mathbf{AbGrp}^2 \end{array} \right\}$$

forgetful funktorları tanımlanabilir.

5.

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Ceb}$$

funktorunun objeleri

$$F(C, R, \partial) = R/\partial(C)$$

bir k-cebirdir. Çünkü

$$k \longrightarrow R \longrightarrow R/\partial(C)$$

halka homomorfizmi

$$\begin{array}{rcl} k \times R/\partial(C) & \longrightarrow & R/\partial(C) \\ (k, r + \partial(C)) & \longmapsto & k \cdot (r + \partial(C)) = kr + \partial(C) \end{array}$$

işlemiyle $R/\partial(C)$, bir k-modül yapısı oluşturur. Morfizmler,

$$F(\theta,\varphi) = (R/\partial(C) \longrightarrow R'/\partial(C'))$$

indirgenmiş k-cebir homomorfizmleridir. Çünkü

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C \arrow[d, "\partial'"] \\ R' \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "q"'] & C' \arrow[d, "q'"] \\ R/\partial(C) \arrow[r] & R'/\partial(C') \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

1.2.4 Ön-Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

$\mathfrak{X} = (\partial : C \to R)$ ön çaprazlanmış R- modül ve $c,\ c' \in C$ olsun.

$$\partial c \cdot c' - cc'$$

elemanına **Peiffer elemanı** denir. Dolayısıyla ön çaprazlanmış modülde tüm Peiffer elemanları sıfır ise çaprazlanmış modül elde edilir.

Peiffer elemanları, ön-çaprazlanmış R-modülde tanımlanabildiğinde, bu elemanlar tarafından üretilebilen ideal alınıp $C,\ R$-cebirine bölünmesiyle çap-razlanmış R-modül yapısı oluşturulabilir. Bu durumuda aşağıda göstereceğiz.

Peiffer elemanlarının oluşturduğu kümeyi P ile gösterelim. Bu durumda P tarafından üretilen $\langle P \rangle$ kümesi C nin bir idealidir. Yani,

Önerme 1.5 $\langle P \rangle \trianglelefteq C$ dir.

İspat. $x \in C$ ve $a \in \langle P \rangle$ ise

$$xa \ = \ x(\partial c \cdot c' - cc') = x(\partial c)c' - xcc'$$

olup

$$\begin{aligned} \partial(xa) &= \partial(x(\partial c)c' - xcc') \\ &= (\partial c)\partial(xc') - \partial(xcc') && (\because\ \partial \text{ ön-çaprazlanmış modül}) \\ &= (\partial c)\partial(x)\partial(c') - \partial(x)\partial(c)\partial(c') \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. □

Bu durumda herhangi $\partial : C \to R$ ön çaprazlanmış R-modül için

$$C^{cr} = C/\langle P \rangle$$

tanımlanabilir. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} R \times C^{cr} & \longrightarrow & C^{cr} \\ (r, c + \langle P \rangle) & \longmapsto & r \cdot (c + \langle P \rangle) = rc + \langle P \rangle \end{array}$$

işlemiyle birlikte $C^{cr},\ R$-cebirdir.

Önerme 1.6 $\partial : C \to R$ ön çaprazlanmış R-modül ise indirgenmiş

$$\partial^{cr} : C^{cr} \longrightarrow R$$

homomorfizmi, çaprazlanmış R-modüldür.

İspat.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\partial"'] & & R \\ & C/\langle P\rangle \arrow[ur, "\partial^{cr}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \partial(c) \\ & {[c]} \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

$[c] = c + \langle P\rangle$, $[c'] = c' + \langle P\rangle \in C^{cr}$ için

$$\begin{aligned} \partial^{cr}(c+\langle P\rangle)\cdot(c'+P) &= \partial c(c'+\langle P\rangle) && (\because\ \partial^{cr}[c] = \partial(c)) \\ &= \partial c \cdot c' + \langle P\rangle && \\ &\equiv cc' + \langle P\rangle && mod\ P \\ &= (c+\langle P\rangle)(c'+\langle P\rangle) && \end{aligned}$$

Böylece

$$F : \mathbf{PXMod} \longrightarrow \mathbf{XMod}$$

funktoru tanımlanabilir.

Objeleri, $\partial : C \to R$ ön çaprazlanmış R-modül ise $F(\partial) = (\partial^{cr} : C^{cr} \to R)$

Morfizmleri, (θ, φ) ön çaprazlanmış modül morfizmi ise

$$F(\theta,\varphi) = (\theta^{cr}, \varphi)$$

□

1.2.5 Serbest Çaprazlanmış Modüller

Tanım 1.7 $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül, Y bir küme ve $\nu : Y \to C$ bir fonksiyon olsun. ∂ aşağıda vereceğimiz evrensellik özelliğini sağlıyor ise ∂'a $\partial\nu : Y \to R$ üzerinde serbest çaprazlanmış R-modül denir.

Evrensellik özelliği: $\delta : A \to R$ herhangi bir çaprazlanmış R-modül ve $w : Y \to A$ fonksiyon olmak üzere

$$\begin{tikzcd} (Y \to R) \arrow[r, "{(w, id_R)}"] \arrow[d, "{(\nu,\partial)}"'] & (A \to R) \\ (C \to R) \arrow[ur, dotted, "{(\phi, id_R) = \phi}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik (ϕ, id_R) çaprazlanmış R-modül homomorfizmi var ise ∂ bir serbest çaprazlanmış R-modüldür.

Yukarıdaki diyagramı;

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dr, "\partial"] \arrow[dd, dotted, "\phi"] & \\
Y \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "w"'] & & R \\
& A \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

ile özetleyebiliriz.

Teorem 1.8 $f : Y \to R$ fonksiyonu üzerinde (C, R, ∂) serbest çaprazlanmış R-modülü vardır.

İspat. Y kümesinden R, k-cebirine olmak üzere $f : Y \to R$ fonksiyonunu ele alalım. $E = R^+[Y]$, Y kümesi üzerinde oluşturulmuş olan polinom halkasının pozitif olarak bölünmüş kısmı olsun. Ayrıca

$$\theta : R^+[Y] \longrightarrow R$$

$$\theta(y) = f(y)$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & R \\
E \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

dir. P,

$$\{pq - \theta(p)q : p, q \in R^+[Y]\}$$

elemanları tarafından üretilen $R^+[Y]$ nin idealini tanımlayalım. $\theta(P) = 0$ olup

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & R \\
E/P \arrow[ur, dotted, "\partial"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagram değişmeli olacak şekilde

$$\partial : C = E/P \longrightarrow R$$

morfizmi vardır. Şimdi ∂ nın çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

Her $y_1 + P,\ y_2 + P \in C$ için

$$\begin{aligned}
\partial\,(y_1 + P) \cdot (y_2 + P) &= \theta y_1\,(y_2 + P) \\
&= \theta y_1 y_2 + P \\
&\equiv y_1 y_2 + P \\
&= (y_1 + P)\,(y_2 + P)
\end{aligned}$$

$\delta : A \to R$ herhangi çaprazlanmış R-modülü ve $\delta w = f$ olacak şekilde $w : Y \to A$ fonksiyonu verilsin.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "\exists\,\phi"] & R \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "w"'] & A \arrow[r, "\delta"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagram değişmeli olacak şekilde biricik ϕ çaprazlanmış modül morfizmi vardır. □

1.3 Cat^1-Değişmeli Cebir

Cat^1-gruplar kavramı (özgün adı 1-cat gruplar) ilk olarak homotopi n-tipleri için cebirsel bir model olarak Loday tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Ellis (1988) k-cebir kategorisinde cat^1-cebir kavramını tanımlamıştır.

Tanım 1.9 A, bir k-cebir olsun.

$$A \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} A$$

k-cebir homomorfizmleri

$$CA1. \quad ts = s,\ st = t$$
$$CA2. \quad \text{Çek}\,t\,\text{Çek}\,s = \{0_A\}$$

şartlarını sağlayan $\mathfrak{C} = (A, s, t)$ cebirsel sisteme **cat^1-cebir** denir.

Yalnız CA1 şartını sağlıyor ise $\mathfrak{C}$ yi ön-cat^1-cebir olarak adlandıracağız.

Burada $x \in$Çek$s$ ve $y \in$Çek$t$ olmak üzere Çek$s$Çek$t$, xy elemanları tarafından üretilen A nın idealidir.

Önerme 1.10 $\mathfrak{C} = (A, s, t)$ herhangi bir cat^1-cebir olsun. Bu durumda

(i) $s(A) = t(A) = R$ ve $s,\ t;$ R üzerinde birimdir.
(ii) s ve t homomorfizmleri projeksiyondur yani, $t^2 = t$ ve $s^2 = s$ dir.

İspat. (i) $x \in t(A)$ için $x = t(a)$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. $st = t$ olduğundan

$$x = t(a) = st(a) = s(t(a)) \in s(A)$$

olup $x \in s(A)$, $t(A) \subseteq s(A)$ dır. Benzer şekilde, $ts = s$ olduğundan $s(A) \subseteq t(A)$ dır. Böylece $t(A) = s(A) = R$ alınırsa s ve t, R üzerinde birimdir.

(ii) $t^2=tt=t(st)=(ts)t=st=t$ olup $t^2=t$ dir. Benzer şekilde $s^2=s$ dir. $\square$

Bu önermeye göre cat^1-cebir tanımı aşağıdaki tanıma denktir.

Tanım 1.11 A ve R, k-cebirler olsun.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, shift left, "s"] \arrow[r, two heads, shift right, "t"'] & R \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

s ve t örten homomorfizmler ve e gömme homomorfizmi

$$\begin{array}{ll} CA1. & se=id_R=te \\ CA2. & \text{Çek}s\,\text{Çek}t=\{0_A\} \end{array}$$

şartlarını sağlayan $\mathfrak{C}=(e;s,t:A\twoheadrightarrow R)$ cebirsel sisteme **cat^1-cebir** denir.

$\mathfrak{C}=(e;s,t:A\to R)$ ve $\mathfrak{C}'=(e';s',t':A'\to R')$ iki cat^1-cebir olsun. $\gamma:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}'$, cat^1-cebirler homomorfizmi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, two heads, shift right, "t"'] \arrow[d, two heads, shift left, "s"] & A' \arrow[d, two heads, shift right, "t'"'] \arrow[d, two heads, shift left, "s'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, bend left=60, "e"] & R' \arrow[u, bend right=60, "e'"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $t'\phi=\varphi t,\ s'\phi=\varphi s,\ e'\varphi=\phi e$) olacak şekilde $\gamma=(\phi,\varphi)$ ikilisinden oluşmaktadır. Böylece **Cat^1-Ceb**, cat^1-cebirler kategorisini tanımlayabiliriz.

Not: Cat^1-cebir örneklerini vermeden önce **Cat^1-Ceb** ve **XMod** kategorilerinin denkliğini gösterelim. Bu denkliğin ispatı Shammu (1992) ve Porter tarafından intern kategoriler için vermiştir.

İlk olarak aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 1.12 $\mathfrak{C}=(e;t,s:A\to R)$ cat^1-cebir olsun.

$$A\cong \text{Çek}s\ltimes R \quad \text{ve} \quad A\cong \text{Çek}t\ltimes R$$

dir.

İspat.

$$\begin{array}{rcl} \phi:A & \longrightarrow & \text{Çek}s\ltimes R \\ a & \longmapsto & (s(a),a-(es)(a)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}\psi:\text{Çek}s\ltimes R & \longrightarrow & A\\ (x,r) & \longmapsto & x+e(r)\end{array}$$

tanımlayalım. $\psi\phi = id_A$ ve $\phi\psi = id_{\text{Çek}s\ltimes R}$ ve ϕ ile ψ nin homomorfizm olduğu Ek 1A da gösterilmiştir. □

Önerme 1.13 Çaprazlanmış modüller kategorisi ile cat^1-cebirler kategorisi birbirlerine doğal denktir.

İspat. **XMod**, kategorisinde $\mathfrak{X} = (C,R,\partial)$ çaprazlanmış R-modül objesini alalım. Bu durumda,

$$(r,c)(r',c') = (rr', rc' + r'c + cc')$$

işlemiyle

$$R\ltimes C$$

yarı-direkt çarpımı tanımlanabilir. Böylece $A = R\ltimes C$ ve $R = R$ ile

$$\begin{array}{l} t(r,c) = r\\ s(r,c) = r+\partial c\\ e(r) = (r,0)\end{array}$$

alınırsa

$$A \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A$$

cat^1-cebiridir. Yalnız Çek$s$Çek$t = 0$ olduğunu göstereceğiz. $se = id_R = te$ şartı Ek1B de verilmiştir.

$$\begin{array}{l}\text{Çek}s = \{(r,c) \mid s(r,c) = 0 = r\} = \{(0,c) \mid c\in C\}\\ \text{Çek}t = \{(r,c) \mid t(r,c) = 0 = r+\partial c\} = \{(-\partial c, c) \mid c\in C\}\end{array}$$

olmak üzere $p = (0,c) \in$Çek$s$ ve $q = (-\partial c', c') \in$Çek$t$ alırsak

$$\begin{array}{rcll} pq & = & (0,c)(-\partial c', c') & \\ & = & (0, c(-\partial c') + cc') & \\ & & (0, -cc' + cc') & (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül})\\ & = & (0,0) = 0 & \end{array}$$

dir. O halde

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Cat^1\text{-}Ceb}$$

funktoru tanımlanabilir. Yani $F(\mathfrak{X}) = \mathfrak{C}$ dir.

Tersine, $\mathfrak{C} = (e; s,t : A\to R)$, cat^1-cebir olsun. $C =$Çek$s$, $R = s(A) = t(A)$ ve $\partial = t|_{\text{Çek}s}$ alınırsa,

$$\partial : \mathfrak{X} = (C,R,\partial) \longrightarrow R$$

bir çaprazlanmış modüldür. Çünkü,

$$\begin{aligned} \partial(rc) &= t(rc) \\ &= rt(c) && (\because t,\ k\text{-cebir morfizmi}) \\ &= r\partial(c) && (\because \partial = t|_{\text{Çek}s}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial(c)c' &= t(c)c' && (\because c \in \text{Çek}s,\ s(c)=0) \\ &= s(c)c' && (\because R = s(A) = t(A)) \\ &= 0c = 0 \\ &= cc' && (\because \text{Çek}s\text{Çek}t = 0) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$G : \mathbf{Cat}^1\text{-}\mathbf{Ceb} \longrightarrow \mathbf{XMod}$$

funktoru tanımlanabilir. Yani $G(\mathfrak{C}) = \mathfrak{X}$ dir.

Buradan $FG = id_{\mathbf{Cat}^1\text{-}\mathbf{Ceb}}$ ve $GF = id_{\mathbf{XMod}}$ olduğu görülür. □

1.3.1 Ön-Cat^1-Cebirler

$\mathfrak{C}$ sistemi yalnız CA1 şartını sağladığında $\mathfrak{C}$ ye ön-cat^1-cebir dendiğini belirtmiştik. O halde; **Cat**^{1}**-Ceb**, cat^1-cebirler kategorisi, **PCat**^{1}**-Ceb**, ön-cat^1-cebirler kategorisinin dolu alt kategorisidir.

Önerme 1.14 **PCat**^{1}**-Ceb** $\cong$ **Cat**^{1}**-Ceb**, doğal denktirler.

İspat.

$$F : \mathbf{PXMod} \longrightarrow \mathbf{PCat}^1\text{-}\mathbf{Ceb}$$

funktoru

$$F(\partial : C \longrightarrow R) = (R \ltimes C, s, t)$$

dir. s ve t homomorfizmleri önerme 1.4.3 te tanımlandığı gibidir.

$$G : \mathbf{PCat}^1\text{-}\mathbf{Ceb} \longrightarrow \mathbf{PXMod}$$

funktoru

$$G(A, s, t) = (\partial = t : \text{Çek}s \longrightarrow Ims)$$

ile verilir. Burada

$$FG \cong Id_{\mathbf{PCat^1\text{-}Ceb}} \qquad \text{ve} \qquad GF \cong Id_{\mathbf{PXMod}}$$

olduğu kolayca gösterilir. □

Böylece

$$(\ )^{cat} = F : \mathbf{PCat^1\text{-}Ceb} \longrightarrow \mathbf{Cat^1\text{-}Ceb}$$

funktoru $\mathfrak{C} = (e; s, t : A \to R)$ ön-cat^1-cebir olmak üzere

$$F(\mathfrak{C}) = \left(e'; s', t' : A/(\text{Çek}s)(\text{Çek}t) \longrightarrow R\right)$$

bir cat^1-cebirdir.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d] & R \\
D[R]/\text{Ç}ektÇeks \arrow[ur, shift left, "t'"] \arrow[ur, shift right, "s'"'] &
\end{tikzcd}$$

$a \in A$ için $[a] \in A/\text{Çek}t\text{Çek}s$ olup

$$\begin{aligned}
s'([a]) &= s(a) \\
t'([a]) &= t(a)
\end{aligned}$$

dır. $[x] \in$Çeks' ve $[y] \in$Çekt' ise $s'([x]) = s(x) = 0$ ve $t'\left([y]\right) = t(y) = 0$ olup $xy \in$Çek$t$Çek$s$ dir. Buradan $[x]\left[y\right] = [0]$ elde edilir. Böylece Çekt'Çek$s' = \{[0]\}$ dır.

Tersine,

$$G : \mathbf{Cat^1\text{-}Ceb} \longrightarrow \mathbf{PCat^1\text{-}Ceb}$$

forgetful funktoru alınırsa aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.15 Yukarıda tanımlanan F funktoru G nin sol ekidir.

Not: Sol ek funktorlar kolimiti koruduğundan **Cat**^{1}**-Ceb** de kolimitlerin varlığından söz edebiliriz. Fakat burada ispatını vermeyeceğiz.

1.3.2 Cat^1-Cebir Örnekleri

Çaprazlanmış modüller için verdiğimiz örnekleri, çaprazlanmış modüller ve cat^1-cebirlerin denkliğinden yararlanarak cat^1-cebirler içinde verebiliriz.

1. R halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $I \subseteq R$ olduğundan $\partial = i : I \hookrightarrow R$ içine (gömme) homomorfizmini alalım. Bu durumda (I, R, i) üçlüsüne bir çaprazlanmış R-modülüne göre Önerme 1.4.6. gereğince

$$\mathfrak{C} = (e; s, t : I \ltimes R \longrightarrow R)$$

cat^1-cebirdir.

2. R bir halka ve M, bir R-modül olsun. $\partial = 0 : M \to R$ homomorfizmi, bir çaprazlanmış R-modülüne göre.

$$\mathfrak{C} = (e; s, t : M \ltimes R \longrightarrow R)$$

cat^1-cebirdir.

3. C, değişmeli R-cebir ve $Ann(C) = 0$ $\big($veya $C^2 = C\big)$ olsun. $\partial : C \to \mathcal{M}(C)$ çaprazlanmış $\mathcal{M}(C)$ modülüne göre

$$\mathfrak{C} = (e; s, t : C \ltimes \mathcal{M}(C) \longrightarrow \mathcal{M}(C))$$

cat^1-cebirdir.

1.4 Simplisel Cebirler

Tanım 1.16 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, değişmeli k -cebirlerin bir ailesi olsun.

$$\begin{array}{lllll} d_i^n & : E_n \longrightarrow E_{n-1} & ; & 0 \le i \le n \neq 0 \\ s_j^n & : E_n \longrightarrow E_{n+1} & ; & 0 \le j \le n \end{array}$$

homomorfizmler olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} d_i d_j & = & d_{j-1} d_i \ ; \ i < j \\ d_i s_j & = & \begin{cases} s_{j-1} d_i & ; \quad i < j \\ 1 & ; \quad i = j,\ j+1 \\ s_j d_{i-1} & ; \quad i > J+1 \end{cases} \\ s_i s_j & = & s_{j+1} s_i \ ; \ i \le j \end{array}$$

şartları sağlanıyor ise $\mathbf{E} = \big((E_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_j\big)$ üçlüsüne **simplisel cebir** denir. Buradaki d_i ve s_j homomorfizmlerine sırasıyla yüz ve dejenere operatörleri denir. Diyagram olarak;

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} = \cdots \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2] & \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & E_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] \arrow[l, bend left] & E_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=60, "s_1"] & E_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

Örnek 1.1 E bir simplisel cebir olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = E$ ve $d_i = s_j = id$ olmak üzere $\big((E_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_j\big)$ bir simplisel cebirdir. Bu simplisel cebire **sabit simplisel cebir** denir ve k $(E, 0)$ ile gösterilir.

Herhangi bir $x \in E_n$ elemanı n-simpleks olarak adlandırılır. Eğer bazı y ler için $x = s_i(y)$ oluyorsa x-simpleksine dejenere olan eleman adı verilir.

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$$

şeklindeki bir simplisel cebir morfizmi, d_i ve s_j, yüz ve dejenere operatörleri ile değişmeli olan $f_n : E_n \to F_n$ şeklindeki k-cebir homomorfizmlerin bir ailesidir. Yani, her i ve n için

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \quad \text{ve} \quad f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

dir. Böylece simplisel cebirler kategorisi oluşturulur. Simplisel cebirler kategorisi **Simp**(**Ceb**) ile gösterilir.

E herhangi bir simplisel k-modül olsun. Yani, E_n, $n \geq 0$ için

$$\partial_n : E_n \longrightarrow E_{n-1}$$

homomorfizmi

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, d_i^n$$

şeklinde tanımlanırsa k-modüllerin bir zincir kompleksi elde edilir.

Simplisel özdeşliklerin birinci aksiyomuna göre $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ olduğu görülür. Bu kompleks, **E** simplisel modülünden elde edilen bir zincir komplesi olup, $H_n(\mathbf{E})$ şeklinde gösterilen bir n. homoloji modülünden bahsedebiliriz. Bu n. homoloji modülü

$$H_n(\mathbf{E}) = \frac{\text{Çek}\partial_n}{\partial_{n+1}(E_{n+1})}$$

şeklinde tanımlanır.

E bir simplisel cebir ve E sabit k-cebir olsun.

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow E$$

dönüşümüne **E** simplisel cebirinin artırılmışı denir.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} = \cdots \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[l, bend left] & E_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] \arrow[l, bend left] & E_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=60, "s_1"] & E_0 \arrow[r, "f"] \arrow[l, bend left, "s_0"] & E \end{tikzcd}$$

Bu artırılış,

$$f d_0^1 = f d_1^1 : E_1 \longrightarrow E$$

olmak üzere

$$f_0 = d_0^0 : E_0 \longrightarrow E$$

homomorfizmi yardımıyla oluşur.

E artırılımış simplisel cebir olsun. Eğer, $n > 0$ için $H_n(\mathbf{E}) \cong 0$ ve $H_0(\mathbf{E}) \cong \mathbf{E}$ ise bu artırılmış simplisel cebire **devirli simplisel cebir** denir.

1.4.1 Bir Simplisel Cebirin Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü

E bir simplisel cebir olsun.

$$(\mathbf{NE})_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çek\, d_i^n$$

olmak üzere, $d_n^n = \partial_n : \mathbf{NE}_n \to \mathbf{NE}_{n-1}$ homomorfizmlerini tanımlayalım. Bu durumda,

$$\mathbf{NE} : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{NE}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{NE}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{NE}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{NE}_0$$

zinciri bir komplekstir. Gerçektende $x \in \mathbf{NE}_{n+1} = \bigcap\limits_{i=0}^{n} Çek\, d_i^{n+1}$ için

$$\partial_n \partial_{n+1}(x) = d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x)$$

olduğundan simplisel özdeşliklerinden

$$d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x) = d_n^n(0) = 0 \quad (\because x \in \mathbf{NE}_{n+1})$$

olup, $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dir. O halde **NE** bir komplekstir. Bu komplekse **E** simplisel cebirinin Moore kompleksi denir ve $(\mathbf{NE}, \partial)$ veya kısaca **NE** ile gösterilir. Eğer, $n > k$ için $\mathbf{NE}_n = 0$ ise **E** simplisel cebirinin Moore kompleksinin boyutu k dan küçük veya eşittir denir ve $\leq k$ ile gösterilir. Moore kompleksinin boyutu $\leq k$ olan simplisel cebirler kategorisi $\mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}_{\leq k})$ ile gösterilir.

E simplisel cebirinin n. homotopi modülü $\pi_n(\mathbf{E})$, **E** nin Moore kompleksinin n. homolojisine eşittir. Yani

$$\begin{aligned} \pi_n(\mathbf{E}) &\cong H_n(\mathbf{NE}, \partial) \\ &= \frac{\bigcap\limits_{i=0}^{n} Çek\, d_i^n}{d_{n+1}^{n+1}\left(\bigcap\limits_{i=0}^{n} Çek\, d_i^{n+1}\right)} \end{aligned}$$

şeklindedir (Curtis, 1971).

Teorem 1.17 Moore kompleksi 1 olan simplisel cebirler kategorisi, çaprazlanmış modüller kategorisine doğal denktir. (Arvasi ve Porter, 1997)

İspat. $\mathbf{E}_0$, Moore kompleksi 1 olan simplisel cebir olsun.

$$C = \mathbf{NE}_1 \ , \ R = \mathbf{NE}_0 \text{ ve } \ \partial = d_1$$

alalım.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{NE}_1 \times \mathbf{NE}_0 & \longrightarrow & \mathbf{NE}_1 \\ (x,a) & \longmapsto & x \cdot a = x s_0(a) \end{array}$$

tanımlayalım. $\partial_2(\mathbf{NE}_2) =$Çek$d_0$Çek$d_1$ ve Moore kompleksinin boyutu 1 olduğundan Çekd_0Çek$d_1 =$ 0 dır. Böylece bu ideallerin üreteçleri her $x, y \in \mathbf{NE}_1$ için $y\,(s_0 d_1(x) - x)$ şeklindedir.

$$\begin{array}{rcl} CM2. \ \ \partial(x) \cdot y & = & s_0 \partial(x) y \\ & = & s_0 d_1(x) y \\ & = & xy \qquad (\because \ \partial_2(\mathbf{NE}_2) = 0) \end{array}$$

olup $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modüldür.

Tersine, $\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül olsun. R nin C üzerine etkisiyle $C \ltimes R$ yarı-direkt çarpımı tanımlayabiliriz.

$$E_1 = C \ltimes R \ , \ E_0 = R$$

ve

$$\begin{array}{rcl} d_0(c,r) & = & r \\ d_1(c,r) & = & d_1(c) + r \\ s_0(r) & = & (0,r) \end{array}$$

olup

$$(\mathbf{E}_1): \ E_1 \underset{\xleftarrow[s_0]{}}{\overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}}} E_0$$

1-kat simplisel cebiri elde edilir. Buradan n-kat simplisel cebiri;

$$\mathbf{E}_n \cong C \ltimes (C \ltimes (\cdots (C \ltimes R) \cdots)) \quad (n \text{ tane})$$

olup

$$\begin{array}{rcl} d_n(c_n, \cdots, c_1, r) & = & (c_n, \cdots, c_1, r, \partial(c_1) + r) \\ d_i(c_n, \cdots, c_1, r) & = & (c_n, \cdots, c_{i+1} + c_i, \cdots, c_1, r, \partial(c_1) + r) \quad ; (0 < i < n) \\ d_0(c_n, \cdots, c_1, r) & = & (c_{n-1}, \cdots, c_1, r) \\ s_j(c_{n-1}, \cdots, c_1, r) & = & \left(c_{n-1}, \cdots, \underbrace{0,}_{(j+1)\text{inci terim}} \cdots, c_1, r \right) \qquad ; \ (0 \le j \le n-1) \end{array}$$

şeklindedir. Böylece $\mathbf{E}$ simplisel cebiri elde edilir. □

Bir k-cebirin Simplisel Çözülmesinin Adım Adım Oluşturulması

Andre değişmeli cebirlerin homolojisi üzerine olan bir çalışmasında bir cebirin çözülmesinin adım adım oluşturmasını vermiştir. Bu çözülme her bir adımda bir önceki homotopi modülündeki dejenere olmayan elemanları yok etmek için yeni simpleksler eklenerek oluşturulmaktadır. Burada kısaca bir simplisel çözülmenin nasıl oluşturulduğu verilecektir.

E bir simplisel cebir ve B değişmeli bir k -cebir olsun. B nin bir serbest simplisel çözülmesi

$$\mathbf{E}: \cdots E_n \;\substack{\longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow}\; E_{n-1} \cdots E_3 \;\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow}\; E_2 \;\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow}\; E_1 \;\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}\; E_0 \xrightarrow{f} B$$

şeklindeki devirli bir simplisel cebir ve her $n \in \mathbb{N}$ için E_n serbest k -cebirlerinden oluşmaktadır.

E bir simplisel cebir ve $k \geq 1$ olmak üzere $(k-1)$. homotopi modülünün, Moore kompleksin $(k-1)$. homolojisi, yani;

$$\pi_{k-1}(\mathbf{E}) = H_{k-1}(\mathbf{NE}, \partial) = \frac{\mathbf{NE}_{k-1}}{\partial_k \mathbf{NE}_k}$$

olduğunu biliyoruz.

Adım adım yapının özel hali

Bu özel hal Arvasi'nin (1994) doktora tezinden alınmıştır. Genel halde bu tezde verilmiştir.

R, değişmeli bir k-cebir olsun. R de $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanları tarafından üretilen $I = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ üreteçli idealini gözönüne alalım. Bu durumda herbir i için

$$k(R,0)_i = R$$

ve her i, j için $d_i = id = s_j$ olacak şekilde bir $k\,(R,0)$ sabit simplisel cebiri elde edilir. Burada $B, R/I$ bölüm cebiri olmak üzere $f : R \longrightarrow R/I$ örten homomorfizması vardır ve $R/\text{Çek} f \cong B$ dir.

Adım adım oluşturma tekniği gereğince bir önceki homotopi modülü olan Çek$f$ den

$$\Omega^0 = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \text{Çek} f$$

şeklinde bir küme seçilir. Buradan $B = R/I$ bölüm cebirinin simplisel çözülmesinin 1-iskeleti olan $\mathbf{E}^{(1)}$ elde edilecektir. Burada

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_1^{(0)}[X] = R[X_1, X_2, ..., X_n]$$

oluşturmak için $\mathbf{E}_1^{(0)} = R$ ye $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ şeklinde yeni değişkenler eklenir.

$$R[X] \underset{\xleftarrow{s_0}}{\overset{\xrightarrow{d_0}}{\xrightarrow{d_1}}} R$$

şeklindeki yüz ve dejenere operatörleri

$$\begin{array}{rcl} d_1^1(X_i) & = & x_i \in \text{Çek} f \\ d_0^1(X_i) & = & 0 \\ s_0(r) & = & r \in R \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece B simplisel çözülmesinin 1-iskeleti olan $\mathbf{E}^{(1)}$ aşağıdaki gibi olur.

$$\mathbf{E}^{(1)}: \cdots R[s_0X, s_1X] \;\substack{\xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_1} \\ \xleftarrow{s_0}}\; R[X] \;\substack{\xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_0}}\; R \xrightarrow{\quad f \quad} R/I$$

Şimdi B cebirinin simplisel çözülmesinin 2-iskeletinin oluşturulmasını kısaca vereceğiz. Adım adım oluşturma metodundan 1-iskeletinin 1. homotopi modülü olan

$$\pi_1\left(\mathbf{E}^{(1)}\right) = R^+[X]/\text{Çek}d_0^1\text{Çek}d_1^1$$

den

$$\Omega^1 = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$$

şeklinde dejenere olmayan elemanların oluşturduğu bir küme seçilir. Bu elemanları yok etmek için, $\mathbf{E}_2^{(1)}$ ye $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ şeklinde yeni değişkenler eklenerek 1. homotopi modülündeki elemanlar yok edilerek,

$$\mathbf{E}_2^{(2)} = \mathbf{E}_2^{(1)} = R[s_0X, s_1X][Y]$$

oluşturulur. Burada,

$$\begin{array}{rcl} d_0^2(Y_i) & = & 0 \\ d_1^2(Y_i) & = & 0 \\ d_2^2(Y_i) & = & y_i \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece B simplisel çözülmesinin 2-iskeleti olan $\mathbf{E}^{(2)}$ aşağıdaki gibi olur.

$$\mathbf{E}^{(2)}: \cdots \qquad \begin{tikzcd} R[s_0X, s_1X][Y] \arrow[r, shift left=4, "d_0"] \arrow[r, shift left=2, "d_1"] \arrow[r, "d_2"] & R[X] \arrow[l, shift left=2, "s_1"] \arrow[l, shift left=4, "s_0"] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & R \arrow[l, shift left=3, "s_0"] \arrow[r, "f"] & R/I \end{tikzcd}$$

Kısaca simplisel çözülmenin oluşturulmasında izlenen yol

(i) $n < k$ için $\mathbf{F}_n = \mathbf{E}_n$ dir.

(ii) $\mathbf{F}_k$ dejenere olmayan üreteçlerin kümesi üzerinde bir serbest $\mathbf{E}_k$-cebiridir. Yüz dönüşümleri k. hariç tamamı sıfırdır.

(iii) $n > k$ için $\mathbf{F}_n$, dejenere elemanları üzerinde bir serbest $\mathbf{E}_n$-cebirdir.

BÖLÜM 2

GERİ ÇEKME VE İLERİ İTME ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

2.1 Giriş

İndirgenmiş çaprazlanmış modül kavramı, ilk olarak gruplar üzerinde Brown ve Higgins (1978) tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirler versiyonu Porter (1986) tarafından verilmiştir. Ayrıca, değişmeli olmayan cebirler için Shammu (1992) doktora tezinde detaylı olarak incelemiştir.

$\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül ve $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi olmak üzere $\mathbf{Ceb}_k$ kategorisinde

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & C \\ {\scriptstyle \partial^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ S & \xrightarrow[\phi]{} & R \end{array}$$

geri çekme (pullback) diyagramını elde etmiştir. Burada

$$D = \{(c,s) \mid \phi(s) = \partial(c),\ s \in S, c \in C\} \subseteq C \times S$$

olup D üzerinde S etkisi $s \cdot (c, s') = (\phi(s) \cdot c, ss')$ dir. Böylece $\partial^* : D \to S$ homomorfizmi çaprazlanmış S-modüldür ve

$$\phi^* : \mathbf{XMod}/R \longrightarrow \mathbf{XMod}/S$$

funktorunu tanımlamıştır. Bu funktoru da ϕ yardımıyla elde edilmiş ko-indirgenmiş çaprazlanmış funktor olarak adlandırmıştır. Fakat biz geri çekme funktoru diyeceğiz.

Benzer şekilde dual kavramı olan ileri itmeyi elde etmiştir. Burada elde edilen morfizm yardımıyla indirgenmiş çaprazlanmış modül ve ϕ^* funktorunun sol ekinin, yani,

$$\phi_* : \mathbf{XMod}/S \longrightarrow \mathbf{XMod}/R$$

funktorunun varlığını göstermiştir. Bu funktoru ise ileri itme funktoru olarak adlandıracağız.

Burada (ϕ^*, ϕ_*) ikilisinin bir adjoint ikili olduğu ifade edilmiştir. Herhangi bir kategori için bu funktorların varlığı bilinmektedir. Porter (1986) $\mathbf{Ceb}_k$ kategorisine kısıtlayarak değişmeli cebirler üzerinde bir çok uygulama vermiştir. Fakat vermiş olduğu tüm yapılar açık bir şekilde ifade edilmemiştir. Bu bölümde Porter (1986) da verilen tüm sonuçları açık olarak yazacağız. Ayrıca farklı sonuçları elde edip indirgenmiş çaprazlanmış modül yapısı geliş-tirilecektir.

2.2 Bir Morfizm Yardımıyla Kısıtlama

Bu bölümde $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi yardımıyla

$$\phi^* : \mathbf{XMod}/R \longrightarrow \mathbf{XMod}/S$$

funktorunu elde edeceğiz. Özetle;

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "\partial"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}
\quad \overset{\phi^*}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\phi^*(C) \arrow[r, dotted, "\phi'"] \arrow[d, dotted, "\partial^*"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

2.2.1 Geri Çekme (Pullback) Çaprazlanmış Modül

Teorem 2.1 $\partial : C \to R$ çaprazlanmış modül ve $\phi : S \to R$, bir k-değişmeli cebir morfizmi olsun.

$$D = \{(c,s) \mid \phi(s) = \partial(c),\ s \in S, c \in C\} \subseteq C \times S$$

alınırsa,

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "\partial^*"] \arrow[drr, bend left, "\phi'"] \arrow[ddr, bend right, "\partial^*"'] & & \\
 & S \arrow[r] \arrow[d, equal, "id"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\
 & S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir.

İspat. Yalnız ∂^* ın çaprazlanmış S-modül olduğunu göstereceğiz.

S nin D üzerine etkisi

$$s \cdot (c, s') = (\phi(s) \cdot c, ss')$$

tanımlanımlıyalım. Bu durumda bu etki değişmeli cebir etkisidir. (Bakınız Ek 2A),

$$\begin{array}{rccc} \partial^*: & D & \longrightarrow & S \\ & (c,s) & \longmapsto & s \end{array}$$

morfizmi çaprazlanmış S-modüldür (Bakınız Ek 2B). Yalnız Peiffer şartını gösterelim.

$$\begin{array}{lll} CM2. \quad \partial(c,s)\cdot(c',s') & = s\cdot(c',s') & \\ & = \left(\phi(s)\cdot c', ss'\right) & \\ & = (\partial(c)\cdot c', ss') & \left(\because\ \phi(s)=\partial(c)\right) \\ & = (cc', ss') & (\because\ \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = (c,s)(c',s') & \end{array}$$

□

Böylece elde edilen ∂^* çaprazlanmış modülüne, **geri çekme (pullback) çaprazlanmış modül** denir ve $\phi^*(C)=D$ ile gösterilir.

Şimdi geri çekme çaprazlanmış modülün evrensellik özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

Not: Shammu (1992) aşağıdaki ispatı evrensellik morfizmi yardımıyla vermiştir. Fakat biz bu morfizmi kullanmadan farklı bir yol ile ispat edeceğiz.

Teorem 2.2 (**Geri çekme çaprazlanmış modül için evrensellik özelliği**)
$\partial : C \to R$ ve $\mu : B \to S$ çaprazlanmış modüller olsun.

$$\left(f,\phi\right):\left(B,S,\mu\right) \longrightarrow (C,R,\partial)$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & (B,S,\mu) \arrow[d, "(f,\phi)"] \\ (\phi^*(C),S,\partial^*) \arrow[ur, dotted, "(f^*,id_S)"] \arrow[r, "(\phi',\phi)"'] & (C,R,\partial) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $\left(f^*, id_S\right)$, çaprazlanmış S-modül morfizmi vardır.

İspat. Yukarıdaki diyagramı

$$
\begin{tikzcd}
\phi^*(C) \arrow[rr, "\partial^*"] \arrow[dr, "\phi'"] \arrow[dd, "f^*"'] & & S \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, equal, "id_S"] & \\
& C \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dd, equal, "id_C"] & & R \arrow[dd, equal, "id_R"] \\
B \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "f"'] & & S \arrow[dr, "\phi"] & \\
& C \arrow[rr, "\partial"'] & & R
\end{tikzcd}
$$

küp şeklinde veya daha basit olarak,

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "\mu"'] & & C \arrow[dd, "\partial"] \\
& \phi^*(C) \arrow[ul, dotted, "f^*"] \arrow[ur, "\phi'"'] \arrow[dl, "\partial^*"] & \\
S \arrow[rr, "\phi"'] & & R
\end{tikzcd}
$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\mu : B \to S$ herhangi çaprazlanmış S-modül ve (f,ϕ) çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$f^* : \phi^*(C) \longrightarrow B$$

biricik çaprazlanmış S-modül morfizmi vardır, öyleki $\mu f^* = \partial^*$ ve $f f^* = \phi'$ dür.

İlk olarak (f,ϕ) çiftinin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

Yukarıdaki diyagramdan (Yani geri çekme çaprazlanmış modül özelliğinden)

$$\begin{array}{rccc} f: & B & \longrightarrow & C \\ & (c,s) & \longmapsto & c \end{array}$$

dir.

Buradan;

$$\begin{aligned} f(s' \cdot (c,s)) &= f\left(\phi(s') \cdot c, s's\right) \\ &= \phi(s') \cdot c \\ &= \phi(s') \cdot f(c,s) \end{aligned}$$

olup (f,ϕ) çiftinin çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$(\phi',\phi) : (\phi^*(C), S, \partial^*) \longrightarrow (C, R, \partial)$$

herhangi çaprazlanmış modül morfizmi öyleki $\partial\phi' = \phi\partial^*$ olmak üzere biricik

$$\begin{array}{rcl} f^* : \phi^*(C) & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \left(\phi'(x), \partial^*(x)\right) \end{array}$$

morfizmi vardır, çünkü her $x \in \phi^*(C)$ için $\partial\phi'(x) = \phi\partial^*(x)$ dir. Şimdi, $\left(f^*, id_S\right)$, çaprazlanmış S-modül morfizmi olduğunu gösterelim. $x \in \phi^*(C),\ s \in S$ için

$$\begin{array}{rcl} f^*(sx) & = & \left(\phi'(sx), \partial^*(sx)\right) \\ & = & \left(\phi'(s)\phi'(x), s\partial^*(x)\right) \\ & = & s\cdot\left(\phi'(x), \partial^*(x)\right) \\ & = & s\cdot f^*(x) \\ & = & id_S\cdot f^*(x) \end{array}$$

olup $\left(f^*, id_S\right)$, çaprazlanmış S-modül morfizmidir.

Son olarak her $x \in \phi^*(C)$ için,

$$\begin{array}{rcl} \left(\mu f^*\right)(x) & = & \mu\left(f^*(x)\right) \\ & = & \mu\left(\phi'(x), \partial^*(x)\right) \\ & = & \partial^*(x) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \left(ff^*\right)(x) & = & f\left(f^*(x)\right) \\ & = & f\left(\phi'(x), \partial^*(x)\right) \\ & = & \phi'(x) \end{array}$$

olup $\mu f^* = \partial^*$ ve $ff^* = \phi'$ dir. □

Teorem 2.3

$$\phi^* : \mathbf{XMod}/R \longrightarrow \mathbf{XMod}/S$$

geri çekme funktoru vardır.

İspat. $(C, R, \partial) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ için $\phi : S \to R,\ k$-değişmeli cebirlerin homomorfizmi olmak üzere

$$\phi^*(C, R, \partial) = \left(\phi^*(C), S, \partial^*\right)$$

çaprazlanmış S-modül homomorfizmi C nin ϕ morfizmi yardımıyla oluşturulan bir geri çekmesi olduğu yukarıda gösterilip geri çekme çaprazlanmış modül olarak adlandırıldığı belirtildi.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, equal, "id_R"'] & R \end{tikzcd}$$

$(f, id_R) : (C, R, \partial) \to (C', R, \partial')$, çaprazlanmış R-modül morfizmi olsun.

$$\begin{tikzcd} \phi^*(C) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\partial^*"'] & \phi^*(C') \arrow[d, "(\partial^*)'"] \\ S \arrow[r, equal, "id_S"'] & S \end{tikzcd}$$

$\phi^*(f) = f^*,\ \phi^*(id_R) = id_S$, yani

$$\begin{tikzcd} (c, s) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f(c), s) \arrow[d, mapsto] \\ s \arrow[r, mapsto] & s \end{tikzcd}$$

olmak üzere, (f^*, id_S) nin çaprazlanmış S-modül morfizmi olduğu kolayca gösterilir. □

2.2.2 Geri Çekme Çaprazlanmış Modül Örnekleri

1. $I \trianglelefteq R$ olsun. Bu durumda $\partial : I \hookrightarrow R$ içine çaprazlanmış R-modülü vardır. Böylece $\phi : S \to R$, k-cebir homomorfizmi yardımıyla elde edilen geri çekme çaprazlanmış modülü

$$\begin{tikzcd} \phi^*(I) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^*"'] & I \arrow[d, "\partial"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(I, R, \partial) & = & (\phi^*(I), S, \partial^*) \\ & \cong & \left(\phi^{-1}(I), S, \partial^*\right) \end{array}$$

dır. Çünkü,

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(I) & = & \{(i, s) \mid \phi(s) = \partial(i) = i,\ s \in S,\ i \in I\} \\ & \cong & \{s \in S \mid \phi(s) = i \in I\} \\ & = & \phi^{-1}(I) \trianglelefteq S \end{array}$$

Özel olarak $I = \{0\}$ alınırsa

$$\begin{tikzcd} \phi^*(\{0\}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^*"'] & \{0\} \arrow[d, "\partial"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir ancak ve ancak

$$\phi^*(\{0\}) \cong \{s \in S \mid \phi(s) = 0\} = \text{Çek}\phi$$

dir. Böylece çekirdek geri çekmenin özel bir halidir.

2. Halkaların değişimi: Her $M,\ R$-modülü, $\phi : S \to R$, halka homomorfizmi yardımıyla bir S-modül yapısı oluşturur. Şöyleki,

$$\begin{array}{ccc} S \times M & \longrightarrow & M \\ (s,m) & \longmapsto & s \cdot m = \phi(s)m \end{array}$$

işlemiyle M bir S-modüldür. Ayrıca $f : M \to N,\ R$-modül homomorfizmi ise,

$$\begin{aligned} f(sm) &= f\left(\phi(s)m\right) \\ &= \phi(s)f(m) \\ &= sf(m) \end{aligned}$$

olup f, bir S-modül homomorfizmidir. Buradan,

$$F :_R \mathbf{Mod} \longrightarrow_S \mathbf{Mod}$$

funktoru tanımlanır.

Bu durumu çaprazlanmış modül yapısına genişletelim.

Her $M,\ R$-modülü,

$$\begin{array}{rccc} 0 : & M & \longrightarrow & R \\ & m & \longmapsto & 0 \end{array}$$

sıfır homomorfizmi yardımıyla $(M,R,0)$ çaprazlanmış R-modül yapısı oluşturur. Buradan,

$$\begin{tikzcd} \phi^*(M) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^*"'] & M \arrow[d, "\partial=0"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\phi^*(M,R,0) = \left(\phi^*(M), S, \partial^*\right)$$

olup,

$$\begin{aligned} \phi^*(M) &= \left\{(m,s) \in M \times S \mid \phi(s) = \partial(m) = 0\right\} \\ &= \left\{(m,s) \mid \phi(s) = 0,\ s \in S\right\} \\ &= M \times \text{Çek}\phi \end{aligned}$$

dir. Böylece ϕ bire bir $\left(\text{Çek}\phi = 0\right)$ ise $F(M) = \phi^*(M)$ dir. Özel olarak $M = \{0\}$ alınırsa yine $\phi^*(M) \cong \text{Çek}\phi$ olur.

3. $\phi : S \to R,\ k$-cebir homomorfizmi yardımıyla

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & R \arrow[d, "\partial"] \\ M(S) \arrow[r, "M(\phi)"'] & M(R) \end{tikzcd}$$

indirgeme yoluyla elde edilen

$$\mathbf{XMod}/M(R) \xrightarrow{\phi^*} \mathbf{XMod}/M(S)$$

geri çekme çarpım funktorudur.

$M(R)$, R nin çarpım cebiri olmak üzere, $\partial : R \rightarrow M(R)$ çaprazlanmış modülünde (Arvasi ve Ege, 2003), $M(\phi) : M(S) \rightarrow M(R)$ yardımıyla

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(R) \arrow[drr] \arrow[dd, bend right, "\partial^*"'] & & \\
 & S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & R \arrow[d, "\partial"] \\
 & M(S) \arrow[r, "M(\phi)"'] & M(R)
\end{tikzcd}$$

geri çekmesi elde edilir.

$$\phi^*(R) = \{(\gamma, r) : \phi(\gamma) = \partial(r),\ \gamma \in M(S),\ r \in R\} \subseteq M(S) \times R$$

$$\begin{array}{cccc} \partial^* : & \phi^*(R) & \longrightarrow & M(S) \\ & (\gamma_s, r) & \longmapsto & \gamma_s \end{array}$$

2.3 Bir Morfizm Yardımıyla Genişleme

Bu bölümde, elde ettiğimiz $\phi^* : \mathbf{XMod}/R \longrightarrow \mathbf{XMod}/S$ funktorunun sol eki olan

$$\phi_* : \mathbf{XMod}/S \longrightarrow \mathbf{XMod}/R$$

funktorunu oluşturacağız. Özetle;

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "\partial"'] & & D \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\partial"'] & C = \phi_*(D) \arrow[d, dotted, "\partial_*"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R \arrow[r, phantom, "\overset{\phi_*}{\rightsquigarrow}"] & S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

diyagramı ileri itme (pushout) yardımıyla oluşturulacaktır.

2.3.1 İndirgenmiş Çaprazlanmış Modüller

$\partial : D \to S$ çaprazlanmış S-modül ve $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi olsun. ϕ yardımıyla ∂ dan elde edilen

$$\phi_*(D,S,\partial) = \big(\phi_*(D), R, \partial_*\big)$$

çaprazlanmış S-modülü,

$$\begin{tikzcd}
(0,S) \arrow[r, "{(0,\phi)}"] \arrow[d] & (0,R) \arrow[d] \\
(D,S) \arrow[r, "{(\phi',\phi)}"'] & (\phi_*(D),R)
\end{tikzcd}$$

daha açık olarak

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & 0 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dd, equal, "id_S"] & & R \arrow[dd, equal, "id_R"] \\
D \arrow[rr, "\phi'"] \arrow[dr, "\partial"'] & & \phi_*(D) \arrow[dr, "\partial_*"] & \\
& S \arrow[rr, "\phi"'] & & R
\end{tikzcd}$$

çaprazlanmış modüllerin ileri itmesi yardımıyla tanımlanır.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & \phi_*(D) \arrow[d, "\partial_*"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

ileri itmesini oluşturacağız. Buradan elde edilen

$$\partial_* : \phi_*(D) \longrightarrow R$$

çaprazlanmış R-modülüne **indirgenmiş çaprazlanmış modül** denir.

Şimdi, $\phi_*(D)$ nin neye benzediğini gösterelim.

$$F(D \times R)$$

kümesi, $D \times R$ üzerinde serbest cebir olsun. Ayrıca P,

1. $U_1 = \{(d_1, r) + (d_2, r) - (d_1 + d_2, r) \mid d_1, d_2 \in D, r \in R\}$

2. $U_2 = \{(s \cdot d, r) - (d, \phi(s)r) \mid d \in D, r \in R, s \in S\}$

3. $U_3 = \{(d_1, r_1)(d_2, r_2) - (d_2, r_1(\phi\partial d_1)r_2) \mid d_1, d_2 \in D, r_1, r_2 \in R\}$

olmak üzere $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ kümesi tarafından üretilen, $F(D \times R)$ nin ideali olduğu kolayca gösterilir. Böylece

$$\phi_*(D) = F(D \times R)/P$$

tanımlanırsa,

$$\phi_*(D) = D \otimes_S R$$

kümesi, $d \in D,\ r,\ r' \in R$ için,

$$r'(d \otimes r) = d \otimes r'r$$

işlemiyle bir R-cebirdir.

Bu durumda aşağıdaki önermeyi Porter (1987) vermiştir.

Önerme 2.4 $\partial : D \to S$, çaprazlanmış S-modül ve $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} \partial_* : \phi_*(D) = D \otimes_S R & \longrightarrow & R \\ (d \otimes r) & \longmapsto & \phi(\partial d)r \end{array}$$

morfizmi bir çaprazlanmış R-modüldür (Porter, 1986).

İspat. $CM1$.

$$\begin{aligned} \partial_*(r \cdot (d \otimes r_1)) &= \partial_*(d \otimes rr_1) \\ &= rr_1\phi\partial d \\ &= r_1 r\phi\partial d \\ &= r_1\partial_*(d \otimes r) \end{aligned}$$

$CM2.$

$$
\begin{aligned}
\partial_*(d\otimes r)\cdot(d_1\otimes r_1) &= r(\phi\partial d)\cdot(d_1\otimes r_1)\\
&= \phi\partial d r(d_1\otimes r_1)\\
&= (d_1\otimes \phi\partial d r r_1)\\
&= (\partial d\cdot d_1\otimes r r_1)\\
&= (d d_1\otimes r r_1)\\
&= (d\otimes r)(d_1\otimes r_1)
\end{aligned}
$$

olup ∂_* bir çaprazlanmış R-modüldür. □

Şimdi indirgenmiş çaprazlanmış modüller için evrensellik özelliğini verelim.

Teorem 2.5 $\big($**İndirgenmiş çaprazlanmış modül için evrensellik özelliği**$\big)$
$\partial : D\to S$, $\eta : B\to R$ çaprazlanmış modüller ve R birimli olsun.

$$\left(f,\phi\right):(D,S,\partial)\longrightarrow\left(B,R,\eta\right)$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$
\begin{tikzcd}
(D,S,\partial) \arrow[d, "{(f,\phi)}"'] \arrow[drr, "{(\phi',\phi)}"] & & \\
(B,R,\eta) & & (\phi_*(D),R,\partial_*) \arrow[ll, dotted, "{(f_*,id_R)}"]
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $\left(f_*, id_R\right)$, çaprazlanmış R-modül morfizmi vardır.

İspat. Yukarıdaki diyagramı

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr, "\phi'"] \arrow[dd, "f"'] & & S \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "\phi"] & \\
& \phi_*(D) \arrow[rr, "\partial^*"] \arrow[dd, "f^*"] & & R \arrow[dd, equal, "id_R"] \\
B \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, equal, "id_B"'] & & R \arrow[dr, equal, "id_R"] & \\
& B \arrow[rr, "\eta"'] & & R
\end{tikzcd}
$$

küp şeklinde veya daha basit olarak

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "\partial"'] \arrow[dr, "\phi'"'] & & B \arrow[dd, "\eta"] \\
& \phi_*(D) \arrow[ur, dotted, "f_*"] \arrow[dr, "\partial_*"'] & \\
S \arrow[rr, "\phi"'] & & R
\end{tikzcd}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\eta : B \to R$ herhangi çaprazlanmış R-modül ve $\left(f,\phi\right)$ çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$f_* : \phi_*(D) \longrightarrow B$$

biricik çaprazlanmış R-modül morfizmi vardır, öyleki $\eta f_* = \partial_*$ ve $f_*\phi' = f$ dir.

İlk olarak $\left(f,\phi\right)$ çiftinin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

Yukarıdaki diyagramdan (Yani ileri itme çaprazlanmış modül özelliğinden)

$$\begin{array}{rcccl} f & : & D & \longrightarrow & B \\ & & d & \longmapsto & (d \otimes r) \end{array}$$

dir.

Buradan;

$$\begin{array}{rcl} f(sd) & = & f(sd) \\ & = & (sd \otimes r) \\ & = & (d, \phi(s) r) \\ & = & \phi(s) f(d) \end{array}$$

$F(D \times R)/P$ bir R cebirdir.

Şimdi R birimli olduğundan

$$\begin{array}{rcccl} \phi' & : & D & \rightarrow & \phi_*(D) \\ & & d & \mapsto & (d \otimes 1) \end{array}$$

tanımlayabiliriz. $d \in D$ ve $s \in S$ için

$$\begin{array}{rcl} \phi'(sd) & = & (sd \otimes 1) \\ & = & (d \otimes \phi(s)) \\ & = & \phi'(d)\phi(s) \end{array}$$

Böylece $(\phi', \phi) : (D, S, \partial) \to (\phi_*(D), R, \partial_*)$ çaprazlanmış modül morfizmidir. Buradan,

$$\partial_* \phi' = \phi \partial$$

dır. ϕ yi örten ϕ' universal morfizmin varlığını gösterelim. Kabul edelimki $(f,\phi):(D,S,\partial)\rightarrow$ $(\phi_*(D'),R,\partial'_*)$ herhangi çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda

(f,ϕ) çiftinin çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$\left(\phi',\phi\right):(D,S,\partial)\longrightarrow\left(\phi_*(D),R,\partial_*\right)$$

herhangi çaprazlanmış modül morfizmi öyleki $\partial_*\phi'=\phi\partial$ olmak üzere biricik

$$\begin{array}{llll} f_*: & \phi^*(D) & \longrightarrow & B \\ & r\otimes d & \longmapsto & rf(d) \end{array}$$

morfizmi vardır, çünkü her $x\in\phi_*(D)$ için $\partial\phi'(x)=\phi\partial^*(x)$ dir. Şimdi, $\left(f_*,id_R\right)$, çaprazlanmış R-modül morfizmi olduğunu gösterelim. $x\in\phi_*(D)$, $r\in R$ için

$$\begin{aligned} f_*(r(d_1\otimes r_1)) &= f_*(d_1\otimes rr_1) \\ &= rr_1f(d_1) \\ &= rf_*(d_1\otimes r_1) \\ &= id_Rf_*(d_1\otimes r_1) \end{aligned}$$

olup $\left(f_*,id_R\right)$, çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

Son olarak her $(d\otimes r)+P\in\phi_*(D)$ için,

$$\begin{aligned} \left(\eta f^*\right)((d\otimes r)) &= \eta\left(f^*(d\otimes r)\right) \\ &= \eta\left(rf(d)\right) \\ &= \partial_*((d\otimes r)) \end{aligned}$$

olup $\eta f^*=\partial_*$ dir ve

$$\begin{aligned} \left(f_*\phi'\right)(d) &= f_*\left(\phi'(d)\right) \\ &= f_*((d\otimes 1)) \\ &= f(d) \end{aligned}$$

olup $f_*\phi'=f$ dir. □

Teorem 2.6

$$\phi_*:\mathbf{XMod}/S\longrightarrow\mathbf{XMod}/R$$

ileri itme funktoru vardır.

İspat. $(D,S,\partial)\in Ob(\mathbf{XMod}/S)$ için $\phi:S\rightarrow R$, k-değişmeli cebirlerin homomorfizmi olmak üzere

$$\phi_*(D,S,\partial)=\left(\phi_*(D),R,\partial_*\right)$$

çaprazlanmış R-modül homomorfizmi D nin ϕ morfizmi yardımıyla oluşturulan bir ileri itmesi olduğu yukarıda gösterilip indirgenmiş çaprazlanmış modül olarak adlandırıldı.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d] & D'' \arrow[d] \\ S \arrow[r, equal] & S \end{tikzcd}$$

$(D,S,\partial) \to (D',S,\partial')$, çaprazlanmış S-modül morfizmi olsun.

$$f_* : \phi_*(D) \to \phi_*\left(D'\right)$$

$f_*(d\otimes r) = r\phi'(d)$ olup

$$\phi' = f_*\phi \qquad \text{ve} \qquad \partial_*' = f_*\partial_*$$

dir.

$t = (d\otimes r)+P,\ t' = (d'\otimes r')+P \in F(D\times R)/P$ olsun.

$$\begin{aligned}
f_*(tt') &= f_*(((d\otimes r)+P)((d'\otimes r')+P)) \\
&= f_*(dd'\otimes rr')+P \\
&= rr'f(dd') \\
&= rr'f(d)\theta'(d') \\
&= rf(d)r'f(d') \\
&= f_*((d\otimes r)+P)f_*((d'\otimes r')+P) \\
&= f_*(t)f_*(t')
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\phi_*(D) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial_*"'] & \phi_*(D') \arrow[d, "(\partial_*)'"] \\
R \arrow[r, equal, "id_R"'] & R
\end{tikzcd}$$

yani

$$\begin{tikzcd}
(d\otimes r)+P \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & rf(d) \arrow[d, mapsto] \\
r\phi\partial d \arrow[r, mapsto] & r\phi\partial d
\end{tikzcd}$$

olmak üzere, $\left(f_*, id_R\right)$, çaprazlanmış R-modül morfizmidir. $\square$

2.3.2 İndirgenmiş Çaprazlanmış Modül Örnekleri

1. $D = S$ ve $\partial = id_S : S \to S$ birim çaprazlanmış S-modülünü alalım. Böylece $\phi : S \to R$, homomorfizmi yardımıyla elde edilen indirgenmiş çaprazlanmış R-modül ileri itme diyagramı

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial = id"'] & \phi_*(S) = S\otimes R \arrow[d, "\partial_*"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

şeklindedir.

Not: S birimli değildir. Aksi halde $S \otimes_S R \cong R$ dir.

Özel olarak, $S = K^+[X]$, X üreteci üzerinde pozitif (yani sabit terim yok) polinomal k-cebir ise

$$\partial_* : K^+[X] \otimes_{K^+[X]} R \longrightarrow R$$

çaprazlanmış R-modülü, $f : X \to R$ fonksiyonu üzerinde, serbest çaprazlanmış R-modüldür. Böylece indirgenmiş çaprazlanmış modül yapısı serbest çaprazlanmış modülünün alternatif yapısı olarak karşımıza çıktığını gösterir. Bu durumu daha açık olarak gösterelim.

Bölüm 1 de verilen Teorem 1.3.2 den $\delta : A \to R$ herhangi bir çaprazlanmış R-modül olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[ddl, "\delta"] \\
X \arrow[r] \arrow[d, equal, "id"'] & K^+[X] \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[urr, bend left] & \phi_*(K^+[X]) \arrow[d, "\partial_*"] \arrow[ur, dotted] & \\
X \arrow[r, "i"'] & K^+[X] \arrow[r, "\phi"'] & R &
\end{tikzcd}$$

Ayrıca $\phi_*(K^+[X]) = K^+[X] \otimes R$ ve $p \in K^+[X]$ için $\partial\left(p\right) = p$ olup

$$\begin{array}{rccc} \partial_* : & K^+[X] \otimes_{K^+[X]} R & \longrightarrow & R \\ & p \otimes r & \longmapsto & \phi\left(p\right) r \end{array}$$

olup üreteç kümesinin elemanları Peiffer elemanlarıdır. Yani,

$$P = \left\{pq - \phi\left(p\right) p \mid p, q \in K^+[X]\right\}$$

olup serbest çaprazlanmış R-modül diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & \phi_*(K^+[X]) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
X \arrow[ur] \arrow[dr, "f=\phi i"'] & & A \arrow[dl, "\delta"] \\
 & R &
\end{tikzcd}$$

şeklindedir. Böylece

$$\partial_* : K^+[X] \otimes_{K^+[X]} R \longrightarrow R$$

homomorfizmi $f : \phi\, i : X \to R$ üzerinde bir serbest çaprazlanmış R-modüldür.

2. D, S-modül ve $0 = \partial : D \to S$ sıfır morfizmi olsun. İleri itme diyagramı

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial=0"'] & \phi_*(D) \arrow[d, "\partial_*"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} \partial_*(d \otimes r) &= \phi\,(\partial\,(d))\,r \\ &= \phi\,(0)\,r \\ &= 0r = 0 \\ &\Longrightarrow \partial_* = 0 \end{aligned}$$

$P = 0$ olup

$$\phi_*(D) = F(D \times R)$$

dir. Bu durumda indirgenmiş çaprazlanmış modül, $D \times R$ üzerinde serbest S-modüldür.

3. $\partial : I \hookrightarrow S$ içine çaprazlanmış S-modülü ve $\phi : S \to S/I$, örten homomorfizmi yardımıyla elde edilen indirgenmiş çaprazlanmış modülü

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial"'] & \phi_*(I) \arrow[d, "\partial_*"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & S/I \end{tikzcd} \qquad = (S/I) \otimes I \cong I/I^2$$

$$\begin{aligned} \phi^*(I, R, \partial) &= \left(\phi^*(I), S, \partial^*\right) \\ &\cong \left(\phi^{-1}(I), S, \partial^*\right) \end{aligned}$$

dır.

4. $M(S)$, S nin çarpım cebiri olmak üzere, $\partial : S \to M(S)$ çaprazlanmış modülünde, $M(\phi) : M(S) \to M(R)$ yardımıyla

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & \phi_*(R) \arrow[d, "\partial_*"] \\ M(S) \arrow[r, "\phi"'] & M(R) \end{tikzcd}$$

ile $\left(\phi_*(S), M(R), \partial_*\right)$ çaprazlanmış $M(R)$-modüldür.

2.3.3 İndirgenmiş Çaprazlanmış Modül ve Koszul Kompleks

R birimli k-cebir ve $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $f : X \to R$ herhangi fonksiyonu verilsin. Ayrıca $\partial : C \to R$ serbest çaprazlanmış modül olsun. Serbest çaprazlanmış modül inşasından

$$C = R^+ [X] / P$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$P = \langle \{pq - \theta (p) q \mid p, q \in R^+ [X]\} \rangle$$

Peiffer idealleridir. Ayrıca P yi

$$\{x_i x_j - f(x_i) x_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

elemanları tarafından üretilen idealler olarakta yazabiliriz. Böylece C nin her elemanı

$$c = \sum_{i \in \Lambda} r_i x_i + P$$

lineer formunda ifade edebiliriz. Ayrıca,

$$\begin{array}{rcl} \partial(c) & = & \partial\left(\sum r_i x_i + P\right) \\ & = & \sum \partial(r_i x_i) + \partial(P) \\ & = & \sum r_i \partial(x_i) + 0 \\ & = & \sum r_i f(x_i) \end{array}$$

$\partial(x_i) = f(x_i)$ olduğundan $\partial(P)$ deki üreteç elemanı

$$\begin{array}{rcl} \partial\left(x_i x_j - f(x_i) x_j\right) & = & \partial(x_i)\partial\left(x_j\right) - f(x_i)\partial\left(x_j\right) \\ & = & f(x_i) f\left(x_j\right) - f(x_i) f\left(x_j\right) \\ & = & 0 \end{array}$$

dir. Bölüm cebirinde elemanların biricik ifade edilmesinden (Porter 1985) $R^n = R \times R \times ... \times R$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & R^n & \longrightarrow & C \\ & & e_i & \longmapsto & x_i + P \end{array}$$

epimorfizmi tanımlanır. Burada

$$e_i = \Big(0, ..., \underset{i \text{ inci terim}}{1}, 0, ..., 0\Big)$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n\}$ kümesi R^n nin bir tabanıdır.

ϕ nin çekirdeğinin

$$d : \Lambda^2 R^n = R^n \wedge R^n \longrightarrow R^n$$

Koszul diferansiyelinin görüntüsü olduğu kolayca gösterilir. Yani;

$$\text{Çek}\phi = d\left(\Lambda^2 R^n\right)$$

dir. Böylece

$$R^n / d\left(\Lambda^2 R^n\right) \cong C$$

elde edilir. Bu sonuç Porter (1985) tarafından ispat edilmiştir. Buradan indirgenmiş çaprazlanmış modül $S = K^+[X]$ halinde serbest çaprazlanmış modül olduğundan

$$K^+[X] \otimes_{K^+[X]} R \cong R^n / d\left(\Lambda^2 R^n\right)$$

dir. Bu durum yine Porter (1985) tarafından belirtilmiştir.

2.3.4 İndirgenmiş Çaprazlanmış Modül Özellikleri

$\phi : S \to R,\ k$-cebir morfizmi, örten veya bire-bir olduğunda $\phi_*(D)$ indirgenmiş çaprazlanmış S-modülünün daha basit ifade edilebildiğini gösterelim.

Aşağıdaki önerme Shammu (1992) tarafından verilmiştir. Biz ispatı daha açık bir biçimde yazacağız.

Önerme 2.7 $\partial : D \to S$ çaprazlanmış S-modülü ve $\phi : S \to R$, örten k-cebir morfizmi olsun. $K =$Çekϕ ve $d \in D$ ve $k \in K$ için $DK,\ D$ nin dk elemanları tarafından üretilen bir ideali ise

$$\phi_*(D) \cong D/DK$$

dır.

İspat. D/DK üzerinde $R \cong S/K$ etkisi vardır. Çünkü D/DK üzerinde S ve K etkisi vardır. Gerçektende,

$$\begin{array}{rcl} S \times D/DK & \longrightarrow & D/DK \\ (s, d + DK) & \longmapsto & s \cdot (d + DK) = sd + DK \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} K \times D/DK & \longrightarrow & D/DK \\ (k, d + DK) & \longmapsto & k \cdot (d + DK) = kd + DK \end{array}$$

olduğundan

$$\begin{array}{ccc} S\times D/DK & \longrightarrow & D/DK \\ \downarrow & & \| \\ S/K\times D/DK & \longrightarrow & D/DK \\ (s,d+DK) & \longmapsto & sd+DK \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s+K,d+DK) & \longmapsto & sd+DK \end{array}$$

olup S/K, D/DK üzerinde etki eder. Ayrıca $\phi: S\to R$ örten olduğundan $R\cong S/K$ olup R, D/DK üzerine etki eder.

$\beta: D/DK\to R$ çaprazlanmış R-modül morfizmidir. Gerçektende, $s+K$ ve $d+DK$ için;

$$\begin{array}{rrcl} CM1. & \beta((s+K)\cdot(d+DK)) & = & \beta(s\cdot d+DK) \\ & & = & \partial(s\cdot d+K) \\ & & = & s\cdot\partial d+K \\ & & = & (s+K)\cdot\beta(d+DK) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} CM2. & \beta(d+DK)\cdot(d'+DK) & = & (\partial d+K)\cdot(d'+DK) \\ & & = & \partial(d)\cdot d'+DK \\ & & = & dd'+DK \\ & & = & (d+DK)(d'+DK) \end{array}$$

olup β çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

$$\begin{array}{cccccc} \rho & : & D & \longrightarrow & D/K \\ & & d & \longmapsto & d+DK \end{array}$$

bir cebir morfizmidir.

$$\rho(sd)=\phi(s)\rho(d)$$

dir. Böylce

$$(\rho,\phi):(D,S,\partial)\longrightarrow(D/DK,R,\beta)$$

çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

ρ universal morfizmdir.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\rho'} & (D/DK)' \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta'} \\ S & \xrightarrow[\phi]{} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \rho'(sd) & = & \phi(s)\rho'(d) \\ & = & 0 \\ & = & \rho'(ds) \end{array}$$

tir. Böylece $\rho'(DK)=0$ ve $\mu:(D/DK)\rightarrow(D/DK)'$ morfizmi vardır. Öyleki,

$$\begin{array}{rcrcl} \mu & : & (D/DK) & \longrightarrow & (D/DK)' \\ & & d+DK & \longmapsto & \rho'(d) \end{array}$$

olup μ iyi tanımlıdır.

$$d+DK=d'+DK \Rightarrow d-d'\in DK$$

böylece $\rho'(d-d')=0$ olur. Dolayısıyla

$$\mu(d+DK)=\mu\left(d'+DK\right)$$

dır. Ayrıca μ, $\mu\rho=\rho'$ olacak şekilde biricik morfizmdir. Kabul edelimki $\mu':(D/DK)\rightarrow(D/DK)'$ morfizmi var olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \left(\mu-\mu'\right)\rho(d) \\ 0 & = & \left(\mu-\mu'\right)\beta(d) \end{array}$$

olup $\mu-\mu'=0$ dır.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\partial"'] & D/DK \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & (D/DK)' \arrow[dl, "\beta'"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} \beta(d+DK) & = & \phi\partial d \\ & = & \partial d+K \\ & = & \beta'\rho'(d) \\ & = & \beta'\mu(d+DK) \end{array}$$

diyagram değişmelidir. □

Teorem 2.8 $\phi_*:\mathbf{XMod}/S\rightarrow\mathbf{XMod}/R$ funktoru $\phi^*:\mathbf{XMod}/R\rightarrow\mathbf{XMod}/S$ funktorunun sol ekidir.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{XMod}/S \arrow[d, shift left, "\phi_*"] \\ \mathbf{XMod}/R \arrow[u, shift left, "\phi^*"] \end{tikzcd}$$

İspat. $(D,\ S,\ \partial)$ bir çaprazlanmış modül olsun. Değişmeli cebirlerinin

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "\mu"] \arrow[drr, bend left, "\partial"] \arrow[ddr, bend right, "\phi'"'] & & \\
& \phi^*\phi_*(D) \arrow[r, "(\partial_*)^*"] \arrow[d, "p"] & S \arrow[d, "\phi"] \\
& \phi_*(D) \arrow[r, "\partial_*"'] & R
\end{tikzcd}$$

diyagramı çaprazlanmış S-modüllerin

$$(\mu, id_S) : (D,S,\partial) \longrightarrow (\phi^*\phi_*(D), S, (\partial_*)^*)$$

morfizmini belirler.

Bu morfizim (D,S,∂) dan oluşturulan ϕ^* evrenselliğinden (Teorem 2.2) vardır. **XMod**$/S$ de verilen

$$(f^*, id_S) : (D,S,\partial) \longrightarrow \phi^*(B,R,\eta) = (\phi^*(B), S, \eta^*)$$

morfizmi için

$$(\mu, p) : (D,S,\partial) \longrightarrow (\phi^*(B), S, \eta^*) \qquad \text{ve} \qquad (p,\phi) : (\phi^*(B), S, \eta^*) \longrightarrow (B,R,\eta)$$

morfizimlerinin bileşkesini gözönüne aldığımızda Teorem 2.5 gereğince **XMod**$/R$ de

$$\begin{tikzcd}
(D,S,\partial) \arrow[r, "(\phi',\phi)"] \arrow[d, "(f,\phi)"'] & (\phi_*(D), R, \partial_*) \arrow[dl, "(f_*, id_R)"] \\
(B,R,\eta) &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli olacak şekilde biricik

$$(f_*, id_R) : (\phi_*(D), R, \partial_*) \longrightarrow (B,R,\eta)$$

morfizmi vardır.

μ ve ϕ^* ın oluşturulmasında

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rrd, "\mu"] \arrow[rrrrd, "\partial"] \arrow[rdd, "\phi'"'] \arrow[rrddd, "f^*"] & & & & \\
& & \phi^*\phi_*(D) \arrow[rr, "(\partial_*)^*"'] \arrow[ld, "p"] \arrow[dd, "f_*"', "\phi^*"] & & S \arrow[ld, "\phi"] \arrow[dd, equal] \\
& \phi^*(D) \arrow[rr] \arrow[dd, "f_*"'] & & R \arrow[dd, equal] & \\
& & \phi^*(B) \arrow[rr, "\eta^*"] \arrow[ld, "p"] & & S \arrow[ld, "\phi"] \\
& B \arrow[rr, "\eta"'] & & R &
\end{tikzcd}$$

diagramı gereğince

$$\begin{tikzcd}
(D,S,\partial) \arrow[r, "(\mu,id_S)"] \arrow[d, equal] & (\phi^*\phi_*(D),S,(\partial_*)^*) \arrow[d, "\phi^*(f_*,id_S)"] \\
(D,S,\partial) \arrow[r, "(\tau,id_S)"'] & (\phi^*(B),S,\eta^*)
\end{tikzcd}$$

dir. Böylece ϕ_*, ϕ^* nün sol ekidir. $\square$

Not: Bu özellik kullanılarak, **XMod** kategorisinde ko-limitlerin varlığı ispat edilebilir. Çünkü sol ek funktorlar ko-limiti korur (MacLane, 1971). Ayrıca Shammu (1992) farklı bir yolla ko-limitin varlığını göstermiştir.

Şimdi $\partial : D \to S$ çaprazlanmış S-modülü ve $\phi : S \to R$, bire-bir k-cebir morfizmi olması durumunda indirgenmiş çaprazlanmış modülün ne şekilde ifade edildiğini gösterelim.

D, S-cebir ve $\partial : D \to S$, S-cebir homomorfizmi olduğunda D bir agumented dir. Çek∂ idealine ise D nin **agumentasyon ideali** denir.

Örneğin; $D = S[X]$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcccc} \partial & : & S[X] & \longrightarrow & S \\ & & \sum a_i X^i & \longmapsto & a_0 \end{array}$$

alınırsa, Çek$\partial = \langle X \rangle \trianglelefteq S[X]$ agumentasyon idealidir.

Öngörü: $D \subseteq S$, R nin idealleri ve $\phi : S \to R$, içine k-cebir homomorfizmi ise $I(R/S)$ agumentasyon ideali olsun. Bu durumda

$$\phi_*(D) \cong D \times \left(D/D^2 \otimes I(R/S)\right)$$

dir.

Bu sonuç, gruplar (Brown ve Higgins, 1995) ve lie cebirler (Cassas ve Ladra, 2000) için ispat edilmiştir. Değişmeli cebirler için ispat edemedik. Yalnız ispat için izlenecek bir yol verebiliriz. Burada $d,\ t \in D$; $x \in I(R/S)$ için

$T = (D/D^2 \otimes I(R/S))$ alalım.

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[ddl, bend left, "\alpha"] \\
D \arrow[urr, bend left, "\beta"] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"'] & T \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\zeta"] & \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R &
\end{tikzcd}$$

diyagramının bir ileri itme diyagramı olduğunu göstermeliyiz. Diğer bir deyişle

$$\mathfrak{X} = (D \xrightarrow{\ \partial\ } S) \qquad \text{ve} \quad \mathfrak{Y} = (T \xrightarrow{\ \zeta\ } R)$$

alınırsa

$$(i, \phi) : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$$

çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir.

İleri itme izomorfizm farkıyla biricik olduğundan $\phi_*(D) \cong T$ dir. Tabiki ilk olarak

$$\mathfrak{Y} = (T \xrightarrow{\ \zeta\ } R)$$

nin bir çaprazlanmış R-modül olduğu gösterilmelidir

$$\begin{array}{rcl} R \times T & \longrightarrow & T \\ (r, (d, [t] \otimes x)) & \longmapsto & r \cdot (d, [t] \otimes x) = (r \cdot d, [r \cdot t] \otimes \overline{r} x) \end{array}$$

fonksiyonu etki şartını sağlar. (Bkz. Ek C 5)

Böylece

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & T & \longrightarrow & R \\ & (d, [t] \otimes x) & \longmapsto & d \end{array}$$

çaprazlanmış R-modüldür. Gerçektende,

$$\begin{array}{rrcll} CM2. & \zeta(d', [t'] \otimes x') \cdot (d, [t] \otimes x) & = & d' \cdot (d, [t] \otimes x) & \\ & & = & \left(d' \cdot d, [d' \cdot t] \otimes \overline{d'} x\right) & \\ & & = & \left(d'd, [d' \cdot t] \otimes \overline{d'} x\right) & \\ & & = & (d'd, 0) & \left(\because\ \overline{d'} = 0\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned}(d',[t']\otimes x')(d,[t]\otimes x) &= (d'd,[t't]\otimes x'x)\\ &= (d'd,0) \qquad\qquad (\because\ [t't]=0)\end{aligned}$$

Şimdi diğer fonksiyonları tanımlayalım.

$$\begin{aligned} i:\ D &\longrightarrow T\\ d &\longmapsto (d,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}:\ T &\longrightarrow Z\\ (d,[t]\otimes x) &\longmapsto \beta(d)+\beta(x\cdot t)\end{aligned}$$

tanımlanabilir.

BÖLÜM 3

GERİ ÇEKME VE İLERİ İTME Cat^1-CEBİRLER

3.1 Giriş

Bölüm 2 de ko-indirgenmiş ve indirgenmiş çaprazlanmış modül yapılarını inceledik. Bu bölümde cat^1-cebirlerin ko-indirgenmiş ve indirgenmiş yapıları üzerinde çalışacağız. Genel olarak cat^n-grup yapısı Loday (1982) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Brown ve Loday (1987) tarafından indirgenmiş cat^n-grup yapısını tanımlayarak, cebirsel topolojide bir çok uygulamalar ver-miştir. $n = 1$ için Alp (1997) doktora tezinde ayrıntılı olarak incelemiştir. Ayrıca değişmeli cebirler versiyonunu Alp (2006) yayınlamıştır fakat bu çalışmada bazı eksiklikler olduğundan, bu tezde bu çalışma tekrar gözden geçirilerek sonuçlar geliştirilmiştir.

3.2 Geri Çekme Cat^1-Cebirler

$\mathfrak{C} = (e; t, s : A \to R)$ cat^1-cebir ve $\phi : S \to R$, bir k-değişmeli cebir morfizmi olsun.

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(A) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, shift right, "t^*"'] \arrow[d, shift left, "s^*"] & A \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] \arrow[u, bend left=60, "e^*"] & R \arrow[u, bend right=60, "e"']
\end{tikzcd}$$

değişmeli geri çekme diyagramın da A nın $\phi^*(A)$ olan geri çekmesi olup, $\phi^*(\mathfrak{C})$ ye **geri çekme cat^{1}cebir** denir. Burada

$$\phi^*(\mathfrak{C}) : \left(e^*; t^*, s^* : \phi^*(A) \longrightarrow S\right)$$

olup

$$\phi^*(A) = \left\{\left(s, a, s'\right) \mid \phi(s) = t(a),\ \phi\left(s'\right) = s(a)\right\} \subseteq S \ltimes A \times S$$

ve morfizmler

$$\begin{array}{rcl} t^*(s, a, s') & = & s \\ s^*(s, a, s') & = & s' \\ e^*(s) & = & \left(s, (e\phi)(s), s\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1

$$\phi^{*}(\mathfrak{C}):\left(e^{*};t^{*},s^{*}:\phi^{*}(A)\longrightarrow S\right)$$

bir cat[1]-cebirdir.

İspat.

$$CAT1. \quad \begin{aligned} t^{*}e^{*}(s) &= t^{*}(e^{*}(s)) \\ &= t^{*}\left(s,(e\phi)(s),s\right) \\ &= s \\ &= 1_{S}(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s^{*}e^{*}(s) &= s^{*}(e^{*}(s)) \\ &= s^{*}\left(s,(e\phi)(s),s\right) \\ &= s \\ &= 1_{S}(s) \end{aligned}$$

olup $t^{*}e^{*}(s)=1_{S}(s)=s^{*}e^{*}(s)$ dır.

$CAT2.$ $x=\left(s_{1}',a_{1},s_{1}\right)\in$Çek$t^{*}$ ve $y=\left(s_{2},a_{2},s_{2}'\right)\in$Çek$s^{*}$ alalım.

$$\text{Çek}t^{*}\text{Çek}s^{*}=\{0\}$$

olduğunu göstermek için gerek ve yeter şart $xy=0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} xy &= \left(s_{1}',a_{1},s_{1}\right)\left(s_{2},a_{2},s_{2}'\right) \\ &= \left(s_{1}'s_{2},a_{1}a_{2},s_{1}s_{2}'\right) \end{aligned}$$

dir. Fakat $x\in$Çekt^{*} ve $y\in$Çeks^{*} olduğundan

$$\begin{aligned} t^{*}\left(s_{1}',a_{1},s_{1}\right) &= s_{1}' &= 0_{S} \\ s^{*}\left(s_{2},a_{2},s_{2}'\right) &= s_{2}' &= 0_{S} \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} xy &= (0_{S}s_{2},a_{1}a_{2},s_{1}0_{S}) \\ &= (0_{S},a_{1}a_{2},0_{S}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca $a_{1}\in$Çek$t$, $a_{2}\in$Çek$s$ ve $\mathfrak{C}$ bir cat[1]-cebir olduğundan

$$a_{1}a_{2}\in\text{Çek}t\,\text{Çek}s=\{0\}$$

olup $a_{1}a_{2}=0$ dır. Böylece

$$xy \;=\; (0_{S},a_{1}a_{2},0_{S}) \;=\; 0$$

dır. Bu ise istenilendir. Bundan başka $e^{*},\ t^{*},\ s^{*}$ nın homomorfizm oldukları kolayca gösterilir. □

Önerme 3.2 (C,R,∂) çaprazlanmış R-modül ve $\left(\phi^*(C),S,\partial^*\right)$ geri çekmesi olsun. $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ sırasıyla (C,R,∂) ve $\left(\phi^*(C),S,\partial^*\right)$ çaprazlanmış modüllerden elde edilen cat^1-değişmeli cebirler ise

$$\mathfrak{D} \cong \phi^*(\mathfrak{C})$$

dir.

İspat. $\left(\phi^*(C),S,\partial^*\right)$ geri çekme çaprazlanmış S-modül olduğundan

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(C) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\partial^*"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

geri çekme diyagramı vardır. Böylece

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Cat}^1\textbf{-Ceb}$$

funktoru yardımıyla ∂ ve ∂^* çaprazlanmış modüllerine karşılık gelen cat^1-değişmeli cebirler sırasıyla

$$F(C,R,\partial) = \mathfrak{C} = \left(R \ltimes C \underset{e}{\overset{t,s}{\rightrightarrows\!\!\!\!\leftarrow}} R\right)$$

ve

$$F(\phi^*(C),S,\partial^*) = \mathfrak{D} = \left(S \ltimes \phi^*(C) \underset{e^*}{\overset{t^*,s^*}{\rightrightarrows\!\!\!\!\leftarrow}} S\right)$$

dır.

Ayrıca F funktoru yardımıyla geri çekmeleri taşıyabiliriz. Şöyleki,

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(C) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\partial^*"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}
\quad \overset{F}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
S \ltimes \phi^*(C) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, shift right, "t^*"'] \arrow[d, shift left, "s^*"] & R \ltimes C \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] \arrow[u, bend left=90, "e^*"] & R \arrow[u, bend right=90, "e"']
\end{tikzcd}$$

olup $\mathfrak{D}$ nin morfizmleri

$$\begin{aligned}
t^*(s',(s,c)) &= s' \\
s^*(s',(s,c)) &= s' + \partial^*(s,c) \\
&= s' + s \\
e^*(s) &= (s,(0_S,0_C))
\end{aligned}$$

şeklindeki homomorfizmlerdir. Şimdi $\mathfrak{D}$ ve $\phi^*(\mathfrak{C})$ cat^1-cebirlerinin birbirlerine izomorf olduğunu gösterelim. İlk olarak $\phi^*(\mathfrak{C})$ geri çekme cat^1-cebirlerini oluşturalım. Yani,

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(R \ltimes C) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, shift right, "t^\bullet"'] \arrow[d, shift left, "s^\bullet"] & R \ltimes C \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
\phi^*(R) = S \arrow[r, "\phi"'] \arrow[u, bend left=60, "e^\bullet"] & R \arrow[u, bend right=60, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S \ltimes \phi^*(C) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, shift right, "t^*"'] \arrow[d, shift left, "s^*"] & \phi^*(R \ltimes C) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, shift right, "t^\bullet"'] \arrow[d, shift left, "s^\bullet"] & R \ltimes C \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
S \arrow[r, "id_S"'] \arrow[u, bend left=60, "e^*"] & \phi^*(R) = S \arrow[r, "\phi"'] \arrow[u, bend right=60, "e^\bullet"'] & R \arrow[u, bend right=60, "e"']
\end{tikzcd}$$

$$\psi(s',(s,c)) = (s',(\phi\left(s'\right),c),s'+s)$$

tanımlayalım.

$$\phi^*(R \ltimes C) = \left\{ \begin{array}{ccc} \phi(s) & = & t(r,c) \\ \phi(s) & = & s(r,c) \end{array} \right\} \subseteq S \times (R \ltimes C) \times S$$

$r = \phi(s')$ alınırsa $\psi(s',(s,c)) \in \phi^*(R \ltimes C)$ olur. Çünkü,

$$t\left(\phi\left(s'\right),c\right) = \phi\left(s'\right)$$

ve

$$\begin{aligned} s\left(\phi(s'),c\right) &= \phi(s') + \partial(c) \\ &= \phi(s') + \phi(s) \\ &= \phi(s'+s) \end{aligned}$$

dir. Şimdi ψ nin S-cebir homomorfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \psi(s'' \cdot \left(s',(s,c)\right)) &= \psi(s'' \cdot s', s'' \cdot (\phi\left(s'\right),c), s'' \cdot \left(s'+s\right)) \\ &= \psi(s''s', (s'' \cdot \phi\left(s'\right), s'' \cdot c), s''\left(s'+s\right)) \\ &= \psi(s''s', s'' \cdot (\phi\left(s'\right),c), s''s' + s''s) \\ &= s'' \cdot \psi\left(s',(s,c)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi((s_1'),(s_1,c_1))+(s_2',(s_2,c_2)) &= \psi(s_1'+s_2',(s_1,c_1)+(s_2,c_2)) \\
&= \psi(s_1'+s_2',(s_1+s_2,c_1+c_2)) \\
&= \left(s_1'+s_2',\left(\phi\left(s_1'+s_2'\right),c_1+c_2\right),s_1'+s_2'+s_1+s_2\right) \\
\psi(s_1',(s_1,c_1))+\psi(s_2',(s_2,c_2)) &= (s_1',(\phi\left(s_1'\right),c_1),s_1'+s_1)+(s_2',(\phi\left(s_2'\right),c_2),s_2'+s_2) \\
&= (s_1'+s_2',(\phi\left(s_1'\right),c_1)+(\phi\left(s_2'\right),c_2),s_1'+s_1+s_2'+s_2) \\
&= (s_1'+s_2',(\phi\left(s_1'\right),c_1)+(\phi\left(s_2'\right),c_2),s_1'+s_1+s_2'+s_2) \\
&= \left(s_1'+s_2',\left(\phi\left(s_1'\right)+\phi\left(s_2'\right),c_1+c_2\right),s_1'+s_2'+s_1+s_2\right) \\
&= \left(s_1'+s_2',\left(\phi\left(s_1'+s_2'\right),c_1+c_2\right),s_1'+s_2'+s_1+s_2\right)
\end{aligned}
$$

$\psi((s_1',(s_1,c_1))+(s_2',(s_2,c_2))=\psi(s_1',(s_1,c_1))+\psi(s_2',(s_2,c_2))$ olup toplama işlemi için sağlanır.

$$
\begin{aligned}
\psi((s_1',(s_1,c_1))(s_2',(s_2,c_2)) &= \psi(s_1's_2',s_1'.(s_2,c_2)+s_2'.(s_1,c_1)+(s_1,c_1)(s_2,c_2)) \\
&= \psi(s_1's_2',(s_1's_2,s_1'.c_2)+(s_2's_1,s_1'.c_1)+(s_1s_2,c_1c_2)) \\
&= \psi(s_1's_2',(s_1's_2+s_2's_1+s_1s_2,\phi\left(s_1'\right)c_2+\phi\left(s_2'\right)c_1+c_1c_2)) \\
&= (s_1's_2',(\phi\left(s_1'\right)\phi\left(s_2'\right),\phi\left(s_1'\right)c_2+\phi\left(s_2'\right)c_1+c_1c_2), \\
&\quad s_1's_2'+s_1's_2+s_2's_1+s_1s_2) \\
\psi(s_1',(s_1,c_1))\psi(s_2',(s_2,c_2)) &= (s_1',(\phi\left(s_1'\right),c_1),s_1'+s_1)(s_2',(\phi\left(s_2'\right),c_2),s_2'+s_2) \\
&= (s_1's_2',(\phi\left(s_1'\right),c_1).(\phi\left(s_2'\right),c_2),\left(s_1'+s_1\right).\left(s_2'+s_2\right)) \\
&= (s_1's_2',(\phi\left(s_1'\right)\phi\left(s_2'\right),\phi\left(s_1'\right)c_2+\phi\left(s_2'\right)c_1+c_1c_2), \\
&\quad s_1's_2'+s_1's_2+s_2's_1+s_1s_2)
\end{aligned}
$$

$\psi((s_1',(s_1,c_1))(s_2',(s_2,c_2))=\psi(s_1',(s_1,c_1))\psi(s_2',(s_2,c_2))$ olup çarpma işlemi içinde sağlanır.

ψ nin tersi

$$\psi^{-1}(s_1,(r,c),s_2)=(s_1,(s_2-s_1,c))$$

olarak tanımlanır.

Böylece

$$
\begin{aligned}
\psi\psi^{-1}(s_1,(r,c),s_2) &= \psi(s_1,(s_2-s_1,c)) \\
&= \left(s_1,\left(\phi\left(s_1\right),c\right),s_1+(s_2-s_1)\right) \\
&= \left(s_1,\left(\phi\left(s_1\right),c\right),s_2\right) \\
&= (s_1,(r,c),s_2) \qquad \left(\because \phi^*(S)=R\right) \\
&= 1_{\phi^*(R\ltimes C)}(s_1,(r,c),s_2)
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
\psi^{-1}\psi(s',(s,c)) &= \psi^{-1}(s',(\phi\left(s'\right),c),s'+s) \\
&= \left(s',\left(s'+s-s',c\right)\right) \\
&= (s',(s,c)) \qquad\qquad\qquad \left(\because \phi^{*}(S)=R\right) \\
&= 1_{S\ltimes\phi^{*}(C)}(s',(s,c))
\end{aligned}
$$

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
t^{\bullet}\psi(s',(s,c)) &= t^{\bullet}(s',(\phi(s'),c),s'+s) \\
&= s' \\
&= t^{*}(s',(s,c)), \\
s^{\bullet}\psi(s',(s,c)) &= s^{\bullet}(s',(\phi(s'),c),s'+s) \\
&= s'+s \\
&= s^{*}(s',(s,c)), \\
\psi e^{*}(s) &= \psi(s,(0_S,0_C)) \\
&= (s,(\phi\left(s\right),0_S),s) \\
&= e^{\bullet}(s)
\end{aligned}
$$

olup diyagram değişmelidir. □

Şimdi geri çekme cat[1]-cebirin evrensellik özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3 $\left(\textbf{Geri çekme cat}^{1}\textbf{-cebir için evrensellik özelliği}\right)$
$\mathfrak{C}=(e;t,s:A\rightarrow R)$, $\mathfrak{D}=(e^{\bullet};t^{\bullet},s^{\bullet}:B\rightarrow S)$ cat[1]-cebirler olsun.

$$\left(f,\phi\right):\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{C}$$

cat[1]-cebir morfizmi olmak üzere,

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D}=(e^{\bullet};t^{\bullet},s^{\bullet}:B\rightarrow S) \arrow[d, "{(f,\phi)}"] \\
(e^{*};t^{*},s^{*}:\phi^{*}(A)\rightarrow S) \arrow[ur, dotted, "{(f^{*},id_S)}"] \arrow[r, "{(\phi',\phi)}"'] & \mathfrak{C}=(e;t,s:A\rightarrow R)
\end{tikzcd}
$$

değişmeli olacak şekilde biricik $\left(f^{*},id_S\right)$, cat[1]-cebir morfizmi vardır.

İspat. Yukarıdaki diyagramı daha açık olarak,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, shift right, "t^{\bullet}"'] \arrow[dd, shift left, "s^{\bullet}"] & & A \arrow[dd, shift right, "t"'] \arrow[dd, shift left, "s"] \\
& \phi^{*}(A) \arrow[ul, dotted, "f^{*}"] \arrow[ur, "\phi'"'] \arrow[dl, shift right, "t^{*}"'] \arrow[dl, shift left, "s^{*}"] & \\
S \arrow[rr, "\phi"'] & & R
\end{tikzcd}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\mathfrak{D} = (e^{\bullet}; t^{\bullet}, s^{\bullet} : B \to S)$ herhangi cat^1-cebir ve (f,ϕ) cat^1-cebir morfizmi olmak üzere

$$f^{*} : \phi^{*}(A) \longrightarrow B$$

biricik cat^1-cebir morfizmi vardır, öyleki $t^{\bullet} f^{*} = t^{*}$, $s^{\bullet} f^{*} = s^{*}$ ve $f f^{*} = \phi'$ dür.

İlk olarak (f,ϕ) çiftinin cat^1-cebir olduğunu gösterelim.

Yukarıdaki diyagramdan (Yani geri çekme cat^1-cebir özelliğinden)

$$\begin{array}{rccc} f: & B & \longrightarrow & A \\ & (s,a,s') & \longmapsto & a \end{array}$$

dir.

Buradan;

$$\begin{array}{rcl} t f(s,a,s') & = & t(a) \\ & = & \phi(s) \\ & = & \phi t^{\bullet}(s,a,s') \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} s f(s,a,s') & = & t(a) \\ & = & \phi(s') \\ & = & \phi s^{\bullet}(s,a,s') \end{array}$$

olup (f,ϕ) çiftinin cat^1-cebir morfizmidir.

$$(\phi',\phi) : \mathfrak{C}^{*} \longrightarrow \mathfrak{C}$$

herhangi cat^1-cebir morfizmi öyleki $t\phi' = \phi t^{*}$, $s\phi' = \phi s^{*}$ olmak üzere biricik

$$\begin{array}{rccc} f^{*}: & \phi^{*}(A) & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & \left(t^{*}(x), \phi'(x), s^{*}(x)\right) \end{array}$$

morfizmi vardır, çünkü her $x \in \phi^{*}(A)$ için $t\phi'(x) = \phi t^{*}(x)$ ve $s\phi'(x) = \phi s^{*}(x)$ dir. Şimdi, f^{*} cat^1-cebir morfizmi olduğunu gösterelim. $x \in \phi^{*}(A)$, $s \in S$ için

$$\begin{array}{rcl} \left(t^{\bullet} f^{*}\right)(x) & = & t^{\bullet}\left(f^{*}(x)\right) \\ & = & t^{\bullet}\left(t^{*}(x), \phi'(x), s^{*}(x)\right) \\ & = & t^{*}(x) \end{array}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(s^{\bullet}f^{*}\right)(x) &= s^{\bullet}\left(f^{*}(x)\right)\\ &= s^{\bullet}\left(t^{*}(x),\phi'(x),s^{*}(x)\right)\\ &= s^{*}(x)\end{aligned}$$

olup f^{*} cat^1-cebir morfizmidir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left(ff^{*}\right)(x) &= f\left(f^{*}(x)\right)\\ &= f\left(t^{*}(x),\phi'(x),s^{*}(x)\right)\\ &= \phi'(x)\end{aligned}$$

olup $ff^{*}=\phi'$ dir. □

Teorem 3.4

$$\phi^{*}:\mathbf{Cat}^{1}\textbf{-}\mathbf{Ceb}/R\longrightarrow\mathbf{Cat}^{1}\textbf{-}\mathbf{Ceb}/S$$

geri çekme funktoru vardır.

İspat. Teorem 1.2.1 gereğince $\mathbf{Cat}^1$**-Ceb**$/R$ kategorisinde herhangi $\mathfrak{C}=(e;t,s:A\to R)$ cat^1-cebir objesi için geri çekme

$$\phi^{*}(\mathfrak{C})=\left(e^{*};t^{*},s^{*}:\phi^{*}(A)\longrightarrow S\right)$$

$\mathbf{Cat}^1$**-Ceb**$/S$ kategorisinde bir objedir. Morfizmlerin korunması Teorem 2.2.2 ye benzer şekilde gösterilir. □

3.2.1 Geri Çekme Cat^1-Cebir Örnekleri

1. $I\trianglelefteq R$ olsun. Bu durumda $\partial:I\hookrightarrow R$ içine çaprazlanmış R-modülünün $\phi:S\to R$, k-cebir homomorfizmi yardımıyla elde edilen geri çekme çaprazlanmış modülünün

$$\begin{aligned}\phi^{*}(I,R,\partial) &= \left(\phi^{*}(I),S,\partial^{*}\right)\\ &\cong \left(\phi^{-1}(I),S,\partial^{*}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\phi^{*}(I)\ \cong\ \phi^{-1}(I)\trianglelefteq S$$

olduğunu Bölüm 2 de gösterdik. Ayrıca önerme 3.2.2 den,

$$\mathfrak{C}=(R\ltimes I\ \underset{e}{\overset{t,h}{\rightleftarrows}}\ R)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\cong\quad\phi^{*}(\mathfrak{C}) &= (\phi^{*}(R\ltimes I)\rightleftarrows\phi^{*}(R))\\ &= (S\ltimes\phi^{*}(I)\rightleftarrows S)\\ &= (S\ltimes\phi^{-1}(I)\rightleftarrows S)\end{aligned}$$

dir.

2. Her M, R-modülü, $\phi : S \to R$, halka homomorfizmi yardımıyla bir S-modül yapısı oluşturur. Ayrıca $f : M \to N$, S-modül homomorfizmi ise,

$$F :_R \mathbf{Mod} \longrightarrow_S \mathbf{Mod}$$

funktoru tanımlandığını ve çaprazlanmış modül yapısına genişletimiyle geri çekmesini Bölüm 2 de vermiştik, ayrıca,

$$\phi^*(M,R,0) = \left(\phi^*(M), S, \partial^*\right)$$

ve

$$\phi^*(M) \quad = \quad M \times \text{Çek}\phi$$

dir.

$$\mathfrak{C} = (R \ltimes M \underset{e}{\overset{t,h}{\rightrightarrows\!\!\!\leftarrow}} R)$$

ve

$$\mathfrak{D} = (S \ltimes \phi^*(M) \underset{e^*}{\overset{t^*,h^*}{\rightrightarrows\!\!\!\leftarrow}} S)$$

için önerme 3.2.2 den,

$$\mathfrak{D} \quad \cong \quad \phi^*(M) \quad \cong \quad M \times \text{Çek}\phi$$

olup

$$\mathfrak{D} \quad \cong \quad \left(S \ltimes (M \times \text{Çek}\phi) \rightrightarrows\!\!\!\leftarrow S\right)$$

dir.

3.3 İndirgenmiş Cat^1-Cebirler

Bu kısımda bir önceki teoremde verilen funktorun sol eki olan

$$\phi_* : \mathbf{Cat}^1\textbf{-Ceb}/S \longrightarrow \mathbf{Cat}^1\textbf{-Ceb}/R$$

funktorunu oluşturacağız. Özetle;

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} = (e; t, s : D \rightrightarrows\!\!\!\leftarrow S) \arrow[d] & & \mathfrak{C} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \phi_*(\mathfrak{C}) \arrow[d, dotted] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R \arrow[r, phantom, "\overset{\phi_*}{\rightsquigarrow}"] & S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

ileri itme diyagramı oluşturulmaktadır. Buradan $\phi_*(\mathfrak{C})$ cat^1-cebire **indirgenmiş cat^1-cebir** denir.

$\mathfrak{C} = (e; t, s : D \to S)$ cat^1-cebir ve $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi olsun. Bu durumda,

$$\phi_*(\mathfrak{C}) = (e_*; t_*, s_* : \phi_*(\mathfrak{D}) \longrightarrow R)$$

indirgenmiş cat^1-cebiri,

$$\begin{tikzcd}
(id_S; id_S, id_S : S \to S) \arrow[r, "(\phi,\phi)"] \arrow[d, "(e,id_S))"'] & (id_R; id_R, id_R : R \to R) \arrow[d, "(e_*,id_R)"] \\
(e; t, s : D \to S) \arrow[r, "(\phi_*,\phi)"'] & (e_*; t_*, s_* : \phi_*(D) \to R)
\end{tikzcd}$$

ileri itme diyagramı ile verilir. Bu diyagramı üç boyutlu olarak

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, shift left, "id_S"] \arrow[dr, shift right] \arrow[dd, "e"'] & & R \arrow[dr, shift left, "id_R"] \arrow[dr, shift right] \arrow[dd, "e_*"] & \\
& S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dd, "id_S"] & & R \arrow[dd, "id_R"] \\
D \arrow[rr, "\phi_*"] \arrow[dr, shift left, "s"] \arrow[dr, shift right, "t"'] & & \phi_*(D) \arrow[dr, shift left, "s_*"] \arrow[dr, shift right, "t_*"'] & \\
& S \arrow[rr, "\phi"'] & & R
\end{tikzcd}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $\phi_*(\mathfrak{C})$ nin cat^1-cebir olduğunu gösterelim.

İlk olarak aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 3.5 $\mathfrak{C} = (e; t, s : D \to S)$ cat^1-cebir ise Çek$t$Çek$s$, D nin bir idealidir.

İspat. $x \in$Çek$t$Çek$s$ ve $y \in D$ ise $xy \in$Çek$t$Çek$s$ olduğunu göstermeliyiz. $x = ab$, $a \in$Çek$t$ ve $b \in$Çek$s$ olmak üzere $t(a) = s(b) = 0$ dır.

$$\begin{array}{lll}
xy = (ab)y & \Rightarrow & xy = (ay)\,b \\
 & \Rightarrow & t(ay) = t(a)\,t(y) \quad = \quad 0.t(y) = 0 \\
 & \Rightarrow & ay \in \text{Çek}t \qquad\qquad ve \qquad b \in \text{Çek}s \text{ olduğundan} \\
 & \Rightarrow & xy \in \text{Çek}t\text{Çek}s
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
xy=(ab)y & \Rightarrow & xy=a\,(by) \\
 & \Rightarrow & s\,(by)=s(b)s\,(y) \quad = \quad 0.s\,(y)=0 \\
 & \Rightarrow & by\in \text{Çek}s \qquad\qquad ve \qquad a\in\text{Çek}t \text{ olduğundan} \\
 & \Rightarrow & xy\in\text{Çek}t\text{Çek}s
\end{array}
$$

olur. □

Önerme 3.6 $\mathfrak{C}=(e;t,s:D\to S)$ cat^1-cebir ve $\phi:S\to R$, k-cebir morfizmi olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\phi_*(\mathfrak{C}) &= (\phi_*(e);\phi_*(t),\phi_*(s):\phi_*(\mathfrak{D})\longrightarrow\phi_*(S)) \\
&= (e_*;t_*,s_*:\phi_*(\mathfrak{D})\longrightarrow R)
\end{aligned}
$$

bir cat^1-cebirdir.

İspat. İlk olarak $\phi_*(\mathfrak{D})$ objesini oluşturalım.

$D[R]$, R üzerinde serbest cebir olsun. Ç$ektÇeks$ kümesi $D[R]$ nin idealidir.

Böylece

$$\phi_*(\mathfrak{D})=D[R]/\text{Ç}ekt\text{Ç}eks$$

alınırsa $\phi_*(\mathfrak{C})$ bir cat^1-cebirdir. Yalnız CA2 şartını sağladığını göstereceğiz.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d, hook] & S \arrow[r, "\phi"] & R \\
D[R] \arrow[d, "q"'] & & \\
D[R]/\text{Ç}ekt\text{Ç}eks \arrow[uurr, shift left, "t_*"] \arrow[uurr, shift right, "s_*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$x\in D[R]$ için $[x]\in D[R]/\text{Çek}t\text{Çek}s$ olup

$$
\begin{aligned}
s_*([x]) &= \phi s(x) \\
t_*([x]) &= \phi t(x)
\end{aligned}
$$

dır. $[x]\in$Çeks_* ve $[y]\in$Çekt_* ise $s_*([x])=s(x)=0$ ve $t_*\left([y]\right)=t(y)=0$ olup $xy\in$Çek$t$Çek$s$ dir. Buradan $[x]\left[y\right]=[0]$ elde edilir. Böylece Çekt_*Çek$s_*=\{[0]\}$ dır. □

Teorem 3.7 (İndirgenmiş cat^1-cebirler için evrensellik özelliği)

$$\left(f,\phi\right):(e;t,s:D\to S)\longrightarrow(e';t',s':B\to R)$$

cat^1-cebir morfizmi olmak üzere

$$
\begin{tikzcd}
(D\rightrightarrows S) \arrow[r, "(f{,}\phi)"] \arrow[d, "(\phi_*{,}\phi)"'] & (B\rightrightarrows R) \\
(\phi_*(D)\rightrightarrows R) \arrow[ur, "(f_*{,}id_R)"'] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik (f_*, id_R) vardır.

İspat. Yukarıdaki diyagram

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & B \arrow[dd] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& S \arrow[rr] \arrow[dd] & & R \arrow[dd] \\
\phi_*(D) \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & B \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& R \arrow[rr] & & R
\end{tikzcd}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca ileri itme formda

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[ddl, bend left] \\
D \arrow[urr, bend left] \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \phi_*(D) \arrow[ur, dotted] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R &
\end{tikzcd}$$

şeklinde yazabiliriz.

İleri itme şartları Teorem 2.3.2 ye benzer şekilde yapılır. □

Teorem 3.8

$$\phi_* : \mathbf{Cat}^1\text{-}\mathbf{Ceb}/S \longrightarrow \mathbf{Cat}^1\text{-}\mathbf{Ceb}/R$$

funktoru vardır.

Not: Cat^1-cebirler kategorisi çaprazlanmış modüller kategorisine denk olduğundan indirgenmiş cat^1-cebir örnekleri bölüm 2 deki indirgenmiş çaprazlanmış modül örnekleri yardımıyla verilebilir.

Şimdi Çek$t$Çek$s$ ve Çekt_*Çeks_* idealleri arasındaki bazi ilişkiler araştırılacaktır.

Önerme 3.9 Çek$t = \langle X_t \rangle$ ve Çek$s = \langle X_s \rangle$, ise

$$\text{Çek}t\,\text{Çek}s = \langle X_t X_s \rangle = \left\{ \sum_i a_i b_i \right\}$$

dir. Burada $a_i = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \in$ Çek$t$, $b_i = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_s} \in$ Çek$s$ ve $x_{ij} \in X_t$, $y_{ij} \in X_s$

$$F = (\quad)^{Cat} : \mathbf{PCat^1 - Ceb} \longrightarrow \mathbf{Cat^1 - Ceb}$$

funktoru alınarak $\mathcal{P} = (e; t, s,: D \to R)$ ön-cat^1-değişmeli cebiri için verilsin. Bu ön cat^1-objeden yeni bir cat^1-obje oluşturacak olan ve bölüm cebirini verecek olan Çekt_*Çeks_* üreteç kümesini oluşturalım. Bunun için,

$$\begin{array}{rcl} \pi_t : D & \longrightarrow & \text{Çek}t \\ d & \longmapsto & d - (et)(d) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \pi_s : D & \longrightarrow & \text{Çek}s \\ d & \longmapsto & d - (es)(d) \end{array}$$

projeksiyonlarını tanımlıyalım.

$d \in$ Çek$t$ ise

$$\begin{array}{rcl} \pi_t(d) & = & d - (et)(d) \\ & = & d - e(0) \\ & = & d \end{array}$$

ve benzer şekilde $d \in$ Çek$s$ ise

$$\begin{array}{rcl} \pi_s(d) & = & d - (es)(d) \\ & = & d - e(0) \\ & = & d \end{array}$$

olup π_t ve π_s örtendir.

Önerme 3.10

$$\begin{array}{ll} (ia) & \pi_t(a+b) = (\pi_t a) + (\pi_t b) \\ (ib) & \pi_s(c+d) = (\pi_s c) + (\pi_s d) \\ (iia) & -(\pi_t a) = (\pi_t(-a)) \\ (iib) & -(\pi_s c) = (\pi_s(-c)) \\ (iiia) & \pi_t(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = (\pi_t a_1) + (\pi_t a_2) + \ldots + (\pi_t a_{n-1}) + (\pi_t a_n) \\ (iiib) & \pi_s(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = (\pi_s c_1) + (\pi_s c_2) + \ldots + (\pi_s c_{n-1}) + (\pi_s c_n) \end{array}$$

İspat. (ia)

$$\begin{array}{rcl} \pi_t(a+b) & = & (a+b) - e(t(a+b)) \\ & = & (a+b) - e(t(a) + t(b)) \\ & = & (a+b) - ((et)(a) + (et)(b)) \\ & = & a + et(a) + b + et(b) \\ & = & (\pi_t a) + (\pi_t b) \end{array}$$

Benzer şekilde diğerleri de gösterilir. □

Bu özelliklerin kullanılmasıyla oluşturacağımız komutatörlerin basit özelliklerini oluşturalım.

Önerme 3.11

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & \pi_t(a+b)\pi_s c & = & \pi_t(a)\pi_s(c)+\pi_t(b)\pi_s(c) \\ \text{(ii)} & \pi_t(a)\pi_s(b+c) & = & \pi_t(a)\pi_s(b)+\pi_t(a)\pi_s(c) \end{array}$$

İspat. (i)

$$\begin{aligned} \pi_t(a+b)\pi_s(c) &= [(a+b)-e(t(a+b))](c-(es)(c)) \\ &= (a+b)c-(a+b)(es)(c)-(et)(a+b)c+(et)(a+b)(es)(c) \\ &= ac+bc-a(es)(c)-b(es)(c)-(et)(a)c-(et)(b)c \\ &\quad +(et)(a)(es)(c)+(et)(b)(es)(c) \\ &= (a-(et)(a))(c-(es)(c))+(b-(et)(b))(c-(es)(c)) \\ &= \pi_t(a)\pi_s(c)+\pi_t(b)\pi_s(c) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \pi_t(a)\pi_s(b+c) &= (a-(et)(a))[(b+c)-e(s(b+c))] \\ &= a(b+c)-a(es)(b+c)-(et)(a)(b+c)+(et)(a)(es)(b+c) \\ &= ab+ac-a(es)(b)-a(es)(c)-(et)(a)b-(et)(a)c \\ &\quad +(et)(a)(es)(b)+(et)(a)(es)(c) \\ &= (a-(et)(a))(c-(es)(c))+(a-(et)(a))(b-(es)(b)) \\ &= \pi_t(a)\pi_s(b)+\pi_t(a)\pi_s(c) \end{aligned}$$

□

Önerme 3.12 π_t ve π_s, R.etkisini korurlar.

İspat.

$$\begin{aligned} \pi_t(r\cdot d) &= (r\cdot d)-(et(r\cdot d)) \\ &= de(r)-(et)(der) \\ &= e(r)-(d-(et)(d)) \\ &= r\cdot\pi_t(d) \end{aligned}$$

Benzer şekilde π_s içinde $\pi_s(r\cdot d)=r\cdot\pi_s(d)$dir. $\square$

$\mathcal{C}=(e;t,s:D\to S)$ cat^1-cebir ve $\phi:S\to R$ bire-bir olsun. R ve S üzerinde birim cat^1-cebirleri $\mathcal{U}$, $\mathcal{R}$ ile tanımlıyalım.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, shift left, "1"] \arrow[dr, shift right, "1"'] \arrow[dd, "e"'] & & R \arrow[dr, shift left, "1"] \arrow[dr, shift right, "1"'] \arrow[dd, "e_*"] & \\
& S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dd, "1"] & & R \arrow[dd, "1"] \\
D \arrow[rr, "\phi_*"] \arrow[dr, shift left, "s"] \arrow[dr, shift right, "t"'] & & \phi_*(D) \arrow[dr, shift left, "s_*"] \arrow[dr, shift right, "t_*"'] & \\
& S \arrow[rr, "\phi"'] & & R
\end{tikzcd}
$$

ileri itme diyagramını oluşturalım. Böylece $\phi_*(\mathfrak{C})$, (ϕ,ϕ) ve $(e,1)$ nin bir ileri itmesidir. Böylece $\phi_*(D)=D[R]$ serbest cebirinin elemanları

$$\kappa=\sum_{i=1}^{k}(d_i\cdot r_i)=d_1\cdot r_1+d_2\cdot r_2+\cdots+d_k\cdot r_k$$

şeklindedir.

Önerme 3.13 $\phi_*(\mathfrak{C})=(e_*;t_*,s_*:\phi_*(D)\to R)$ ön-cat^1-cebir, başlangıç t_* ve bitiş s_* homomorfizmleri boyutları 1 olan wordlerdir.

$$\begin{array}{lcl} s_*d=\phi s d & \text{ve} & t_*d=\phi t d \\ s_*r=r & & t_*r=r \end{array}$$

ve $e_*r=r$ dur.

İspat.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "e"'] & R \arrow[d, "e_*"] \arrow[ddr, "1"] & \\
D \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[drr, "\iota t"'] & \phi_* D \arrow[dr, "t_*"] & \\
& & R
\end{tikzcd}
$$

Değişmeli cebirlerin ileri itmesi diyagramı değişmeli olduğundan $t_*e_*=id_R$ olacak şekilde biricik t_* homomorfizmi ve benzer şekilde $s_*e_*=id_R$ olacak şekilde biricik s_* homomorfizmi vardır. $\square$

Ön-cat[1]-cebirleri cat[1]-cebir yapabilmemiz için Peiffer altcebirlerini bulmalıyız. Bunun için P_* =Çekt_*Çeks_* Peiffer ideallerini bulmalıyız. Yani, Çekt_* ve Çeks_* ideallerinin üreteçlerini bulmak için π_t ve π_s morfizmlerine benzer şekilde π_{t_*} ve π_{s_*} morfizmlerini tanımlayalım.

$$\begin{array}{rcccl} \pi_{t_*} & : & D[R] & \to & D[R] \\ & & \kappa & \mapsto & \kappa-(e_*t)(\kappa) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcccl} \pi_{s_*} & : & D[R] & \to & D[R] \\ & & \kappa & \mapsto & \kappa-(e_*s)(\kappa) \end{array}$$

ile tanımladığımız π_{t_*} ve π_{s_*} morfizleride π_t ve π_s nın bazı özelliklerini sağlar.

Önerme 3.14 Her $d \in D,\ r \in R$ için

$$\begin{aligned} e_*t_*d &= etd \\ e_*s_*d &= esd \\ \pi_{t_*}d &= \pi_t d \\ \pi_{t_*}r &= \lambda \\ \pi_{t_*}(rd) &= r\cdot(\pi_t d) \\ \pi_{t_*}(r_1d_1+r_2d_2) &= (r_1(td_2)r_2)\cdot(\pi_t(d_1))+r_2\cdot\pi_t(d_2) \\ \pi_{t_*}(r_1d_1+\ldots+r_nd_n) &= (r_1(td_2)r_2)\ldots(td_n)r_n\cdot(\pi_t(d_1))+\ldots+r_{n-1}(td_n)r_n\cdot\pi_t(d_{n-1})+r_n\cdot(\pi_t d_n) \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır.

İspat. Bir önceki önerme ve $\phi_*: G \to \phi_*G$, için

$$e_*t_*g = e_*\phi tg = \phi_*etg = etg.$$

π_{t_*}tanımından

$$\begin{aligned} \pi_{t_*}g &= g-(e_*t_{**}(g)) = g-(et(g)) = \pi_t g, \\ \pi_{t_*}r &= r-(e_*t_*(r)) = r-r = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{t_*}(rg) &= (t_*r)\cdot(\pi_{t_*}g)(\pi_{t_*}r) \\ &= r\cdot(\pi_{t_*}g) \\ &= r\cdot(\pi_t g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{t_*}(gr) &= (t_* g)\cdot(\pi_{t_*} r)(\pi_{t_*} g) \\
&= (\pi_{t_*} g) \\
&= (\pi_t g)
\end{aligned}$$

Önermeden

$$\begin{aligned}
\pi_{t_*}(r_1 g_1 + r_2 g_2) &= \pi_{t_*}(g_1 r_1) + (\pi_{t_*} g_2 r_2) \\
&= [\pi_{t_*}(g_1) + \pi_{t_*}(r_1)] + [\pi_{t_*}(g_2) + \pi_{t_*}(r_2)] \\
&= \pi_t g_1 + \pi_t g_2 + \lambda \\
&= \pi_t g_1 + \pi_t g_2
\end{aligned}$$

□

Önerme 3.15 Her $g \in G, r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\pi_{s_*} g &= \pi_s g, \\
\pi_{s_*} r &= \lambda, \\
\pi_{s_*}(gr) &= \pi_s g + \lambda, \\
\pi_{s_*}(g_1 r_1 + g_2 r_2) &= \pi_s g_1 + \pi_s g_2, \\
\pi_{s_*}(g_1 r_1 + \ldots + g_n r_n) &= \pi_s g_1 + \ldots + \pi_s g_n.
\end{aligned}$$

Sonuç 3.16 Her $a, b, c \in G$ için

$$\begin{aligned}
\pi_{t_*}(a+b)(\pi_{s_*} c) &= \pi_{t_*}(a)\pi_{s_*}(c) + \pi_{t_*}(b)\pi_{s_*}(c) \\
\pi_{t_*}(a)\pi_{s_*}(b+c) &= \pi_{t_*}(a)\pi_{s_*}(b) + \pi_{t_*}(a)\pi_{s_*}(c)
\end{aligned}$$

X_U, $U =$Çek$t$ için üreteçlerin kümesi ve $Y_U = X_U^S = \{g_i\}_{i \in I}$ da S nin etkisi ile X_U nin closuresi olsun. $T = \{c_j\}_{j \in J}$, olmak üzere R/S nin sağ yan kümesinin transversalı ve $G = S \ltimes U$ olsun.

Önerme 3.17 Çekt_* ve Çeks_* üreteç kümelerine sahiptir ∂ bire-bir morfizm olmak üzere

$$\begin{aligned}
Z_{t_*} &= \{c_j \cdot (0, g_i) \mid g_i \in Y_S, c_j \in T\}, \\
Z_{s_*} &= \{c_j \cdot (-\partial g_i, g_i) \mid g_i \in Y_S, c_j \in T\}.
\end{aligned}$$

dir.

İspat. $(\mathfrak{C} = e; t, s : G \to S)$ cat$^1-$cebir ve $G = S \ltimes U$ olmak üzere

$$t(r,s) = r \qquad s(r,s) = r + \partial s \qquad e(r) = (r,0)$$

$$\pi_t(r,s) = (0,s) \qquad \pi_s(r,s) = -(\partial s, s)$$

Ayrıca önermeden

$$\begin{array}{lcl} t_*(r,s) & = & \phi\, t(r,s) = r \\ s_*(r,s) & = & \phi\, s(r,s) = r + \partial s \\ e_* r & = & (r, 0_S) \end{array}$$

Böylece $t_* r = s_* r = e_* r = r$ dan

$$\begin{array}{lcl} \pi_{t_*}(r,s) & = & r - (r,s) = (0_R, s) \\ \pi_{t_*} r & = & \lambda \\ \pi_{s_*}(r,s) & = & -\partial s + r - (r,s) = -\partial s + (0_R, s) \\ \pi_{s_*} r & = & \lambda \end{array}$$

olur. π_{t_*}

$$\begin{array}{lcl} \pi_{t_*}((r_1,s_1)r_1 + \ldots + (r_\ell, s_\ell)r_\ell) & = & (r_1(r_2,1)r_2 \ldots (r_\ell,1)r_\ell) \cdot (0,s_1) + \ldots + (r_{\ell-1}(r_\ell,1)r_\ell) \cdot (0, s_{\ell-1}) + r_\ell \cdot (0, s_\ell) \\ & = & (r_1 r_2 r_2) \cdot (0,s_1) + \ldots + r_\ell \cdot (0, s_\ell) \\ & = & r_1' \cdot (0,s_1) + \ldots + r_\ell' \cdot (0,s_\ell), \end{array}$$

olup Çekt_* nın her elemanı

$$r_1 \cdot (0,s_1) \ldots r_\ell \cdot (0,s_\ell), \;\; s_i \in S, r_i \in r.$$

formundadır.

$$r \cdot (0, s_1 s_2 \ldots s_\ell) = r \cdot ((0,s_1) \ldots (0,s_\ell)) = r \cdot (0,s_1) \ldots r \cdot (0,s_\ell)$$

Buradan S nin üreteç kümesini bulmamız gerekir. $\exists r \in R$ için $r = rc$, $c \in r$ için yan küme representasyonları

$$r \cdot (0,s) = (rc) \cdot (0,s) = c \cdot (0, r \cdot s).$$

dir. Böylece Çekt_* üreteç kümesi

$$\{c_j \cdot (0, g_i) \mid g_i \in Y_S,\; c_j \in T\}$$

Benzer şekilde Çeks_* üreteç kümesi

$$\{c_j \cdot (-\partial g_i, g_i) \mid g_i \in Y_S,\; c_j \in T\}.$$

dir. $\square$

Önerme 3.18 Peiffer altcebiri $P_* = \text{Çek}\, t_* \text{Çek}\, s_*$ üreteç kümesi

$$Z_{P_*} = \{\big(c_j \cdot (0, g_i)\big)\, (-\partial g_k, g_k) \mid\, g_i, g_k \in Y_S, c_j \in T\}.$$

dir.

İspat. Z_{t_*},Çekt_* ı ve Z_{s_*},Çeks_* ı ürettiğinden P_*, $\{xy \mid x \in Z_{t_*},\;\; y \in Z_{s_*}\}$ tarafından üretilir. Buradan $c_j c_\ell^{-1} = r c',\;\, r \in R,\; c' \in T$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} xy &= \big(c_j \cdot (0, g_i)\big)\, \big(c_\ell \cdot (-\partial g_k, g_k)\big) \\ &= \Big((0, g_i)^{c_j c_\ell^{-1}} (-\partial g_k, g_k)\Big)^{c_\ell} \\ &= ((0, g_i^r)^{c'} (-\partial g_k, g_k))^{c_\ell} \end{aligned}$$

dir. □

BÖLÜM 4

GERİ ÇEKME VE İLERİ İTME SİMPLİSEL CEBİRLER

4.1 Giriş

Bölüm 2 ve 3 te geri çekme ve ileri itme kategoriksel yapıları çaprazlanmış modüller ve cat^1-cebirler üzerine incelenmiştir. Bu bölümde bu kategoriksel yapıları simplisel cebirlere genişleteceğiz.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Cat^1\text{-}Ceb} \arrow[dl, <->] \arrow[dr, <->] & \\ \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb})_{\leq 1} \arrow[rr, <->] & & \mathbf{XMod} \end{tikzcd}$$

diyagramındaki kategoriler denk (Bölüm 1) olduğundan ko-indirgenmiş yapıları için benzer ilişkinin var olduğunu söyleyebiliriz.

4.2 Geri Çekme Simplisel Cebir

$\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi yardımıyla

$$F : \mathbf{Ceb}/R \longrightarrow \mathbf{Ceb}/S$$

funktorunu oluşturulabilir (Bkz. Örnek 1.2.2). Buradan,

$$\boldsymbol{\phi}^* : \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/R) \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/S)$$

funktorunun tanımlanabileceğini göstereceğiz. Bu funktora **geri çekme simplisel funktoru** denir. Dolayısıyla $\mathbf{E} \in Ob(\mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/R))$ için

$$\boldsymbol{\phi}^*(\mathbf{E}) = \mathbf{E}'$$

objesine **geri çekme (ko-indirgenmiş) simplisel cebir** denir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{tikzcd} \phi^*(E_n) = E'_n \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & E_n \arrow[d, "pd_0^{(n)} = p(d_0^1 d_0^2 \dots d_0^n)"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

karesi bir geri çekmedir. Diğer bir deyişle

$$\begin{tikzcd}
\phi^*(E_n)=E'_n \arrow[r] \arrow[dd] & E_n \arrow[d, "d_0^{(n)}"] \\
 & E_0 \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

$$\boldsymbol{\phi}^*(E_n)=\left\{(x_n,s)\mid p d_0^{(n)}(x_n)=\phi(s)\right\}\subseteq E_n\times S$$

dir.

Her $n\in\mathbb{N}$ için geri çekme diyagramlarını incelemeden önce Grothendieck yardımcı teoremini vereceğiz.

Yardımcı Teorem 4.1 $(Grothendieck)$

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & E_1 \arrow[d, shift right, "d_0^1"'] \arrow[d, shift left, "d_1^1"] \\
E'_0 \arrow[r, "\phi_0"'] & E_0
\end{tikzcd}$$

diyagramında, p epimorfizm, p_0 ve p_1, p nin çekirdek ikilileri ve q_0 ve q_1, q nin çekirdek ikilileri,

$$f_0 p_i = q_i f_1 \qquad (i=0,1)$$

ve

$$fp = qf_0$$

olsun.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_0"'] & K' \arrow[d, "q_0"] \\
E \arrow[r, "f_0"] & E'
\end{tikzcd}$$

geriçekme ise

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

geri çekmedir.

Sonuç 4.2 Geri çekme karelerinin bileşkesi yine bir geri çekmedir.

Şimdi $n = 1$ için geri çekmeyi inceliyelim.

$$\begin{tikzcd} E_1' \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[d, "pd_0^{(1)}=pd_0^1"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı geri çekmedir. Burada

$$\boldsymbol{\phi}^*(E_1) = E_1' = \{(e_1, s) \mid pd_0^1(e_1) = \phi(s)\} \subseteq E_1 \times S$$

dir. Şimdi Grothendieck Yardımcı Teoremini uygulayabilmek için

$$\begin{tikzcd} E_1' \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & E_1 \arrow[d, shift right, "d_0^1"'] \arrow[d, shift left, "d_1^1"] \\ E_0' \arrow[r, "\phi_0"'] & E_0 \end{tikzcd}$$

diyagramının geri çekme diyagramı olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\ E_0' = S \arrow[r, "\phi_0"'] & E_0 = R \end{tikzcd}$$

diyagramı verildiğinde

$$\boldsymbol{\phi}^*(E_1) = E_1 \times_{E_o} S = \{(e_1, s) \mid d_0^1(e_1) = \phi_0(s),\ d_1^1(e_1) = \phi_0(s)\}$$

olup

$$\begin{tikzcd} E_1' = E_1 \times_{E_0} S \arrow[r, dotted] \arrow[d, "(d_0^1)'"'] & E_1 \arrow[d, "d_0^1"'] \\ S \arrow[r] & E_0 \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir. Böylece Grothendieck Yardımcı Teoremi gereğince,

$$\begin{tikzcd} E_0' = S \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, equal] & E_0 \arrow[d, "p"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir. Sonuç 4.2.2 gereğince

$$\begin{tikzcd} E_1' \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d] & E_1 \arrow[d, "pd_0^1"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı bir geri çekmedir.

Ayrıca

$$(d_0)'(e_1,s)=s=(d_1)'(e_1,s) \text{ ve } s_0(s)=(0,s)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} d_1's_0'(s) &= d_1(0,s)=s \\ d_0's_0'(s) &= d_0(0,s)=s \end{aligned}$$

simplisel eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_1' : \; E_1 \times_R S \arrow[rr, shift left, "d_0'"] \arrow[rr, shift right, "d_1'"'] & & S \arrow[ll, bend left, "s_0'"] \end{tikzcd}$$

1-kat geri çekme simplisel cebir elde edilir.

$n=2$ için

$$\begin{tikzcd} \phi^*(E_2)=E_2' \arrow[r] \arrow[d] & E_2 \arrow[d, "pd_0^{(2)}=pd_0'd_0^2"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

olup $E_2'=E_2\times S$ dir. Buradan

$$\begin{tikzcd} E_2'=E_2\times_R S \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, shift left=2, "d_0'"] \arrow[d, "d_1'"] \arrow[d, shift right=2, "d_2'"'] & E_2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ E_1'=E_1\times_R S \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[u, bend left=40, "s_0'"] \arrow[u, bend left=60, "s_1'"] \arrow[d, shift left, "d_0'"] \arrow[d, shift right, "d_1'"'] & E_1 \arrow[u, bend right=40] \arrow[u, bend right=60] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ S=E_0' \arrow[r, "\phi=\phi_0"] \arrow[u, bend left=40, "s_0'"] & R \arrow[u, bend right=40] \end{tikzcd}$$

2-kat geri çekme simplisel cebir elde edeceğiz. Burada,

$$\begin{aligned} d_0'(e_2,s) &= (d_0(e_2),s) \\ d_1'(e_2,s) &= (d_1(e_2),s) \\ d_2'(e_2,s) &= (d_2(e_2),s) \\ s_0'(e_1,s) &= (s_0(e_1),s) \\ s_1'(e_1,s) &= (s_1(e_1),s) \end{aligned}$$

alınırsa; örneğin,

$$\begin{aligned} d_1's_0'(e_1,s) &= d_1'\left(s_0'(e_1,s)\right) \\ &= d_1'(s_0(e_1),s) \\ &= (d_1(s_0(e_1)),s) \\ &= (d_1s_0(e_1),s) \\ &= (e_1,s) \qquad (\because \; d_1s_0=id) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_0' s_0'(e_1,s) &= d_0'\left(s_0'(e_1,s)\right) \\ &= d_0'(s_0(e_1),s) \\ &= (d_0(s_0(e_1)),s) \\ &= (d_0 s_0(e_1),s) \\ &= (e_1,s) \qquad (\because\ d_0 s_0 = id) \end{aligned}$$

simplisel eşitlikleri sağlanır. Benzer şekilde diğer eşitlikler gösterilir.

Böylece n-kat geri çekme simplisel cebir

$$\begin{tikzcd} E_n \times_R S \arrow[r, shift left=2, "d_0'"] \arrow[r, shift right=2, "d_n'"'] & E_{n-1}\times_R S \arrow[l, bend left, "s_{n-1}'"] & \cdots \arrow[r, shift left=2, "d_0'"] \arrow[r, "d_1'"] \arrow[r, shift right=2, "d_2'"'] & E_2 \times_R S \arrow[l, bend left, "s_0'"] \arrow[l, bend left=50, "s_1'"] \arrow[r, shift left, "d_0'"] \arrow[r, shift right, "d_1'"'] & E_1 \times_R S \arrow[l, bend left, "s_0'"] \end{tikzcd}$$

şeklindedir. Burada dejenere ve yüz homomorfizmleri

$$\begin{aligned} d_i'(e_n,s) &= (d_i(e_n),s) \quad &; \quad (0 \le i \le n) \\ s_j'(e_{n-1},s) &= \left(s_j(e_{n-1}),s\right) \quad &; \quad (0 \le j \le n-1) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 4.3 $\mathfrak{X} = (C,R,\partial)$ çaprazlanmış R-modül ve $\mathfrak{G}\mathfrak{X} = \left(\phi^*(C),S,\partial^*\right)$ geri çekmesi olsun. **E** ve **F** sırasıyla $\mathfrak{X}$ve $\mathfrak{G}\mathfrak{X}$ ler den elde edilen simplisel cebirler ise

$$\mathbf{F} \cong \phi^*(\mathbf{E})$$

İspat.

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb})_{\le 1}$$

funktoru $\mathfrak{X}$ve $\mathfrak{G}\mathfrak{X}$ çaprazlanmış modüllerine uygulanırsa

$$F(\mathfrak{X}) = \mathbf{E}$$

simplisel cebiri

$$\mathbf{E}_n \cong C \ltimes (C \ltimes (\cdots (C \ltimes R)\cdots))$$

olup

$$\begin{aligned} d_n(c_n,\cdots,c_1,r) &= (c_n,\cdots,c_1,r,\partial(c_1)+r) \\ d_i(c_n,\cdots,c_1,r) &= (c_n,\cdots,c_{i+1}+c_i,\cdots,c_1,r,\partial(c_1)+r) \quad ; (0 < i < n) \\ d_0(c_n,\cdots,c_1,r) &= (c_{n-1},\cdots,c_1,r) \\ s_j(c_{n-1},\cdots,c_1,r) &= \Bigg(c_{n-1},\cdots,\underbrace{0}_{(j+1)\text{inci terim}},\cdots,c_1,r\Bigg) \quad ; \ (0 \le j \le n-1) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, $F(\mathfrak{G}\mathfrak{X}) = \mathbf{F}$ simplisel cebirinin n. inci terimi

$$\mathbf{F}_n \cong \phi^*(C) \ltimes \left(\phi^*(C) \ltimes \left(\cdots\left(\phi^*(C) \ltimes S\right)\cdots\right)\right)$$

şeklindedir. Buradan n-kat geri çekme simplisel cebir

$$\phi^*(\mathbf{E}_n) = C \ltimes (C \ltimes (\cdots (C \ltimes R)\cdots)) \times_R S$$

şeklindedir. $\phi^*(C) = C \times_R S$ olmak üzere

$$\psi : \phi^*(C) \ltimes \big(\phi^*(C) \ltimes \big(\cdots \big(\phi^*(C) \ltimes S\big)\cdots\big)\big) \longrightarrow \phi^*(\mathbf{E}_n)$$

fonksiyonu

$$(c,s)_i = (c_i, s_i) \ ; \ (1 \leq i \leq n)$$

olmak üzere

$$\big((c,s)_n, \cdots, (c,s)_1, s'\big) \longmapsto \big((c_n, s_n), \cdots, (c_{i+1}, s_{i+1}) + (c_i, s_i), \cdots, (c_1, s_1), s'\big)$$

tanımlanırsa ψ bir izomorfizmdir. $\square$

4.3 İleri İtme Simplisel Cebir

R birimli olsun. $\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi yardımıyla

$$G : \mathbf{Ceb}/S \longrightarrow \mathbf{Ceb}/R$$

funktorunu oluşturulabiliriz. Buradan,

$$\boldsymbol{\phi}_* : \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/S) \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/R)$$

funktorunun tanımlanabileceğini göstereceğiz. Bu funktora **ileri itme simplisel funktoru** denir. Dolayısıyla $\mathbf{F} \in Ob(\mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/S))$ için

$$\boldsymbol{\phi}_*(\mathbf{F}) = \mathbf{F}'$$

objesine **ileri itme (indirgenmiş) simplisel cebir** denir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, dotted] \arrow[d, "pd_0^{(n)} = p(d_0^1 d_0^2 \ldots d_0^n)"'] & \phi_*(F_n) = F_n' \arrow[d, dotted] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

karesi bir ileri itmedir.

$n=1$ için

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r] \arrow[d] & \phi_*(F_1) = F_1 \otimes_S R \arrow[d] \\
S \arrow[r, "\phi"'] & R
\end{tikzcd}$$

ileri itme diyagramını oluşturalım.

1-kat ileri itme simplisel cebir elde edeceğiz.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}'_1 : \; F_1 \otimes_S R \arrow[r, shift left, "d'_0"] \arrow[r, shift right, "d'_1"'] & R \arrow[l, bend left, "s'_0"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
d'_1(x_1 \otimes r) &= \phi(d_1 x_1) \cdot r \\
d'_0(x_1 \otimes r) &= r \\
s'_0(r) &= 1 \otimes r
\end{aligned}$$

$n=2$ için

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & F_2 \otimes_S R \arrow[d, shift right=2, "d'_2"'] \arrow[d, "d'_1"] \arrow[d, shift left=2, "d'_0"] \\
F_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[u, bend left] \arrow[u, bend left=60] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F_1 \otimes_S R \arrow[u, bend right, "s'_0"'] \arrow[u, bend right=60, "s'_1"'] \arrow[d, shift right, "d'_1"'] \arrow[d, shift left, "d'_0"] \\
S = F_0 \arrow[r, "\phi = \phi_0"'] \arrow[u, bend left] & R = F'_0 \arrow[u, bend right, "s'_0"']
\end{tikzcd}$$

şeklinde F'_2 2-kat ileri itme simplisel cebir elde edilmiş olur. Böylece dejenere ve yüz homomorfizmleri

$$\begin{aligned}
d'_0(x_2 \otimes r) &= d_0(x_2) \otimes r \\
d'_1(x_2 \otimes r) &= d_1(x_2) \otimes r \\
d'_2(x_2 \otimes r) &= d_2(x_2) \otimes r \\
s'_0(x_1 \otimes r) &= s_0(x_1) \otimes r \\
s'_1(x_1 \otimes r) &= s_1(x_1) \otimes r
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece n-kat ileri itme simplisel cebir

$$\begin{tikzcd}
F_n \otimes_S R \arrow[r, shift left=2, "d'_0"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2, "d'_n"'] & F_{n-1} \otimes_S R \arrow[l, bend left, "s'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, shift left=2, "d'_0"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=2, "d'_2"'] & F_2 \otimes_S R \arrow[l, bend left, "s'_0"] \arrow[l, bend left=50, "s'_1"] \arrow[r, shift left, "d'_0"] \arrow[r, shift right, "d'_1"'] & F_1 \otimes_S R \arrow[l, bend left, "s'_0"]
\end{tikzcd}$$

şeklindedir. Burada dejenere ve yüz homomorfizmleri

$$\begin{array}{ll} d_i'(x_n \otimes r) = d_i(x_n) \otimes r & ;\quad (0 \leq i \leq n) \\ s_j'(x_{n-1} \otimes r) = s_j(x_{n-1}) \otimes r & ;\quad (0 \leq j \leq n-1) \end{array}$$

olarak tanımlanır.

4.3.1 Uygulamalar

Serbest Simplisel Cebirler

F bir simplisel cebir olsun. Yani,

$$\mathbf{F}:\ \cdots \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & F_2 \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \arrow[l, bend left=70] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F_1 \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F_0 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

verilsin.

(i) $\quad \mathbf{X} = \{X_i\}_{i \geq 0}$, bağımsız değişkenler kümesi
(ii) $\quad$ Her $n \geq 0$ için $s_j(X_n) \subseteq X_{n+1}$

olmak üzere

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}[\mathbf{X}]:\ \cdots \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & F_2[X_2] \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \arrow[l, bend left=70] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & F_1[X_1] \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F_0[X_0] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

simplisel cebirine **serbest simplisel cebir** denir. Ayrıca

$$\mathbf{F} \hookrightarrow \mathbf{F}[\mathbf{X}]$$

gömme simplisel cebir morfizmi vardır.

Not: Yüz operatörlerinde bir kısıtlama yoktur.

Örneğin; $R[X]$ polinomlar halkası verilsin. Bu durumda

$$\mathbf{F}':\ \cdots \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & R[X] \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \arrow[l, bend left=70] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & R[X] \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=50] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & R \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$d_i = id = s_j$$

olmak üzere $\mathbf{F}'$ bir serbest simplisel cebirdir.

$\mathbf{F}' \in Ob(\mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/S))$ simplisel cebiri her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n = F_0 = S \quad \text{ve} \quad d_i = s_j = id_S$$

alalım. Bu durumda **F** serbest simplisel cebir olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{tikzcd} F_n = S \arrow[r] \arrow[d, "d_0^{(n)}=id_S"'] & S \otimes_S R = F'_n \arrow[d] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Özel olarak, $S = K^+[X]$ polinomal K-cebiri alınırsa

$$\cdots \quad \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} K^+[X] \otimes_S R \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} K^+[X] \otimes_S R \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow} R$$

şeklinde serbest simplisel cebir elde edilir.

Genel olarak

$$\Phi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$$

simplisel cebir morfizmini alalım. Yukarıda tanımladığımız $\mathbf{A}[X]$ simplisel cebirine **A** nın **serbest genişleme**si denir. Böylece

$$\mathbf{A}[X] \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$$

indirgenmiş simplisel cebiri, **B** nin bir serbest genişlemesi olmaktadır.

Böylece serbest genişleme inşası bölüm 1 de verilen simplisel çözülmesinin adım adım inşası ile verilmektedir (André, 1970).

Özel olarak $R = S/I$ alınırsa

$$\phi : S \longrightarrow S/I$$

yardımıyla elde edilen indirgenmiş simplisel cebir

$$\cdots \quad \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} S[s_0(X), s_1(X)][Y] \otimes (S/I) \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} S[X] \otimes (S/I) \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow} S \longrightarrow S/I$$

şeklinde olup "Adım-Adım" yapısıyla inşa edilir. Detaylı olarak Bölüm 1 de verilmiştir.

Kotanjant Kompleks

$\phi : S \to R$, k-cebir morfizmi ve P, R nin simplisel çözülmesi olsun.

$$\Omega_{P|_R} \otimes R$$

kümesini tanımlayalım. Burada

$$\Omega_{-|_R} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/R) \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Ceb}/R)$$

funktoru olmak üzere

$$\left(\Omega_{P|_R}\right)_n = \Omega_{P_n|_R}$$

olup $\Omega_{P_n|_R}$ Kähler diferensiyelidir (Bkz. Ek A). Böylece

$$\mathfrak{I}_\phi = \Omega_{P|_R} \otimes R$$

bir simplisel R-modüldür. Bu simplisel yapıya R nin **kotanjant kompleksi** denir. Böylece kotanjant kompleks bir indirgenmiş simplisel cebirdir.

EKLER

EK A

Halkaların Değişimi

$\phi : S \to R$, halka homomorfizmi olsun. M herhangi R-modülü verilsin. Bu durumda M,

$$\begin{array}{rcl} S \times M & \longrightarrow & M \\ (s, m) & \longmapsto & s \cdot m = \phi(s) m \end{array}$$

işlemiyle bir S-modüldür. Buradan $f : M_1 \to M_2$, R-modül homomorfizmi verildiğinde,

$$\begin{array}{rcl} f(s \cdot m) & = & f\big(\phi(s) m\big) \\ & = & \phi(s) f(m) \\ & = & s \cdot f(m) \end{array}$$

işlemiyle f, bir S-modül homomorfizmi olur. Böylece,

$$\phi^* : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathbf{Mod}$$

funktoru elde edilir. Bu funktora ϕ yardımıyla **kısıtlama** (restriction along a homomorphism) denir.

Tersine, herhangi S-modül verildiğinde R-modül elde edebilecek şekilde bir funktor tanımlanabilir. Fakat ϕ^* funktoru kadar kolay elde edilemez. Çünkü her S-modül, R-modül olarak alınamaz. Örneğin, $0 \neq V = \mathbb{R}$ vektör uzayını ele alalım. $\mathbb{R}$ sayılamaz bir kümedir. Böylece sayılabilir hiç bir $\mathbb{Z}$-modül, $\mathbb{R}$-modül olarak alınamaz.

Tabiki her zaman aşikar $F(M) = 0$ alınmasıyla ${}_S\mathbf{Mod} \longrightarrow_R \mathbf{Mod}$ funktoru oluşturulabilir. Fakat bu durum pek uygun olmaz. Çünkü M hakkında herhangi bir fikir vermez.

Tanım: $\phi : S \to R$ halka homomorfizmi ve M herhangi S-modülü olsun. Aşağıdaki evrensellik özelliği sağlanıyor ise N, R-modülüne, M nin ϕ yardımıyla **indirgenmiş modülü** denir.

(i) $\varphi : M \to N$, R-modül olsun
(ii) Herhangi T, S-modül ve $f : M \to T$,S-modül homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \\ N \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $\overline{f}: N \to T$ homomorfizmi vardır. Evrensellik özelliği yardımıyla M nin ϕ yardımıyla indirgenmiş bir R-modülü var ise indirgenmiş modül biricik olacaktır. Bu durumda,

$$\phi_*: {}_S\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathbf{Mod}$$

funktoru elde edilir. Bu modül $\phi_*(M)$ ile gösterilir.

Örnek: $\phi: S \to R$ halka homomorfizmi, X hehangi bir küme F serbest S-modül alalım. G, X üzerinde serbest R-modül olsun. Bu durumda $\phi_*(F) = G$, S-modüldür. Çünkü,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f i_1"] \arrow[d, hook, "i_1"'] & N \\
F \arrow[ur, "f"'] \arrow[d, "\phi_*"'] & \\
G \arrow[uur, dotted, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. F serbest olduğundan

$$\widetilde{f}\phi_* i_1 = f i_1 \Longrightarrow \widetilde{f}\phi_* = f$$

dir. $g: G \to T$ diğer R-modül homomorfizmi ise $g\phi = f$ olup

$$g i_2 = f i_1 = \widetilde{f} i_2 \Longrightarrow g = \widetilde{f}$$

olup $\widetilde{f}$ biriciktir.

Eğer $X = \{1\}$ alınırsa $\phi_*(S) = R$ dir.

Örnek: S değişmeli halka ve

$$\begin{array}{rccl} \phi = i: & S & \hookrightarrow & S[X] \\ & s & \longmapsto & s = s + 0X + 0X^2 + \cdots + \end{array}$$

içine halka homomorfizmini alalım. M-modülü verilsin. Bu durumda $M[X]$, indirgenmiş $S[X]$-modülünü oluşturacağız.

N, herhangi $S[X]$-modül ve $f: M \to N$, S-modül homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & N \\
M[X] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagram değişmeli olacak şekilde biricik $\widetilde{f}$ vardır.

$$\begin{array}{lccl} \widetilde{f}: & M[X] & \longrightarrow & N \\ & m_0 + m_1 X + \cdots + m_n X^n & \longmapsto & f(m_0) + f(m_1)X + \cdots + f(m_n)X^n \end{array}$$

bir $S[X]$-modül homomorfizmidir. Yani $\phi_*(M)=M[X]$ dir.

Kähler Diferensiyel

A değişmeli K-cebir olsun. Ω , A-modülü ve $d: A \to \Omega$ bir K-derivasyonunu inşa edeceğiz. Ayrıca bu derivasyon evrensellik özelliğini sağlar. Yani M herhangi bir A-modül ve $D: A \to M$ derivasyon olmak üzere diyagrammm diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $f: \Omega \to M$, A-lineer homomorfizmi vardır. Bununla birlikte d derivasyonu izomorfizm farkıyla biriciktir. (Ω, d) çifti A nın Kähler diferensiyel modülü olarak adlandırılır. $\left(\Omega_{A/K}, d_{A/K}\right)$ ile gösterilir. Burada $x \in A$ için Ω de dx, x in k-diferensiyeli olarak adlandırılır.

Her M, A-modülü için $\operatorname{Hom}_A(\Omega, M)$ A-modülü ile $\operatorname{Der}_K(A, M)$ birimli A-modül olduğu açıktır.

(Ω, d) inşası:

$$\begin{array}{cccccc} \mu & : & A \otimes_K A & \longrightarrow & A \\ & & x \otimes y & \longmapsto & xy \end{array}$$

K-lineer fonksiyonunu alalım. A değişmeli olduğundan μ homomorfizmdir.

$$\mathfrak{J} = \text{Çek}\left(\mu\right) = \left\{ \sum_i x_i y_i \;\middle|\; \sum_i x_i y_i = 0 \right\}$$

$A \otimes_K A$ nın bir idealidir.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \otimes_K A \\ x & \longmapsto & x \otimes 1_A \end{array}$$

K-cebir homomorfizmi olduğundan $x \in A$ ve $\sum_i x_i \otimes y_i \in \mathfrak{J}$ için

$$x\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) = \sum_i (x x_i) \otimes y_i$$

işlemiyle $A \otimes_K A$, A-modüldür. Ayrıca

$$\mathfrak{J}_{A/K} = \langle \{1 \otimes x - x \otimes 1 \mid x \in A\} \rangle$$

dir. Gerçekten, eğer, $\sum_i x_i \otimes y_i \in \mathfrak{J}$ ise $\sum_i x_i y_i = 0$ ve böylece

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes y_i - \left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) \otimes 1 = \sum_i x_i \left(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1\right)$$

dir.

$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, A-modülünü Ω tarafından belirtiriz. Yani $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 = \Omega$ ve $x \in A$ için $d: A \to \Omega$ dönüşümünü tanımlayabiliriz.

$$d(x) = 1 \otimes x - x \otimes 1 \;(\operatorname{mod} \mathfrak{J}^2)$$

d nin k-lineer olduğu açıktır. Eğer, $x, y \in A$ ise

$$\begin{aligned} & \left(1 \otimes xy - xy \otimes 1\right) - x\left(1 \otimes y - y \otimes 1\right) - y\left(1 \otimes x - x \otimes 1\right) \\ = \; & 1 \otimes xy - y \otimes x - x \otimes y + xy \otimes 1 \\ = \; & (1 \otimes x - x \otimes 1)\left(1 \otimes y - y \otimes 1\right) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{J}^2) \end{aligned}$$

ve böylece $d\left(xy\right) = x\,dy + y\,dx$ dir. Buyüzden d, ΩA-modülü içinde A nın k-derivasyonudur. Çünkü, $1 \otimes x - x \otimes 1$ elemanları $\mathfrak{J}$, A-modülü tarafından üretilir. Bu nedenle dx elemanları $\mathfrak{J}$, A-modülünün üretecidir.

Koszul Kompleks

Bir Koszul kompleksi tanımlamak için $\wedge^p(M)$ dış kuvvetleri ve bir M, R-modülünün dış cebirine ihtiyaç vardır.

$p > 0$ için $u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$ formundaki elemanlar tarafından üretilen alt modül aracılığıyla M modülün $\otimes^p M$ tensör çarpımının çarpanları biçiminde $\wedge^p(M)$, R-modülü tanımlanabilir. Burada $i \neq j$ için $u_i = u_j$ dir. Böylece p-lineer kanonik dönüşüm

$$w_p : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{p \text{ tane}} \longrightarrow \wedge^p(M)$$

elde edilirki bu evrensel alterne dönüşümdür. Herhangi p-alterne lineer dönüşümü $f : M \times \cdots \times M \to N$ için f grup olacak şekilde $g : \wedge^p(M) \to N$ bir tek homomorfizm vardır. $w_p\left(u_1, u_2, \cdots, u_p\right)$ nin elemanları $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p$ biçiminde yazılır. Biz $\wedge^0(M) = R$ olarak alacağız.

Direkt toplam $\wedge(M) = \oplus_{p=0}^{\infty} \wedge^p(M)$ derecelendirilmiş R-cebir ile oluşturulacaktır. $M = \wedge^1(M)$ aracılığıyla her R-cebir tarafından üretilen $\wedge(M)$, M ye ait olan $u_1, u_2, \cdots, u_p$ elemanların çarpımı bir $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p$ elemanıdır. Bu nedenle $\wedge(M)$ deki çarpımı $\wedge$ ile göstereceğiz.

Genelde $\wedge(M)$ cebiri değişmeli değildir fakat $x \in \wedge^p(M)$, $y \in \wedge^q(M)$ homojen elemanları için $x \wedge y = (-1)^{pq}\, y \wedge x$ dir.

$\varphi \in Hom(M, R)$ olsun. Kompleks $K\left(\varphi\right)$ yi $p \geq 0$ için $K_p\left(\varphi\right) = \wedge^p(M)$ ve $p < 0$ için $K_p\left(\varphi\right) = 0$ biçiminde tanımlarız. Diferensiyelleri $d_p : \wedge^p(M) \to \wedge^{p-1}(M)$

$$d_p\left(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p\right) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \varphi\left(u_j\right) u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{j-1} \wedge u_{j+1} \wedge \cdots \wedge u_p \tag{4.1}$$

ile verilir. Her p için basit bir hesaplama $d_{p-1} d_p = 0$ dır ve böylece $K\left(\varphi\right)$, R-modüllerin kompleksidir. (1) den her bir $x \in \wedge^p(M)$, $y \in \wedge^q(M)$ için

$$d_{p+q}\left(x \wedge y\right) = d_p(x) \wedge y + (-1)^p\, x \wedge d_q\left(y\right) \tag{4.2}$$

elde edilir.

Tanınlanan $K(\varphi)$ kompleksi $\varphi : M \to R$ homomorfizminin koszul kompleksi olarak adlandırılır. Eğer R halkasının $x_1, x_2, \cdots, x_n$ elemanlarının bir dizisi x ile gösterilirse ve $e_1, e_2, \cdots, e_n$ bazı ile n rankın serbest modülü F ise bu durumda bir $\varphi : F \to R$ homomorfizminin $K(\varphi)$ koszul kompleksi $i = 1, 2, \cdots, n$ için $\varphi(e_i) = x_i$ dir ve $K(x)$ biçiminde gösterilir.

Eğer N bir R-modül ise bu durumda $K(\varphi) \otimes_R N$, $K(x) \otimes_R N$ kompleksleri için sırasıyla $K(\varphi; N)$, $K(x; N)$ yazabiliriz. Bunlar N modülündeki sabitlerle (x dizisinin) φ homomorfizminin koszul kompleksleri olarak adlandırılır. $K(\varphi; N)$ kompleksinin diferensiyellerini elde etmek için $K(\varphi)$ kompleksinin diferensiyelleri olan d_p için $d_p \otimes 1$ formunu kullanırız. Eğer F, n ranklı serbest modülü ise $p > n$ için $\wedge^p(F) = 0$ ve $1 \leq p \leq n$ için $\wedge^p(F)$ modülü $\binom{n}{p}$ ranklı bir serbest modüldür. Eğer, $e_1, e_2, \cdots, e_n$, F bimodülün bazını oluşturuyorsa bu durumda $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq i_n$ pozitif tamsayılar dizisi için $\wedge^p(F)$ nin bazı $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ formundaki elemanlarından oluşur.

Böylece $K(x)$ koszul kompleksler sonlu serbest modül kompleksleridir.

Koszul komplekslerin temel özelliklerini bir teoremle verelim.

Teorem: Bir R-halkasının $x_1, x_2, \cdots, x_n$ elemanlarının bir dizisi x ve N, bir R-modül olsun. Bu durumda,

$i)$ $H_0(K(x;N)) = N/(x_1, x_2, \cdots, x_n)N$

$ii)$ $K(x;N)$ koszul komplekslerinin $H_p(K(x;N))$ homoloji modülü, $p = 0, 1, \cdots, n$ için $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + Ann(N)$ ideali tarafından yok edilir.

$iii)$ R-halkasının bir düzenli dizisi x dizisi ise bu durumda koszul kompleks $(K(x), R/(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ modülünün bir serbest ayrışımıdır.

EK B

Geri Çekme (Pullback)

Tanım: $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. A, B, X, $\mathcal{C}$ nin objeleri ve

$$\theta : A \to X \text{ ve } \phi : B \to X$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : Y \to A \text{ ve } \beta : Y \to B$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\theta\alpha = \phi\beta$;

(ii) Herhangi $g : Z \to B$ ve $f : Z \to A$ morfizmleri için $\phi f = \theta g$ olmak üzere

$$\alpha\varepsilon = f \text{ ve } \beta\varepsilon = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Z \to Y$ morfizmi var;

şartları sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin **geri çekmesi** denir.

Bu tanımı

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramlarla üretebiliriz. Yani,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\theta"] \\ & B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Teorem:(α, β) ve (α', β'), (θ, ϕ) ikilisinin geri çekmesi olsun. Bu durumda

$$\alpha'\varphi = \alpha \text{ ve } \beta'\varphi = \beta$$

olacak şekilde $\varphi : Y \to Y'$ biricik izomorfizmi vardır.

İspat. $(\alpha' : Y'' : Y' \to B)$ geri çekme olduğundan $\varphi : Y \to Y'$ biricik izomorfizmi vardır. Öyleki

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\theta"] \\
& B \arrow[r, "\varphi"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\alpha^{'}\varphi=\alpha \text{ ve } \beta^{'}\varphi=\beta$$

Benzer şekilde $(\alpha: Y\to A,\ \beta: Y\to B$ geri çekme olduğundan

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[dr, dotted, "\varphi^{'}"] \arrow[drr, bend left, "\alpha^{'}"] \arrow[ddr, bend right, "\beta^{'}"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d] \\
& B \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

$$\alpha\varphi^{'}=\alpha^{'} \text{ ve } \beta\varphi^{'}=\beta^{'}$$

dır. Bu durumda $\alpha(\varphi^{'}\varphi)=(\alpha\varphi^{'})\varphi=\alpha^{'}\varphi=\alpha$ ise $\alpha(\varphi^{'}\varphi)=\alpha$ dır. Benzer şekilde $\beta(\varphi^{'}\varphi)=(\beta\varphi^{'})\varphi=\beta^{'}\varphi=\beta$ ise $\beta(\varphi^{'}\varphi)=\beta$ dır. Bu ise bize

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, bend left=20, "1_Y"] \arrow[dr, bend right=20, "\varphi^{'}\varphi"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d] \\
& B \arrow[r] & X
\end{tikzcd} \qquad \alpha(\varphi^{'}\varphi)=\alpha$$

diyagramı $\varphi^{'}\varphi$ ile veya 1_Y ile değişmeli olmasını verir. Yani $\alpha 1_Y=\alpha$ ve $\beta 1_Y=\beta$ dır. (α,β) geri çekmesinin biricik özelliğinden yani φ ve $\varphi^{'}$ biricik olduğundan $\varphi^{'}\varphi=1_Y$ elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[dr, bend left=20, "1_Y"] \arrow[dr, bend right=20, "\varphi\varphi^{'}"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha^{'}"] \arrow[ddr, bend right, "\beta^{'}"'] & & \\
& Y' \arrow[r, "\alpha^{'}"'] \arrow[d, "\beta^{'}"] & A \arrow[d] \\
& B \arrow[r] & X
\end{tikzcd} \qquad \alpha^{'}(\varphi\varphi^{'})=\alpha$$

olup $\varphi\varphi^{'}=1_Y$ bulunur.

Böylece geri çekmeler (eğer varsa) izomorfizma farkıyla biriciktir. $\square$

Örnek: $\mathcal{C} = {}_R\mathbf{Mod}$, $A,\ B,\ X$ ler R-modüller ise her $(\theta : A \to X,\ \phi : B \to X)$ ikilisinin bir geri çekmesi vardır.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a,b) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a \arrow[d, mapsto] \\ b \arrow[r, mapsto] & \phi(b) = \theta(a) \end{tikzcd}$$

$$Y = \{(a,b) \in A \oplus B \mid \theta(a) = \phi(b)\}$$

tanımlayalım.

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & Y & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \beta : & Y & \longrightarrow & B \\ & (a,b) & \longmapsto & b \end{array}$$

Bu durumda Y, $A \oplus B$ nin alt modülüdür ve θ, ϕ $R-$modül homomorfizmidir. Çünkü $\phi(rb) = \theta(ra) = r\theta(a) = r\phi(b)$ dir. Ayrıca

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Herhangi $x \in Z$ için $(\phi f)(x) = (\theta g)(x)$ dir. Buradan

$$\phi(f(x)) = \theta(g(x))$$

olup

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : Z & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \varepsilon(x) = (f(x), g(x)) \end{array}$$

tanımlayabiliriz ve $\beta\varepsilon = f$ ve $\alpha\varepsilon = g$ dir. Çünkü $\forall x \in Z$ için

$$\begin{aligned} (\beta\varepsilon)(x) &= \beta(\varepsilon(x)) = \beta(f(x), g(x)) = f(x) \\ (\alpha\varepsilon)(x) &= \alpha(\varepsilon(x)) = \alpha(f(x), g(x)) = g(x) \end{aligned}$$

dir. $\mu : Z \to Y$ diğer morfizm ve $\beta\mu = f$ ve $\alpha\mu = g$ olsun. Fakat

$$\begin{aligned} \mu(x) &= (\beta\mu(x), \alpha\mu(x)) = (f(x), g(x)) = \varepsilon(x) \\ &\Rightarrow \mu = \varepsilon \end{aligned}$$

olup biriciktir.

Örnek: $\phi : B \to X$ herhangi bir homomorfizm ise

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

diyagramının bir geri çekme olabilmesi için gerek ve yeter şart Çek$\phi = Y$ olmasıdır. Çünkü

$$\begin{aligned} Y &= \{(b,0) \mid \phi(b) = \theta(0) = 0\} \subseteq B \times \{0\} \\ &\cong ek\phi \end{aligned}$$

dir. Böylece çekirdekler, geri çekmelerin özel bir halidir.

Teorem:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

geri çekme diyagramı olsun. Bu durumda

1. a) θ monomorfizm ise β monomorfizm, θ epimorfizm ise β epimorfizmdir.

b) ϕ monomorfizm ise α monomorfizm, ϕ epimorfizm ise α epimorfizmdir.

2. ϕ epimorfizm ve Çek(α), Y de direkt toplamdır ancak ve ancak en az bir $\xi : A \to B$ vardır öyleki $\theta = \phi\xi$ dir.

İleri İtme (Pushout)

Tanım:$\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $A,\ B,\ X,\ \mathcal{C}$ nin objeleri ve

$$\theta : X \to A \ \text{ ve } \ \phi : X \to B$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : A \to Y \ \text{ ve } \ \beta : B \to Y$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\alpha\theta = \beta\phi$;

(ii) Herhangi $g : B \to Z$ ve $f : A \to Z$ morfizmleri için $f\phi = g\theta$ olmak üzere

$$\varepsilon\alpha = f \ \text{ ve } \ \varepsilon\beta = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Y \to Z$ morfizmi var ;

şartları sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin **ileri itmesi** denir. Özetle;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y \arrow[dr, dotted, "\varepsilon"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Teorem: (α,β) ve $(\alpha^{'},\beta^{'})$, (θ,ϕ) ikilisinin ileri itmesi olsun. Bu durumda $\varphi : Y \to Y'$ biricik izomorfizmi vardır. Öyleki

$$\varphi\alpha = \alpha^{'} \text{ ve } \varphi\beta = \beta^{'}$$

dır.

İspat. Geri çekme tekinin duali olup benzer şekilde gösterilir. $\square$

Örnek: $\mathcal{C} = {}_R\mathbf{Mod}$, alınırsa

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Y ileri itme objeleri.

$$Y = (A \oplus B)/C$$

dir. Burada

$$\mathcal{C} = \{(\theta(x), -\phi(x)) \mid x \in X\}$$

dir.

Teorem: (θ,ϕ) ikilisi (α,β) ikilisinin ileri itmesi olsun. Bu durumda

1. a) α monomorfizm ise ϕ monomorfizm, α epimorfizm ise ϕ epimorfizmdir.

b) β monomorfizm ise θ monomorfizm, β epimorfizm ise θ epimorfizmdir.

2. α monomorfizm ve Gör(ϕ), X de direkt toplamdır ancak ve ancak en az bir $\xi : A \to B$ vardır öyleki $\beta = \xi\alpha$ dır.

EK C 1

$\psi\phi = id_A$ ve $\phi\psi = id_{\text{Çeks}s\ltimes R}$ ve ϕ ile ψ nin homomorfizm olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}(\psi\phi)(a) &= \psi(\phi(a)) \\ &= \psi(s(a), a-(es)(a)) \\ &= s(a)+e(a-(es)(a)) \\ &= s(a)+e(a)-s(a) \\ &= s(a)=a \\ &= id_R(a)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\phi\psi)(x,r) &= \phi(\psi(x,r)) \\ &= \phi(x+e(r)) \\ &= (s(x+e(r)), x+e(r)-(es)(x+e(r))) \\ &= (s(x)+se(r), x+e(r)-(es)(x)+(es)(e(r))) \\ &= (r, x+e(r)-e(s(x))+e(s(e(r)))) \quad (\because\ x\in \text{Çeks} \Rightarrow s(x)=0) \\ &= (r,x) \\ &= id_{R\ltimes \text{Çeks}}(r,x) = id_{\text{Çeks}\ltimes R}(x,r) \quad (\because\ R\ltimes \text{Çeks} \cong \text{Çeks} \ltimes R)\end{aligned}$$

olup $\psi = \phi^{-1}$ olur.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= (s(a+b),(a+b)-(es)(a+b)) \\ &= (s(a)+s(b), a+b-((es)(a)+(es)(b))) \\ &= (s(a), a-(es)(a))+(s(b), b-(es)(b)) \\ &= \phi(a)+\phi(b)\end{aligned}$$

EK C 2

$se = id_R = te$ şartı

$$\begin{aligned}se(r) &= s(r,0) = r+\partial(0) = r \\ te(r) &= t(r,0) = r\end{aligned}$$

EK C 3

$$\begin{aligned}(i)\quad k(s\cdot(c_1,s_1)) &= k((\phi(s))\cdot c_1, ss_1) && (\because \text{etki tanımından}) \\ &= (k((\phi(s))\cdot c_1),(ks)s_1) && (\because \text{skalerle çarpımdan}) \\ &= ((k\phi s)\cdot c_1,(ks)\cdot s_1) && (\because \text{etki tanımından}) \\ &= ((\phi sk)\cdot c_1,(sk)\cdot s_1) && (\because \text{değişme özelliği}) \\ &= s\cdot(kc_1, ks_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\quad s\cdot((c_1,s_1)+(c_2,s_2)) &= s\cdot(c_1+c_2, s_1+s_2) && (\because \text{toplamdan}) \\ &= ((\phi s)\cdot(c_1+c_2), s(s_1+s_2)) && (\because \text{etki tanımından}) \\ &= ((\phi s)\cdot c_1+(\phi s)\cdot c_2, ss_1+ss_2) && (\because \text{çarpımdan}) \\ &= ((\phi s)\cdot c_1, ss_1)+((\phi s)\cdot c_2, ss_2) && (\because \text{toplamdan}) \\ &= s\cdot(c_1,s_1)+s\cdot(c_2,s_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(iii)\quad (s_1+s_2)\cdot(c,s) &= (\phi(s_1+s_2)\cdot c,(s_1+s_2)\cdot s) && (\because \text{etki tanımından})\\
&= (\big(\phi s_1+\phi s_2\big)\cdot c, s_1 s+s_2 s) && (\because \text{etki tanımından})\\
&= (\big(\phi s_1\big)\cdot c, s_1 s)+(\big(\phi s_2\big)\cdot c s_2 s) && (\because \text{toplamdan})\\
&= s_1\cdot(c,s)+s_2\cdot(c,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(iv)\quad s\cdot((c_1,s_1)(c_2,s_2)) &= s\cdot(c_1c_2,s_1s_2)\\
&= (\big(\phi s\big)\cdot(c_1c_2), s s_1 s_2)\\
&= ((\partial c)\cdot(c_1c_2), s s_1 s_2)\\
&= (c c_1 c_2, s s_1 s_2)\\
&= (s\cdot(c_1,s_1))(c_2,s_2)
\end{aligned}
$$

$ss_1 = s_1 s$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
(cc_1c_2, ss_1s_2) &= (c_1cc_2, s_1ss_2)\\
&= (c_1,s_1)(s\cdot(c_2,s_2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v)\quad (s_1s_2)\cdot(c,s) &= (\phi(s_1s_2)\cdot c, s_1s_2s)\\
&= s_1\cdot(\big(\phi s_2\big)\cdot c, s_2 s)\\
&= s_1\cdot(s_2\cdot(c,s))
\end{aligned}
$$

EK C 4

$\partial^*(s,c)=s$ homomorfizmi ve $s\cdot(c_1,s_1)=(\big(\phi s\big)\cdot c_1, ss_1)$ değişmeli cebir etkisi ile CM1, CM2 aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

$$
\begin{aligned}
CM1.\quad \partial^*(s\cdot(c_1,s_1)) &= \partial^*(\big(\phi s\big)\cdot c_1, ss_1)\\
&= ss_1\\
&= s\partial^*(c_1,s_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CM2.\quad \partial^*(c,s)\cdot(c_1,s_1) &= s\cdot(c_1,s_1)\\
&= (\big(\phi s\big)\cdot c_1, ss_1)\\
&= (cc_1, ss_1)\big(\because \big(\phi s\big)\cdot c_1=(\partial c)\cdot c_1 = cc_1\big)\\
&= (c,s)(c_1,s_1)
\end{aligned}
$$

çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

EK C 5

$$r\cdot(d,[t]\otimes x)=(r\cdot d,[r\cdot t]\otimes \overline{r}x)$$

etkisi değişmeli cebir etkisidir. Gerçektende,

$$
\begin{aligned}
(i)\quad k(r\cdot(d,[t]\otimes x)) &= k(r\cdot d,[r\cdot t]\otimes \overline{r}x)\\
&= (kr\cdot d, k[rt]\otimes \overline{r}x)\\
&= kr\cdot(d,[t]\otimes x)\\
&= r\cdot(k(d,[t]\otimes x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii) \quad r\cdot[(d_1,[t_1]\otimes x_1)+(d_2,[t_2]\otimes x_2] &= (r\cdot(d_1+d_2),[r\cdot(t_1+t_2)]\otimes\overline{r}(x_1+x_2))\\
&= (r\cdot d_1+r\cdot d_2,[r\cdot t_1+r\cdot t_2]\otimes(\overline{r}x_1+\overline{r}x_2)\\
&= (r\cdot d_1,[r\cdot t_1]\otimes\overline{r}x_1)+(r\cdot d_2,[r\cdot t_2]\otimes\overline{r}x_2)\\
&= r\cdot(d_1,[t_1]\otimes x_1)+r\cdot(d_2\cdot[t_2]\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(iii) \quad (r_1+r_2)\cdot(d,[t]\otimes x) &= \Big((r_1+r_2)\cdot d,[(r_1+r_2)\cdot t]\otimes\overline{(r_1+r_2)}x\Big)\\
&= (r_1\cdot d+r_2\cdot d,[r_1\cdot t+r_2\cdot t]\otimes\overline{r_1}x+\overline{r_2}x)\\
&= (r_1\cdot d,[r_1\cdot t]\otimes\overline{r_1}x)+(r_2\cdot d,[r_2\cdot t]\otimes\overline{r_2}x)\\
&= r_1\cdot(d,[t]\otimes x)+r_2\cdot(d,[t]\otimes x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(iv) \quad r\cdot[(d_1,[t_1]\otimes x_1)(d_2,[t_2]\otimes x_2)] &= r\cdot(d_1d_2\cdot[t_1t_2]\otimes x_1x_2)\\
&= (r(d_1d_2),[r(t_1t_2)]\otimes\overline{r}x_1x_2)\\
&= ((r\cdot d_1)d_2,[(r\cdot t_1)t_2]\otimes\overline{r}x_1x_2)\\
&= (r\cdot d_1,[r\cdot t_1]\overline{r}x_1)(d_2,[t_2\otimes x_2)\\
& \quad\; r\cdot(d_1,[t_1]\otimes x_1)(d_2\cdot[t_2]\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v) \quad (rr')\cdot(d,[t]\otimes x) &= (rr'\cdot d,[rr'\cdot t]\otimes\overline{rr'}x)\\
&= (r(r'\cdot d)',[r(r'\cdot t)]\otimes\overline{rr'}x)\\
&= r\Big(r'\cdot d,[r'\cdot t]\otimes\overline{r'}x\Big)\\
&= r(r'\cdot(d,[t]\otimes x))\\
&= r'(r\cdot(d,[t]\otimes x))
\end{aligned}
$$

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alp, M., 1997, GAP, Crossed Modules, Cat^1- Groups, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor.

Alp, M. and Wensley, C. D., 2000, Enumeration of Cat^1-groups of low order, Int. J. Algebra Comput., 10(4), 407-424.

Alp, M., 2006, Pullbacks of Crossed Modules and Cat^1-Commutative Algebras, Turk J Math., 30, 237-246.

André, M., 1970, Homologie des Algebrès Commutatives, Springer-Verlag, 206.

Arvasi, Z., 1994, Applications in Commutative Algebra of the Moore Complex of a Simplicial Algebra, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor.

Arvasi, Z., Porter T., 1996, Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, Journal of Algebras,181, 426-448.

Arvasi, Z., Ege, U., 2003, Annihilators, Multipliers and Crossed Modules, Applied Categorical Structures, Vol.11, 487-506.

Brown, R., 1984, Coproducts of Crossed P-modules: Applications to second Homotopy Groups and to the Homology of Groups, Topology, 23, 337-345.

Brown, R., Higgins, P., 1978, On the Connection between the Second Relative Homotopy Groups of some Related Spaces, Proc. London Math. Soc.,3, 36, 193-212.

Brown, R., Loday, J.L., 1987, Homotopical Excision, and Hurwicz Theorems, for n-cubes of Spaces, Proc. London Math. Soc., 54, 3, 176-192.

Brown, R., Wensley, Ch. D., 1996, Computing Crossed Modules Induced by an Inclusion of a Normal Subgroup, with Applications to Homotopy 2-types, Theory Appl. Categ., 2, 1, 3-16.

Casas, J.M., Ladra, M., 2000, Colimits in the Crossed Modules Category in Lie Algebras, Georgian Mathematical Journal, 7, 3, 461-474.

Ellis, G.J., 1984, Crossed Modules and their Higher Dimensional Analogues, Ph.D Thesis University of Wales, Bangor.

Gerstenhaber, M., 1966, On the Deformation of Rings and Algebras, Annals of Math. Soc., 84, 1-19.

Lichtenbaum, S. and Schlessinger, M., 1967, The Cotangent Complex of a Morphism, Trans Amer. Math. Soc., 128, 41-70.

Loday, J.L., 1982, Spaces with Finitely many non-trivial Homotopy Groups, J. Pure and Applied Algebra, Vol. 24, 179-202.

Mac Lane, S., 1958, Extensions and Obstructions for Rings, Illinois J. Math., 121, 316-345.

Mac Lane, S., 1971, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, 5 Springer, New York.

Porter, T., 1978, Some Categorical Results in the Category of Crossed Modules in Commutative Algebra, J. Algebra, 109, 415-429.

Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 99, 458-465.

Quillen, D., 1970, Homology of Commutative Rings, Proc. Sympos. Pure Math., 17, 65-87.

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and an Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Thesis,U.C.N.W.

Stenstrom, B., 1975, Rings of Quotients, Graduate Texts in Mathematics, 5 Springer, New York.

Whitehead, J. H. C., 1986, Combinatorial Homotopy I, Bull. Amer. Math. Soc., 213-245.

Whitehead, J. H. C., 1986, Combinatorial Homotopy II, Bull. Amer. Math. Soc., 453-496.

ÖZGEÇMİŞ

Özgün Gürmen 24 Ekim 1977 tarihinde Eskişehir'de doğmuştur. Lisans öğrenimine 1997 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başlamış ve 2001 yılında mezun olmuştur. Yüksek lisans öğrenimini 2001 yılında aynı üniversitenin Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında "Profinite Çaprazlanmış Modüller" başlıklı teziyle tamamlamıştır. İş hayatına 2002 yılında Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak başlamıştır. 2004 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde doktora öğrenimini yapmak üzere görevlendirilmiştir ve halen aynı bölümde akademik çalışmalarına devam etmektedir.

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
ESKİŞEHİR