

Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin B-Spline Sonlu Elemanlar Çözümleri

Dursun İrk

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2007

B-spline Finite Element Solutions of the  
Some Partial Differential Equation Systems

Dursun Irk

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics

August 2007

Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem  
Sistemlerinin B-Spline Sonlu Elemanlar Çözümleri

Dursun Irk

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İdris Dağ

Ağustos 2007

Dursun İrk'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. İdris DAĞ (Danışman)

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah ALĞIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu tezde, B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar metodu kullanılarak bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri ile ilgilenilmiştir.

İlk bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar verilmiştir. İlk olarak solitary ve soliton dalgaları hakkında kısa bir bilgi verilmiştir ve lineer olmayan oluşum denklemleri, korunum kanunları, sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları tanımlanmıştır. Spline fonksiyonlar kavramı verildikten sonra, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonları tanımlanmış ve elde edilmiştir. Son olarak sayısal çözümleri araştırılacak olan, genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger (GNLS), complex modified Korteweg-de Vries (CMKdV) denklemleri ve Boussinesq sistemi tipi (BST) denklem sistemi, test problemleri ile birlikte tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, GNLS denklemi kübik ve kuintik B-spline kolokeyşin metotları kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Solitary dalgaları ve iki soliton dalgasının çarpışması durumlarının incelendiği iki test problemi, analitik çözüm ile önerilen sayısal çözümleri kıyaslamak için kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde, kuintik B-spline kolokeyşin metodu, CMKdV denkleminin sayısal çözümü için kullanılmıştır. Önerilen metot, solitary ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemleri kullanılarak incelenmiştir.

Kuintik B-spline kolokeyşin metodu, dördüncü bölümde BST denklem sisteminin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılmıştır. İlerleyen dalgalar, iki ilerleyen dalganın çarpışması ve solitary dalga test problemleri, metodun doğruluğunu incelemek için kullanılmıştır.

Son bölümde ise önerilen metotlar hakkında sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: B-spline, Sonlu elemanlar metodu, Soliton, Solitary dalgaları, Kısmi diferensiyel denklem sistemi

## SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of some partial differential equation systems by using B-spline finite element collocation method.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First, a brief history for solitary and soliton waves are given and the nonlinear evolution equation, conservation laws, the finite difference and the finite element methods are described. After the concept of the spline functions is outlined, cubic B-spline and quintic B-spline functions are described and are constructed. Finally, generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equation, complex modified Korteweg-deVries (CMKdV) equation and Boussinesq system type (BST) equation solved numerically in the next chapters are introduced together with their test problems.

In the second chapter, the GNLS equation is solved numerically by using both cubic and quintic B-spline collocation methods. Two test problems including solitary waves and interaction of two soliton waves are used to compare between analytic and proposed methods.

In the third chapter, quintic B-spline collocation method is used to solve the CMKdV equation numerically. The proposed method is examined by using solitary and interaction of two solitary waves test problems.

In the fourth chapter, quintic B-spline collocation method is designed to have the numerical solution of the BST system of equations. Traveling waves, interaction of two traveling waves and solitary wave test problems are used to demonstrate the performance of the method.

In the last chapter a discussion about the proposed methods is given.

Keywords: B-spline, Finite element method, Soliton, Solitary waves, System of partial differential equation

## TEŞEKKÜR

Doktora alıőmalarım boyunca, bana danıőmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danıőmanım Prof. Dr. İdris DAĞ'a, değerleri fikirlerine baővurduđum hocalarım Yrd. Do. Dr. Bülent SAKA ve Yrd. Do. Dr. Abdullah ALĐIN'a teőekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	xi
TABLOLAR DİZİNİ.....	xiii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xvi
1. TEMEL KAVRAMLAR .....	1
1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış .....	1
1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....	6
1.3 Korunum Kanunları .....	8
1.4 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları.....	9
1.4.1 Sonlu farklar metodu .....	10
1.4.2 Sonlu elemanlar metodu .....	13
1.5 B-spline Fonksiyonlar .....	15
1.5.1 Kübik B-spline kolokeyşin metodu .....	17
1.5.2 Kuintik B-spline kolokeyşin metodu .....	21
1.6 GNLS Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri .....	27
1.6.1 Solitary dalga çözümü .....	30
1.6.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	31
1.7 CMKdV Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri .....	32
1.7.1 Solitary dalga çözümü .....	34
1.7.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	35
1.8 BST Denklem Sistemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri .....	35
1.8.1 Solitary ve ilerleyen dalga çözümleri .....	39
1.8.2 İlerleyen iki dalganın çarpışması .....	44
2. GNLS DENKLEMİNİN KÜBİK VE KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METOTLARIYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....	46



## İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

	<u>Sayfa</u>
2.1 GNLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu .....	46
2.2 GNLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	55
2.3 Test Problemleri.....	66
2.3.1 Solitary dalga çözümü .....	67
2.3.2 İki solitary (soliton) dalgasının çarpışması .....	74
2.4 Sonuç .....	78
3. CMKdV DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	81
3.1 CMKdV Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	81
3.2 Test Problemleri.....	90
3.2.1 Solitary dalga çözümü .....	90
3.2.2 İki solitary dalgasının çarpışması .....	94
3.3 Sonuç .....	98
4. BST DENKLEM SİSTEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	100
4.1 BST Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	100
4.2 Test Problemleri.....	109
4.2.1 İlerleyen dalga çözümü .....	109
4.2.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması .....	122
4.2.3 Solitary dalga çözümü .....	130
4.3 Sonuç .....	139
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	141

**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)**

	<b><u>Sayfa</u></b>
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	143
ÖZGEÇMİŞ.....	149

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Basit bir dalga profili .....	1
1.2 Bir solitary dalgasının hareketi.....	4
1.3 Crank-Nicolson yaklaşımı.....	12
1.4 $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında $\phi_{m-1}, \dots, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları.....	19
1.5 $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında $\phi_{m-2}, \dots, \phi_{m+3}$ kuintik B-spline fonksiyonları.....	25
2.1 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 3$ zamanındaki  Analitik çözümün modülü-Sayısal çözümün modülü .....	71
2.2 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için sayısal çözümün modülü.....	72
2.3 $t = 0$ anındaki dalgaların durumu .....	75
2.4 $N = 1000, \Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için sayısal çözümün modülü.....	76
2.5 $N = 1000, \Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için çarpışma anlarındaki sayısal çözümün modülü.....	76
3.1 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 3$ zamanındaki  Analitik çözümün modülü-Sayısal çözümün modülü .....	92
3.2 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için sayısal çözümün modülü.....	93
3.3 $t = 0$ anındaki dalgaların durumu .....	95
3.4 $N = 1000, \Delta t = 0.001$ ve $0 \leq x \leq 80$ için sayısal çözümün modülü.....	96
3.5 $N = 1000, \Delta t = 0.001$ ve $0 \leq x \leq 80$ için çarpışma anlarındaki sayısal çözümün modülü.....	97
4.1 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki  Analitik-Sayısal  çözüm.....	112
4.2 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için sayısal çözümler.....	113
4.3 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki  Analitik-Sayısal  çözüm.....	117
4.4 $N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için sayısal çözümler.....	117

## ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<b><u>Sekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
4.5	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki  Analitik-Sayısal  çözüm..... 121
4.6	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için sayısal çözümler..... 122
4.7	$t = 0$ anındaki dalgaların durumu ..... 123
4.8	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için sayısal çözümler ..... 124
4.9	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için çarpışma anlarındaki sayısal çözümler ..... 124
4.10	$t = 0$ anındaki dalgaların durumu ..... 125
4.11	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-10 \leq x \leq 40$ için sayısal çözümler..... 126
4.12	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-10 \leq x \leq 40$ için çarpışma anlarındaki sayısal çözümler ..... 127
4.13	$t = 0$ anındaki dalgaların durumu ..... 128
4.14	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 180$ için $\eta_m, u_m$ sayısal çözümleri..... 129
4.15	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 180$ için çarpışma anlarındaki $\eta_m, u_m$ sayısal çözümleri ..... 130
4.16	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki  Analitik-Sayısal  çözüm..... 133
4.17	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $ \eta_m , u_m$ sayısal çözümleri..... 134
4.18	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 5$ zamanındaki  Analitik-Sayısal  çözüm..... 138
4.19	$N = 1000, \Delta t = 0.01$ ve $-20 \leq x \leq 30$ için $\eta_m, u_m$ sayısal çözümleri..... 138

## TABLOLAR DİZİNİ

<b><u>Tablo</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
1.1	Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri ..... 18
1.2	Bölünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri ..... 24
2.1	$\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 3$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 69
2.2	$N = 1750$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 3$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 70
2.3	$N = 1000$ , $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için korunum sabitlerinin sayısal değerleri ..... 73
2.4	$\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 10$ zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri ..... 73
2.5	$N = 1000$ , $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için korunum sabitlerinin sayısal değerleri ..... 77
2.6	$\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 10$ zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri ..... 78
3.1	$\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 3$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 91
3.2	$N = 1750$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 3$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 92
3.3	$N = 1000$ , $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için korunum sabitlerinin sayısal değerleri ..... 94
3.4	$\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 60$ için $t = 10$ zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri ..... 94
3.5	$N = 1000$ , $\Delta t = 0.001$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitlerinin sayısal değerleri ..... 98

**TABLolar DİZİNİ (Devam Ediyor)**

<b><u>Tablo</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
3.6	$\Delta t = 0.001$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 10$ zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri ..... 98
4.1	$\eta_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 110
4.2	$u_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 111
4.3	$\eta_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 111
4.4	$u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 112
4.5	$\eta_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 114
4.6	$u_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 115
4.7	$\eta_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 115
4.8	$u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 116
4.9	$\eta_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 119
4.10	$u_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 119
4.11	$\eta_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 120

**TABLolar DİZİNİ (Devam Ediyor)**

<b><u>Tablo</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
4.12	$u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 120
4.13	$\eta_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 131
4.14	$u_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 132
4.15	$\eta_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 132
4.16	$u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 133
4.17	$\eta_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 136
4.18	$u_m$ için $\Delta t = 0.001$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 136
4.19	$\eta_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 137
4.20	$u_m$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması ..... 137

**KISALTMALAR DİZİNİ**

<b><u>Kısaltmalar</u></b>	<b><u>Açıklama</u></b>
GNLS	Genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger
CMKdV	Complex modified Korteweg de Vries
BST	Boussinesq sistemi tipi
KdV	Korteweg de Vries
MKdV	Modified Korteweg de Vries
TSD	Ters saçılma dönüşümü
RB	Regularized Boussinesq
KB	Klasik Boussinesq
BS	Bona Smith



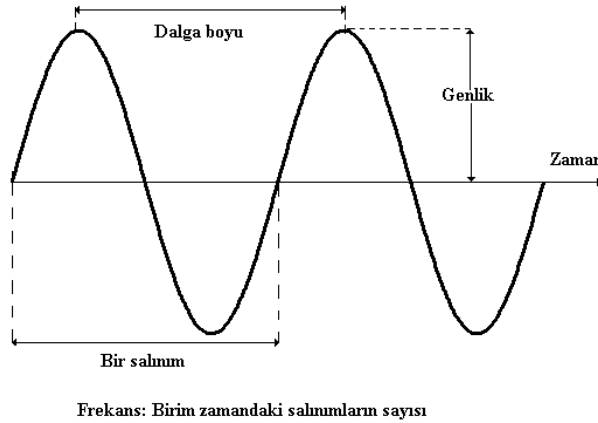
## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavramlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak soliton-solitary dalgaları, lineer olmayan oluşum denklemleri ve korunum kanunları hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları özetlendikten sonra, spline fonksiyonların tanımı verilerek, kübik B-spline ve kuintik B-spline interpolasyon polinomları tanımlanmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri araştırılacak olan, genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger (GNLS) denklemi, complex modified Korteweg-de Vries (CMKdV) denklemi ve Boussinesq sistemi tipi (BST) denklem sistemleri, test problemleri, başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanımlanmıştır.

#### 1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, F., 1982).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, M., 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarakta tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılabilirler. Solitary dalgalarını keşfeden Russel, bu gözlemini bir çok kaynakta verildiği gibi aşağıdaki şekilde gerçekleştirmiştir:

Russel, 1834 yılında, Edinburgh kentindeki Heriot-Watt üniversitesinin Riccarton kampüsü yakınlarındaki Union kanalında deneyler yaparken aşağıda kendi sözleri ile anlattığı doğa olayını gözlemlemiştir (Russel, 1844).

*"İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir*

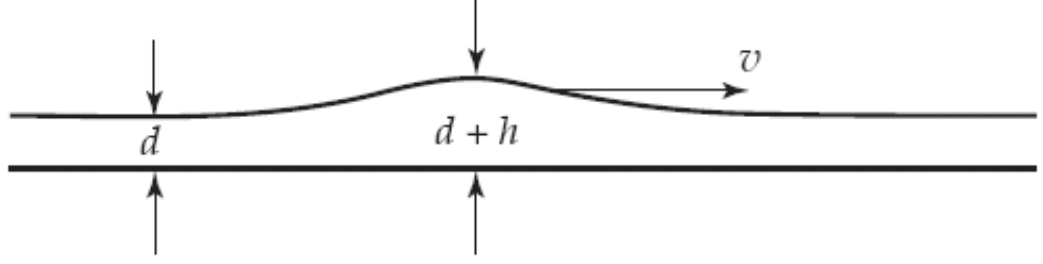
*solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütleinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 feet mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansı bulduğum zamandı."*

Bu keşfinden sonra Russel, labaratuvarında su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

- (i) Solitary dalgaları  $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$  şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.
- (iv)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bakınız Şekil 1.2).



Şekil 1.2 Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederek elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

O yıllarda Russel'ın sonuçları deneysel olarak kaldı ve bir denklemin çözümü olarak solitary dalgaları elde edilemedi. Bununla birlikte, bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu oldu. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

formundan sığ su dalgalarının hareketi modelleyen denklem üzerine çalışmaya başladılar. Denklemden

- $u(x, t)$ , dalğanın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$ , küçük genlikli dalğanın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$ , dağılma parametresine,

- $\gamma$ , lineer olmayan parametreye,
- $T$ , yüzey gerilimine;
- $\rho$ , suyun yoğunluğuna;

karşılık gelmektedir. Korteweg ve de Vries, (1.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Buradaki  $\tilde{u}(x - vt)$  terimi, Russell'ın solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries, solitary dalgaların varlığını kanıtlamış oldular ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınladılar (Korteweg and de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky and Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarak verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

Soliton çözümleri, hem analitik hemde sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerindeki çalışmalar daha da hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, laser fiziği, süperiletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chao, 1995). Solitonlar ayrıca uzun mesafelere yol alabildiğinden, teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır. 2006 yılında Harvard üniversitesi elektrik mühendisliğinde görevli olan Donhee Ham ve iki doktora öğrencisi

David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından geliştirilen elektronik bir aygıt sayesinde, soliton dalgaları elde edilmiştir. Bu buluş ile normal dalgalar yerine soliton dalgalarının kullanılmasının yolu açılmıştır ve yakın gelecekte radar, iletişim sektörü gibi bir çok yerde solitonlar kullanılacaktır (Harvard Gazette archives, 2006).

## 1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri  $t$  zamanı olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri,  $K[u]$ ;  $u$  ve  $u$ 'nun  $x$  değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere

$$u_t = K[u] \quad (1.4)$$

formundadır. Eğer  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir.

Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise, mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok daldaki problemlerde gözlenmektedir. Aşağıda bu tip denklemlere bir kaç örnek verilmiştir (Zheng, 2004):

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda  $u(x, t)$ ,  $t$  zamanında  $x$  konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.5) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için bir model denklem olarakta kullanılmaktadır.

(ii) İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşabiliriz. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferini incelersek

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k\nabla u) + f(u) \quad (1.6)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denkleminde ulaşırız.

Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alırsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) \quad (1.7)$$

formundaki lineer olmayan dalga denklemine ulaşabiliriz.

Kuantum mekaniğinde, aşağıdaki formlardaki lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir:

Sine-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0 \quad (1.8)$$

Klein-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0 \quad (1.9)$$

Kübik Schrödinger denklemi:

$$iu_t - \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (1.10)$$

(iii) İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ilede karşılaşılabilir. Örneğin polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denklemine ulaşılır:

$$u_t + \epsilon \Delta^2 u = \Delta \phi(u) \quad (1.11)$$

Bu denklemde  $\epsilon$  belirli bir küçük sabit ve genellikle  $\phi(u) = u^3 - u$  olarak alınmaktadır. (1.11) denkleminin dördüncü merteden bir oluşum denklemi olduğunu belirtelim. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.12)$$

formundaki meşhur KdV denklemdir.

Ayrıntılı bilgi için (Fordy, 1990; Taşcan, 2002; Zheng, 2004) ve verdikleri referanslar incelenebilir.

### 1.3 Korunum Kanunları

(1.4) lineer olmayan oluşum denklemlerinin korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \quad (1.13)$$

formundadır. Burada  $\mathcal{T}[u]$  ve  $\mathcal{X}[u]$  sırasıyla,  $u$  ve  $u$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır.  $\mathcal{T}_t$  ve  $\mathcal{X}_x$  sırasıyla  $t$  ve  $x$  değişkenlerine göre tam türevi ifade ederler ve

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + \dots, \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

Eğer  $\mathcal{T}$ ,  $u$ 'nun lokal bir fonksiyonu ise, yani; herhangi bir  $\mathcal{T}$ 'nin değeri yalnızca  $x$ 'in küçük bir komşuluğundaki  $u$ 'ya bağlı ise, bu durumda  $\mathcal{T}$  lokal korunumlu yoğunluktur denir.

Eğer  $\mathcal{X}$  de lokal ise, bu durumda (1.13), lokal korunum kanunudur.

Özel olarak, eğer  $\mathcal{T}$  ifadesi açık olarak,  $x$  veya  $t$ 'ye bağlı olmayıp,  $u$  ve  $u$ 'nun  $x$  değişkenine göre türevlerine bağlı ise,  $\mathcal{T}$  ifadesine polinomsal korunumlu yoğunluk denir.  $\mathcal{X}$  de polinomsal ifade ise, (1.13) polinomsal korunum kanunudur. Uygun sınır koşulları kullanıldığında, lokal korunum kanunları ile hareket sabitleri arasında yakın ilişki ortaya çıkar.

(1.13) denkleminin  $x$  değişkenine göre, bir  $(A, B)$  aralığında integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = 0 \quad (1.15)$$

elde edilir.  $(B - A)$ 'nın periyodun tam katı olduğu veya  $u(x, t)$ 'nin  $x \rightarrow \mp\infty$  ve  $(A, B) = (-\infty, \infty)$  iken sifıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında, (1.15) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx = 0$$



ifadesi bulunur. Buradan  $t$  değişkenine göre integral alındığında

$$\int_A^B \mathcal{T} dx = \text{sabit}$$

hareket sabiti elde edilir (Fordy, 1990; Taşcan, 2002).

Soliton teoride en fazla ilgilenilen (1.12) KdV denkleminin sonsuz sayıda korunum kanunları vardır. Bunlardan bir kaç

$$\mathcal{T}_0 = u, \quad \mathcal{X}_0 = -u_{xx} - 3u^2,$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2}u^2, \quad \mathcal{X}_1 = -uu_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_x - 2u^3,$$

$$\mathcal{T}_2 = u^3 - \frac{1}{2}(u^2)_x, \quad \mathcal{X}_2 = u_x u_{xxx} - \frac{1}{2}(u^2)_{xx} - 3u^2 u_{xx} - 6u(u^2)_x - \frac{9}{2}u^4,$$

şeklinindedir. Burada  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  ifadeleri KdV denklemi için sırasıyla kütle, momentum ve enerjidir.

$$iu_t = u_{xx} - 2u|u|^2$$

formundaki kübik Schrödinger denkleminin korunum kanunlarından bir kaç

$$\mathcal{T}_0 = u\bar{u}, \quad \mathcal{X}_0 = i(u\bar{u}_x - \bar{u}u_x),$$

$$\mathcal{T}_1 = \bar{u}u_x - \bar{u}_x u, \quad \mathcal{X}_1 = 2i\bar{u}_x u_x - u\bar{u}_t + \bar{u}u_t - 2i|u|^4,$$

$$\mathcal{T}_2 = \bar{u}_x u_x + |u|^4, \quad \mathcal{X}_2 = -(u_t \bar{u}_t - \bar{u}_t u_x)$$

olarak bulunabilir (Taşcan, 2002).

Bu çalışmada, sayısal çözümleri araştırılacak olan GNLS ve CMKdV denklemleri için korunum sabitleri denklemlerin tanıtıldığı alt bölümde verilecektir.

#### 1.4 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferensiyel denklemler, kısmi türevli diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ile

ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları bu yöntemlerden ikisidir.

### 1.4.1 Sonlu farklar metodu

Sonlu farklar metodunun temeli, bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a, b]$  tanım aralığı için,  $N$  bir pozitif tamsayı,  $h = \frac{b-a}{N}$  ve parçalanma noktaları

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda,  $U(x)$  fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere,  $U(x_i+h)$  ve  $U(x_i-h)$  ifadelerinin  $x_i$  noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i+h) = U(x_i) + hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots, \quad (1.16)$$

$$U(x_i-h) = U(x_i) - hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.17)$$

olarak bulunabilir. Sırasıyla, (1.16-1.17) eşitlikleri

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i+h) - U(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) - \dots, \quad (1.18)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i-h)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.19)$$

olarak yazılabileceğinden  $U$  ifadesinin  $x_i$  noktasındaki birinci türevi

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i+h) - U(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.20)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i-h)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.21)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.20-1.21) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü

gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve  $\mathcal{O}(\cdot)$  ile gösterilir.

Eğer (1.17) eşitliği, (1.16) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} U_x(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - U(x_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_x(x_i) &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.22)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca, (1.16) ve (1.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} U_{xx}(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - 2U(x_i) + U(x_i - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_{xx}(x_i) &= \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

Benzer şekilde, iki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımları da Taylor serisi kullanılarak bulunabilir.  $N, M$  pozitif tamsayılar,  $a \leq x \leq b$ ,  $a' \leq y \leq b'$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $k = \frac{b'-a'}{M}$  ve parçalanma noktaları

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{ve} \quad y_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

olsun. Bu durumda,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre birinci türev için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.24)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.25)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.26)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (1.27)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (1.28)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + \mathcal{O}(k^2) \quad (1.29)$$

olarak bulunabilir. İkinci ve üçüncü türev için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde bulunabilir. Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995) incelenebilir.

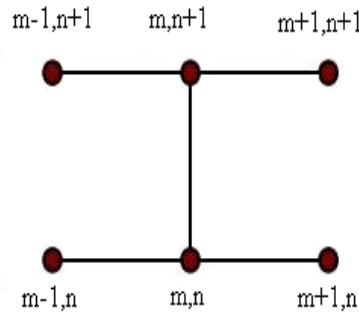
## Crank-Nicolson metodu

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, zamana göre ikinci dededen ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank and Nicolson, 1947). Crank ve Phyllis metotlarında, diferensiyel denklemin sonlu fark metoduyla sayısal çözümünü araştırmak için

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

Bir boyutlu problemler için Crank-Nicolson yaklaşımı Şekil 1.3'de gösterilmiştir.



Şekil 1.3: Crank-Nicolson yaklaşımı

Crank-Nicolson metodunun uygulanmasını basit bir örnek üzerinde incelersek,  $a$  reel bir sabit olmak üzere

$$u_t = au_{xx}$$

formundaki kısmi türevli diferensiyel denklem, konum artımı  $h$  ve zaman artımı  $\Delta t$  olmak üzere, ilgili türevler için sonlu fark yaklaşımlarının kullanılması sonucunda

$$\begin{aligned}\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= a \frac{(u_{xx})_m^{n+1} + (u_{xx})_m^n}{2} \\ \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= \frac{a}{2} \left[ \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right]\end{aligned}$$

eşitliğine dönecektir.

#### 1.4.2 Sonlu elemanlar metodu

Sonlu farklar metodunda, üzerinde çalışılan tanım aralığı birbirlerinden farklı olan noktalar kümesi ile yer değiştirilirken, sonlu elemanlar metodunda, tanım bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan alt tanım bölgelerine ayrılır. Ayrıca sonlu elemanlar metodunda aranan çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları arasında bir takım farklılıklar vardır. Bu farklılıklar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Sonlu farklar metodunda, diferensiyel denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar metodunda ise diferensiyel denklemin çözümü için bir yaklaşım yapılır.
- Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar metodu ile çözümleri zordur. Ayrıca sonlu farklar metodu, problemin çözüm bölgesinin düzgün geometrik şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık, sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hemde düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir.
- Sonlu farklar metodunun en önemli özelliği uygulanmasının kolay olmasıdır.
- Bölünme noktaları arasındaki bir değer için, sonlu farklar metodu ile bir yaklaşım yapılamazken, sonlu elemanlar metodunda her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir.

- Sonlu elemanlar yaklaşımı, genelde sonlu farklar yaklaşımından daha iyidir. Fakat bu durum probleme bağlıdır ve aksi örnekler bulunabilir.
- Sonlu farklar metotlarını elde etmek için Taylor serileri yeterli olurken, sonlu elemanlar metotlarını elde etmek daha zor işlemler ve daha fazla bilgi gerektirir.

Ayrıntıya girmeden sonlu elemanlar metodunun temeli sayılan ağırlıklı rezidüler metodunu ve kolokeyşin metodunu inceleyelim.

### Ağırlıklı Rezidüler metodu

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.30)$$

şeklinde ifade edilen bir diferensiyel denklemde;  $L$  bir lineer diferensiyel operatör,  $f(x)$  bilinen bir fonksiyon ve  $u(x)$  aranan çözüm olsun. (1.30) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında, aranan  $u(\cdot)$  ifadesi yerine

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.31)$$

formundaki  $\tilde{u}(\cdot)$  sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(1.31) eşitliğinde verilen  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonksiyonu, diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda,  $\phi_j(\cdot)$  fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemini sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidüler metodu,  $\tilde{u}(x)$  yaklaşık çözümüyle orijinal denklem arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçüsü rezidü ile tanımlanır:

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x) \quad (1.32)$$

$W_j$  ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (1.32) ile verilen rezidü ifadesi;  $W_j(x)$  ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki integrali anlarsa

$$\int_{\Omega} W_j(x) R(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.33)$$

formunda  $N$  bilinmeyen  $N$  denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden  $a_j$  bilinmeyenleri bulunarak (1.31) eşitliğinde yerine yazılırsa  $\tilde{u}(x)$  yaklaşık çözümüne ulaşılır.

### Kolokeyşin metodu

Kolokeyşin metodu, ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta  $W_j$  ağırlık fonksiyonları olarak

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad (1.34)$$

Dirac Delta fonksiyonları seçilir. Dirac Delta fonksiyonları

$$\delta(x - x_j) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.35)$$

özelliğine sahiptirler ve  $R(x_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$  olduğunda, (1.33) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşin metodu için çözüm, (1.31) eşitliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} L\tilde{u}(x) - f(x) &= 0 \\ L\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)\right) - f(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

formunda elde edilir (Lapidus and Pinder, 1982).

### 1.5 B-spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayısı çoğaldıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda ardı ardına gelen iki veri arasında birinci, ikinci, üçüncü yada daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır:

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve bilgisayar programlarının yapılması kolaydır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty = -\lim_{i \rightarrow -\infty} x_i \quad (1.37)$$

B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesi olsun. Bu durumda 0. dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.38)$$

formunda tanımlanır.  $B_i^0$  B-spline fonksiyonunun süreksiz olduğu açıktır. Diğer yandan sıçramanın olduğu her noktada

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) = 1 = B_i^0(x_i) \\ \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) = 0 = B_i^0(x_{i+1}) \end{array} \right\} \text{ her } i \text{ ve } x_i \text{ için} \quad (1.39)$$

olduğundan  $B_i^0$  B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir. Yukarıdaki verilen iki eşitlikten dolayıda  $B_i^0(x)$  B-spline fonksiyonunun

$$\begin{aligned} &\text{Her } i \text{ ve } x_i \text{ için, } B_i^0(x) \geq 0, \\ &\text{Her } x \text{ için, } \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

özelliklerini sağladığı ve sadece  $[x_i, x_{i+1})$  aralığında değer aldığı açıktır.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} B_i^k &= \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ k &= 1, 2, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.41)$$



indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir (Höllig, 2003).  $B_i^k$  B-spline fonksiyonu aynı nokta dizileri için tanımlı ve derecesi  $k$  olan spline fonksiyonlar için tabandır.

Ayrıca derecesi  $k$  olan B-spline fonksiyonu,  $-\infty \leq i \leq \infty$  ve

$$(x - x_{m+i})_+^k = \begin{cases} (x - x_{m+i})^k & , x_{m+i} \leq x \\ 0 & x_{m+i} > x \end{cases} \quad (1.42)$$

olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{k=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} (-1)^m (x - x_{m+i})_+^k \quad (1.43)$$

formülü kullanılarak elde edilebilir. (1.43) ifadesi,  $x \leq x_i$  ve  $x \geq x_{i+m+1}$  olduğunda  $B_i^k(x) = 0$  durumunu sağlar ve derecesi  $k$  olan B-spline,  $k - 1$  kez sürekli türeve sahip olur.

### 1.5.1 Kübik B-spline kolokeyşin metodu

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.44)$$

olsun ve  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki kübik B-spline fonksiyonları gösterebilir. Bu durumda  $\phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}$  fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975). Kübik B-spline kolokeyşin metodunda, kübik B-spline fonksiyonları deneme fonksiyonları olarak kullanılarak,  $w(x, t)$  çözümü için

$$w_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.45)$$

formundaki  $w_m(x, t)$  yaklaşık çözümü araştırılır.

$\phi_m$  kübik B-spline fonksiyonları,  $m = -1, 0, \dots, N + 1$  için  $h = (x_{m+1} - x_m)$  olmak üzere aşağıda verilen bağıntı ile hesaplanır (Prenter, 1975):

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - \\ 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - \\ 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (1.46)$$

$\phi_m(x)$  spline fonksiyonu ve onun ilk iki türevi,  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığının dışında sıfırdır. ' ve '' ,  $x$ 'e göre birinci ve ikinci türevi göstermek üzere,  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığında  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$  ve  $\phi''_m(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^3 = 0, \\
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m-1} - x_{m-1}) + 3h(x_{m-1} - x_{m-1})^2 - 3(x_{m-1} - x_{m-1})^3] \\
\phi_m(x_{m-1}) &= 1, \\
\phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^3] = 4, \\
\phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1})^3 = 1, \\
\phi_m(x_{m+2}) &= 0, \\
\phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{3}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^2 = 0, \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [3h^2 + 6h(x_{m-1} - x_{m-1}) - 9(x_{m-1} - x_{m-1})^2] = \frac{3}{h}, \\
\phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0, \\
\phi'_m(x_{m+1}) &= -\frac{3}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1})^2 = -\frac{3}{h}, \\
\phi'_m(x_{m+2}) &= 0, \\
\phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2}) = 0, \\
\phi''_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m-1} - x_{m-1})] = \frac{6}{h^2}, \\
\phi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2}, \\
\phi''_m(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{6}{h^2}, \\
\phi''_m(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler, kolaylık açısından Tablo 1.1'de verilmiştir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

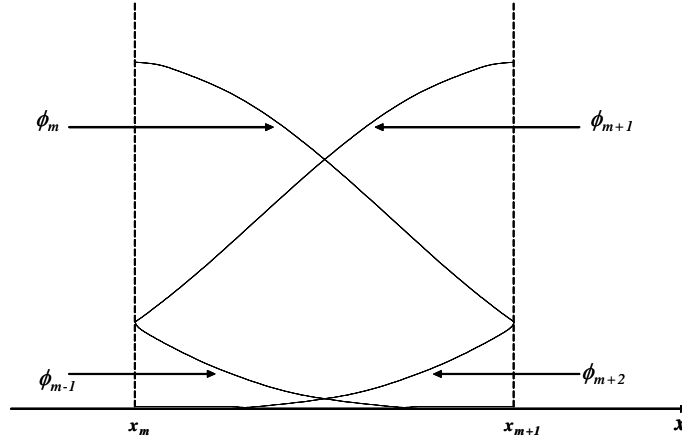
$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

Ayrıca,  $0 \leq \zeta \leq 1$  ve  $h\zeta = x - x_m$  dönüşümü yardımıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerindeki şekil fonksiyonları, gerekli işlemlerin yapılması sonucunda yerel koordinat sisteminde

$$\begin{aligned}\phi_{m-1}(x) &= \frac{1}{h^3}(x_{m+1} - x)^3, \\ \phi_{m-1}(\zeta) &= 1 - 3\zeta + 3\zeta^2 + \zeta^3, \\ \phi_m(x) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3], \\ \phi_m(\zeta) &= 4 - 6\zeta^2 + 3\zeta^3, \\ \phi_{m+1}(x) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x - x_m) + 3h(x - x_m)^2 - 3(x - x_m)^3], \\ \phi_{m+1}(\zeta) &= 1 + 3\zeta + 3\zeta^2 - 3\zeta^3, \\ \phi_{m+2}(x) &= \frac{1}{h^3}(x - x_m)^3, \\ \phi_{m+2}(\zeta) &= \zeta^3\end{aligned}$$

olarak bulunabilir.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 4 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.4'de gösterilmiştir.



Şekil 1.4:  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanında  $\phi_{m-1}, \dots, \phi_{m+2}$  kübik B-spline fonksiyonları

Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde, 4 ardışık  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kübik B-spline fonksiyonu dışındaki diğer tüm kübik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından,

bu eleman üzerindeki  $w$  için yaklaşım ifadesi

$$w_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.47)$$

eşitliği ile bulunur.

Tablo 1.1 ve (1.47) yaklaşık çözümünün kullanılması ile bölünme noktalarında  $w_m$  ve ilk iki türevi

$$\begin{aligned} w_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t), \\ w_m &= \delta_{m-1} \phi_{m-1}(x_m) + \delta_m \phi_m(x_m) + \delta_{m+1} \phi_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \phi_{m+2}(x_m), \\ w_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(x) \delta_j(t), \\ w'_m &= \delta_{m-1} \phi'_{m-1}(x_m) + \delta_m \phi'_m(x_m) + \delta_{m+1} \phi'_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \phi'_{m+2}(x_m), \\ w'_m &= \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w''_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(x) \delta_j(t), \\ w''_m &= \delta_{m-1} \phi''_{m-1}(x_m) + \delta_m \phi''_m(x_m) + \delta_{m+1} \phi''_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \phi''_{m+2}(x_m), \\ w''_m &= \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Sonuç olarak  $w_m, w'_m$  ve  $w''_m$  yaklaşımlarının bölünme noktalarındaki değerleri  $\delta_m$  parametresine göre

$$w_m = w_m(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \quad (1.48)$$

$$w'_m = w'_m(x_m, t) = \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \quad (1.49)$$

$$w''_m = w''_m(x_m, t) = \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (1.50)$$

olarak elde edilir.

Ayrıntılı bilgi için, kübik B-spline interpolasyon polinomları kullanılarak, bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerinin sonlu elemanlar metotları kullanılarak sayısal

çözümlerinin araştırıldığı (Dağ, et al., 2005 a, 2005 b ; Gardner et. al., 1996 Saka and Dağ, 2005) adlı çalışmalar ve verdikleri referanslar incelenebilir.

### 1.5.2 Kuintik B-spline kolokeysin metodu

$[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bir parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.51)$$

olsun ve  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki kuintik B-spline fonksiyonları gösterebilir. Bu durum da  $\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}$  fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975). Kuintik B-spline kolokeysin metodunda, kuintik B-spline fonksiyonları deneme fonksiyonları olarak kullanılarak  $w(x, t)$  çözümü için

$$w_m(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.52)$$

formundaki yaklaşık çözüm araştırılır.

$\phi_m$  kuintik B-spline fonksiyonları  $h = (x_{m+1} - x_m)$ ,  $m = 0, \dots, N$  olmak üzere aşağıda verilen formda parçalı polinom fonksiyonlardır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durum.} \end{cases} \quad (1.53)$$

$\phi_m(x)$  spline fonksiyonları ve onun ilk dört türevi,  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığının dışında sıfır olacaktır.  $'$ ,  $''$ ,  $'''$  ve  $^{iv}$  sırasıyla  $x$ 'e göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevi

göstermek üzere,  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığındaki  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$ ,  $\phi'''_m(x)$  ve  $\phi^{iv}_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-3}) &= \frac{1}{h^5}(x_{m-3} - x_{m-3})^5 = 0, \\
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [(x_{m-2} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m-2} - x_{m-2})^5] = 1, \\
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [(x_{m-1} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m-1} - x_{m-2})^5 + 15(x_{m-1} - x_{m-1})^5] \\
\phi_m(x_{m-1}) &= 26, \\
\phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^5} [(x_m - x_{m-3})^5 - 6(x_m - x_{m-2})^5 + 15(x_m - x_{m-1})^5 \\
&\quad - 20(x_m - x_m)^5] = 66, \\
\phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [(x_{m+1} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m+1} - x_{m-2})^5 + 15(x_{m+1} - x_{m-1})^5 \\
&\quad - 20(x_{m+1} - x_m)^5 + 15(x_{m+1} - x_{m+1})^5] = 26, \\
\phi_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [(x_{m+2} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m+2} - x_{m-2})^5 + 15(x_{m+2} - x_{m-1})^5 \\
&\quad - 20(x_{m+2} - x_m)^5 + 15(x_{m+2} - x_{m+1})^5 - 6(x_{m+2} - x_{m+2})^5] = 1, \\
\phi_m(x_{m+3}) &= 0, \\
\phi'_m(x_{m-3}) &= \frac{5}{h^5}(x_{m-3} - x_{m-3})^4 = 0, \\
\phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m-2} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m-2} - x_{m-2})^4] = \frac{5}{h}, \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m-1} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m-1} - x_{m-2})^4 + 75(x_{m-1} - x_{m-1})^4] = \frac{50}{h}, \\
\phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^5} [5(x_m - x_{m-3})^4 - 30(x_m - x_{m-2})^4 + 75(x_m - x_{m-1})^4 \\
&\quad - 100(x_m - x_m)^4] = 0, \\
\phi'_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m+1} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m+1} - x_{m-2})^4 + 75(x_{m+1} - x_{m-1})^4 \\
&\quad - 100(x_{m+1} - x_m)^4 + 75(x_{m+1} - x_{m+1})^4] = -\frac{50}{h}, \\
\phi'_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m+2} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m+2} - x_{m-2})^4 + 75(x_{m+2} - x_{m-1})^4 \\
&\quad - 100(x_{m+2} - x_m)^4 + 75(x_{m+2} - x_{m+1})^4 - 30(x_{m+2} - x_{m+2})^4] = -\frac{5}{h}, \\
\phi'_m(x_{m+3}) &= 0, \\
\phi''_m(x_{m-3}) &= \frac{20}{h^5}(x_{m-3} - x_{m-3})^3 = 0, \\
\phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m-2} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m-2} - x_{m-2})^3] = \frac{20}{h^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m''(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m-1} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m-1} - x_{m-2})^3 + 300(x_{m-1} - x_{m-1})^3] \\
\phi_m''(x_{m-1}) &= \frac{40}{h^2}, \\
\phi_m''(x_m) &= \frac{1}{h^5} [20(x_m - x_{m-3})^3 - 120(x_m - x_{m-2})^3 + 300(x_m - x_{m-1})^3] \\
\phi_m''(x_m) &= -400(x_m - x_m)^3 = -\frac{120}{h^2}, \\
\phi_m''(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m+1} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m+1} - x_{m-2})^3 + 300(x_{m+1} - x_{m-1})^3 \\
&\quad - 400(x_{m+1} - x_m)^3 + 300(x_{m+1} - x_{m+1})^3] = \frac{40}{h^2}, \\
\phi_m''(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m+2} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m+2} - x_{m-2})^3 + 300(x_{m+2} - x_{m-1})^3 \\
&\quad - 400(x_{m+2} - x_m)^3 + 300(x_{m+2} - x_{m+1})^3 - 120(x_{m+2} - x_{m+2})^3] \\
\phi_m''(x_{m+2}) &= \frac{20}{h^2}, \\
\phi_m''(x_{m+3}) &= 0, \\
\phi_m'''(x_{m-3}) &= \frac{60}{h^5}(x_{m-3} - x_{m-3})^2 = 0, \\
\phi_m'''(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m-2} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m-2} - x_{m-2})^2] = \frac{60}{h^3}, \\
\phi_m'''(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m-1} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m-1} - x_{m-2})^2 + 900(x_{m-1} - x_{m-1})^2] \\
\phi_m'''(x_{m-1}) &= -\frac{120}{h^3}, \\
\phi_m'''(x_m) &= \frac{1}{h^5} [60(x_m - x_{m-3})^2 - 360(x_m - x_{m-2})^2 + 900(x_m - x_{m-1})^2 \\
&\quad - 1200(x_m - x_m)^2] = 0, \\
\phi_m'''(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m+1} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m+1} - x_{m-2})^2 + 900(x_{m+1} - x_{m-1})^2 \\
&\quad - 1200(x_{m+1} - x_m)^2 + 900(x_{m+1} - x_{m+1})^2] = \frac{120}{h^3}, \\
\phi_m'''(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m+2} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m+2} - x_{m-2})^2 + 900(x_{m+2} - x_{m-1})^2 \\
&\quad 1200(x_{m+2} - x_m)^2 + 900(x_{m+2} - x_{m+1})^2 - 360(x_{m+2} - x_{m+2})^2] \\
\phi_m'''(x_{m+2}) &= -\frac{60}{h^3}, \\
\phi_m'''(x_{m+3}) &= 0, \\
\phi_m^{IV}(x_{m-3}) &= \frac{120}{h^5}(x_{m-3} - x_{m-3}) = 0, \\
\phi_m^{IV}(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m-2} - x_{m-3}) - 720(x_{m-2} - x_{m-2})] = \frac{120}{h^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m^{IV}(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m-1} - x_{m-3}) - 720(x_{m-1} - x_{m-2}) + 1800(x_{m-1} - x_{m-1})] \\
\phi_m^{IV}(x_{m-1}) &= -\frac{480}{h^4}, \\
\phi_m^{IV}(x_m) &= \frac{1}{h^5} [120(x_m - x_{m-3}) - 720(x_m - x_{m-2}) + 1800(x_m - x_{m-1}) \\
&\quad - 2400(x_m - x_m)] = \frac{720}{h^4}, \\
\phi_m^{IV}(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m+1} - x_{m-3}) - 720(x_{m+1} - x_{m-2}) + 180(x_{m+1} - x_{m-1}) \\
&\quad - 2400(x_{m+1} - x_m) + 1800(x_{m+1} - x_{m+1})] = -\frac{480}{h^4}, \\
\phi_m^{IV}(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m+2} - x_{m-3}) - 720(x_{m+2} - x_{m-2}) + 1800(x_{m+2} - x_{m-1}) \\
&\quad - 2400(x_{m+2} - x_m) + 1800(x_{m+2} - x_{m+1}) - 720(x_{m+2} - x_{m+2})] \\
\phi_m^{IV}(x_{m+2}) &= \frac{120}{h^4}, \\
\phi_m^{IV}(x_{m+3}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerler kolaylık aısında Tablo 1.2’de verilmiştir.

Tablo 1.2: Bۆlünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\phi_m$	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi_m'$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi_m''$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi_m'''$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi_m^{IV}$	0	120	-480	720	-480	120	0

Ayrıca,  $0 \leq \zeta \leq 1$  ve  $h\zeta = x - x_m$  dönüşümü yardımıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerindeki şekil fonksiyonları, gerekli işlemlerin yapılması sonucunda yerel koordinat sisteminde

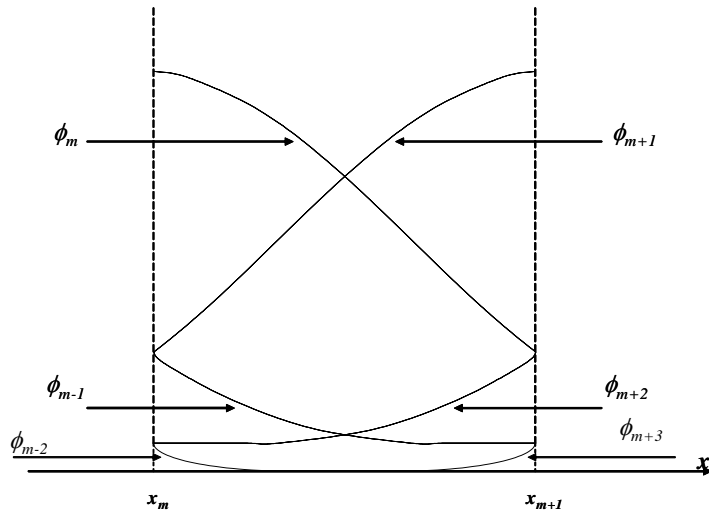
$$\begin{aligned}
\phi_{m-2}(x) &= \frac{1}{h^5} [(x - x_{m-5})^5 - 6(x - x_{m-4})^5 + 15(x - x_{m-3})^5 \\
&\quad - 20(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 6(x - x_m)^5], \\
\phi_{m-2}(\zeta) &= 1 - 5\zeta + 10\zeta^2 - 10\zeta^3 + 5\zeta^4 - \zeta^5,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\phi_{m-1}(x) &= \frac{1}{h^5} [(x - x_{m-4})^5 - 6(x - x_{m-3})^5 + 15(x - x_{m-2})^5 \\
&\quad - 20(x - x_{m-1})^5 + 15(x - x_m)^5], \\
\phi_{m-1}(\zeta) &= 26 - 50\zeta + 20\zeta^2 + 20\zeta^3 - 20\zeta^4 + 5\zeta^5, \\
\phi_m(x) &= \frac{1}{h^5} [(x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 \\
&\quad - 20(x - x_m)^5], \\
\phi_m(\zeta) &= 66 - 60\zeta^2 + 30\zeta^4 - 10\zeta^5, \\
\phi_{m+1}(x) &= \frac{1}{h^5} [(x - x_{m-2})^5 - 6(x - x_{m-1})^5 + 15(x - x_m)^5], \\
\phi_{m+1}(\zeta) &= 26 + 50\zeta + 20\zeta^2 - 20\zeta^3 - 20\zeta^4 + 10\zeta^5, \\
\phi_{m+2}(x) &= \frac{1}{h^5} [(x - x_{m-1})^5 - 6(x - x_m)^5], \\
\phi_{m+2}(\zeta) &= 1 + 5\zeta + 10\zeta^2 + 10\zeta^3 + 5\zeta^4 - 5\zeta^5, \\
\phi_{m+3}(x) &= \frac{1}{h^5} [(x - x_m)^5], \\
\phi_{m+3}(\zeta) &= \zeta^5
\end{aligned}$$

olarak kuintik B-spline şekil fonksiyonları elde edilebilir.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı, 6 ardışık  $\phi_{m-2}, \dots, \phi_{m+3}$  kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.5'de gösterilmiştir.



Şekil 1.5:  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanında  $\phi_{m-2}, \dots, \phi_{m+3}$  kuintik B-spline fonksiyonları

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı, 6 ardışık kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğün-

den, bu eleman üzerindeki  $w$  değeri için yaklaşım fonksiyonu

$$w_m(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.54)$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

Tablo 1.2 ve (1.54) eşitliğinin kullanılmasıyla  $w_m$  ve onun ilk dört türevi

$$\begin{aligned} w_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t), \\ w_m &= \delta_{m-2} \phi_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \phi_{m+2}(x_m), \\ w_m &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ \\ w'_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi'_j(x) \delta_j(t), \\ w'_m &= \delta_{m-2} \phi'_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \phi'_{m+2}(x_m), \\ w'_m &= \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ \\ w''_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi''_j(x) \delta_j(t), \\ w''_m &= \delta_{m-2} \phi''_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \phi''_{m+2}(x_m), \\ w''_m &= \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ \\ w'''_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi'''_j(x) \delta_j(t), \\ w'''_m &= \delta_{m-2} \phi'''_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \phi'''_{m+2}(x_m), \\ w'''_m &= \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ \\ w^{iv}_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi^{iv}_j(x) \delta_j(t), \\ w^{iv}_m &= \delta_{m-2} \phi^{iv}_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \phi^{iv}_{m+2}(x_m), \\ w^{iv}_m &= \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \end{aligned}$$

formunda bulunur. Dolayısıyla,  $x_m$  bölünme noktalarındaki  $w_m, w'_m, w''_m, w'''_m$  ve  $w^{iv}_m$

kuantik B-spline fonksiyonları  $\delta_m$  parametresine göre

$$w_m = w_m(x_m) = \delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2}, \quad (1.55)$$

$$w'_m = w'_m(x_m) = \frac{5}{h} (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \quad (1.56)$$

$$w''_m = w''_m(x_m) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}), \quad (1.57)$$

$$w'''_m = w'''_m(x_m) = \frac{60}{h^3} (\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \quad (1.58)$$

$$w^{IV}_m = w^{IV}_m(x_m) = \frac{120}{h^4} (\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \quad (1.59)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıntılı bilgi için, kuantik B-spline interpolasyon polinomları kullanılarak, bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerinin sonlu elemanlar metotları ile sayısal çözümlerinin araştırıldığı (Dağ, et al., 2006; Raslan, K.R., 2004; Saka, 2007; Zaki, 2000) çalışmalar ve verdikleri referanslar incelenebilir.

## 1.6 GNLS Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

$i = \sqrt{-1}$ ,  $w(x, t)$ ,  $x$  ve  $t$  ye bağlı kompleks değerli bir fonksiyon,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  ve  $q_4$  reel sabitler,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise sırayla konum ve zamana göre türevi göstermek üzere GNLS denklemi

$$\begin{aligned} iw_t(x, t) + w_{xx}(x, t) + q_1 |w(x, t)|^2 w(x, t) + q_2 |w(x, t)|^4 w(x, t) + \\ iq_3 (|w(x, t)|^2)_x w(x, t) + iq_4 |w(x, t)|^2 w_x(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

formundaki bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir. (1.60) denklemi, aynı zamanda ikinci mertebeden lineer olmayan bir oluşum denklemdir.

GNLS denklemi ilk kez, stoke dalgalarının modüler kararsızlık durumu yakınlardaki davranışını tanımlamak üzere, Johnson (1977), Kakutani ve Michihiro (1983) tarafından bağımsız olarak türetilmiştir. (1.60) denklemindeki reel sabitlerin özel değerlerinden türetilmiş bazı denklemler ise aşağıdaki formda verilebilir:

$$iw_t(x, t) + w_{xx}(x, t) + q_1 |w(x, t)|^2 w(x, t) = 0, \quad (1.61)$$

$$iw_t(x, t) + w_{xx}(x, t) + iq_3 (|w(x, t)|^2)_x w(x, t) + iq_4 |w(x, t)|^2 w_x(x, t) = 0, \quad (1.62)$$

$$iw_t(x, t) + w_{xx}(x, t) + iq_4 |w(x, t)|^2 w_x(x, t) = 0, \quad (1.63)$$

$$iw_t(x, t) + w_{xx}(x, t) + q_1 |w(x, t)|^2 w(x, t) + q_2 |w(x, t)|^4 w(x, t) = 0. \quad (1.64)$$

(1.61) denklemi, kübik Schrödinger denklemi olarak adlandırılır ve akışkanlar mekaniğinde (Hasimoto and Ono, 1972), lineer olmayan optiklerde (Strauss, 1978) ve plazma fiziğinde (Lamb, 1980) önemli uygulama alanlarına sahiptir. (1.62) formundaki lineer olmayan Schrödinger denklemi, plazmalarda, dairesel yönlendirilmiş lineer olmayan Alfvén dalgalarının yayılımını tanımlar (Kaup and Newell, 1978). (1.63) denklemi, Benjamin-Ono denkleminin kompleks genlikli çözümlerinin kendiliğinden modülasyonunu (Tanaka, 1982) ve (1.64) formundaki üçüncü-beşinci mertebeden Schrödinger denklemi ise homojen olmayan bir ortamda, laser demetlerinin yayılımını tanımlar (Cowan, et al., 1986).

(1.60) formundaki GNLS denkleminin sayısal çözümü üzerinde de çalışılmıştır. Pathria ve Morris (1990), GNLS denkleminin sayısal çözümünü 4 pseudo-spectral split-step metodunu kullanarak araştırmıştır. Ortogonal spline kolokeyşin metodunun kullanıldığı (Robinson, 1997) adlı çalışmada, (1.61) kübik Schrödinger denklemi ile birlikte GNLS denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışılmıştır. İki boyutlu Schrödinger denklemi ve GNLS denkleminin sayısal çözümleri, lokal sürekli olmayan Galerkin metodunun kullanılmasıyla Xu ve Shu (2005) tarafından incelenmiştir. Muslu ve Erbay (2005), yüksek mertebeden split-step Fourier yöntemini kullanarak GNLS denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır.

Bu çalışmada, (1.60) formundaki GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$w(a, t) = w(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.65)$$

$$w'(a, t) = w'(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.66)$$

$$w''(a, t) = w''(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.67)$$

sınır şartları ve  $f(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$w(x, 0) = f(x) \quad (1.68)$$

başlangıç şartı kullanılacaktır.

$u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,  $w(x, t)$  kompleks değerli fonksiyonu

$$w(x, t) = u(x, t) + iv(x, t) \quad (1.69)$$

şeklinde yazılarak, gösterim kolaylığı açısından sırasıyla  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yerine  $w$ ,  $u$  ve  $v$  kısaltmaları kullanılarak, (1.69) eşitliği, (1.60) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} i(u + iv)_t + (u + iv)_{xx} + q_1(u^2 + v^2)(u + iv) + q_2(u^2 + v^2)^2(u + iv) + \\ iq_3(u^2 + v^2)_x(u + iv) + iq_4(u^2 + v^2)(u + iv)_x = 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

denklemini elde edilir. Türevlerin hesaplanması ve gerekli düzenlemelerin yapılması sonucunda

$$\begin{aligned} -v_t + u_{xx} + [q_1(u^2 + v^2) + q_2(u^2 + v^2)^2]u - 2q_3uvu_x - \\ [2q_3v^2 + q_4(u^2 + v^2)]v_x + i\{u_t + v_{xx} + [q_1(u^2 + v^2) + q_2(u^2 + v^2)^2]v + \\ [2q_3u^2 + q_4(u^2 + v^2)]u_x + 2q_3uvv_x\} = 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

denkleminde ulaşılır. (1.71) denkleminin sıfıra eşit olması için, denklemin reel ve imajiner kısımlarının sıfıra eşit olması gerektiğinden, (1.60) GNLS denklemini

$$\begin{aligned} v_t - u_{xx} - [q_1(u^2 + v^2) + q_2(u^2 + v^2)^2]u + \\ 2q_3uvu_x + [2q_3v^2 + q_4(u^2 + v^2)]v_x = 0 \end{aligned} \quad (1.72)$$

ve

$$\begin{aligned} u_t + v_{xx} + [q_1(u^2 + v^2) + q_2(u^2 + v^2)^2]v + \\ [2q_3u^2 + q_4(u^2 + v^2)]u_x + 2q_3uvv_x = 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

formunda bir denklem sistemine dönüşür.

GNLS denklemini için korunum kanunları ise aşağıdaki formdadır:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |w|^2 dx, \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |w_x|^2 - \frac{1}{2}(2q_3 + q_4) |w|^2 \operatorname{Im}(w\bar{w}_x) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}q_1 |w|^4 + \frac{1}{6}[q_3(2q_3 + q_4) - 2q_2] |w|^6 \right] dx, \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (2 \operatorname{Im}(w\bar{w}_x) - q_3 |w|^4) dx \quad (1.76)$$

Burada verilen  $\bar{w}_x$ ,  $w_x$ 'in kompleks eşleniğini göstermek üzere  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  sırasıyla kütle, enerji ve itme (impulse) korunumlarına karşılık gelmektedir (Pathria and Morris, 1989, 1990).

Sayısal metotların doğruluğu, verilen bölünme noktalarındaki analitik ve sayısal değerlerin hesaplanmasının ardından aşağıda verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardımıyla incelenecektir:

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N \left| |w|_j^{\text{tam}} - |w_m|_j \right|^2}, \quad (1.77)$$

$$L_\infty = \left\| |w|_j^{\text{tam}} - |w_m|_j \right\|_\infty = \max_j \left| |w|_j^{\text{tam}} - |w_m|_j \right|. \quad (1.78)$$

### 1.6.1 Solitary dalga çözümü

(1.61-1.62) denklemlerinin soliton dalga çözümleri olduğu yani çarpışma öncesi ve sonrasında harekete başladıkları andaki şekillerini ve hızlarını koruyan solitary dalga çözümlerine sahip oldukları (Calogero and Eckhaus, 1987) tarafından gösterilmiştir. (Cowan et al., 1986) adlı çalışmada ise, (1.64) ile verilen üçüncü-beşinci mertebeden Schrödinger denkleminin solitary dalga çözümlerinin soliton kararlılığı göstermediği sayısal olarak gösterilmiştir ( $q_2 \neq 0$  iken). (1.60) GNLS denkleminin ise, bir solitary dalga çözümüne ve  $q_4 = 0$  olduğunda ise soliton dalga çözümüne sahiptir (Pathria and Morris 1989).

(1.60) formundaki GNLS denkleminin solitary dalga çözümü, Pathria ve Morris (1989) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$Q_q = q_2 - \frac{1}{16}(2q_3 + q_4)(2q_3 - 3q_4)$$

ve  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  birer reel sabit olmak üzere GNLS denkleminin aşağıdaki formda solitary dalga çözümü vardır.

**1. Durum** ( $Q_q < 0$ ) :  $r_1$ ,  $r_2$  reel sabitler ve  $r_1 > r_2 > 0$  ise solitary dalga çözümü vardır ve

$$\chi = \left( -\frac{r_1 r_2 Q_q}{3} \right)^{1/2} (x + x_0 - ct) + a$$

$$\Phi(x, t) = -\left(\frac{2q_3 + q_4}{4}\right) \left(-\frac{3}{Q_q}\right)^{1/2} \tanh^{-1} \left( \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2} \tanh(\chi) \right) + \frac{c}{2}(x + x_0 - bt) + d$$

olmak üzere

$$w(x, t) = \left[ \frac{r_1 r_2}{r_1 + (r_1 - r_2) \sinh^2(\chi)} \right]^{1/2} \exp(i\Phi(x, t)) \quad (1.79)$$

ifadesi, (1.60) formundaki GNLS denkleminin bir solitary dalga çözümüdür.

**2. Durum** ( $Q_q > 0$ ) :  $r_1, r_2$  reel sabitler ve  $r_1 > 0 > r_2$  ise solitary dalga çözümü vardır ve

$$\chi = \left( -\frac{r_1 r_2 Q_q}{3} \right)^{1/2} (x + x_0 - ct) + a$$

$$\Phi(x, t) = -\left(\frac{2q_3 + q_4}{4}\right) \left(\frac{3}{Q_q}\right)^{1/2} \tanh^{-1} \left( \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)^{1/2} \tanh(\chi) \right) + \frac{c}{2}(x + x_0 - bt) + d$$

olmak üzere

$$w(x, t) = \left[ \frac{r_1 r_2}{r_2 + (r_2 - r_1) \sinh^2(\chi)} \right]^{1/2} \exp(i\Phi(x, t)) \quad (1.80)$$

ifadesi, (1.60) formundaki GNLS denkleminin bir solitary dalga çözümüdür.

### 1.6.2 İki solitary dalgasının çarpışması

$q_4 = 0$  için GNLS denkleminin soliton dalga çözümü;  $x_0, a, b, c$  ve  $d$  birer reel sabit,

$$\beta = \frac{c}{2} \left( \frac{c}{2} - b \right) > 0$$

ve

$$\Phi(x, t) = \frac{c}{2}(x + x_0 - bt) - \sqrt{\beta} \frac{q_3}{q_1} \tanh \left( \sqrt{\beta}(x + x_0 - ct) + a \right) + d$$

olmak üzere

$$w(x, t) = \sqrt{\frac{2\beta}{q_1}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\beta}(x + x_0 - ct) + a \right) \exp(i\Phi(x, t)) \quad (1.81)$$

formundadır ve iki soliton dalgası çarpışma problemi için başlangıç şartı, (1.81) denkleminde  $t = 0$  alınarak  $x_1, a_1, b_1, c_1, d_1, x_2, a_2, b_2, c_2$  ve  $d_2$  birer reel sabit,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{c_1}{2} \left( \frac{c_1}{2} - b_1 \right) > 0, \\ \beta_2 &= \frac{c_2}{2} \left( \frac{c_2}{2} - b_2 \right) > 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, 0) &= \frac{c_1}{2} (x + x_1) - \sqrt{\beta_1} \frac{q_3}{q_1} \tanh \left( \sqrt{\beta_1} (x + x_1) + a_1 \right) + d_1, \\ \Phi_2(x, 0) &= \frac{c_2}{2} (x + x_2) - \sqrt{\beta_2} \frac{q_3}{q_1} \tanh \left( \sqrt{\beta_2} (x + x_2) + a_2 \right) + d_2\end{aligned}$$

olmak üzere

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^2 \sqrt{\frac{2\beta_n}{q_1}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\beta_n} (x + x_n) + a_n \right) \exp(i\Phi_n(x, 0)) \quad (1.82)$$

eşitliği ile ifade edilir (Pathria and Morris, 1989).

### 1.7 CMKdV Denklemleri, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

CMKdV denklemleri;  $i = \sqrt{-1}$ ,  $w(x, t)$ ,  $x$  ve  $t$  ye bağlı kompleks değerli bir fonksiyon,  $\alpha$  reel sabit,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise sırayla konum ve zamana göre türevi göstermek üzere

$$w_t(x, t) + w_{xxx}(x, t) + \alpha (|w(x, t)| w(x, t))_x = 0 \quad (1.83)$$

formunda lineer olmayan bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir. Ayrıca, (1.83) formundaki CMKdV denklemleri, üçüncü mertebeden lineer olmayan bir oluşum denklemleridir.

Muslu ve Erbay (2003), CMKdV denklemleri ile ilgili olarak şu bilgileri vermiştir: (1.83) formundaki CMKdV denklemleri, plazma dalgalarının lineer olmayan oluşumu için bir model olarak önerilmiştir (Karney et al., 1979). Ayrıca, (1.83) denklemleri, moleküler zincir modelinde enine dalgaların yayılımını (Gorbacheva and Ostrovsky, 1983) ve geliştirilmiş elastik solitonda enine dalgaların yayılımını (Erbay and Şuhubi, 1989; Erbay, 1998) modellemekte kullanılmıştır.



(1.83) formundaki CMKdV denkleminin sayısal çözümü, üç farklı split-step metodu kullanılarak Muslu ve Erbay (2003) tarafından araştırılmıştır. Taha ve Liu (2003) ise, CMKdV denkleminin başka bir formu olan

$$w_t(x, t) + w_{xxx}(x, t) + 6|w(x, t)|w_x(x, t) = 0 \quad (1.84)$$

denkleminin sayısal çözümü için paralel split-step Fourier metodunu kullanmıştır. Taha (1994) ise, (1.84) formundaki CMKdV denkleminin sayısal çözümü için üç farklı metot önermiştir. Bu metotlar sırasıyla; TSD metodu ile ilişkili olan bir integrallenebilir yöntem, birinci yöntemden türetilen local TSD yöntemi ve standart sonlu farklar yöntemidir.

Bu çalışmada, (1.83) formundaki CMKdV denklemin sayısal çözümü araştırılırken

$$w(a, t) = w(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.85)$$

$$w'(a, t) = w'(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.86)$$

$$w''(a, t) = w''(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.87)$$

sınır şartları ve  $f(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$w(x, 0) = f(x) \quad (1.88)$$

başlangıç şartı kullanılacaktır.

$u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,  $w(x, t)$  kompleks değerli fonksiyonunun yerine

$$w(x, t) = u(x, t) + iv(x, t) \quad (1.89)$$

alınarak, gösterim kolaylığı açısından sırasıyla  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  ve  $v(x, t)$  yerine  $w$ ,  $u$  ve  $v$  kısaltmaları yapıp, (1.89) eşitliği, (1.83) denkleminde yerine yazılırsa

$$(u + iv)_t + (u + iv)_{xxx} + \alpha [(u^2 + v^2)(u + iv)]_x = 0 \quad (1.90)$$

ifadesi elde edilir. Türevlerin hesaplanması ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla

$$u_t + u_{xxx} + \alpha(3u^2 + v^2)u_x + 2\alpha uvv_x + i(v_t + v_{xxx} + 2\alpha uvu_x + \alpha(3v^2 + u^2)v_x) = 0 \quad (1.91)$$

denkleminde ulaşılır. Denklemin sifira eşit olması iin reel ve sanal kısımların sifira eşit olmaları gerektiğinden

$$u_t + u_{xxx} + \alpha(3u^2 + v^2)u_x + 2\alpha uvv_x = 0, \quad (1.92)$$

$$v_t + v_{xxx} + 2\alpha uvu_x + \alpha(3v^2 + u^2)v_x = 0 \quad (1.93)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu iki denklem, enine yönlendirilmiş iki dik dalganın keşişmesini tanımlayan lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemdir. Diğeri bir ifade ile, (1.92-1.93) denklemlerindeki  $u$  ve  $v$  terimleri sırasıyla,  $xyz$ -kartezyen koordinat sisteminde  $y$  eksenini ve  $z$  eksenini yönünde yönlendirilmiş ve  $x$  eksenini yönünde hareket eden enine dalgaları gösterir (Muslu and Erbay, 2003).

CMKdV denklemi iin korunum sabitleri aşağıda verilmiştir (Karney, et al., 1979):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} w dx, \quad (1.94)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w|^2 dx, \quad (1.95)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} (|w|^4 - |w_x|^2) dx. \quad (1.96)$$

Test problemlerinde metodun doğruluğunu, analitik ve sayısal değeriilerin bölünme noktalarında hesaplanmasının ardından, aşağıdaki  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardımıyla incelenecektir:

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N \left| |w|_j^{\text{tam}} - |w_m|_j \right|^2}, \quad (1.97)$$

$$L_\infty = \left\| |w|_j^{\text{tam}} - |w_m|_j \right\|_\infty = \max_j \left| |w|_j^{\text{tam}} - |w_m|_j \right|. \quad (1.98)$$

### 1.7.1 Solitary dalga zm

(1.83) formundaki CMKdV denklemi,  $\sqrt{\frac{2c}{\alpha}}$  genliğe ve  $c$  hıza karşılık gelmek üzere

$$w(x, t) = \sqrt{\frac{2c}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c}[x + x_0 - ct]) \exp(i\theta_0) \quad (1.99)$$

formunda bir solitary dalga çözümüne sahiptir (Muslu and Erbay, 2003). Denklemden verilen  $\theta_0$  değeri yönlendirme açısıdır. Eğer  $\theta_0$ , 0 veya  $\frac{\pi}{2}$  değerlerinden birini alırsa sırasıyla  $v = 0$  veya  $u = 0$  olacağından, (1.92-1.93) denklemleri tek bir MKdV (Modified Korteweg-de Vries) denklemine indirgenir.

### 1.7.2 İki solitary dalgasının çarpışması

(1.83) formundaki CMKdV denkleminin (1.99) formunda solitary dalga çözümüne sahip olduğunu belirtmiştik. Bu durumda, (1.83) formundaki CMKdV denklemi, iki pozitif solitary dalgasının çarpışması problemi için  $c_1, c_2, x_1, x_2$  reel sabitler ve

$$w_i(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{2c_i}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c_i}[x + x_i]) \exp(i\theta_0)$$

olmak üzere

$$w(x, 0) = w_1(x, 0) + iw_2(x, 0) \quad (1.100)$$

formunda bir başlangıç çözümüne sahiptir. Burada,  $\sqrt{\frac{2c_i}{\alpha}}$  ve  $c_i$  terimleri sırasıyla solitary dalgalarının genlik ve hızlarına karşılık gelmektedir.

### 1.8 BST Denklem Sistemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

BST denklem sistemi;  $\eta(x, t), u(x, t)$  terimleri  $x$  ve  $t$  ye bağlı birer fonksiyon,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  reel sabit,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise sırayla konum ve zamana göre türevi göstermek üzere

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x + \alpha_1 u_{xxx} - \alpha_2 \eta_{xxt} = 0, \quad (1.101)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x + \alpha_3 \eta_{xxx} - \alpha_4 u_{xxt} = 0 \quad (1.102)$$

formundaki lineer olmayan bir kısmi türevli diferensiyel denklem sistemidir. (1.101-1.102) kısmi türevli diferensiyel denklemlerinden oluşan BST denklem sistemi, aynı zamanda lineer olmayan bir oluşum denklem sistemidir.

BST denklem sistemi

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x = 0, \quad (1.103)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{3}u_{xxt} = 0 \quad (1.104)$$

formundaki klasik Boussinesq sisteminden türetilmiştir (Bona, et al., 2002). KB sistemi, Boussinesq (1871) tarafından yüzey dalgalarının yayılımı için bir model olarak verilmiştir (Amick, 1984; Schonbek, 1981; Whitham, 1974). (1.101-1.102) denklemleri ile verilen 4 parametrelili BST denklem sistemi ilk kez, (Bona, et al., 1997) referanslı makalede, bir su tünelineki yüzey su dalgalarını tanımlamak için kullanılmıştır (Bona and Chen, 1998; Chen, 1998 a, 1998 b; Pelloni and Dougalis, 2001). Fakat hazırlık aşamasında olarak referanslarda da verilen bu makale tamamlanamamış ve 5 yıl sonra (Bona, et al., 2002) tarafından yayınlanmıştır. 2002 yılından sonra, BST denklem sistemi üzerine yapılan çalışmalarda da bu makale temel alınmıştır (Bona, et al., 2004; Chen and Iooss, 2005).

BST denklem sistemi üzerine yapılan çalışmalar genelde tam çözümlerle ilgilidir. Bununla beraber Pelloni ve Dougalis (2001), BST denklem sisteminin sayısal çözümünü spectral metot kullanarak araştırmışlar ve solitary dalga test problemi kullanarak metotlarının doğruluğunu incelemişlerdir.

Chen (1998 b), (1.101-1.102) denklem sistemindeki terimleri:

- $h$ , durgun suyun yüksekliği,
- $g$ , yerçekimi ivmesi,
- $x$ ,  $h$  ile ölçeklendirilmiş kanal boyunun uzunluğu,
- $t$ ,  $(h/g)^{1/2}$  ile ölçülen geçen zaman,
- $\eta(x, t)$ , ilk durağan duruma göre  $h$  ile ölçülen su yüzeyinin boyutsuz sapması,
- $u(x, t)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  olmak üzere, kanalın dibinden yukarı doğru  $\theta h$  yüksekliğinde  $\sqrt{gh}$  ile ölçülen boyutsuz yatay hız,

olarak açıklamıştır.  $\lambda$  ve  $\mu$  reel sabitler olmak üzere denklemde bulunan  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  reel sabitleri

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left( \theta^2 - \frac{1}{3} \right) \lambda, & \alpha_2 &= \frac{1}{2} \left( \theta^2 - \frac{1}{3} \right) (1 - \lambda), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} (1 - \theta^2) \mu, & \alpha_4 &= \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \mu), \end{aligned} \tag{1.105}$$

şartlarını sağlarlar.  $\theta$  değerinin aksine, eşitliklerdeki  $\lambda$  ve  $\mu$  reel sabitlerinin herhangi bir fiziksel anlamı yoktur.

(1.101-1.102) denklem sisteminden,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  reel parametrelerinin özel değerleri için farklı isimlerde denklem sistemleri türetilir (Chen, 1998 a). Bu sistemlerden sayısal çözümleri araştırılacak olanlar aşağıda verilmiştir:

*Whitham Sistemi:* (1.105) eşitliklerinde  $\theta^2 = 0, \lambda = 1, \mu = 0$  seçimleri ile

$$\alpha_1 = -\frac{1}{6}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

olacağından, (1.101-1.102) denklemlerinden oluşan BST denklem sistemi

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x - \frac{1}{6}u_{xxx} = 0, \quad (1.106)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{2}u_{xxt} = 0. \quad (1.107)$$

şeklinde yeni bir sisteme döner (Whitham, 1974).

*Regularized Boussinesq (RB) Sistemi:*  $\theta^2 = \frac{2}{3}, \lambda = 0, \mu = 0$  seçimleri altında, (1.105) eşitliklerindeki katsayılar

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1}{6}$$

olarak elde edilir. Bu katsayıların (1.101-1.102) denklemlerinde yerlerine yazılması sonucunda

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x - \frac{1}{6}\eta_{xxt} = 0, \quad (1.108)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{6}u_{xxt} = 0. \quad (1.109)$$

sistemine ulaşılır (Bona and Chen, 1998).

*Klasik Boussinesq (KB) Sistemi:*  $\theta^2 = \frac{1}{3}, \mu = 0$  ve  $\lambda$  keyfi seçimleri sonrasında, (1.105) eşitliklerinde verilen katsayılar

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1}{3}$$

olarak bulunur. Katsayıların (1.101-1.102) denklemlerinde kullanılması ile

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x = 0, \quad (1.110)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{3}u_{xxt} = 0. \quad (1.111)$$

denklem sistemi elde edilir (Boussinesq, 1871).

*Bona-Smith (BS) Sistemi:* Son olarak  $\theta^2 = \frac{4/3 - \mu}{2 - \mu}$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu < 0$  seçimleri altında, (1.105) eşitlikleri

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1 - \mu}{3(2 - \mu)} > 0, \alpha_3 = \frac{\mu}{3(2 - \mu)} < 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1 - \mu}{3(2 - \mu)} > 0$$

sonucunu verir. Bu durumda BS sistemi, (1.101-1.102) denklemlerinde  $\alpha_1 = 0$  ve  $\alpha_2 = \alpha_4$  yazılmasıyla

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x - \alpha_2 \eta_{xxt} = 0, \quad (1.112)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x + \alpha_3 \eta_{xxx} - \alpha_2 u_{xxt} = 0. \quad (1.113)$$

formunda elde edilir (Bona and Smith, 1976).

Bu çalışmada, Whitham, RB, KB ve BS sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken

$$\eta(a, t) = \eta(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.114)$$

$$\eta'(a, t) = \eta'(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.115)$$

$$\eta''(a, t) = \eta''(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.116)$$

$$\eta'''(a, t) = \eta'''(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.117)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.118)$$

$$u'(a, t) = u'(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.119)$$

$$u''(a, t) = u''(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.120)$$

$$u'''(a, t) = u'''(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.121)$$

sınır şartları ve  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$\eta(x, 0) = f_1(x), \quad (1.122)$$

$$u(x, 0) = f_2(x) \quad (1.123)$$

başlangıç şartları kullanılacaktır.

Sayısal metotların doğruluğu, verilen bölünme noktalarındaki analitik ve sayısal değerlerin hesaplanmasının ardından aşağıda verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardı-

mıyla incelenecektir:

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N \left| \eta_j^{\text{tam}} - (\eta_m)_j \right|^2}, \quad (1.124)$$

$$L_\infty = \left\| \eta_j^{\text{tam}} - (\eta_m)_j \right\|_\infty = \max_j \left| \eta_j^{\text{tam}} - (\eta_m)_j \right|, \quad (1.125)$$

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N \left| u_j^{\text{tam}} - (u_m)_j \right|^2}, \quad (1.126)$$

$$L_\infty = \left\| u_j^{\text{tam}} - (u_m)_j \right\|_\infty = \max_j \left| u_j^{\text{tam}} - (u_m)_j \right|. \quad (1.127)$$

### 1.8.1 Solitary ve ilerleyen dalga çözümleri

**Teorem:** (1.101-1.102) denklemleri ile verilen sistemdeki  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  reel sabitleri

- (i)  $\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 \neq 0, p = \frac{-\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4} > 0$  ve  $(p - 1/2) [(\alpha_2 - \alpha_1)p - \alpha_2] > 0$
- (ii)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 > 0, \alpha_4 = 0$
- (iii)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 < 0, \alpha_4 = 0$
- (iv)  $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0, \alpha_1 = \alpha_3, \alpha_4 > 0$
- (v)  $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0, \alpha_1 = \alpha_3, \alpha_4 < 0$

şartlarından birini sağladığında, sistem solitary dalga çözümüne sahiptir. Solitary dalga çözümü ise

- (i) durumunda,  $\eta_0 = \frac{3(1-2p)}{2p}$
- (ii) durumunda,  $0 < \eta_0 < +\infty$
- (iii) durumunda,  $-3 \leq \eta_0 < 0$
- (iv) durumunda,  $\eta_0 > -3$  ve  $\frac{3}{\eta_0 + 3} \notin \left[ 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_4} \right]$
- (v) durumunda,  $\eta_0 > -3$  ve  $\frac{3}{\eta_0 + 3} \in \left[ 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_4} \right]$

ve

$$C_s = \frac{3 + 2\eta_0}{\pm\sqrt{3(3 + \eta_0)}}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\eta_0}{3(\alpha_1 - \alpha_2) + 2\alpha_2(\eta_0 + 3)}}$$

olmak üzere, herhangi bir  $x_0$  reel sayı için

$$\eta(x, t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2(\lambda(x + x_0 - C_s t)) \quad (1.128)$$

$$u(x, t) = \pm\sqrt{\frac{3}{\eta_0 + 3}}\eta_0 \operatorname{sech}^2(\lambda(x + x_0 - C_s t)) \quad (1.129)$$

formundadır (Chen, 1998 a; Chen, 1998 b). (1.128-1.129) eşitlikleri ile verilen  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  solitary dalga çözümlerinde,  $\eta_0$  ve  $\pm\sqrt{\frac{3}{\eta_0 + 3}}\eta_0$  solitary dalgalarının genliklerine,  $C_s$  ise solitary dalganın hızına karşılık gelmektedir.

Chen (1998 b), yukarıdaki teoremi verdikten sonra, BST denklem sisteminin solitary ve ilerleyen dalga çözümleri üzerine ayrıntılı olarak çalışmıştır. Chen çalışmalarında, teoremi sağlayan BST denklem sisteminin özel formları için solitary dalga çözümünü,  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $\eta(x, t) = u(x, t) = 0$  olacak şekilde  $(\eta(x, t), u(x, t))$  formunda araştırmıştır. Teoremi sağlamayan BST denklem sisteminin özel formları için ise, ilerleyen dalga çözümlerini  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $\eta(x, t) \neq 0$  ve  $u(x, t) \neq 0$  olacak şekilde araştırmıştır. Pelloni ve Dougalis (2001), ilerleyen ve solitary dalgalar arasındaki ayrımı,  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  çözümlerinin gittiği değere göre yapmıştır. Eğer sonuç sıfırsa dalgalar, solitary dalgaları ve sonuç sıfırdan farklı ise, ilerleyen dalga olarak tanımlanmıştır.

Sayısal çözümleri araştırılacak olan Whitham, RB, KB ve BS sistemlerinin solitary veya ilerleyen dalga çözümlerinden hangilerine sahip olduklarını sırayla inceleyelim.

(1.106-1.107) denklemlerinden oluşan Whitham sistemi, BST denklem sisteminde

$$\alpha_1 = -\frac{1}{6}, \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

katsayı seçimleri ile elde edilmişti. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 &= \frac{5}{6} \neq 0, \\ p &= \frac{-\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4} = \frac{6}{5} > 0, \\ (p - 1/2) [(\alpha_2 - \alpha_1)p - \alpha_2] &= \frac{7}{50} > 0 \end{aligned}$$



olduğundan teoremin (i) durumu sağlanır. Bu durumda

$$\eta_0 = \frac{3(1-2p)}{2p} = \frac{3\left(1 - \frac{12}{5}\right)}{\frac{12}{5}} = -\frac{7}{4}$$

ve

$$C_s = \frac{3 + 2\eta_0}{\pm\sqrt{3(3 + \eta_0)}} = \mp\frac{\sqrt{15}}{15},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\eta_0}{3(\alpha_1 - \alpha_2) + 2\alpha_2(\eta_0 + 3)}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

olacağından  $x_0$  bir reel sabit olmak üzere, Whitham sisteminin

$$\eta(x, t) = -\frac{7}{4}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{7}}{2}\left(x + x_0 - \frac{\sqrt{15}}{15}t\right)\right] \quad (1.130)$$

$$u(x, t) = \frac{7\sqrt{15}}{10}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{7}}{2}\left(x + x_0 - \frac{\sqrt{15}}{15}t\right)\right] \quad (1.131)$$

formunda bir solitary dalga çözümü vardır.

(1.108-1.109) denklemlerinden oluşan RB sistemi, BST denklem sisteminde

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_2 = \alpha_4 = \frac{1}{6} \text{ ve}$$

katsayı seçimleri ile elde edilmiştir. Bu katsayılar için teoremdaki hiçbir durumun gerçekleşmediği görülür. Dolayısıyla teoreme göre, RB sisteminin bir solitary dalga çözümü yoktur. Bu durumda da Chen (1998 a), RB sisteminin ilerleyen dalga çözümünü;  $g$ ,  $x_0$  ve  $c$  reel sabitler olmak üzere

$$\eta(x, t) = -1, \quad (1.132)$$

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{g}{6}\right)c + \frac{cg}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{g}}{2}(x + x_0 - ct)\right) \quad (1.133)$$

formunda vermiştir.

(1.110-1.111) denklemlerinden oluşan KB sistemi ise, BST denklem sisteminde

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ ve } \alpha_4 = \frac{1}{4}$$

katsayı seçimleri ile elde edilmiştir. Bu katsayılar kullanıldığında yine teoremdaki hiçbir durumun gerçekleşmediği görülür. Dolayısıyla teoreme göre KB sisteminin

bir solitary dalga çözümü yoktur. Bununla beraber KB sisteminin;  $g$ ,  $x_0$  ve  $c$  reel sabitler olmak üzere

$$\eta(x, t) = -1, \quad (1.134)$$

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{g}{3}\right)c + cg \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g}}{2}(x + x_0 - ct) \right) \quad (1.135)$$

formunda bir ilerleyen dalga çözümü vardır (Chen, 1998 a).

(1.112-1.113) denklemlerinden oluşan BS sistemi, BST denklem sisteminde

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_4 \text{ ve } \alpha_3 \neq 0$$

katsayı seçimleri ile elde edilmişti. Katsayı seçimleri teoremi sağlayacak şekilde seçilirse, BS sisteminin bir solitary dalga çözümü bulunabilir. Katsayılar,  $\mu < 0$  keyfi olmak üzere

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \frac{1 - \mu}{3(2 - \mu)} > 0 \text{ ve } \alpha_3 = \frac{\mu}{3(2 - \mu)} < 0$$

formunda olduğundan,  $\mu = -2$  seçimi yapıldığında

$$\alpha_2 = \frac{1 - \mu}{3(2 - \mu)} = \frac{1}{4} > 0,$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu}{3(2 - \mu)} = -\frac{1}{6} < 0$$

bulunabilir ve BS sistemi

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x - \frac{1}{4}\eta_{xxt} = 0, \quad (1.136)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} - \frac{1}{4}u_{xxt} = 0. \quad (1.137)$$

formuna döner. Bu durumda

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = \alpha_2 = \frac{1}{4} \neq 0,$$

$$p = \frac{-\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4} = \frac{1}{3} > 0,$$

$$(p - 1/2) [(\alpha_2 - \alpha_1)p - \alpha_2] = \frac{1}{36} > 0$$

olduğundan teoremin (i) durumu sağlanır. Böylece

$$\eta_0 = \frac{3(1 - 2p)}{2p} = \frac{3}{2}$$

ve

$$C_s = \frac{3 + 2\eta_0}{\pm\sqrt{3(3 + \eta_0)}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\eta_0}{3(\alpha_1 - \alpha_2) + 2\alpha_2(\eta_0 + 3)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olacağından,  $x_0$  bir reel sabit olmak üzere (1.136-1.137) denklemleri ile verilen BS sisteminin

$$\eta(x, t) = \frac{3}{2}\text{sech}^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + x_0 - \frac{2\sqrt{6}}{3}t\right)\right] \quad (1.138)$$

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{6}}{2}\text{sech}^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + x_0 - \frac{2\sqrt{6}}{3}t\right)\right] \quad (1.139)$$

formunda bir solitary dalga çözümü vardır.

BS sisteminde

$$\alpha_2 = \frac{1 - \mu}{3(2 - \mu)} > 0 \text{ ve } \alpha_3 = \frac{\mu}{3(2 - \mu)} < 0$$

katsayıları  $\mu \rightarrow -\infty$  için  $\alpha_2 = \alpha_4 = \frac{1}{3}$  ve  $\alpha_3 = -\frac{1}{3}$  değerlerini almaktadır. Bu değerlere göre BS sistemi

$$\eta_t + u_x + (\eta u)_x - \frac{1}{3}\eta_{xxt} = 0, \quad (1.140)$$

$$u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{3}\eta_{xxx} - \frac{1}{3}u_{xxt} = 0. \quad (1.141)$$

formuna döner (Bona and Smith, 1976). Teoreme göre (1.140-1.141) denklemlerinden oluşan BS sisteminin bir solitary dalga çözümü olmadığından, BS sisteminin ilerleyen dalga çözümü;  $g, x_0$  ve  $c$  reel sabitler olmak üzere

$$\eta(x, t) = -1 + \frac{c^2}{4}\left(1 - \frac{g}{3}\right) + \frac{c^2g}{4}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{g}}{2}(x + x_0 - ct)\right), \quad (1.142)$$

$$u(x, t) = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{g}{3}\right) + \frac{cg}{2}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{g}}{2}(x + x_0 - ct)\right) \quad (1.143)$$

formunda bulunabilir (Chen, 1998 a). Bu çözüm (Bona and Smith, 1976) tarafından bulunan çözümünde aynısıdır.

### 1.8.2 İlerleyen iki dalganın çarpışması

(1.136-1.137) denklemlerinden oluşan BS ve (1.106-1.107) denklemlerinden oluşan Whitham sistemlerinin solitary dalga çözümlerinin olduğunu yukarıda belirtmiştik. Her iki sistem için de bulunan solitary dalga çözümlerinde, genlikleri ve tepe noktalarının karşılık geldiği konum değerleri farklı olacak şekilde iki dalga oluşturulamayacağından dolayı, iki solitary dalgasının çarpışması test problemi BS ve Whitham sistemleri için incelenemeyecektir.

Diğer yandan (1.108-1.109) denklemlerinden oluşan RB sistemi, (1.110-1.111) denklemlerinden oluşan KB sistemi ve (1.140-1.141) denklemlerinden oluşan BS sisteminin ilerleyen dalga çözümlerinin sırasıyla (1.132-1.133), (1.134-1.135) ve (1.142-1.143) olduğunu söylemiştik.

(1.132-1.133) ilerleyen dalga çözümünün kullanılmasıyla  $x_1, x_2, g_1, g_2, c_1$  ve  $c_2$  reel sabitler olmak üzere, RB sistemi için iki ilerleyen dalganın çarpışması problemi için başlangıç şartı

$$\eta(x, 0) = -1, \quad (1.144)$$

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \left[ \left(1 - \frac{g_i}{6}\right) c_i + \frac{c_i g_i}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g_i}}{2} (x + x_i) \right) \right] \quad (1.145)$$

olarak verilebilir.

(1.134-1.135) ilerleyen dalga çözümlerinin kullanılmasıyla  $x_1, x_2, g_1, g_2, c_1$  ve  $c_2$  reel sabitler olmak üzere, KB sistemi için iki ilerleyen dalganın çarpışması problemi için başlangıç şartı

$$\eta(x, 0) = -1, \quad (1.146)$$

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \left[ \left(1 - \frac{g_i}{3}\right) c_i + c_i g_i \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g_i}}{2} (x + x_i) \right) \right] \quad (1.147)$$

formunda yazılabilir.

Son olarak (1.140-1.141) denklemlerinden oluşan BS sistemi için iki ilerleyen dalganın çarpışması problemi için başlangıç şartı, (1.142-1.143) ilerleyen dalga çözümlerinin kullanılmasıyla  $x_1, x_2, g_1, g_2, c_1$  ve  $c_2$  reel sabitler olmak üzere

$$\eta(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \left[ -1 + \frac{c_i^2}{4} \left( 1 - \frac{g_i}{3} \right) + \frac{c_i^2 g_i}{4} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g_i}}{2} (x + x_i) \right) \right], \quad (1.148)$$

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{c_i}{2} \left( 1 - \frac{g_i}{3} \right) + \frac{c_i g_i}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{g_i}}{2} (x + x_i) \right) \right] \quad (1.149)$$

şeklinde ifade edilebilir.

## BÖLÜM 2

### GNLS DENKLEMİNİN KÜBİK VE KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METOTLARIYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, GNLS denkleminin kübik ve kuintik B-spline kolekoşın metotları kullanılarak sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu iki test problemi için hata normları, korunum sabitleri hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

#### 2.1 GNLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda, 1. bölümde verilen kübik B-spline kolokeyşin metodu, GNLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için uygulanacaktır. İlk olarak, GNLS denkleminin sayısal çözümüne karşılık gelen  $w_m$ ,

$$w_m = u_m + iv_m \quad (2.1)$$

olacak şekilde reel ve sanal kısımlarına ayırılır,  $u_m$  ve  $v_m$  yerine kübik B-spline yaklaşımları sırasıyla zamana bağlı  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$  parametreleri cinsinden yazılırsa

$$u_m = u_m(x_m) = \rho_{m-1} + 4\rho_m + \rho_{m+1}, \quad (2.2)$$

$$v_m = v_m(x_m) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}, \quad (2.3)$$

$$u'_m = u'_m(x_m) = \frac{3}{h} (\rho_{m+1} - \rho_{m-1}), \quad (2.4)$$

$$v'_m = v'_m(x_m) = \frac{3}{h} (\sigma_{m+1} - \sigma_{m-1}), \quad (2.5)$$

$$u''_m = u''_m(x_m) = \frac{6}{h^2} (\rho_{m-1} - 2\rho_m + \rho_{m+1}), \quad (2.6)$$

$$v''_m = v''_m(x_m) = \frac{6}{h^2} (\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1}) \quad (2.7)$$

eşitlikleri elde edilir.  $\Delta t$  zaman adım uzunluğu olmak üzere

$$u_t \simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \quad v_t \simeq \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t},$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, & v &= \frac{v^n + v^{n+1}}{2}, \\
u_x &= \frac{(u_x)^n + (u_x)^{n+1}}{2}, & v_x &= \frac{(v_x)^n + (v_x)^{n+1}}{2}, \\
u_{xx} &= \frac{(u_{xx})^n + (u_{xx})^{n+1}}{2}, & v_{xx} &= \frac{(v_{xx})^n + (v_{xx})^{n+1}}{2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

yaklaşımları kullanılarak Crank-Nicolson metodu, GNLS denkleminin reel ve sanal kısımlarına ayrılmış formu olan (1.72-1.73) denklemlerine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} - \frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} - \left\{ q_1 \left[ \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \right] + \right. \\
& q_2 \left[ \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \right]^2 \left. \right\} \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) + \\
& 2q_3 \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right) \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) + \\
& \left\{ 2q_3 \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \right] \right\} \\
& \left( \frac{(v_x)^{n+1} + (v_x)^n}{2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{(v_{xx})^{n+1} + (v_{xx})^n}{2} - \left\{ q_1 \left[ \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \right] + \right. \\
& q_2 \left[ \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \right]^2 \left. \right\} \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right) + \\
& 2q_3 \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right) \left( \frac{(v_x)^{n+1} + (v_x)^n}{2} \right) + \\
& \left\{ 2q_3 \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \right] \right\} \\
& \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

sistemi elde edilir. (2.9-2.10) denklemlerinden oluşan sistem,  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$

bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
\lambda_{m1} &= q_1 \left[ \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right)^2 \right] + \\
&\quad q_2 \left[ \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right)^2 \right]^2, \\
\lambda_{m2} &= 2q_3 \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right) \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right), \\
\lambda_{m3} &= 2q_3 \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right)^2 \right], \\
\lambda_{m4} &= 2q_3 \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} - \frac{(u_{xx})_m^{n+1} + (u_{xx})_m^n}{2} - \lambda_{m1} \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right) + \\
&\lambda_{m2} \left( \frac{(u_x)_m^{n+1} + (u_x)_m^n}{2} \right) + \lambda_{m3} \left( \frac{(v_x)_m^{n+1} + (v_x)_m^n}{2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + \frac{(v_{xx})_m^{n+1} + (v_{xx})_m^n}{2} + \lambda_{m1} \left( \frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2} \right) + \\
&\lambda_{m4} \left( \frac{(u_x)_m^{n+1} + (u_x)_m^n}{2} \right) + \lambda_{m2} \left( \frac{(v_x)_m^{n+1} + (v_x)_m^n}{2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

formunda yazılabilir. Sistem incelendiğinde  $\lambda_{m1}$ ,  $\lambda_{m2}$ ,  $\lambda_{m3}$  ve  $\lambda_{m4}$  katsayılarındaki  $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$  terimlerinin lineerliği bozduğu görülür. Sistemi lineer duruma getirmek için,  $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$  yerine

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t (u_t)_m^n + \mathcal{O}(\Delta t^2), \tag{2.13}$$

$$v_m^{n+1} = v_m^n + \Delta t (v_t)_m^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{2.14}$$

Taylor seri açılımları kullanılabilir. Buna göre (2.13-2.14) eşitliklerinde,  $u$  ile  $v$  terimlerinin zamana göre türevleri için (1.72-1.73) denklemleri ile birlikte (2.2-2.7) kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa (2.11-2.12) sistemi

$$u_m^n = \rho_{m-1}^n + 4\rho_m^n + \rho_{m+1}^n,$$

$$v_m^n = \sigma_{m-1}^n + 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^n,$$



$$\begin{aligned}
(u_m^n)_x &= \frac{3}{h} (\rho_{m+1}^n - \rho_{m-1}^n), \\
(v_m^n)_x &= \frac{3}{h} (\sigma_{m+1}^n - \sigma_{m-1}^n), \\
(u_m^n)_{xx} &= \frac{6}{h^2} (\rho_{m-1}^n - 2\rho_m^n + \rho_{m+1}^n), \\
(v_m^n)_{xx} &= \frac{6}{h^2} (\sigma_{m-1}^n - 2\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^n), \\
u_m^{n+1} &= u_m^* = u_m^n - \Delta t \{ (v_{xx})_m^n + [q_1((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2) + q_2((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)^2] v_m^n \\
&\quad + [2q_3(u_m^n)^2 + q_4((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)] (u_x)_m^n + 2q_3 u_m^n v_m^n (v_x)_m^n \}, \\
v_m^{n+1} &= v_m^* = v_m^n - \Delta t \{ -(u_{xx})_m^n - [q_1((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2) + q_2((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)^2] u_m^n \\
&\quad + 2q_3 u_m^n v_m^n (u_x)_m^n + [2q_3(v_m^n)^2 + q_4((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)] (v_x)_m^n \}, \\
\lambda_{m1} &= q_1 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right] + q_2 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right]^2, \\
\lambda_{m2} &= 2q_3 \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right) \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right), \\
\lambda_{m3} &= 2q_3 \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right], \\
\lambda_{m4} &= 2q_3 \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right], \\
\lambda_{m5} &= \lambda_{m1} \Delta t u_m^n - \lambda_{m2} \Delta t (u_x)_m^n + \Delta t (u_{xx})_m^n + 2v_m^n - \lambda_{m3} \Delta t (v_x)_m^n, \\
\lambda_{m6} &= 2u_m^n - \lambda_{m4} \Delta t (u_x)_m^n - \lambda_{m1} \Delta t v_m^n - \lambda_{m2} \Delta t (v_x)_m^n - \Delta t (v_{xx})_m^n
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$-\lambda_{m1} \Delta t u_m^{n+1} + \lambda_{m2} \Delta t (u_x)_m^{n+1} - \Delta t (u_{xx})_m^{n+1} + 2v_m^{n+1} + \lambda_{m3} \Delta t (v_x)_m^{n+1} = \lambda_{m5} \quad (2.15)$$

ve

$$2u_m^{n+1} + \lambda_{m4} \Delta t (u_x)_m^{n+1} + \lambda_{m1} \Delta t v_m^{n+1} + \lambda_{m2} \Delta t (v_x)_m^{n+1} + \Delta t (v_{xx})_m^{n+1} = \lambda_{m6} \quad (2.16)$$

formunda yazılabilir. Buradan, (2.2-2.7) kübik B-spline eşitliklerinin  $(n+1)$ . zaman adımındaki değerleri, (2.15-2.16) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -\lambda_{m1} \Delta t (\rho_{m-1}^{n+1} + 4\rho_m^{n+1} + \rho_{m+1}^{n+1}) + \lambda_{m2} \Delta t \frac{3}{h} (\rho_{m+1}^{n+1} - \rho_{m-1}^{n+1}) - \\
& \Delta t \frac{6}{h^2} (\rho_{m-1}^{n+1} - 2\rho_m^{n+1} + \rho_{m+1}^{n+1}) + 2(\sigma_{m-1}^{n+1} + 4\sigma_m^{n+1} + \sigma_{m+1}^{n+1}) + \\
& \lambda_{m3} \Delta t \frac{3}{h} (\sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^{n+1}) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \quad (2.17)$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2(\rho_{m-1}^{n+1} + 4\rho_m^{n+1} + \rho_{m+1}^{n+1}) + \lambda_{m4}\Delta t \frac{3}{h} (\rho_{m+1}^{n+1} - \rho_{m-1}^{n+1}) + \\
& \lambda_{m1}\Delta t(\sigma_{m-1}^{n+1} + 4\sigma_m^{n+1} + \sigma_{m+1}^{n+1}) + \lambda_{m2}\Delta t \frac{3}{h} (\sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^{n+1}) + \\
& \Delta t \frac{6}{h^2} (\sigma_{m-1}^{n+1} - 2\sigma_m^{n+1} + \sigma_{m+1}^{n+1}) = \lambda_{m6}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

denklem sistemine ulaşılır. Böylece kübik B-spline kolokeyşin metodu uygulandıktan sonra, (1.72-1.73) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( -\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t \frac{3}{h} - \Delta t \frac{6}{h^2} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( 2 - \lambda_{m3}\Delta t \frac{3}{h} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} \left( -4\lambda_{m1}\Delta t + \Delta t \frac{12}{h^2} \right) + \sigma_m^{n+1}(8) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( -\lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t \frac{3}{h} - \Delta t \frac{6}{h^2} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( 2 + \lambda_{m3}\Delta t \frac{3}{h} \right) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( 2 - \lambda_{m4}\Delta t \frac{3}{h} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( \lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t \frac{3}{h} + \Delta t \frac{6}{h^2} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} (8) + \sigma_m^{n+1} \left( 4\lambda_{m1}\Delta t - \Delta t \frac{12}{h^2} \right) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( 2 + \lambda_{m4}\Delta t \frac{3}{h} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( \lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t \frac{3}{h} + \Delta t \frac{6}{h^2} \right) = \lambda_{m6}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

olacak şekilde  $2N+2$  denklem  $2N+6$  bilinmeyenden oluşan bir sisteme dönüştürülmüş olur. Sistemin çözülebilir olması için, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. Buna göre, (1.65) sınır şartından

$$\begin{aligned}
u(x_0, t) &= u_0 = \rho_{-1}^{n+1} + 4\rho_0^{n+1} + \rho_1^{n+1}, \\
v(x_0, t) &= v_0 = \sigma_{-1}^{n+1} + 4\sigma_0^{n+1} + \sigma_1^{n+1}, \\
u(x_N, t) &= u_N = \rho_{N-1}^{n+1} + 4\rho_N^{n+1} + \rho_{N+1}^{n+1}, \\
v(x_N, t) &= v_N = \sigma_{N-1}^{n+1} + 4\sigma_N^{n+1} + \sigma_{N+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_{-1}^{n+1} = u_0 - 4\rho_0^{n+1} - \rho_1^{n+1}, \tag{2.21}$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = v_0 - 4\sigma_0^{n+1} - \sigma_1^{n+1}, \tag{2.22}$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = u_N - 4\rho_N^{n+1} - \rho_{N-1}^{n+1}, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = v_N - 4\sigma_N^{n+1} - \sigma_{N-1}^{n+1} \quad (2.24)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.19-2.20) denklem sisteminde  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  parametreleri yerine, (2.21-2.24) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece

$$a_0 = -\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{3}{h} - \Delta t\frac{6}{h^2},$$

$$a_1 = 2 - \lambda_{m3}\Delta t\frac{3}{h},$$

$$a_2 = -4\lambda_{m1}\Delta t + \Delta t\frac{12}{h^2},$$

$$a_3 = -\lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t\frac{3}{h} - \Delta t\frac{6}{h^2},$$

$$a_4 = 2 + \lambda_{m3}\Delta t\frac{3}{h},$$

$$b_0 = 2 - \lambda_{m4}\Delta t\frac{3}{h},$$

$$b_1 = 2 + \lambda_{m4}\Delta t\frac{3}{h}$$

olmak üzere, (1.72-1.73) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$m = 0$  için

$$(a_2 - 4a_0)\rho_0^{n+1} + (8 - 4a_1)\sigma_0^{n+1} + (a_3 - a_0)\rho_1^{n+1} + (a_4 - a_1)\sigma_1^{n+1} =$$

$$\lambda_{m5} - a_0u_0 - a_1v_0,$$

$$(8 - 4b_0)\rho_0^{n+1} + (-a_2 + 4a_3)\sigma_0^{n+1} + (b_1 - b_0)\rho_1^{n+1} + (-a_0 + a_3)\sigma_1^{n+1} =$$

$$\lambda_{m6} - b_0u_0 + a_3v_0$$

$m = 1$  için

$$a_0\rho_0^{n+1} + a_1\sigma_0^{n+1} + a_2\rho_1^{n+1} + 8\sigma_1^{n+1} + a_3\rho_2^{n+1} + a_4\sigma_2^{n+1} = \lambda_{m5},$$

$$b_0\rho_0^{n+1} - a_3\sigma_0^{n+1} + 8\rho_1^{n+1} - a_2\sigma_1^{n+1} + b_1\rho_2^{n+1} - a_0\sigma_2^{n+1} = \lambda_{m6},$$

$$\vdots \quad (2.25)$$

$m = N - 1$  için

$$a_0\rho_{N-2}^{n+1} + a_1\sigma_{N-2}^{n+1} + a_2\rho_{N-1}^{n+1} + 8\sigma_{N-1}^{n+1} + a_3\rho_N^{n+1} + a_4\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5},$$

$$b_0\rho_{N-2}^{n+1} - a_3\sigma_{N-2}^{n+1} + 8\rho_{N-1}^{n+1} - a_2\sigma_{N-1}^{n+1} + b_1\rho_N^{n+1} - a_0\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m6}$$

$m = N$  için

$$(a_0 - a_3)\rho_{N-1}^{n+1} + (a_1 - a_4)\sigma_{N-1}^{n+1} + (a_2 - 4a_3)\rho_N^{n+1} + (8 - 4a_4)\sigma_N^{n+1} =$$

$$\lambda_{m5} - a_3u_N - a_4v_N,$$

$$(b_0 - b_1)\rho_{N-1}^{n+1} + (-a_3 + a_0)\sigma_{N-1}^{n+1} + (8 - 4b_1)\rho_N^{n+1} + (-a_2 + 4a_0)\sigma_N^{n+1} =$$

$$\lambda_{m6} - b_1u_N + a_0v_N$$

formunda açık olarak yazılabilir. (2.25) denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenden oluşan 6 sütun elemanlı bir sistemdir ve Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir.

GNLS denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümünü araştırılırken elde edilen (2.25) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\rho_{-1}^0, \rho_0^0, \dots, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0) \text{ ve } (\sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \dots, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir.

### Başlangıç durumu

Başlangıç vektörleri, (1.68) başlangıç şartı ile bulunabilir. Bunun için (1.45) yaklaşık çözümü,  $t = 0$  zamanında reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa

$$u_m(x, 0) = u_m = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \rho_m^0, \quad (2.26)$$

$$v_m(x, 0) = v_m = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \sigma_m^0 \quad (2.27)$$





Başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen başlangıç vektörleri sayesinde,  $n = 0$  için (2.25) denklem sisteminin sağ tarafındaki tüm değerler artık bilinmektedir. Sol kısımdaki bilinmeyenler ise, Thomas algoritması ile hesaplanabilir. Sonraki zaman adımlarında, bir önceki zamanda bulunan değerlerin kullanılmasıyla, istenilen zamandaki GNLS denkleminin sayısal çözümüne ulaşılan kadar iterasyona devam edilir.

## 2.2 GNLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda, GNLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için, 1. bölümde verilen kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılacaktır. Metodun uygulanabilmesi için ilk olarak, GNLS denkleminin sayısal çözümüne karşılık gelen  $w_m$ ,

$$w_m = u_m + iv_m \quad (2.36)$$

olacak şekilde reel ve sanal kısımlarına ayrılır,  $u_m$  ve  $v_m$  yerine kuintik B-spline yaklaşımları sırasıyla zamana bağlı  $\rho_m$  ve  $\sigma_m$  parametreleri cinsinden yazılırsa

$$u_m = u_m(x_m) = \rho_{m+2} + 26\rho_{m+1} + 66\rho_m + 26\rho_{m-1} + \rho_{m-2}, \quad (2.37)$$

$$v_m = v_m(x_m) = \sigma_{m+2} + 26\sigma_{m+1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}, \quad (2.38)$$

$$u'_m = u'_m(x_m) = \frac{5}{h} (\rho_{m+2} + 10\rho_{m+1} - 10\rho_{m-1} - \rho_{m-2}), \quad (2.39)$$

$$v'_m = v'_m(x_m) = \frac{5}{h} (\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}), \quad (2.40)$$

$$u''_m = u''_m(x_m) = \frac{20}{h^2} (\rho_{m+2} + 2\rho_{m+1} - 6\rho_m + 2\rho_{m-1} + \rho_{m-2}), \quad (2.41)$$

$$v''_m = v''_m(x_m) = \frac{20}{h^2} (\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}), \quad (2.42)$$

$$u'''_m = u'''_m(x_m) = \frac{60}{h^3} (\rho_{m+2} - 2\rho_{m+1} + 2\rho_{m-1} - \rho_{m-2}), \quad (2.43)$$

$$v'''_m = v'''_m(x_m) = \frac{60}{h^3} (\sigma_{m+2} - 2\sigma_{m+1} + 2\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) \quad (2.44)$$

eşitliklerine ulaşılır.

GNLS denkleminin reel ve sanal kısımlarına ayrılmasıyla elde edilen (1.72-1.73) denklemlerinde gerekli düzenlemeler yapılarak, (2.11-2.12) denklem sistemi elde edilmişti. (2.11-2.12) denklem sisteminde lineerliği bozan terimler için, (2.13-2.14)

Taylor seri açılımları kullanılabilir. Elde edilen bu açılımda ilgili terimler yerine (2.37-2.42) kuintik B-spline eşitlikleri ve zamana göre türev için ise, (1.72-1.73) denklemleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
u_m^n &= \rho_{m+2}^n + 26\rho_{m+1}^n + 66\rho_m^n + 26\rho_{m-1}^n + \rho_{m-2}^n, \\
v_m^n &= \sigma_{m+2}^n + 26\sigma_{m+1}^n + 66\sigma_m^n + 26\sigma_{m-1}^n + \sigma_{m-2}^n, \\
(u_x)_m^n &= \frac{5}{h} (\rho_{m+2}^n + 10\rho_{m+1}^n - 10\rho_{m-1}^n - \rho_{m-2}^n), \\
(v_x)_m^n &= \frac{5}{h} (\sigma_{m+2}^n + 10\sigma_{m+1}^n - 10\sigma_{m-1}^n - \sigma_{m-2}^n), \\
(u_{xx})_m^n &= \frac{20}{h^2} (\rho_{m+2}^n + 2\rho_{m+1}^n - 6\rho_m^n + 2\rho_{m-1}^n + \rho_{m-2}^n), \\
(v_{xx})_m^n &= \frac{20}{h^2} (\sigma_{m+2}^n + 2\sigma_{m+1}^n - 6\sigma_m^n + 2\sigma_{m-1}^n + \sigma_{m-2}^n), \\
u_m^{n+1} &= u_m^* = u_m^n - \Delta t \{ (v_{xx})_m^n + [q_1((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2) + q_2((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)^2] v_m^n \\
&\quad + [2q_3(u_m^n)^2 + q_4((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)] (u_x)_m^n + 2q_3 u_m^n v_m^n (v_x)_m^n \}, \\
v_m^{n+1} &= v_m^* = v_m^n - \Delta t \{ -(u_{xx})_m^n - [q_1((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2) + q_2((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)^2] u_m^n \\
&\quad + 2q_3 u_m^n v_m^n (u_x)_m^n + [2q_3(v_m^n)^2 + q_4((u_m^n)^2 + (v_m^n)^2)] (v_x)_m^n \}, \\
\lambda_{m1} &= q_1 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right] + q_2 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right]^2, \\
\lambda_{m2} &= 2q_3 \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right) \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right), \\
\lambda_{m3} &= 2q_3 \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right], \\
\lambda_{m4} &= 2q_3 \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + q_4 \left[ \left( \frac{u_m^* + u_m^n}{2} \right)^2 + \left( \frac{v_m^* + v_m^n}{2} \right)^2 \right], \\
\lambda_{m5} &= \lambda_{m1} \Delta t u_m^n - \lambda_{m2} \Delta t (u_x)_m^n + \Delta t (u_{xx})_m^n + 2v_m^n - \lambda_{m3} \Delta t (v_x)_m^n, \\
\lambda_{m6} &= 2u_m^n - \lambda_{m4} \Delta t (u_x)_m^n - \lambda_{m1} \Delta t v_m^n - \lambda_{m2} \Delta t (v_x)_m^n - \Delta t (v_{xx})_m^n
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$-\lambda_{m1} \Delta t u_m^{n+1} + \lambda_{m2} \Delta t (u_x)_m^{n+1} - \Delta t (u_{xx})_m^{n+1} + 2v_m^{n+1} + \lambda_{m3} \Delta t (v_x)_m^{n+1} = \lambda_{m5}, \quad (2.45)$$

ve

$$2u_m^{n+1} + \lambda_{m4} \Delta t (u_x)_m^{n+1} + \lambda_{m1} \Delta t v_m^{n+1} + \lambda_{m2} \Delta t (v_x)_m^{n+1} + \Delta t (v_{xx})_m^{n+1} = \lambda_{m6} \quad (2.46)$$



sistemi elde edilir.  $(n+1)$ . zaman adımındaki (2.37-2.42) kuintik B-spline eşitlikleri, (2.45-2.46) denklem sisteminde kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& -\lambda_{m1}\Delta t(\rho_{m+2}^{n+1} + 26\rho_{m+1}^{n+1} + 66\rho_m^{n+1} + 26\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1})+ \\
& \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h}(\rho_{m+2}^{n+1} + 10\rho_{m+1}^{n+1} - 10\rho_{m-1}^{n+1} - \rho_{m-2}^{n+1}) - \\
& \Delta t\frac{20}{h^2}(\rho_{m+2}^{n+1} + 2\rho_{m+1}^{n+1} - 6\rho_m^{n+1} + 2\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1}) + \\
& 2(\sigma_{m+2}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 66\sigma_m^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1})+ \\
& \lambda_{m3}\Delta t\frac{5}{h}(\sigma_{m+2}^{n+1} + 10\sigma_{m+1}^{n+1} - 10\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-2}^{n+1}) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 2(\rho_{m+2}^{n+1} + 26\rho_{m+1}^{n+1} + 66\rho_m^{n+1} + 26\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1})+ \\
& \lambda_{m4}\Delta t\frac{5}{h}(\rho_{m+2}^{n+1} + 10\rho_{m+1}^{n+1} - 10\rho_{m-1}^{n+1} - \rho_{m-2}^{n+1}) + \\
& \lambda_{m1}\Delta t(\sigma_{m+2}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 66\sigma_m^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1})+ \\
& \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h}(\sigma_{m+2}^{n+1} + 10\sigma_{m+1}^{n+1} - 10\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-2}^{n+1}) + \\
& \Delta t\frac{20}{h^2}(\sigma_{m+2}^{n+1} + 2\sigma_{m+1}^{n+1} - 6\sigma_m^{n+1} + 2\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1}) = \lambda_{m6}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

sistemine ve buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-2}^{n+1} \left( -\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h} - \Delta t\frac{20}{h^2} \right) + \sigma_{m-2}^{n+1} \left( 2 - \lambda_{m3}\Delta t\frac{5}{h} \right) + \\
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( -26\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{50}{h} - \Delta t\frac{40}{h^2} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( 52 - \lambda_{m3}\Delta t\frac{50}{h} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} \left( -66\lambda_{m1}\Delta t + \Delta t\frac{120}{h^2} \right) + \sigma_m^{n+1} (132) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( -26\lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t\frac{50}{h} - \Delta t\frac{40}{h^2} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( 52 + \lambda_{m3}\Delta t\frac{50}{h} \right) + \\
& \rho_{m+2}^{n+1} \left( -\lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h} - \Delta t\frac{20}{h^2} \right) + \sigma_{m+2}^{n+1} \left( 2 + \lambda_{m3}\Delta t\frac{5}{h} \right) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-2}^{n+1} \left( 2 - \lambda_{m4}\Delta t\frac{5}{h} \right) + \sigma_{m-2}^{n+1} \left( \lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h} + \Delta t\frac{20}{h^2} \right) + \\
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( 52 - \lambda_{m4}\Delta t\frac{50}{h} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{50}{h} + \Delta t\frac{40}{h^2} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} (132) + \sigma_m^{n+1} \left( 66\lambda_{m1}\Delta t - \Delta t\frac{120}{h^2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{m+1}^{n+1} \left( 52 + \lambda_{m4} \Delta t \frac{50}{h} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m1} \Delta t + \lambda_{m2} \Delta t \frac{50}{h} + \Delta t \frac{40}{h^2} \right) + \\ \rho_{m+2}^{n+1} \left( 2 + \lambda_{m4} \Delta t \frac{5}{h} \right) + \sigma_{m+2}^{n+1} \left( \lambda_{m1} \Delta t + \lambda_{m2} \Delta t \frac{5}{h} + \Delta t \frac{20}{h^2} \right) = \lambda_{m6} \end{aligned} \quad (2.50)$$

formunda  $2N + 2$  denklem  $2N + 10$  bilinmeyenenden oluşan bir denklem sistemine ulaşılır. Denklem ve bilinmeyen sayılarının eşitlenebilmesi için  $\rho_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+2}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+2}^{n+1}$  bilinmeyenleri sınır şartları kullanılarak yok edilmiştir. (1.65-1.66) sınır şartlarından

$$\begin{aligned} u(x_0, t) &= u_0 = \rho_2^{n+1} + 26\rho_1^{n+1} + 66\rho_0^{n+1} + 26\rho_{-1}^{n+1} + \rho_{-2}^{n+1}, \\ v(x_0, t) &= v_0 = \sigma_2^{n+1} + 26\sigma_1^{n+1} + 66\sigma_0^{n+1} + 26\sigma_{-1}^{n+1} + \sigma_{-2}^{n+1}, \\ u'(x_0, t) &= ux_0 = \frac{5}{h} (\rho_2^{n+1} + 10\rho_1^{n+1} - 10\rho_{-1}^{n+1} - \rho_{-2}^{n+1}), \\ v'(x_0, t) &= vx_0 = \frac{5}{h} (\sigma_2^{n+1} + 10\sigma_1^{n+1} - 10\sigma_{-1}^{n+1} - \sigma_{-2}^{n+1}), \\ u(x_N, t) &= u_N = \rho_{N+2}^{n+1} + 26\rho_{N+1}^{n+1} + 66\rho_N^{n+1} + 26\rho_{N-1}^{n+1} + \rho_{N-2}^{n+1}, \\ v(x_N, t) &= v_N = \sigma_{N+2}^{n+1} + 26\sigma_{N+1}^{n+1} + 66\sigma_N^{n+1} + 26\sigma_{N-1}^{n+1} + \sigma_{N-2}^{n+1}, \\ u'(x_N, t) &= ux_N = \frac{5}{h} (\rho_{N+2}^{n+1} + 10\rho_{N+1}^{n+1} - 10\rho_{N-1}^{n+1} - \rho_{N-2}^{n+1}), \\ v'(x_N, t) &= vx_N = \frac{5}{h} (\sigma_{N+2}^{n+1} + 10\sigma_{N+1}^{n+1} - 10\sigma_{N-1}^{n+1} - \sigma_{N-2}^{n+1}) \end{aligned}$$

ifadeleri yazılarak, ilk dört sınır şartının birlikte çözülmesiyle

$$\rho_{-2}^{n+1} = \frac{9}{4}\rho_2^{n+1} + \frac{65}{2}\rho_1^{n+1} + \frac{165}{4}\rho_0^{n+1} - \frac{5}{8}u_0 - \frac{13}{40}hux_0 \quad (2.51)$$

$$\sigma_{-2}^{n+1} = \frac{9}{4}\sigma_2^{n+1} + \frac{65}{2}\sigma_1^{n+1} + \frac{165}{4}\sigma_0^{n+1} - \frac{5}{8}v_0 - \frac{13}{40}hvx_0 \quad (2.52)$$

$$\rho_{-1}^{n+1} = -\frac{1}{8}\rho_2^{n+1} - \frac{9}{4}\rho_1^{n+1} - \frac{33}{8}\rho_0^{n+1} + \frac{1}{16}u_0 + \frac{1}{80}hux_0 \quad (2.53)$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = -\frac{1}{8}\sigma_2^{n+1} - \frac{9}{4}\sigma_1^{n+1} - \frac{33}{8}\sigma_0^{n+1} + \frac{1}{16}v_0 + \frac{1}{80}hvx_0 \quad (2.54)$$

ve son dört sınır şartının birlikte çözülmesiyle de

$$\rho_{N+2}^{n+1} = \frac{165}{4}\rho_N^{n+1} + \frac{65}{2}\rho_{N-1}^{n+1} + \frac{9}{4}\rho_{N-2}^{n+1} - \frac{5}{8}u_N - \frac{13}{40}hux_N \quad (2.55)$$

$$\sigma_{N+2}^{n+1} = \frac{165}{4}\sigma_N^{n+1} + \frac{65}{2}\sigma_{N-1}^{n+1} + \frac{9}{4}\sigma_{N-2}^{n+1} - \frac{5}{8}v_N - \frac{13}{40}hvx_N \quad (2.56)$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = -\frac{33}{8}\rho_N^{n+1} - \frac{9}{4}\rho_{N-1}^{n+1} - \frac{1}{8}\rho_{N-2}^{n+1} + \frac{1}{16}u_N + \frac{1}{80}hux_N \quad (2.57)$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = -\frac{33}{8}\sigma_N^{n+1} - \frac{9}{4}\sigma_{N-1}^{n+1} - \frac{1}{8}\sigma_{N-2}^{n+1} + \frac{1}{16}v_N + \frac{1}{80}hvx_N \quad (2.58)$$

eşitlikleri bulunur. Böylece (2.49-2.50) denklem sisteminde  $\rho_{-2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+2}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+2}^{n+1}$  parametreleri yerine, (2.51-2.58) eşitlikleri kullanıldığında, denklem ve bilinmeyen sayıları  $2N + 2$  olur. Buradan

$$\begin{aligned} a_0 &= -\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h} - \Delta t\frac{20}{h^2}, \\ a_1 &= 2 - \lambda_{m3}\Delta t\frac{5}{h}, \\ a_2 &= -26\lambda_{m1}\Delta t - \lambda_{m2}\Delta t\frac{50}{h} - \Delta t\frac{40}{h^2}, \\ a_3 &= 52 - \lambda_{m3}\Delta t\frac{50}{h}, \\ a_4 &= -66\lambda_{m1}\Delta t + \Delta t\frac{120}{h^2}, \\ a_5 &= -26\lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t\frac{50}{h} - \Delta t\frac{40}{h^2}, \\ a_6 &= 52 + \lambda_{m3}\Delta t\frac{50}{h}, \\ a_7 &= -\lambda_{m1}\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t\frac{5}{h} - \Delta t\frac{20}{h^2}, \\ a_8 &= 2 + \lambda_{m3}\Delta t\frac{5}{h}, \\ b_0 &= 2 - \lambda_{m4}\Delta t\frac{5}{h}, \\ b_1 &= 52 - \lambda_{m4}\Delta t\frac{50}{h}, \\ b_2 &= 52 + \lambda_{m4}\Delta t\frac{50}{h}, \\ b_3 &= 2 + \lambda_{m4}\Delta t\frac{5}{h} \end{aligned}$$

olmak üzere (1.72-1.73) denklemleri,  $x_m, m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$m = 0$  için

$$\begin{aligned} &\left(a_4 + \frac{165}{4}a_0 - \frac{33}{8}a_2\right)\rho_0^{n+1} + \left(132 + \frac{165}{4}a_1 - \frac{33}{8}a_3\right)\sigma_0^{n+1} + \\ &\left(a_5 + \frac{65}{2}a_0 - \frac{9}{4}a_2\right)\rho_1^{n+1} + \left(a_6 + \frac{65}{2}a_1 - \frac{9}{4}a_3\right)\sigma_1^{n+1} + \left(a_7 + \frac{9}{4}a_0 - \frac{1}{8}a_2\right)\rho_2^{n+1} + \\ &\left(a_8 + \frac{9}{4}a_1 - \frac{1}{8}a_3\right)\sigma_2^{n+1} = \lambda_{m5} + \frac{5}{8}a_0u_0 + \frac{13}{40}ha_0ux_0 + \frac{5}{8}a_1v_0 + \frac{13}{40}ha_1vx_0 - \\ &\frac{1}{16}a_2u_0 - \frac{1}{80}ha_2ux_0 - \frac{1}{16}a_3v_0 - \frac{1}{80}ha_3vx_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(132 + \frac{165}{4}b_0 - \frac{33}{8}b_1\right) \rho_0^{n+1} + \left(-a_4 - \frac{165}{4}a_7 + \frac{33}{8}a_5\right) \sigma_0^{n+1} + \\
& \left(b_2 + \frac{65}{2}b_0 - \frac{9}{4}b_1\right) \rho_1^{n+1} + \left(-a_2 - \frac{65}{2}a_7 + \frac{9}{4}a_5\right) \sigma_1^{n+1} + \left(b_3 + \frac{9}{4}b_0 - \frac{1}{8}b_1\right) \rho_2^{n+1} + \\
& \left(-a_0 - \frac{9}{4}a_7 + \frac{1}{8}a_5\right) \sigma_2^{n+1} = \lambda_{m6} + \frac{5}{8}b_0u_0 + \frac{13}{40}hb_0ux_0 - \frac{5}{8}a_7v_0 - \frac{13}{40}ha_7vx_0 - \\
& \frac{1}{16}b_1u_0 - \frac{1}{80}b_1hux_0 + \frac{1}{16}a_5v_0 + \frac{1}{80}ha_5vx_0
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$\begin{aligned}
& \left(a_2 - \frac{33}{8}a_0\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_3 - \frac{33}{8}a_0\right) \sigma_0^{n+1} + \left(a_4 - \frac{9}{4}a_0\right) \rho_1^{n+1} + \left(132 - \frac{9}{4}a_1\right) \sigma_1^{n+1} + \\
& \left(a_5 - \frac{1}{8}a_0\right) \rho_2^{n+1} + \left(a_6 - \frac{1}{8}a_1\right) \sigma_2^{n+1} + a_7\rho_3^{n+1} + a_8\sigma_3^{n+1} = \lambda_{m5} - \frac{1}{16}a_0u_0 - \\
& \frac{1}{80}ha_0ux_0 - \frac{1}{16}a_1v_0 - \frac{1}{80}ha_1vx_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(b_1 - \frac{33}{8}b_0\right) \rho_0^{n+1} + \left(-a_5 + \frac{33}{8}a_7\right) \sigma_0^{n+1} + \left(132 - \frac{9}{4}b_0\right) \rho_1^{n+1} + \\
& \left(-a_4 + \frac{9}{4}a_7\right) \sigma_1^{n+1} + \left(b_2 - \frac{1}{8}b_0\right) \rho_2^{n+1} + \left(-a_2 + \frac{1}{8}a_7\right) \sigma_2^{n+1} + b_3\rho_3^{n+1} - a_0\sigma_3^{n+1} = \\
& \lambda_{m6} - \frac{1}{16}b_0 - \frac{1}{80}hb_0ux_0 + \frac{1}{16}a_7v_0 + \frac{1}{80}ha_7vx_0
\end{aligned}$$

$m = 2$  için

$$\begin{aligned}
& a_0\rho_0^{n+1} + a_1\sigma_0^{n+1} + a_2\rho_1^{n+1} + a_3\sigma_1^{n+1} + a_4\rho_2^{n+1} + 132\sigma_2^{n+1} + a_5\rho_3^{n+1} + a_6\sigma_3^{n+1} + \\
& a_7\rho_4^{n+1} + a_8\sigma_4^{n+1} = \lambda_{m5},
\end{aligned}$$

$$b_0\rho_0^{n+1} - a_7\sigma_0^{n+1} + b_1\rho_1^{n+1} - a_5\sigma_1^{n+1} + 132\rho_2^{n+1} - a_4\sigma_2^{n+1} + b_2\rho_3^{n+1} - a_2\sigma_3^{n+1} +$$

$$b_3\rho_4^{n+1} - a_0\sigma_4^{n+1} = \lambda_{m6},$$

$\vdots$

(2.59)

$m = N - 2$  için

$$a_0\rho_{N-4}^{n+1} + a_1\sigma_{N-4}^{n+1} + a_2\rho_{N-3}^{n+1} + a_3\sigma_{N-3}^{n+1} + a_4\rho_{N-2}^{n+1} + 132\sigma_{N-2}^{n+1} + a_5\rho_{N-1}^{n+1} + a_6\sigma_{N-1}^{n+1} + a_7\rho_N^{n+1} + a_8\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5},$$

$$b_0\rho_{N-4}^{n+1} - a_7\sigma_{N-4}^{n+1} + b_1\rho_{N-3}^{n+1} - a_5\sigma_{N-3}^{n+1} + 132\rho_{N-2}^{n+1} - a_4\sigma_{N-2}^{n+1} + b_2\rho_{N-1}^{n+1} - a_2\sigma_{N-1}^{n+1} + b_3\rho_N^{n+1} - a_0\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m6}$$

$m = N - 1$  için

$$a_0\rho_{N-3}^{n+1} + a_1\sigma_{N-3}^{n+1} + \left(a_2 - \frac{1}{8}a_7\right)\rho_{N-2}^{n+1} + \left(a_3 - \frac{1}{8}a_8\right)\sigma_{N-2}^{n+1} + \left(a_4 - \frac{9}{4}a_7\right)\rho_{N-1}^{n+1} + \left(132 - \frac{9}{4}a_8\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + \left(a_5 - \frac{33}{8}a_7\right)\rho_N^{n+1} + \left(a_6 - \frac{33}{8}a_8\right)\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5} - \frac{1}{16}a_7u_N - \frac{1}{80}ha_7ux_N - \frac{1}{16}a_8v_N - \frac{1}{80}ha_8vx_N,$$

$$b_0\rho_{N-3}^{n+1} - a_7\sigma_{N-3}^{n+1} + \left(b_1 - \frac{1}{8}b_3\right)\rho_{N-2}^{n+1} + \left(-a_5 + \frac{1}{8}a_0\right)\sigma_{N-2}^{n+1} + \left(132 - \frac{9}{4}b_3\right)\rho_{N-1}^{n+1} + \left(-a_4 + \frac{9}{4}a_0\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + \left(b_2 - \frac{33}{8}b_3\right)\rho_N^{n+1} + \left(-a_2 + \frac{33}{8}a_0\right)\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m6} - \frac{1}{16}b_3u_N - \frac{1}{80}b_3hux_N + \frac{1}{16}a_0v_N + \frac{1}{80}ha_0vx_N$$

$m = N$  için

$$\left(a_0 - \frac{1}{8}a_5 + \frac{9}{4}a_7\right)\rho_{N-2}^{n+1} + \left(a_1 - \frac{1}{8}a_6 + \frac{9}{4}a_8\right)\sigma_{N-2}^{n+1} + \left(a_2 - \frac{9}{4}a_5 + \frac{65}{2}a_7\right)\rho_{N-1}^{n+1} + \left(a_3 + \frac{65}{2}a_8 - \frac{9}{4}a_6\right)\sigma_{N-1}^{n+1} + \left(a_4 - \frac{33}{8}a_5 + \frac{165}{4}a_7\right)\rho_N^{n+1} + \left(132 - \frac{33}{8}a_6 + \frac{165}{4}\right)\sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5} - \frac{1}{16}a_5u_N - \frac{1}{80}ha_5ux_N - \frac{1}{16}a_6v_N - \frac{1}{80}ha_6vx + \frac{5}{8}a_7u_N + \frac{13}{40}ha_7ux_N + \frac{5}{8}a_8v_N + \frac{13}{40}ha_8vx_N,$$

$$\begin{aligned}
& \left( b_0 - \frac{1}{8}b_2 + \frac{9}{4}b_3\rho_{N-2} \right) \rho_{N-2}^{n+1} + \left( -a_7 + \frac{1}{8}a_2 - \frac{9}{4}a_0 \right) \sigma_{N-2}^{n+1} + \\
& \left( b_1 - \frac{9}{4}b_2 + \frac{65}{2}b_3 \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \left( -a_5 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{65}{2}a_0 \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \\
& \left( 132 - \frac{33}{8}b_2 + \frac{165}{4}b_3 \right) \rho_N^{n+1} + \left( -a_4 + \frac{33}{8}a_2 - \frac{165}{4}a_0 \right) \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m6} - \frac{1}{16}b_2u_N - \\
& \frac{1}{80}hb_2ux_N + \frac{1}{16}a_2v_N + \frac{1}{80}ha_2vx_N + \frac{5}{8}b_3u_N + \frac{13}{40}hb_3ux_N - \frac{5}{8}a_0v_N - \frac{13}{40}ha_0vx_N
\end{aligned}$$

formunda sınır şartlarında uygulanmış biçimde  $2N+2$  denklem ve  $2N+2$  bilinmeyen- den oluşan bir denklem sistemi olarak açık formda yazılabilir.

### Başlangıç durumu

GNLS denkleminin kuintik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümünü bulabilmek, dolayısıyla (2.59) denklem sisteminde iterasyona başlangıç yapabilmek için

$$(\rho_{-2}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \rho_{N+1}^0, \rho_{N+2}^0) \text{ ve } (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \dots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)$$

başlangıç vektörlerinin hesaplanması gereklidir. Bu hesaplama (1.68) başlangıç şartı ile yapılabilir. Bu bağlamda, ilk olarak (1.52) eşitliği  $t = 0$  anında reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa

$$u_m(x, 0) = u_m = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \rho_m^0, \quad (2.60)$$

$$v_m(x, 0) = v_m = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \sigma_m^0 \quad (2.61)$$

elde edilir. (2.60-2.61) eşitliklerinde,  $u_m(x, 0)$  ve  $v_m(x, 0)$  değerleri, (1.68) başlangıç şartlarından bilinmekte,  $\rho_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  parametreleri ise bilinmemektedir.

(2.60) eşitliği açık olarak yazıldığında

$$\begin{aligned}
\rho_{-2}^0 + 26\rho_{-1}^0 + 66\rho_0^0 + 26\rho_1^0 + \rho_2^0 &= u_0, \\
\rho_{-1}^0 + 26\rho_0^0 + 66\rho_1^0 + 26\rho_2^0 + \rho_3^0 &= u_1, \\
&\vdots \\
\rho_{N-3}^0 + 26\rho_{N-2}^0 + 66\rho_{N-1}^0 + 26\rho_N^0 + \rho_{N+1}^0 &= u_{N-1}, \\
\rho_{N-2}^0 + 26\rho_{N-1}^0 + 66\rho_N^0 + 26\rho_{N+1}^0 + \rho_{N+2}^0 &= u_N
\end{aligned} \quad (2.62)$$



$$X = \begin{bmatrix} \rho_0^0 \\ \rho_1^0 \\ \rho_2^0 \\ \rho_3^0 \\ \vdots \\ \rho_{N-2}^0 \\ \rho_{N-1}^0 \\ \rho_N^0 \end{bmatrix} \quad \text{ve } B = \begin{bmatrix} u_0 + \frac{3h}{5}u_0' + \frac{h^2}{10}u_0'' \\ u_1 + \frac{h}{40}u_0' + \frac{h^2}{160}u_0'' \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} - \frac{h}{40}u_N' + \frac{h^2}{160}u_N'' \\ u_N - \frac{3h}{5}u_N' + \frac{h^2}{10}u_N'' \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$AX = B$$

şeklinde  $N + 1$  denklem ve  $N + 1$  bilinmeyenden oluşan bir matris sistemi elde edilir.

Matris formunda yazılan bu denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülmüşse

$$\rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerin (2.64-2.67) eşitliklerinde kullanılması sonucunda

$$(\rho_{-2}^0, \rho_{-1}^0, \rho_0^0, \rho_1^0, \dots, \rho_{N-1}^0, \rho_N^0, \rho_{N+1}^0, \rho_{N+2}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilir.

Benzer olarak, (2.61) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned} \sigma_{-2}^0 + 26\sigma_{-1}^0 + 66\sigma_0^0 + 26\sigma_1^0 + \sigma_2^0 &= v_0, \\ \sigma_{-1}^0 + 26\sigma_0^0 + 66\sigma_1^0 + 26\sigma_2^0 + \sigma_3^0 &= v_1, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\sigma_{N-3}^0 + 26\sigma_{N-2}^0 + 66\sigma_{N-1}^0 + 26\sigma_N^0 + \sigma_{N+1}^0 = v_{N-1},$$

$$\sigma_{N-2}^0 + 26\sigma_{N-1}^0 + 66\sigma_N^0 + 26\sigma_{N+1}^0 + \sigma_{N+2}^0 = v_N$$

şeklinde yazıldığında,  $N + 5$  bilinmeyen ve  $N + 1$  denklemden oluşan bir sisteme karşılık gelir. (1.66-1.67) sınır şartlarının kullanılmasıyla



$$\begin{aligned}
v'(x_0, 0) &= v'_0 = \frac{5}{h} (\sigma_2^0 + 10\sigma_1^0 - 10\sigma_{-1}^0 - \sigma_{-2}^0), \\
v''(x_0, 0) &= v''_0 = \frac{20}{h^2} (\sigma_2^0 + 2\sigma_1^0 - 6\sigma_0^0 + 2\sigma_{-1}^0 + \sigma_{-2}^0), \\
v'(x_N, 0) &= v'_N = \frac{5}{h} (\sigma_{N+2}^0 + 10\sigma_{N+1}^0 - 10\sigma_{N-1}^0 - \sigma_{N-2}^0), \\
v''(x_N, 0) &= v''_N = \frac{20}{h^2} (\sigma_{N+2}^0 + 2\sigma_{N+1}^0 - 6\sigma_N^0 + 2\sigma_{N-1}^0 + \sigma_{N-2}^0)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

eşitlikleri bulunur. İlk iki eşitliğin ve son iki eşitliğin birlikte çözümleri sonucunda

$$\sigma_{-2}^0 = \frac{15}{2}\sigma_0^0 - 5\sigma_1^0 - \frac{3}{2}\sigma_2^0 + \frac{h}{20}v'_0 + \frac{h^2}{16}v''_0, \tag{2.70}$$

$$\sigma_{-1}^0 = -\frac{3}{4}\sigma_0^0 + \frac{3}{2}\sigma_1^0 + \frac{1}{4}\sigma_2^0 - \frac{h}{40}v'_0 - \frac{h^2}{160}v''_0 \tag{2.71}$$

ve

$$\sigma_{N+1}^0 = \frac{1}{4}\sigma_{N-2}^0 + \frac{3}{2}\sigma_{N-1}^0 - \frac{3}{4}\sigma_N^0 + \frac{h}{40}v'_N - \frac{h^2}{160}v''_N, \tag{2.72}$$

$$\sigma_{N+2}^0 = -\frac{3}{2}\sigma_{N-2}^0 - 5\sigma_{N-1}^0 + \frac{15}{2}\sigma_N^0 - \frac{h}{20}v'_N + \frac{h^2}{16}v''_N \tag{2.73}$$

elde edilir. (2.70-2.73) eşitlikleri, (2.68) sisteminde ilgili yerlere yazılarak düzenlemeler yapılırsa,  $N + 1$  denklem ve  $N + 1$  bilinmeyenden oluşan

$$A' = \begin{bmatrix}
54 & 60 & 6 & & & & \\
\frac{101}{4} & \frac{135}{2} & \frac{105}{4} & 1 & & & \\
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \\
& 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\
& & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\
& & & & 1 & \frac{105}{4} & \frac{135}{2} & \frac{101}{4} \\
& & & & & 6 & 60 & 54
\end{bmatrix},$$

$$X' = \begin{bmatrix} \sigma_0^0 \\ \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \vdots \\ \sigma_{N-2}^0 \\ \sigma_{N-1}^0 \\ \sigma_N^0 \end{bmatrix} \quad \text{ve } B' = \begin{bmatrix} v_0 + \frac{3h}{5}v'_0 + \frac{h^2}{10}v''_0 \\ v_1 + \frac{h}{40}v'_0 + \frac{h^2}{160}v''_0 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} - \frac{h}{40}v'_N + \frac{h^2}{160}v''_N \\ v_N - \frac{3h}{5}v'_N + \frac{h^2}{10}v''_N \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A'X' = B' \quad (2.74)$$

matris sistemine ulaşılır. Bu sistem Thomas algoritması ile çözüldüğünde

$$\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0$$

bilinmeyenleri ve bu değerlerden ilgili olanların, (2.70-2.73) eşitliklerinde kullanılması ile de  $\sigma$  parametresi için

$$(\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \sigma_N^0, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)$$

başlangıç vektörü elde edilmiş olur.

Böylece, elde edilen başlangıç vektörlerinin kullanılmasıyla  $n = 0$  için, (2.59) denklem sisteminin sağ tarafındaki gerekli tüm değerler artık bilinmektedir. Dolayısıyla denklem sisteminin sol kısımdaki bilinmeyenler, Gauss eliminasyon metodu kullanılarak bulunabilir. Sonraki zaman değerlerinde ise, bir önceki zamanda bulunan değerler kullanılarak istenilen zamana kadar GNLS denkleminin sayısal çözümü bulunabilir.

### 2.3 Test Problemleri

GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken kullanılan kübik B-spline ve kuintik B-spline kolokeyşin metotlarının doğruluğunu incelerken, (1.74-1.76) eşitlikleri ile verilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |w|^2 dx \simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j^2 + v_j^2 + u_{j+1}^2 + v_{j+1}^2),$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |w_x|^2 - \frac{1}{2}(2q_3 + q_4) |w|^2 \operatorname{Im}(w\bar{w}_x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}q_1 |w|^4 + \frac{1}{6} [q_3(2q_3 + q_4) - 2q_2] |w|^6 \right] dx, \\
I_2 &\simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left( (u_x)_j^2 + (v_x)_j^2 + (u_x)_{j+1}^2 + (v_x)_{j+1}^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2}(2q_3 + q_4) \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ [u_j^2 + v_j^2] [v_j(u_x)_j - u_j(v_x)_j] \right. \\
&\quad \left. + [u_{j+1}^2 + v_{j+1}^2] [u_{j+1}(v_x)_{j+1} - v_{j+1}(u_x)_{j+1}] \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}q_1 \sum_{j=0}^{N-1} \left[ (u_j^2 + v_j^2)^2 + (u_{j+1}^2 + v_{j+1}^2)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{6} [q_3(2q_3 + q_4) - 2q_2] \sum_{j=0}^{N-1} \left[ (u_j^2 + v_j^2)^3 + (u_{j+1}^2 + v_{j+1}^2)^3 \right], \\
I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \operatorname{Im}(w\bar{w}_x) - q_3 |w|^4) dx \\
I_3 &\simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ 2 [v_j(u_x)_j - u_j(v_x)_j] + 2 [u_{j+1}(v_x)_{j+1} - v_{j+1}(u_x)_{j+1}] \right\} \\
&\quad - q_3 \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ (u_j^2 + v_j^2)^2 + (u_{j+1}^2 + v_{j+1}^2)^2 \right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile hesaplanacaktır. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri bulunurken, belirli integraller konum aralığı üzerinde yamuklar kuralı ile hesaplanacaktır. Kübik B-spline kolokeyşin metodu için korunum sabitleri hesaplanırken  $w_j$  ve birinci türevi yerine (1.48-1.49) kübik B-spline eşitlikleri ve kuintik B-spline kolokeyşin metodu için korunum sabitleri hesaplanırken,  $w_j$  ve birinci türevi yerine (1.55-1.56) kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır.

### 2.3.1 Solitary dalga çözümü

GNLS denkleminde katsayılar;  $q_1 = 1/2$ ,  $q_2 = -7/4$ ,  $q_3 = -1$ ,  $q_4 = -2$  olarak seçildiğinde

$$\begin{aligned}
Q_q &= q_2 - \frac{1}{16}(2q_3 + q_4)(2q_3 - 3q_4) = -\frac{7}{4} - \frac{1}{16}(-2 - 2)(-2 + 6) \\
Q_q &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

olduğundan, GNLS denklemi (1.79) formunda solitary dalga çözümüne sahiptir.  $q_4 \neq 0$  olduğundan GNLS denkleminin solitary dalga çözümü bir soliton dalga çözümü değildir. (1.79) solitary dalga çözümü;  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ ,  $d = 0$ ,  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 1$  ve  $x_0 = -15$  seçilirse

$$\Phi(x, t) = 2 \tanh^{-1} \left[ \frac{1}{2} \tanh(x - 2t - 15) \right] + x - 15$$

olmak üzere

$$w(x, t) = \left[ \frac{4}{4 + 3 \sinh^2(x - 2t - 15)} \right]^{1/2} \exp(i\Phi(x, t)) \quad (2.75)$$

formunda bir solitary dalga çözümüne döner (Muslu and Erbay, 2005; Pathria and Morris, 1989, 1990; Robinson, 1997). (2.75) solitary dalga çözümü; genliği 1, hızı 2, tepe noktası  $x = 15$  noktası olan bir solitary dalgasının soldan sağa doğru hareketini modeller. (2.75) eşitliğinde  $t = 0$  alınarak solitary dalga test problemi için başlangıç şartı

$$\Phi(x, 0) = 2 \tanh^{-1} \left[ \frac{1}{2} \tanh(x - 15) \right] + x - 15$$

olmak üzere

$$w(x, 0) = \left[ \frac{4}{4 + 3 \sinh^2(x - 15)} \right]^{1/2} \exp(i\Phi(x, 0)) \quad (2.76)$$

formunda bulunabilir.

GNLS denkleminde;  $q_1 = 1/2$ ,  $q_2 = -7/4$ ,  $q_3 = -1$ ,  $q_4 = -2$  katsayı seçimleri sonrasında korunum sabitlerinin tam değerleri Maple yardımı ile

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \ln 3 \approx 2.1972246, \\ I_2 &= -3/2 + 3.875 \ln 3 \approx 2.7571226, \\ I_3 &= 4 - 9 \ln 3 \approx -5.8875106, \end{aligned} \quad (2.77)$$

olarak hesaplanabilir.

Program ilk olarak,  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığında  $\Delta t = 0.001$  seçimiyle  $t = 3$  zamanına kadar farklı  $N$  değerleri için çalıştırılmış ve  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Tablo 2.1'de verilmiştir. Tablo 2.1 incelendiğinde, sabit bir zaman artımı için  $N$  değeri arttıkça, diğer bir ifade ile konum adım uzunluğu azaldıkça, hata normlarının değerleri her iki metot için de azalmaktadır. Diğer yandan, kuintik B-spline kolokeyşin

metodunda bulunan hata normlarının kübik B-spline kolokeyşin metodunda bulunan hata normları değerlerinden daha düşük olduğu görülebilir. Dolayısıyla tabloya göre solitary dalga çözümü test probleminde,  $\Delta t = 0.001$  seçimi ve farklı  $N$  değerleri için kuintik B-spline kolokeyşin metodunun daha iyi sonuç verdiği söylenebilir.

Tablo 2.1:  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 3$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	kübik B-spline kolokeyşin		kuintik B-spline kolokeyşin	
	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	924.98174	496.87674	57.88402	35.78497
300	463.19012	268.84705	8.47160	5.37355
400	269.58302	161.37733	2.35283	1.48343
500	174.97572	105.66172	0.90197	0.57250
600	122.36923	74.25080	0.41755	0.26514
700	90.26458	54.88078	0.21834	0.13820
800	69.28340	42.25161	0.12408	0.07867
900	54.83842	33.44298	0.07478	0.04728
1000	44.47843	27.17245	0.04697	0.02964
1250	28.53900	17.45304	0.01614	0.01000
1500	19.86083	12.14358	0.00563	0.00339
1750	14.61620	8.94192	0.00274	0.00137

Aynı konum aralığında,  $N = 1750$  sabit seçimiyle farklı  $\Delta t$  değerleri için,  $t = 3$  zamanına kadar programın çalıştırılması ile bulunan hata normları Tablo 2.2’de verilmiştir. Tabloya göre sabit bir  $N$  için  $\Delta t$  zaman adım uzunluğu küçültüldüğünde, her iki metot için de hata normları azalmaktadır. Bununla beraber, küçük zaman adımlarında kübik B-spline kolokeyşin metodunun daha iyi sonuç verdiği söylenebilir. Fakat zaman artım değeri küçültüldüğünde, kuintik B-spline metodu daha iyi sonuçlar vermektedir. Ayrıca kuintik B-spline kolokeyşin metodunda bulunan

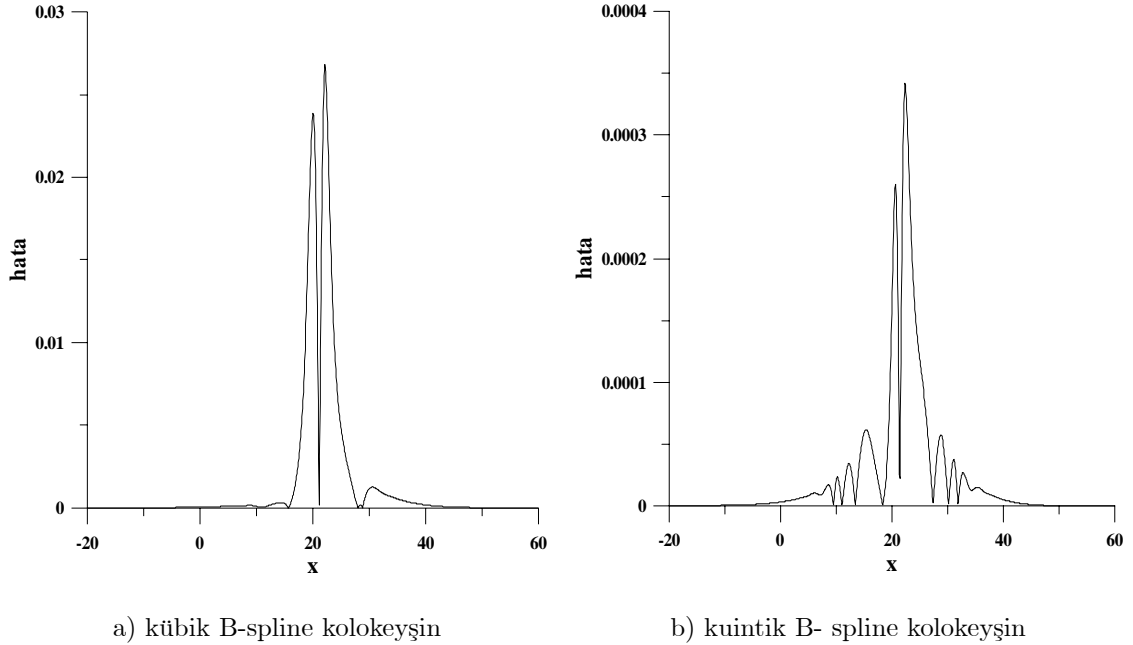
hatalar düzenli olarak azalmaktadır. Dolayısıyla Tablo 2.1’de olduğu gibi, Tablo 2.2 incelendiğinde de kuintik B-spline kolokeyşin metodunun kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

Tablo 2.2:  $N = 1750$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 3$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	kübik B-spline kolokeyşin		kuintik B-spline kolokeyşin	
	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.06	11.16584	5.91927	21.76535	14.01968
0.05	7.50468	4.21606	14.92660	9.59564
0.03	10.43259	6.35545	5.28612	3.38534
0.02	12.64121	7.53051	2.33731	1.49484
0.01	14.07687	8.56652	0.58152	0.37020
0.006	14.36765	8.77550	0.20636	0.13110
0.005	14.40883	8.80596	0.14186	0.09003
0.003	14.49498	8.86567	0.04808	0.03030
0.002	14.50247	8.87279	0.01883	0.01167
0.001	14.61620	8.94192	0.00274	0.00137

$\Delta t = 0.01$ ,  $N = 1000$  seçimleri ile  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığında program,  $t = 3$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $t = 3$  anındaki analitik ve sayısal çözümün modülleri arasındaki farkın mutlak değeri ( $||w| - |w_m||$ ;  $w$ : analitik çözüm,  $w_m$ : sayısal çözüm) Şekil 2.1’de kübik B-spline ve kuintik B-spline kolokeyşin metotları için grafiksel olarak gösterilmiştir. Grafikler incelendiğinde, en büyük hatanın her iki metot için de  $x = 25$  civarında olduğu görülebilir. Bununla beraber, seçilen parametreler altında, kuintik B-spline kolokeyşin metodunun kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre daha düşük bir hataya sahip olduğu söylenebilir. Kübik B-spline methodunda maksimum hata 0.02681 iken, kuintik B-spline methodunda maksimum hata 0.00034 olarak hesaplanmıştır. Hataların, konum aralığının başında veya sonunda değil de orta kısımlarında gelmesinden dolayı, denklem sistemini çözerken kul-

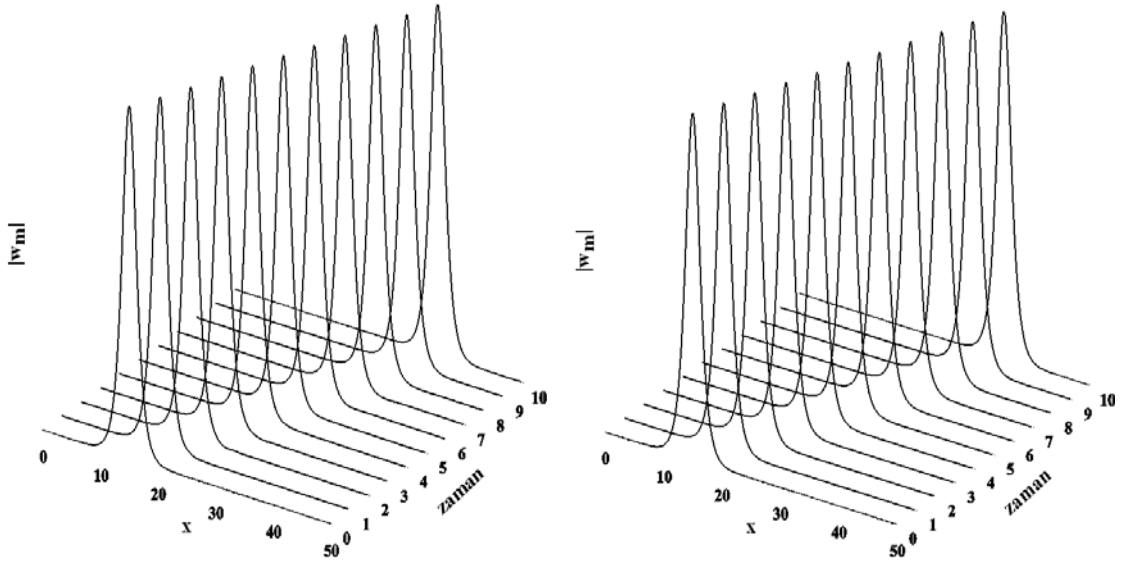
lanılan sınır şartlarının hata üzerindeki etkisinin az olduğu sonucuna ulaşılabilir.



Şekil 2.1:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 3$  zamanındaki

$|\text{Analitik çözümün modülü} - \text{Sayısal çözümün modülü}|$

Aynı parametreler için program,  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak bazı zamanlardaki sayısal çözümün modülü, kübik B-spline ve kuintik B-spline metotları için ayrı ayrı çizilerek Şekil 2.2’de verilmiştir. Her iki grafikte de görüldüğü gibi,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 15$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan tek bir dalga,  $t = 10$  zamanında tepe noktası  $x = 35$  civarında olacak şekilde zaman ilerledikçe şeklinde bir bozulma olmadan, konum ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir. Diğer yandan, genliklerinin zaman içinde büyük miktarda değişmemesi gereken solitary dalgalarının zaman içinde genliklerinde bir miktar değişiklikler olmuştur. Kübik B-spline kolokeyşin metodunda  $t = 10$  zamanına kadar oluşan tüm dalgalar için de en küçük genlik değeri 0.9954 ve en büyük genlik değeri 1 olarak ölçülürken, kuintik B-spline kolokeyşin metodunda en küçük genlik değeri 0.9994 ve en büyük genlik değeri ise 1.0002 olmaktadır. Bu durumda 1 genliğine sahip orijinal dalgayı kuintik B-spline kolokeyşin metodunun daha iyi modellediği söylenebilir.



a) kübik B-spline kolokeyşin

b) kuintik B-spline kolokeyşin

Şekil 2.2 :  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için sayısal çözümün modülü

$I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin analitik değerleri (2.77) ifadesinde verilmiştir. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri her iki metod için, konum aralığı bölünme sayısı  $N = 1000$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.001$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 60$  seçimleriyle  $t = 10$  zamanına kadar bazı zaman değerleri için Tablo 2.3'de verilmiştir. Tablo 2.3 incelendiğinde, zaman içinde sayısal çözümler küçük değişiklikler gösterebilir de, sonuçların analitik değerler ile uyumlu oldukları söylenilebilir.  $t = 0$  anında analitik değerler ile sayısal değerlerin farklı olma sebebi, integrallerin yaklaşık değerlerinin hesaplanması için kullanılan yamuklar kuralının oluşturduğu hatadan kaynaklanmaktadır. Bununla beraber,  $N$  değeri arttırılırsa, diğer bir ifade ile konum aralık uzunlukları küçültülürse,  $t = 0$  anında korunum sabitlerinin sayısal değerleri, analitik değerlere daha yakın olacaktır.

Korunum sabitlerinin sayısal değerleri bulurken integrallerin yaklaşık değerlerini hesaplamak için yamuklar kuralı yerine Simpson metodu gibi başka yaklaşık belirli integral alma metotları da kullanılmış, fakat sonuçlarda kayda değer bir ilerleme sağlanamamıştır.



Tablo 2.3:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için korunum sabitlerinin sayısal değerleri

$t$	kübik B-spline kolokeyşin			kuintik B-spline kolokeyşin		
	$(I_1)_m$	$(I_2)_m$	$(I_3)_m$	$(I_1)_m$	$(I_2)_m$	$(I_3)_m$
0	2.1972241	2.7570496	-5.8874664	2.1972246	2.7571224	-5.8875105
2	2.1972227	2.7574592	-5.8876405	2.1972246	2.7571224	-5.8875105
4	2.1972208	2.7573090	-5.8875651	2.1972246	2.7571224	-5.8875105
6	2.1972215	2.7573225	-5.8875556	2.1972246	2.7571224	-5.8875104
8	2.1972229	2.7573900	-5.8875871	2.1972245	2.7571224	-5.8875104
10	2.1972234	2.7573309	-5.8874912	2.1972245	2.7571224	-5.8875104

Tablo 2.4:  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 10$  zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri

$N$	kübik B-spline kolokeyşin			kuintik B-spline kolokeyşin		
	$\max_{ I_1-(I_1)_m }$	$\max_{ I_2-(I_2)_m }$	$\max_{ I_3-(I_3)_m }$	$\max_{ I_1-(I_1)_m }$	$\max_{ I_2-(I_2)_m }$	$\max_{ I_3-(I_3)_m }$
250	0.0019839	0.0682065	0.0230808	0.0000124	0.0009593	0.0005336
500	0.0000403	0.0051544	0.0020356	0.0000001	0.0000115	0.0000060
750	0.0000072	0.0010595	0.0004292	0.0000001	0.0000009	0.0000003
1000	0.0000072	0.0003405	0.0001378	0.0000001	0.0000001	0.0000002
1250	0.0000165	0.0001383	0.0000601	0.0000001	0.0000001	0.0000003
1500	0.0000095	0.0000679	0.0000324	0.0000001	0.0000001	0.0000003

$-20 \leq x \leq 60$  konum aralığında,  $\Delta t = 0.001$  alınarak farklı  $N$  değerleri için,  $t = 10$  zamanına kadar korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki farkın mutlak değerce en büyük değerleri Tablo 2.4'de verilmiştir. Tabloda  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin analitik değerlerine,  $(I_1)_m$ ,  $(I_2)_m$  ve  $(I_3)_m$  ise, korunum sabitlerinin sayısal değerlerine karşılık gelmektedir. Tablo incelendiğinde, her iki metot için de  $N$  değeri arttıkça korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca, kuintik B-spline kolokeyşin meto-

dunun, kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre daha düşük hata ile sonuç verdiği de söylenebilir.

### 2.3.2 İki solitary (soliton) dalgasının çarpışması

$q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1$ ,  $q_3 = -2$  ve  $q_4 = 0$  katsayı seçimleriyle GNLS denkleminin (1.82) şeklinde çarpışan iki solitary dalga çözümüne sahip olduğunu belirtmiştik. Ayrıca  $q_4 = 0$  olduğundan, (1.82) ile verilen solitary dalga çözümü, aynı zamanda bir soliton dalga çözümü olacaktır. Bu durumda GNLS denklemini;  $x_1 = -15$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = -\frac{3}{4}$ ,  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $d_1 = 0$ ,  $x_2 = -35$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = -\frac{3}{8}$ ,  $c_2 = -1$  ve  $d_2 = 0$  katsayı seçimleri ile

$$w(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{2} (x - 15) \right] \exp \left\{ i \left[ \frac{1}{4} (x - 15) + \tanh \left( \frac{1}{2} (x - 15) \right) \right] \right\} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{4} (x - 35) \right] \exp \left\{ i \left[ -\frac{1}{2} (x - 35) + \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{1}{4} (x - 35) \right) \right] \right\} \quad (2.78)$$

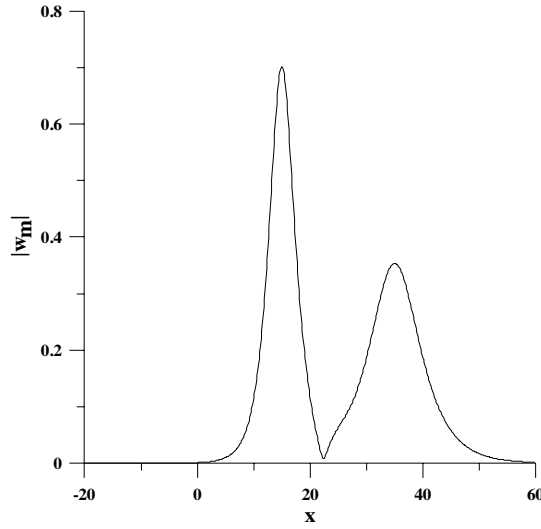
formunda bir çözüme sahip olur (Muslu and Erbay, 2003; Pathria and Morris, 1989, 1990). (2.78) eşitliği, tepe noktası  $x = 15$  konumunda olacak şekilde yerleştirilmiş  $1/2$  hızla sağa doğru hareket eden ve başlangıç anında tepe noktası  $x = 35$  konumuna yerleştirilmiş  $1$  hızla sola doğru hareket eden iki soliton dalgasını temsil eder.

$q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1$ ,  $q_3 = -2$  ve  $q_4 = 0$  katsayıları kullanıldığında korunum sabitleri Maple yardımıyla

$$\begin{aligned} I_1 &\approx 3.0016836, \\ I_2 &\approx 0.1896774, \\ I_3 &\approx -0.0102326 \end{aligned} \quad (2.79)$$

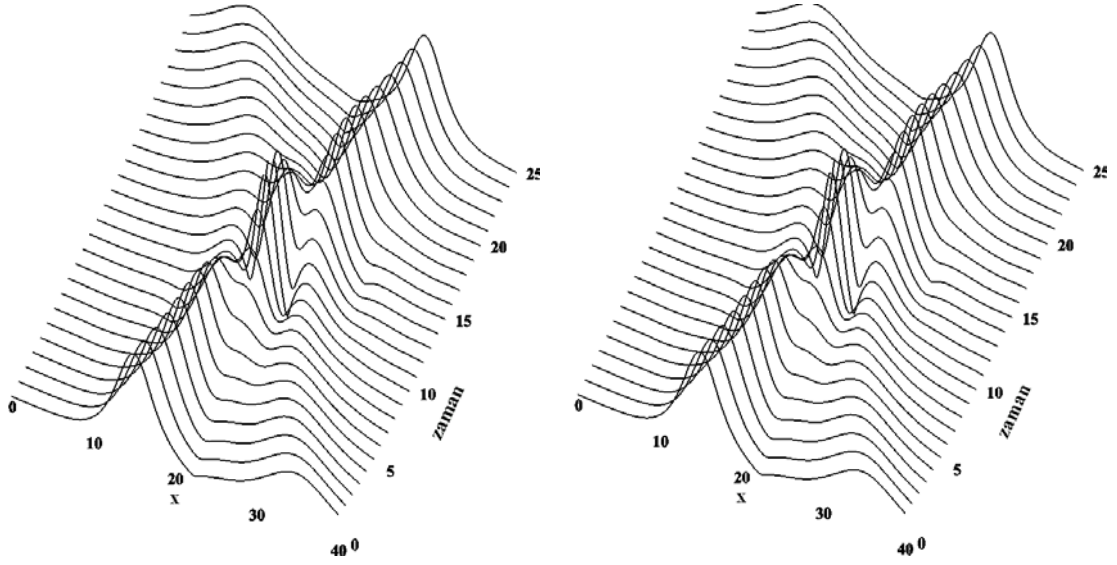
olarak hesaplanabilir.

Şekil 2.3'de, (2.78) eşitliğinin modülü alınarak oluşan dalgalar  $-20 \leq x \leq 60$  aralığında gösterilmiştir. Şekil 2.3'de,  $0.70236$  genliğine sahip büyük dalganın tepe noktası  $x = 15$ ,  $0.35362$  genliğine sahip küçük dalganın tepe noktası ise  $x = 35$  noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.3:  $t = 0$  anındaki dalgaların durumu

$N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığı seçimleri ile kuintik B-spline kolokeyşin ve kübik B-spline kolokeyşin programları,  $t = 25$  zamanına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlarda sayısal çözümlerin modülleri hesaplanarak, sonuçlar grafiksel olarak Şekil 2.4'de gösterilmiştir. Şekil 2.4, Şekil 2.3 deki dalgaların zaman içindeki hareketi olarakta düşünülebilir. Şekil 2.4 incelendiğinde,  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığında büyük genlikli dalğanın soldan sağa doğru, küçük genlikli dalğanın sağdan sola doğru hareket ettiği, iki dalğanın  $t = 6$  civarında karşılaştığı, çarpışma işleminin bu andan sonra gerçekleşmeye başladığı, çarpışma işleminin yaklaşık  $t = 18$  zamanına kadar devam ettiği ve bu andan sonra dalgaların birbirlerine zıt yönlere doğru hareketlerine devam ettiği görülebilir. Dalgaların hareketlerinin sona erdiği  $t = 25$  anında, kuintik B-spline kolokeyşin metodunda, büyük genlikli dalğanın tepe noktası  $x = 28.8$  konumunda ve genliği 0.70761 değerinde iken, küçük genlikli dalğanın tepe noktası  $x = 7.6$  konumunda ve genliği 0.35351 değerinde olmaktadır. Kübik B-spline kolokeyşin metodunda ise, büyük genlikli dalğanın tepe noktası  $x = 28.88$  konumunda ve genliği 0.70740 değerinde, küçük genlikli dalğanın tepe noktası  $x = 7.6$  konumunda ve genliği 0.35380 değerinde olmaktadır. Dolayısıyla, her iki metotta çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında orijinal dalga formunu korumaktadır.

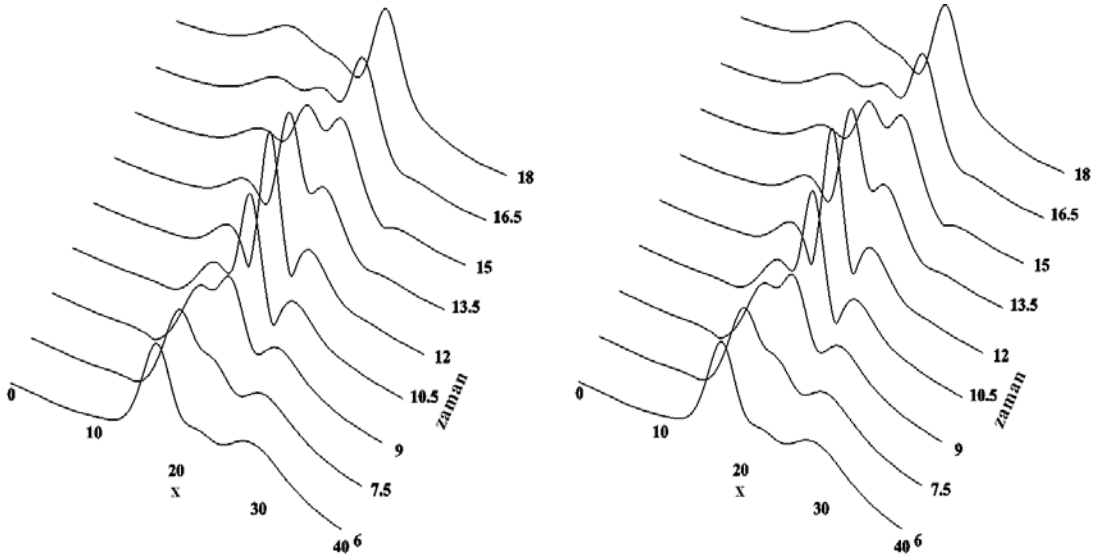


a) kübik B-spline kolokeyşin

b) kuintik B-spline kolokeyşin

Şekil 2.4 :  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için sayısal çözümün modülü

Çarpışma işleminin daha kolay olarak görülebilmesi için Şekil 2.5 verilmiştir. Şekil 2.5 incelendiğinde çarpışmanın başladığı  $t = 6$  ve çarpışmanın sona erdiği  $t = 18$  zamanları arasında dalgaların hareketleri kolaylıkla gözlenebilir.



a) kübik B-spline kolokeyşin

b) kuintik B-spline kolokeyşin

Şekil 2.5:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için çarpışma anlarındaki sayısal çözümün modülü

Bu test problemi için  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri Maple programı yardımıyla  $I_1 \approx 3.0016836$ ,  $I_2 \approx 0.1896774$  ve  $I_3 \approx -0.0102326$  olarak hesaplanmıştır. Program,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 60$  seçimleriyle,  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak, belirli zamanlardaki korunum sabitlerinin sayısal değerleri, Tablo 2.5’de verilmiştir. Tablo incelendiğinde kuintik B-spline kolokeyşin metodunun analitik sonuçlar ile daha uyumlu olduğu söylenebilir.

Tablo 2.5:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için korunum sabitlerinin sayısal değerleri

$t$	kübik B-spline kolokeyşin			kuintik B-spline kolokeyşin		
	$(I_1)_m$	$(I_2)_m$	$(I_3)_m$	$(I_1)_m$	$(I_2)_m$	$(I_3)_m$
0	3.0016816	0.1896759	-0.0102354	3.0016800	0.1896762	-0.0102363
2	3.0016785	0.1899025	-0.0102209	3.0016799	0.1897398	-0.0102286
4	3.0016778	0.1899123	-0.0101458	3.0016799	0.1897403	-0.0102304
6	3.0016789	0.1899340	-0.0101866	3.0016799	0.1897380	-0.0102316
8	3.0016763	0.1899294	-0.0104010	3.0016799	0.1897419	-0.0102321
10	3.0016797	0.1900073	-0.0097141	3.0016797	0.1897401	-0.0102327

Tablo 2.6’da,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığı için, farklı  $N$  değerleri ile  $t = 0$  ve  $t = 10$  zamanları arasında, korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki farkın mutlak değerce en büyük değerleri verilmiştir. Birinci test probleminde olduğu gibi  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin analitik değerlerine,  $(I_1)_m$ ,  $(I_2)_m$  ve  $(I_3)_m$  ise, korunum sabitlerinin sayısal değerlerine karşılık gelmektedir. Tablo incelendiğinde,  $N$  değeri arttıkça her iki metod için de hatalar azalmakta, diğer bir ifade ile sayısal değerler analitik değerlere yaklaşmakta veya analitik değerlere çok yakın şekilde sabit kalmaktadır. Ayrıca tabloya göre, kuintik B-spline kolokeyşin metodunun, kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre daha düşük hata ile sonuç verdiği de söylenebilir.

Tablo 2.6:  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 10$  zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri

kübik B-spline kolokeyşin			kuintik B-spline kolokeyşin			
$N$	$\max_{ I_1-(I_1)_m }$	$\max_{ I_2-(I_2)_m }$	$\max_{ I_3-(I_3)_m }$	$\max_{ I_1-(I_1)_m }$	$\max_{ I_2-(I_2)_m }$	$\max_{ I_3-(I_3)_m }$
250	0.0000851	0.0144285	0.0102153	0.0000045	0.0023136	0.0000669
500	0.0000107	0.0019596	0.0021620	0.0000041	0.0003528	0.0000124
750	0.0000095	0.0006674	0.0009311	0.0000040	0.0001500	0.0000071
1000	0.0000129	0.0003344	0.0005185	0.0000040	0.0001010	0.0000051
1250	0.0000126	0.0002083	0.0003300	0.0000040	0.0000830	0.0000055
1500	0.0000122	0.0001520	0.0002287	0.0000040	0.0000707	0.0000058

## 2.4 Sonuç

Bu bölümde, kübik B-spline ve kuintik B-spline kolokeyşin metotları GNLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için kullanılmıştır. GNLS denklemi reel ve sanal kısımlara ayrıldıktan sonra, zaman parçalanması için Crank-Nicolson metodundan yararlanılmış ve böylece iki denklem sistemine ulaşılmıştır. Bulunan denklem sistemleri kapalı birer sistem olduğundan buna sebep olan terimler Taylor serisine açılarak gerekli lineerleştirme yapıldıktan sonra, konum aralığının bölünme noktalarında sırasıyla kübik B-spline ve kuintik B-spline eşitlikleri kullanılarak her bir satırında sırasıyla, 6 eleman ve 10 eleman haricinde diğer elemanları sıfır olan iki denklem sistemi elde edilmiştir. Her iki denklem sisteminde de bilinmeyen ve denklem sayıları, sınır şartları kullanılarak eşitlendikten sonra metotların doğruluğu iki test problemi kullanılarak kontrol edilmiştir.

İlk test problemi olan solitary dalga çözümünde, ilk olarak zaman adımı ( $\Delta t$ ) sabit tutularak  $N$  değeri arttırılmış ( $h$ , konum aralık uzunluğu azaltılmış) ve her iki metot için de hata normları hesaplanmıştır. İkinci olarak,  $N$  değeri sabit tutularak zaman adım uzunluğu azaltılmış ve her iki metot için de hata normları hesaplanmıştır. Her iki durumda da, kuintik B-spline kolokeyşin metodunun

kübik B-spline metoduna göre daha düşük hata verdiği gözlenmiştir. Her iki metot için çizilen hata grafiklerinde, oluşan maksimum hatanın o andaki oluşan dalganın tepe noktasına karşılık gelen konum değeri civarında oluştuğu, dolayısıyla sınır şartlarının seçiminden dolayı bir hatanın oluşmadığı, oluşsa bile maksimum hatayı etkilemediği görülmüştür.  $t = 0$  anında oluşan dalganın, zaman içindeki hareketi her iki metot için de incelendiğinde, kuintik B-spline kolokeyşin metodunun kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre dalganın hareketini daha iyi modellediği gözlenmiştir. İlk test probleminde, son olarak üç korunum sabitinin sayısal değerleri hesaplandığında da, kuintik B-spline metodunun kullanılması sonucunda bulunan korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere daha yakın olduğu belirlenmiştir.

İkinci test probleminde genlikleri, hızları ve tepe noktalarının karşılık geldiği konum değerleri farklı olan iki soliton dalgasının hareketi incelenmiştir. Her iki metotta, iki soliton dalgasının zaman içindeki hareketini uygun bir şekilde modellemiştir. Soliton dalgalarının, solitary dalgalarından farkı; çarpışma sonrasında şekillerini, hızlarını ve genliklerini korumaları olduğu bilinmektedir. Çarpışma sonrasında dalgaların genliklerinde oluşan değişme miktarı incelendiğinde, kuintik B-spline ve kübik B-spline kolokeyşin metotlarında düşük bir bozulma ile test problemini modellediği belirlenmiştir. Diğer taraftan, korunum sabitlerinin sayısal değerleri bu test problemi için de hesaplanmış ve ilk test probleminde olduğu gibi kuintik B-spline kolokeyşin metodu ile elde edilen değerlerin analitik değerlere daha yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Bu durumda, iki farklı metot kullanılarak GNLS denkleminin sayısal çözümünün araştırıldığı bu bölümde, aşağıdaki sonuçlara varılabilir:

1) Denklem sistemlerinin her satırında, kuintik B-spline kolokeyşin metodunda 10 eleman dışındaki terimler sıfırken, kübik B-spline kolokeyşin metodunda 6 eleman haricindeki terimler sıfır olduğundan, kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak bulunan denklem sistemi, kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak bulunan denklem sistemine göre daha çok işlem yükü gerektirmiştir.

2) Daha kolay işlemlere ve hesaplamalara sahip olmasına rağmen kübik B-spline kolokeyşin metodu, kuintik B-spline kolokeyşin metodu kadar iyi sonuçlar vere-

memiştir.

Sonuç olarak fazla işlem yükü gerektirse de elde edilen iyi sonuçlar nedeniyle, kuintik B-spline kolokeyşin metodu GNLS denkleminin sayısal çözümü için kübik B-spline kolokeyşin metodundan daha iyi bir metottur denilebilir.



## BÖLÜM 3

### CMKdV DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, CMKdV denkleminin kuintik B-spline kolekeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmaların doğruluğu iki test problemi kullanılarak hata normları, korunum sabitleri ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

#### 3.1 CMKdV Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu

1. bölümde verilen ve ayrıca ikinci bölümde GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken kullanılan kuintik B-spline kolokeyşin metodu, CMKdV denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için kullanılacaktır. CMKdV denkleminin reel ve sanal kısımlarına ayrılmış formu olan (1.92-1.93) denklemlerinde,  $\Delta t$  zaman adım uzunluğu olmak üzere

$$\begin{aligned}
 u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, & v_t &\simeq \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}, \\
 u &= \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, & v &= \frac{v^n + v^{n+1}}{2}, \\
 u_x &= \frac{(u_x)^n + (u_x)^{n+1}}{2}, & v_x &= \frac{(v_x)^n + (v_x)^{n+1}}{2}, \\
 u_{xxx} &= \frac{(u_{xxx})^n + (u_{xxx})^{n+1}}{2}, & v_{xxx} &= \frac{(v_{xxx})^n + (v_{xxx})^{n+1}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitlikleri ile verilen Crank-Nicolson metodu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 &\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{(u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n}{2} + 3\alpha \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) + \\
 &\alpha \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) + \\
 &2\alpha \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right) \left( \frac{(v_x)^{n+1} + (v_x)^n}{2} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + \frac{(v_{xxx})^{n+1} + (v_{xxx})^n}{2} + 3\alpha \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right)^2 \left( \frac{(v_x)^{n+1} + (v_x)^n}{2} \right) + \\ & \alpha \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)^2 \left( \frac{(v_x)^{n+1} + (v_x)^n}{2} \right) + \\ & 2\alpha \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \left( \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \right) \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir.  $x_m$  bölünme noktalarında gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & [8 + 2\Delta t\alpha(u_m^{n+1}(u_x)_m^n + 2u_m^n(u_x)_m^n + v_m^{n+1}(v_x)_m^n + v_m^n(v_x)_m^n) + \Delta t\alpha(u_m^{n+1}(u_x)_m^n + \\ & 2u_m^n(u_x)_m^n)] u_m^{n+1} + [2\Delta t\alpha(u_m^n u_m^{n+1} + u_m^{n+1}u_m^{n+1} + 2u_m^{n+1}u_m^n) + \Delta t\alpha(v_m^n v_m^n + \\ & 2u_m^{n+1}u_m^n + u_m^n u_m^n + u_m^{n+1}u_m^{n+1} + v_m^{n+1}v_m^{n+1} + 2v_m^{n+1}v_m^n)] (u_x)_m^{n+1} + \\ & 4\Delta t(u_{xxx})_m^{n+1} + [2\Delta t\alpha u_m^n (v_x)_m^n + \Delta t\alpha(v_m^{n+1}(u_x)_m^n + 2v_m^n(u_x)_m^n)] v_m^{n+1} + \\ & [2\Delta t\alpha(v_m^{n+1}u_m^{n+1} + v_m^{n+1}u_m^n + v_m^n u_m^{n+1} + v_m^n u_m^n)] (v_x)_m^{n+1} = 8u_m^n - 4\Delta t(u_{xxx})_m^n - \\ & 2\Delta t\alpha(v_m^n u_m^n (v_x)_m^n + u_m^n u_m^n (u_x)_m^n) - \Delta t\alpha(v_m^n v_m^n (u_x)_m^n + u_m^n u_m^n (u_x)_m^n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve

$$\begin{aligned} & [2\Delta t\alpha v_m^n (u_x)_m^n + \Delta t\alpha(u_m^{n+1}(v_x)_m^n + 2u_m^n (v_x)_m^n)] u_m^{n+1} + \\ & [2\Delta t\alpha(u_m^{n+1}v_m^{n+1} + u_m^{n+1}v_m^n + u_m^n v_m^{n+1} + u_m^n v_m^n)] (u_x)_m^{n+1} + \\ & [8 + 2\Delta t\alpha(v_m^{n+1}(v_x)_m^n + 2v_m^n (v_x)_m^n + u_m^{n+1}(u_x)_m^n + u_m^n (u_x)_m^n) + \Delta t\alpha(v_m^{n+1}(v_x)_m^n + \\ & 2v_m^n (v_x)_m^n)] v_m^{n+1} + [2\Delta t\alpha(v_m^n v_m^n + v_m^{n+1}v_m^{n+1} + 2v_m^{n+1}v_m^n) + \\ & \Delta t\alpha(u_m^n u_m^n + 2v_m^{n+1}v_m^n + v_m^n v_m^n + v_m^{n+1}v_m^{n+1} + u_m^{n+1}u_m^{n+1} + 2u_m^{n+1}u_m^n)] (v_x)_m^{n+1} + \\ & 4\Delta t(v_{xxx})_m^{n+1} = 8v_m^n - 4\Delta t(v_{xxx})_m^n - 2\Delta t\alpha(u_m^n v_m^n (u_x)_m^n + v_m^n v_m^n (v_x)_m^n) - \\ & \Delta t\alpha(u_m^n u_m^n (v_x)_m^n + v_m^n v_m^n (v_x)_m^n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

denklem sistemine ulaşılır. (3.4-3.5) denklem sisteminde kuintik B-spline eşitlikleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılması sonucunda

$$\begin{aligned} u_m^n &= \rho_{m+2}^n + 26\rho_{m+1}^n + 66\rho_m^n + 26\rho_{m-1}^n + \rho_{m-2}^n, \\ v_m^n &= \sigma_{m+2}^n + 26\sigma_{m+1}^n + 66\sigma_m^n + 26\sigma_{m-1}^n + \sigma_{m-2}^n, \\ (u_x)_m^n &= \frac{5}{h} (\rho_{m+2}^n + 10\rho_{m+1}^n - 10\rho_{m-1}^n - \rho_{m-2}^n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_x)_m^n &= \frac{5}{h} (\sigma_{m+2}^n + 10\sigma_{m+1}^n - 10\sigma_{m-1}^n - \sigma_{m-2}^n), \\
u_m^{n+1} &= \rho_{m+2}^{n+1} + 26\rho_{m+1}^{n+1} + 66\rho_m^{n+1} + 26\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1}, \\
v_m^{n+1} &= \sigma_{m+2}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 66\sigma_m^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1}, \\
\lambda_{m1} &= 8 + 2\Delta t\alpha [u_m^{n+1}(u_x)_m^n + 2u_m^n(u_x)_m^n + v_m^{n+1}(v_x)_m^n + v_m^n(v_x)_m^n] \\
&\quad + \Delta t\alpha [u_m^{n+1}(u_x)_m^n + 2u_m^n(u_x)_m^n], \\
\lambda_{m2} &= 2\Delta t\alpha [u_m^n u_m^n + u_m^{n+1} u_m^{n+1} + 2u_m^{n+1} u_m^n] \\
&\quad + \Delta t\alpha [v_m^n v_m^n + 2u_m^{n+1} u_m^n + u_m^n u_m^n + u_m^{n+1} u_m^{n+1} + v_m^{n+1} v_m^{n+1} + 2v_m^{n+1} v_m^n], \\
\lambda_{m3} &= 2\Delta t\alpha u_m^n (v_x)_m^n + \Delta t\alpha [v_m^{n+1}(u_x)_m^n + 2v_m^n(u_x)_m^n], \\
\lambda_{m4} &= 2\Delta t\alpha [v_m^{n+1} u_m^{n+1} + v_m^{n+1} u_m^n + v_m^n u_m^{n+1} + v_m^n u_m^n], \\
\lambda_{m5} &= 8u_m^n - 4\Delta t(u_{xxx})_m^n - 2\Delta t\alpha [v_m^n u_m^n (v_x)_m^n + u_m^n u_m^n (u_x)_m^n] \\
&\quad - \Delta t\alpha [v_m^n v_m^n (u_x)_m^n + u_m^n u_m^n (u_x)_m^n], \\
\lambda_{m6} &= 2\Delta t\alpha v_m^n (u_x)_m^n + \Delta t\alpha [u_m^{n+1}(v_x)_m^n + 2u_m^n (v_x)_m^n], \\
\lambda_{m7} &= 8 + 2\Delta t\alpha [v_m^{n+1}(v_x)_m^n + 2v_m^n (v_x)_m^n + u_m^{n+1}(u_x)_m^n + u_m^n (u_x)_m^n] \\
&\quad + \Delta t\alpha [v_m^{n+1}(v_x)_m^n + 2v_m^n (v_x)_m^n], \\
\lambda_{m8} &= 2\Delta t\alpha [v_m^n v_m^n + v_m^{n+1} v_m^{n+1} + 2v_m^{n+1} v_m^n] \\
&\quad + \Delta t\alpha [u_m^n u_m^n + 2v_m^{n+1} v_m^n + v_m^n v_m^n + v_m^{n+1} v_m^{n+1} + u_m^{n+1} u_m^{n+1} + 2u_m^{n+1} u_m^n], \\
\lambda_{m9} &= 8v_m^n - 4\Delta t(v_{xxx})_m^n - 2\Delta t\alpha [u_m^n v_m^n (u_x)_m^n + v_m^n v_m^n (v_x)_m^n] \\
&\quad - \Delta t\alpha [u_m^n u_m^n (v_x)_m^n + v_m^n v_m^n (v_x)_m^n],
\end{aligned}$$

olmak üzere (1.92-1.93) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\lambda_{m1} u_m^{n+1} + \lambda_{m2} (u_x)_m^{n+1} + 4\Delta t (u_{xxx})_m^{n+1} + \lambda_{m3} v_m^{n+1} + \lambda_{m4} (v_x)_m^{n+1} = \lambda_{m5} \quad (3.6)$$

ve

$$\lambda_{m6} u_m^{n+1} + \lambda_{m7} (u_x)_m^{n+1} + \lambda_{m8} v_m^{n+1} + \lambda_{m2} (v_x)_m^{n+1} + 4\Delta t (v_{xxx})_m^{n+1} = \lambda_{m9} \quad (3.7)$$

sistemi formunda elde edilirler. (3.6-3.7) denklem sisteminde,  $(n+1)$ . zaman adımındaki kuintik B-spline eşitlikleri kullanılarak düzenleme yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-2}^{n+1} \left( \lambda_{m1} - \lambda_{m2} \frac{5}{h} - \Delta t \frac{240}{h^3} \right) + \sigma_{m-2}^{n+1} \left( \lambda_{m3} - \lambda_{m4} \frac{5}{h} \right) + \\
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m1} - \lambda_{m2} \frac{50}{h} + \Delta t \frac{480}{h^3} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m3} - \lambda_{m4} \frac{50}{h} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} (66\lambda_{m1}) + \sigma_m^{n+1} (66\lambda_{m3}) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m1} + \lambda_{m2} \frac{50}{h} - \Delta t \frac{480}{h^3} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m3} + \lambda_{m4} \frac{50}{h} \right) + \\
& \rho_{m+2}^{n+1} \left( \lambda_{m1} + \lambda_{m2} \frac{5}{h} + \Delta t \frac{240}{h^3} \right) + \sigma_{m+2}^{n+1} \left( \lambda_{m3} + \lambda_{m4} \frac{5}{h} \right) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-2}^{n+1} \left( \lambda_{m6} - \lambda_{m4} \frac{5}{h} \right) + \sigma_{m-2}^{n+1} \left( \lambda_{m7} - \lambda_{m8} \frac{5}{h} - \Delta t \frac{240}{h^3} \right) + \\
& \rho_{m-1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m6} - \lambda_{m4} \frac{50}{h} \right) + \sigma_{m-1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m7} - \lambda_{m8} \frac{50}{h} + \Delta t \frac{480}{h^3} \right) + \\
& \rho_m^{n+1} (66\lambda_{m6}) + \sigma_m^{n+1} (66\lambda_{m4}) + \\
& \rho_{m+1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m6} + \lambda_{m4} \frac{50}{h} \right) + \sigma_{m+1}^{n+1} \left( 26\lambda_{m7} + \lambda_{m8} \frac{50}{h} - \Delta t \frac{480}{h^3} \right) + \\
& \rho_{m+2}^{n+1} \left( \lambda_{m6} + \lambda_{m4} \frac{5}{h} \right) + \sigma_{m+2}^{n+1} \left( \lambda_{m7} + \lambda_{m8} \frac{5}{h} + \Delta t \frac{240}{h^3} \right) = \lambda_{m9}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak  $2N+2$  denklem,  $2N+10$  bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemine ulaşılır.

Bulunan sistemde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşitlenebilmesi için,  $\rho_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+2}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+2}^{n+1}$  parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. (1.85-1.86) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
u(x_0, t) &= u_0 = \rho_2^{n+1} + 26\rho_1^{n+1} + 66\rho_0^{n+1} + 26\rho_{-1}^{n+1} + \rho_{-2}^{n+1}, \\
v(x_0, t) &= v_0 = \sigma_2^{n+1} + 26\sigma_1^{n+1} + 66\sigma_0^{n+1} + 26\sigma_{-1}^{n+1} + \sigma_{-2}^{n+1}, \\
u'(x_0, t) &= ux_0 = \frac{5}{h} (\rho_2^{n+1} + 10\rho_1^{n+1} - 10\rho_{-1}^{n+1} - \rho_{-2}^{n+1}), \\
v'(x_0, t) &= vx_0 = \frac{5}{h} (\sigma_2^{n+1} + 10\sigma_1^{n+1} - 10\sigma_{-1}^{n+1} - \sigma_{-2}^{n+1}), \\
u(x_N, t) &= u_N = \rho_{N+2}^{n+1} + 26\rho_{N+1}^{n+1} + 66\rho_N^{n+1} + 26\rho_{N-1}^{n+1} + \rho_{N-2}^{n+1}, \\
v(x_N, t) &= v_N = \sigma_{N+2}^{n+1} + 26\sigma_{N+1}^{n+1} + 66\sigma_N^{n+1} + 26\sigma_{N-1}^{n+1} + \sigma_{N-2}^{n+1}, \\
u'(x_N, t) &= ux_N = \frac{5}{h} (\rho_{N+2}^{n+1} + 10\rho_{N+1}^{n+1} - 10\rho_{N-1}^{n+1} - \rho_{N-2}^{n+1}), \\
v'(x_N, t) &= vx_N = \frac{5}{h} (\sigma_{N+2}^{n+1} + 10\sigma_{N+1}^{n+1} - 10\sigma_{N-1}^{n+1} - \sigma_{N-2}^{n+1})
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılarak, ilk dört sınır şartından

$$\rho_{-2}^{n+1} = \frac{9}{4}\rho_2^{n+1} + \frac{65}{2}\rho_1^{n+1} + \frac{165}{4}\rho_0^{n+1} - \frac{5}{8}u_0 - \frac{13}{40}hux_0, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{-2}^{n+1} = \frac{9}{4}\sigma_2^{n+1} + \frac{65}{2}\sigma_1^{n+1} + \frac{165}{4}\sigma_0^{n+1} - \frac{5}{8}v_0 - \frac{13}{40}hvx_0, \quad (3.11)$$

$$\rho_{-1}^{n+1} = -\frac{1}{8}\rho_2^{n+1} - \frac{9}{4}\rho_1^{n+1} - \frac{33}{8}\rho_0^{n+1} + \frac{1}{16}u_0 + \frac{1}{80}hux_0, \quad (3.12)$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = -\frac{1}{8}\sigma_2^{n+1} - \frac{9}{4}\sigma_1^{n+1} - \frac{33}{8}\sigma_0^{n+1} + \frac{1}{16}v_0 + \frac{1}{80}hvx_0 \quad (3.13)$$

ve son dört sınır şartından

$$\rho_{N+2}^{n+1} = \frac{165}{4}\rho_N^{n+1} + \frac{65}{2}\rho_{N-1}^{n+1} + \frac{9}{4}\rho_{N-2}^{n+1} - \frac{5}{8}u_N - \frac{13}{40}hux_N, \quad (3.14)$$

$$\sigma_{N+2}^{n+1} = \frac{165}{4}\sigma_N^{n+1} + \frac{65}{2}\sigma_{N-1}^{n+1} + \frac{9}{4}\sigma_{N-2}^{n+1} - \frac{5}{8}v_N - \frac{13}{40}hvx_N, \quad (3.15)$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = -\frac{33}{8}\rho_N^{n+1} - \frac{9}{4}\rho_{N-1}^{n+1} - \frac{1}{8}\rho_{N-2}^{n+1} + \frac{1}{16}u_N + \frac{1}{80}hux_N, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = -\frac{33}{8}\sigma_N^{n+1} - \frac{9}{4}\sigma_{N-1}^{n+1} - \frac{1}{8}\sigma_{N-2}^{n+1} + \frac{1}{16}v_N + \frac{1}{80}hvx_N \quad (3.17)$$

eşitliklerine ulaşılabilir. (3.8-3.9) denklem sisteminde,  $\rho_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+2}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+2}^{n+1}$  parametreleri yerine, (3.10-3.17) eşitlikleri kullanıldığında, denklem ve bilinmeyen sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece

$$a_0 = \lambda_{m1} - \lambda_{m2}\frac{5}{h} - \Delta t\frac{240}{h^3},$$

$$a_1 = \lambda_{m3} - \lambda_{m4}\frac{5}{h},$$

$$a_2 = 26\lambda_{m1} - \lambda_{m2}\frac{50}{h} + \Delta t\frac{480}{h^3}$$

$$a_3 = 26\lambda_{m3} - \lambda_{m4}\frac{50}{h},$$

$$a_4 = 66\lambda_{m1},$$

$$a_5 = 66\lambda_{m3},$$

$$a_6 = 26\lambda_{m1} + \lambda_{m2}\frac{50}{h} - \Delta t\frac{480}{h^3},$$

$$a_7 = 26\lambda_{m3} + \lambda_{m4}\frac{50}{h},$$

$$a_8 = \lambda_{m1} + \lambda_{m2}\frac{5}{h} + \Delta t\frac{240}{h^3},$$

$$a_9 = \lambda_{m3} + \lambda_{m4}\frac{5}{h},$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \lambda_{m6} - \lambda_{m7} \frac{5}{h}, \\
b_1 &= \lambda_{m8} - \lambda_{m2} \frac{5}{h} - \Delta t \frac{240}{h^3}, \\
b_2 &= 26\lambda_{m6} - \lambda_{m7} \frac{50}{h}, \\
b_3 &= 26\lambda_{m8} - \lambda_{m2} \frac{50}{h} + \Delta t \frac{480}{h^3}, \\
b_4 &= 66\lambda_{m6}, \\
b_5 &= 66\lambda_{m8}, \\
b_6 &= 26\lambda_{m6} + \lambda_{m7} \frac{50}{h}, \\
b_7 &= 26\lambda_{m8} + \lambda_{m2} \frac{50}{h} - \Delta t \frac{480}{h^3}, \\
b_8 &= \lambda_{m6} + \lambda_{m7} \frac{5}{h}, \\
b_9 &= \lambda_{m8} + \lambda_{m2} \frac{5}{h} + \Delta t \frac{240}{h^3},
\end{aligned}$$

olmak üzere, (1.92-1.93) denklemleri  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$m = 0$  için

$$\begin{aligned}
&\left(a_4 + \frac{165}{4}a_0 - \frac{33}{8}a_2\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_5 + \frac{165}{4}a_1 - \frac{33}{8}a_3\right) \sigma_0^{n+1} + \\
&\left(a_6 + \frac{65}{2}a_0 - \frac{9}{4}a_2\right) \rho_1^{n+1} + \left(a_7 + \frac{65}{2}a_1 - \frac{9}{4}a_3\right) \sigma_1^{n+1} + \\
&\left(a_8 + \frac{9}{4}a_0 - \frac{1}{8}a_2\right) \rho_2^{n+1} + \left(a_9 + \frac{9}{4}a_1 - \frac{1}{8}a_3\right) \sigma_2^{n+1} = \lambda_{m5} + \\
&\frac{5}{8}a_0u_0 + \frac{13}{40}ha_0ux_0 + \frac{5}{8}a_1v_0 + \frac{13}{40}ha_1vx_0 - \frac{1}{16}a_2u_0 - \frac{1}{80}ha_2ux_0 - \\
&\frac{1}{16}a_3v_0 - \frac{1}{80}ha_3vx_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(b_4 + \frac{165}{4}b_0 - \frac{33}{8}b_2\right) \rho_0^{n+1} + \left(b_5 + \frac{165}{4}b_1 - \frac{33}{8}b_3\right) \sigma_0^{n+1} + \\
&\left(b_6 + \frac{65}{2}b_0 - \frac{9}{4}b_2\right) \rho_1^{n+1} + \left(b_7 + \frac{65}{2}b_1 - \frac{9}{4}b_3\right) \sigma_1^{n+1} + \\
&\left(b_8 + \frac{9}{4}b_0 - \frac{1}{8}b_2\right) \rho_2^{n+1} + \left(b_9 + \frac{9}{4}b_1 - \frac{1}{8}b_3\right) \sigma_2^{n+1} = \lambda_{m9} + \\
&\frac{5}{8}b_0u_0 + \frac{13}{40}hb_0ux_0 + \frac{5}{8}b_1v_0 + \frac{13}{40}hb_1vx_0 - \frac{1}{16}b_2u_0 - \frac{1}{80}hb_2ux_0 - \\
&\frac{1}{16}b_3v_0 - \frac{1}{80}hb_3vx_0
\end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$\begin{aligned} & \left(a_2 - \frac{33}{8}a_0\right) \rho_0^{n+1} + \left(a_3 - \frac{33}{8}a_1\right) \sigma_0^{n+1} + \left(a_4 - \frac{9}{4}a_0\right) \rho_1^{n+1} + \\ & \left(a_5 - \frac{9}{4}a_1\right) \sigma_1^{n+1} + \left(a_6 - \frac{1}{8}a_0\right) \rho_2^{n+1} + \left(a_7 - \frac{1}{8}a_1\right) \sigma_2^{n+1} + \\ & a_8 \rho_3^{n+1} + a_9 \sigma_3^{n+1} = \lambda_{m5} - \frac{1}{16}a_0 u_0 - \frac{1}{80}h a_0 u x_0 - \frac{1}{16}a_1 v_0 - \frac{1}{80}h a_1 v x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(b_2 - \frac{33}{8}b_0\right) \rho_0^{n+1} + \left(b_3 - \frac{33}{8}b_1\right) \sigma_0^{n+1} + \left(b_4 - \frac{9}{4}b_0\right) \rho_1^{n+1} + \\ & \left(b_5 - \frac{9}{4}b_1\right) \sigma_1^{n+1} + \left(b_6 - \frac{1}{8}b_0\right) \rho_2^{n+1} + \left(b_7 - \frac{1}{8}b_1\right) \sigma_2^{n+1} + \\ & b_8 \rho_3^{n+1} + b_9 \sigma_3^{n+1} = \lambda_{m9} - \frac{1}{16}b_0 u_0 - \frac{1}{80}h b_0 u x_0 - \frac{1}{16}b_1 v_0 - \frac{1}{80}h b_1 v x_0, \end{aligned}$$

$m = 2$  için

$$\begin{aligned} & a_0 \rho_0^{n+1} + a_1 \sigma_0^{n+1} + a_2 \rho_1^{n+1} + a_3 \sigma_1^{n+1} + a_4 \rho_2^{n+1} + a_5 \sigma_2^{n+1} + a_6 \rho_3^{n+1} + a_7 \sigma_3^{n+1} + \\ & a_8 \rho_4^{n+1} + a_9 \sigma_4^{n+1} = \lambda_{m5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_0 \rho_0^{n+1} + b_1 \sigma_0^{n+1} + b_2 \rho_1^{n+1} + b_3 \sigma_1^{n+1} + b_4 \rho_2^{n+1} + b_5 \sigma_2^{n+1} + b_6 \rho_3^{n+1} + b_7 \sigma_3^{n+1} + \\ & b_8 \rho_4^{n+1} + b_9 \sigma_4^{n+1} = \lambda_{m9}, \end{aligned}$$

⋮

(3.18)

$m = N - 2$  için

$$\begin{aligned} & a_0 \rho_{N-4}^{n+1} + a_1 \sigma_{N-4}^{n+1} + a_2 \rho_{N-3}^{n+1} + a_3 \sigma_{N-3}^{n+1} + a_4 \rho_{N-2}^{n+1} + a_5 \sigma_{N-2}^{n+1} + a_6 \rho_{N-1}^{n+1} + a_7 \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & a_8 \rho_N^{n+1} + a_9 \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_0 \rho_{N-4}^{n+1} + b_1 \sigma_{N-4}^{n+1} + b_2 \rho_{N-3}^{n+1} + b_3 \sigma_{N-3}^{n+1} + b_4 \rho_{N-2}^{n+1} + b_5 \sigma_{N-2}^{n+1} + b_6 \rho_{N-1}^{n+1} + b_7 \sigma_{N-1}^{n+1} + \\ & b_8 \rho_N^{n+1} + b_9 \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m9} \end{aligned}$$

$m = N - 1$  için

$$\begin{aligned} & a_0 \rho_{N-3}^{n+1} + a_1 \sigma_{N-3}^{n+1} + \left( a_2 - \frac{1}{8} a_8 \right) \rho_{N-2}^{n+1} + \left( a_3 - \frac{1}{8} a_9 \right) \sigma_{N-2}^{n+1} + \left( a_4 - \frac{9}{4} a_8 \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_5 - \frac{9}{4} a_9 \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \left( a_6 - \frac{33}{8} a_8 \right) \rho_N^{n+1} + \left( a_7 - \frac{33}{8} a_9 \right) \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5} - \frac{1}{16} a_8 u_N - \\ & \frac{1}{80} h a_8 u x_N - \frac{1}{16} a_9 v_N - \frac{1}{80} h a_9 v x_N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_0 \rho_{N-3}^{n+1} + b_1 \sigma_{N-3}^{n+1} + \left( b_2 - \frac{1}{8} b_8 \right) \rho_{N-2}^{n+1} + \left( b_3 - \frac{1}{8} b_9 \right) \sigma_{N-2}^{n+1} + \left( b_4 - \frac{9}{4} b_8 \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( b_5 - \frac{9}{4} b_9 \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \left( b_6 - \frac{33}{8} b_8 \right) \rho_N^{n+1} + \left( b_7 - \frac{33}{8} b_9 \right) \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m9} - \frac{1}{16} b_8 u_N - \\ & \frac{1}{80} h b_8 u x_N - \frac{1}{16} b_9 v_N - \frac{1}{80} h b_9 v x_N \end{aligned}$$

$m = N$  için

$$\begin{aligned} & \left( a_0 - \frac{1}{8} a_6 + \frac{9}{4} a_8 \right) \rho_{N-2}^{n+1} + \left( a_1 - \frac{1}{8} a_7 + \frac{9}{4} a_9 \right) \sigma_{N-2}^{n+1} + \left( a_2 - \frac{9}{4} a_6 + \frac{65}{2} a_8 \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( a_3 - \frac{9}{4} a_7 + \frac{65}{2} a_9 \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \left( a_4 - \frac{33}{8} a_6 + \frac{165}{4} a_8 \right) \rho_N^{n+1} + \\ & \left( a_5 - \frac{33}{8} a_7 + \frac{165}{4} a_9 \right) \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m5} + \frac{5}{8} a_8 u_N + \frac{13}{40} h a_8 u x_N + \frac{5}{8} a_9 v_N + \frac{13}{40} h a_9 v x_N - \\ & \frac{1}{16} a_6 u_N - \frac{1}{80} h a_6 u x_N - \frac{1}{16} a_7 v_N - \frac{1}{80} h a_7 v x_N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( b_0 - \frac{1}{8} b_6 + \frac{9}{4} b_8 \right) \rho_{N-2}^{n+1} + \left( b_1 - \frac{1}{8} b_7 + \frac{9}{4} b_9 \right) \sigma_{N-2}^{n+1} + \left( b_2 - \frac{9}{4} b_6 + \frac{65}{2} b_8 \right) \rho_{N-1}^{n+1} + \\ & \left( b_3 - \frac{9}{4} b_7 + \frac{65}{2} b_9 \right) \sigma_{N-1}^{n+1} + \left( b_4 - \frac{33}{8} b_6 + \frac{165}{4} b_8 \right) \rho_N^{n+1} + \\ & \left( b_5 - \frac{33}{8} b_7 + \frac{165}{4} b_9 \right) \sigma_N^{n+1} = \lambda_{m9} + \frac{5}{8} b_8 u_N + \frac{13}{40} h b_8 u x_N + \frac{5}{8} b_9 v_N + \frac{13}{40} h b_9 v x_N - \\ & \frac{1}{16} b_6 u_N - \frac{1}{80} h b_6 u x_N - \frac{1}{16} b_7 v_N - \frac{1}{80} h b_7 v x_N \end{aligned}$$

formunda sınır şartlarıda uygulanmış olarak  $2N + 2$  denklem ve  $2N + 2$  bilinmeyen-  
den oluşan bir denklem sistemi olarak açık formda yazılabilir. Yukarıda açıkça  
yazılan (3.18) denklem sistemi,  $\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{m9}$  katsayılarında bulunan  $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$



terimlerinden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sisteminin çözülebilmesi için her bir zaman adımında aşağıdaki iç iterasyon algoritması kullanılacaktır.

### Algoritma 3.1

**GİRDİLER**  $TOL$  (Hata toleransı),  $N_0$  (maksimum iterasyon sayısı)

**ÇIKTI**  $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$  yaklaşık çözümleri

**Adım 1:**  $i = 1$

**Adım 2:**  $i \leq N_0$  sağlandıkça Adım 3-5'i gerçekleştir

**Adım 3:**  $\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{m9}$  katsayılarında  $u_m^{n+1} \equiv u_m^n = u_m^{(i)}$  ve  $v_m^{n+1} \equiv v_m^n = v_m^{(i)}$  olarak  $u_m^{n+1} = u_m^{(i+1)}$  ve  $v_m^{n+1} = v_m^{(i+1)}$  değerlerini hesapla

**Adım 4:** Her  $m$  için  $\max \left( \left| u_m^{(i+1)} - u_m^{(i)} \right|, \left| v_m^{(i+1)} - v_m^{(i)} \right| \right) < TOL$  sağlanmadığında Adım 5'e git

**ÇIKTI** ( $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$ ); (prosedür başarıyla sonuçlanır)

**DUR**

**Adım 5:**  $i = i + 1$

**Adım 6:** **ÇIKTI** ( $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$ )

(Prosedür  $N_0$  iterasyon sonucunda başarıyla sonuçlanır)

**DUR**

Her bir zaman adımında Algoritma 3.1 kullanıldığında,  $u_m^{n+1}$  ve  $v_m^{n+1}$  terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılır ve sistem Gauss eliminasyon metodu ile çözülebilir.

### Başlangıç durumu

CMKdV denkleminin kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılırken, (3.18) denklem sisteminde iterasyonun başlatılabilmesi için ilk olarak

$$(\rho_{-2}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \rho_{N+1}^0, \rho_{N+2}^0) \text{ ve } (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \dots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)$$

bilinmeyen vektörlerinin bulunması gereklidir. Bilinmeyenler vektörlerinin bulunması işlemi, ikinci bölümde kuintik B-spline metodu ile GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken verilmişti. İkinci bölümde yapılan işlemlere göre tek fark,

GNLS denkleminin başlangıç ve sınır şartları yerine CMKdV denkleminin başlangıç ve sınır şartlarının kullanılmasdır.

### 3.2 Test Problemleri

(1.94-1.96) formülleri ile verilen CMKdV denklemi için korunum sabitlerinin sayısal değerleri

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} w dx \simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (w_j + w_{j+1}), \\
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |w|^2 dx \simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} [|w_j|^2 + |w_{j+1}|^2], \\
 I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} (|w|^4 - |w_x|^2) dx \simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ |w_j|^4 - |(w_x)_j|^2 + |w_{j+1}|^4 - |(w_x)_{j+1}|^2 \right]
 \end{aligned}$$

eşitlikleri ile bulunacaktır. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri bulunurken belirli integraller yamuklar kuralı ile, eşitliklerdeki  $w_j$  ve birinci türevi ise, (1.55-1.56) kuintik B-spline eşitlikleri ile hesaplanacaktır.

#### 3.2.1 Solitary dalga çözümü

(1.99) eşitliğinde;  $\alpha = 2$ ,  $c = 1$ ,  $x_0 = -15$  ve  $\theta_0 = \pi/4$  parametre seçimleri yapıldığında CMKdV denkleminin solitary dalga çözümü

$$w(x, t) = \operatorname{sech}(x - 15 - t) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.19)$$

olacaktır. (3.19) çözümü, başlangıç anında tepe noktası  $x = 15$  noktasına karşılık gelen, genliği ve hızı 1 olan solitary dalgasının soldan sağa doğru hareketini modellemektedir. (3.19) eşitliğinde,  $t = 0$  alındığında

$$w(x, 0) = \operatorname{sech}(x - 15) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.20)$$

başlangıç şartı elde edilir.

Bu problem için,  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin tam değerleri Maple programı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(I_1) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \approx 2.2214415, \\
\operatorname{Im}(I_1) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \approx 2.2214415, \\
I_2 &= 2, \\
I_3 &= \frac{2}{3} \approx 0.6666667
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olarak bulunabilir.

İç iterasyon algoritmasında,  $N_0 = 50$  ve  $TOL = 0.0000001$  seçimleri ile programlar çalıştırılmıştır.

İlk olarak program,  $\Delta t = 0.001$ , farklı  $N$  değerleri ve  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığı için  $t = 3$  zamanına kadar çalıştırılarak sonuçlar Tablo 3.1’de verilmiştir. Tablo 3.1’e göre zaman adımı uzunluğu sabit alınarak, konum adım uzunluğu küçültüldüğünde diğer bir ifade ile  $N$  bölünme sayısı arttırıldığında hata normlarının sürekli olarak azaldığı görülebilir.

Tablo 3.1:  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 3$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

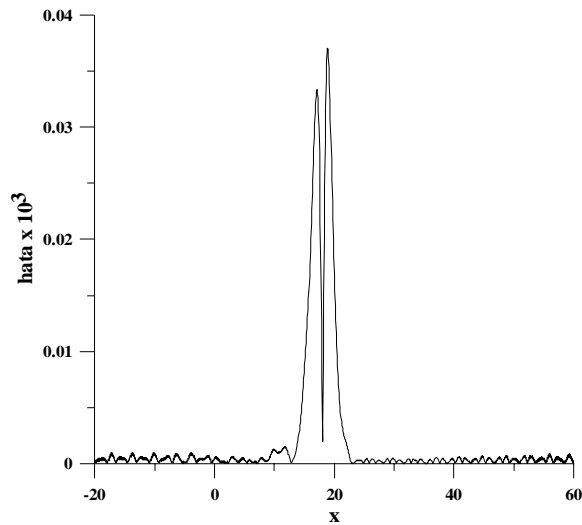
$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	3.28620	2.08697	800	0.01123	0.00780
300	0.65345	0.41519	900	0.00674	0.00468
400	0.19636	0.13715	1000	0.00420	0.00293
500	0.08116	0.05483	1250	0.00142	0.00096
600	0.03747	0.02589	1500	0.00049	0.00034
700	0.01971	0.01395	1750	0.00043	0.00031

Aynı konum aralığında, sabit  $N = 1750$  ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 3$  zamanına kadar program tekrar çalıştırılarak bulunan hata normları Tablo 3.2’de verilmiştir. Tablo 3.2’ye göre, sabit  $N$  değeri alınarak zaman adımı küçültüldüğünde, Tablo 3.1’de olduğu gibi  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları azalmaktadır.

Tablo 3.2:  $N = 1750$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 3$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

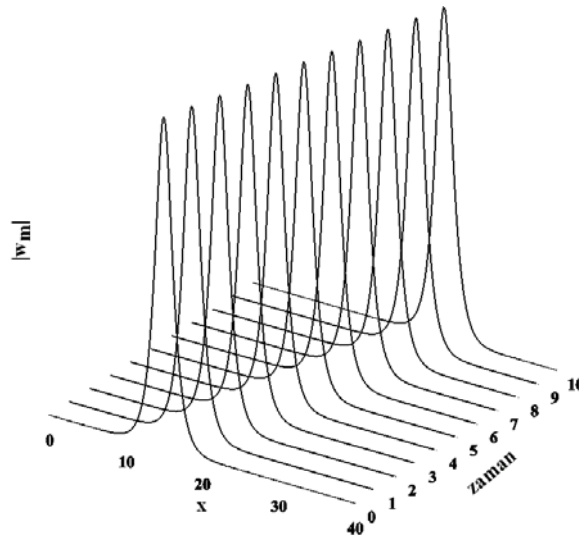
$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	133.07448	85.40243	0.02	0.24737	0.15747
0.3	52.51884	33.57184	0.01	0.06163	0.03925
0.2	24.10623	15.38301	0.005	0.01599	0.01035
0.1	6.20962	4.01660	0.003	0.00558	0.00368
0.05	1.54528	0.98844	0.002	0.00229	0.00155
0.03	0.55690	0.35813	0.001	0.00043	0.00031

$t = 3$  anındaki hata (tam çözüm–sayısal çözüm) oluşumu, Şekil 3.1’de problemin tanım kümesi üzerinde  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  seçimleriyle analitik ve sayısal çözümün modülleri arasındaki farkın mutlak değerinin grafiği çizilerek gösterilmiştir. Grafik incelendiğinde, en büyük hatanın  $x = 20$  noktası civarında ve  $0.037 \times 10^{-3}$  değerinde olduğu görülebilir. Bu durumda, maksimum hatanın konum aralığının başında veya sonunda değilde orta kısımlarda çıkmasından dolayı, denklem sisteminin çözümünün yapılabilmesi için uygulanan sınır şartlarının, problemin sayısal çözümündeki maksimum hataya etkisinin az olduğu söylenebilir.

Şekil 3.1:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 3$  zamanındaki

$|\text{Analitik çözümün modülü} - \text{Sayısal çözümün modülü}|$

Başlangıç ve sayısal çözümlerin  $t = 10$  zamanına kadar belirli zamanlardaki modülleri Şekil 3.2’de verilmiştir. Şekil incelendiğinde,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 15$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan dalga,  $t = 10$  anında tepe noktası  $x = 25$  konumunda olacak şekilde konum ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir. Dalganın hareketi boyunca şeklindeki bir bozulma olmamasına rağmen, genlik değeri en küçük 0.9992 ve en büyük 1 olarak ölçülmüştür.



Şekil 3.2:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için sayısal çözümün modülü

$I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri,  $-20 \leq x \leq 60$  aralığında,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  seçimleri ile  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak sonuçlar Tablo 3.3’de verilmiştir. Tabloda  $\text{Re}(I_1)$  ile  $I_1$  korunum sabitinin reel kısmı ve  $\text{Im}(I_1)$  ile de  $I_1$  korunum sabitinin sanal (ima jiner) kısmı gösterilmektedir. Tablo 3.3 incelendiğinde, korunum sabitlerinin sayısal sonuçlarının analitik değerler ile oldukça uyumlu oldukları görülebilir.

Program  $-20 \leq x \leq 60$  konum aralığında,  $\Delta t = 0.001$  ve farklı  $N$  seçimleri için  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılmış ve korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değerleri Tablo 3.4’de verilmiştir. Tablo 3.4 incelendiğinde, korunum sabitlerinin analitik ve sayısal değerleri arasındaki en büyük farkın mutlak değerleri, konum aralığının bölünme sayısı arttıkça azalmakta

yada neredeyse sabit kalmaktadır. Diğer bir ifade ile söylemek gerekirse,  $N$  değeri arttıkça korunum sabitlerinin sayısal sonuçları analitik sonuçlara yaklaşmakta veya çok yakın değerlerde sabit kalmaktadır.

Tablo 3.3:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için korunum sabitlerinin sayısal değerleri

$t$	$\text{Re}(I_1)_m$	$\text{Im}(I_1)_m$	$(I_2)_m$	$(I_3)_m$
0	2.2214415	2.2214415	1.9999995	0.6666666
2	2.2214408	2.2214408	1.9999995	0.6666666
4	2.2214415	2.2214415	1.9999992	0.6666663
6	2.2214415	2.2214415	1.9999998	0.6666666
8	2.2214413	2.2214413	1.9999992	0.6666664
10	2.2214406	2.2214406	1.9999994	0.6666664

Tablo 3.4:  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için  $t = 10$  zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri

$N$	$\max_{\text{reel}}  I_1 - (I_1)_m $	$\max_{\text{sanal}}  I_1 - (I_1)_m $	$\max  I_2 - (I_2)_m $	$\max  I_3 - (I_3)_m $
250	0.0000784	0.0000784	0.0000021	0.0000097
500	0.0000067	0.0000067	0.0000014	0.0000007
750	0.0000048	0.0000048	0.0000021	0.0000005
1000	0.0000029	0.0000029	0.0000019	0.0000008
1250	0.0000038	0.0000038	0.0000017	0.0000007
1500	0.0000036	0.0000036	0.0000024	0.0000007

### 3.2.2 İki solitary dalgasının çarpışması

CMKdV denkleminin iki pozitif solitary dalgasının çarpışması test problemi için başlangıç şartı, (1.100) eşitliğinde;  $\alpha = 2$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_1 = -15$ ,  $x_2 = -30$  ve

$\theta_0 = 0$  parametre seçimleri ile

$$w(x, 0) = \sqrt{2} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{2}(x - 15) \right] + i \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 30) \right] \quad (3.22)$$

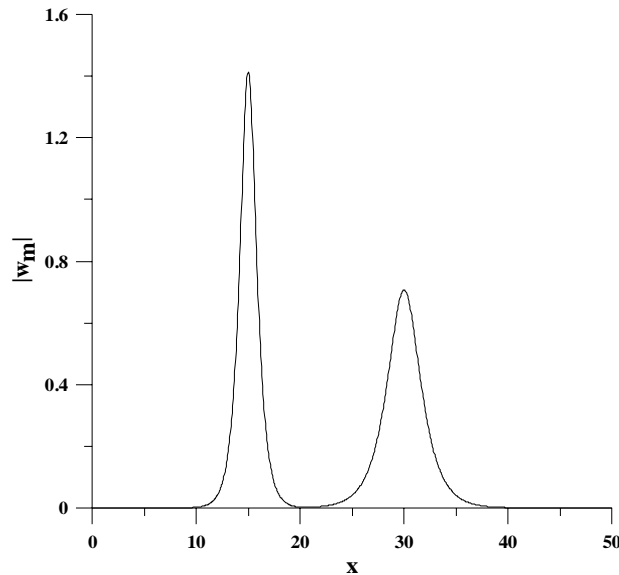
formunda yazılabilir. Verilen başlangıç şartı; ilki  $x = 15$  noktasına yerleştirilmiş genliği  $\sqrt{2}$  ve hızı 2 olan, ikincisi  $x = 30$  noktasına yerleştirilmiş genliği  $1/\sqrt{2}$  ve hızı  $1/2$  olan iki solitary dalgasının konum aralığı üzerinde soldan sağa doğru hareketini modeller.

Bu problem için  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri Maple programıyla

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_1) &= \operatorname{Im}(I_1) = \pi \approx 3.1415927, \\ I_2 &= 3\sqrt{2} \approx 4.2426407, \\ I_3 &= 3/\sqrt{2} \approx 2.1213203 \end{aligned} \quad (3.23)$$

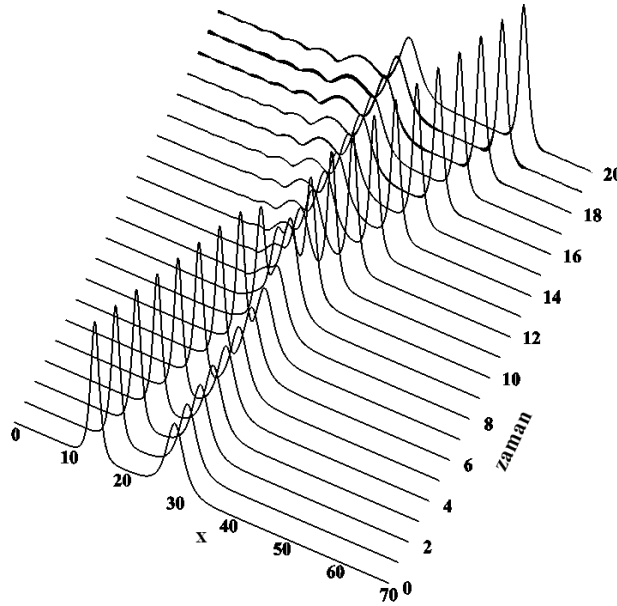
olarak hesaplanabilir.

$t = 0$  anında  $0 \leq x \leq 80$  aralığında (3.22) eşitliğinin modülü alındığında oluşan dalgalar, Şekil 3.3'de gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde, tepe noktası  $x = 15$  konumunda olan büyük solitary dalgasının genliği  $\sqrt{2} \approx 1.41421$  değerinde ve tepe noktası  $x = 30$  konumunda olan küçük solitary dalgasının genliğinin ise  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70711$  değerinde olduğu görülebilir.



Şekil 3.3:  $t = 0$  anındaki dalgaların durumu

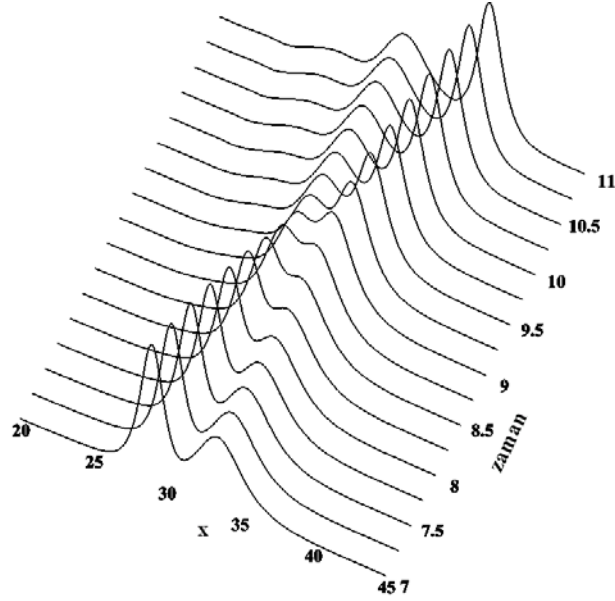
$N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve konum aralığının  $0 \leq x \leq 80$  seçimleri ile program,  $t = 20$  zamanına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki sayısal çözümlerin modülü diğer bir ifade ile bölünme noktalarındaki  $|w_m| = \sqrt{(u_m)^2 + (v_m)^2}$  değerleri grafiksel olarak Şekil 3.4'de gösterilmiştir. Şekil 3.4,  $t = 0$  anında konumları Şekil 3.3'de verilen iki solitary dalgasının zaman içindeki hareketini göstermektedir. Şekil 3.4'de, sırasıyla tepe noktaları  $x = 15$  ve  $x = 30$  noktalarına, genlikleri 1.41421 ve 0.70711 değerlerine karşılık gelen iki solitary dalga zaman içinde konum ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir. Konum ekseninde hareket eden iki solitary dalgasından genliği büyük olan, dolayısıyla daha hızlı hareket eden solitary dalga, diğerine bir müddet sonunda yetişerek iki solitary dalga çarpışmakta ve bir süre sonrada genliği büyük olan dalga önde olacak şekilde dalgalar hareketlerine devam etmektedirler. İki solitary dalgasının çizildiği son an olan  $t = 20$  anında ise, büyük dalganın tepe noktası  $x = 57.28$  konumunda ve genliği 1.45521 değerinde, küçük dalganın tepe noktası  $x = 35.76$  konumunda ve genliği 0.59976 değerinde olmaktadır. Dolayısıyla, iki solitary dalga çarpıştıktan sonra, şekillerinde bir bozulma olmasada genliklerinde bir miktar bozulma gerçekleşmektedir.



Şekil 3.4:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $0 \leq x \leq 80$  için sayısal çözümün modülü



Şekil 3.4 incelendiğinde, çarpışmanın yaklaşık  $t = 7$  civarında başladığı ve  $t = 11$  civarına kadar devam ettiği görülebilir. Şekil 3.5 çarpışma işleminin daha rahat gözlenebilmesi için, Şekil 3.4 deki parametreler kullanılarak çizilmiştir.



Şekil 3.5:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $0 \leq x \leq 80$  için çarpışma anlarındaki sayısal çözümün modülü

İki solitary dalgasının çarpışması test problemi için, korunum sabitlerinin sayısal değerleri  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve konum aralığı  $0 \leq x \leq 80$  alınarak,  $t = 10$  zamanına kadar bazı zaman değerleri için Tablo 3.5’de verilmiştir. Tablo incelendiğinde sayısal sonuçların analitik değerler ile uyumlu oldukları görülebilir.

Program,  $\Delta t = 0.001$  zaman artımı ve  $0 \leq x \leq 80$  konum aralığında farklı  $N$  değerleri için çalıştırılarak, korunum sabitlerinin analitik ve sayısal değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değerleri Tablo 3.6’da verilmiştir. Tablo incelendiğinde  $N$  değeri arttıkça sayısal sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı veya çok yakın değerlerde sabit kaldığı görülebilir.

Tablo 3.5:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $0 \leq x \leq 80$  için korunum sabitlerinin sayısal değerleri

$t$	$\text{Re}(I_1)_m$	$\text{Im}(I_1)_m$	$(I_2)_m$	$(I_3)_m$
0	3.1415913	3.1415927	4.2426386	2.1213210
2	3.1415911	3.1415987	4.2426395	2.1213193
4	3.1415918	3.1415944	4.2426386	2.1213188
6	3.1415954	3.1416249	4.2426381	2.1213176
8	3.1416004	3.1415963	4.2426367	2.1213188
10	3.1415977	3.1415625	4.2426367	2.1213195

Tablo 3.6:  $\Delta t = 0.001$  ve  $0 \leq x \leq 80$  için  $t = 10$  zamanına kadarki korunum sabitlerinin sayısal ve analitik değerleri arasındaki maksimum farkın mutlak değeri

$N$	$\max_{reel}  I_1 - (I_1)_m $	$\max_{sanal}  I_1 - (I_1)_m $	$\max  I_2 - (I_2)_m $	$\max  I_3 - (I_3)_m $
250	0.0013235	0.0001879	0.0008850	0.0018392
500	0.0000710	0.0000348	0.0000048	0.0000820
750	0.0000155	0.0000331	0.0000072	0.0000138
1000	0.0000153	0.0000334	0.0000062	0.0000052
1250	0.0000060	0.0000348	0.0000091	0.0000052
1500	0.0000050	0.0000336	0.0000095	0.0000064

### 3.3 Sonuç

Bu bölümde, kuintik B-spline kolokeyşin metodu, CMKdV denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için kullanılmıştır.

CMKdV denklemi reel ve sanal kısımlara ayrıldıktan sonra, zaman parçalanması için Crank-Nicolson metodu ve konum aralığının bölünme noktalarında kuintik B-spline eşitlikleri kullanılarak iki denklem sistemi elde edilmiştir. Ulaşılan denklem sisteminde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı sınır şartları kullanılarak eşitlendikten sonra, bulunan denklem sistemi kapalı bir sistem olduğundan sistemi çözebilmek için, her bir zaman adımında bir iç iterasyon yardımıyla lineerleştirme yapılmıştır.

Önerilen metodun doğruluğu, iki test problemi kullanılarak kontrol edilmiştir. Solitary dalga çözümü ilk test problemidir. Bu test probleminde  $N$  değeri artırılarak (konum adımı azaltılarak),  $\Delta t$  (zaman artımı) sabit tutulduğunda yada  $N$  değeri sabit tutulurken,  $\Delta t$  zaman aralık uzunluğu azaltıldığında bulunan hata normlarının da azaldığı gözlenmiştir. Çizilen hata grafiğinde ise, maksimum hatanın o anda oluşan dalganın tepe noktasına karşılık gelen konum değeri civarında oluştuğu ve bu sebeple de kullanılan sınır şartlarının hata oluşumunda etkisinin az olduğu belirlenmiştir. Solitary dalgasının zamanla konum eksenindeki hareketi grafiksel olarak incelenmiş ve dalganın hareketi süresince genliğinde ve biçiminde büyük bir bozulma olmadan konum ekseninde hareket ettiği görülmüştür. Solitary dalga probleminde son olarak korunum sabitlerinin sayısal değerleri hesaplanmış ve bu değerlerin analitik değerler ile uyumlu olduğu ve sabit bir zaman adımı için konum aralığı azaltıldıkça da sayısal sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı belirlenmiştir.

İkinci test probleminde; genlikleri, hızları ve tepe noktalarının karşılık geldiği konum değerleri birbirlerinden farklı olan iki solitary dalgasının zaman içindeki hareketi incelenmiştir. İki solitary dalgasının çarpışma durumundan önce ve çarpışma durumundan sonra şekillerinde bir bozulma olmadığı, genliklerinde ise bir miktar bozulma olduğu görülmüştür. Son olarak, bu test problemi için de korunum sabitleri hesaplanmıştır. Birinci test probleminde olduğu gibi, bu test probleminde de korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerler ile uyumlu olduğu ve zaman adım uzunluğu sabit iken, konum adım uzunluğu azaltıldığında sayısal sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı gözlenmiştir.

Sonuç olarak incelenen iki test problemine göre, CMKdV denkleminin sayısal çözümü için kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanışlı bir metottur.

## BÖLÜM 4

### BST DENKLEM SİSTEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, BST denklem sisteminin kuintik B-spline kolekeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra elde edilen algoritmaların doğruluğu, BST denklem sistemindeki 4 parametrenin özel değerleri kullanılarak bulunan bazı denklem sistemleri için test problemleri yardımıyla kontrol edilmiştir.

#### 4.1 BST Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Kuintik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu bölümde, 2. bölümde GNLS denkleminin, 3. bölümde CMKdV denkleminin sayısal çözümü araştırılırken kullanılan kuintik B-spline kolokeyşin metodu, BST denklem sisteminin sayısal çözümü araştırılırken kullanılacaktır.

BST denklem sisteminde kullanılan notasyonların GNLS ve CMKdV denklemlerinden farklı olması ve BST denklem sisteminde üçüncü türeve sahip terimler olması sebebiyle bu bölümde

$$\eta_m = \eta_m(x_m) = \rho_{m+2} + 26\rho_{m+1} + 66\rho_m + 26\rho_{m-1} + \rho_{m-2}, \quad (4.1)$$

$$u_m = u_m(x_m) = \sigma_{m+2} + 26\sigma_{m+1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}, \quad (4.2)$$

$$\eta'_m = \eta'_m(x_m) = \frac{5}{h} (\rho_{m+2} + 10\rho_{m+1} - 10\rho_{m-1} - \rho_{m-2}), \quad (4.3)$$

$$u'_m = u'_m(x_m) = \frac{5}{h} (\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}), \quad (4.4)$$

$$\eta''_m = \eta''_m(x_m) = \frac{20}{h^2} (\rho_{m+2} + 2\rho_{m+1} - 6\rho_m + 2\rho_{m-1} + \rho_{m-2}), \quad (4.5)$$

$$u''_m = u''_m(x_m) = \frac{20}{h^2} (\sigma_{m+2} + 2\sigma_{m+1} - 6\sigma_m + 2\sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}), \quad (4.6)$$

$$\eta'''_m = \eta'''_m(x_m) = \frac{60}{h^3} (\rho_{m+2} - 2\rho_{m+1} + 2\rho_{m-1} - \rho_{m-2}), \quad (4.7)$$

$$u'''_m = u'''_m(x_m) = \frac{60}{h^3} (\sigma_{m+2} - 2\sigma_{m+1} + 2\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}) \quad (4.8)$$

kuintik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. (1.101-1.102) denklemlerinde,  $\Delta t$  zaman adım uzunluğu olmak üzere

$$\begin{aligned}
\eta_t &\simeq \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t}, & u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\
\eta_{xxt} &\simeq \frac{(\eta_{xx})^{n+1} - (\eta_{xx})^n}{\Delta t}, & u_{xxt} &\simeq \frac{(u_{xx})^{n+1} - (u_{xx})^n}{\Delta t}, \\
\eta &= \frac{\eta^n + \eta^{n+1}}{2}, & u &= \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \\
\eta_x &= \frac{(\eta_x)^n + (\eta_x)^{n+1}}{2}, & u_x &= \frac{(u_x)^n + (u_x)^{n+1}}{2}, \\
\eta_{xxx} &= \frac{(\eta_{xxx})^n + (\eta_{xxx})^{n+1}}{2}, & u_{xxx} &= \frac{(u_{xxx})^n + (u_{xxx})^{n+1}}{2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

yaklaşımları ile Crank-Nicolson metodu kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} + \left( \frac{(\eta_x)^{n+1} + (\eta_x)^n}{2} \right) \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) + \\
&\left( \frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} \right) \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) + \alpha_1 \frac{(u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n}{2} - \\
&\alpha_2 \frac{(\eta_{xx})^{n+1} - (\eta_{xx})^n}{\Delta t} = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{(\eta_x)^{n+1} + (\eta_x)^n}{2} + \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \left( \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} \right) + \\
&\alpha_3 \frac{(\eta_{xxx})^{n+1} + (\eta_{xxx})^n}{2} - \alpha_4 \frac{(u_{xx})^{n+1} - (u_{xx})^n}{\Delta t} = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemleri elde edilir. Böylece düzenlemeler yapıldığında,  $x_m$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
\lambda_{m1} &= \frac{(\eta_x)_m^{n+1} + (\eta_x)_m^n}{2}, \\
\lambda_{m2} &= \frac{\eta_m^{n+1} + \eta_m^n}{2}, \\
\lambda_{m3} &= \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta_m^{n+1} - \eta_m^n}{\Delta t} + \frac{(u_x)_m^{n+1} + (u_x)_m^n}{2} + \lambda_{m1} \left( \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right) + \\
&\lambda_{m2} \left( \frac{(u_x)_m^{n+1} + (u_x)_m^n}{2} \right) + \alpha_1 \frac{(u_{xxx})_m^{n+1} + (u_{xxx})_m^n}{2} - \\
&\alpha_2 \frac{(\eta_{xx})_m^{n+1} - (\eta_{xx})_m^n}{\Delta t} = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + \frac{(\eta_x)_m^{n+1} + (\eta_x)_m^n}{2} + \lambda_{m3} \left( \frac{(u_x)_m^{n+1} + (u_x)_m^n}{2} \right) + \\ & \alpha_3 \frac{(\eta_{xxx})_m^{n+1} + (\eta_{xxx})_m^n}{2} - \alpha_4 \frac{(u_{xx})_m^{n+1} - (u_{xx})_m^n}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.12-4.13) denklem sisteminde zaman adımı için düzenleme yapıldığında

$$\begin{aligned} & 2\eta_m^{n+1} - 2\alpha_2 (\eta_{xx})_m^{n+1} + \lambda_{m1} \Delta t u_m^{n+1} + (\Delta t + \lambda_{m2} \Delta t) (u_x)_m^{n+1} + \\ & \alpha_1 \Delta t (u_{xxx})_m^{n+1} = 2\eta_m^n - 2\alpha_2 (\eta_{xx})_m^n - \lambda_{m1} \Delta t u_m^n - \\ & (\Delta t + \lambda_{m2} \Delta t) (u_x)_m^n - \alpha_1 \Delta t (u_{xxx})_m^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

ve

$$\begin{aligned} & \Delta t (\eta_x)_m^{n+1} + \alpha_3 \Delta t (\eta_{xxx})_m^{n+1} + 2u_m^{n+1} + \lambda_{m3} \Delta t (u_x)_m^{n+1} - \\ & 2\alpha_4 (u_{xx})_m^{n+1} = -\Delta t (\eta_x)_m^n - \alpha_3 \Delta t (\eta_{xxx})_m^n + 2u_m^n - \lambda_{m3} \Delta t (u_x)_m^n - \\ & 2\alpha_4 (u_{xx})_m^n \end{aligned} \quad (4.15)$$

sistemi elde edilir. (4.14-4.15) denklem sisteminde, (4.1-4.8) kuintik B-spline eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} \eta_m^n &= \rho_{m+2}^n + 26\rho_{m+1}^n + 66\rho_m^n + 26\rho_{m-1}^n + \rho_{m-2}^n, \\ u_m^n &= \sigma_{m+2}^n + 26\sigma_{m+1}^n + 66\sigma_m^n + 26\sigma_{m-1}^n + \sigma_{m-2}^n, \\ (\eta_x)_m^n &= \frac{5}{h} (\rho_{m+2}^n + 10\rho_{m+1}^n - 10\rho_{m-1}^n - \rho_{m-2}^n), \\ (u_x)_m^n &= \frac{5}{h} (\sigma_{m+2}^n + 10\sigma_{m+1}^n - 10\sigma_{m-1}^n - \sigma_{m-2}^n), \\ \eta_m^{n+1} &= \rho_{m+2}^{n+1} + 26\rho_{m+1}^{n+1} + 66\rho_m^{n+1} + 26\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1}, \\ u_m^{n+1} &= \sigma_{m+2}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 66\sigma_m^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1}, \\ (\eta_x)_m^{n+1} &= \frac{5}{h} (\rho_{m+2}^{n+1} + 10\rho_{m+1}^{n+1} - 10\rho_{m-1}^{n+1} - \rho_{m-2}^{n+1}), \\ \lambda_{m1} &= \frac{(\eta_x)_m^{n+1} + (\eta_x)_m^n}{2}, \\ \lambda_{m2} &= \frac{\eta_m^{n+1} + \eta_m^n}{2}, \\ \lambda_{m3} &= \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{m4} &= 2\eta_m^n - 2\alpha_2(\eta_{xx})_m^n - \lambda_{m1}\Delta t u_m^n - (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t)(u_x)_m^n \\
&\quad - \alpha_1\Delta t(u_{xxx})_m^n, \\
\lambda_{m5} &= -\Delta t(\eta_x)_m^n - \alpha_3\Delta t(\eta_{xxx})_m^n + 2u_m^n - \lambda_{m3}\Delta t(u_x)_m^n - 2\alpha_4(u_{xx})_m^n
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&2(\rho_{m+2}^{n+1} + 26\rho_{m+1}^{n+1} + 66\rho_m^{n+1} + 26\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1}) - \\
&\alpha_2\frac{40}{h^2}(\rho_{m+2}^{n+1} + 2\rho_{m+1}^{n+1} - 6\rho_m^{n+1} + 2\rho_{m-1}^{n+1} + \rho_{m-2}^{n+1}) + \\
&\lambda_{m1}\Delta t(\sigma_{m+2}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 66\sigma_m^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1}) + \\
&(\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t)\frac{5}{h}(\sigma_{m+2}^{n+1} + 10\sigma_{m+1}^{n+1} - 10\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-2}^{n+1}) + \\
&\alpha_1\Delta t\frac{60}{h^3}(\sigma_{m+2}^{n+1} - 2\sigma_{m+1}^{n+1} + 2\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-2}^{n+1}) = \lambda_{m4}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\Delta t\frac{5}{h}(\rho_{m+2}^{n+1} + 10\rho_{m+1}^{n+1} - 10\rho_{m-1}^{n+1} - \rho_{m-2}^{n+1}) + \\
&\alpha_3\Delta t\frac{60}{h^3}(\rho_{m+2}^{n+1} - 2\rho_{m+1}^{n+1} + 2\rho_{m-1}^{n+1} - \rho_{m-2}^{n+1}) + \\
&2(\sigma_{m+2}^{n+1} + 26\sigma_{m+1}^{n+1} + 66\sigma_m^{n+1} + 26\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1}) + \\
&\lambda_{m3}\Delta t\frac{5}{h}(\sigma_{m+2}^{n+1} + 10\sigma_{m+1}^{n+1} - 10\sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-2}^{n+1}) - \\
&\alpha_4\frac{40}{h^2}(\sigma_{m+2}^{n+1} + 2\sigma_{m+1}^{n+1} - 6\sigma_m^{n+1} + 2\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-2}^{n+1}) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

sistemine ve düzenlemeler sonrasında  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$$\begin{aligned}
&\rho_{m-2}^{n+1}\left(2 - \alpha_2\frac{40}{h^2}\right) + \sigma_{m-2}^{n+1}\left(\lambda_{m1}\Delta t - (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t)\frac{5}{h} - \alpha_1\Delta t\frac{60}{h^3}\right) + \\
&\rho_{m-1}^{n+1}\left(52 - \alpha_2\frac{80}{h^2}\right) + \sigma_{m-1}^{n+1}\left(26\lambda_{m1}\Delta t - (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t)\frac{50}{h} + \alpha_1\Delta t\frac{120}{h^3}\right) + \\
&\rho_m^{n+1}\left(132 + \alpha_2\frac{240}{h^2}\right) + \sigma_m^{n+1}(66\lambda_{m1}\Delta t) + \\
&\rho_{m+1}^{n+1}\left(52 - \alpha_2\frac{80}{h^2}\right) + \sigma_{m+1}^{n+1}\left(26\lambda_{m1}\Delta t + (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t)\frac{50}{h} - \alpha_1\Delta t\frac{120}{h^3}\right) + \\
&\rho_{m+2}^{n+1}\left(2 - \alpha_2\frac{40}{h^2}\right) + \sigma_{m+2}^{n+1}\left(\lambda_{m1}\Delta t + (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t)\frac{5}{h} + \alpha_1\Delta t\frac{60}{h^3}\right) = \lambda_{m4}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \rho_{m-2}^{n+1} \left( -\Delta t \frac{5}{h} - \alpha_3 \Delta t \frac{60}{h^3} \right) + \sigma_{m-2}^{n+1} \left( 2 - \lambda_{m3} \Delta t \frac{5}{h} - \alpha_4 \frac{40}{h^2} \right) + \\
& \rho_{m-2}^{n+1} \left( -\Delta t \frac{5}{h} - \alpha_3 \Delta t \frac{60}{h^3} \right) + \sigma_{m-2}^{n+1} \left( 2 - \lambda_{m3} \Delta t \frac{5}{h} - \alpha_4 \frac{40}{h^2} \right) + \\
& \sigma_m^{n+1} \left( 132 + \alpha_4 \frac{240}{h^2} \right) + \rho_{m+1}^{n+1} \left( \Delta t \frac{50}{h} - \alpha_3 \Delta t \frac{120}{h^3} \right) + \\
& \sigma_{m+1}^{n+1} \left( 52 + \lambda_{m3} \Delta t \frac{50}{h} - \alpha_4 \frac{80}{h^2} \right) + \rho_{m+2}^{n+1} \left( \Delta t \frac{5}{h} + \alpha_3 \Delta t \frac{60}{h^3} \right) + \\
& \sigma_{m+2}^{n+1} \left( 2 + \lambda_{m3} \Delta t \frac{5}{h} - \alpha_4 \frac{40}{h^2} \right) = \lambda_{m5}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

formundaki  $2N + 2$  denklem ve  $2N + 10$  bilinmeyenden oluşan bir sisteme ulaşılır. (4.18-4.19) denklem sisteminde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısının eşitlenmesi için,  $\rho_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+2}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+2}^{n+1}$  bilinmeyen parametreleri sınır şartları kullanılarak yok edilmelidir. (1.115,1.117) ve (1.119,1.121) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
\eta'(x_0, t) &= \eta x_0 = \frac{5}{h} (\rho_2^{n+1} + 10\rho_1^{n+1} - 10\rho_{-1}^{n+1} - \rho_{-2}^{n+1}), \\
u'(x_0, t) &= u x_0 = \frac{5}{h} (\sigma_2^{n+1} + 10\sigma_1^{n+1} - 10\sigma_{-1}^{n+1} - \sigma_{-2}^{n+1}), \\
\eta'''(x_0, t) &= \eta 3x_0 = \frac{60}{h^3} (\rho_2^{n+1} - 2\rho_1^{n+1} + 2\rho_{-1}^{n+1} - \rho_{-2}^{n+1}), \\
u'''(x_0, t) &= u 3x_0 = \frac{60}{h^3} (\sigma_2^{n+1} - 2\sigma_1^{n+1} + 2\sigma_{-1}^{n+1} - \sigma_{-2}^{n+1}), \\
\eta'(x_N, t) &= \eta x_N = \frac{5}{h} (\rho_{N+2}^{n+1} + 10\rho_{N+1}^{n+1} - 10\rho_{N-1}^{n+1} - \rho_{N-2}^{n+1}), \\
u'(x_N, t) &= u x_N = \frac{5}{h} (\sigma_{N+2}^{n+1} + 10\sigma_{N+1}^{n+1} - 10\sigma_{N-1}^{n+1} - \sigma_{N-2}^{n+1}), \\
\eta'''(x_N, t) &= \eta 3x_N = \frac{60}{h^3} (\rho_{N+2}^{n+1} - 2\rho_{N+1}^{n+1} + 2\rho_{N-1}^{n+1} - \rho_{N-2}^{n+1}), \\
u'''(x_N, t) &= u 3x_N = \frac{60}{h^3} (\sigma_{N+2}^{n+1} - 2\sigma_{N+1}^{n+1} + 2\sigma_{N-1}^{n+1} - \sigma_{N-2}^{n+1})
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. İlk dört sınır şartının ve son dört sınır şartının kullanılmasıyla

$$\rho_{-2}^{n+1} = \rho_2^{n+1} - \frac{1}{30} h \eta x_0 - \frac{1}{72} h^3 \eta 3x_0, \tag{4.20}$$

$$\sigma_{-2}^{n+1} = \sigma_2^{n+1} - \frac{1}{30} h u x_0 - \frac{1}{72} h^3 u 3x_0, \tag{4.21}$$

$$\rho_{-1}^{n+1} = \rho_1^{n+1} - \frac{1}{60} h \eta x_0 + \frac{1}{720} h^3 \eta 3x_0, \tag{4.22}$$

$$\sigma_{-1}^{n+1} = \sigma_1^{n+1} - \frac{1}{60} h u x_0 + \frac{1}{720} h^3 u 3x_0, \tag{4.23}$$



$$\rho_{N+2}^{n+1} = \rho_{N-2}^{n+1} + \frac{1}{30}h\eta x_N + \frac{1}{72}h^3\eta 3x_N, \quad (4.24)$$

$$\sigma_{N+2}^{n+1} = \sigma_{N-2}^{n+1} + \frac{1}{30}hu x_N + \frac{1}{72}h^3u 3x_N, \quad (4.25)$$

$$\rho_{N+1}^{n+1} = \rho_{N-1}^{n+1} + \frac{1}{60}h\eta x_N - \frac{1}{720}h^3\eta 3x_N, \quad (4.26)$$

$$\sigma_{N+1}^{n+1} = \sigma_{N-1}^{n+1} + \frac{1}{60}hu x_N - \frac{1}{720}h^3u 3x_N \quad (4.27)$$

eşitlikleri elde edilebilir. (4.18-4.19) denklem sisteminde  $\rho_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\rho_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{N+1}^{n+1}$ ,  $\rho_{N+2}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+2}^{n+1}$  bilinmeyen parametreleri yerine, (4.20-4.27) eşitlikleri kullanıldığında denklem ve bilinmeyen sayıları  $2N + 2$  olur. Böylece

$$a_0 = 2 - \alpha_2 \frac{40}{h^2},$$

$$a_1 = \lambda_{m1}\Delta t - (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t) \frac{5}{h} - \alpha_1 \Delta t \frac{60}{h^3},$$

$$a_2 = 52 - \alpha_2 \frac{80}{h^2},$$

$$a_3 = 26\lambda_{m1}\Delta t - (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t) \frac{50}{h} + \alpha_1 \Delta t \frac{120}{h^3},$$

$$a_4 = 132 + \alpha_2 \frac{240}{h^2},$$

$$a_5 = 66\lambda_{m1}\Delta t,$$

$$a_6 = 52 - \alpha_2 \frac{80}{h^2},$$

$$a_7 = 26\lambda_{m1}\Delta t + (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t) \frac{50}{h} - \alpha_1 \Delta t \frac{120}{h^3},$$

$$a_8 = 2 - \alpha_2 \frac{40}{h^2}$$

$$a_9 = \lambda_{m1}\Delta t + (\Delta t + \lambda_{m2}\Delta t) \frac{5}{h} + \alpha_1 \Delta t \frac{60}{h^3},$$

$$b_0 = -\Delta t \frac{5}{h} - \alpha_3 \Delta t \frac{60}{h^3},$$

$$b_1 = 2 - \lambda_{m3}\Delta t \frac{5}{h} + \alpha_4 \frac{40}{h^2},$$

$$b_2 = -\Delta t \frac{50}{h} + \alpha_3 \Delta t \frac{120}{h^3},$$

$$b_3 = 52 - \lambda_{m3}\Delta t \frac{50}{h} + \alpha_4 \frac{80}{h^2},$$

$$b_4 = 132 - \alpha_4 \frac{240}{h^2},$$

$$b_5 = \Delta t \frac{50}{h} - \alpha_3 \Delta t \frac{120}{h^3},$$

$$b_6 = 52 + \lambda_{m3}\Delta t \frac{50}{h} + \alpha_4 \frac{80}{h^2},$$

$$b_7 = \Delta t \frac{5}{h} + \alpha_3 \Delta t \frac{60}{h^3},$$

$$b_8 = 2 + \lambda_{m3}\Delta t \frac{5}{h} + \alpha_4 \frac{40}{h^2},$$

olmak üzere (1.101-1.102) denklemleri,  $x_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$  bölünme noktalarında

$m = 0$  için

$$\begin{aligned} & a_4\rho_0^{n+1} + a_5\sigma_0^{n+1} + (a_6 + a_2)\rho_1^{n+1} + (a_7 + a_3)\sigma_1^{n+1} + (a_8 + a_0)\rho_2^{n+1} + \\ & (a_9 + a_1)\sigma_2^{n+1} = \lambda_{m4} + \frac{1}{30}ha_0\eta x_0 + \frac{1}{72}h^3a_0\eta 3x_0 + \frac{1}{30}ha_1ux_0 + \\ & \frac{1}{72}h^3a_1u3x_0 + \frac{1}{60}ha_2\eta x_0 - \frac{1}{720}h^3a_2\eta 3x_0 + \frac{1}{60}ha_3ux_0 - \frac{1}{720}h^3a_3u3x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_4\sigma_0^{n+1} + (b_5 + b_2)\rho_1^{n+1} + (b_6 + b_3)\sigma_1^{n+1} + (b_7 + b_0)\rho_2^{n+1} + (b_8 + b_1)\sigma_2^{n+1} = \\ & \lambda_{m5} + \frac{1}{30}hb_0\eta x_0 + \frac{1}{72}h^3b_0\eta 3x_0 + \frac{1}{30}hb_1ux_0 + \frac{1}{72}h^3b_1u3x_0 + \frac{1}{60}hb_2\eta x_0 - \\ & \frac{1}{720}h^3b_2\eta 3x_0 + \frac{1}{60}hb_3ux_0 - \frac{1}{720}h^3b_3u3x_0 \end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$\begin{aligned} & a_2\rho_0^{n+1} + a_3\sigma_0^{n+1} + (a_4 + a_0)\rho_1^{n+1} + (a_5 + a_1)\sigma_1^{n+1} + a_6\rho_2^{n+1} + a_7\sigma_2^{n+1} \\ & + a_8\rho_3^{n+1} + a_9\sigma_3^{n+1} = \lambda_{m4} + \frac{1}{60}ha_0\eta x_0 - \frac{1}{720}h^3a_0\eta 3x_0 + \frac{1}{60}ha_1ux_0 - \\ & \frac{1}{720}h^3a_1u3x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_2\rho_0^{n+1} + b_3\sigma_0^{n+1} + b_0\rho_1^{n+1} + (b_4 + b_1)\sigma_1^{n+1} + b_5\rho_2^{n+1} + b_6\sigma_2^{n+1} + b_7\rho_3^{n+1} + \\ & b_8\sigma_3^{n+1} = \lambda_{m5} + \frac{1}{60}hb_0\eta x_0 - \frac{1}{720}h^3b_0\eta 3x_0 + \frac{1}{60}hb_1ux_0 - \frac{1}{720}h^3b_1u3x_0 \end{aligned}$$

$m = 2$  için

$$\begin{aligned} & a_0\rho_0^{n+1} + a_1\sigma_0^{n+1} + a_2\rho_1^{n+1} + a_3\sigma_1^{n+1} + a_4\rho_2^{n+1} + a_5\sigma_2^{n+1} + a_6\rho_3^{n+1} + \\ & a_7\sigma_3^{n+1} + a_8\rho_4^{n+1} + a_9\sigma_4^{n+1} = \lambda_{m4}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (b_0 + b_7) \rho_{N-2}^{n+1} + (b_1 + b_8) \sigma_{N-2}^{n+1} + (b_2 + b_5) \rho_{N-1}^{n+1} + (b_3 + b_6) \sigma_{N-1}^{n+1} + b_4 \sigma_N^{n+1} + \\
& = \lambda_{m5} - \frac{1}{60} h b_5 \eta x_N + \frac{1}{720} h^3 b_5 \eta 3x_N - \frac{1}{60} h b_6 u x_N + \frac{1}{720} h^3 b_6 u 3x_N - \\
& \frac{1}{30} h b_7 \eta x_N - \frac{1}{72} h^3 b_7 \eta 3x_N - \frac{1}{30} h b_8 u x_N - \frac{1}{72} h^3 b_8 u 3x_N
\end{aligned}$$

olarak sınır şartlarında uygulanmış şekilde açık formda yazılabilir. Elde edilen denklem sistemi  $2N + 2$  denklem,  $2N + 2$  bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Yukarıda açıkça yazılan (4.28) sistemi,  $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}$  ve  $\lambda_{m3}$  katsayılarında bulunan  $\eta_m^{n+1}, (\eta_x)_m^{n+1}$  ve  $u_m^{n+1}$  terimlerine göre kapalı bir sistemdir. Her bir zaman adımında 3. bölümde verilen Algoritma 3.1'e benzeyen aşağıdaki algoritma kullanılarak denklem sistemi çözülebilir.

#### Algoritma 4.1

**GİRDİLER**  $TOL$  (Hata toleransı),  $N_0$  (maksimum iterasyon sayısı)

**ÇIKTI**  $\eta_m^{n+1}, (\eta_x)_m^{n+1}$  ve  $u_m^{n+1}$  yaklaşık çözümleri

**Adım 1:**  $i = 1$

**Adım 2:**  $i \leq N_0$  sağlandıkça Adım 3-5'i gerçekleştir

**Adım 3:**  $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \lambda_{m3}$  katsayılarında  $\eta_m^{n+1} \equiv \eta_m^n = \eta_m^{(i)}, (\eta_x)_m^{n+1} \equiv (\eta_x)_m^n = (\eta_x)_m^{(i)}$  ve  $u_m^{n+1} \equiv u_m^n = u_m^{(i)}$  alarak  $\eta_m^{n+1} = \eta_m^{(i+1)}, (\eta_x)_m^{n+1} \equiv (\eta_x)_m^{(i+1)}$  ve  $u_m^{n+1} = u_m^{(i+1)}$  değerlerini hesapla

**Adım 4:** Her  $m$  için  $\max \left( \left| \eta_m^{(i+1)} - \eta_m^{(i)} \right|, \left| (\eta_x)_m^{(i+1)} - (\eta_x)_m^{(i)} \right|, \left| u_m^{(i+1)} - u_m^{(i)} \right| \right) < TOL$  sağlanmadığında Adım 5'e git

**ÇIKTI**  $(\eta_m^{n+1}, (\eta_x)_m^{n+1}$  ve  $u_m^{n+1})$ ; (prosedür başarıyla sonuçlanır)

**DUR**

**Adım 5:**  $i = i + 1$

**Adım 6:** **ÇIKTI**  $(\eta_m^{n+1}, (\eta_x)_m^{n+1}$  ve  $u_m^{n+1})$

(Prosedür  $N_0$  iterasyon sonucunda başarıyla sonuçlanır)

**DUR**

Böylece her bir zaman adımında, verilen algoritma kullanılarak  $\eta_m^{n+1}, (\eta_x)_m^{n+1}$  ve  $u_m^{n+1}$  terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılır ve sistem Gauss eliminasyon metodu ile çözülebilir.

## Başlangıç durumu

BST denklem sisteminin kuintik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken iterasyonun başlatılabilmesi için ilk olarak

$$(\rho_{-2}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \rho_{N+1}^0, \rho_{N+2}^0) \text{ ve } (\sigma_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \dots, \sigma_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0)$$

bilinmeyen vektörlerinin bulunması gerekir. Bilinmeyenler vektörlerinin bulunması işlemi, 2. bölümde kuintik B-spline metodu ile GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken elde edilmişti. Bu bölümde farklı olarak, BST denklem sistemi için bilinmeyen vektörleri arandığından, BST denklem sisteminin başlangıç ve sınır şartları kullanılmalıdır.

## 4.2 Test Problemleri

Bu bölümde, BST denklem sistemindeki parametrelerin özel değerleri ile bulunan Whitham, RB, KB ve BS sistemlerinin sayısal çözümleri test problemleri kullanılarak kontrol edilecektir.

### 4.2.1 İlerleyen dalga çözümü

RB, KB ve BS denklem sistemleri için ilerleyen dalga formunda analitik çözümler belli olduğundan, hata normları kullanılarak metodun doğruluğu test edilecektir. Ayrıca dalgaların zaman içindeki hareketleri grafikler çizilerek incelenecektir.

### RB sistemi

(1.108-1.109) denklemlerinden oluşan RB sisteminin ilerleyen dalga çözümü (1.132-1.133) eşitlikleri ile verilmişti. Eşitliklerde

$$x_0 = 0, g = 6 \text{ ve } c = \frac{1}{3}$$

seçimleri yapılırsa, RB sisteminin

$$\eta(x, t) = -1, \quad (4.29)$$

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} \left( x - \frac{t}{3} \right) \right) \quad (4.30)$$

formunda ilerleyen dalga çözümüne ulaşılır. (4.30) ilerleyen dalga çözümü; genliği 1, hızı  $1/3$ , tepe noktası  $x = 0$  noktasına karşılık gelen bir ilerleyen dalganın soldan sağa doğru hareketini modellemektedir. (4.29-4.30) eşitliklerinde  $t = 0$  alındığında ise, RB sisteminin başlangıç şartı

$$\eta(x, 0) = -1, \quad (4.31)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} x \right) \quad (4.32)$$

olarak bulunur.

İç iterasyon algoritmasında,  $N_0 = 50$  ve  $TOL = 0.0000001$  seçimleri ile programlar çalıştırılmıştır.

Program  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında, zaman artımı  $\Delta t = 0.001$  ve konum aralığı bölünme sayısı olan  $N$ 'nin farklı değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  ifadelerinin sayısal çözümleri bulunarak, karşılık gelen hata normları sırasıyla Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de verilmiştir. Tablo 4.1'e göre  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sırasıyla 0.00004 ve 0.00005 değerlerinde sabit kaldıkları görülürken, Tablo 4.2'de,  $N$  konum aralığı bölünme sayısı arttıkça  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sürekli azaldığı görülebilir.

Tablo 4.1:  $\eta_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.00004	0.00005	800	0.00004	0.00005
300	0.00004	0.00005	900	0.00004	0.00005
400	0.00004	0.00005	1000	0.00004	0.00005
500	0.00004	0.00005	1250	0.00004	0.00005
600	0.00004	0.00005	1500	0.00004	0.00005
700	0.00004	0.00005	1750	0.00004	0.00005

Tablo 4.2:  $u_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.83435	0.68053	800	0.39878	0.43930
300	0.43579	0.44560	900	0.39862	0.43903
400	0.40704	0.44072	1000	0.39852	0.43862
500	0.40152	0.43938	1250	0.39842	0.43919
600	0.39980	0.43767	1500	0.39838	0.43917
700	0.39911	0.43900	1750	0.39836	0.43906

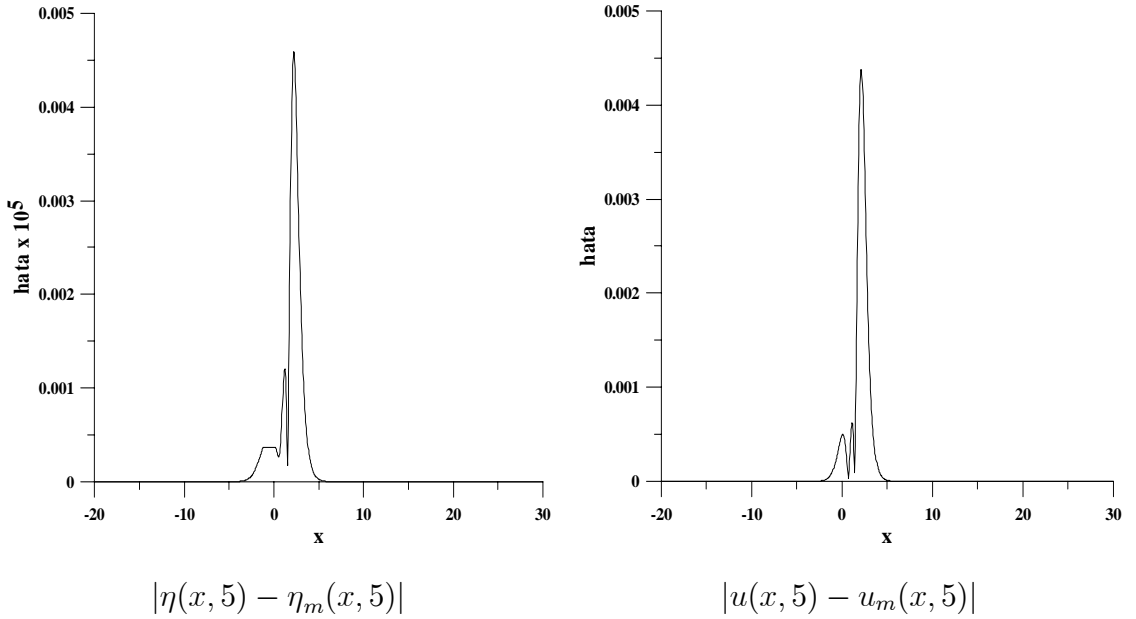
Bu sefer program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $N = 1000$  ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  değerlerinin sayısal sonuçları bulunarak, Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'de hata normları verilmiştir. Tablo 4.3 incelendiğinde,  $L_2$  hata normunun 0.00004 değerinde sabit kaldığı,  $L_\infty$  hata normunun ise 0.00004 değerinden 0.00005 değerine değiştiği görülebilir.  $L_\infty$  daki bu değişim miktarı ondalık kısımdaki sekizinci basamaktan sonra gerçekleştiğinden hatanın aynı kaldığı söylenilebilir. Tablo 4.4 incelendiğinde ise, zaman artım değeri azaldıkça,  $\eta(x, t)$ 'nin sayısal çözümünde bulunan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının da azaldığı görülebilir.

Tablo 4.3:  $\eta_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	0.00004	0.00004	0.02	0.00004	0.00005
0.25	0.00004	0.00004	0.01	0.00004	0.00005
0.2	0.00004	0.00004	0.005	0.00004	0.00005
0.1	0.00004	0.00004	0.0025	0.00004	0.00005
0.05	0.00004	0.00005	0.002	0.00004	0.00005
0.025	0.00004	0.00005	0.001	0.00004	0.00005

Tablo 4.4:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	181.49552	200.42954	0.02	7.94561	8.75083
0.25	95.55556	105.53255	0.01	3.97857	4.38037
0.2	77.15460	85.22133	0.005	1.99078	2.19180
0.1	39.24416	43.30709	0.0025	0.99583	1.09630
0.05	19.77608	21.79947	0.002	0.79675	0.87711
0.025	9.92479	10.93234	0.001	0.39852	0.43862



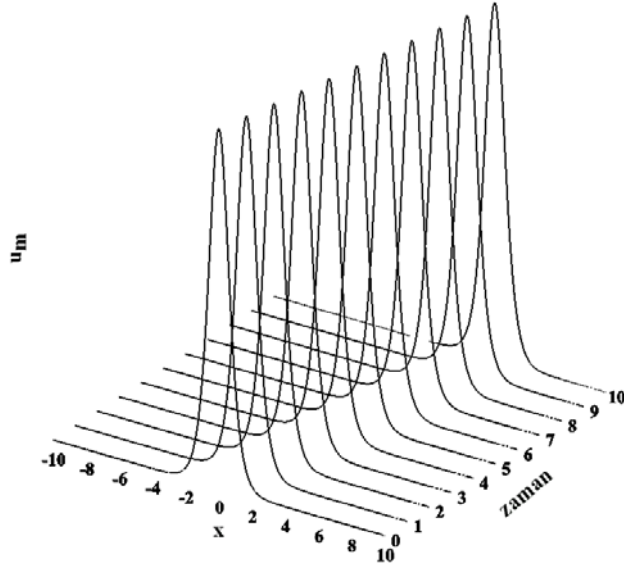
Şekil 4.1:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki |Analitik – Sayısal| çözüm

$N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 30$  seçimleri için  $t = 5$  anındaki hata (tam çözüm–sayısal çözüm) oluşumu, Şekil 4.1’de  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  için ayrı olarak, analitik ve sayısal çözüm arasındaki farkın mutlak değerinin grafiği çizilerek gösterilmiştir. Şekil 4.1’de  $\eta$  ve  $u$  olarak analitik çözümler,  $\eta_m$  ve  $u_m$  ile de sayısal çözümler gösterilmektedir. Her iki grafik için de, maksimum hatanın konum



aralığının orta noktalarına karşılık geldiği görülebilir. Maksimum hatanın konum aralığının baş veya son kısmında değilde orta kısımlarda gelmesi sebebiyle, sayısal çözümleri bulmak için kullanılan sınır şartlarının maksimum hata oluşumuna etkisi olmadığı veya çok az olduğu görülmüş olur.

Program,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  seçimleriyle  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $u(x, t)$  için bazı zamanlardaki sayısal çözümler Şekil 4.2’de verilmiştir.  $\eta(x, t)$  için sayısal çözümün grafiğinin çizilmeme sebebi, analitik değer olan  $-1$  değerinin sayısal çözümde de sürekli görülmesinden dolayıdır. Grafikte,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan bir dalga,  $t = 10$  zamanında tepe noktası  $x = 3.3$  civarında olacak şekilde şekline bir bozulma olmadan konum ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir. Ayrıca,  $0 \leq t \leq 10$  zaman aralığında  $u_m$  sayısal sonucu en düşük 0.9948 ve en büyük 1 değerlerini almaktadır. Dolayısıyla, konum ekseninde soldan sağa doğru hareket eden ilerleyen dalganın şeklinde bir bozulma olmasa da, dalganın genliğinde bir miktar bozulma olmaktadır.



Şekil 4.2:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için sayısal çözümler

### KB sistemi

(1.110-1.111) denklemlerinden oluşan KB sisteminin ilerleyen dalga çözümü, (1.134-1.135) eşitlikleri ile verilmişti. Eşitliklerde

$$x_0 = 0, g = 3 \text{ ve } c = \frac{1}{3}$$

seçimleri yapıldığında, KB sisteminin ilerleyen dalga çözümü

$$\eta(x, t) = -1 \quad (4.33)$$

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x - \frac{t}{3} \right) \right) \quad (4.34)$$

formunda bulunur ve (4.33-4.34) eşitliklerinde  $t = 0$  alınır

$$\eta(x, 0) = -1 \quad (4.35)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \quad (4.36)$$

başlangıç şartı elde edilir. (4.34) ilerleyen dalga çözümü; genliği 1, hızı 1/3, tepe noktası  $x = 0$  noktasına karşılık gelen bir ilerleyen dalganın soldan sağa doğru hareketini modellemektedir.

İlk olarak program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında sabit zaman artımı  $\Delta t = 0.001$  ve konum aralığı olan  $N$ 'nin farklı değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  ifadelerinin sayısal çözümleri bulunmuş ve hata normları sırasıyla Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da verilmiştir.

Tablo 4.5:  $\eta_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.00005	0.00006	800	0.00005	0.00013
300	0.00005	0.00008	900	0.00005	0.00013
400	0.00005	0.00009	1000	0.00005	0.00013
500	0.00005	0.00009	1250	0.00005	0.00014
600	0.00005	0.00011	1500	0.00005	0.00014
700	0.00005	0.00013	1750	0.00005	0.00014

Tablo 4.6:  $u_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.26890	0.22098	800	0.20971	0.19086
300	0.21499	0.19072	900	0.20968	0.19077
400	0.21098	0.19039	1000	0.20966	0.19080
500	0.21014	0.19088	1250	0.20965	0.19085
600	0.20987	0.19077	1500	0.20964	0.19080
700	0.20976	0.19068	1750	0.20964	0.19085

Tablo 4.5'e göre,  $N$  değeri artarken diğer bir ifade ile konum adım uzunluğu azalırken,  $L_2$  hata normu sabit kalırken,  $L_\infty$  hata normunda bir miktar artış olmaktadır. Fakat söz konusu artış ondalık kısımda yedinci basamaktan sonra olduğundan çok önemli değildir. Tablo 4.6 incelendiğinde ise,  $\eta(x, t)$ 'nin sayısal çözümünde bulunan hata normlarının aksine,  $u(x, t)$ 'nin hata normlarında  $N$  değeri arttıkça bir miktar azalma olmaktadır.

Program bu sefer  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında, sabit bir konum aralığı bölünme sayısı olan  $N = 1000$  ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılmış,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$ 'nin sayısal sonuçları bulunarak hata normları sırasıyla Tablo 4.7 ve Tablo 4.8'de verilmiştir.

Tablo 4.7:  $\eta_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	0.00005	0.00008	0.02	0.00005	0.00013
0.25	0.00005	0.00009	0.01	0.00005	0.00012
0.2	0.00005	0.00010	0.005	0.00005	0.00013
0.1	0.00005	0.00012	0.0025	0.00005	0.00013
0.05	0.00005	0.00013	0.002	0.00005	0.00013
0.025	0.00005	0.00013	0.001	0.00005	0.00013

Tablo 4.8:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

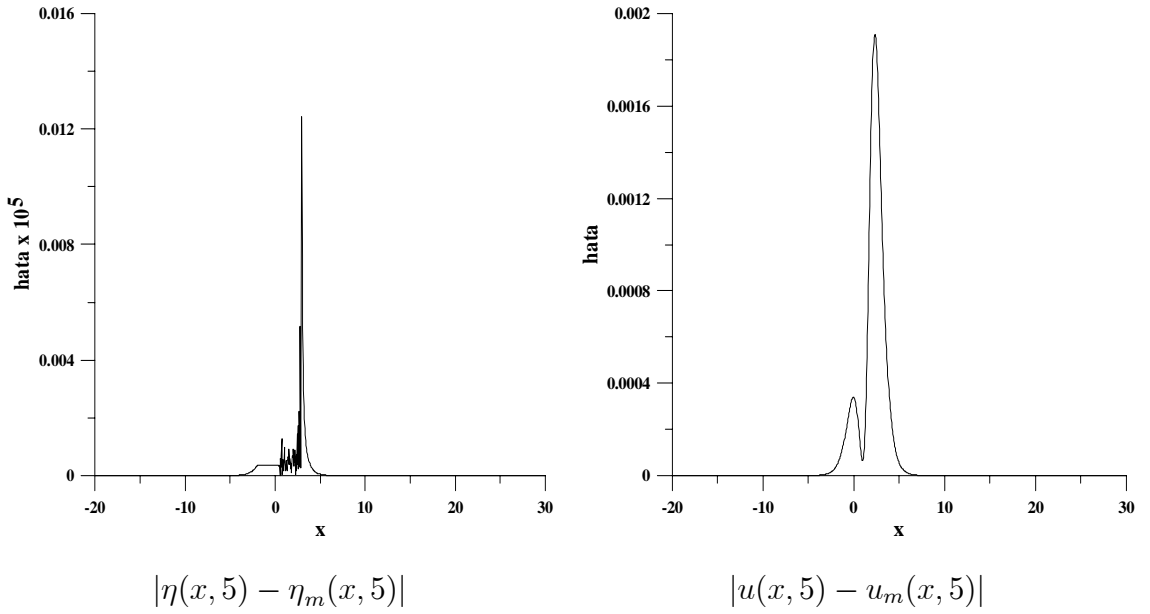
$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	101.12247	93.19328	0.02	4.18963	3.81624
0.25	51.63614	47.34664	0.01	2.09583	1.90835
0.2	41.45512	37.96540	0.005	1.04816	0.95420
0.1	20.85878	19.04956	0.0025	0.52414	0.47709
0.05	10.45818	9.53588	0.002	0.41932	0.38166
0.025	5.23575	4.76996	0.001	0.20966	0.19080

Tablo 4.7'ye göre,  $\Delta t$  zaman artım değerinin sabit alınarak  $N$  değerinin artırıldığı durum gibi,  $N$  değeri sabit tutularak  $\Delta t$  zaman artımı değeri azaltıldığında da  $L_2$  hata normunda bir değişiklik olmazken,  $L_\infty$  hata normunda bir miktar artış olmaktadır. Tablo 4.8'incelendiğinde ise, sabit  $N$  için  $\Delta t$  zaman adımı azaltıldığında,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerleri gözle görülebilir oranda azalmaktadır.

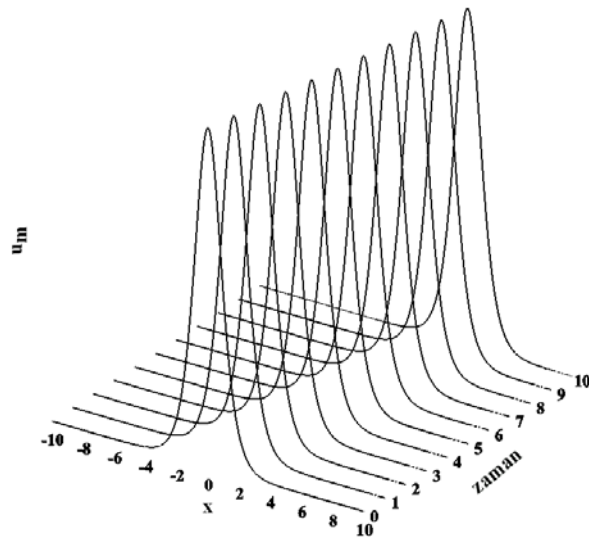
Konum aralığı bölünme sayısı  $N = 1000$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 30$  değerleri kullanılarak,  $t = 5$  anındaki hata (tam çözüm–sayısal çözüm) oluşumu, Şekil 4.3'de  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  için analitik ve sayısal çözüm arasındaki farkın mutlak değerinin grafiği çizilerek gösterilmiştir. Her iki grafik için de maksimum hata, konum aralığının orta noktalarına karşılık geldiğinden, sayısal çözümleri bulmak için kullanılan sınır şartlarının maksimum hata oluşumuna etkisinin az olduğu sonucuna varılabilir.

$t = 0$  anında oluşan dalganın zaman içindeki hareketini gözleyebilmek için program,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  seçimleriyle  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $u(x, t)$ 'nin bazı zamanlardaki sayısal çözümleri Şekil 4.4'de verilmiştir.  $\eta(x, t)$ 'nin sayısal çözümünün grafiğinin çizilmeme sebebi analitik değeri olan  $-1$  değerinin sayısal çözümde de sürekli görülmesidir. Grafikte  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  noktasına karşılık gelecek şekilde harekete başlayan bir dalga  $t = 10$  zamanında tepe noktası  $x = 3.35$  civarında olacak şekilde za-

man ilerledikçe şeklinde bir bozulma olmadan konum ekseninde hareket etmektedir. Şekil incelendiğinde,  $t = 0$  anında oluşan dalganın şeklinde bir bozulma olmasada,  $0 \leq t \leq 10$  zaman aralığında  $u_m$  sayısal sonucu en düşük 0.9974 ve en büyük 1 değerlerini almaktadır. Dolayısıyla zaman içinde dalganın genliğinde bir miktar bozulma olmaktadır.



Şekil 4.3:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki |Analitik – Sayısal| çözüm



Şekil 4.4:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için sayısal çözümler

### BS sistemi

BS sistemi, parametrelerine göre hem solitary dalga hemde ilerleyen dalga çözümüne sahiptir. İlk olarak ilerleyen dalga çözümünü durumu incelenecektir. (1.140-1.141) denklemlerinden oluşan BS sisteminin, (1.142-1.143) eşitliklerinden oluşan bir ilerleyen dalga çözümü olduğu verilmiştir. (1.142-1.143) eşitliklerinde

$$x_0 = 0, c = \sqrt{\frac{22}{3}} \text{ ve } g = \frac{15}{11}$$

seçimleri yapılırsa, BS sistemi

$$\eta(x, t) = \frac{5}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{15}{44}} \left( x - \sqrt{\frac{22}{3}} t \right) \right] \quad (4.37)$$

$$u(x, t) = 2\sqrt{\frac{3}{22}} (\eta(x, t) + 1) \quad (4.38)$$

formunda bir ilerleyen dalga çözümüne sahip olur. (4.37) çözümü; genliği  $5/2$ , hızı  $\sqrt{22/3}$ , tepe noktası  $x = 0$  noktasına karşılık gelen ve konum ekseninde soldan sağa doğru ilerleyen bir dalgaya karşılık gelirken, (4.38) çözümü; genliği  $2\sqrt{3/22}$ , hızı  $\sqrt{22/3}$ , tepe noktası  $x = 0$  noktasına karşılık gelen ve konum ekseninde soldan sağa doğru ilerleyen bir dalgaya karşılık gelmektedir. Ayrıca (4.37-4.38) eşitliklerinde  $t = 0$  alındığında

$$\eta(x, 0) = \frac{5}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{15}{44}} (x) \right) \quad (4.39)$$

$$u(x, 0) = 2\sqrt{\frac{3}{22}} (\eta(x, 0) + 1) \quad (4.40)$$

başlangıç şartı elde edilir.

İlk olarak program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında  $\Delta t = 0.001$  ve farklı  $N$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$ 'nin hata normları sırasıyla Tablo 4.9 ve Tablo 4.10'da verilmiştir. Tablo 4.9 ve Tablo 4.10 incelendiğinde, sabit  $\Delta t$  zaman adımı için  $N$  değeri arttırıldığında  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının düzenli olarak azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.9:  $\eta_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.20051	0.14115	800	0.01501	0.00952
300	0.04880	0.03384	900	0.01478	0.00934
400	0.02481	0.01681	1000	0.01465	0.00923
500	0.01854	0.01219	1250	0.01450	0.00912
600	0.01637	0.01056	1500	0.01444	0.00908
700	0.01545	0.00986	1750	0.01442	0.00906

Tablo 4.10:  $u_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.17704	0.12027	800	0.01143	0.00742
300	0.04127	0.02836	900	0.01124	0.00727
400	0.01991	0.01370	1000	0.01113	0.00718
500	0.01443	0.00972	1250	0.01100	0.00708
600	0.01257	0.00832	1500	0.01096	0.00705
700	0.01180	0.00772	1750	0.01094	0.00703

Bu sefer program  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $N = 1000$  ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılmış ve  $\eta(x, t)$ ,  $u(x, t)$  ifadelerinin sayısal sonuçları bulunarak  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Tablo 4.11 ve Tablo 4.12'de verilmiştir. Her iki tablo incelendiğinde, ilk duruma benzer olarak konum aralığı bölünme sayısı sabit alınarak zaman artımı değeri küçültüldüğünde de hata normlarının sürekli azaldığı görülebilir.

Tablo 4.11:  $\eta_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

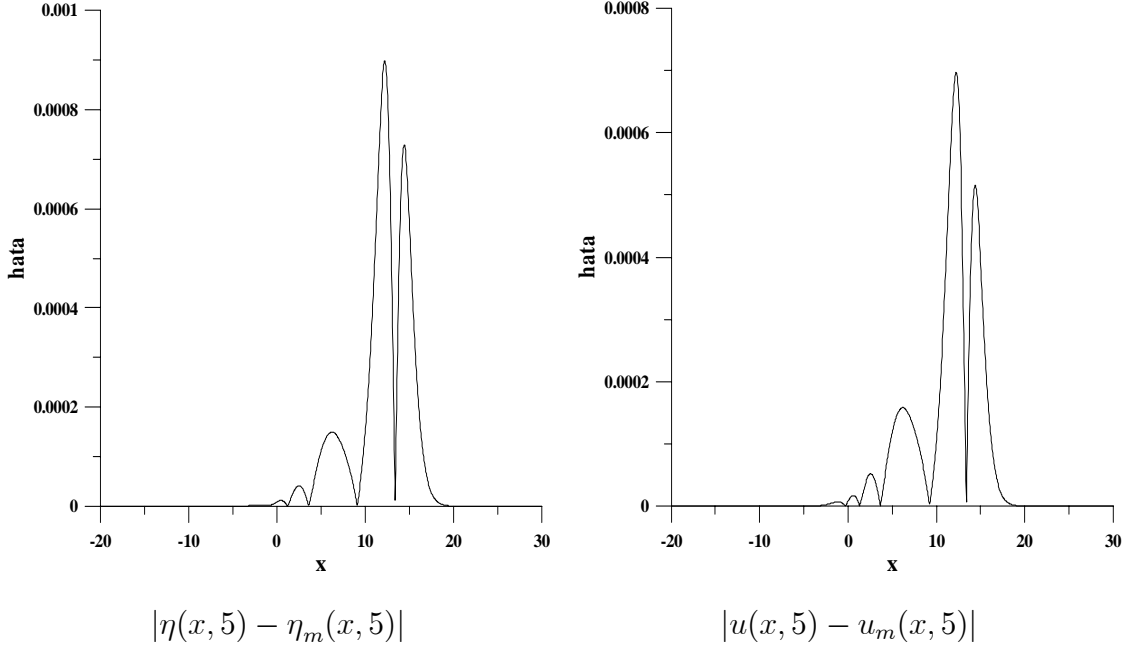
$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	1991.54257	1122.12663	0.02	5.70893	3.58373
0.25	743.53960	455.22680	0.01	1.42889	0.89713
0.2	506.20863	312.97567	0.005	0.35760	0.22455
0.1	138.40531	86.58901	0.0025	0.08967	0.05634
0.05	35.43716	22.23462	0.002	0.05752	0.03615
0.025	8.91349	5.59509	0.001	0.01465	0.00923

Tablo 4.12:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	1516.42076	861.22651	0.02	4.32998	2.78201
0.25	564.12607	351.93204	0.01	1.08377	0.69641
0.2	383.99748	242.25510	0.005	0.27124	0.17432
0.1	104.97702	67.17363	0.0025	0.06803	0.04375
0.05	26.87765	17.25638	0.002	0.04364	0.02808
0.025	6.76050	4.34330	0.001	0.01113	0.00718

Konum aralığı bölünme sayısı olarak 1000, zaman artımı olarak 0.01 seçimleriyle  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığı için  $t = 5$  anındaki hata (tam çözüm–sayısal çözüm) oluşumu, Şekil 4.5’de  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  için analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkın mutlak değerinin grafiği çizilerek gösterilmiştir. Her iki grafikte de görüldüğü gibi, hata  $x = 15$  civarında oluşmaktadır. Maksimum hatanın konum aralığının başında veya sonunda değilde konum aralığının orta bölgelerinde oluşması sebebiyle, kullanılan sınır şartlarının maksimum hatanın oluşmasındaki etkisinin az olduğu söylenilebilir.



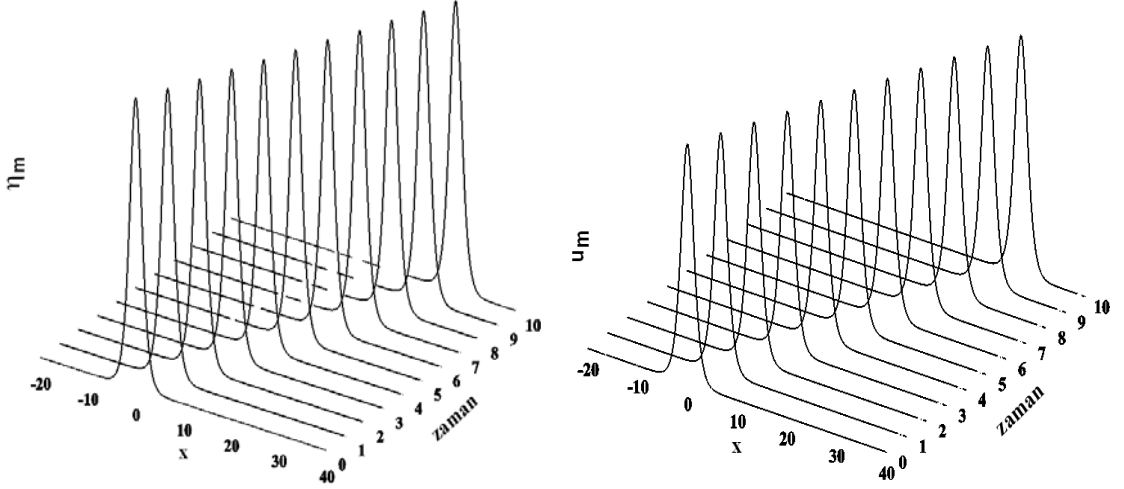


Şekil 4.5:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki |Analitik – Sayısal| çözüm

$N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 60$  seçimleri yapılarak program  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılıp bazı zamanlardaki  $\eta_m$  ve  $u_m$  sayısal çözümleri Şekil 4.6'da verilmiştir. Grafiklerde çizilen  $\eta_m$  ve  $u_m$  sayısal çözümleri,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  ve  $t = 10$  zamanında tepe noktası  $x = 27.04$  konumunda olacak şekilde konum ekseninde ilerleyen dalgaya karşılık gelmektedir.  $t = 0$  anında  $\eta_m$  için oluşan dalganın genliği 2.5 ve  $u_m$  için oluşan dalganın genliği  $2\sqrt{3/22}$  olmaktadır. Bununla birlikte  $t = 0$  anında,  $u_m$  sayısal çözümünü sabit değerden dolayı

$$2\sqrt{\frac{3}{22}} \left( \frac{5}{2} + 1 \right) \approx 2.5849$$

maksimum değerini almaktadır.  $t = 10$  zamanına kadar geçen sürede, dalgaların tepe noktalarının aldığı minimum ve maksimum değerler ise sırasıyla  $\eta_m$  için 2.4984, 2.5 ve  $u_m$  için ise 2.5838, 2.5849 olarak ölçüldüğünden, zaman içinde dalgaların şekillerinde bir bozulma olmasada dalgaların tepe noktalarının aldığı değerlerde bir miktar bozulma olmaktadır.



Şekil 4.6:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 60$  için sayısal çözümler

#### 4.2.2 İki ilerleyen dalganın çarpışması

Bu bölümde,  $t = 0$  anında oluşan iki dalganın zaman içindeki hareketleri RB, KB ve BS sistemleri için ayrı ayrı incelenecektir.

##### RB sistemi

(1.108-1.109) denklemlerinden oluşan RB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü (1.144-1.145) eşitlikleri ile verilmiştir. (1.144-1.145) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & c_1 &= 1, & g_1 &= 6, \\ x_2 &= -10, & c_2 &= \frac{1}{3}, & g_2 &= 6, \end{aligned}$$

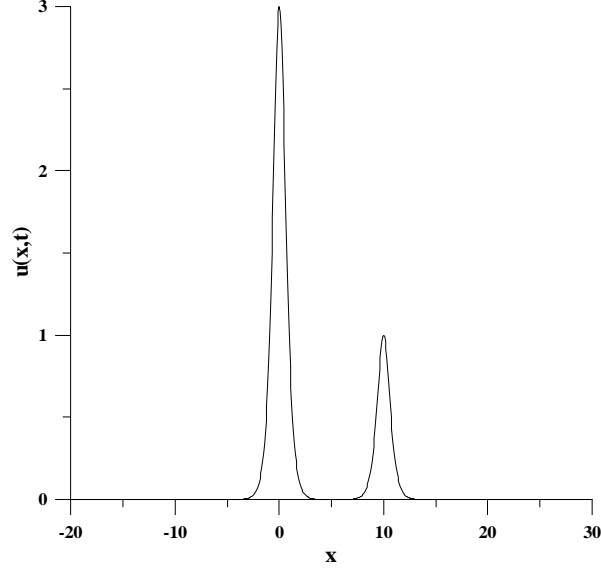
seçimleri yapılırsa, RB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü

$$\eta(x, 0) = -1, \quad (4.41)$$

$$u(x, 0) = 3\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + \text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}(x-10)\right) \quad (4.42)$$

formunda bir başlangıç durumuna sahip olur. (4.42) eşitliği; genlikleri 3, 1, hızları 1, 1/3 olan ve tepe noktaları  $x = 0$ ,  $x = 10$  konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın konum eksenindeki hareketini modellemektedir.

(4.42) ile verilen başlangıç şartı Şekil 4.7’de çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, genlik değeri 3 olan büyük dalganın tepe noktası  $x = 0$  konumuna ve genlik değeri 1 olan küçük dalganın tepe noktası ise  $x = 10$  konumuna karşılık gelmektedir.

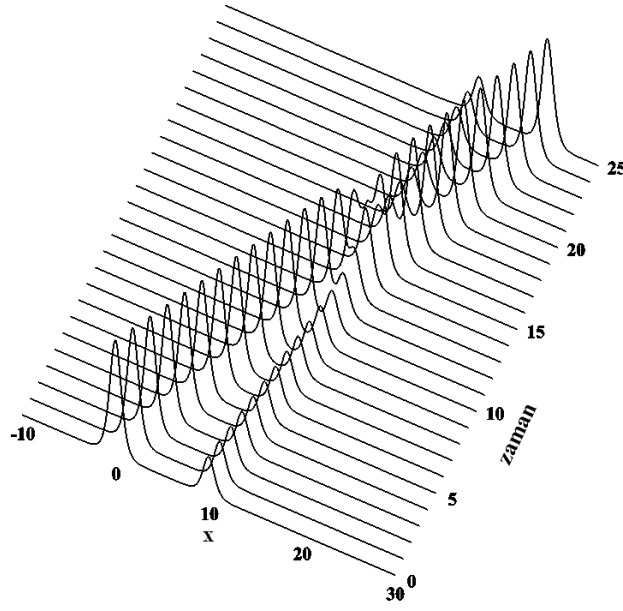


Şekil 4.7:  $t = 0$  anındaki dalgaların durumu

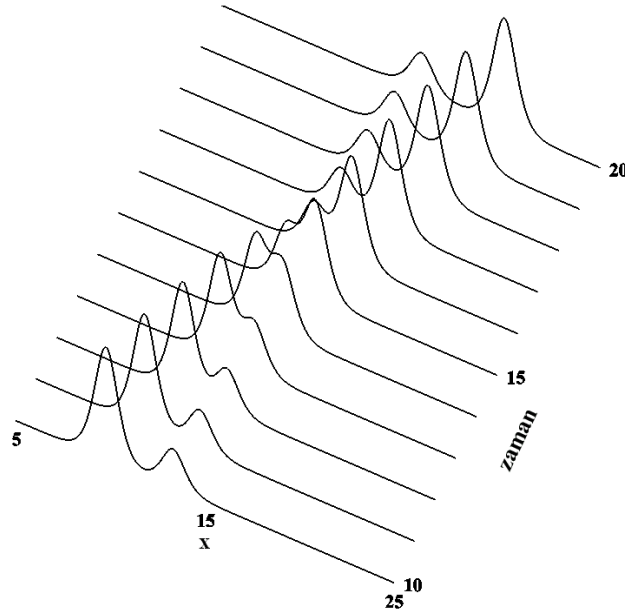
(4.42) eşitliği ile verilen ve Şekil 4.7’de çizilerek gösterilen başlangıç şartının zamanla hareketi Şekil 4.8’de gösterilmiştir. Şekil 4.8,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 30$  değerleri kullanılarak,  $t = 0$  zamanından  $t = 25$  zamanına kadar dalganın hareketini göstermektedir. Şekil 4.8 incelendiğinde dalgaların şekillerinde çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında bir bozulma olmamasına rağmen,  $t = 0$  anında oluşan iki dalganın tepe noktaları  $x = 0$  ve  $x = 10$  konumlarında ve genlikleri sırasıyla 3 ve 1 değerlerinde iken,  $t = 25$  anında büyük dalganın tepe noktası  $x = 24.55$  konumuna ve genliği 2.7433 değerine ve küçük dalganın tepe noktası  $x = 17.2$  konumuna ve genliği 0.9854 değerine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla çarpışma işleminden sonra dalgaların genliklerinde bir miktar bozulma gerçekleşmektedir.

Şekil 4.8’de aynı yönde harekete başlayan iki dalgadan bir süre sonra arkadan gelen hızlı dalganın önde olan dalgaya yetişmesi ile çarpışma işlemi başlamış ve bir

süre sonra hızlı dalganın öne geçmesi ile de çarpışma işlemi sona ermiştir. Bu durumu daha iyi görebilmek için çarpışmanın başladığı ve bittiği zamanlar arasında dalgaların durumları Şekil 4.9'da tekrar verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi çarpışma,  $t = 10$  zamanı civarında başlamakta ve  $t = 17$  civarında son bulmaktadır.



Şekil 4.8:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için sayısal çözümler



Şekil 4.9:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için çarpışma anlarındaki sayısal çözümler

### KB sistemi

KB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü (1.146-1.147) eşitlikleri ile verilmiştir. Eşitliklerde

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & c_1 &= 1, & g_1 &= 3, \\ x_2 &= -10, & c_2 &= \frac{1}{2}, & g_2 &= 2, \end{aligned}$$

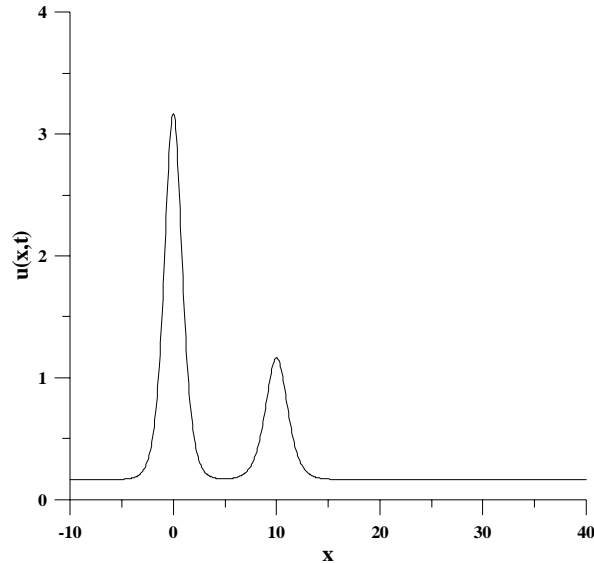
seçimleri yapıldığında KB sisteminin ilerleyen dalga çözümü için

$$\eta(x, 0) = -1 \quad (4.43)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6} + 3\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-10)\right) \quad (4.44)$$

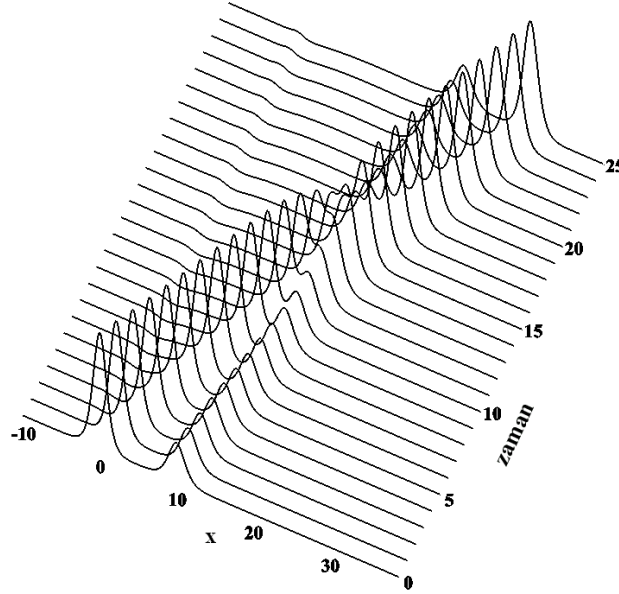
formunda bir başlangıç durumu elde edilir. (4.44) eşitliği; genlikleri 3, 1, hızları 1, 1/2 olan ve tepe noktaları  $x = 0$ ,  $x = 10$  konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın konum eksenindeki hareketini modellemektedir.

(4.44) eşitliği ile verilen başlangıç şartı Şekil 4.10'da çizilmiştir. Şekil 4.10'da görüldüğü gibi, dalgaların tepe noktaları  $x = 0$  ve  $x = 10$  konumlarına karşılık gelmektedir ve dalgalardan büyüğünün genliği 3, küçük dalganın genliği 1 değerlerini almaktadır. Buna karşılık dalgaların tepe noktalarının aldıkları değerler, ise analitik başlangıç şartından gelen 1/6 değeri ile sırası ile 19/6 ve 7/6 olmaktadır.



Şekil 4.10:  $t = 0$  anındaki dalgaların durumu

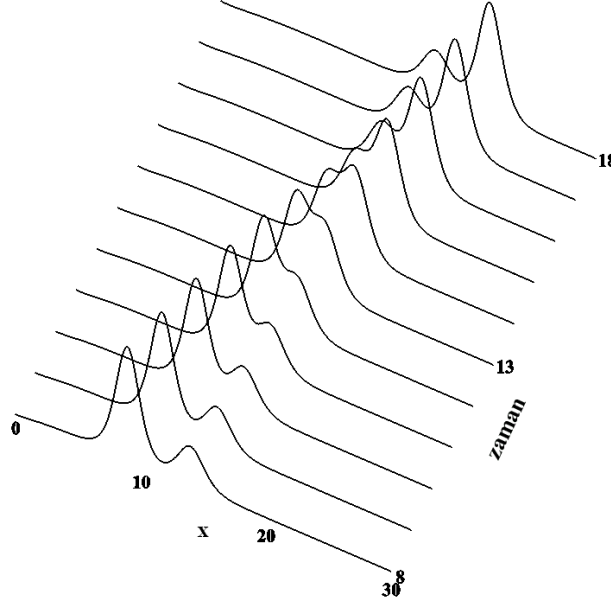
(4.44) eşitliği ile verilen ve Şekil 4.10'da çizilerek gösterilen başlangıç şartının zamanla hareketi Şekil 4.11'de gösterilmiştir. Şekil 4.11,  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-10 \leq x \leq 40$  konum aralığı kullanılarak  $t = 0$  zamanından  $t = 25$  zamanına kadar dalganın hareketini göstermektedir.  $t = 0$  anında oluşan iki dalganın tepe noktalarının maksimum değerleri sırasıyla  $19/6 \approx 3.1667$  ve  $7/6 \approx 1.1667$  iken,  $t = 25$  zamanında büyük dalganın tepe noktası  $x = 29.45$  noktasına ve  $3.0574$  değerine, küçük dalganın tepe noktası ise  $x = 20.75$  noktasına ve  $1.1604$  değerine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla çarpışmanın gerçekleştiği durumdan sonra, dalgaların şekillerinde bir bozulma olmasa da, tepe noktalarının aldığı maksimum değerlerde, diğer bir ifade ile dalgaların genliklerinde ufakta olsa bozulmalar oluşmaktadır.



Şekil 4.11:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-10 \leq x \leq 40$  için sayısal çözümler

Şekil 4.11'de aynı yönde harekete başlayan iki dalga, bir süre sonra arkadan gelen hızlı dalganın diğerine yetişmesi ile çarpışmışlar ve bir süre sonra hızlı dalganın öne geçmesi sonucunda büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada olacak şekilde hareketlerine devam etmişlerdir. Çarpışma durumunu daha iyi görebilmek için çarpışmanın başladığı ve bittiği zamanlar arasındaki dalgaların durumları, Şekil 4.12'de tekrar verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi çarpışma  $t = 10$  zamanı

civarında başlamakta ve  $t = 17$  civarında son bulmaktadır.



Şekil 4.12:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-10 \leq x \leq 40$  için çarpışma anlarındaki sayısal çözümler

### BS sistemi

(1.140-1.141) denklemlerinden oluşan BS sistemi için iki ilerleyen dalga çözümü (1.148-1.149) olarak verilmişti. (1.148-1.149) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & c_1 &= \frac{7}{2}, & g_1 &= 1, \\ x_2 &= -15, & c_2 &= 2, & g_2 &= 1, \end{aligned}$$

seçimleri yapılırsa (1.140-1.141) denklemlerinden oluşan BS sistemi için iki ilerleyen dalga çözümünün

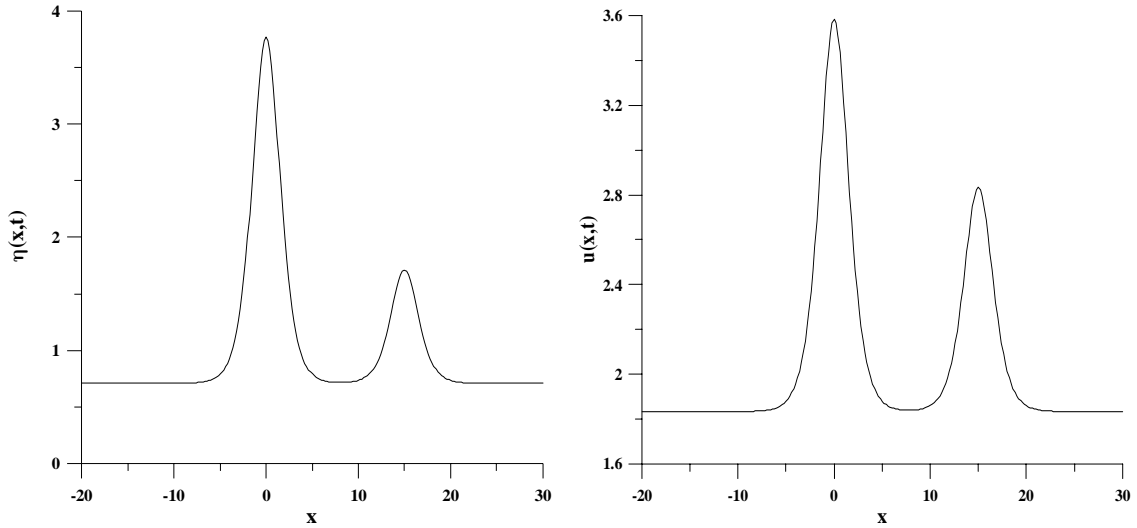
$$\eta(x, 0) = \frac{17}{24} + \frac{49}{16} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}(x-15)\right) \quad (4.45)$$

$$u(x, 0) = \frac{11}{6} + \frac{7}{4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}(x-15)\right) \quad (4.46)$$

formunda başlangıç şartı elde edilir. (4.45) eşitliği; genlikleri  $49/16$ ,  $1$ , hızları  $7/2$ ,  $2$  olan ve tepe noktaları  $x = 0$ ,  $x = 15$  konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın konum eksenindeki hareketini modellerken, (4.46) eşitliği; genlikleri  $7/4$ ,  $1$ , hızları

$7/2$ ,  $2$  olan ve tepe noktaları  $x = 0$ ,  $x = 15$  konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın konum eksenindeki hareketini modellemektedir.

(4.45-4.46) ile verilen başlangıç şartı Şekil 4.13'de çizilmiştir. İlk şekilde, tepe noktası  $x = 0$  konumuna karşılık gelen,  $49/16$  genliğine sahip bir büyük dalga ile tepe noktası  $x = 15$  konumuna karşılık gelen, genliği  $1$  olan bir küçük dalgadan oluşan iki dalga görülmektedir. Bununla birlikte, (4.45) eşitliğindeki sabit  $17/24$  değerinden dolayı büyük dalganın tepe noktasının aldığı değer  $181/48 \approx 3.7708$ , küçük dalganın tepe noktasının aldığı değer  $41/24 \approx 1.7083$  olmaktadır. İkinci şekilde ise, tepe noktası  $x = 0$  konumuna karşılık gelen,  $7/4$  genliğine sahip bir büyük dalga ile tepe noktası  $x = 15$  konumuna karşılık gelen, genliği  $1$  olan küçük dalgadan oluşan iki dalga görülmektedir. Benzer olarak ikinci şekilde, (4.46) eşitliğindeki  $11/6$  sabit değerinden dolayı büyük dalganın tepe noktası  $43/12 \approx 3.5833$  değerine ve küçük dalganın tepe noktası ise  $17/6 \approx 2.8333$  değerine karşılık gelmektedir.

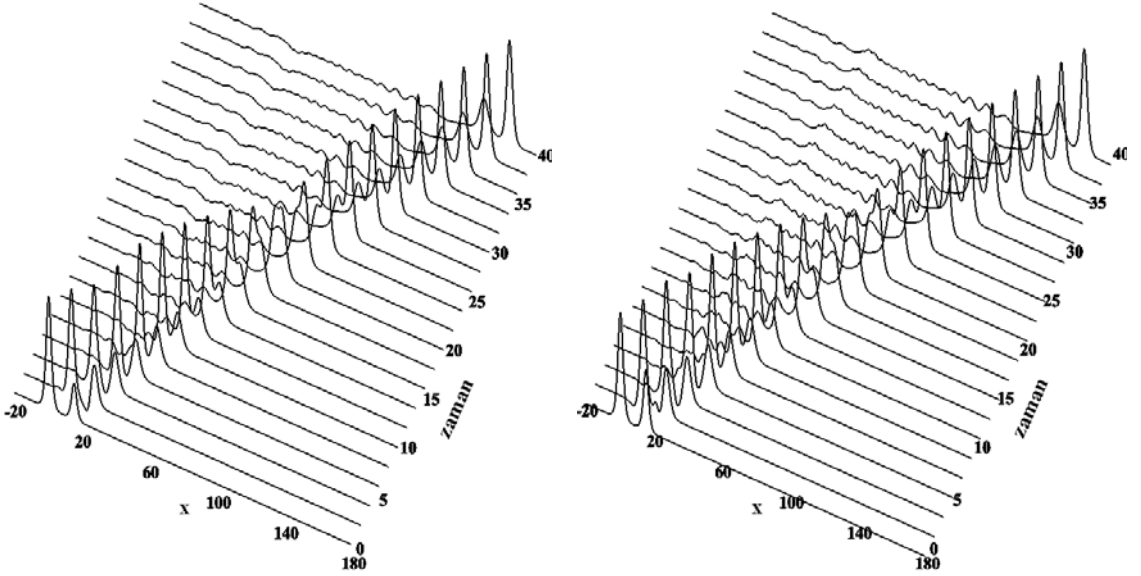


Şekil 4.13:  $t = 0$  anındaki dalgaların durumu

(4.45-4.46) eşitlikleri ile verilen ve Şekil 4.13'de çizilerek gösterilen başlangıç şartının zamanla hareketi, Şekil 4.14'de gösterilmiştir. Şekil 4.14, konum aralığı bölünme sayısı  $N = 1000$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 180$  değerleri kullanılarak,  $t = 0$  zamanından  $t = 40$  zamanına kadar

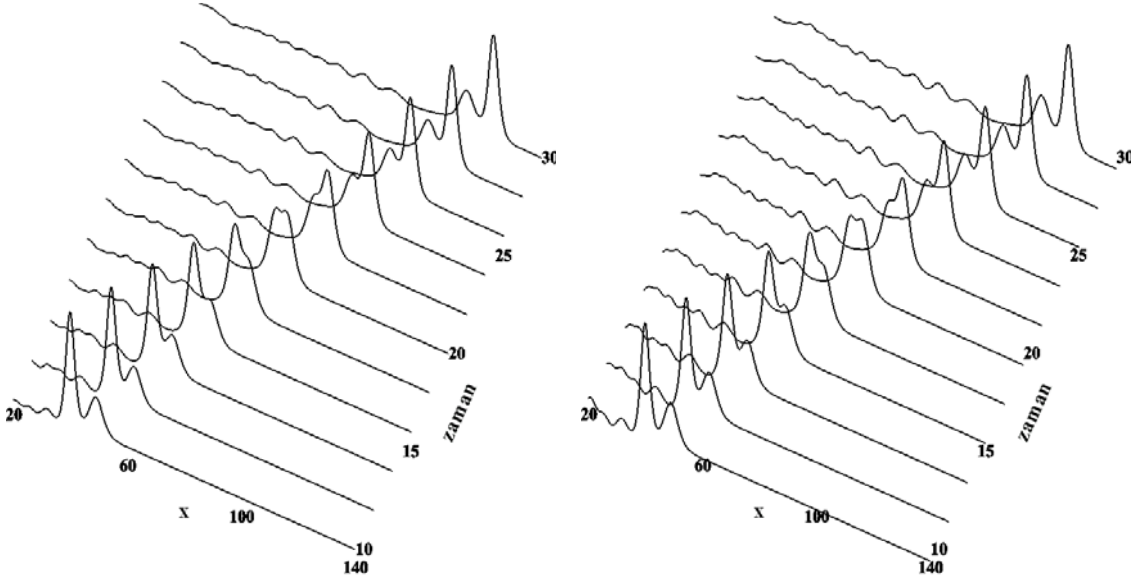


dalganın hareketini göstermektedir.  $t = 0$  anında  $\eta_m$  için büyük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 0$  konumunda ve 3.7708 değerinde, küçük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 15$  konumunda ve 1.7083 değerinde iken,  $t = 40$  anında  $\eta_m$  için büyük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 163.6$  konumunda ve 3.5390 değerinde, küçük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 148.6$  konumunda ve 1.6268 değerindedir. Benzer şekilde,  $t = 0$  anında  $u_m$  için büyük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 0$  konumunda ve 3.5833 değerinde, küçük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 10$  konumunda ve 2.8333 değerinde iken,  $t = 40$  anında  $u_m$  için büyük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 163.6$  konumunda ve 3.5471 değerinde, küçük genlikli dalganın tepe noktası  $x = 148.6$  konumunda ve 2.4761 değerinde olacak şekilde dalgalar zaman içinde konum ekseninde hareket etmektedir.



Şekil 4.14:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 180$  için  $\eta_m$ ,  $u_m$  sayısal çözümleri

Şekil 4.14 deki çarpışma işlemi daha iyi görebilmek için, çarpışmanın başladığı ve bittiği zamanlar arasındaki dalgaların durumları Şekil 4.15’de verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi, çarpışma  $t = 10$  zamanı civarında başlamakta ve yaklaşık  $t = 30$  civarında son bulmaktadır.



Şekil 4.15:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 180$  için çarpışma anlarındaki  $\eta_m$ ,  $u_m$  sayısal çözümleri

### 4.2.3 Solitary dalga çözümü

Whitham ve BS sistemlerinin solitary dalga formunda analitik çözümleri olduğundan, hata normları kullanılarak metodun doğruluğu test edilecektir. Ayrıca dalgaların zaman içindeki hareketleri grafikler çizilerek incelenecektir.

#### Whitham sistemi

(1.106-1.107) denklemlerinden oluşan Whitham sisteminin solitary dalga çözümü (1.130-1.131) eşitlikleri ile verilmişti. Eşitliklerde  $x_0 = 0$  alınırsa, Whitham sisteminin

$$\eta(x, t) = -\frac{7}{4} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{7}}{2} \left( x - \frac{\sqrt{15}}{15} t \right) \right] \quad (4.47)$$

$$u(x, t) = \frac{7\sqrt{15}}{10} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{7}}{2} \left( x - \frac{\sqrt{15}}{15} t \right) \right] \quad (4.48)$$

formunda solitary dalga çözümü elde edilir. (4.47) eşitliği; genliği  $-\frac{7}{4}$ , hızı  $\frac{\sqrt{15}}{15}$  ve tepe noktası  $x = 0$  konumuna karşılık gelen solitary dalgasının konum eksenindeki hareketini modellerken, (4.48) eşitliği; genliği  $\frac{7\sqrt{15}}{10}$ , hızı  $\frac{\sqrt{15}}{15}$  ve tepe noktası

$x = 0$  konumuna karşılık gelen solitary dalgasının konum eksenindeki hareketini modellemektedir.

(4.47-4.48) eşitliklerinde  $t = 0$  alınırsa, Whitham sistemi için

$$\eta(x, 0) = -\frac{7}{4}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \quad (4.49)$$

$$u(x, 0) = \frac{7\sqrt{15}}{10}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \quad (4.50)$$

başlangıç şartı bulunur.

İlk olarak program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında, zaman artımı olarak  $\Delta t = 0.001$  seçimi ve konum aralığı bölünme sayısı olan  $N$ 'nin farklı değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$ 'nin sayısal çözümleri bulunmuş ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Tablo 4.13 ve Tablo 4.14'de verilmiştir. Tablo 4.13 ve Tablo 4.14 incelendiğinde, sabit bir zaman adım uzunluğu için konum aralığı bölünme sayısı arttırıldığında  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının düzenli olarak azaldığı görülebilir.

Tablo 4.13:  $\eta_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	3.08236	3.42673	800	0.03104	0.03414
300	1.13315	1.39820	900	0.01783	0.01776
400	0.39765	0.60063	1000	0.01091	0.01258
500	0.14850	0.21330	1250	0.00478	0.00741
600	0.07689	0.11590	1500	0.00217	0.00474
700	0.04681	0.06245	1750	0.00118	0.00300

Tablo 4.14:  $u_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	2.30707	2.18825	800	0.00692	0.00800
300	0.37744	0.41911	900	0.00427	0.00493
400	0.11663	0.13101	1000	0.00275	0.00322
500	0.04667	0.05200	1250	0.00106	0.00126
600	0.02228	0.02555	1500	0.00047	0.00057
700	0.01195	0.01362	1750	0.00024	0.00026

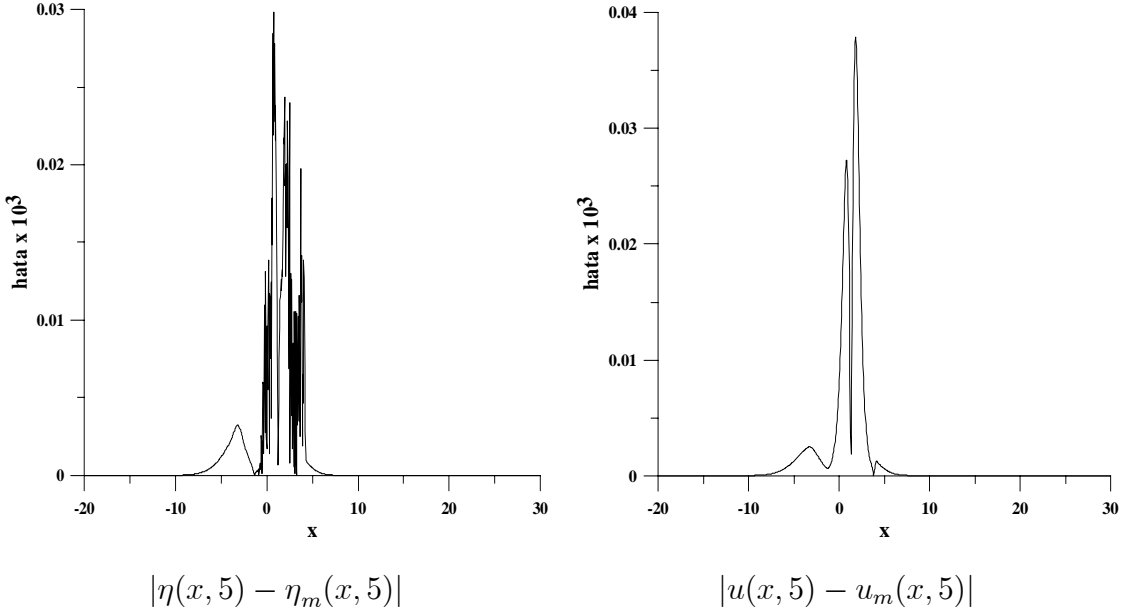
Program bu sefer aynı konum aralığında,  $N = 1000$  sabit konum aralığı bölünme sayısı ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  değerlerinin sayısal sonuçları bulunmuş ve hata normları sırasıyla Tablo 4.15 ve Tablo 4.16'da verilmiştir. Tablo 4.15 ve Tablo 4.16 incelendiğinde,  $\Delta t$  zaman artım değeri sabit alınarak  $N$  değerinin arttırıldığı durum gibi,  $N$  değeri sabit tutularak  $\Delta t$  zaman artımı değeri azaltıldığında da hata normları değerlerinin sürekli azaldıkları görülebilir.

Tablo 4.15:  $\eta_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	59.59443	52.20236	0.02	0.10183	0.08999
0.25	15.14380	14.85574	0.01	0.02914	0.02981
0.2	9.74680	10.11016	0.005	0.01380	0.01604
0.1	2.48213	2.42984	0.0025	0.01134	0.01336
0.05	0.61655	0.56113	0.002	0.01114	0.01302
0.025	0.15693	0.14804	0.001	0.01091	0.01258

Tablo 4.16:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	87.58037	84.19331	0.02	0.14825	0.14292
0.25	22.58450	21.67556	0.01	0.03871	0.03787
0.2	14.50889	13.92448	0.005	0.01152	0.01181
0.1	3.64705	3.49906	0.0025	0.00461	0.00509
0.05	0.91463	0.87806	0.002	0.00380	0.00429
0.025	0.23035	0.22172	0.001	0.00275	0.00322

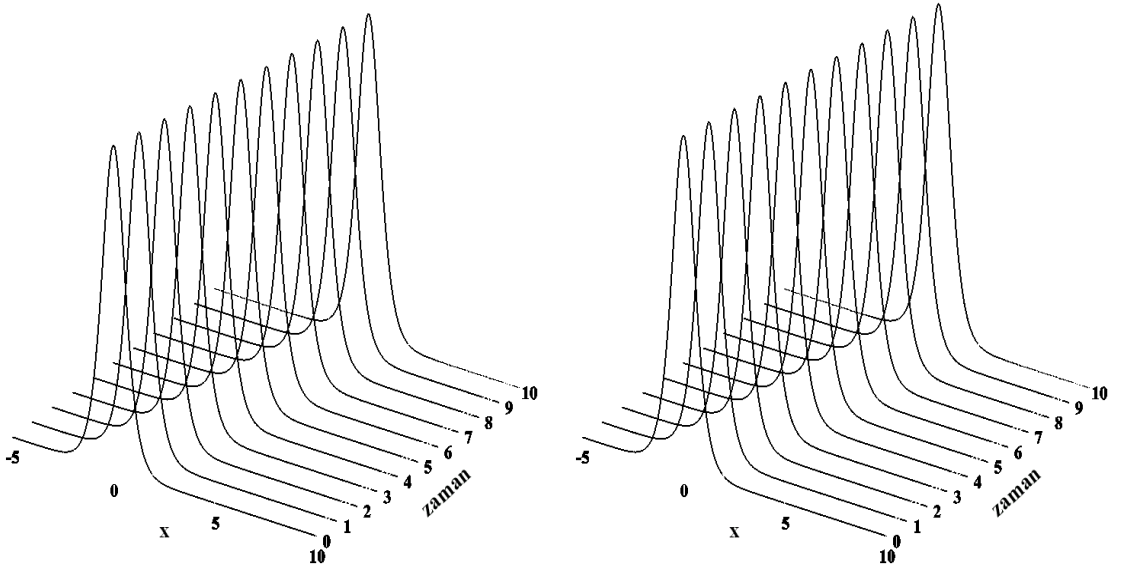


Şekil 4.16:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki |Analitik – Sayısal| çözüm

$N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı olarak  $-20 \leq x \leq 30$  seçimleri ile program çalıştırılarak  $t = 5$  anındaki hata (tam çözüm–sayısal çözüm) oluşumu, Şekil 4.16’da  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  için analitik ve sayısal çözüm arasındaki farkın mutlak değerinin grafikleri çizilerek gösterilmiştir. Her iki grafikten de görülebileceği

gibi, maksimum hata konum aralığının orta noktalarına karşılık geldiğinden, sayısal çözümleri bulmak için kullanılan sınır şartlarının maksimum hata oluşumuna bir etkisi yoktur veya bu etki çok azdır.

Konum aralığı bölünme sayısı  $N = 1000$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığı seçimleri ile program  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak, belli zamanlardaki sayısal çözümler Şekil 4.17'de verilmiştir.  $\eta_m$  sayısal çözümünün değerleri negatif olduğundan grafiğin anlaşılır olması için sayısal çözümün mutlak değeri alınmıştır. Her iki grafikte de,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan tek bir dalga,  $t = 10$  zamanında tepe noktası  $x = 2.6$  civarında olacak şekilde, şeklinde bir bozulma olmadan konum ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir. Dalgaların şekillerinde bir bozulma olmamasına rağmen,  $0 \leq t \leq 10$  zaman aralığında dalgaların tepe noktaları  $\eta_m$  için en küçük  $-1.75$ , en büyük  $-1.7481$  değerlerini alırken,  $u_m$  için en düşük  $2.7081$  en büyük  $2.7111$  değerlerini almaktadır. Dolayısıyla  $t = 0$  anında oluşan iki dalganın genlikleri ise sırayla  $-1.75$  ve  $2.7111$  olduğundan, zaman içinde dalgaların genliklerinde bir miktar bozulma gerçekleşmektedir.



Şekil 4.17:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $|\eta_m|$ ,  $u_m$  sayısal çözümleri

### BS sistemi

(1.136-1.137) denklemlerinden oluşan BS sisteminin solitary dalga çözümü (1.138-1.139) eşitlikleri ile verilmiştir. Eşitliklerde  $x_0 = 0$  alındığında, BS sisteminin

$$\eta(x, t) = \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{2\sqrt{6}}{3} t \right) \right] \quad (4.51)$$

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{2\sqrt{6}}{3} t \right) \right] \quad (4.52)$$

formundaki solitary dalga çözümüne ve (4.51-4.52) eşitliklerinde  $t = 0$  alındığında ise

$$\eta(x, 0) = \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \quad (4.53)$$

$$u(x, 0) = \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \quad (4.54)$$

formundaki başlangıç şartına ulaşılır. (4.51) eşitliği; genliği  $\frac{3}{2}$ , hızı  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  ve tepe noktası  $x = 0$  konumuna karşılık gelen solitary dalgasının konum ekseninde soldan sağa doğru hareketini modellerken, (4.52) eşitliği; genliği  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , hızı  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  ve tepe noktası  $x = 0$  konumuna karşılık gelen solitary dalgasının konum ekseninde soldan sağa doğru hareketini modellemektedir.

(1.136-1.137) denklemlerinden oluşan BS sisteminin sayısal çözümünün doğruluğunu solitary dalga test problemi ile kontrol etmek için program,  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığında,  $\Delta t = 0.001$  ve farklı  $N$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$ 'nin sayısal çözümleri bulunarak  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla, Tablo 4.17 ve Tablo 4.18'de verilmiştir. Tablo 4.17 ve Tablo 4.18 incelendiğinde, sabit bir zaman artımı için konum artım uzunluğu azaldıkça hata normlarının değerlerinin düzenli olarak azaldığı görülebilir.

Tablo 4.17:  $\eta_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.21595	0.16483	800	0.00416	0.00305
300	0.04254	0.03279	900	0.00391	0.00284
400	0.01534	0.01192	1000	0.00376	0.00271
500	0.00817	0.00631	1250	0.00361	0.00257
600	0.00568	0.00432	1500	0.00355	0.00252
700	0.00465	0.00346	1750	0.00353	0.00250

Tablo 4.18:  $u_m$  için  $\Delta t = 0.001$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$N$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
200	0.20785	0.15308	800	0.00352	0.00263
300	0.04055	0.03080	900	0.00329	0.00242
400	0.01427	0.01100	1000	0.00315	0.00231
500	0.00734	0.00570	1250	0.00301	0.00217
600	0.00495	0.00381	1500	0.00296	0.00213
700	0.00398	0.00301	1750	0.00294	0.00211

Sayısal çözümün doğruluğunu göstermek için bu sefer program, aynı konum aralığında,  $N = 1000$  ve çeşitli  $\Delta t$  değerleri için  $t = 5$  zamanına kadar çalıştırılarak,  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$ 'nin sayısal çözümleri bulunarak,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Tablo 4.19 ve Tablo 4.20'de verilmiştir. Tablo 4.19 ve Tablo 4.20 incelendiğinde, sabit zaman artım uzunluğu için, konum aralığı bölünme sayısının arttırıldığı duruma benzer olarak, sabit konum aralığı artım uzunluğu için, zaman artım uzunluğu azaltıldığında da  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının azaldığı görülebilir.



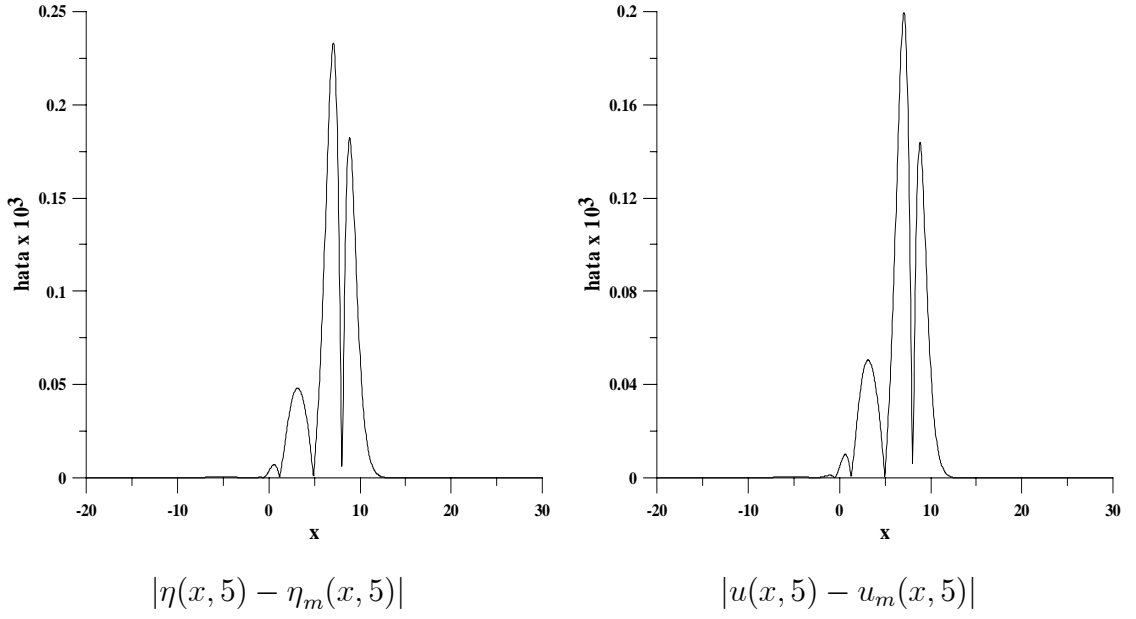
Tablo 4.19:  $\eta_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	593.81162	401.45776	0.02	1.31542	0.93163
0.25	187.06537	131.05560	0.01	0.32940	0.23333
0.2	123.70093	87.05255	0.005	0.08271	0.05863
0.1	32.37611	22.90097	0.0025	0.02103	0.01494
0.05	8.19130	5.79847	0.002	0.01363	0.00970
0.025	2.05434	1.45485	0.001	0.00376	0.00271

Tablo 4.20:  $u_m$  için  $N = 1000$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  olmak üzere  $t = 5$  zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

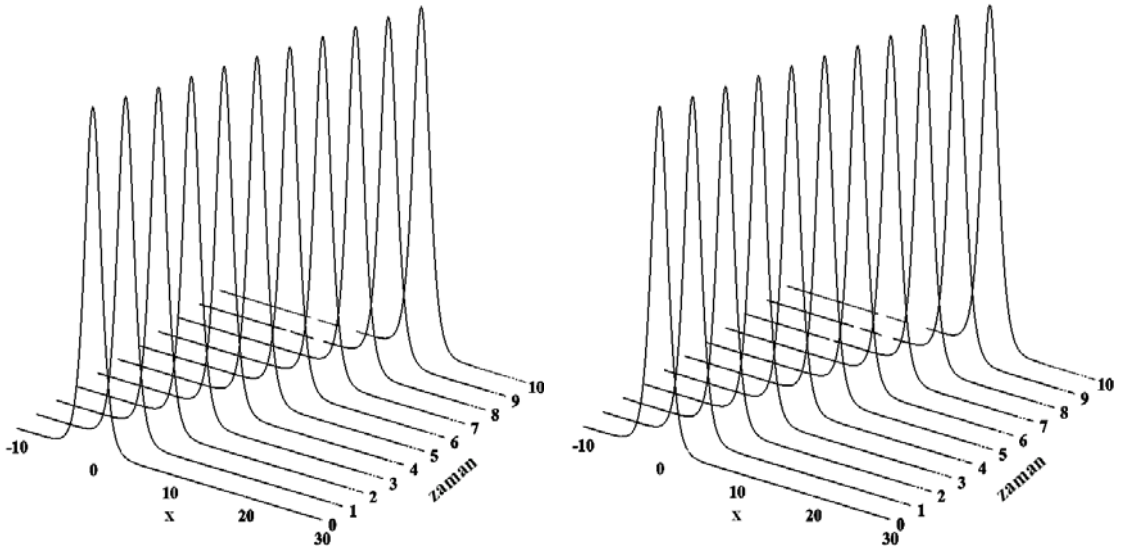
$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$	$\Delta t$	$L_2 \times 1000$	$L_\infty \times 1000$
0.5	496.55211	341.48002	0.02	1.10007	0.79691
0.25	156.42449	111.98604	0.01	0.27548	0.19957
0.2	103.44235	74.40524	0.005	0.06917	0.05013
0.1	27.07513	19.58789	0.0025	0.01759	0.01277
0.05	6.85021	4.96123	0.002	0.01141	0.00828
0.025	1.71801	1.24452	0.001	0.00315	0.00231

Konum aralığı bölünme sayısı  $N = 1000$ , zaman artımı  $\Delta t = 0.01$  ve konum aralığı  $-20 \leq x \leq 30$  seçimleri altında  $t = 5$  anındaki hata (tam çözüm–sayısal çözüm) oluşumu, Şekil 4.18’de  $\eta(x, t)$  ve  $u(x, t)$  için analitik ve sayısal çözüm arasındaki farkın mutlak değerinin grafiği çizilerek gösterilmiştir. Her iki grafik incelendiğinde, maksimum hatanın konum aralığının orta kısımlarında oluştuğu görülebilir. Maksimum hatanın konum aralığının başında veya sonunda olmamasından dolayı da, sayısal çözüm araştırılırken kullanılan sınır şartlarının maksimum hata oluşumuna bir etkisi olmadığı söylenilebilir.



Şekil 4.18:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $t = 5$  zamanındaki |Analitik – Sayısal| çözüm

$t = 0$  anında oluşan bir solitary dalgasının  $t = 10$  zamanına kadarki hareketini inceleyebilmek için program  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  konum aralığı için  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılarak, bazı zamanlardaki sayısal çözümler Şekil 4.19’da verilmiştir.



Şekil 4.19:  $N = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $-20 \leq x \leq 30$  için  $\eta_m$ ,  $u_m$  sayısal çözümleri

Şekil 4. 19 daki her iki grafikte de,  $t = 0$  anında tepe noktası  $x = 0$  konumunda olacak şekilde harekete başlayan bir solitary dalgası,  $t = 10$  zamanında tepe noktası  $x = 16.35$  civarında olacak şekilde zaman ilerledikçe şeklinde bir bozulma olmadan konum ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir.  $0 \leq t \leq 10$  zaman aralığında,  $\eta_m$  en küçük 1.4995, en büyük 1.5 değerini alırken,  $u_m$  sayısal sonucu en düşük 1.2243 en büyük 1.2247 değerlerini almaktadır.  $t = 0$  anında oluşan iki solitary dalgasının genlikleri sırayla 1.5 ve 1.2247 olduğundan zaman içinde dalganın genliğinde hemen hemen bir bozulma olmadığı söylenilebilir.

### 4.3 Sonuç

Bu bölümde, kuintik B-spline kolokeyşin metodu BST denklem sisteminin sayısal çözümünü araştırmak için kullanılmıştır. BST denklem sisteminde zaman parçalanması için Crank-Nicolson metodu ve konum aralığının bölünme noktalarında kuintik B-spline eşitlikleri kullanılarak iki denklem sistemi elde edilmiştir. Ulaşılan denklem sistemi kapalı bir sistem olduğundan denklem sistemini çözebilmek için bir iç iterasyon tanımlanmıştır. Whitham, RB, KB ve BS sisteminden türetilen iki sistem olmak üzere toplam beş sistem, BST denklem sistemindeki parametrelerin özel değerleri ile elde edilmiş ve bu beş sistem için sayısal çözümler araştırılmıştır. Bu beş sistemden üçü olan RB, KB sistemleri ve BS sisteminin bir formu için ilerleyen dalga çözümü varken, Whitham sistemi ile BS sisteminin diğer formu için solitary dalga çözümü vardır.

İlk olarak ilerleyen dalga çözümüne sahip olan RB, KB ve BS sisteminin sayısal çözümleri kontrol edilmiştir. Bu test probleminde, zaman artımı değeri sabit tutularak konum artım değeri azaltıldığında veya konum artım değeri sabit tutularak zaman artım değeri azaltıldığında hata normlarında azaldığı veya çok küçük değerlerde sabit kaldığı gözlenmiştir. Çizilen hata grafikleri yardımıyla, oluşan maksimum hatanın dalganın tepe noktası civarında oluştuğu gözlenmiş ve böylece sınırlarda maksimum hata oluşmadığından, sayısal çözüm için seçilen sınır şartlarının hata üzerindeki etkisinin az olduğu sonucuna varılmıştır. Sayısal çözümün verdiği ilerleyen dalganın zaman aralığı arttırılarak hareketi gözlemlendiğinde, zaman arttıkça dalganın şeklinde bir bozulma olmadığı genliğinde ise bir miktar bozulma olduğu görülmüştür.

İkinci test probleminde aynı sistemler için, iki ilerleyen dalganın çarpışması problemi incelenmiştir. Bu test probleminde, her üç denklem sistemi için de genlikleri birbirinden farklı ve farklı konumlara yerleştirilen iki dalganın zaman içindeki hareketi gözlenmiştir. Konum ekseninin ön kısmına yerleştirilen büyük genlikli dalganın, kendisinden daha küçük genlikli olan dalgaya bir süre sonra yetişmesi sonucunda çarpışma işlemi gerçekleşmiştir. Bir müddet sonra, hızlı olan dalganın öne geçmesi sonucunda çarpışma işlemi bittiğinde, dalgaların şekillerinde bir bozulma olmadığı, fakat dalgaların tepe noktalarının aldığı değerlerde bir miktar bozulmanın gerçekleştiği görülmüştür.

Son olarak Whitham sistemi ve BS sisteminin ikinci formu için solitary dalga test problemi üzerinde çalışılmıştır. Her iki denklem sistemi için de, zaman artımı sabitken konum artım uzunluğu azaltıldığında yada konum artım uzunluğu sabitken zaman artım uzunluğu küçültüldüğünde, hata normları değerlerinin de azaldığı görülmüştür. Çizilen hata grafiklerinde maksimum hatanın konum bölgesinin orta kısımlarında olması sebebiyle, sınır şartları seçiminin sayısal çözümden kaynaklanan hataya etkisinin az olduğu sonucuna varılmıştır. Son olarak, zaman arttıkça solitary dalgaların ilerleyişleri incelendiğinde, genliklerinde küçük kayıplar olsada şekillerinde bir bozulma olmadan ilerledikleri belirlenmiştir.

Sonuç olarak, kuintik B-spline kolokeyşin metodu BST denklem sisteminden türetilen sistemlerin sayısal çözümleri için tutarlı sonuçlar verdiği söylenebilir.

## BÖLÜM 5

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada GNLS denklemi, CMKdV denklemi ve BST denklem sisteminin B-spline sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümleri araştırılmış, çözümlerin doğruluğu solitary dalga ve ilerleyen dalga test problemleri kullanılarak gösterilmiştir.

Birinci bölümde; solitary, soliton, ilerleyen dalgalar, lineer olmayan oluşum denklemleri ve korunum kanunları ile ilgili kısa bilgiler verildikten sonra, sonlu elemanlar ve spline kavramları ile birlikte sayısal çözümleri araştırılacak olan GNLS, CMKdV denklemleri ve BST denklem sistemi tanıtılmıştır. GNLS ve CMKdV denklemleri kompleks değerli kısmi türevli diferensiyel denklem olduklarından, reel ve sanal kısımlarına ayrılarak bir kısmi türevli diferensiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür. İkinci bölümde GNLS denkleminin sayısal çözümü araştırılırken hem kübik B-spline kolokeyşin hemde kuintik B-spline kolokeyşin metotları kullanılırken, üçüncü ve dördüncü bölümlerde CMKdV ve BST denklem sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken sadece kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde kübik B-spline kolokeyşin metodunun kullanılmamasının sebebi, kübik B-spline fonksiyonlarının kendisi, birinci ve ikinci türevlerinin bölünme noktalarında sürekli olmasına rağmen, CMKdV ve BST denklem sistemlerinde üçüncü türevli terimlerinin bulunmasıdır. Dördüncü bölümde, BST denklem sistemindeki dört parametre için farklı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri elde edileceğinden, hepsinin sayısal çözümünü araştırmak yerine bunlardan beş tanesinin sayısal çözümü üzerinde çalışılmıştır.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde sırasıyla GNLS, CMKdV ve BST denklem sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılmış ve sayısal çözümlerin doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir. Her bölüm için ilk test probleminde, konum aralığı bölünme sayısı sabitken, zaman artım uzunluğu azaltıldığında yada zaman artımı sabitken konum aralığı bölünme sayısı arttırıldığında, hata normlarında azalması gibi benzer sonuçlar bulunmuştur. Bununla beraber ikinci test problemi olan GNLS denklemi için iki soliton dalgasının çarpışması, CMKdV denklemi için

iki solitary dalgasının çarpışması, RB, KB ve BS sistemleri için iki ilerleyen dalganın çarpışması test problemlerinde farklı durumlarla karşılaşılmıştır. Çarpışma işleminden önce ve çarpışma işleminde sonra her durum için de büyük genlikli ve küçük genlikli dalgaların şekilleri korunmaktadır. Bu durum solitary ve soliton dalgalarının önemli bir özelliğidir. Bununla beraber, ilerleyen ve solitary dalgaları problemlerinde oluşan iki dalganın genliklerinde çarpışma işlemi sonrasında belirgin miktarda bozulma oluşurken, soliton dalgalarının çarpıştığı test probleminde iki dalganın genliklerindeki bozulmanın çok az miktarda olduğu belirlenmiştir. Bu durum da zaten solitary ve soliton dalgaları arasındaki en temel farklılıktır.

Sonuç olarak B-spline kolokeyşin metodu, hem uygulamadaki kolaylığı ve hemde her üç denklem sisteminin sayısal çözümlerinde verdiği iyi sonuçlar nedeniyle, benzer tipteki kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılabilir uygun bir metottur.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Amick, C.J., 1984, Regularity and uniqueness of solutions to the Boussinesq system of equations, *Journal of Differential Equations* 54, 231-247.
- Bona, J.L., Saut, J.-C. and Toland, J.F., 1997, Boussinesq equations for small-amplitude long wavelength water waves (preprint).
- Bona, J.L. and Smith, R., 1976, A model for the two-way propagation of water waves in a channel, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 79, 167-182.
- Bona, J.L. and Chen, M., 1998, A Boussinesq system for two way propagation of nonlinear dispersive waves, *Physica D* 116, 191-224.
- Bona, J.L., Chen, M. and Saut, J.-C., 2002, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: derivation and linear theory, *Journal of Nonlinear Science* 12, 283-318.
- Bona, J.L., Chen, M. and Saut, J.-C., 2004, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media II: the nonlinear theory, *Institute of Physics Publishing-Nonlinearity* 17, 925-952.
- Boussinesq, J.V., 1871, Theorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences* 72, 755-759.
- Calogero, F. and Eckhaus, W., 1987, Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability. I, *Inverse Problems* 3, 229-262.
- Chaohao, G., 1995, *Soliton theory and its applications*, Springer, 403 p.
- Chen, M., 1998, Exact travelling-wave solutions to bidirectional wave equations, *International Journal of Theoretical Physics*, 37 (5), 1547-1567.
- Chen, M., 1998, Exact solutions of various Boussinesq systems, *Applied Mathematics Letters* 5, 45-49.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

- Chen, M. and Iooss, G., 2005, Standing waves for a two-way model systems for water waves, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 24, 113-124.
- Cowan, S., Enns, R.H., Rangnekar, S.S. and Sanghera, S.S., 1986, Quasi-soliton and other behaviour of the nonlinear cubic-quintic Schrodinger equation, *Canadian Journal of Physics* 64, 311-315.
- Crank J. and Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43, 50-64.
- Crawford, F., 1968, *Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3 Waves*, Mcgraw-Hill College, 600 p.
- Dağ, I., Irk, D. and Saka, B., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, *Aplied Mathematics and Computation* 163(1), 199-211.
- Dağ, I., Irk, D. and Şahin, A., 2005, B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation, *Mathematical Problems in Engineering* (5), 521-538.
- Dağ, I., Saka, B. and Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 190(1-2), 532-547.
- Erbay, H.A., 1998, Nonlinear transverse waves in a generalized elastic solid and the complex modified Korteweg-de Vries equation, *Physica Scripta* 58, 9-14.
- Erbay, S. and Şuhubi, E.S., 1989, Nonlinear wave propagation in micropolar media II. special cases, solitary waves and Painleve analysis, *International Journal of Engineering Science* 27(8), 915-919.
- Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , <http://www.weizmann.ac.il/~home/fnfal/soliton.pdf>.



**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

- Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: a survey of results, Manchester Univ Pr, 300 p.
- Gorbacheva, O.B. and Ostrovsky, L.A., 1983, Nonlinear vector waves in a mechanical model of a molecular chain, *Physica D* 8, 223-228.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 12(11), 795-804.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters* 19, 1095-1097.
- Harvard Gazette Archives, April 20, 2006, Solitons: next wave in electronics, <http://www.news.harvard.edu/gazette/2006/04.20/10-soliton.html>.
- Hasimoto, H. and Ono, H., 1972, Nonlinear modulation of gravity waves, *Journal of Physical Society of Japan* 33, 805–811.
- Höllig, K., 2003, Finite element methods with B-splines, *Society for Industrial & Applied Mathematics*, 145 p.
- Johnson, R.S., 1977, On the modulation of water waves in the neighbourhood of  $kh \approx 1.363$ , *Proceedings of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences* 357(1689), 131-141.
- Kakutani, T. and Michihiro, K., 1983, Marginal state of modulational instability-mode of Benjamin-Feir instability, *Journal of Physical Society of Japan* 52, 4129-4137.
- Karney, C.F.F., Sen, A. and Chu, F.Y.F., 1979, Nonlinear evolution of lower hybrid waves, *Physics of Fluids* 22, 940-952.
- Kaup, D.J. and Newell, A.C., 1978, An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Mathematical Physics* 19(4), 798–801.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

- Korteweg, D.J and De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine* 39, 422-443.
- Lamb, G.L., 1980, *Elements of soliton theory*, John Wiley and Sons, 304 p.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley and Sons, 677 p.
- Muslu, G.M. and Erbay, H.A., 2003, A split step Fourier method for the complex modified Korteweg-de vries equation, *Computers and Mathematics with Applications* 45, 503-513.
- Muslu, G.M. and Erbay, H.A., 2005, Higher-order split-step Fourier schemes for the generalized nonlinear Schrödinger equation, *Mathematics and Computers in Simulation* 67, 581-595.
- Pathria, D. and Morris, J.LI., 1989, Exact solutions for a generalized nonlinear Schrödinger equation, *Physica Scripta* 39(6), 673-679.
- Pathria, D. and Morris, J.LI., 1990, Pseudo-spectral solution of nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Computational Physics* 87, 108-125.
- Pelloni, B. and Dougalis, V.A., 2001, Numerical modelling of two-way propagation of non-linear dispersive waves, *Mathematics and Computers in Simulation* 55, 595-606.
- Prenter, P. M., 1975, *Splines and variational methods*, John Wiley&Sons, 336 p.
- Raslan, K.R., 2004, A computational method for the equal width equation, *International Journal of Computer Mathematics* 81(1), 63-72.
- Robinson, M.P., 1997, The solution of nonlinear Schrödinger equations using orthogonal spline collocation, *Computers and Mathematics with Applications* 33(7), 39-57.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement. of Science (John Murray, London) pp 311–390.
- Saka, B. and Dağ, I., 2005, A collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B-spline basis, *Arabian Journal for Science and Engineering* 30(1A), 39-50.
- Saka, B., 2007, Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method, *Mathematical and Computer Modelling* 45(9-10), 1096-1117.
- Schonbek, M.E., 1981, Existence of solutions for the Boussinesq sytem of equations, *Journal of Differential Equations* 42, 325-352.
- Smith, G.D., 1978, Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press, 304 p.
- Strauss, W.A., 1978, The non-linear Schrodinger equation, in *Contemporary Developments in continuum Mechanics*, edited by G. M. de la Penha and L. A. Medeiros, North-Holland, NewYork, 452 p.
- Taha, T.R., 1994, Numerical simulations of the complex modified Korteweg-de Vries equation, *Mathematics and Computers in Simulation* 37, 461-467.
- Taha, T.R. and Liu, R., 2003, Parallel split-step Fourier methods for the CMKdV Equation, *Proceedings of The 2003 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications, (PDTA'03), Las Vegas, Nevada.*
- Tanaka, M., 1982, Nonlinear self-modulation problem of the Benjamin-Ono equation, *Journal of Physical Society of Japan* 51(8), 2686-2692.
- Taşcan, F., 2002, İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 63 s.
- Thomas, J.W., 1995, Numerical partial differential equations, Springer, 437 p.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

Xu, Y. and Shu, C.W., 2005, Local discontinuous Galerkin methods for nonlinear Schrödinger equations, *Journal of Computational Physics* 205, 72-97.

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics* 57(5), 841-847.

Whitham, G.B., 1974, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, New York, 636 p.

Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D, 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, *Physical Review Letters* 15, 240-243.

Zaki, S.I., 2000, A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188(1-3), 121-134.

Zheng, S., 2004, *Nonlinear evolution equations*, Chapman & Hall/CRC, 304 p.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Dursun İrk

**Uyruğu:** T.C

**Doğum Yeri, Tarihi:** Erbaa, 01.10.1975

**Medeni hali:** Bekar

**Adres bilgileri:**

**Ev adresi:** Üniversite Evleri

A1 3. Blok Daire No:11

Eskişehir

**İş adresi:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Ed. Fak. Matematik Bölümü

26480-Eskişehir

**E-posta:** dirk@ogu.edu.tr, dursunirk@gmail.com

### **Eğitim Bilgileri:**

#### **Doktora:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
(2002-2007)

#### **Yüksek Lisans:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
(2000-2002)

#### **Lisans:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
(1996-2000)

### **İş Deneyimi:**

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi)  
(2000-)