Kovaryans Matrislerinin Homojenliği Varsayımı Sağlanmadığında İstatistiksel Çözümleme Yaklaşımları

Mehmet Sandal

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Haziran 2020

Statistical Analysis Approaches When Homogeneity Assumption Of Covariance Matrices Is Not Provided

Mehmet Sandal

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Statistics

June 2020

Kovaryans Matrislerinin Homojenliği Varsayımı Sağlanmadığında İstatistiksel Çözümleme Yaklaşımları

Mehmet Sandal

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İstatistik Anabilim Dalı
Uygulamalı İstatistik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zeki YILDIZ

Haziran 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Zeki Yıldız danışmanlığında hazırlamış olduğum "Kovaryans Matrislerinin Homojenliği Varsayımı Sağlanmadığında İstatistiksel Çözümleme Yaklaşımları" başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/06/2020

Mehmet Sandal

İmza

ÖZET

İstatistiksel bir araştırma probleminin çözümünde güvenilir sonuçların elde edilmesi için uygulanan analiz yönteminin doğru belirlenmesi son derece önemlidir. Ayrıca uygulanan istatistiksel yöntemin varsayımlarının da karşılanması gerekmektedir. Çok değişkenli ikiden fazla grup ortalamasının eşitliğini test etmek için genellikle Çok Değişkenli Varyans Analizi (MANOVA) tekniğinden yararlanılmaktadır. MANOVA problemlerinin çözümlenmesi için çok değişkenli normal dağılım ve varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımlarının sağlanması gerekmektedir. Varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında ilgilenilen problem Behrens-Fisher (BF) problemi olarak tanımlanmaktadır. Behrens-Fisher problemlerinin çözümü için bilinen analiz yöntemleri uygulandığında ise hatalı sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu nedenle yeni test istatistiklerinin araştırılması gerekmektedir.

Bu tez çalışmasının amacı da; varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında tek yönlü MANOVA problemlerinin çözümü için alternatif çözümleme yaklaşımlarını araştırmaktır. Ayrıca çeşitli deneysel koşullar altında önerilen test istatistiklerinin performanslarının karşılaştırılması amaçlanmaktadır. Bu amaçla çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için sunulan çözümleme yaklaşımları kavramsal ve teorik olarak incelenmiştir. Test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Simülasyon çalışması sonucunda test istatistiklerinin performanslarının incelenen deneysel koşullara göre değiştiği gözlemlenmiştir. Özellikle bağımlı değişken sayısı ile gözlem büyüklüklerindeki dengeli ve dengesiz değişimler, test istatistiklerinin performanslarını çok fazla etkilemektedir. Ayrıca incelenen test istatistiklerinin gerçek bir problem üzerinde uygulanması için RStudio paket programında yer alan sayısal bir veri seti kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Behrens-Fisher Problemi, Çok değişkenli Varyans Analizi, Heterojen Varyans-Kovaryans Matrisi

SUMMARY

It is very important to determine the correct method of analysis in order to obtain reliable results in the solution of a statistical research problem. Furthermore, the assumptions of the applied statistical method must be met. The multivariate variance analysis (MANOVA) technique is often used to test the equality of the mean of more than two groups of multivariate. In order to solve MANOVA problems, it is necessary to provide assumptions of multivariate normal distribution and homogeneity of variance-covariance matrices. When the homogeneity assumption of variance-covariance matrices is not provided, the problem concerned is defined as the Behrens-Fisher problem. When known analysis methods for solving Behrens-Fisher problems are applied, incorrect results can be obtained. Therefore, new test statistics need to be investigated.

The aim of this thesis study is to investigate alternative analysis approaches for solving one-way MANOVA problems when the homogeneity assumptions of variance-covariance matrices is not provided. It is also aimed at comparing the performances of the test statistics proposed under various experimental conditions. For this purpose, the analysis approaches presented for multivariable Behrens-Fisher problems are examined conceptually and theoretically. A simulation study was conducted to compare the performances of the test statistics. As a result of the simulation study, it was observed that the performance of the test statistics changed according to the experimental conditions examined. Especially balanced and unbalanced changes in the number of dependent variables and observation sizes affect the performance of the test statistics very much. In addition, a numerical data set included in the RStudio package program was used to apply the examined test statistics on a real problem.

Keywords: Behrens-Fisher Problem, Multivariate Analysis of Variance, Heterogeneous Variance-Covariance Matrix

TEŞEKKÜR

Akademik hayatım boyunca bilgilerini, fikirlerini ve düşüncelerini benimle paylaşan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve her zaman yanımda olan sevgili danışman hocam sayın Prof. Dr. Zeki YILDIZ'a,

Tez çalışmam süresince destek veren ve benimle görüşlerini paylaşan tez izleme jüri üyeleri hocalarım sayın Prof. Dr. Veysel YILMAZ'a ve sayın Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK'e,

Doktora eğitimimi "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında destekleyen TUBİTAK'a,

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, maddi ve manevi hiçbir desteği esirgemeyen ve başarılarımın arkasında en büyük pay sahibi olan anneme, babama ve kardeşime,

Ve iyi ki hayatımda dediğim, varlığı bana güç veren, her koşulda yanımda olan ve bir ömür yanımda olacak olan sevgili eşime,

sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ (devam)

ÇİZELGELER DİZİNİ (devam)

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
μ	Ortalamalar vektörü
Σ	Kovaryans matrisi
k	Grup sayısı
p	Bağımlı değişken sayısı
$\hat{\mu}_0^*$	Ortak ortalamalar vektörünün tahmincisi
ρ	Korelasyon katsayısı
F	F dağılımı
χ^2	Ki-kare dağılımı
I_p	p boyutlu birim matris

Kısaltmalar	Açıklama
AHT	Yaklaşık Hotelling T^2
ANOVA	Tek Değişkenli Varyans Analizi
BFP	Behrens-Fisher Problemi
GLHT	Genelleştirilmiş Doğrusal Hipotez Testleri
MANOVA	Çok Değişkenli Varyans Analizi
MB	Düzeltilmiş Bartlett
MAPE	Ortalama Mutlak Yüzde Hata
PB	Parametrik Bootstrap

1. GİRİŞ VE AMAÇ

İstatistiksel araştırmalarda, iki veya daha fazla gruba ait ortalamaların karşılaştırılması problemi ile sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bağımsız iki grup ortalaması arasındaki farkın eşitliğini sınamak için gözlem büyüklüğüne göre z ve t testlerinden yararlanılırken, ikiden fazla grup söz konusu olduğunda ise bu testler yetersiz kalmaktadır. Bu problemlerin çözümünde genellikle varyans analizi yöntemine başvurulmaktadır. Tek bir bağımlı değişken söz konusu olduğunda anakütle varyansları eşit olan ve normal dağılıma sahip ikiden fazla grup ortalamasının eşitliğini sınayan yokluk hipotezi "Varyans Analizi (ANOVA)" ile test edilmektedir. (Özdamar, 2018). ANOVA; eğitim, psikoloji, istatistik, sağlık vb. başta olmak üzere birçok bilim dalında sıklıkla başvurulan bir istatistiksel yöntemdir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için temel olarak gözlemlerin bağımsız olması, bağımlı değişkenin normal dağılıma sahip olması ve tüm gruplardaki varyansların homojen olması gerekmektedir.

Ancak birden fazla bağımlı değişkenin aynı modelde yer aldığı problemler için her bir değişkene ayrı ayrı ANOVA uygulanması, değişkenler arasındaki ilişkilerin göz ardı edilmesine neden olmaktadır. Bu durum, I. tip hata yapma olasılığını arttırmakta ve elde edilen istatistiksel sonuçlar yanıltıcı olmaktadır. Dolayısıyla birden fazla bağımlı değişken söz konusu olduğunda da, çok değişkenli istatistiksel tekniklerin kullanılması gerekmektedir (Alpar, 2011; Finch ve French, 2013).

Çok değişkenli normal dağılıma sahip ikiden fazla grup ortalamasının eşitliğini test etmek için, iki veya daha fazla bağımlı değişkenin aynı modelde değerlendirilmesinde ise "Çok Değişkenli Varyans Analizi (MANOVA)" tekniğinden yararlanılmaktadır. ANOVA'da tek bir bağımlı değişken için ikiden fazla grup ortalaması arasındaki fark test edilirken, MANOVA'da ise iki veya daha fazla bağımlı değişken dikkate alınabilmektedir. Böylece gruplar arasındaki ilişkiler göz ardı edilmemektedir. Ayrıca bağımsız değişkenlerin sayısına göre MANOVA problemleri tek yönlü, iki yönlü ve k yönlü $(k > 3)$ MANOVA şeklinde adlandırılmaktadır.

ANOVA'da olduğu gibi MANOVA'nın da uygulanabilmesi için ilgilenilen grupların bağımsız olması gerekmektedir. Ayrıca ANOVA'daki normal dağılım varsayımı

MANOVA'da çok değişkenli normallik kavramına dönüşürken, varyansların homojenliği varsayımı da değişkenler arasındaki ilişkileri de göz önüne alan varyans-kovaryans matrislerinin homojenliği olarak değerlendirilmektedir. Bu varsayımların sağlanması durumunda MANOVA modellerinin çözümlenmesi için en iyi bilinen çok değişkenli test istatistikleri; "Wilks'in (1932) olabilirlik oranı testi, Hotelling (1951)–Lawley (1938) iz istatistiği, Bartlett (1939)–Nanda (1950)–Pillai (1955) iz istatistiği ve Roy'un (1953) en büyük özdeğer yaklaşımıdır. Bartlett (1939)–Nanda (1950)–Pillai (1955) test istatistiği genellikle Pillai iz istatistiği olarak da adlandırılmaktadır.

MANOVA varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda, bilinen bu test istatistiklerinin güç değerleri ve I. tip hata yapma olasılıkları büyük ölçüde etkilenmektedir. Olson (1974); kovaryans matrislerinin homojenliği ve normallik varsayımının sağlanamadığı durumlarda Roy'un en büyük özdeğer yaklaşımı testinden uzak durulması gerektiğini tavsiye etmiştir. Ayrıca varsayım ihlallerine karşı MANOVA test yaklaşımlarından en dayanıklı test olarak Pillai iz istatistiği testinin olduğunu ve çeşitli koşullar altında doğru farklılıkların tespit edilebilmesi için yeterli güce sahip olduğunu göstermiştir. Alpar'da (2011), MANOVA varsayımlarının ihlal edildiği durumlarda Wilks'in olabilirlik oranı ile Pillai iz istatistiği yaklaşımlarının daha güçlü olduğunu ifade etmiştir. Ancak gözlem sayısının az veya birbirine eşit olmadığı durumlarda ya da varyanslarının homojenliği varsayımının yerine getirilmediği durumda Pillai iz istatistiği yaklaşımının daha güvenilir olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca Alpar'a (2011) göre Roy'un en büyük özdeğer yaklaşımının, tüm varsayımlar sağlandığı zaman kullanılmalıdır. Kanık (1999) ise Roy'un en büyük özdeğer yaklaşımının diğer test istatistiklerine göre daha yüksek I. tip hata yapma olasılığına sahip olduğunu göstermiştir.

Ancak test istatistiklerinin dağılımları varsayımların ihlal edilmesi halinde değişmektedir. Varsayımların ihlal edilmesi durumunda da bu yaklaşımların uygulanması, yanlı sonuçlar elde edilmesine neden olabilmektedir. Bu nedenle varsayımların sağlanmadığı durumlarda ortalama vektörlerin eşitliğini test etmek için daha güçlü test istatistiklerine ihtiyaç duyulmaktadır (Zhang ve Liu, 2011; Finch ve French, 2013; Xu, 2014).

Homojenlik varsayımı sağlanmadığı durumlarda grup ortalamaları arasındaki farkın belirlenmesine yönelik ilk çalışmalar Behrens ve Fisher tarafından gerçekleştirilmiştir. Behrens (1929), varyansları eşit olmayan tek değişkenli iki grup ortalamasının eşitliğini sınamak için yeni bir çözüm önerisi ortaya koymuştur. Fisher (1935) ise Behrens'in (1929) çözümünü fiducial aralık yöntemini kullanarak doğrulamıştır. Bu nedenle homojenlik varsayımı sağlanmadığında iki veya daha fazla grubun ortalamalarını karşılaştırma problemi "Behrens-Fisher Problemi (BFP)" olarak adlandırılmaktadır. Behrens-Fisher problemi, zor ve karmaşık yapısı nedeniyle dikkat çeken ve çok fazla ilgi duyulan önemli bir araştırma problemidir. Temeli tek değişkenli durumlara dayanan Behrens-Fisher problemi, 1950'li yıllarından itibaren çok değişkenli problemler için de genişletilmiştir. Bu nedenle, bağımlı değişken sayısının tek olduğu durumlarda bu problem tek değişkenli Behrens- Fisher problemi olarak adlandırılırken, bağımlı değişken sayısının iki veya daha fazla olduğu durumlarda ise çok değişkenli Behrens-Fisher problemi adını almaktadır.

Bu tez çalışmasının amacı da; varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında ikiden fazla ortalama vektörün eşitliğini test etmek için alternatif çözümleme yaklaşımlarını araştırmak ve çeşitli deneysel koşullar altında önerilen test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmaktır.

Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde tek değişkenli ve çok değişkenli Behrens-Fisher problemine ilişkin literatürde yapılan çalışmalar incelenirken, üçüncü bölümde ise tek yönlü MANOVA modelinin teorik yapısı ile MANOVA problemlerinin çözümü için sıklıkla kullanılan dört test istatistiğine ait açıklamalar detaylı olarak aktarılmıştır. Bu açıklamalar ile birlikte varyans-kovaryans matrislerinin homojenliğini sınamak için kullanılan test istatistiklerine değinilmiş ve çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için önerilen alternatif test istatistiklerine ait teorik açıklamalara yer verilmiştir. Ayrıca bağımlı değişken sayısının oldukça yüksek olduğu durumlarda Behrens-Fisher problemlerinin çözümlenmesi için uygun istatistiksel yöntemler açıklanmıştır. Dördüncü bölümde test istatistiklerinin hata yapma olasılıklarını belirlemek için kullanılan yöntem açıklanmıştır. Beşinci bölümde bağımlı değişken sayısının gözlem sayısından daha küçük ve daha büyük olduğu durumlar için bir simülasyon çalışması ile birlikte deneysel hata yapma olasılıkları elde edilerek test istatistiklerinin performansları karşılaştırılmıştır. Ayrıca sayısal bir veri seti üzerinde önerilen test istatistikleri uygulanarak elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Behrens-Fisher problemi, 1930'lu yıllarda başlayan ve günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından ilgi duyulan önemli bir istatistiksel araştırma problemidir. Bu problemin çözümlenmesi için literatürde farklı yaklaşımlar ortaya konulmuştur. Önerilen çözümleme yaklaşımlarında, sunulan test istatistiklerinin olasılık dağılımını belirlemek için genellikle yaklaşık çözümlerden yararlanılmıştır. Ayrıca tek değişkenli iki örneklem, tek değişkenli k $(k \geq 3)$ örneklem, çok değişkenli iki örneklem ve çok değişkenli k örneklem olmak üzere dört farklı durum altında farklı çözümleme yaklaşımları araştırılmıştır.

Tek değişkenli Behrens-Fisher probleminde iki grup ortalaması arasındaki farkın çözümüne ilişkin ilk çalışmalar Scheffe (1943) ve Welch (1938,1947) tarafından gerçekleştirilmiştir. Scheffe (1943), iki örneklem problemini tek örneklem durumuna indirgeyen bir yöntem önermiştir. Scheffe testinde iki gruba ait gözlemler rassal olarak eşleştirilerek tek örneklem durumuna indirgenmektedir. Böylece problemin çözümü için bilinen bir student-t dağılımı kullanılabilmektedir. Ancak eşleştirme esnasında gözlemlerin seçim sırasında meydana gelen değişiklikler, elde edilen istatistiksel sonucun da değişmesine neden olmaktadır. Bu durum Scheffe testinin en büyük dezavantajını oluşturmaktadır (Krishnamoorthy ve Yu, 2012). Welch (1938,1947) ise, serbestlik derecesi hem örneklemin hacmine ve hem de örneklem varyansına bağlı olan t dağılımına dayalı bir test istatistiği önermiştir. Ayrıca bu test istatistiğinin kritik değerini belirlemek için yaklaşık serbestlik derecesi ve seri açılımı olmak üzere iki farklı yöntem geliştirmiştir.

Tek değişkenli Behrens-Fisher problemlerinde ikiden fazla grup ortalamasının eşit olup olmadığını sınamak için ilk yaklaşımlar yine Welch (1951) tarafından geliştirilmiştir. Welch (1951), iki örneklem problemleri için önerdiği yaklaşık serbestlik derecesi yaklaşımını k tane ortalamanın eşitliğini test etmek için genellemiştir. James (1951) ise anakütle varyanslarının eşit olmadığı durumda k grup ortalamasını test etmek için Welch'in (1947) seri çözümlemesini kullanmıştır. Scheffe (1943), Welch (1947,1951) ve James (1951)'in çalışmaları takip edilerek Scott ve Smith (1971), Brown ve Forsythe (1974), Alexander ve Govern (1994), Mehrotra (1997), Mendeş (2002), Krishnamoorthy vd. (2007), Chang ve Pal (2008), Yiğit (2009), Özkip vd. (2014), Çavuş (2016) gibi birçok araştırmacı tarafından tek değişkenli Behrens-Fisher problemleri için alternatif çözüm yolları önerilmiş ve çeşitli test istatistikleri karşılaştırılmıştır.

Çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri ise tek değişkenli Behrens-Fisher problemine göre daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu nedenle problemin çözümlenmesi için genellikle yaklaşık testler ortaya koyulmuştur. Tek değişkenli Behrens-Fisher problemlerinde olduğu gibi çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri de, iki örneklem ve k örneklem olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. İki grup ortalaması arasındaki farkın eşitliğine ilişkin çözümleme yaklaşımları daha fazla iken, ikiden fazla grup ortalamasının eşitliğini test etmek için daha az sayıda istatistiksel yöntem geliştirilmiştir. Ayrıca önerilen test istatistikleri genellikle tek değişkenli Behrens-Fisher problemlerinin genellenmesine dayanmaktadır.

Çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerinde iki grup ortalama vektörü arasındaki farkın çözümüne ilişkin ilk çalışmalar Bennett (1951), James (1954), Ito (1964), Yao (1965), Johansen (1980), Nel ve Van der Merwe (1986), Kim (1992) ve Christensen ve Rencher (1997) tarafından ortaya koyulmuştur. Bennett (1951), çok değişkenli Behrens-Fisher problemi söz konusu olduğunda iki ortalama vektörünün eşitliğini test etmek için örneklem boyutlarını farklı kabul ederek Scheffe'nin tek değişkenli çözüm yaklaşımını genişletmiştir. Ancak Scheffe'nin çözümleme yaklaşımının incelenen gözlemlerin seçilme sırasından etkilenmesi, Bennett testinin de dezavantajını oluşturmaktadır. James (1954) ise, test istatistiğinin kritik değerini belirlemek için tek değişkenli Behrens-Fisher problemleri için önerdiği birinci ve ikinci derece seri açılımı (James, 1951) yaklaşımını çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerine genellemiştir. Ancak iki veya daha fazla faktör söz konusu olduğunda James (1954)'in çözümleme yaklaşımının uygulanması oldukça karmaşık hale gelmektedir. Bu nedenle çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için Yao (1965), Johansen (1980) ve Kim (1992) başta olmak üzere birçok araştırmacı tarafından Welch (1947)'in yaklaşık serbestlik derecesi yöntemi kullanılarak test istatistikleri önerilmiştir.

Yao (1965), önerdiği test istatistiğini James'in birinci derece seri açılımı yaklaşımı ile karşılaştırken, Johansen (1980) ise Welch'in tek değişkenli yaklaşık serbestlik derecesi çözümlemesini çok değişkenli Behrens-Fisher problemi için genellemiştir. Nel ve Van der Merwe (1986) de, Wishart matrislerinin doğrusal birleşimlerini kullanarak Welch'in yaklaşık serbestlik derecesi çözümlemesine farklı bir genelleme sunmuştur. Kim (1992) ise iki ortalama vektörü için güven elipsoidlerinin geometrisini kullanarak önerdiği test istatistiğini Yao'nun testi ile karşılaştırmıştır. Bağımlı değişken sayısı ve gözlem sayısına göre değişen farklı deneysel koşullar altında Yao, Johansen ve James'in birinci ve ikinci derece seri açılımlarının karşılaştıran Algina ve Tang (1988), Algina vd. (1991) ile Tang ve Algina (1993); genel olarak Yao (1965), Johansen (1980) ve James'in ikinci derece seri açılımlarının performanslarının James'in birinci derece seri açılımından daha iyi olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ancak deneysel koşullara bağlı olarak test istatistiklerinin performansları tatmin edici düzeyde bulunamamıştır.

Yedi farklı test istatistiğini karşılaştıran Christensen ve Rencher (1997), Van Der Merwe (1986) ile Kim (1992) testlerinin daha yüksek güç değerine sahip olduğunu göstermiştir. Krishnamoorthy ve Yu (2004) ise, Nel ve Van der Merwe (1986) tarafından sunulan test istatistiğine bir düzeltme uygulayarak yeni bir düzeltilmiş Nel ve Van der Merwe (MVN) testi önermiştir. James, Yao (1965) ve Johansen (1980) test istatistikleri ile karşılaştırılan MVN test istatistiğinin, diğer testlerden daha iyi bir performans ortaya koyduğu gözlemlenmiştir.

Gamage vd. (2004) genelleştirilmiş p değeri kavramına dayanan bir F testi önerirken, Park ve Sinha (2009) ise genelleştirilmiş p değeri ile birlikte Roy'un (1957) birleşim-kesişim ilkesine dayalı yeni bir test istatistiği ortaya koymuştur. Park ve Sinha (2009) çalışmalarında, Christensen ve Rencher'in (1997) çalışmasında olduğu gibi homojen olmayan kovaryans matrisleri söz konusu olduğunda iki normal ortalama vektörünün eşitliğini test etmek için Yao (1965), Johansen (1980), Nel ve Van der Merwe (1986), Kim (1992) ve Krishnamoorthy ve Yu (2004) başta olmak üzere çeşitli yaklaşımları incelemişlerdir. Ayrıca çalışmada ele alınan istatistiksel testler, simülasyon çalışması ile büyüklük ve güç değerlerine göre karşılaştırılmış ve iki veri seti üzerinde uygulanmıştır.

Kawasaki ve Seo (2014), F dağılımının serbestlik derecesine bir düzeltme uygulayarak homojen olmayan kovaryans matrislerine sahip iki ortalama vektörünün eşitliğinin test etmek için bir yaklaşık yöntem sunmuştur. Çalışmada; sunulan yeni yaklaşık serbestlik derecesi ve bu serbestlik derecesinin yanlılık düzeltmesi de elde edilerek, simülasyon çalışması ile sayısal karşılaştırmalar gerçekleştirilmiştir. Erdoğan (2018) ise, çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında iki ortalama vektörün eşitliği test etmek için hesaplamalı yaklaşım testine dayalı yeni bir test istatistiği ileri sürmüştür. Sunulan yeni test istatistiği, I.tip hata yapma olasılığı ve testin gücü bakımından Bennett (1951), Yao (1965), Johansen (1980), Nel ve Van Der Merwe (1986), Krishnamoorthy ve Yu (2004) testleri ile karşılaştırmıştır. Çalışmanın sonuçları, yeni testin oldukça iyi performans gösterdiğini ortaya koymuştur.

Çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerinde ikiden fazla gruba ait ortalamalar vektörünün eşitliğini test etme probleminde ise ilk çalışmalar James (1954), Anderson (1963) ve Johansen (1980) tarafından geliştirilmiştir. Anderson (1963), Scheffe (1943) ve Bennett'in (1951) sunmuş olduğu yaklaşımları p boyutlu normal dağılıma sahip ikiden fazla ortalama vektörünün eşitliğini test etmek için kullanırken; James (1954), Johansen (1980) ve Gamage vd. (2004) ise çok değişkenli iki örneklem Behrens-Fisher problemleri için önerdikleri test istatistiklerini k örneklem Behrens-Fisher problemleri için genellemişlerdir. Coombs (1992), tek değişkenli Brown-Forstyhe (1974) testini genelleştirerek Wilks, Hotelling, Pillai ve Roy'un test istatistiklerine paralel olacak şekilde yeni düzeltilmiş MANOVA testleri ortaya koymuşlardır. Coombs (1992), düzeltilen MANOVA istatistikler ile Johansen (1980) testini I. tip hata yapma olasılıkları bakımından karşılaştırmış ve sunulan yeni test istatistiklerinin Johansen (1980) testinden daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Çok değişkenli normallik varsayımı geçerli olduğunda ancak homojenlik varsayımı sağlanmadığında MANOVA modelleri için önerilen başka bir test yaklaşımı ise parametrik bootstrap (PB) tekniği olmuştur. Krishnamoorthy ve Lu (2010), kovaryans matrisleri bilinmediğinde çok değişkenli normal dağılıma sahip ortalama vektörlerin karşılaştırılması problemini ele alarak bir parametrik bootstrap yaklaşımı önermiştir. Sunulan bu yaklaşım, örneklem büyüklükleri, bağımlı değişken sayıları ve gözlem sayılarının farklı durumları altında Johansen testi ve genelleştirilmiş F testi ile karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçları, PB testinin I. tip hata yapma olasılıklarının tüm örneklem büyüklüklerinde ve çeşitli parametre değerlerine göre oldukça iyi olduğunu göstermiştir. Ayrıca incelenen örneklem sayısı arttıkça ya da gözlem sayısı çok küçük olduğunda, Johansen ve genelleştirilmiş F testinin I. tip hata yapma olasılıklarının yüksek olduğu gözlemlenmiştir.

Todorov ve Filzmoser (2010), tek yönlü MANOVA problemlerinde kullanılan Wilks Lambda teset istatistiği için minimum kovaryans determinant tahmincisine dayalı robust bir test istatistik önermiştir. Aelst ve Willems (2011), Wilks Lambda test istatistiğine karşı alternatif güçlü bir test istatistiği ortaya koymak için bazı robust (sağlam) tahmincilere dayalı test istatistiklerinin özelliklerini araştırmışlardır. Aelst ve Willems (2011), sağlam tahmincilere dayalı test istatistiklerinin dağılımı ki-kare dağılımı ile orantılı olduğunu göstermiştir. Ayrıca yeni test istatistiklerinin sağlamlığı ve güç değerleri, simülasyon çalışmaları ve gerçek veri uygulamaları ile karşılaştırılmıştır.

İki örneklem Behrens-Fisher problemleri için Yanagira ve Yuan (2005) tarafından sunulan Düzeltilmiş Bartlett (MB) testi, k örneklem Behrens- Fisher problemi için Zhang ve Liu (2011) tarafından genişletilmiştir. Zhang (2012) bir başka çalışmasında, Hotelling T^2 dağılımını kullanarak doğrusal hipotez testi formundaki bir test istatistiğinin olasılık dağılımına yakınsamayı amaçlamıştır. Ancak örneklemlerdeki en küçük gözlem sayısı çok küçük olduğunda ya da en küçük ve en büyük gözlem büyüklüğü arasındaki oran yüksek olduğunda, her iki test istatistiğinin I. tip hata yapma olasılıklarını çok fazla yükselmektedir. Shenging (2012) ise Coombs'da (1996) olduğu gibi, bilinen klasik MANOVA test istatistiklerine paralel olarak düzeltilmiş yeni Wilks, Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testleri önermiştir.

Oyeyemi vd. (2018), Satterthwaite'in (1946) tek değişkenli Behrens-Fisher problemi için önerdiği yaklaşık serbestlik derecesi yöntemini çok değişkenli Behrens-Fisher problemi için genellemiştir. Önerilen yeni test istatistiği; çok değişkenli normal dağılımdan ve çok değişkenli gamma dağılımında simüle edilen veriler kullanılarak Johansen testi ile karşılaştırılmıştır. Çalışmanın sonuçları, Johansen testi ile karşılaştırıldığında önerilen yeni test istatistiğinin, I. tip hata yapma olasılığı ve testin gücü bakımından daha iyi performans ortaya koyduğunu göstermiştir.

İki yönlü ve çok yönlü MANOVA problemleri söz konusu olduğunda ise alternatif çözümleme yaklaşımları; Harrar ve Bathke (2011), Zhang (2011), Xu (2014), Zhang vd. (2016) ve Friedrich ve Pauly (2017) tarafından çalışılmıştır. Harrar ve Bathke (2011), iki yönlü MANOVA için Wilks, Hotelling-Lawley ve Bartlett-Nanda-Pillai test istatistiklerine çeşitli düzeltmeler uygulayarak eşit olmayan kovaryans matrisleri varsayımı altında yeni çözüm yaklaşımları ortaya koymuşlardır. Zhang vd. (2011) ise, doğrusal hipotez testi formundaki test istatistiklerine bir Hotelling T^2 dağılımını kullanarak yakınsama düşüncesini heteroskedastik iki yönlü MANOVA problemleri için kullanmıştır. Çalışmada gerçekleştirilen simülasyonlar sonucunda, sunulan testin genel olarak iyi bir performans ortaya koyduğunu ve güç değeri bakımından Hotelling-Lawley ve Harrar ve Bathke'nin (2011) düzeltilmiş Hotelling-Lawley yaklaşımlarından daha üstün olduğunu göstermiştir.

Xu (2014), homojen olmayan iki faktörlü MANOVA problemleri için parametrik bootsrap yaklaşımına dayalı bir test istatistiği ortaya koymuştur. Önerilen test, simülasyonlar yardımıyla AHT testi ile karşılaştırılmıştır. Heterojenlik altında bootstrap tekniğine dayalı yeni test istatistiği AHT testinden daha iyi bir performans ortaya koyduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca önerilen bu PB testi, homojenlik varsayımı geçerli olduğu durumlarda da çok fazla güç kaybetmemektedir. Xu (2015) bir başka çalışmasında ise çok değişkenli normallik varsayımı altında temel, basit ve etkileşim etkilerini test etmek için parametrik bootstrap (PB) testini incelemiştir. Önerilen test, Hotelling-Lawley iz istatistiği ve AHT testleri ile karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçları, homojenlik varsayımı ciddi şekilde ihlal edildiği zaman PB testinin çeşitli örneklem büyüklüklerinde ve parametre durumlarında iyi performans ortaya koyduğunu göstermektedir. Ancak örneklem büyüklükleri arttıkça Hotelling-Lawley ve AHT testleri daha iyi bir performans göstermiştir.

Konietschke vd. (2015), çok faktörlü çok değişkenli problemleri için parametrik ve parametrik olmayan bootsrap yöntemlerini çalışmışlardır. Çalışmada, özellikle heterojen kovaryans matrisleri ve normal dağılıma sahip olmayan problemler söz konusu olduğunda literatürde sunulan mevcut yöntemler için bir düzeltme önerilmiştir. Simülasyon çalışması ile bootstrap testlerinin asimptotik dağılımları belirlenmiş ve bu testlerin performanslarını değerlendirilmiştir. Zhang vd. (2016) bir başka çalışmasında ise, tek yönlü MANOVA problemleri için sunulan MB test istatistiğini iki yönlü MANOVA problemi için de genişletmişlerdir. Zhang vd.ne (2016) göre MB testinin en büyük avantajı, basit bir forma sahip olması ve anlamlılık (p) değerinin bilinen serbestlik derecelerine sahip bir ki-kare dağılımı kullanılarak kolayca hesaplanabilmesidir. Çalışmada yapılan simülasyon sonuçlarına göre, genel olarak MB testinin klasik Lawley-Hotelling iz istatistiğinden ve Harrar ve Bathke'nin (2012) düzeltilmiş Hotelling-Lawley testinden daha iyi bir performans ortaya koyduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca homojenlik söz konusu olduğu durumlarda MB testi Hotelling-Lawley iz istatistiği testine göre çok fazla güç kaybetmemektedir.

3. TEORİK BİLGİ

3.1. Çok Değişkenli Varyans Analizi (MANOVA)

Tek yönlü MANOVA; k grup için iki veya daha fazla bağımlı değişken olması durumunda, incelenen grupların ortalama vektörlerinin eşit olup olmadığını eş zamanlı olarak test etmek için kullanılmaktadır (Kanık, 1999; Alpar, 2011). Varsayalım ki k tane grup ve p tane bağımlı değişkenimiz olsun. $i = 1,2,\dots,k$ ve n_i ise i. gruptaki gözlem sayısı olmak üzere incelenen her bir anakütle,

$$\mu_i = \begin{pmatrix} \mu_{1i} \\ \vdots \\ \mu_{pi} \end{pmatrix}_{p\times 1} \tag{3.1}$$

eşitliğindeki $p \times 1$ boyutlu ortalama vektörüne ve

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}_{p\times p} \tag{3.2}$$

eşitliğindeki $p \times p$ boyutlu varyans-kovaryans matrisine sahiptir. Bu durumda ilgilenilen p tane bağımlı değişkene sahip k tane anakütle ortalama vektörünün eşit olup olmadığını sınamak için oluşturulan istatistiksel hipotez,

$$\begin{gathered} H_0\!: \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{pmatrix}_{p\times 1} = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{pmatrix}_{p\times 1} \dots \begin{pmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{pk} \end{pmatrix}_{p\times 1} \\ H_1\!: \mu_i' lerden\ en\ az\ biri\ farklıdır. \end{gathered} \tag{3.3}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Eşitlik 3.3'deki yokluk hipotezini sınamak için tek değişkenli varyans analizinde kullanılan varyasyon kaynaklarından yola çıkarak çok değişkenli varyans analizi için temel model

$$\begin{aligned} &Genel\ Kareler\ ve\ \text{Ç}arpımlar\ Toplamı\ Matrisi\ (T) \\ &\qquad = Gruplar\ Arası\ Kareler\ ve\ \text{Ç}arpımlar\ Toplamı\ Matrisi\ (B) \\ &\qquad + Gruplar\ \text{İ}\c{c}i\ Kareler\ ve\ \text{Ç}arpımlar\ Toplamı\ Matrisi\ (W) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X})(X_{ij}-\bar{X})'}_{T} \\ &\qquad = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i-\bar{X})(\bar{X}_i-\bar{X})'}_{B} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)(X_{ij}-\bar{X}_i)'}_{W} \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}}$; i. örneklemin $\mathrm{p} \times 1$ boyutlu ortalamalar vektörünü ve $\overline{\mathrm{X}}$ ise genel ortalama vektörünü göstermektedir. Ayrıca i. örneklemin varyans-kovaryans matrisi

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{1}{(n_i-1)}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)(X_{ij}-\bar{X}_i)' \tag{3.5}$$

eşitliğindeki gibi hesaplanmaktadır. Bu durumda gruplar içi kareler ve çarpımlar toplamı matrisi

$$W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)(X_{ij}-\bar{X}_i)' = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\,\hat{\Sigma}_i \tag{3.6}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Böylece çok değişkenli varyans analizi için varyasyon tablosu Çizelge 3.1’deki gibi elde edilmektedir.

İkiden fazla grubun ortalama vektörlerin eşitliğini test etmek için kullanılan MANOVA yaklaşımı aşağıdaki temel varsayımlara dayanmaktadır:

- ✓ İlgilenilen örneklemlerin rassal ve bağımsız olması

- ✓ Her bir gruptaki değişkenlerin çok değişkenli normal dağılıma sahip olması
- ✓ Bağımlı değişkenlerin varyans-kovaryans matrislerinin gruplar arasında homojen olması

Çizelge 3.1: Tek yönlü MANOVA tablosu

Varyans Kaynağı	Kareler ve Çarpımlar Toplamı Matrisleri	Serbestlik Derecesi
Gruplar Arası Kareler ve Çarpımlar Toplamı Matrisi (B)	$B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i - \bar{X})(\bar{X}_i - \bar{X})'$	$k - 1$
Gruplar İçi Kareler ve Çarpımlar Toplamı Matrisi (W)	$W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)'$	$\left(\sum_{i=!}^{k} n_i\right) - k$
Genel Kareler ve Çarpımlar Toplamı Matrisi (T)	$T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{X}\right)\left(X_{ij} - \bar{X}\right)'$	$\left(\sum_{i=!}^{k} n_i\right) - 1$

Bu varsayımların karşılandığı anakütlelerden çekilen bağımsız rassal örneklemler söz konusu olduğunda, k tane anakütle ortalama vektörlerinin eşitliğini test etmek için sıklıkla dört test istatistiğinden yararlanılmaktadır. Bunlar;

- ✓ Wilks (1932) Olabilirlik Oran Testi,
- ✓ Hotelling (1951)-Lawley (1938) İz İstatistiği,
- ✓ Bartlett (1939)-Nanda (1950)-Pillai (1955) İz İstatistiği
- ✓ Roy'un (1957) En Büyük Özdeğer Yaklaşımı

Wilks, Hotelling-Lawley, Pillai ve Roy test istatistikleri, bir matrisin köşegen elemanlarının toplamı olarak ifade edilen "matrisin izi" kavramına bağlı olarak B ve W matrislerinin farklı iz değerleri yardımıyla da elde edilebilmektedir. Ayrıca $p * p$ boyutlu birim matris I_{p*p} olmak üzere $|BW^{-1} - \lambda \mathrm{I}| = 0$ olacak şekilde "$BW^{-1} - \lambda \mathrm{I}$" matrisinin determinant değeri 0'a eşitlenerek, tek bir λ bilinmeyenine bağlı matematiksel denklemin çözümlenmesi ile BW^{-1} matrisine ait $s = min(p, k - 1)$ tane özdeğer elde edilir. Böylece elde edilen bu özdeğerler dikkate alınarak dört test istatistiği de hesaplanabilmektedir. MANOVA problemlerinin çözümünde Wilks, Hotelling-Lawley ve Barttlett-Nanda-Pillai test istatistiklerinin olasılık dağılımlarına yakınsamak için genellikle χ^2 ve F dağılımlarından yararlanılmaktadır.

3.1.1. Wilks (1932) olabilirlik oran testi

Çok değişkenli ikiden fazla gruplar arasındaki ortalamalar arasında farklılık olup olmadığını belirlemek için kullanılan ilk yaklaşım Wilks (1932) tarafından ortaya konulmuştur. Genelleştirilmiş olabilirlik oranına dayanan Wilks'in (1932) test istatistiği; grup içi kareler ve çarpımlar toplamı matrisinin (W) determinantının, genel kareler ve çarpımlar toplamı matrisinin (T) determinant değerine oranlanması ile hesaplanmaktadır. Böylece Wilks'in (1932) olabilirlik oran test istatistiği

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|} \tag{3.7}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu oran, tek değişkenli varyans analizi için oluşturulan F istatistiğine karşılık gelmektedir. Üstelik Wilks'in (1932) test istatistiği, BW^{-1} matrisinin özdeğerleri hesaplanarak da elde edilebilmektedir. Bu durumda BW^{-1} matrisinin $i.$ özdeğeri λ_i olmak üzere Eşitlik 3.7'deki istatistik

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+\lambda_i} \tag{3.8}$$

biçiminde de hasaplanabilir. Eşitlik 3.7 ve Eşitlik 3.8'deki test istatistikleri Wilks olabilirlik oran testi ya da Wilks Lambda (Λ) istatistiği olarak adlandırılmaktadır. Wilks Lambda test istatistiği 0 ve 1 arasında değerler alabilmektedir. Λ test istatistiğinin aldığı değer 1'e yaklaştıkça, yokluk hipotezinin reddedilme olasılığı azalmaktadır. Ancak Λ'nın değeri 0'a yaklaştıkça yokluk hipotezinin reddedilme olasılığı artmakta ve gruplar arasında fark olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Wilks Lambda (Λ) test istatistiğinin dağılımını belirlemek için Rao (1951) tarafından asimptotik bir yöntem önerilmiştir. Rao'nun (1951) dönüşüm yöntemi kullanılarak

$$l = \sqrt{\frac{p^2(k-1)^2 - 4}{p^2 + (k-1)^2 - 5}} \quad , \qquad eğer\ p^2 + (k-1)^2 - 5 > 0$$
$$l = 1, \qquad diğer\ durumlarda \tag{3.9}$$

ve

$$M = (N-k) - \frac{p + 1 - (k-1)}{2} \tag{3.10}$$

olmak üzere Wilks olabilirlik oran testi için

$$F_{Wilks} = \frac{\left(1 - \Lambda^{1/l}\right)\left[(M \times l + 1) - \frac{(k-1)p}{2}\right]}{\Lambda^{1/l}(k-1)p} \tag{3.11}$$

biçimindeki F yaklaşımından yararlanılmaktadır. Bu test istatistiği $sd_1 = (k-1)p$ ve $sd_2 = (M \times l + 1) - \frac{(k-1)p}{2}$ serbestlik dereceli $F_{sd_1, sd_2, 1-\alpha}$ tablo değeri ile karşılaştırılmaktadır. Belirlenen α anlamlılık düzeyinde Eşitlik 3.11'deki test istatistiği kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

3.1.2. Hotelling (1951)-Lawley (1938) iz istatistiği

Hotelling (1951) ve Lawley (1938) tarafından sunulan test istatistiği, $|BW^{-1} - \lambda I| = 0$ olacak şekilde BW^{-1} matrisi için elde edilen bütün özdeğerlerin toplamına eşit olan bir yaklaşımdır. Ayrıca BW^{-1} matrisinin köşegen elemanlarının toplamı, Hotelling-Lawley test istatistiğini vermektedir. Bu durumda Hotelling-Lawley test istatistiği

$$T = trace(BW^{-1}) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \tag{3.12}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Eşitlik 3.12'deki istatistik, Hotelling-Lawley iz istatistiği olarak adlandırılmakta ve "T" ile gösterilmektedir. Hotelling-Lawley iz istatistiğinin dağılımını belirlemek için genellikle Hughes ve Saw (1972) tarafından geliştirilen F yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu durumda Hughes ve Saw (1972) dönüşümü yardımıyla Hotelling-Lawley iz istatistiği için bir F yaklaşımı

$$\tilde{n} = \frac{N-k-p-1}{2}$$
$$m = \frac{|p-(k-1)|-1}{2} \quad (3.13)$$

ve $s = min(k-1, p)$ olmak üzere

$$F_{Hotelling} = \frac{2(s\tilde{n}+1)}{s^2(2m+s+1)} \times T \quad (3.14)$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu istatistik, $sd_1 = s(2m+s+1)$ ve $sd_2 = 2(s\tilde{n}+1)$ serbestlik dereceli $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ tablo değeri kritik değeri ile karşılaştırılmaktadır. Eşitlik 3.14'deki test istatistiği belirlenen α anlamlılık düzeyindeki kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilir.

3.1.3. Roy'un (1957) en büyük özdeğer yaklaşımı

Roy'un (1957) test istatistiği için, $|BW^{-1} - \lambda I| = 0$ eşitliğinin çözümlenmesi ile elde edilen özdeğerlerin en büyüğü seçilmekte ve bu özdeğere bağlı olarak test istatistiği hesaplanabilmektedir. Belirlenen en büyük özdeğer λ_{max} ile gösterilirse, Roy'un test istatistiği

$$R = maksimum\, özdeğer(B(B+W)^{-1}) = \frac{\lambda_{max}}{1+\lambda_{max}} \quad (3.15)$$

şeklinde belirlenmektedir. Bu eşitlik “Roy’un en büyük özdeğere dayalı test istatistiği” olarak adlandırılır ve "R" ile gösterilir. R değeri 0 ile 1 arasında değişen değerler alabilmektedir.

Eşitlik 3.15’deki R test istatistiğine ait kritik değerlerin belirlenmesi için, Heck (1960) tarafından sunulan ve $s, \tilde{n}, m$ parametrelerine bağlı olarak oluşturulan Heck grafik değerleri dikkate alınmaktadır. Bağımlı değişken sayısı ve grup sayısı ile birlikte toplam gözlem sayısına göre hesaplanan $s, \tilde{n}$ ve m değerleri için karşılık gelen Heck grafik değeri, Eşitlik 3.15’deki test istatistiği ile karşılaştırılmaktadır. Eşitlik 3.15’deki test istatistiği, Heck grafik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir (Alpar, 2011).

3.1.4. Bartlett (1939)-Nanda (1950)-Pillai (1955) iz istatistiği

Roy’un en büyük özdeğer yaklaşımındaki zayıflıkları geliştirmek için Pillai (1955) yeni bir test istatistiği önermiştir. Önerilen bu test istatistiği, en büyük özdeğer kavramı yerine tüm özdeğerleri dikkate alan ve Roy’un test istatistiğinden daha güçlü olan bir yaklaşımdır. Üstelik Pillai tarafından sunulan test istatistiği, $B(B+W)^{-1}$ matrisinin köşegen elemanlarının toplamını kullanarak da hesaplanabilmektedir. Bu durumda Pillai’nin önerdiği yeni test istatistiği

$$V = trace(B(B+W)^{-1}) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} \tag{3.16}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Eşitlik 3.16’daki istatistik, Pillai iz istatistiği olarak adlandırılmakta ve “V” ile gösterilmektedir. Pillai iz istatistiğinin dağılımını belirlemek için bir F yaklaşımı Pillai (1955) tarafından önerilmiştir. Pillai (1955) dönüşümü kullanılarak Eşitlik 3.13’de verilen $s, \tilde{n}$ ve m değerleri yardımıyla Pillai iz istatistiği için bir F yaklaşımı

$$F_{Pillai} = \frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1}\frac{V}{s-V} \tag{3.17}$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu istatistik, $sd_1 = s(2m + s + 1)$ ve $sd_2 = s(2\tilde{n} + s + 1)$ serbestlik dereceli $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ tablo değeri ile karşılaştırılmaktadır. Eşitlik 3.17'deki test istatistiği belirlenen α anlamlılık düzeyindeki kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilir.

3.2. Varyans-Kovaryans Matrislerinin Homojenliği

Tek değişkenli testlerde iki ortalama arasındaki farkın önemlilik testini ve varyans analizini uygulayabilmek için iki önemli varsayım, karşılaştırılacak grupların normal dağılım göstermesi ve varyansların homojen olmasıdır. Tek değişkenli problemler ile ilgilenildiğinde k örneklemin varyanslarının eşit olup olmadığını test etmek için genellikle Bartlett testinden yararlanılmaktadır. Ancak çok değişkenli problemler söz konusu olduğunda tek değişkenli durumda kullanılan teknikler yetersiz kalmaktadır. Çok değişkenli analizlerde varyansların homojenliği varsayımı, varyans-kovaryans matrisinin eşitliği testine dönüşmektedir. Çok değişkenli k örneklem durumları için genellikle kullanılan test istatistiği Box's M test istatistiğidir (Zhang vd., 2016).

3.2.1. Box's M testi

Çok değişkenli istatistiksel analizlerde her bir anakütleye ait varyans-kovaryans matrislerinin eşit olup olmadığını test etmek için $i = 1,2,\dots,k$ olmak üzere

$$H_0: \Sigma_1 = \cdots \dots\dots\dots = \Sigma_k \tag{3.18}$$

eşitliğindeki yokluk hipotezi sınanmaktadır. Bu test istatistiği için k tane örneklemin her birindeki p tane değişkene ait n_i tane gözlemlerden elde edilen ölçümlerin olduğu varsayılmaktadır. Box (1949); tek değişkenli problemler için kullanılan Bartlett'in olabilirlik oran istatistiğini, çok değişkenli durumlara genellemiş ve bir düzeltme faktörü ile birlikte k örnekleme ait kovaryans matrislerinin homojenliği sınamak için ki-kare dağılımına sahip bir test istatistiğini önermiştir.

Varsayalım ki $(\mathrm{n}_i-1)\hat{\Sigma}_i \sim \mathrm{W}_m(\Sigma_i, \mathrm{n}_i-1)$ olmak üzere $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ kovaryans matrislerinin bağımsız tahmincileri $\hat{\Sigma}_1, \dots, \hat{\Sigma}_k$ olsun. Burada $(\mathrm{n}_i-1)\hat{\Sigma}_i$, Σ_i kovaryans matrisli ve n_i-1 serbestlik dereceli Wishart dağılımına sahiptir. Buna göre bütün gruplara ait toplam gözlem sayısı

$$N=\sum_{i=1}^{k} n_i \tag{3.19}$$

ve örneklemin ortak varyans kovaryans matrisi de

$$\hat{\Sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\hat{\Sigma}_i}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)} \tag{3.20}$$

olmak üzere Eşitlik 3.18'deki yokluk hipotezi için bir olabilirlik oran testi

$$M=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\,ln\left|\hat{\Sigma}\right|-\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\,ln\left|\hat{\Sigma}_i\right| \tag{3.21}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Eşitlik 3.21'deki test istatistiğinin anlamlılığının sınanması ve homojenlik durumu için genelleştirilmiş bir test elde etmek amacıyla M istatistiğinin kümülant üreten fonksiyonu yardımıyla

$$A_1=\frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i-1}\right)-\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)}\right] \tag{3.22}$$

$$A_2=\frac{(p-1)(p+2)}{6(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i-1}\right)^2-\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\right)^2}\right] \tag{3.23}$$

olmak üzere

$$K_j = 2^{j-1}(j-1)!\,f\left(1 + jA_1 + \frac{j(j+1)}{2}A_2 + \cdots\right) \tag{3.24}$$

eşitliğindeki j. kümülant değeri belirlenmektedir. Box (1949), son eşitlikte yer alan $2^{j-1}(j-1)!\,f$ değerinin f serbestlik dereceli χ^2'nin j. Kümülantı olduğunu ve C bir ölçek katsayısı olmak üzere K_j eşitliğinin de $C\chi^2$'nin j. Kümülantına benzer olacağını ifade etmektedir. Bu durumda eğer $A_2 = 0$ ise $C = 1 + A_1$ olup birinci kümülant değerini verecektir. Ancak $A_2 = A_1^2$ olması durumunda $C = \frac{1}{1-A_1}$ olarak kullanılabilmektedir. Çok değişkenli istatistikler için $p > 1$ olduğunda

$$C^{-1} = 1 - A_1 = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}\right] \tag{3.25}$$

olmak üzere MC^{-1}ifadesi $f = \frac{1}{2}(k-1)p(p+1)$ serbestlik derecesi ile χ^2dağılımına yaklaşmaktadır. Böylece yokluk hipotezini sınamak için MC^{-1} test istatistiği elde edilir.

Box'ın (1949) test istatistiği, tek bir değişken söz konusu olduğunda Bartlett testine dönüşmektedir. Ayrıca gruplardaki gözlem sayılarının her biri 20'den büyük olduğunda ve örneklem sayısı ile değişken sayısı 6'dan küçük olduğunda χ^2 yaklaşımı kullanılmaktadır. Ancak gözlem sayılarının incelenen bağımlı değişken sayısından daha küçük olduğu durumlarda, örneklem kovaryans matrisleri tekil olduğundan bu matrisin tersi alınamamaktadır. Bu sorunu gidermek için kümülantlar arasındaki ilişkileri de dikkate alan Box (1949), Pearson eğri tiplerinden yararlanarak bir F yaklaşımı önermiştir.

Pearson (1895), diferansiyel bir denklem sistemini kullanarak bu denklem sisteminin çözümünü sağlayan sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bir ailesini tanımlamıştır. Sürekli fonksiyonların oluşturduğu frekans eğrileri, bu denklem sistemini esas alarak eğriler ailesini oluşturmaktadır. İlk dört momentin belirlenmesi ile birlikte denklemin sabit terimleri tanımlanmakta ve bu denklem sisteminin köklerine bağlı olarak eğri tipleri adlandırılmaktadır (Sürsal, 1980).

Pearson eğri tiplerine göre ilgilenilen test istatistiği, $A_2 - A_1^2$ ifadesinin sıfırdan büyük olması durumunda $(A_2 - A_1^2 > 0)$ Pearson tip VI eğrisine karşılık gelirken sıfırdan küçük olması durumunda $(A_2 - A_1^2 < 0)$ ise Pearson tip I eğrisine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla $A_2 - A_1^2 > 0$ olduğunda

$$sd_1 = f = \frac{1}{2}(k-1)p(p+1)$$

$$sd_2 = \frac{sd_1 + 2}{A_2 - A_1^2} \tag{3.26}$$

$$b = \frac{sd_1}{1 - A_1 - \left(\frac{sd_1}{sd_2}\right)} \tag{3.27}$$

olmak üzere Mb^{-1} değeri sd_1 ve sd_2 serbestlik derecesi ile F dağılımına uymaktadır. Ancak $A_2 - A_1^2 < 0$ ise

$$sd_2 = \frac{sd_1 + 2}{A_1^2 - A_2} \tag{3.28}$$

$$b = \frac{sd_2}{1 - A_1 - \left(\frac{2}{sd_2}\right)} \tag{3.29}$$

olmak üzere $\frac{sd_2 M}{sd_1(b-M)}$ değeri sd_1 ve sd_2 serbestlik derecesi ile F dağılımına uymaktadır. Örneklem sayısı ile değişken sayısının daha büyük olduğu ve gözlem sayılarının da küçük olduğu durumlarda F dağılımı daha anlamlı sonuçlar ortaya koymaktadır (Box, 1949; Alpar, 2011).

Box’s M testi çok değişkenli normallik varsayımına oldukça duyarlı bir testtir. Çok değişkenli normallik varsayımı sağlandığında k örneklem için homojenlik testi gerçekleştirilebilmektedir. Ancak normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda bu test istatistiklerinin kullanılması hatalı sonuçların elde edilmesine neden olmaktadır.

3.2.2. Schott'un (2007) homojenlik testi

Bağımlı değişken sayısının toplam gözlem sayısından daha büyük olduğu durumlar yüksek boyut olarak tanımlanmaktadır. Son yıllarda çok sayıdaki değişken için daha az sayıdaki gözlemlerden alınan veri setlerin incelenebilmesi ve analiz edilmesi önem kazanmaya başlamıştır. Box (1949) yüksek boyutlu veriler için bir F dönüşümümden yararlanırken, bu problemin çözümü için bazı yeni test istatistikleri de tanımlanmıştır. Yüksek boyutlu veriler için alternatif bir yaklaşım Schott (2007) tarafından sunulmuştur. Schott (2007), Eşitlik 3.18'deki yokluk hipotezini test etmek için örneklem kovaryans matrislerinin ögeleri arasındaki farkların karelerinin toplamına dayanan bir test istatistiği önermiştir. $i, j = 1, \dots, k$ olmak üzere örneklem kovaryans matrisleri $\hat{\Sigma}_i$ ve $\hat{\Sigma}_j$ için Schott (2007) tarafından sunulan test istatistiği

$$t_{nm}^* = \frac{t_{nm}}{\hat{\theta}} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanır. Eşitlik 3.30'daki test istatistiğinde

$$a = \frac{(N-k)^2}{(N-k+2)(N-k-1)}\left[tr(\hat{\Sigma}^2) - \frac{1}{(N-k)}\left(tr(\hat{\Sigma})\right)^2\right] \tag{3.31}$$

olmak üzere t_{nm} ve $\hat{\theta}$ istatistikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} t_{nm} = \Bigg(tr\left[\left(\hat{\Sigma}_i - \hat{\Sigma}_j\right)^2\right] \\ &- \frac{1}{(n_i-2)(n_i-1)(n_i+1)}\Big[(n_i-1)(n_i-3)tr\left(\hat{\Sigma}_i^2\right) \\ &+ (n_i-1)^2\left[tr\left(\hat{\Sigma}_i\right)\right]^2\Big] \\ &- \frac{1}{(n_j-2)(n_j-1)(n_j+1)}\Big[(n_j-1)(n_j-3)tr\left(\hat{\Sigma}_j^2\right) \\ &+ (n_j-1)^2\left[tr\left(\hat{\Sigma}_j\right)\right]^2\Big]\Bigg) \end{aligned} \tag{3.32}$$

ve

$$\hat{\theta} = 2a\left[\sum_{i<j}\left(\frac{n_i + n_j - 2}{(n_i - 1)(n_j - 1)}\right)^2 + (k-1)(k-2)\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i - 1}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.33}$$

şeklindedir. Test istatistiği için $i = 1, \dots, k$ için $(p, n_i - 1) \to \infty$ ve $j = 1, \dots, 8$ için $0 < \lim_{p\to\infty} {}^{tr\Sigma_j}/_{p} < \infty$ olduğu varsayılmaktadır. Bu iki varsayım altında t_{nm}^{*} test istatistiğinin asimptotik olasılık dağılımı standart normal dağılıma yakınsamaktadır. Eğer α anlamlılık düzeyinde t_{nm}^{*} test istatistiği standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

3.3. Çok Değişkenli Behrens-Fisher Problemleri İçin Alternatif Test İstatistikleri

Varyans kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında k gruba ait ortalamalar vektörlerin karşılaştırma problemi genellikle çok değişkenli Behrens - Fisher problemi olarak da adlandırılmaktadır. Varsayalım ki μ_i ortalamalı ve Σ_i kovaryans matrisli p boyutlu normal dağılım $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$ olmak üzere k tane bağımsız normal dağılıma sahip örneklem

$$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i} \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i), i = 1,2, \dots, k \tag{3.34}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $i.$ örnekleme ait ortalama vektörünün yansız tahmincisi

$$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \tag{3.35}$$

ve $i.$ örnekleme ait kovaryans matrisinin yansız tahmincisi ise

$$A_i = \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \hat{\mu}_i\right)\left(X_{ij} - \hat{\mu}_i\right)' \tag{3.36}$$

olmak üzere

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{A_i}{(n_i - 1)} = \frac{1}{(n_i - 1)} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \hat{\mu}_i\right)\left(X_{ij} - \hat{\mu}_i\right)' \tag{3.37}$$

şeklindedir. Eğer anakütle varyans-kovaryans matrisleri bilinmiyorsa Eşitlik 3.3'deki yokluk hipotezini sınamak için

$$\mathrm{W}_i = \left(\frac{\hat{\Sigma}_i}{\mathrm{n}_i}\right)^{-1} = \left(\tilde{\Sigma}_i\right)^{-1} \tag{3.38}$$

$$W = \sum_{i=1}^{k} W_i \tag{3.39}$$

$$\hat{\mu}_0^* = W^{-1} \sum_{i=1}^{k} W_i \hat{\mu}_i \tag{3.40}$$

olmak üzere bir Wald tipi test istatistiği

$$\begin{aligned} T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right) &= \sum_{i=1}^{k} (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0^*)' \mathrm{W}_i (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0^*) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \hat{\mu}_i' \mathrm{W}_i \hat{\mu}_i - \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{W}_i \hat{\mu}_i\right)' W^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{W}_i \hat{\mu}_i\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde belirlenmiştir (Lu, 2007; Shengning, 2012). Böylece homojenlik varsayımının karşılanmadığı tek yönlü MANOVA problemlerinde, ortalama vektörleri arasındaki farkı belirlemek için Eşitlik 3.41'deki test istatistiğine dayalı olarak alternatif çözümleme yaklaşımları önerilmiştir.

3.3.1. Johansen (1980) testi

Johansen (1980) testi, Welch (1947, 1951) yaklaşımında olduğu gibi test istatistiğinin olasılık dağılımını belirleyen bir serbestlik derecesine yaklaşmayı amaçlamaktadır. Çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için seri açılımı yaklaşımı James (1954) tarafından incelenirken, yaklaşık serbestlik derecesi yöntemi ise Johansen (1980) tarafından genellenmiştir. Varyans kovaryans matrislerin heterojenlik varsayımı altında Eşitlik 3.3'deki yokluk hipotezini sınamak için

$$A = \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(I - W^{-1}W_i)^2 + \left(tr(I - W^{-1}W_i)\right)^2}{2(n_i - 1)} \tag{3.42}$$

ve

$$c = p(k-1) + 2A - \frac{6A}{p(k-1)+2} \tag{3.43}$$

olmak üzere $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right)$ test istatistiğinin c değerine oranlaması ile Johansen (1980) test istatistiği

$$T^2_{Johansen} = \frac{T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)}{c} \sim F_{sd_1, sd_2, 1-\alpha} \tag{3.44}$$

biçiminde ifade edilir. Yokluk hipotezi altında $T^2_{Johansen}$ test istatistiği $sd_1 = p(k-1)$ ve $sd_2 = \frac{p(k-1)[p(k-1)+2]}{3A}$ serbestlik dereceli F dağılımına yakınsamaktadır. Eğer Johansen test istatistiği $T^2_{Johansen} > F_{sd_1, sd_2, 1-\alpha}$ olacak şekilde $F_{sd_1, sd_2, 1-\alpha}$ kritik değerinden büyük ise Eşitlik 3.3'deki yokluk hipotezi reddedilir ve ortalamalar arasındaki farkın anlamlı olduğuna karar verilir. Özel olarak $k = 2$ durumunda test istatistiği ve kritik değerler, iki örneklem Johansen (1980) test istatistiğine ve kritik değerlerine karşılık gelmektedir.

3.3.2. Coombs'un (1992) düzeltilmiş MANOVA testleri

Varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığı durumlar için Coombs (1992), çok değişkenli iki örneklem Nel ve Van Der Merwe (1986) testinde sunulan Wishart dağılımlarının toplamını kullanarak Brown-Forstyhe'ın (1974) tek değişkenli durumlar için uyguladığı varyans analizi testini genellemiştir. Böylece klasik MANOVA testlerine benzer olan yeni düzeltilmiş MANOVA testleri elde edilmektedir.

Klasik MANOVA testleri için incelenen gruplar arası kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (B), Coombs (1992) testi için de geçerli olup Eşitlik 3.4'deki gibidir. Ancak tek değişkenli Brown-Forstyhe (1974) düzeltmesi çok değişkenli durumlar için

$$f = \frac{tr^2\left[\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right] + tr\left[\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1}\left\{tr^2\left[\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right] + tr\left[\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right]^2\right\}} \tag{3.45}$$

eşitliğindeki gibi genellenirse, yeni grup içi kareler ve çarpımlar toplamı matrisi

$$\widetilde{W} = \left(\frac{f}{k-1}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i \tag{3.46}$$

şeklinde olacaktır. Böylece düzeltilmiş yeni test istatistikleri $B\widetilde{W}^{-1}$ 'in özdeğerlerinden ya da B ve $\widetilde{W}^{-1}$ matrislerinin iz istatistiklerinden yararlanarak hesaplanabilir. MANOVA'da kullanılan yaklaşık F dönüşümleri ile birlikte k tane popülasyonun ortalama vektörünün eşitliği Coombs'un (1992) düzeltilmiş yeni test istatistikleri için uygulanabilmektedir.

3.3.2.1. Coombs'un (1992) düzeltilmiş Wilks olabilirlik oran testi

λ_i^*, $B\widetilde{W}^{-1}$'in i. özdeğeri olmak üzere Wilks Lambda test istatistiği için elde edilen düzeltilmiş yeni test istatistiği

$$\Lambda^* = \frac{|\widetilde{W}|}{|B+\widetilde{W}|} = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+\lambda_i^*} \tag{3.47}$$

biçiminde ifade edilir. Düzeltilmiş Wilks Lambda (Λ^*) istatistiğinin dağılımı için Rao (1952) dönüşümü yardımıyla

$$M^* = f - \frac{p-(k-1)+1}{2} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\frac{p^2(k-1)^2-4}{p^2+(k-1)^2-5}} \;, \qquad eğer\; p^2+(k-1)^2-5>0l \\ &= 1, \qquad\qquad diğer\ durumlarda \end{aligned} \tag{3.49}$$

olmak üzere

$$F_{CoombsWilks} = \frac{\left(1-\Lambda^{*1/l}\right)\left[(M^* \times l+1) - \frac{(k-1)p}{2}\right]}{\Lambda^{*1/l}(k-1)p} \tag{3.50}$$

biçimindeki F yaklaşımından yararlanılmaktadır. Düzeltilmiş Wilks Lambda test istatistiği, $sd_1 = (k-1)p$ ve $sd_2 = (M^* \times l + 1) - \frac{(k-1)p}{2}$ serbestlik dereceli $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ tablo değeri ile karşılaştırılır. Eşitlik 3.50'deki test istatistiği belirlenen α anlamlılık düzeyindeki kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilir.

3.3.2.2. Coombs'un (1992) düzeltilmiş Hotelling-Lawley iz istatistiği testi

Hotelling-Lawley test istatistiği için elde edilen düzeltilmiş yeni test istatistiği

$$T^* = tr\left(B\widetilde{W}^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \tag{3.51}$$

biçiminde ifade edilir. Düzeltilmiş Hotelling-Lawley iz istatistiğinin dağılımı için

$$\tilde{n}^* = \frac{f-p-1}{2}$$
$$m = \frac{|p-(k-1)|-1}{2} \tag{3.52}$$

ve $s = \min\,(p, k-1)$ olmak üzere Hughes ve Saw (1972) dönüşümü uygulanarak

$$F_{CoombsHotelling} = \frac{2(s\tilde{n}^*+1)}{s(2m+s+1)}\frac{T^*}{s} \tag{3.53}$$

şeklinde F yaklaşımı hesaplanır. Düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistiği $sd_1 = s(2m+s+1)$ ve $sd_2 = 2(s\tilde{n}^*+1)$ serbestlik dereceli $F_{sd_1, sd_2, 1-\alpha}$ tablo değeri ile karşılaştırılır. Eşitlik 3.53'deki test istatistiği belirlenen bir nominal α anlamlılık düzeyindeki kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilir.

3.3.2.3.<u>Coombs'un (1992) düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testi</u>

Pillai test istatistiği için elde edilen düzeltilmiş yeni test istatistiği ise

$$V^* = tr\left(B\left(B+\widetilde{W}\right)^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i^*}{1+\lambda_i^*} \tag{3.54}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Düzeltilmiş Pillai test istatistiğinin dağılımı için Pillai (1955) dönüşümü uygulanarak

$$F_{CoombsPillai} = \frac{2\tilde{n}^*+s+1}{2m+s+1}\frac{V^*}{s-V^*} \tag{3.55}$$

şeklinde F yaklaşımı dikkate alınmaktadır. Eşitlik 3.55'deki düzeltilmiş Pillai test istatistiği $sd_1 = s(2m + s + 1)$ ve $sd_2 = s(2\tilde{n}^* + s + 1)$ serbestlik dereceli $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ tablo değeri ile karşılaştırılır. Bu test istatistiği belirlenen α anlamlılık düzeyindeki kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilir.

3.3.3. Krishnamoorthy ve Lu'nun (2007) Parametrik Bootsrap (PB) testi

Parametrik bootsrap yaklaşımı; incelenen modelde yer alan parametrelerin yerine bu parametrelerin tahmincileri koyularak örneklem ya da örneklem istatistiklerinin üretilmesine dayanmaktadır. Dolayısıyla bootsrap yaklaşımı ile tahmin edilen modelden örnekleme yapılmakta ve üretilen bu örneklem, bir test istatistiğinin olasılık dağılımına yaklaşmak için kullanılmaktadır (Lu, 2007).

Parametrik bootstrap yöntemi ile Eşitlik 3.3'de verilen yokluk hipotezini sınamak için $(\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \dots, \tilde{\Sigma}_k)$'nın gözlemlenen değerleri $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_k)$ olmak üzere $\hat{\mu}_{PBi} \sim N_p(0, \tilde{s}_i)$ ve $\tilde{\Sigma}_{PBi} \sim W_p\left(n_i - 1, \left(\frac{\tilde{s}_i}{n_i - 1}\right)\right)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Eşitlik 3.41'deki $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$ test istatistiği için $\hat{\mu}_{PBi}$ ve $\tilde{\Sigma}_{PBi}$'den oluşan parametrik bootstrap fonksiyonu

$$\hat{\mu}_{PB}^* = \left[\sum_{i=1}^{k} \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{k} \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1}\, \hat{\mu}_{PB} = \left[\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\hat{\Sigma}_{PBi}}{\mathrm{n}_i}\right)^{-1}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\hat{\Sigma}_{PBi}}{\mathrm{n}_i}\right)^{-1} \hat{\mu}_{PB} \qquad (3.56)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{PB}^2(\hat{\mu}_{PBi}, \tilde{\Sigma}_{PBi}) &= \sum_{i=1}^{k} (\hat{\mu}_{PBi} - \hat{\mu}_{PB}^*)' \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1} (\hat{\mu}_{PBi} - \hat{\mu}_{PB}^*) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \hat{\mu}_{PBi}' \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1} \hat{\mu}_{PBi} - \left(\sum_{i=1}^{k} \hat{\mu}_{PBi}' \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1}\right) \left(\sum_{i=1}^{k} \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \tilde{\Sigma}_{PBi}^{-1} \hat{\mu}_{PBi}\right) \end{aligned} \qquad (3.57)$$

şeklinde tanımlanır. Eşitlik 3.57'de verilen parametrik bootstrap fonksiyonunun Cholesky faktörleri kullanılarak tanımlanabilmesi için $i = 1, \dots, k$ olmak üzere $a_i a_i' = \tilde{s}_i$ olacak şekilde $\tilde{s}_i$ 'nin Cholesky faktörleri a_i olsun. Bu durumda $Z_i \sim N_p(0, I_p)$ ve $V_i \sim W_p(n_i - 1, I_p)$ bağımsız olmak üzere $\hat{\mu}_{PBi} = a_i Z_i$ ve $\tilde{\Sigma}_{PBi} = \frac{(a_i V_i a_i')}{(n_i - 1)}$ olarak elde edilir. Böylece Eşitlik 3.57'deki parametrik bootstrap fonksiyonu Cholesky faktörlerine bağlı olarak

$$T_{PB}^2(Z_i, V_i) = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) Z_i' V_i^{-1} Z_i - \left(\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) Z_i' V_i^{-1} a_i^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)(a_i V_i a_i')^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)(a_i')^{-1} V_i^{-1} Z_i \right) \tag{3.58}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu durumda Eşitlik 3.41'deki $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$ test istatistiğinin gözlemlenen bir t_0 değeri için parametrik bootstrap fonksiyonuna ait anlamlılık (p) değeri $Pr[T_{PB}^2(\hat{\mu}_{PBi}, \tilde{S}_{PBi}) \geq t_0]$ şeklindedir. Bu eşitlikteki olabilirlik değeri herhangi bir parametreye bağlı olmadığı verilen $(n_1, \dots, n_k)$, $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$, $(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k)$ ile p ve k değerleri için parametrik bootsrap yaklaşımına ait anlamlılık (p) değeri aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilebilir:

Adım 1: Eşitlik 3.41'deki t_0 gözlemlenen değeri hesaplanır.

Adım 2: $i = 1, \dots, k$ için $a_i a_i' = \tilde{s}_i$ olacak şekilde a_i Cholesky faktörleri belirlenir.

Adım 3: $i = 1, \dots, k$ için $Z_i \sim N_p(0, I_p)$ ve $V_i \sim W_p(n_i - 1, I_p)$ değerleri üretilir.

Adım 4: Üretilen Z_i ve V_i kullanılarak $\hat{\mu}_{PBi} = a_i Z_i$ ve $\tilde{\Sigma}_{PBi} = \frac{(a_i V_i a_i')}{(n_i - 1)}$ değerleri hesaplanır.

Adım 5: Hesaplanan bu değerler yardımıyla Eşitlik 3.58'deki $T_{PB}^2(Z_i, V_i)$ parametrik bootstrap değeri elde edilir.

Adım 6: Algoritmanın 3., 4. ve 5. adımları $M_{içdöngü}$ kadar tekrar edilir. Gözlemlenen bir t_0 değeri için t_0'dan daha büyük olan $T^2_{PB}(Z_i, V_i)$ değerlerinin sayısı yapılan $M_{içdöngü}$ tekrar sayısına oranlanarak parametrik bootsrap fonksiyonunun anlamlılık (p) değerleri tahmin edilmektedir. Bu işlemler $M_{dışdöngü}$ kadar tekrar edilen t_0 değerleri için uygulanmaktadır. Her bir t_0 değeri için α anlamlılık düzeyinden daha küçük olan anlamlılık (p) değerlerinin sayısı ise $M_{dışdöngü}$ tekrar sayısına oranlanarak deneysel I. tip hata yapma olasılıkları elde edilmektedir (Lu, 2007).

3.3.4. Zhang ve Liu'nun (2011) Düzeltilmiş Bartlett (MB) testi

MANOVA problemleri, genel lineer hipotez testleri (GLHT) problemlerinin özel bir durumunu ifade etmektedir. İlgilenilen k örneklemdeki bütün popülasyonlara ait ortalama vektörlerinin $\mu = (\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_k')'$ olacak şekilde tek bir vektör biçiminde yazılmasıyla GLHT problemleri

$$H_0: C\mu = c \tag{3.59}$$

biçimindeki yokluk hipotezi ile ifade edilebilir. Burada C, rankı q olan $q * (kp)$ boyutlu bilinen bir katsayı matrisini ve c ise $q * 1$ boyutlu sabit bir vektörü göstermektedir. Üstelik I_r ve 1_r sırasıyla r boyutlu birim matris ve r boyutlu 1'lerden oluşan vektör iken $\otimes$ ise Kronecker çarpım operatörü olmak üzere $c = 0$ ve $C = (I_{k-1}, -1_{k-1}) \otimes I_p$ olduğunda bu hipotez Eşitlik 3.3'de verilen yokluk hipotezine dönüşmektedir. Böylece Eşitlik 3.59'da verilen GLHT formu, MANOVA problemlerine indirgenmektedir (Zhang ve Liu, 2011).

Varsayalım ki Eşitlik 3.59'daki μ parametresinin yansız bir tahmincisi $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1', \dots, \hat{\mu}_k')'$ ve $\Sigma = diag\left(\frac{\Sigma_1}{n_1}, \dots, \frac{\Sigma_k}{n_k}\right)$ olsun. Bu durumda $\hat{\Sigma} = diag\left(\frac{\hat{\Sigma}_1}{n_1}, \dots, \frac{\hat{\Sigma}_k}{n_k}\right)$ olmak üzere Eşitlik 3.59'daki GLHT formu için bir Wald tipi test istatistiği

$$T^2 = (C\hat{\mu} - c)'\left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1}(C\hat{\mu} - c) \tag{3.60}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik 3.60'daki T^2 istatistiğinin olasılık dağılımını daha basit elde etmek amacıyla Yanagira ve Yuan(2005), bir z dönüşümü uygulayarak bu test istatistiği yeniden yazabilmiştir. Yanagira ve Yuan (2005), çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerinde T^2 test istatistiğine z dönüşümü gerçekleştirirken üç yaklaşık test önermiştir. Önerdiği testlerden biri F dağılımı yardımıyla T^2'nin olasılık dağılımına yaklaşarak Welch'in (1938) test yaklaşımını çok değişkenli duruma genellemektir. Diğer iki yöntem ise Bartlett (1937) ve Fujiskoshi'nin (2000) Düzeltilmiş Bartlett (MB) yaklaşımını uygulamaktır. Eşitlik 3.60'daki T^2 istatistiğinin ki-kare dağılımına yakınsama hızı yavaş olduğundan Fujikoshi'nin (2000) MB yaklaşımı da heteroskedastik tek yönlü MANOVA problemlerine Zhang ve Liu (2011) tarafından uygulanmıştır. Yokluk hipotezi altında ve $n_{min} = min(n_i)\ ve\ n_{min} \to \infty \quad iken \quad \frac{n_i}{n_{min}} \to r_i < \infty, \quad i = 1, \ldots k$ koşulu geçerli olduğunda Eşitlik 3.60'daki T^2 istatistiğine Fujikoshi (2000) tarafından sunulan MB yaklaşımı

$$T_{MB} = (n_{min}\beta_1 + \beta_2)log\left(1 + \frac{T^2}{n_{min}\beta_1}\right) \tag{3.61}$$

şeklindeki logaritmik dönüşüm aracılığıyla çok değişkenli durumlara uygulanabilmektedir. Ancak uygulamalı araştırmalar için β_1 ve β_2 parametrelerinin ilgilenilen veriden tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu durumda $C = (C_1, \ldots, C_k)$ olacak şekilde her biri $q \times p$ boyutlu k tane sütuna ayrılan C matrisi için

$$\widehat{\Omega}_i = n_i^{-1}\left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1/2} C_i\hat{\Sigma}_i C_i' \left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1/2} \tag{3.62}$$

olmak üzere test istatistiğinin parametre tahminleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_1 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{tr\left(\widehat{\Omega}_i^2\right)}{n_i - 1} \\ \widehat{\Delta}_2 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{tr^2\left(\widehat{\Omega}_i\right)}{n_i - 1} \end{aligned} \tag{3.63}$$

ve

$$n_{min}\hat{\beta}_1 = \frac{q(q+2)}{2\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2}$$
$$n_{min}\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = \frac{(q+2)\left(2q - \hat{\Delta}_2\right)}{4\hat{\Delta}_1 + 2\hat{\Delta}_2} \qquad (3.64)$$

şeklindedir. Bu durumda Eşitlik 3.61'deki T_{MB} test istatistiği

$$\hat{T}_{MB} = \left(n_{min}\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\right)log\left(1 + \frac{T^2}{n_{min}\hat{\beta}_1}\right) \qquad (3.65)$$

biçiminde hesaplanabilir. Verilen bir α anlamlılık düzeyi için MB testinin kritik değeri, q serbestlik dereceli $\chi_q^2(1-\alpha)$ dağılımına yakınsamaktadır. Eğer α anlamlılık düzeyi için $\hat{T}_{MB}$ test istatistiğinin değeri kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir (Zhang ve Liu, 2011).

3.3.5. Zhang'ın (2012) Yaklaşık Hotelling T^2 (AHT) testi

Zhang'a (2012) göre, bağımsız rassal Wishart matrislerinin doğrusal birleşimleri bir Wishart karma matrisini oluşturmaktadır. O halde bilinen bir Hotelling T^2 dağılımın parametrelerini belirlemek için tek bir Wishart matrisi yardımıyla Wishart karma matrisinin dağılımına yaklaşılabilir. Bu durumda $W_q\left(d, {}^{I_q}/_{d}\right)$ dağılımına sahip bir Wishart karma matrisi için

$$\frac{q+1}{p+1}(n_{min}-1) \leq d \leq \frac{p(q+1)}{q(p+1)}(N-k) \qquad (3.66)$$

aralığında olan d $(d \geq q)$ serbestlik derecesi, $C = (C_1, \ldots, C_k)$ olacak şekilde her biri $q \times p$ boyutlu k tane sütuna ayrılan C matrisi için $H_i = (C\Sigma C')^{-1/2} C_i$ ve $\Omega_i = n_i^{-1} H_i \Sigma_i H_i'$ olmak üzere

$$d = \frac{q(q+1)}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i - 1)} [tr(\Omega_i^2) + tr^2(\Omega_i)]} \tag{3.67}$$

biçiminde elde edilir. Böylece Eşitlik 3.60'daki T^2 istatistiği q ve d parametreli Hotelling $T_{q,d}^2$ istatistiğine dönüşmektedir. Yani GLHT formunda yazılan bir test istatistiğinin olasılık dağılımına q ve d parametreli bir Hotelling $T_{q,d}^2$ dağılımı yardımıyla yaklaşılabilmektedir. Bu nedenle bu test istatistiği "Yaklaşık Hotelling T^2 (AHT)" testi olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla AHT testi, bir Hotelling $T_{q,\hat{d}}^2$ test istatistiği tarafından Wald tipi bir T^2 test istatistiğinin dağılımına benzetilmeye dayanmaktadır. Uygulamalı araştırmalar söz konusu olduğunda Ω ve d parametrelerinin ilgilenilen veriden tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu durumda $i = 1,2, \ldots, k$ olmak üzere

$$\widehat{\Omega}_i = n_i^{-1} \left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1/2} C_i \hat{\Sigma}_i C_i' \left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1/2} \tag{3.68}$$

tahmincisi Ω_i'nin yerine yazılarak d parametresinin tahmincisi

$$\hat{d} = \frac{q(q+1)}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)^{-1} \left[tr\left(\widehat{\Omega}_i^2\right) + tr^2\left(\widehat{\Omega}_i\right)\right]} \tag{3.69}$$

eşitliğindeki gibi elde edilmektedir. Böylece $T_{q,\hat{d}}^2$ test istatistiğinin kritik değeri, verilen bir α anlamlılık düzeyinde

$$\frac{q\hat{d}}{\hat{d} - q + 1} F_{q,\hat{d}-q+1} \tag{3.70}$$

eşitliğindeki q ve $\hat{d}-q+1$ serbestlik dereceli F dağılımı yardımıyla elde edilmektedir. Eşitlik 3.60'daki T^2 test istatistiği kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir (Zhang, 2012).

3.3.6. Eftekhar vd.nin (2018) testleri

3.3.6.1. Eftekhar vd.nin (2018) fiducial yaklaşım testi

Fiducial yaklaşım; veri ile parametreler arasındaki ilişkileri dikkate alarak ilgilenilen parametrelerin olasılık dağılımını elde etmeye dayanan bir yöntemdir. İlk olarak Fisher (1930) tarafından ortaya konulmuştur. Üstelik Fisher (1935) çalışmasında, Behrens'in (1929) önerdiği çözümleme yaklaşımını bir fiducial aralık yöntemi kullanarak doğrulamıştır. Dolayısıyla $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$ test istatistiğinin olasılık dağılımına yakınsamak için fiducial çıkarıma dayalı bir test istatistiği oluşturulabilir. (Eftekhar vd., 2018).

μ_i ve $\Sigma_i^{1/2}$ parametrelerine bağlı olan çok değişkenli bir veri üretme modeli düşünüldüğünde, veri üretme modeli yardımıyla μ_i ve $\Sigma_i^{1/2}$ parametrelerinin fiducial değerleri elde edilmektedir. Bu durumda $i=1,\dots,k$ için $Z_i \sim N_p(0, I_p)$ ve $V_i \sim W_p(n_i - 1, I_p)$ olmak üzere Eşitlik 3.41'deki $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$ test istatistiği için Fiducial Yaklaşım (FY) testi,

$$T_F = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)Z_i' V_i^{-1} Z_i - W_F' \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \tilde{s}_i^{-1}\right)^{-1} W_F \tag{3.71}$$

biçiminde elde edilmektedir. Burada W_F istatistiği

$$W_F = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{n_i(n_i-1)}\,\tilde{s}_i^{-1} V_i^{-1/2} \left(V_i^{1/2} \tilde{s}_i V_i^{1/2}\right)^{1/2} V_i^{-1/2} Z_i \tag{3.72}$$

denklemine eşittir. Eşitlik 3.71'deki T_F fiducial değeri yalnızca Z_i ve V_i parametrelerine bağlı olduğundan T_F istatistiğinin dağılımına yakınsamak için simülasyon tekniği yardımıyla aşağıdaki adımlar dikkate alınır:

Adım 1: $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_k)$ gözlenen değerleri hesaplanır.

Adım 2: $i = 1, \ldots, k$ için $Z_i \sim N_p(0, I_p)$ ve $V_i \sim W_p(n_i - 1, I_p)$ değerleri üretilir.

Adım 3: Eşitlik 3.71 kullanılarak T_F hesaplanır.

Adım 4: 2. ve 3. adımlar $M_{içdöngü}$ kez tekrar edilir. $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$'nin gözlemlenen bir t_0 değeri için t_0'dan daha küçük olan T_F test istatistiklerinin sayısının yapılan $M_{içdöngü}$ tekrar sayısına oranlanarak fiducial yaklaşım yönteminin anlamlılık (p) değerleri tahmin edilmektedir. Bu işlemler $M_{dışdöngü}$ kadar tekrar edilen t_0 değerleri için uygulanmaktadır. Her bir t_0 değeri için $(1-\alpha)$'dan daha büyük olan anlamlılık (p) değerlerinin sayısı ise $M_{dışdöngü}$ tekrar sayısına oranlanarak deneysel I. tip hata yapma olasılıkları elde edilmektedir.

3.3.6.2.Eftekhar vd.nin (2018) yaklaşık testi

Parametrik bootstrap ve fiducial yaklaşım testleri, anlamlılık (p) değerlerini hesaplamak için simülasyon tekniğine ihtiyaç duymaktadır. Ancak her iki test istatistiği de oldukça zaman alan yöntemlerdir. Uygulamalı araştırmalarda ise daha basit çözüm yaklaşımlarının kullanılması önemlidir. Yaklaşık Test (YT), küçük örneklem büyüklüklerinde test istatistiğinin χ^2 dağılımına yaklaşımını sağlamak için Bartlett düzeltmesini kullanarak T_F fiducial test istatistiğinin beklenen değerini dikkate alan bir yaklaşımdır.

Eşitlik 3.71'de tanımlanan T_F fiducial testi için $i = 1, \ldots, k$ ve $n_i > p + 2$ olmak üzere verilen $\tilde{s}_i$ değerlerine bağlı olarak T_F'nin beklenen değeri yaklaşık olarak

$$E(T_F) \approx p \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n_i - p - 2} - tr\left[\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \tilde{s}_i^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n_i - p - 2} \tilde{s}_i^{-1}\right] \qquad (3.73)$$

denklemine eşittir. T_F fiducial istatistiğinin beklenen değeri dikkate alınarak Eşitlik 3.3'deki yokluk hipotezi test edilebilir (Eftekhar vd., 2018). Bu durumda $i = 1, \dots, k$ için $n_i > p + 2$ olduğu zaman $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$ test istatistiği için kritik değer

$$\frac{E(T_F)}{p(k-1)} \chi^2_{p(k-1),(1-\alpha)} \tag{3.74}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu durumda eğer $T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)$ test istatistiği Eşitlik 3.74'deki kritik değerden daha büyük ise yokluk hipotezi α anlamlılık düzeyinde reddedilmektedir.

3.4. Yüksek Boyutlu Veriler İçin Behrens-Fisher Problemi

Varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlandığında Hotelling T^2 ve MANOVA test istatistikleri, bağımlı değişken sayısının gözlem sayısından daha az olduğu durumlarda kullanılan güçlü testlerdir. Ancak bağımlı değişken sayısının gözlem sayısından daha büyük olduğu durumlarda ise örneklem kovaryans matrisi tam ranklılık özelliğini kaybetmekte ve tekil bir matris olmaktadır. Bu durumda örneklem kovaryans matrisinin tersi alınamamaktadır (Jiamwattanapong ve Chongcharoen, 2015). Dolayısıyla yüksek boyutlu veriler söz konusu olduğunda bilinen test istatistikleri kullanılamamaktadır.

Son yıllarda mevcut teknolojik gelişmeler ile birlikte depolanabilir ve ulaşılabilir veri kaynağında hızlı bir artış sağlanmıştır. Bu durum, yüksek boyutlu veriler ile daha sık karşılaşmamıza neden olmaktadır. Özellikle sağlık, endüstri, biyoloji, genetik bilimi, finans, mühendislik vb. gibi birçok alanda, bağımlı değişken sayısının gözlem sayısından daha fazla olduğu veriler ile sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu nedenle yüksek boyutlu verilerin analiz edilmesine duyulan ihtiyaç giderek artmaktadır. Bu ihtiyacı karşılamak için uygun istatistiksel tekniklerin geliştirilmesi önem kazanmıştır. Bu problemin üstesinden gelmek için birçok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Bağımlı değişken sayısının gözlem sayısından daha büyük olduğu durumlarda iki ortalama vektör arasındaki farkı eşitliğini test etmek için ilk çalışmalar Dempster (1958, 1960) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonra Bai ve Saranadasa(1996), yüksek boyutlu veri durumunda varyans-kovaryans matrisleri homojen iken iki ortalama vektör arasındaki farkı test etmek için $\|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\|^2$ biçimindeki Öklid uzaklık ölçüsüne dayalı yeni bir test istatistiği önermiştir. Bu testin amacı, değişken sayısının gözlem sayısından daha büyük olması durumunda örneklem varyans-kovaryans matrisinin kullanışlı olmaması nedeniyle Mahalanobis uzaklık ölçüsü yerine Öklid uzaklık ölçüsünü kullanmaktadır (Feng vd., 2015).

Chen ve Qin (2010) ise varyans-kovaryans matrislerinin eşit olmadığı durumlarda yüksek boyutlu iki ortalama vektör arasındaki farkı test etmek için $\|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\|^2$ uzaklık ölçüsünden $\sum_{j=1}^{n_i} X'_{ij} X_{ij}$ terimini çıkartarak yeni test istatistiğini

$$T_n = \frac{\sum_{i \neq j}^{n_1} X'_{1i} X_{1j}}{n_1(n_1 - 1)} + \frac{\sum_{i \neq j}^{n_2} X'_{2i} X_{2j}}{n_2(n_2 - 1)} - \frac{2 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X'_{1i} X_{2j}}{n_1 n_2} \tag{3.75}$$

biçiminde tanımlamaktadır. Chen ve Qin (2010) testi için temel varsayımlar:

a) Her bir Γ_i, bazı $t \geq p$ için $\Gamma_i \Gamma'_i = \Sigma_i$ olacak şekilde $t \times k$ boyutlu bir matris ve $\{Z_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$ ise $E(Z_{ij}) = 0$ ile $Cov(Z_{ij}) = I_t$ olmak üzere t boyutlu bağımsız ve özdeş rassal vektörler olmak üzere çok değişkenli model:

$$X_{ij} = \Gamma_i Z_{ij} + \mu_i, \qquad i = 1,2, \qquad j = 1, \dots, N_i$$

b) $Z_{ij} = (z_{ij1}, \dots, z_{ijt})'$ için $E(Z_{ijk}^4) = \Delta + 3 < \infty$ ve $l_1 \neq \cdots \neq l_q$ ve $\sum_{l=1}^{q} \alpha_l \leq 8$ olmak üzere

$$E\left(Z_{ijl_1}^{\alpha_1}, Z_{ijl_2}^{\alpha_2}, \dots, Z_{ijl_q}^{\alpha_q}\right) = E\left(Z_{ijl_1}^{\alpha_1}\right) E\left(Z_{ijl_2}^{\alpha_2}\right) \dots E\left(Z_{ijl_q}^{\alpha_q}\right)$$

c) $N \to \infty$ için $\frac{n_1}{n_1 + n_2} \to k \in (0,1)$

d) $o, p, r, s = 1 \; veya \; 2$ için $tr(\Sigma_o \Sigma_p \Sigma_r \Sigma_s) = o[tr^2\{(\Sigma_1 + \Sigma_2)^2\}]$

e) i = 1,2 için $(\mu_1 - \mu_2)' \Sigma_i (\mu_1 - \mu_2) = o[n^{-1} tr\{(\Sigma_1 + \Sigma_2)^2\}]$

şeklindedir. Bu varsayımlar dikkate alınarak asimptotik sonuçlar elde edilebilmektedir. Böylece Eşitlik 3.75'e dayalı bir test istatistiği tanımlamak için T_n test istatistiğinin tutarlı en iyi varyans tahmincisi

$$(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{2}{n_1(n_1-1)}\widehat{tr\Sigma_1^2} + \frac{2}{n_2(n_2-1)}\widehat{tr\Sigma_2^2} + \frac{4}{n_1 n_2} tr(\widehat{\Sigma_1\Sigma_2}) \tag{3.76}$$

şeklinde hesaplanmaktadır (Chen ve Qin, 2010). Bu durumda yukarıdaki varsayımlar dikkate alınarak yokluk hipotezi altında $p \to \infty$ ve $N \to \infty$ için test istatistiği

$$T_{ChenQin} = \frac{T_n}{\hat{\sigma}_n} \to N(0,1) \tag{3.77}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Böylece nominal α anlamlılık düzeyi için test istatistiği standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

Yüksek boyutlu iki örneklem problemleri için önerilen bu test istatistiklerini takiben Srivastava ve Du (2008) ile Feng vd. (2014) tarafından farklı çözümleme yaklaşımları ortaya konulmuştur. Yüksek boyutlu MANOVA problemlerinin çözümlenmesinde ise Dempster (1958,1960), Bai ve Saranadasa (1996) ile Chen ve Qin (2010) testlerinden yararlanılmıştır.

Yüksek boyutlu veriler söz konusu olduğunda çok değişkenli k örneklem problemleri için Fujikoshi, Himeno ve Wakaki (2004), Dempster (1958)'in testini genelleyerek grup içi ve gruplar arası örneklem kovaryans matrislerinin izlerinin oranına dayalı bir test istatistiği ortaya koymuştur. Srivastava (2007) ise grup içi örneklem kovaryans matrisinin tersini almak yerine bu matrisin Moore-Penrose tersini kullanarak tek örneklem, iki örneklem ve k örneklem problemleri için yeni bir test istatistiği önermiştir.

Ayrıca yüksek boyutlu çok değişkenli MANOVA problemlerinde normallik ve homojenlik varsayımlarının sağlandığı ve sağlanmadığı durumlar için Srivastava ve Fujikoshi (2006), Srivastava (2007), Schoot (2007), Zhang ve Xu (2009), Yamada ve Srivastava (2012), Srivastava ve Kubokawa (2013), Cai ve Xia (2014) ile Liu vd. (2017) tarafından farklı çözümleme yaklaşımları geliştirmişlerdir. Ancak homojenlik varsayımının sağlanmadığı durumlarda yüksek boyutlu çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için sunulan çözümleme yaklaşımları sınırlı sayıdadır.

3.4.1. Schott (2007) testi

Homojenlik varsayımı sağlandığında yüksek boyutlu veriler için bilinen klasik MANOVA testlerine alternatif bir yaklaşım Schott (2007) testidir. Schott (2007) testi, Bai ve Saranadasa'nın (1996) test istatistiğinin Eşitlik 3.3'deki yokluk hipotezini test etmek için genellenmesine dayanmaktadır. Schott (2007) testinin temel varsayımları;

a) $i = 1, \dots, k$ ve $j = 1, \dots, n_i$ olmak üzere X_{ij} rassal örneklemlerinin normal dağılıma sahip bir modelden gelmesi

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{N} \in (0,1)$

c) $i = 1\ veya$ 2 için $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{tr(\Sigma^{2i})}{p} \in (0,\infty)$

şeklindedir (Cao vd., 2019). Bu varsayımlar altında Eşitlik 3.4'de verilen grup içi (W) ve gruplar arası (B) matrislere bağlı olarak Bai ve Saranadasa'nın (1996) test istatistiği ikiden fazla ortalama vektörler için

$$T_{np} = \sqrt{\frac{1}{N-1}}\left[\frac{tr(B)}{k-1} - \frac{tr(W)}{N-k}\right] \tag{3.78}$$

eşitliğindeki gibi genellenebilir. Bu durumda yokluk hipotezi altında test istatistiğinin varyansı

$$\sigma_{np}^2 = \frac{2}{(k-1)(N-k)} tr(\Sigma^2) \tag{3.79}$$

eşitliğindeki gibi olmak üzere olup Schott (2007) test istatistiği

$$T_{Schott} = \frac{T_{np}}{\sigma_{np}} \longrightarrow N(0,1) \tag{3.80}$$

olacak şekilde standart normal dağılıma yakınsamaktadır. Örneklem istatistiklerine bağlı olarak Eşitlik 3.78'deki T_{np} test istatistiğinin asimptotik dağılımına yakınsamak için σ_{np}^2'nin tutarlı bir tahmincisinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu durumda Eşitlik 3.79'daki $tr(\Sigma^2)$'nin tahmincisi

$$\widehat{tr(\Sigma^2)} = \frac{1}{(N-k+2)(N-k-1)}\left[tr(W^2) - \frac{1}{(N-k)}\big(tr(W)\big)^2\right] \tag{3.81}$$

olmak üzere σ_{np}^2 tutarlı bir tahmincisi

$$\hat{\sigma}_{np}^2 = \frac{2}{(k-1)(N-k)}\widehat{tr(\Sigma^2)} \tag{3.82}$$

biçiminde olacaktır. Dolayısıyla Schott (2007)'un test istatistiği

$$T_{Schott}^* = \frac{T_{np}}{\hat{\sigma}_{np}} \to N(0,1) \tag{3.83}$$

olacak şekilde standart normal dağılıma yakınsamaktadır. Belirlenen bir α anlamlılık düzeyine göre T_{Schott}^* test istatistiği standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

3.4.2. Nishiyama vd.nin (2013) testi

Bennett (1951), iki örneklem Berhens-Fisher problemlerinin çözümü için en küçük gözlem büyüklüğüne sahip örnekleme dayalı olarak bir test istatistiği önermiştir. Bennett'in (1951) yaklaşımına göre $i = 1, \dots, k$ ve $n_l = \min(n_i)$ olmak üzere en küçük gözlem boyutuna sahip grup için örneklem ortalaması ve örneklem varyans-kovaryans matrisi sırasıyla

$$\bar{X}_l = \frac{1}{n_l}\sum_{t=1}^{n_l} X_t \tag{3.84}$$

$$S_l = \frac{1}{n_l}\sum_{t=1}^{n_l}(X_t - \bar{X}_l)(X_t - \bar{X}_l)' \tag{3.85}$$

biçimindedir. Dempster (1958,1960) ise tek ve iki örneklem problemleri için gruplar arası ve grup içi kovaryans matrislerinin iz değerlerine dayalı tam olmayan bir test sunmuştur. Dolayısıyla Bennett'in (1951) en küçük gözlem sayısına sahip örneklem yaklaşımı kullanılarak $p > n_l - 1$ olmak üzere Dempster'ın (1960) iz kriterine dayalı yeni bir test istatistiği

$$\tilde{T}_D = \sqrt{p}\left(\frac{n_l\bar{y}'\bar{y}}{tr(S_l)} - 1\right) \tag{3.86}$$

eşitliğindeki gibi yazılabilir (Nishiyama vd., 2013). Eşitlik 3.86'daki test istatistiğinin asimptotik dağılımına yakınsamak için

- ✓ $n_l, p \to \infty$ için $\frac{p}{n_l} \to c \in (0, \infty)$
- ✓ $i = 1, \dots, 4$ için $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{tr\Sigma^i}{p} \to k_i \in (0, \infty)$
- ✓ $i = 1, \dots, 8$ için $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{tr\Sigma^i}{p} \to k_i \in (0, \infty)$

varsayımları dikkate alınmaktadır. Bu varsayımlar göz önüne alınarak, test istatistiğinin standart sapmasının tutarlı bir tahmincisinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu durumda $a_i = {tr\Sigma^i}/{p}$ olmak üzere

$$\hat{a}_1 = \frac{tr(S_l)}{p} \tag{3.87}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{(n_l - 1)^2}{p(n_l - 2)(n_l + 1)}\left(tr\left({S_l}^2\right) - \frac{1}{(n_l - 1)}\left(tr^2(S_l)\right)\right) \tag{3.88}$$

için σ_D^2'ın yansız bir tahmincisi

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{2\hat{a}_1}{\hat{a}_2} \tag{3.89}$$

şeklinde belirlenmektedir. Böylece $T_{NHSP}^* = {\tilde{T}_D}/{\hat{\sigma}_D}$ eşitliği dağılımda standart normal dağılıma yakınsamaktadır. Belirlenen bir α anlamlılık düzeyine göre T_{NHSP}^* test istatistiği standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

3.4.3. Yamada ve Himeno (2015) testi

Yamada ve Himeno (2015), yüksek boyutlu veriler için varyans-kovaryans matrislerini eşitliği varsayımına ihtiyaç duyulmadan k örneklem ortalamalar vektörünün eşitliğini test etmek için Schott (2007) test istatistiğini

$$T_{YH} = tr(B) - \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{n_i}{N}\right) tr\left(\hat{\Sigma}_i\right) \tag{3.90}$$

biçiminde yeniden tanımlamıştır. Bu durumda test istatistiğinin standart sapmasının tutarlı bir tahmincisinin belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla $tr\widehat{\left(\Sigma_i\Sigma_j\right)} = tr\left(\hat{\Sigma}_i\hat{\Sigma}_j\right)$ ve

$$\theta_i = \frac{1}{(n_i - 1)}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)'\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)\right)^2 \tag{3.91}$$

için

$$\widehat{tr(\Sigma_i^2)} = \frac{(n_i-1)}{n_i(n_i-2)(n_i-3)}\left[\left\{(n_i-1)(n_i-2)tr\left(\hat{\Sigma}_i^2\right)\right\} + \left(tr\left(\hat{\Sigma}_i\right)\right)^2 - n_i\theta_i\right] \quad (3.92)$$

olmak üzere σ_{YH}^2'ın yansız bir tahmincisi

$$\hat{\sigma}_{YH}^2 = 2\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)^2 \frac{n_i}{(n_i-1)}\widehat{tr(\Sigma_i^2)} + 2\sum_{i\neq j}^{k}\frac{n_i n_i}{N^2}\widehat{tr(\Sigma_\iota\Sigma_J)} \quad (3.93)$$

şeklindedir. Böylece Eşitlik 3.93 yardımıyla Yamada ve Himeno'nun (2015) test istatistiği

$$T_{YH}^* = \frac{T_{YH}}{\hat{\sigma}_{YH}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (3.94)$$

olmak üzere dağılımda standart normal dağılıma yakınsamaktadır. Belirlenen bir α anlamlılık düzeyine göre T_{YH}^* test istatistiği standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

3.4.4. Hu vd.nin (2015) testi

Yüksek boyutlu veriler için çok değişkenli Behrens-Fisher problemi söz konusu olduğunda Chen ve Qin (2010) testinin ikiden fazla grup ortalaması için genellenmesi Hu vd. (2015) tarafından sunulmuştur. Chen ve Qin (2010) test istatistiği için kabul edilen varsayımlar ikiden fazla grup için genellendiğinde bu varsayımlar sırasıyla;

a) Her bir Γ_i, bazı $t \geq p$ için $\Gamma_i\Gamma_i' = \Sigma_i$ olacak şekilde $p \times t$ boyutlu bir matris ve $\left\{Z_{ij}\right\}_{j=1}^{N_i}$ ise $E\left(Z_{ij}\right) = 0$ ile $Cov\left(Z_{ij}\right) = I_t$ olmak üzere t boyutlu bağımsız ve özdeş dağılımlı rassal vektörler olmak üzere çok değişkenli model:

$$X_{ij} = \Gamma_i Z_{ij} + \mu_i, \qquad i = 1, \dots, k \qquad j = 1, \dots, n_i$$

b) $Z_{ij} = (z_{ij1}, \dots, z_{ijt})'$ için $E(Z_{ijk}^4) < \infty$ ve $l_1 \neq \cdots \neq l_q$ ve $\sum_{l=1}^{q} \alpha_l \leq 8$ olmak üzere

$$E\left(Z_{ijl_1}^{\alpha_1}, Z_{ijl_2}^{\alpha_2}, \dots, Z_{ijl_q}^{\alpha_q}\right) = E\left(Z_{ijl_1}^{\alpha_1}\right)E\left(Z_{ijl_2}^{\alpha_2}\right) \dots E\left(Z_{ijl_q}^{\alpha_q}\right)$$

c) $N \to \infty\ ve\ N = \sum_{i=1}^{k} ni\ \ için\ i = 1, \dots, k$ olmak üzere $\frac{n_i}{N} \to k_i \in (0,1)$

d) $o, p, r \in \{1, \dots, k\}$ için $tr(\Sigma_o \Sigma_p \Sigma_o \Sigma_r) = o[tr(\Sigma_o \Sigma_p) tr(\Sigma_o \Sigma_r)]$

e) $o, p, r \in \{1, \dots, k\}$ için $(\mu_o - \mu_p)' \Sigma_o (\mu_o - \mu_r) = o\left[n^{-1} tr\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} \Sigma_i\right)^2\right\}\right]$

şeklinde ifade edilecektir. Böylece ikiden fazla ortalama vektörün karşılaştırılması için Öklid uzaklık ölçüsüne dayalı olarak oluşturulan test istatistiği

$$\begin{aligned} T_n^k &= \sum_{i<j}^{k} (\bar{X}_i - \bar{X}_j)'(\bar{X}_i - \bar{X}_j) - (k-1)\sum_{i=1}^{k} n_i^{-1} tr\hat{\Sigma}_i \\ &= (k-1)\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i(n_i-1)} \sum_{k_1 \neq k_2}^{k} X_{ik_1}' X_{ik_2}' - \sum_{i<j}^{k} \frac{2}{n_i n_j} \sum_{k_1, k_2} X_{ik_1}' X_{jk_2}' \end{aligned} \tag{3.95}$$

biçiminde tanımlanır. İkiden fazla grup için genellenen varsayımlar dikkate alınarak yokluk hipotezi altında $p \to \infty$ ve $N \to \infty$ için T_n^k test istatistiğine ait $E(T_n^k)$ ve $Var(T_n^k)$ değerleri sırasıyla

$$E(T_n^k) = \sum\nolimits_{i<j}^{k} \|\mu_1 - \mu_2\|^2 \tag{3.96}$$

ve

$$\begin{aligned} Var(T_n^k) &= \sum\nolimits_{i=1}^{k} \frac{2(k-1)^2}{n_i(n_i-1)} tr\Sigma_i^2 + \sum_{i<j}^{k} \frac{4}{n_i n_j} tr(\Sigma_i \Sigma_j) \\ &+ 4\sum\nolimits_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{k} \mu_j - k\mu_i\right)' \Sigma_i \left(\sum\nolimits_{j=1}^{k} \mu_j - k\mu_i\right) \end{aligned} \tag{3.97}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu durumda Eşitlik 3.95'deki T_n^k test istatistiği

$$\frac{T_n^k - E(T_n^k)}{\sqrt{Var(T_n^k)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{3.98}$$

olacak şekilde normal dağılıma yakınsamaktadır. Chen ve Qin (2010) test istatistiğine paralel olarak T_n^k istatistiğinin tanımlanması için $Var(T_n^k)$'ın tahmin edilmesi gerekmektedir. Yukarıda verilen varsayımlar dikkate alınarak $p \to \infty$ ve $N \to \infty$ için

$$\begin{gathered} \widehat{tr\Sigma_i^2} = \frac{(n_i - 1)^2}{(n_i + 1)(n_i - 2)}\left(tr\hat{\Sigma}_i^2 - \frac{1}{n_i - 1}tr^2\hat{\Sigma}_i\right) \\ tr\left(\widehat{\Sigma_\iota\Sigma_j}\right) = tr\hat{\Sigma}_i\hat{\Sigma}_j \end{gathered} \tag{3.99}$$

olmak üzere minimum varyanslı yansız tahmincisi (UMVUE)

$$(\hat{\sigma}_n^k)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{2(k-1)^2}{n_i(n_i - 1)}\widehat{tr\Sigma_i^2} + \sum_{i<j}^{k} \frac{4}{n_i n_j} tr\left(\widehat{\Sigma_\iota\Sigma_j}\right), \qquad i \neq j \in \{1, \dots, k\} \tag{3.100}$$

şeklindedir. Dolayısıyla yokluk hipotezi ve bütün varsayımlar altında $p \to \infty$ ve $N \to \infty$ için test istatistiği

$$T_{Hu} = \frac{T_n^k}{\hat{\sigma}_n^k} \to N(0,1) \tag{3.101}$$

olmaktadır. Eşitlik 3.101'deki T_{Hu} test istatistiği, belirli bir anlamlılık düzeyine göre standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir. Ayrıca $k = 2$ durumunda T_n^k test istatistiği Chen ve Qin'in (2010) iki değişkenli test istatistiğine dönüşmektedir (Hu vd., 2015).

3.4.5. Zhou'nun (2016) L^2 norm testi

Heterojenlik altında tek yönlü MANOVA problemlerine ilişkin bir başka yaklaşım ise Zhou (2016) tarafından sunulmuştur. Zhou (2016), varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımı olmadan yüksek boyutlu örneklemlerin ortalamalar vektörlerinin eşitliğini test etmek için L^2 norm yaklaşımına dayalı bir test istatistiği ortaya koymuştur. Öklid normu olarak da bilinen L^2 norm, iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı ifade etmektedir. Bu durumda tek yönlü MANOVA probleminde normal dağılıma sahip k grup için L^2 norm uzaklığına dayalı bir test istatistiği

$$T_n = \sum_{i=1}^{k} n_i \|\bar{X}_i - \bar{X}\|^2 \tag{3.102}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu test istatistiği, ilgilenilen k örneklemin ortalamalar vektörü ile bütün örneklemlerin ağırlıklandırılmış örneklem ortalama vektörü arasındaki L^2 uzaklığına bağlı bir test istatistiğidir. Eşitlik 3.102'deki test istatistiğinin olasılık dağılımına yakınsamak için Welch-Satterthwaite ki-kare yaklaşımı kullanılmıştır. Satterthwaite (1946), ki-kare dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenlerin doğrusal birleşimlerinin de ki-kare dağıldığını ifade etmektedir. Bu durumda bilinmeyen β ve d parametreli bir $\beta\chi_d^2$ dağılımına sahip rassal değişkeninin ilk iki momenti yardımıyla Eşitlik 3.102'deki test istatistiğinin olasılık dağılımına yakınsanabilir. Dolayısıyla uygulamalı örneklemler için β ve d parametrelerinin tahmincileri kullanılarak T_n test istatistiği için $\hat{\beta}\chi_{\hat{d}}^2$ değeri, kritik değer olarak belirlenmektedir. Bu durumda $i, j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 - \dfrac{n_i}{N} & i = j \\ a_{ij} = -\dfrac{\sqrt{n_i n_j}}{N} & i \neq j \end{cases} \tag{3.103}$$

olmak üzere β ve d parametrelerinin tahmincileri sırasıyla

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{ii}^2 \left[\frac{(n_i-1)^2}{(n_i-2)(n_i+1)}\left(tr\left(\hat{\Sigma}_i^2\right) - \frac{1}{(n_i-1)} tr^2(\hat{\Sigma}_i)\right)\right] + 2\sum_{i\neq j} a_{ij}^2 tr\left(\hat{\Sigma}_i\hat{\Sigma}_j\right)}{\sum_{i=1}^{k} a_{ii} tr(\hat{\Sigma}_i)} \qquad (3.104)$$

ve

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{ii}^2 \left[\frac{n_i(n_i-1)}{(n_i-2)(n_i+1)}\left(tr^2(\hat{\Sigma}_i) - \frac{2}{n_i} tr\left(\hat{\Sigma}_i^2\right)\right)\right] + 2\sum_{i\neq j} a_{ii}a_{jj} tr(\hat{\Sigma}_i) tr\left(\hat{\Sigma}_j\right)}{\sum_{i=1}^{k} a_{ii}^2 \left[\frac{(n_i-1)^2}{(n_i-2)(n_i+1)}\left(tr\left(\hat{\Sigma}_i^2\right) - \frac{1}{(n_i-1)} tr^2(\hat{\Sigma}_i)\right)\right] + 2\sum_{i\neq j} a_{ij}^2 tr\left(\hat{\Sigma}_i\hat{\Sigma}_j\right)} \qquad (3.105)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece hesaplanan T_n test istatistiği $\hat{\beta}\chi_{\hat{d}}^2$ kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir (Zhou, 2016).

3.4.6. Cao vd.nin (2019) testi

Chen ve Qin (2010), varyans- kovaryans matrislerinin heterojenliği altında iki ortalama vektör arasındaki farkın eşitliğini test etmek için Bai ve Saranadasa'nın (1996) sunduğu test istatistiğinden $\sum_{j=1}^{n_i} X'_{ij}X_{ij}$ terimini çıkartarak yeni bir test istatistiği ortaya koymuştur. Cao vd.nin (2019) test istatistiği ise çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerinde tek yönlü MANOVA testine bir alternatif olarak ikiden fazla ortalama vektör arasındaki farkın eşitliği test etmek için Chen ve Qin'in (2010) bir terimi dışarda bırakma düşüncesinin Schott (2007) tarafından sunulan test istatistiğine uygulanmasına dayanmaktadır.

Eşitlik 6.4'deki Schott'un (2007) test istatistiğine Chen ve Qin'in (2010) $X'_{it}X_{it}$ terimini çıkarma düşüncesi uygulandığında, Schott'un (2007) test istatistiği

$$T_{Cao} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N-n_i}{N(n_i-1)} \sum_{t\neq s}^{n_i} X'_{it}X_{is} - \sum_{i\neq j}^{k} \frac{n_i n_j}{N} \bar{X}'_i \bar{X}_j \qquad (3.106)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Hu vd.nin (2015) çok değişkenli model yapısı ile birlikte Cao vd.nin (2019) test istatistiği

- ✓ $i = 1, \dots, k$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{N} \to k_i \in (0,1)$
- ✓ $N, p \to \infty$ ve $i, j \in \{1, \dots, k\}$ için $(\mu_i - \mu_j)'\Sigma_i(\mu_i - \mu_j) = o\left[n^{-1}tr\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}\Sigma_i\right)^2\right\}\right]$
- ✓ $p \to \infty$ ve $i, j, m, n \in \{1, \dots, k\}$ için $tr(\Sigma_i\Sigma_j\Sigma_m\Sigma_n) = o\left[tr^2\left(\sum_{i=1}^{k}\Sigma_i\right)^2\right]$

şeklindeki üç temel varsayıma dayanmaktadır. Bu durumda test istatistiğinin asimptotik dağılımına yakınsamak için standart sapmasının tutarlı bir tahmincisinin belirlenmesi gerekmektedir. Standart sapmanın tutarlı bir tahmincisini belirlemek için Aoshima ve Yata (2011) ile Hu vd. (2015) iki farklı yaklaşım benimsemiştir. Hu vd.nin (2015) çalışmasındaki tahmin edici dikkate alınarak standart sapmanın tutarlı bir tahmincisi

$$\widetilde{tr(\Sigma_i^2)} = \frac{(n_i - 1)^2}{(n_i + 1)(n_i - 2)}\left[tr\left(\hat{\Sigma}_{in_i}^2\right) - \frac{1}{(n_i - 1)}\left(tr\left(\hat{\Sigma}_{in_i}\right)\right)^2\right] \tag{3.107}$$

olmak üzere

$$\tilde{\sigma}_{cao}^2 = \frac{2}{N^2}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(N - n_i)^2}{(n_i - 1)}\widetilde{tr(\Sigma_i^2)} + \sum_{i\neq j}^{k} n_i n_j \widehat{tr(\Sigma_i\Sigma_j)}\right] \tag{3.108}$$

biçiminde elde edilir. Böylece test istatistiğinin asimptotik dağılımı

$$T_{Cao}^* = \frac{T_{Cao}}{\tilde{\sigma}_{Cao}} \tag{3.109}$$

olacak şeklinde standart normal dağılıma yakınsamaktadır. Bu durumda α anlamlılık düzeyinde Eşitlik 3.109'daki T_{Cao}^* test istatistiği standart normal dağılımın kritik değerinden daha büyük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir.

4. YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında MANOVA problemlerine alternatif olarak önerilen test istatistiklerinin performansları karşılaştırmak için Monte Carlo simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Simülasyon çalışması yardımıyla test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıkları belirlenmiştir. Ayrıca test istatistiklerinin her biri; ilgilenilen anakütlenin olasılık dağılımına, varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik/heterojenlik durumuna, nominal anlamlılık düzeyine, bağımlı değişken sayısına, grup sayısına ve her bir grup için incelenen gözlem sayısına bağlı olarak farklı deneysel koşullar altında ayrı ayrı incelenmiştir.

Çalışmada heterojenlik varsayımı altında iki farklı simülasyon çalışması uygulanmıştır. Birinci simülasyon çalışmasında; çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için klasik MANOVA test istatistikleri ile birlikte Johansen, PB, MB, AHT, YT, FY ve düzeltilmiş MANOVA testleri karşılaştırılmıştır. İkinci simülasyon çalışmasında ise yüksek boyutlu Behrens-Fisher problemleri için Yamada ve Himeno (2015), Hu vd. (2015), Nishiyama vd. (2015), Zhou (2016) ve Cao vd.nin (2019) test istatistikleri karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışmasında test istatistiklerinin algoritmaları oluşturmak için R 3.6.3 ve RStudio paket programları kullanılmıştır.

Çok değişkenli Behrens-Fisher problemleri için uygulanan simülasyon çalışmasında ilk olarak, varyans-kovaryans matrislerinin eşit ve eşit olmadığı durumlar göre normal ve normal olmayan dağılımlar için simülasyon verileri türetilmiştir. Üretilen veriler yardımıyla test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıkları belirlenmiştir. Her bir tablo varyans-kovaryans matrislerinin homojen olduğu ve olmadığı durumlara göre ikiye ayrılmıştır. Ayrıca hem homojen hem de heterojen durumlarda gözlem büyüklüklerinin test istatistikleri üzerindeki etkisini araştırmak için eşit, dengeli ve dengesiz gözlem büyüklükleri olmak üzere üç farklı örnek yapısı incelenmiştir. Yüksek boyutlu Behrens-Fisher problemleri için kullanılan test istatistikleri ise otoregresif ve bileşik model olmak üzere heterojenlik altında iki farklı varyans-kovaryans matris formuna göre karşılaştırılmıştır.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Çok Değişkenli Behrens-Fisher Problemleri İçin Simülasyon Çalışması

$\Sigma_i^{1/2}$; Σ_i'nin karekök matrisi, $Z_{ij} = (z_{ij1}, \dots, z_{ijp})'$ ve z_{ijt}'ler ise bağımsız ve özdeş dağılan rassal değişkenler olmak üzere ilk olarak

$$X_{ij} = \Sigma_i^{1/2} Z_{ij} + \mu_i \tag{5.1}$$

biçimindeki veri üretme modeli yardımıyla simüle edilmiş örneklemler türetilmiştir. Veri üretme modelinde z_{ijt} bağımsız rassal değişkenleri

1. Model: $N(0,1)$

2. Model: $\frac{(\chi^2_{16}-16)}{\sqrt{32}}$ (5.2)

olmak üzere iki farklı dağılıma göre hesaplanmıştır. Birinci modelde her bir değişkeni standart normal dağılıma sahip olan z_{ij} bağımsız rassal değişkenler, Cholesky ayrışımı yardımıyla çok değişkenli gözlemlerin bir vektörüne dönüştürülmüştür. İkinci modelde ise z_{ij} bağımsız rassal değişkenleri, standartlaştırılmış bir χ^2_{16} dağılımından türetilmiştir.

Varyans-kovaryans matrislerinin hem homojen hem de heterojen olduğu durumlarda test istatistiklerinin ortaya koyduğu I. tip hata olasılıklarını belirlemek için $i = 1, \dots, k$ olmak üzere

1. Durum: $\Sigma_i = I_p$

2. Durum: $U_i \sim Uniform\left(0, {}^5\!/_3\right)$ ve $d_i = 1 + (-1)^{i+j} * \frac{U_i}{2}$ için

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\rho * i)^{|1-1|^{1/10}} & \dots & (\rho * i)^{|1-p|^{1/10}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\rho * i)^{|p-1|^{1/10}} & \dots & (\rho * i)^{|p-p|^{1/10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_p \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

şeklinde iki farklı durum düşünülmüştür. Birinci durumda bütün gruplar için ortak varyans-kovaryans matrisi p boyutlu birim matris olacak şekilde aynı kabul edilmiştir. İkinci durumda ise grup sayısına, bağımlı değişken sayısına ve bağımlı değişkenler arasındaki korelasyona bağlı olarak değişen varyans-kovaryans matris yapısı düşünülmüştür. Heterojen kovaryans yapısı, Srivastava vd.nin (2014) alternatif hipotez modeline dayanmaktadır.

Eşitlik 5.1'deki veri türetme modeli ve 5.3'deki varyans-kovaryans yapıları kullanılarak her bir test istatistiğinin p-value değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen anlamlılık (p) değerleri nominal α değeri ile karşılaştırılmış ve p-value değerinden daha büyük olan nominal α değerleri için yokluk hipotezi reddedilmiştir. Yapılan tekrar (iterasyon) sayısı N^* olmak üzere bu işlemler N^* kez tekrar edilerek elde edilen red sayıları toplamının yapılan iterasyon sayısına oranı, test istatistiklerinin her biri için I. tip hata olasılıkları olarak elde edilmiştir.

Çalışmada PB ve FT testleri hariç diğer test istatistikleri için 10000 iterasyon gerçekleştirilmiştir. Ancak PB ve FT yaklaşımları zaman alan yöntemler olduğundan gözlemlenen parametre değerlerini hesaplamak için yapılan dış döngüde 1000 iterasyon ve anlamlılık (p) değerlerinin elde edilmesi için yapılan iç döngüde ise 1000 iterasyon uygulanmıştır. Her bir test istatistiği için $k = 3,4,5,6$ olmak üzere dört farklı örneklem ve her bir örneklem için $p = 2,4,6,8$ olacak şekilde dört farklı bağımlı değişken dikkate alınmıştır. Heterojenlik yapısını temsilen eden varyans-kovaryans matrisleri için korelasyon katsayısı $\rho = 0.05$ olarak hesaplanmıştır. Ayrıca nominal anlamlılık düzeyi için $\alpha = 0.05$ olarak belirlenmiştir.

Yapılan simülasyonlar sonucunda elde edilen deneysel I. tip hata oranlarına $(\hat{\alpha})$ göre test istatistiklerinin performanslarını belirlemek için Zhang ve Liu (2011) tarafından

"Ortalama Göreceli Hata (ARE)" değeri hesaplanmıştır. Bu çalışmada da test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için Zhang ve Liu'a (2011) paralel olarak

$$MAPE = \frac{100}{\tilde{N}} \sum_{t=1}^{\tilde{N}} \frac{(\hat{\alpha}_t - \alpha)}{\alpha} \tag{5.4}$$

eşitliğindeki formül yardımıyla "Ortalama Mutlak Yüzde Hata (MAPE)" değerleri hesaplanmıştır. MAPE değerleri, her bir çizelge için ayrı ayrı oluşturulmaktadır. Ayrıca $\tilde{N}$ değeri de, o çizelgedeki her bir test istatistiği için elde edilen deneysel hata oranlarının sayısını göstermektedir.

5.1.1. Model 1'e göre elde edilen deneysel hata oranları

Çalışmada ilk olarak çok değişkenli normal dağılımdan türetilen veriler için simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. İncelenen test istatistikleri için I. tip hata yapma olasılıklarını gösteren tablolar, varyans-kovaryans matrislerinin homojen olduğu ve olmadığı durumlara göre ikiye ayrılmıştır. Ayrıca hem homojen hem de heterojen durumlarda gözlem büyüklüklerinin test istatistikleri üzerindeki etkisini araştırmak için üç farklı örnek yapısı incelenmiştir. Birinci yapıda gözlem büyüklüklerinin eşit ve dengeli bir artışı dikkate alınmıştır. İkinci yapıda gözlem sayıların eşit olmadığı ancak dengeli bir değişimin söz konusu olduğu durumlar incelenmiştir. Üçüncü yapıda ise en büyük gözlem sayısının en küçük gözlem sayısına oranı çok büyük olan dengesiz gözlem yapıları dikkate alınmıştır. Belirtilen bütün deneysel koşullar dikkate alınarak test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıkları elde edilmiştir.

5.1.1.1. $k = 3$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde Model 1 dikkate alınarak $k = 3$ ve $p = 2,4,6,8$ için test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.1, Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 3, p = 2)$

Σ_i	(n_i)	Λ	T	V	Λ^*	T^*	V^*
1. Durum	n_1	0,0496	0,0523	0,0438	0,0468	0,0503	0,0416
	n_2	0,0494	0,0516	0,0469	0,0488	0,0512	0,0462
	n_3	0,0485	0,0491	0,0481	0,0484	0,0491	0,0481
	n_4	0,0491	0,0492	0,0485	0,0491	0,0491	0,0484
	n_5	0,0501	0,0504	0,0497	0,0494	0,0506	0,0492
	n_6	0,0505	0,0511	0,0504	0,0514	0,0515	0,0509
	n_7	0,0491	0,0503	0,0482	0,0506	0,0525	0,0470
	n_8	0,0461	0,0476	0,0452	0,0484	0,0501	0,0456
2.Durum	n_1	0,0675	0,0703	0,0628	0,0619	0,0656	0,0570
	n_2	0,0664	0,0677	0,0649	0,0642	0,0658	0,0625
	n_3	0,0606	0,0611	0,0602	0,0602	0,0604	0,0597
	n_4	0,0601	0,0600	0,0598	0,0593	0,0597	0,0591
	n_5	0,0943	0,0949	0,0941	0,0594	0,0605	0,0586
	n_6	0,0834	0,0841	0,0833	0,0603	0,0607	0,0598
	n_7	0,1187	0,1199	0,1173	0,0598	0,0620	0,0573
	n_8	0,1087	0,1099	0,1069	0,0556	0,0583	0,0534

Σ_i	(n_i)	Joh	MB	AHT	YT	FY	PB
1. Durum	n_1	0,0505	0,0480	0,0487	0,0326	0,0360	0,0550
	n_2	0,0498	0,0498	0,0505	0,0406	0,0330	0,0450
	n_3	0,0485	0,0487	0,0488	0,0448	0,0560	0,0610
	n_4	0,0477	0,0479	0,0479	0,0461	0,0410	0,0430
	n_5	0,0498	0,0500	0,0503	0,0484	0,0400	0,0430
	n_6	0,0510	0,0512	0,0513	0,0491	0,0390	0,0390
	n_7	0,0549	0,0538	0,0543	0,0452	0,0430	0,0560
	n_8	0,0529	0,0521	0,0526	0,0424	0,0510	0,0560
2.Durum	n_1	0,0554	0,0528	0,0538	0,0356	0,0370	0,0550
	n_2	0,0517	0,0514	0,0518	0,0435	0,0320	0,0360
	n_3	0,0490	0,0491	0,0494	0,0456	0,0560	0,0610
	n_4	0,0484	0,0485	0,0486	0,0457	0,0440	0,0490
	n_5	0,0504	0,0505	0,0509	0,0483	0,0480	0,0490
	n_6	0,0550	0,0553	0,0554	0,0528	0,0330	0,0330
	n_7	0,0529	0,0527	0,0528	0,0432	0,0470	0,0560
	n_8	0,0521	0,0515	0,0519	0,0411	0,0510	0,0600

$n_1 = (12,12,12)$	$n_3 = (70,70,70)$	$n_5 = (50,100,150)$	$n_7 = (12,30,70)$
$n_2 = (25,25,25)$	$n_4 = (100,100,100)$	$n_6 = (150,100,50)$	$n_8 = (70,30,12)$

Çizelge 5.2: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 3, p = 4)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0506	0,0558	0,0447	0,0468	0,0511	0,0417
	n_2	0,0465	0,0486	0,0441	0,0455	0,0475	0,0434
	n_3	0,0495	0,0504	0,0485	0,0493	0,0501	0,0483
	n_4	0,0504	0,0509	0,0500	0,0504	0,0509	0,0499
	n_5	0,0467	0,0473	0,0462	0,0468	0,0472	0,0458
	n_6	0,0493	0,0499	0,0489	0,0502	0,0507	0,0499
	n_7	0,0584	0,0591	0,0561	0,0530	0,0563	0,0487
	n_8	0,0522	0,0539	0,0513	0,0496	0,0523	0,0461
2.Durum	n_1	0,0656	0,0691	0,0603	0,0572	0,0615	0,0524
	n_2	0,0622	0,0645	0,0594	0,0597	0,0616	0,0565
	n_3	0,0623	0,0635	0,0615	0,0617	0,0630	0,0612
	n_4	0,0590	0,0591	0,0587	0,0587	0,0590	0,0587
	n_5	0,0311	0,0316	0,0305	0,0589	0,0598	0,0576
	n_6	0,1318	0,1329	0,1314	0,0632	0,0645	0,0622
	n_7	0,0297	0,0318	0,0285	0,0563	0,0585	0,0516
	n_8	0,2105	0,2152	0,2056	0,0610	0,0648	0,0553

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0604	0,0472	0,0459	0,0201	0,0240	0,0570
	n_2	0,0485	0,0470	0,0472	0,0328	0,0290	0,0470
	n_3	0,0504	0,0511	0,0511	0,0459	0,0480	0,0530
	n_4	0,0505	0,0511	0,0513	0,0470	0,0480	0,0510
	n_5	0,0478	0,0486	0,0488	0,0446	0,0360	0,0400
	n_6	0,0484	0,0491	0,0493	0,0455	0,0430	0,0480
	n_7	0,0776	0,0708	0,0706	0,0475	0,0170	0,0410
	n_8	0,0705	0,0645	0,0643	0,0442	0,0240	0,0530
2.Durum	n_1	0,0641	0,0505	0,0497	0,0222	0,0370	0,0630
	n_2	0,0494	0,0477	0,0478	0,0349	0,0300	0,0450
	n_3	0,0501	0,0504	0,0505	0,0453	0,0440	0,0490
	n_4	0,0510	0,0512	0,0516	0,0473	0,0510	0,0530
	n_5	0,0503	0,0509	0,0511	0,0461	0,0390	0,0390
	n_6	0,0509	0,0511	0,0516	0,0483	0,0330	0,0330
	n_7	0,0667	0,0637	0,0637	0,0381	0,0230	0,0430
	n_8	0,0737	0,0657	0,0654	0,0472	0,0310	0,0450

$n_1 = (12,12,12)$	$n_3 = (70,70,70)$	$n_5 = (50,100,150)$	$n_7 = (12,30,70)$
$n_2 = (25,25,25)$	$n_4 = (100,100,100)$	$n_6 = (150,100,50)$	$n_8 = (70,30,12)$

Çizelge 5.3: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($\mathrm{k} = 3, \mathrm{p} = 6$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0508	0,0560	0,0439	0,0427	0,0490	0,0375
	n_2	0,0480	0,0497	0,0451	0,0468	0,0484	0,0441
	n_3	0,0509	0,0512	0,0500	0,0502	0,0512	0,0498
	n_4	0,0516	0,0523	0,0507	0,0516	0,0522	0,0507
	n_5	0,0512	0,0517	0,0504	0,0514	0,0527	0,0507
	n_6	0,0505	0,0511	0,0500	0,0517	0,0530	0,0502
	n_7	0,0495	0,0508	0,0477	0,0412	0,0442	0,0378
	n_8	0,0488	0,0499	0,0479	0,0410	0,0426	0,0390
2.Durum	n_1	0,0649	0,0701	0,0580	0,0533	0,0579	0,0488
	n_2	0,0631	0,0656	0,0604	0,0602	0,0626	0,0571
	n_3	0,0659	0,0665	0,0652	0,0651	0,0661	0,0647
	n_4	0,0687	0,0691	0,0679	0,0684	0,0686	0,0677
	n_5	0,1440	0,1449	0,1426	0,0728	0,0741	0,0718
	n_6	0,0538	0,0549	0,0535	0,0602	0,0618	0,0581
	n_7	0,2048	0,2096	0,2000	0,0885	0,0936	0,0816
	n_8	0,0589	0,0610	0,0566	0,0411	0,0442	0,0389

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0875	0,0479	0,0422	0,0065	0,0010	0,0470
	n_2	0,0538	0,0475	0,0470	0,0282	0,0170	0,0430
	n_3	0,0500	0,0507	0,0509	0,0416	0,0310	0,0430
	n_4	0,0500	0,0505	0,0505	0,0454	0,0470	0,0560
	n_5	0,0505	0,0514	0,0514	0,0451	0,0530	0,0600
	n_6	0,0531	0,0534	0,0537	0,0486	0,0530	0,0560
	n_7	0,1033	0,0832	0,0806	0,0293	0,0160	0,0650
	n_8	0,1045	0,0856	0,0822	0,0316	0,0070	0,0730
2.Durum	n_1	0,0967	0,0524	0,0451	0,0108	0,0080	0,0600
	n_2	0,0536	0,0467	0,0463	0,0286	0,0280	0,0470
	n_3	0,0514	0,0517	0,0517	0,0429	0,0360	0,0450
	n_4	0,0532	0,0537	0,0539	0,0481	0,0550	0,0590
	n_5	0,0546	0,0550	0,0551	0,0492	0,0490	0,0490
	n_6	0,0526	0,0536	0,0537	0,0468	0,0530	0,0560
	n_7	0,1216	0,1004	0,0979	0,0438	0,0210	0,0680
	n_8	0,0947	0,0820	0,0804	0,0278	0,0110	0,0600

$\mathrm{n}_1 = (12,12,12)$	$\mathrm{n}_3 = (70,70,70)$	$\mathrm{n}_5 = (50,100,150)$	$\mathrm{n}_7 = (12,30,70)$
$\mathrm{n}_2 = (25,25,25)$	$\mathrm{n}_4 = (100,100,100)$	$\mathrm{n}_6 = (150,100,50)$	$\mathrm{n}_8 = (70,30,12)$

Çizelge 5.4: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k} = 3, \mathrm{p} = 8)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0506	0,0550	0,0448	0,0417	0,0466	0,0371
	n_2	0,0492	0,0521	0,0468	0,0476	0,0505	0,0453
	n_3	0,0517	0,0533	0,0502	0,0515	0,0527	0,0500
	n_4	0,0496	0,0498	0,0489	0,0495	0,0498	0,0486
	n_5	0,0507	0,0508	0,0501	0,0495	0,0501	0,0487
	n_6	0,0511	0,0511	0,0515	0,0487	0,0492	0,0485
	n_7	0,0531	0,0542	0,0512	0,0387	0,0405	0,0348
	n_8	0,0531	0,0544	0,0519	0,0386	0,0404	0,0344
2.Durum	n_1	0,0782	0,0846	0,0697	0,0606	0,0677	0,0538
	n_2	0,0757	0,0775	0,0724	0,0698	0,0731	0,0669
	n_3	0,0775	0,0784	0,0761	0,0771	0,0776	0,0751
	n_4	0,0714	0,0721	0,0707	0,0709	0,0713	0,0704
	n_5	0,1576	0,1598	0,1554	0,0748	0,0757	0,0743
	n_6	0,1227	0,1239	0,1212	0,0726	0,0745	0,0714
	n_7	0,2724	0,2790	0,2649	0,0855	0,0907	0,0793
	n_8	0,1785	0,1841	0,1728	0,0501	0,0522	0,0469

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1601	0,0581	0,0405	0,0012	0,0030	0,0570
	n_2	0,0623	0,0496	0,0481	0,0220	0,0160	0,0410
	n_3	0,0521	0,0522	0,0524	0,0402	0,0360	0,0510
	n_4	0,0468	0,0471	0,0473	0,0400	0,0360	0,0480
	n_5	0,0522	0,0522	0,0522	0,0430	0,0360	0,0480
	n_6	0,0518	0,0517	0,0518	0,0435	0,0410	0,0520
	n_7	0,1611	0,1179	0,1113	0,0088	0,0010	0,0910
	n_8	0,1631	0,1205	0,1126	0,0081	0,0010	0,0720
2.Durum	n_1	0,1784	0,0658	0,0459	0,0026	0,0040	0,0670
	n_2	0,0662	0,0498	0,0481	0,0231	0,0210	0,0480
	n_3	0,0532	0,0530	0,0532	0,0424	0,0320	0,0450
	n_4	0,0486	0,0489	0,0494	0,0419	0,0470	0,0520
	n_5	0,0546	0,0543	0,0545	0,0485	0,0390	0,0470
	n_6	0,0531	0,0534	0,0535	0,0437	0,0350	0,0440
	n_7	0,2161	0,1577	0,1467	0,0232	0,0050	0,0800
	n_8	0,1349	0,1064	0,1030	0,0082	0,0030	0,0480

$\mathrm{n}_1 = (12,12,12)$	$\mathrm{n}_3 = (70,70,70)$	$\mathrm{n}_5 = (50,100,150)$	$\mathrm{n}_7 = (12,30,70)$
$\mathrm{n}_2 = (25,25,25)$	$\mathrm{n}_4 = (100,100,100)$	$\mathrm{n}_6 = (150,100,50)$	$\mathrm{n}_8 = (70,30,12)$

$k = 3$ örneklem ve $p = 2,4,6,8$ değişken için varyans-kovaryans matrislerinin eşitlik varsayımı altında gözlem büyüklüklerinin tüm durumları dikkate alındığında, nominal anlamlılık düzeyine daha yakın deneysel hata değerleri Wilks Lambda, Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testlerinden elde edilmiştir. MANOVA test istatistikleri arasında $p = 2$ durumunda nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer, n_5 gözlem büyüklüğü için 0,0501 değeri ile Wilks Lambda test istatistiğinden elde edilmiştir. Pillai iz istatistiği testi ise $p = 4$ ve n_4 gözlem büyüklüğünde 0,0500, $p = 6$ ve n_3, n_6 gözlem büyüklüklerinde 0,0500, $p = 8$ ve n_5 gözlem büyüklüğünde 0,0501 değeri ile deneysel I. tip hata oranı nominal anlamlılık düzeyine en yakın test istatistiğidir. Özellikle her bir örnekleme ait gözlem sayıları eşit iken gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça, Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testlerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyine yaklaştığı görülmektedir.

Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 3$ örneklem için klasik MANOVA test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleridir. Aynı zamanda $k = 3$ için MANOVA test istatistikleri, gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişiklerden oldukça fazla etkilenmektedir. $p = 2$ durumunda n_4 gözlem büyüklüğü için Wilks Lambda test istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %6,01 iken, n_5 gözlem büyüklüğünde %9,43 ve n_7 gözlem büyüklüğünde ise %11,87'ye yükselmektedir. Benzer sonuçların Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testleri için de ortaya çıktığı görülmektedir. Ayrıca gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişikler için bağımlı değişken sayısı artıkça, MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ durumu için n_8 gözlem büyüklüğünde 0,0501 değeri ile düzeltilmiş Hotelling-Lawley iz istatistiği testi en iyi sonucu vermiştir. Bağımlı değişken sayısı $p = 4$ için nominal anlamlılık düzeyine en yakın sonuçlar düzeltilmiş Hotelling-Lawley ve düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testlerinden elde edilirken, $p = 6$ olduğunda ise düzeltilmiş Wilks Lambda ve düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testleri daha yakın değerler ortaya koymuştur. $p = 8$ durumunda ise nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel hata yapma oranı, n_3 gözlem büyüklüğünde 0,0500 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testinden elde edilmiştir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda düzeltilmiş

MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 8$ ve n_8 iken 0,0501 değeri ile düzeltilmiş Wilks Lambada test istatistiğinden elde edilmiştir. Gözlem sayılarının eşit olduğu durumlarda $k = 3$ için gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça MANOVA test istatistikleri ile düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarının yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca $k = 3$ için düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden en az etkilenen test istatistiğidir.

Johansen testi, $k = 3$ için hem homojenlik hem de heterojenlik varsayımı altında gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Ancak Johansen testi, gözlem büyüklüğünün azalmasından ve en küçük gözlem büyüklüğü ile en büyük gözlem büyüklüğü arasındaki farkın artmasından oldukça fazla etkilenmektedir. Heterojenlik altında $p = 8$ değişken için $n_4 = 100$ olduğunda Johansen testine ait hata yapma olasılığı %4,86 iken, $n_1 = 12$ gözlem büyüklüğünde ise %17,84'e yükselmektedir. Ayrıca heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,54 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %6,41, $p = 6$ olduğunda %9,67 ve $p = 8$ olduğunda ise %17,84'e çıkmaktadır. n_7 ve n_8 gözlem büyüklükleri için de Johansen test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yükseldiği görülmektedir.

MB ve AHT test istatistikleri de $k = 3$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2$ ve $p = 8$ durumlarında sırasıyla 0,0505 ve 0,0498 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koyarken, $p = 4$ durumunda ise en yakın değer 0,0497 değeri ile AHT testinden elde edilmiştir. $p = 6$ ve n_3 olduğunda ise 0,0517 değeri ile MB ve AHT testleri aynı deneysel I. tip hata olasılığına sahiptir. AHT testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0528 ve 0,0519 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,1467 ve 0,1030 değerleri ortaya koymuştur. n_7 ve n_8 dengesiz gözlem büyüklükleri için benzer sonuçlar MB testi için de elde edilmiştir. Dolayısıyla $k = 3$ örneklem durumunda bağımlı değişken sayısı artıkça dengesiz gözlemler için deneysel I. tip hata yapma olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinde uzaklaşmaktadır.

MB ve AHT testleri gibi Eftekhar'ın YT ve FY testlerine ait deneysel I. tip hata oranları, bu test istatistiklerinin hem homojenlik hem de heterojenlik altında en küçük gözlem sayısından ve dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilendiğini göstermektedir. Heterojenlik altında $p = 2$ durumunda n_1 için YT'nin deneysel I. tip hata oranı %3,56 iken, gözlem büyüklükleri arttıkça bu oranın nominal anlamlılık düzeyine yaklaştığı görülmektedir. Üstelik $p = 8$ için n_8 gözlem büyüklüğünde YT ve FY istatistikleri için deneysel I. tip hata yapma oranları sırasıyla 0,0082 ve 0,0030 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla YT ve FY testleri de bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlem büyüklükleri için Johansen, Mb ve AHT testlerine paralel sonuçlar ortaya koymuştur.

PB testi ise $k = 3$ için hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Özellikle bağımlı değişken sayısı arttıkça eşit, dengeli ve dengesiz gözlem büyüklüklerinin tamamı için nominal anlamlılık düzeyine yakın daha fazla değer elde edilmiştir. Üstelik PB testi, YT, FT, Johansen, MB ve AHT testlerinin aksine dengesiz gözlem büyüklüklerinden çok fazla etkilenmemektedir. $p = 4$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için homojenlik varsayımı altında elde edilen deneysel I. tip hata yapma olasılığı %5,30 iken heterojenlik altında ise bu olasılığın %4,50 olduğu görülmektedir.

İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.5'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.5: 1. modele göre mutlak ortalama hata değerleri ($k = 3$)

p	2	4	6	8
Λ	33,56	43,78	41,60	80,69
T	34,71	45,65	44,40	85,06
V	33,66	42,86	40,09	77,20
Λ^*	11,48	11,54	20,08	24,83
T^*	12,63	13,68	20,68	26,20
V^*	11,53	10,21	19,59	24,61
Joh	4,20	15,26	41,39	95,48
MB	3,66	10,18	22,69	43,48
AHT	4,03	10,31	22,68	38,99
YT	12,58	17,88	28,21	44,95
FY	17,63	30,63	42,75	55,50
PB	15,38	12,50	17,38	19,13

Çizelge 5.5'e göre $k = 3$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 3,66 MAPE değeri ile MB testinden elde edildiği görülmektedir. AHT ve Johansen testleri de sırasıyla 4,03 ve 4,20 MAPE değerleri ile MB testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Wilks Lambda istatistiğinden elde edilmiştir. Bu test istatistiğinin performansını düzeltilmiş Pillai ve düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistikleri takip etmektedir. YT, PB ve FY test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 12,58, 15,38 ve 17,63 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir.

$p = 4$ için MB testinin 10,18 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. MB testini sırasıyla düzeltilmiş Pillai, AHT, düzeltilmiş Wilks, PB, düzeltilmiş Hotelling-Lawley, Johansen ve YT testleri takip etmektedir. FY'nin performansının ise diğer testlere daha kötü olduğu görülmektedir. Ayrıca düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri, Johansen testine göre daha iyi performans ortaya koymuşlardır.

$p = 6$ ve $p = 8$ olduğunda ise en iyi performansın sırasıyla 17,38 ve 19,13 değerleri ile PB testinden elde edildiği görülmektedir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri ise PB testinden sonra en iyi performans gösteren test istatistikleridir. Bu test istatistiklerini AHT ve MB testleri takip etmektedir. Bağımlı değişken sayısı artıkça AHT testi, MB'den daha iyi bir performans ortaya koyarken, YT'nin performansının da AHT ve MB testlerine yaklaşmaktadır. En kötü performans ise Johansen testinden elde edilmektedir.

5.1.1.2. $k = 4$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde $k = 4$ ve $p = 2,4,6,8$ için Model 1 dikkate alınarak test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.6, Çizelge 5.7, Çizelge 5.8 ve Çizelge 5.9'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.6: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k}=4, \mathrm{p}=2)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0446	0,0467	0,0423	0,0426	0,0452	0,0403
	n_2	0,0525	0,0538	0,0505	0,0516	0,0533	0,0493
	n_3	0,0506	0,0510	0,0500	0,0506	0,0510	0,0499
	n_4	0,0502	0,0507	0,0499	0,0502	0,0507	0,0499
	n_5	0,0494	0,0501	0,0488	0,0482	0,0486	0,0479
	n_6	0,0466	0,0473	0,0463	0,0469	0,0477	0,0459
	n_7	0,0507	0,0512	0,0501	0,0488	0,0504	0,0465
	n_8	0,0512	0,0520	0,0507	0,0522	0,0541	0,0497
2.Durum	n_1	0,0615	0,0637	0,0581	0,0549	0,0586	0,0512
	n_2	0,0714	0,0724	0,0696	0,0685	0,0704	0,0669
	n_3	0,0711	0,0718	0,0705	0,0701	0,0713	0,0698
	n_4	0,0675	0,0680	0,0674	0,0669	0,0672	0,0662
	n_5	0,0871	0,0877	0,0858	0,0706	0,0714	0,0689
	n_6	0,0596	0,0604	0,0591	0,0677	0,0690	0,0668
	n_7	0,1411	0,1424	0,1392	0,0656	0,0687	0,0624
	n_8	0,0757	0,0766	0,0748	0,0648	0,0671	0,0623

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0519	0,0476	0,0485	0,0324	0,0430	0,0530
	n_2	0,0499	0,0495	0,0503	0,0431	0,0490	0,0530
	n_3	0,0496	0,0496	0,0499	0,0475	0,0390	0,0440
	n_4	0,0493	0,0494	0,0495	0,0482	0,0530	0,0560
	n_5	0,0479	0,0480	0,0485	0,0440	0,0470	0,0480
	n_6	0,0476	0,0477	0,0482	0,0437	0,0440	0,0450
	n_7	0,0548	0,0532	0,0545	0,0452	0,0330	0,0430
	n_8	0,0579	0,0570	0,0578	0,0496	0,0480	0,0610
2.Durum	n_1	0,0520	0,0459	0,0470	0,0337	0,0390	0,0450
	n_2	0,0509	0,0500	0,0511	0,0426	0,0440	0,0520
	n_3	0,0481	0,0482	0,0485	0,0464	0,0320	0,0330
	n_4	0,0480	0,0481	0,0482	0,0462	0,0530	0,0520
	n_5	0,0515	0,0518	0,0525	0,0483	0,0470	0,0450
	n_6	0,0480	0,0483	0,0487	0,0445	0,0430	0,0470
	n_7	0,0563	0,0542	0,0558	0,0463	0,0350	0,0410
	n_8	0,0576	0,0564	0,0573	0,0490	0,0560	0,0600

$\mathrm{n}_1=(12,12,12,12)$	$\mathrm{n}_4=(100,100,100,100)$	$\mathrm{n}_7=(12,20,50,90)$
$\mathrm{n}_2=(25,25,25,25)$	$\mathrm{n}_5=(40,50,60,70)$	$\mathrm{n}_8=(90,50,20,12)$
$\mathrm{n}_3=(70,70,70,70)$	$\mathrm{n}_6=(70,60,50,40)$	

Çizelge 5.7: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k}=4, \mathrm{p}=4)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0502	0,0546	0,0437	0,0453	0,0512	0,0403
	n_2	0,0468	0,0494	0,0439	0,0451	0,0484	0,0429
	n_3	0,0509	0,0515	0,0501	0,0508	0,0512	0,0501
	n_4	0,0518	0,0525	0,0513	0,0517	0,0524	0,0513
	n_5	0,0520	0,0534	0,0505	0,0515	0,0528	0,0503
	n_6	0,0497	0,0515	0,0487	0,0500	0,0517	0,0482
	n_7	0,0512	0,0521	0,0496	0,0480	0,0510	0,0445
	n_8	0,0474	0,0484	0,0460	0,0440	0,0472	0,0407
2.Durum	n_1	0,0778	0,0846	0,0707	0,0713	0,0778	0,0624
	n_2	0,0717	0,0750	0,0699	0,0705	0,0735	0,0680
	n_3	0,0754	0,0765	0,0741	0,0753	0,0762	0,0737
	n_4	0,0787	0,0796	0,0780	0,0785	0,0793	0,0778
	n_5	0,1116	0,1125	0,1091	0,0806	0,0820	0,0794
	n_6	0,0546	0,0557	0,0533	0,0696	0,0722	0,0684
	n_7	0,2248	0,2286	0,2212	0,0872	0,0916	0,0823
	n_8	0,0372	0,0389	0,0356	0,0586	0,0613	0,0542

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0744	0,0482	0,0451	0,0226	0,0120	0,0410
	n_2	0,0497	0,0478	0,0479	0,0354	0,0330	0,0530
	n_3	0,0508	0,0509	0,0516	0,0466	0,0390	0,0440
	n_4	0,0490	0,0496	0,0499	0,0466	0,0410	0,0510
	n_5	0,0528	0,0530	0,0532	0,0456	0,0310	0,0360
	n_6	0,0497	0,0494	0,0503	0,0434	0,0410	0,0480
	n_7	0,0710	0,0645	0,0641	0,0446	0,0330	0,0530
	n_8	0,0747	0,0617	0,0673	0,0445	0,0450	0,0720
2.Durum	n_1	0,0770	0,0504	0,0476	0,0261	0,0230	0,0510
	n_2	0,0506	0,0468	0,0470	0,0380	0,0390	0,0520
	n_3	0,0503	0,0505	0,0508	0,0470	0,0400	0,0440
	n_4	0,0482	0,0486	0,0490	0,0461	0,0250	0,0270
	n_5	0,0526	0,0526	0,0532	0,0477	0,0290	0,0320
	n_6	0,0489	0,0484	0,0494	0,0434	0,0470	0,0520
	n_7	0,0797	0,0702	0,0693	0,0534	0,0390	0,0550
	n_8	0,0764	0,0668	0,0699	0,0460	0,0550	0,0710

$\mathrm{n_1} = (12,12,12,12)$	$\mathrm{n_4} = (100,100,100,100)$	$\mathrm{n_7} = (12,20,50,90)$
$\mathrm{n_2} = (25,25,25,25)$	$\mathrm{n_5} = (40,50,60,70)$	$\mathrm{n_8} = (90,50,20,12)$
$\mathrm{n_3} = (70,70,70,70)$	$\mathrm{n_6} = (70,60,50,40)$	

Çizelge 5.8: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 4, p = 6$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0508	0,0565	0,0437	0,0443	0,0504	0,0377
	n_2	0,0506	0,0539	0,0473	0,0493	0,0527	0,0459
	n_3	0,0512	0,0520	0,0499	0,0511	0,0518	0,0497
	n_4	0,0505	0,0511	0,0496	0,0502	0,0510	0,0495
	n_5	0,0477	0,0487	0,0468	0,0483	0,0497	0,0476
	n_6	0,0529	0,0546	0,0522	0,0537	0,0555	0,0520
	n_7	0,0479	0,0497	0,0475	0,0434	0,0481	0,0421
	n_8	0,0496	0,0510	0,0473	0,0458	0,0486	0,0425
2.Durum	n_1	0,0741	0,0818	0,0652	0,0623	0,0684	0,0536
	n_2	0,0739	0,0771	0,0718	0,0719	0,0749	0,0685
	n_3	0,0742	0,0754	0,0736	0,0737	0,0745	0,0731
	n_4	0,0744	0,0759	0,0734	0,0739	0,0755	0,0731
	n_5	0,0887	0,0916	0,0867	0,0736	0,0752	0,0717
	n_6	0,0769	0,0785	0,0752	0,0795	0,0817	0,0774
	n_7	0,2235	0,2284	0,2163	0,0862	0,0902	0,0809
	n_8	0,0931	0,0957	0,0909	0,0686	0,0720	0,0656

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1246	0,0528	0,0419	0,0101	0,0070	0,0490
	n_2	0,0621	0,0506	0,0500	0,0314	0,0330	0,0570
	n_3	0,0519	0,0519	0,0524	0,0450	0,0410	0,0490
	n_4	0,0516	0,0520	0,0522	0,0463	0,0440	0,0450
	n_5	0,0504	0,0496	0,0496	0,0385	0,0320	0,0450
	n_6	0,0541	0,0530	0,0535	0,0436	0,0400	0,0490
	n_7	0,1228	0,0984	0,0953	0,0416	0,0210	0,0680
	n_8	0,1161	0,0934	0,0911	0,0402	0,0240	0,0840
2.Durum	n_1	0,1437	0,0577	0,0450	0,0152	0,0170	0,0730
	n_2	0,0613	0,0501	0,0485	0,0326	0,0370	0,0590
	n_3	0,0518	0,0516	0,0519	0,0460	0,0480	0,0640
	n_4	0,0521	0,0523	0,0523	0,0477	0,0480	0,0520
	n_5	0,0501	0,0488	0,0492	0,0405	0,0470	0,0570
	n_6	0,0525	0,0509	0,0515	0,0422	0,0410	0,0550
	n_7	0,1384	0,1123	0,1095	0,0535	0,0330	0,0630
	n_8	0,1054	0,0850	0,0828	0,0346	0,0310	0,0810

$n_1 = (12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,90)$
$n_2 = (25,25,25,25)$	$n_5 = (40,50,60,70)$	$n_8 = (90,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70)$	$n_6 = (70,60,50,40)$	

Çizelge 5.9: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 4, p = 8)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0670	0,0750	0,0570	0,0560	0,0640	0,0480
	n_2	0,0320	0,0360	0,0320	0,0320	0,0330	0,0290
	n_3	0,0512	0,0526	0,0503	0,0511	0,0523	0,0501
	n_4	0,0501	0,0507	0,0490	0,0500	0,0507	0,0490
	n_5	0,0513	0,0529	0,0504	0,0505	0,0520	0,0493
	n_6	0,0510	0,0524	0,0484	0,0504	0,0516	0,0489
	n_7	0,0420	0,0430	0,0430	0,0440	0,0470	0,0380
	n_8	0,0470	0,0500	0,0470	0,0350	0,0360	0,0320
2.Durum	n_1	0,0813	0,0941	0,0680	0,0626	0,0739	0,0512
	n_2	0,0763	0,0829	0,0707	0,0714	0,0775	0,0653
	n_3	0,0746	0,0773	0,0719	0,0733	0,0762	0,0708
	n_4	0,0736	0,0757	0,0722	0,0731	0,0751	0,0713
	n_5	0,0555	0,0577	0,0533	0,0714	0,0739	0,0689
	n_6	0,1047	0,1082	0,1018	0,0696	0,0722	0,0664
	n_7	0,0241	0,0263	0,0226	0,0683	0,0738	0,0632
	n_8	0,2706	0,2781	0,2615	0,0706	0,0814	0,0617

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,2720	0,0780	0,0450	0,0040	0,0010	0,0370
	n_2	0,0640	0,0460	0,0440	0,0210	0,0150	0,0450
	n_3	0,0534	0,0526	0,0527	0,0404	0,0360	0,0510
	n_4	0,0513	0,0515	0,0516	0,0443	0,0410	0,0510
	n_5	0,0526	0,0493	0,0491	0,0371	0,0320	0,0480
	n_6	0,0546	0,0513	0,0511	0,0386	0,0310	0,0470
	n_7	0,2070	0,1530	0,1430	0,0220	0,0110	0,1080
	n_8	0,2320	0,1570	0,1450	0,0120	0,0110	0,1010
2.Durum	n_1	0,3123	0,0939	0,0526	0,0042	0,0010	0,0520
	n_2	0,0820	0,0561	0,0528	0,0292	0,0240	0,0480
	n_3	0,0558	0,0542	0,0544	0,0444	0,0370	0,0480
	n_4	0,0486	0,0487	0,0490	0,0425	0,0410	0,0470
	n_5	0,0587	0,0539	0,0538	0,0420	0,0360	0,0450
	n_6	0,0548	0,0502	0,0500	0,0388	0,0320	0,0400
	n_7	0,2240	0,1731	0,1643	0,0259	0,0230	0,0960
	n_8	0,2645	0,2037	0,1921	0,0434	0,0090	0,0880

$n_1 = (12,12,12,12)$ $n_2 = (25,25,25,25)$ $n_3 = (70,70,70,70)$	$n_4 = (100,100,100,100)$ $n_5 = (40,50,60,70)$ $n_6 = (70,60,50,40)$	$n_7 = (12,20,50,90)$ $n_8 = (90,50,20,12)$

Varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımı altında MANOVA test istatistikleri incelendiğinde $k = 4$ için $p = 2$, $p = 4$ ve $p = 6$ durumlarında n_3 gözlem büyüklüğünde sırasıyla 0,0500, 0,0501 ve 0,0499 değerleri ile Pillai iz istatistiği testi nominal anlamlılık düzeyine en yakın test istatistiğidir. $p = 8$ durumunda ise en iyi sonuç, n_4 gözlem büyüklüğü için 0,0501 değeri ile Wilks Lambda test istatistiğinden elde edilmiştir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 4$ için klasik MANOVA test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleridir. Aynı zamanda $k = 4$ durumunda MANOVA test istatistikleri, gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişiklerden oldukça fazla etkilenmektedir. Özellikle bağımlı değişken sayısı artıkça, gözlem sayılarındaki dengesiz değişikler MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata olasılıkları, nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ durumu için n_3 ve n_4 gözlem büyüklüğünde 0,0499 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiği en iyi sonucu vermiştir. Düzeltilmiş Wilks Lambda test istatistiği ise; $p = 4$ ve n_6 iken 0,0500 değeri ile, $p = 6$ ve n_4 iken .0502 değeri ile, $p = 8$ ve n_4 iken 0,0500 değeri ile nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata değerleri ortaya koyan test istatistiğidir. Heterojenlik altında düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 2$ ve n_1 iken 0,0512 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir. Gözlem sayılarının eşit olduğu durumlarda $k = 4$ için gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça MANOVA test istatistikleri ile düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarının yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca $k = 4$ için düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden en az etkilenen test istatistiğidir.

Johansen testi, $k = 4$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,20 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %7,70, $p = 6$ olduğunda %14,37 ve $p = 8$ olduğunda ise %31,23'e yükselmektedir. n_7 ve n_8 gözlem büyüklükleri için de Johansen test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yükseldiği görülmektedir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı artıkça Johansen testi, gözlem sayılarının büyüklüğünden etkilenmektedir.

MB ve AHT test istatistikleri de $k = 4$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik söz konusu olduğunda $p = 2$, $p = 4$ ve $p = 6$ durumlarında sırasıyla 0,0500, 0,0504 ve 0,0501 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koyarken, $p = 8$ durumunda ise en yakın değer 0,0500 değeri ile AHT testinden elde edilmiştir. MB testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0563 ve 0,0576 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,1731 ve 0,2037 değerleri elde edilmiştir. Benzer sonuçlar AHT testi için de geçerlidir. Dolayısıyla $k = 4$ için Johansen, MB ve AHT test istatistikleri gözlem sayılarının dengesiz değişimlerinden oldukça fazla etkilenmektedir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı artıkça dengesiz gözlemler için deneysel I. tip hata yapma olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinde uzaklaşmaktadır.

$k = 4$ ve $p = 2$ için hem homojenlik hem de heterojenlik altında YT ve FY testlerine ait deneysel I. tip hata oranları nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Ancak bağımlı değişken sayısı arttıkça YT ve FY test istatistikleri, en küçük gözlem sayısından ve dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilendiğini görülmektedir. Heterojenlik altında $p = 2$ durumunda n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0324 ve 0,0430 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0042 ve 0,0010 olduğu görülmektedir. Üstelik $p = 8$ için n_7 gözlem büyüklüğünde YT için deneysel I. tip hata oranı 0,0259 iken, n_8 gözlem büyüklüğünde FY için deneysel I. tip hata oranı ise 0,0090 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlem büyüklükleri için YT ve FY test istatistikleri nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır.

PB testi ise hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Nominal anlamlılık düzeyine en yakın değerler ise $p = 2$ durumunda elde edilmiştir. Ancak PB testi, $k = 4$ durumunda bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz örneklem büyüklüklerinden etkilenmektedir. Heterojenlik varsayımı altında $p = 8$ ve n_7 gözlem büyüklüğü için deneysel I. tip hata yapma olasılığı %9,60 iken homojenlik söz konusu olduğunda ise bu olasılığın %10,80 olduğu görülmektedir.

İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.10'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.10: 1. modele göre mutlak ortalama hata değerleri ($k = 4$)

p	2	4	6	8
Λ	31,20	46,20	48,70	57,76
T	32,23	48,93	53,14	62,79
V	29,81	45,09	46,65	51,89
Λ^*	18,40	26,65	26,70	25,91
T^*	20,21	28,58	28,43	32,33
V^*	16,89	25,16	25,11	21,84
Joh	5,56	20,60	61,11	161,30
MB	5,04	10,23	26,70	73,06
AHT	5,29	11,73	26,04	59,54
YT	11,16	16,23	24,75	38,78
FY	14,88	29,75	32,00	52,38
PB	12,00	17,25	22,00	30,25

Çizelge 5.10'a göre $k = 4$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 5,04 MAPE değeri ile MB testinden elde edildiği görülmektedir. AHT ve Johansen testleri de sırasıyla 5,29 ve 5,56 MAPE değerleri ile MB testini takip etmektedir. YT, PB ve FY test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 11,16, 12,00 ve 14,88 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir. $p = 4$ için MB testi, 10,23 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. AHT testi 11,73 MAPE değeri ile MB testinden sonra en iyi performansı ortaya koyarken, YT testi de 16,23 MAPE değeri ile AHT testinden sonra en iyi performansa sahip üçüncü test olarak elde edilmiştir. PB testi ise düzeltilmiş MANOVA ve Johansen testlerinden daha iyi bir performans göstermiştir. $p = 6$ ve $p = 8$ olduğunda ise en iyi performansın PB testinden elde edildiği görülmektedir. $p = 6$ olduğunda YT testi düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerine göre daha iyi bir performans gösterirken, $p = 8$ olduğunda ise düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin performansının YT'den daha iyi olduğu görülmüştür.

5.1.1.3. $k = 5$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde $k = 5$ ve $p = 2,4,6,8$ için Model 1 dikkate alınarak test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.11, Çizelge 5.12, Çizelge 5.13 ve Çizelge 5.14'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.11: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($\mathrm{k}=5, \mathrm{p}=2$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0501	0,0526	0,0468	0,0469	0,0498	0,0445
	n_2	0,0525	0,0536	0,0513	0,0515	0,0532	0,0507
	n_3	0,0519	0,0521	0,0517	0,0518	0,0520	0,0515
	n_4	0,0503	0,0508	0,0499	0,0502	0,0507	0,0499
	n_5	0,0479	0,0481	0,0475	0,0478	0,0483	0,0463
	n_6	0,0481	0,0483	0,0482	0,0480	0,0481	0,0479
	n_7	0,0510	0,0519	0,0500	0,0491	0,0496	0,0473
	n_8	0,0492	0,0496	0,0482	0,0474	0,0480	0,0461
2.Durum	n_1	0,0751	0,0791	0,0718	0,0697	0,0737	0,0662
	n_2	0,0786	0,0800	0,0772	0,0766	0,0777	0,0749
	n_3	0,0727	0,0736	0,0717	0,0717	0,0728	0,0710
	n_4	0,0791	0,0795	0,0787	0,0787	0,0790	0,0783
	n_5	0,0859	0,0861	0,0855	0,0690	0,0698	0,0683
	n_6	0,0618	0,0622	0,0613	0,0748	0,0757	0,0732
	n_7	0,1862	0,1874	0,1852	0,0799	0,0811	0,0786
	n_8	0,0394	0,0399	0,0385	0,0699	0,0703	0,0684
$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0553	0,0478	0,0483	0,0343	0,0410	0,0550
	n_2	0,0530	0,0518	0,0531	0,0460	0,0410	0,0490
	n_3	0,0505	0,0508	0,0516	0,0477	0,0570	0,0570
	n_4	0,0504	0,0505	0,0506	0,0492	0,0430	0,0430
	n_5	0,0496	0,0496	0,0501	0,0461	0,0590	0,0590
	n_6	0,0497	0,0497	0,0502	0,0452	0,0470	0,0520
	n_7	0,0577	0,0561	0,0576	0,0494	0,0430	0,0470
	n_8	0,0546	0,0535	0,0544	0,0464	0,0320	0,0360
2.Durum	n_1	0,0607	0,0511	0,0519	0,0426	0,0450	0,0490
	n_2	0,0535	0,0521	0,0534	0,0480	0,0430	0,0490
	n_3	0,0508	0,0508	0,0512	0,0494	0,0400	0,0470
	n_4	0,0486	0,0488	0,0490	0,0472	0,0450	0,0440
	n_5	0,0476	0,0475	0,0483	0,0450	0,0600	0,0670
	n_6	0,0501	0,0501	0,0507	0,0474	0,0490	0,0530
	n_7	0,0596	0,0578	0,0590	0,0528	0,0510	0,0510
	n_8	0,0514	0,0508	0,0517	0,0436	0,0410	0,0440

$\mathrm{n}_1=(12,12,12,12,12)$ $\quad \mathrm{n}_4=(100,100,100,100,100)$ $\quad \mathrm{n}_7=(12,20,50,75,90)$
$\mathrm{n}_2=(25,25,25,25,25)$ $\quad \mathrm{n}_5=(40,45,50,55,60)$ $\quad \mathrm{n}_8=(90,75,50,20,12)$
$\mathrm{n}_3=(70,70,70,70,70)$ $\quad \mathrm{n}_6=(60,55,50,45,40)$

Çizelge 5.12: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 5, p = 4$)

Σ_i	(n_i)	Λ	T	V	Λ^*	T^*	V^*
1. Durum	n_1	0,0508	0,0580	0,0445	0,0465	0,0534	0,0412
	n_2	0,0467	0,0490	0,0436	0,0451	0,0479	0,0426
	n_3	0,0492	0,0498	0,0481	0,0492	0,0498	0,0481
	n_4	0,0497	0,0502	0,0488	0,0497	0,0502	0,0488
	n_5	0,0498	0,0513	0,0485	0,0502	0,0514	0,0489
	n_6	0,0507	0,0515	0,0488	0,0498	0,0515	0,0480
	n_7	0,0513	0,0533	0,0493	0,0480	0,0521	0,0434
	n_8	0,0489	0,0509	0,0479	0,0482	0,0521	0,0451
2.Durum	n_1	0,0834	0,0902	0,0736	0,0744	0,0835	0,0655
	n_2	0,0822	0,0858	0,0791	0,0800	0,0837	0,0760
	n_3	0,0870	0,0886	0,0862	0,0864	0,0880	0,0854
	n_4	0,0884	0,0893	0,0876	0,0882	0,0888	0,0871
	n_5	0,1057	0,1092	0,1030	0,0825	0,0852	0,0801
	n_6	0,0704	0,0718	0,0685	0,0821	0,0848	0,0793
	n_7	0,2575	0,2617	0,2529	0,0938	0,0977	0,0892
	n_8	0,0620	0,0639	0,0595	0,0719	0,0775	0,0679

Σ_i	(n_i)	Joh	MB	AHT	YT	FY	PB
1. Durum	n_1	0,0854	0,0533	0,0491	0,0260	0,0170	0,0520
	n_2	0,0531	0,0477	0,0481	0,0367	0,0390	0,0510
	n_3	0,0512	0,0515	0,0524	0,0473	0,0450	0,0480
	n_4	0,0484	0,0487	0,0492	0,0452	0,0430	0,0520
	n_5	0,0532	0,0524	0,0535	0,0465	0,0400	0,0440
	n_6	0,0498	0,0496	0,0501	0,0443	0,0350	0,0400
	n_7	0,0776	0,0715	0,0719	0,0498	0,0360	0,0600
	n_8	0,0759	0,0690	0,0694	0,0510	0,0330	0,0570
2.Durum	n_1	0,0885	0,0538	0,0489	0,0311	0,0250	0,0490
	n_2	0,0535	0,0489	0,0491	0,0395	0,0410	0,0530
	n_3	0,0502	0,0506	0,0511	0,0475	0,0550	0,0560
	n_4	0,0474	0,0477	0,0482	0,0457	0,0520	0,0520
	n_5	0,0496	0,0488	0,0496	0,0440	0,0450	0,0530
	n_6	0,0498	0,0493	0,0502	0,0434	0,0410	0,0480
	n_7	0,0868	0,0764	0,0765	0,0565	0,0470	0,0550
	n_8	0,0788	0,0730	0,0731	0,0500	0,0360	0,0510

$n_1 = (12,12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,75,90)$
$n_2 = (25,25,25,25,25)$	$n_5 = (40,45,50,55,60)$	$n_8 = (90,75,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70,70)$	$n_6 = (60,55,50,45,40)$	

Çizelge 5.13: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 5, p = 6)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0478	0,0541	0,0419	0,0415	0,0485	0,0351
	n_2	0,0497	0,0533	0,0475	0,0484	0,0512	0,0461
	n_3	0,0513	0,0523	0,0500	0,0511	0,0521	0,0496
	n_4	0,0508	0,0515	0,0498	0,0508	0,0515	0,0497
	n_5	0,0481	0,0494	0,0466	0,0480	0,0495	0,0463
	n_6	0,0474	0,0486	0,0449	0,0475	0,0488	0,0452
	n_7	0,0481	0,0511	0,0466	0,0441	0,0464	0,0421
	n_8	0,0483	0,0494	0,0474	0,0460	0,0503	0,0424
2.Durum	n_1	0,0791	0,0907	0,0659	0,0631	0,0757	0,0507
	n_2	0,0765	0,0826	0,0708	0,0725	0,0777	0,0672
	n_3	0,0781	0,0797	0,0760	0,0764	0,0785	0,0737
	n_4	0,0740	0,0748	0,0726	0,0728	0,0743	0,0715
	n_5	0,0607	0,0633	0,0586	0,0735	0,0770	0,0711
	n_6	0,0934	0,0965	0,0894	0,0727	0,0761	0,0684
	n_7	0,0404	0,0412	0,0381	0,0789	0,0831	0,0742
	n_8	0,2081	0,2134	0,2012	0,0723	0,0815	0,0644

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1604	0,0530	0,0369	0,0111	0,0080	0,0530
	n_2	0,0693	0,0523	0,0513	0,0326	0,0310	0,0560
	n_3	0,0516	0,0512	0,0516	0,0444	0,0440	0,0510
	n_4	0,0503	0,0509	0,0514	0,0444	0,0410	0,0490
	n_5	0,0520	0,0498	0,0499	0,0405	0,0490	0,0600
	n_6	0,0497	0,0479	0,0480	0,0390	0,0280	0,0470
	n_7	0,1338	0,1117	0,1090	0,0513	0,0310	0,0690
	n_8	0,1253	0,1044	0,1017	0,0476	0,0210	0,0630
2.Durum	n_1	0,1905	0,0724	0,0524	0,0217	0,0230	0,0630
	n_2	0,0710	0,0544	0,0524	0,0352	0,0330	0,0490
	n_3	0,0522	0,0518	0,0522	0,0461	0,0450	0,0530
	n_4	0,0506	0,0507	0,0513	0,0474	0,0470	0,0480
	n_5	0,0506	0,0486	0,0489	0,0411	0,0480	0,0550
	n_6	0,0515	0,0488	0,0490	0,0410	0,0330	0,0480
	n_7	0,1394	0,1196	0,1171	0,0563	0,0370	0,0710
	n_8	0,1505	0,1254	0,1229	0,0654	0,0280	0,0670

$n_1 = (12,12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,75,90)$
$n_2 = (25,25,25,25,25)$	$n_5 = (40,45,50,55,60)$	$n_8 = (90,75,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70,70)$	$n_6 = (60,55,50,45,40)$	

Çizelge 5.14: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 5, p = 8)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0498	0,0565	0,0417	0,0410	0,0484	0,0351
	n_2	0,0513	0,0538	0,0483	0,0500	0,0525	0,0469
	n_3	0,0539	0,0546	0,0524	0,0535	0,0543	0,0522
	n_4	0,0502	0,0508	0,0495	0,0502	0,0507	0,0495
	n_5	0,0491	0,0505	0,0477	0,0496	0,0510	0,0478
	n_6	0,0486	0,0498	0,0475	0,0474	0,0485	0,0464
	n_7	0,0535	0,0550	0,0513	0,0471	0,0506	0,0431
	n_8	0,0464	0,0483	0,0446	0,0426	0,0465	0,0398
2.Durum	n_1	0,0900	0,1059	0,0721	0,0669	0,0824	0,0523
	n_2	0,0828	0,0895	0,0753	0,0746	0,0829	0,0683
	n_3	0,0867	0,0896	0,0842	0,0852	0,0883	0,0826
	n_4	0,0815	0,0832	0,0791	0,0802	0,0822	0,0780
	n_5	0,0826	0,0857	0,0792	0,0812	0,0840	0,0777
	n_6	0,0843	0,0883	0,0801	0,0772	0,0821	0,0737
	n_7	0,0780	0,0805	0,0753	0,0909	0,0962	0,0840
	n_8	0,1384	0,1455	0,1326	0,0556	0,0651	0,0482

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,3701	0,0827	0,0359	0,0025	0,0030	0,0310
	n_2	0,0855	0,0533	0,0485	0,0282	0,0190	0,0410
	n_3	0,0520	0,0500	0,0501	0,0414	0,0250	0,0450
	n_4	0,0511	0,0506	0,0511	0,0447	0,0440	0,0510
	n_5	0,0537	0,0488	0,0486	0,0371	0,0370	0,0560
	n_6	0,0531	0,0488	0,0486	0,0372	0,0430	0,0600
	n_7	0,2399	0,1829	0,1748	0,0286	0,0150	0,1610
	n_8	0,2283	0,1768	0,1676	0,0301	0,0050	0,0950
2.Durum	n_1	0,4114	0,1034	0,0480	0,0061	0,0010	0,0430
	n_2	0,0920	0,0569	0,0524	0,0318	0,0240	0,0450
	n_3	0,0543	0,0520	0,0521	0,0450	0,0520	0,0640
	n_4	0,0520	0,0520	0,0520	0,0465	0,0370	0,0390
	n_5	0,0561	0,0508	0,0502	0,0390	0,0430	0,0510
	n_6	0,0584	0,0525	0,0518	0,0394	0,0440	0,0520
	n_7	0,2670	0,2130	0,2057	0,0483	0,0030	0,0760
	n_8	0,2048	0,1532	0,1460	0,0207	0,0050	0,0690

$n_1 = (12,12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,75,90)$
$n_2 = (25,25,25,25,25)$	$n_5 = (40,45,50,55,60)$	$n_8 = (90,75,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70,70)$	$n_6 = (60,55,50,45,40)$	

$k = 5$ örneklem ve $p = 2,4,6,8$ değişken için varyans-kovaryans matrislerinin eşitlik koşulu altında genel olarak gözlem büyüklüklerinin tüm durumlarına göre nominal anlamlılık düzeyine daha yakın deneysel hata oranları Wilks Lambda, Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testlerinden elde edilmiştir. MANOVA test istatistikleri arasında $p = 2$ ve $p = 6$ durumunda nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer 0,0500 ile Pillai iz istatistiğinde elde edilmiştir. Wilks Lambda ve Hotelling-Lawley iz istatistiği testleri ise $p = 4$ ve $p = 8$ durumunda 0,498 değeri ile nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata yapma olasılıklarını göstermiştir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 5$ örneklem için klasik MANOVA test istatistiklerinin yine I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleri olduğu görülmektedir. Gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişikler MANOVA test istatistiklerini çok fazla etkilemektedir. $p = 4$ durumunda n_4 gözlem büyüklüğü için Pillai iz istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %8,76 iken, n_5 gözlem büyüklüğünde %10,57'ye ve n_7 gözlem büyüklüğünde ise %25,75'e yükselmektedir. Benzer sonuçlar Wilks Lambda ve Hotelling-Lawley iz istatistiği testleri için de elde edilmiştir.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 8$ değişken için nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata oranı, n_2 gözlem büyüklüğünde 0,0500 değeri ile düzeltilmiş Wilks Lambda test istatistiğinden elde edilmiştir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 8$ ve n_8 iken 0,0482 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiği istatistiğinden elde edilmiştir. Gözlem sayılarının eşit olduğu durumlarda $k = 5$ için gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarının MANOVA test istatistiklerine yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca $p = 8$ için n_3 gözlem büyüklüğünde düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %8,83 iken, n_6 gözlem büyüklüğünde %8,21 ve n_8 gözlem büyüklüğünde ise %6,51 olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla $k = 5$ için diğer test istatistiklerine göre düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden daha az etkilenmektedir.

Johansen testi, $k = 5$ için hem homojenlik hem de heterojenlik varsayımı altında gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Ancak gözlem büyüklüğünden oldukça küçük olmasından ya da en küçük gözlem büyüklüğü ile en büyük gözlem büyüklüğü arasındaki farkın yüksek olduğu durumlardan Johansen testi çok fazla etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 6$ için $n_4 = 100$ olduğunda Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,03 iken, $n_1 = 12$ gözlem büyüklüğünde ise %16,04'e yükselmektedir. Benzer sonuçların heterojenlik söz konusu olduğunda da görülmektedir. Ayrıca heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %6,07 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %8,85, $p = 6$ olduğunda %19,05 ve $p = 8$ olduğunda ise %41,14'e yükselmektedir. n_7 ve n_8 gözlem büyüklükleri için de Johansen test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yükseldiği görülmektedir.

MB ve AHT test istatistikleri de $k = 5$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2$ ve $p = 6$ için sırasıyla 0,0501 ve 0,0507 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koyarken, $p = 4$ ve $p = 8$ durumlarında ise en yakın değer ise 0,0502 değeri ile AHT testinden elde edilmiştir. Heterojenlik altında ve bağımlı değişken sayısı arttıkça MB ve AHT testleri, gözlem büyüklüklerindeki dengesiz değişikliklerden çok fazla etkilenmektedir. AHT testi n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0590 ve 0,0517 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,2057 ve 0,1460 değerleri ortaya koymuştur. n_7 ve n_8 dengesiz gözlem büyüklükleri için benzer sonuçlar MB testi için de elde edilmiştir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça gözlem sayısının çok küçük (n_1) olduğu durumlar için MB testi nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşırken, AHT testi çok fazla etkilenmemektedir.

YT ve FY testleri, gözlem büyüklüklerinin eşit ve dengeli değiştiği durumlarda dengesiz gözlem büyüklüğüne göre daha iyi bir performans göstermiştir. Ancak hem homojenlik hem de heterojenlik altında en küçük gözlem sayısından ve dengesiz gözlem büyüklüklerinden fazlasıyla etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ durumunda n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0343 ve 0,0410 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0025 ve 0,0030'a düşmektedir. Heterojenlik durumunda da benzer sonuçların elde edildiği görülmektedir. Üstelik heterojenlik söz konusu olduğunda $p = 2$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için FY'nin deneysel I. tip hata oranı 0,0410 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0050 değeri ile nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır. FY'ye paralel olarak YT istatistiği de dengesiz gözlem büyüklüğüne karşı oldukça duyarlıdır.

Dolayısıyla YT ve FY testleri, Johansen, MB ve AHT testleri gibi bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlem büyüklüklerinde çok fazla etkilenmektedir.

PB testi ise hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Ancak PB testi, $k = 5$ durumunda bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz örneklem büyüklüklerinden etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için PB testinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %3,60 iken $p = 8$ olduğunda bu olasılık %9,50'ye yükselmektedir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise $p = 2$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için deneysel I. tip hata yapma olasılığı %4,40 iken, $p = 8$ olduğunda %6,90 olarak elde edilmektedir. İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.15'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.15: 1. modele göre mutlak ortalama hata değerleri $(k = 5)$

p	2	4	6	8
Λ	38,83	55,64	42,78	42,41
T	40,38	59,61	46,84	48,91
V	38,16	53,86	40,21	37,79
Λ^*	25,58	34,13	26,08	29,73
T^*	26,53	37,78	29,48	34,86
V^*	24,89	33,05	23,09	26,50
Joh	6,51	26,15	81,16	191,21
MB	4,00	13,85	37,84	79,06
AHT	4,99	13,25	35,08	65,53
YT	8,16	13,81	22,61	34,18
FY	14,63	23,00	31,63	50,50
PB	10,75	7,88	15,00	36,38

Çizelge 5.15'e göre $k = 5$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 4,00 MAPE değeri ile MB testinden elde edildiği görülmektedir. AHT ve Johansen testleri de sırasıyla 4.99 ve 6,51 MAPE değerleri ile MB testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. YT testinin performansı ise 8,16 değeri ile oldukça iyi bir performans göstermiştir. PB ve FY test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 10,75 ve 14,63 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir. Ayrıca düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Pillai istatistiğinden elde edilmiştir. Bu test istatistiğinin

performansını düzeltilmiş Wilks Lambda ve düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistikleri takip etmektedir. $p = 4$ için en iyi performansı 7,88 MAPE değeri ile PB testi ortaya koyarken, AHT ve YT testleri de MB testinden daha iyi bir performans göstermiştir. Bu test istatistiklerinin performanslarını sırasıyla FY ve Johansen testleri takip etmektedir. Klasik MANOVA test istatistiklerinden sonra en düşük performans ise düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinden elde edilmiştir. $p = 6$ için PB testi 15,00 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. YT testi 22,61 MAPE değeri ile PB testinden sonra en iyi performansı ortaya koyarken, düzeltilmiş Pillai iz istatistiği de 23,09 MAPE değeri ile YT testinden sonra en iyi performansa sahip test istatistiğidir. Ayrıca FY testi de MB ve AHT testlerinden daha iyi bir performans ortaya koymuştur. $p = 8$ durumunda ise en iyi performansların düzeltilmiş MANOVA ve YT testlerinden elde edildiği görülmektedir. PB ve FY testleri, MB ve AHT testlerine göre daha iyi bir performans ortaya koyarken, en kötü performansı ise Johansen test istatistiği göstermiştir.

5.1.1.4. $k = 6$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0.05 anlamlılık düzeyinde $k = 6$ örneklem için bağımlı değişken sayısının 2,4,6 ve 8 olduğu durumlara göre Model 1 dikkate alınarak test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.16, Çizelge 5.17, Çizelge 5.18 ve Çizelge 5.19'da gösterilmiştir.

Varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımı altında ve $k = 6$ durumunda MANOVA test istatistikleri için $p = 2$ ve $p = 6$ durumunda nominal anlamlılık düzeyine en yakın değerler sırasıyla 0,0504 ve 0,0502 değerleri ile Wilks Lambda test istatistiğinden elde edilmiştir. $p = 4$ için MANOVA test istatistiklerinin hepsi nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koyarken, $p = 8$ olduğunda ise en yakın deneysel I. tip hata yapma olasılıkları 0,0502 değeri ile Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testlerinden elde edilmiştir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 6$ için klasik MANOVA test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleridir. Aynı zamanda $k = 6$ durumunda MANOVA test istatistikleri, gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişiklerden oldukça fazla etkilenmektedir.

Çizelge 5.16: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k}=6, \mathrm{p}=2)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0504	0,0522	0,0470	0,0474	0,0507	0,0452
	n_2	0,0530	0,0542	0,0517	0,0521	0,0535	0,0511
	n_3	0,0488	0,0494	0,0483	0,0488	0,0493	0,0483
	n_4	0,0506	0,0507	0,0506	0,0506	0,0506	0,0506
	n_5	0,0466	0,0473	0,0458	0,0471	0,0473	0,0468
	n_6	0,0515	0,0521	0,0513	0,0519	0,0526	0,0512
	n_7	0,0505	0,0509	0,0495	0,0514	0,0523	0,0499
	n_8	0,0483	0,0486	0,0479	0,0490	0,0500	0,0481
2.Durum	n_1	0,0802	0,0824	0,0768	0,0730	0,0764	0,0689
	n_2	0,0750	0,0770	0,0739	0,0734	0,0747	0,0720
	n_3	0,0790	0,0795	0,0786	0,0785	0,0787	0,0776
	n_4	0,0759	0,0758	0,0760	0,0757	0,0756	0,0754
	n_5	0,1065	0,1071	0,1060	0,0752	0,0760	0,0742
	n_6	0,0540	0,0542	0,0538	0,0751	0,0759	0,0746
	n_7	0,1386	0,1393	0,1388	0,0738	0,0755	0,0723
	n_8	0,0315	0,0318	0,0311	0,0739	0,0746	0,0727

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0596	0,0492	0,0507	0,0417	0,0410	0,0560
	n_2	0,0547	0,0535	0,0545	0,0489	0,0400	0,0480
	n_3	0,0486	0,0486	0,0493	0,0472	0,0480	0,0470
	n_4	0,0494	0,0499	0,0506	0,0488	0,0400	0,0400
	n_5	0,0478	0,0475	0,0482	0,0450	0,0440	0,0480
	n_6	0,0527	0,0526	0,0530	0,0498	0,0480	0,0520
	n_7	0,0583	0,0571	0,0583	0,0517	0,0400	0,0410
	n_8	0,0572	0,0559	0,0573	0,0511	0,0470	0,0550
2.Durum	n_1	0,0658	0,0543	0,0557	0,0495	0,0490	0,0600
	n_2	0,0520	0,0510	0,0518	0,0489	0,0370	0,0450
	n_3	0,0472	0,0472	0,0475	0,0463	0,0440	0,0480
	n_4	0,0472	0,0472	0,0477	0,0468	0,0330	0,0350
	n_5	0,0487	0,0486	0,0490	0,0475	0,0450	0,0470
	n_6	0,0542	0,0540	0,0550	0,0528	0,0530	0,0570
	n_7	0,0569	0,0557	0,0568	0,0519	0,0430	0,0470
	n_8	0,0593	0,0584	0,0594	0,0551	0,0510	0,0550

$\mathrm{n}_1=(12,12,12,12,12,12)$ $\quad$ $\mathrm{n}_5=(30,40,50,60,70,80)$
$\mathrm{n}_2=(25,25,25,25,25,25)$ $\quad$ $\mathrm{n}_6=(80,70,60,50,40,30)$
$\mathrm{n}_3=(70,70,70,70,70,70)$ $\quad$ $\mathrm{n}_7=(12,20,50,80,90,120)$
$\mathrm{n}_4=(100,100,100,100,100,100)$ $\quad$ $\mathrm{n}_8=(120,90,80,50,20,12)$

Çizelge 5.17: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 6, p = 4$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0521	0,0577	0,0471	0,0474	0,0540	0,0431
	n_2	0,0460	0,0478	0,0430	0,0448	0,0470	0,0418
	n_3	0,0483	0,0493	0,0480	0,0481	0,0492	0,0477
	n_4	0,0506	0,0513	0,0501	0,0505	0,0513	0,0501
	n_5	0,0502	0,0516	0,0497	0,0508	0,0521	0,0499
	n_6	0,0522	0,0535	0,0514	0,0537	0,0551	0,0518
	n_7	0,0501	0,0511	0,0491	0,0463	0,0502	0,0439
	n_8	0,0491	0,0499	0,0485	0,0491	0,0508	0,0466
2.Durum	n_1	0,0849	0,0929	0,0775	0,0778	0,0856	0,0704
	n_2	0,0778	0,0808	0,0746	0,0758	0,0788	0,0719
	n_3	0,0888	0,0908	0,0874	0,0883	0,0904	0,0866
	n_4	0,0805	0,0814	0,0800	0,0803	0,0811	0,0798
	n_5	0,1182	0,1199	0,1157	0,0851	0,0867	0,0836
	n_6	0,0700	0,0718	0,0689	0,0804	0,0827	0,0786
	n_7	0,1611	0,1633	0,1588	0,0919	0,0949	0,0889
	n_8	0,0704	0,0713	0,0687	0,0802	0,0848	0,0753

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0965	0,0516	0,0461	0,0341	0,0210	0,0550
	n_2	0,0521	0,0459	0,0461	0,0394	0,0230	0,0360
	n_3	0,0511	0,0512	0,0520	0,0486	0,0370	0,0370
	n_4	0,0502	0,0504	0,0505	0,0486	0,0410	0,0430
	n_5	0,0533	0,0526	0,0531	0,0486	0,0600	0,0670
	n_6	0,0536	0,0521	0,0535	0,0480	0,0400	0,0430
	n_7	0,0818	0,0764	0,0771	0,0562	0,0400	0,0430
	n_8	0,0840	0,0767	0,0778	0,0579	0,0310	0,0430
2.Durum	n_1	0,1071	0,0593	0,0527	0,0432	0,0230	0,0450
	n_2	0,0532	0,0457	0,0463	0,0404	0,0290	0,0330
	n_3	0,0502	0,0502	0,0507	0,0478	0,0370	0,0400
	n_4	0,0505	0,0510	0,0511	0,0491	0,0410	0,0430
	n_5	0,0523	0,0519	0,0521	0,0474	0,0600	0,0650
	n_6	0,0529	0,0524	0,0529	0,0493	0,0320	0,0400
	n_7	0,0891	0,0815	0,0818	0,0598	0,0450	0,0590
	n_8	0,0793	0,0749	0,0754	0,0539	0,0270	0,0470

$n_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $n_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$n_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $n_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$n_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $n_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$n_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $n_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Çizelge 5.18: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 6, p = 6$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0478	0,0548	0,0419	0,0425	0,0491	0,0363
	n_2	0,0488	0,0519	0,0449	0,0476	0,0507	0,0436
	n_3	0,0472	0,0485	0,0460	0,0472	0,0482	0,0459
	n_4	0,0498	0,0505	0,0486	0,0496	0,0503	0,0485
	n_5	0,0478	0,0493	0,0452	0,0475	0,0492	0,0450
	n_6	0,0502	0,0516	0,0487	0,0495	0,0512	0,0477
	n_7	0,0484	0,0489	0,0474	0,0458	0,0487	0,0436
	n_8	0,0498	0,0512	0,0484	0,0483	0,0508	0,0444
2.Durum	n_1	0,0732	0,0836	0,0624	0,0585	0,0703	0,0494
	n_2	0,0765	0,0809	0,0711	0,0716	0,0760	0,0659
	n_3	0,0731	0,0752	0,0717	0,0722	0,0739	0,0708
	n_4	0,0793	0,0803	0,0773	0,0787	0,0795	0,0770
	n_5	0,0594	0,0613	0,0560	0,0801	0,0839	0,0779
	n_6	0,1143	0,1176	0,1106	0,0749	0,0786	0,0715
	n_7	0,0486	0,0499	0,0473	0,0809	0,0847	0,0767
	n_8	0,1973	0,2018	0,1942	0,0682	0,0751	0,0627

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,2091	0,0593	0,0372	0,0196	0,0120	0,0490
	n_2	0,0734	0,0541	0,0521	0,0408	0,0290	0,0520
	n_3	0,0476	0,0471	0,0473	0,0419	0,0410	0,0480
	n_4	0,0508	0,0508	0,0512	0,0477	0,0490	0,0530
	n_5	0,0552	0,0508	0,0510	0,0429	0,0360	0,0470
	n_6	0,0587	0,0557	0,0557	0,0472	0,0410	0,0490
	n_7	0,1448	0,1241	0,1224	0,0642	0,0430	0,0870
	n_8	0,1421	0,1189	0,1175	0,0592	0,0370	0,0750
2.Durum	n_1	0,2247	0,0775	0,0533	0,0350	0,0170	0,0640
	n_2	0,0752	0,0549	0,0533	0,0418	0,0320	0,0450
	n_3	0,0498	0,0487	0,0493	0,0450	0,0470	0,0530
	n_4	0,0505	0,0507	0,0509	0,0475	0,0430	0,0440
	n_5	0,0575	0,0543	0,0545	0,0465	0,0390	0,0480
	n_6	0,0561	0,0527	0,0530	0,0473	0,0400	0,0550
	n_7	0,1429	0,1238	0,1226	0,0667	0,0440	0,0610
	n_8	0,1497	0,1274	0,1250	0,0697	0,0310	0,0810

$n_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $n_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$n_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $n_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$n_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $n_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$n_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $n_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Çizelge 5.19: 1. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 6, p = 8$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0493	0,0573	0,0407	0,0407	0,0481	0,0335
	n_2	0,0492	0,0520	0,0471	0,0478	0,0503	0,0445
	n_3	0,0522	0,0533	0,0511	0,0519	0,0529	0,0509
	n_4	0,0509	0,0519	0,0502	0,0509	0,0518	0,0501
	n_5	0,0492	0,0515	0,0481	0,0495	0,0517	0,0475
	n_6	0,0483	0,0502	0,0467	0,0479	0,0502	0,0460
	n_7	0,0511	0,0524	0,0505	0,0475	0,0516	0,0444
	n_8	0,0442	0,0450	0,0428	0,0427	0,0462	0,0404
2.Durum	n_1	0,0886	0,1058	0,0742	0,0687	0,0844	0,0545
	n_2	0,0906	0,0986	0,0825	0,0842	0,0909	0,0758
	n_3	0,0875	0,0900	0,0848	0,0861	0,0890	0,0836
	n_4	0,0878	0,0901	0,0856	0,0864	0,0892	0,0841
	n_5	0,1113	0,1156	0,1078	0,0926	0,0959	0,0895
	n_6	0,0803	0,0836	0,0767	0,0770	0,0800	0,0730
	n_7	0,1191	0,1217	0,1150	0,0957	0,1017	0,0897
	n_8	0,0838	0,0863	0,0799	0,0571	0,0647	0,0501

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,4845	0,0986	0,0320	0,0139	0,0050	0,0410
	n_2	0,1013	0,0562	0,0495	0,0332	0,0150	0,0610
	n_3	0,0526	0,0493	0,0493	0,0417	0,0280	0,0600
	n_4	0,0511	0,0507	0,0509	0,0469	0,0530	0,0610
	n_5	0,0648	0,0571	0,0566	0,0454	0,0310	0,0440
	n_6	0,0626	0,0551	0,0548	0,0425	0,0350	0,0440
	n_7	0,2575	0,2069	0,2007	0,0544	0,0090	0,0910
	n_8	0,2620	0,2153	0,2087	0,0606	0,0120	0,0850
2.Durum	n_1	0,5076	0,1216	0,0461	0,0243	0,0110	0,0670
	n_2	0,1056	0,0585	0,0529	0,0382	0,0290	0,0560
	n_3	0,0580	0,0552	0,0553	0,0492	0,0230	0,0370
	n_4	0,0486	0,0482	0,0485	0,0447	0,0560	0,0640
	n_5	0,0693	0,0601	0,0593	0,0474	0,0350	0,0430
	n_6	0,0647	0,0564	0,0558	0,0431	0,0440	0,0530
	n_7	0,2813	0,2332	0,2258	0,0709	0,0120	0,0730
	n_8	0,2421	0,2019	0,1969	0,0541	0,0120	0,0480

$n_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $n_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$n_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $n_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$n_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $n_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$n_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $n_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve $p = 6$ için düzeltilmiş Hotelling-Lawley iz istatistiği nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata oranı ortaya koyarken, $p = 4$ ve $p = 8$ durumunda ise en yakın sonuç düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testinden elde edilmiştir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 8$ ve n_8 iken 0,0501 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir. Ayrıca heterojenlik durumunda $p = 2$ için düzeltilmiş düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı n_4 gözlem büyüklüğünde %7,54 iken, n_6 gözlem büyüklüğünde %7,46 ve n_8 gözlem büyüklüğünde ise %7,27 olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla $k = 6$ ve $p = 2$ için diğer test istatistiklerine göre düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden daha az etkilenmektedir. Ancak bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlemler, test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarını etkilemektedir.

Johansen testi, $k = 6$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %6,58 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %10,71, $p = 6$ olduğunda %22,47 ve $p = 8$ olduğunda ise %50,76'ya yükselmektedir. Ayrıca heterojenlik altında $p = 2$ ve n_7 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,69 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %8,91, $p = 6$ olduğunda %14,29 ve $p = 8$ olduğunda ise %28,13'e yükselmektedir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı artıkça Johansen testi, gözlem sayılarının büyüklüğünden etkilenmektedir.

$k = 6$ için MB ve AHT test istatistikleri gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2$ ve $p = 4$ durumlarında sırasıyla 0,0509 ve 0,0502 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koyarken, $p = 6$ ve $p = 8$ durumlarında ise en yakın değerler sırasıyla 0,0494 ve 0,0485 değerleri ile AHT testinden elde edilmiştir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça MB ve AHT testleri, gözlem büyüklüklerindeki dengesiz değişikliklerden çok fazla etkilenmektedir. MB testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0557 ve 0,0584 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,2332 ve 0,2019 değerleri elde edilmiştir. Benzer sonuçlar AHT testi için de geçerlidir.

Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça gözlem sayısının çok küçük (n_1) olduğu durumlar için MB testi nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşırken, AHT testi çok fazla etkilenmemektedir.

Hem homojenlik hem de heterojenlik altında YT testine ait deneysel I. tip hata oranları nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koyarken, bağımlı değişken sayısı arttıkça FY testine ait deneysel I. tip hata oranlarının nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaştığı görülmektedir. Heterojenlik altında YT test istatistiği için nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata oranı $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğünde %4,95 olarak elde edilmiştir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça FY test istatistiğinin en küçük gözlem büyüklüğü ile dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilendiği görülmektedir. YT ise yalnızca en küçük gözlem büyüklüğünden etkilenmektedir. $p = 2$ durumunda n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0417 ve 0,0410 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0139 ve 0,0050 olduğu görülmektedir. Dengesiz gözlem büyüklüklerinde ise $p = 2$ ve n_7 için FY'nin deneysel I. tip hata oranı 0,0430 iken, $p = 8$ durumunda ise bu değer 0,0120 olarak elde edilmiştir. PB testi ise hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Üstelik PB testinin $k = 6$ için dengesiz gözlem büyüklüklerinden çok fazla etkilenmediği gözlemlenmiştir. İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.20'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.20: 1. modele göre mutlak ortalama hata değerleri $(k = 6)$

p	2	4	6	8
Λ	36,25	45,44	41,89	45,38
T	37,29	48,80	45,51	51,91
V	35,99	43,46	40,61	41,61
Λ^*	26,54	34,89	25,89	34,31
T^*	27,56	37,79	28,73	38,75
V^*	25,29	33,00	24,76	30,63
Joh	10,23	32,15	99,16	239,55
MB	6,79	17,58	44,90	103,66
AHT	7,68	17,78	41,09	86,54
YT	5,28	10,41	19,58	21,19
FY	13,13	31,63	27,38	51,00
PB	36,25	45,44	41,89	45,38

Çizelge 5.20’ye göre $k = 6$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 5,28 MAPE değeri ile YT testinden elde edildiği görülmektedir. MB, AHT ve Johansen testleri de sırasıyla 6,79, 7,68 ve 10,23 MAPE değerleri ile YT testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. Johansen, PB ve FY test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 10,23, 11,13 ve 13,13 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir.

$p = 4$ için YT testi yine 10,41 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. MB testi 17,58 MAPE değeri ile YT testinden sonra en iyi performansı ortaya koyarken, AHT testi de 17,78 MAPE değeri ile MB testinden sonra en iyi performansa sahip test istatistiği olarak elde edilmiştir. PB testi ise FY, Johansen ve düzeltilmiş MANOVA testlerinden daha iyi bir performans göstermiştir.

$p = 6$ için PB testi 18,88 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. YT testi 19,58 MAPE değeri ile PB testinden sonra en iyi performansı ortaya koyarken, düzeltilmiş Pillai iz istatistiği de 24,76 MAPE değeri ile bu test istatistiklerini takip etmektedir. Ayrıca FY testi de MB ve AHT testlerinden daha iyi bir performans ortaya koymuştur.

$p = 8$ durumunda ise en iyi performansların yine sırasıyla 21,19 ve 26,75 değerleri ile YT ve PB testlerinden elde edildiği görülmektedir. Ayrıca düzeltilmiş MANOVA ve FY testleri, MB ve AHT testlerine göre daha iyi bir performans ortaya koymuştur. Johansen testinin MAPE değeri ise son derece yüksek çıkmıştır.

5.1.2. Model 2’ye göre elde edilen I. tip hata olasılıkları

5.1.2.1. $k = 3$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde Model 2 dikkate alınarak $k = 3$ örneklem için bağımlı değişken sayısının 2,4,6 ve 8 olduğu durumlara göre test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.21, Çizelge 5.22, Çizelge 5.23 ve Çizelge 5.24’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.21: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k} = 3, \mathrm{p} = 2)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0495	0,0521	0,0460	0,0471	0,0498	0,0424
	n_2	0,0508	0,0524	0,0488	0,0500	0,0518	0,0480
	n_3	0,0514	0,0520	0,0513	0,0514	0,0519	0,0513
	n_4	0,0517	0,0523	0,0512	0,0517	0,0522	0,0512
	n_5	0,0546	0,0553	0,0546	0,0552	0,0555	0,0541
	n_6	0,0502	0,0506	0,0496	0,0512	0,0519	0,0510
	n_7	0,0522	0,0534	0,0507	0,0498	0,0518	0,0474
	n_8	0,0503	0,0514	0,0495	0,0497	0,0523	0,0469
2.Durum	n_1	0,0672	0,0700	0,0623	0,0608	0,0636	0,0557
	n_2	0,0701	0,0712	0,0686	0,0678	0,0693	0,0653
	n_3	0,0694	0,0700	0,0686	0,0686	0,0695	0,0679
	n_4	0,0638	0,0643	0,0633	0,0632	0,0636	0,0627
	n_5	0,0944	0,0947	0,0940	0,0659	0,0665	0,0649
	n_6	0,0901	0,0908	0,0898	0,0639	0,0646	0,0635
	n_7	0,1175	0,1192	0,1153	0,0608	0,0630	0,0579
	n_8	0,1081	0,1105	0,1063	0,0595	0,0620	0,0569

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0499	0,0470	0,0475	0,0332	0,0330	0,0510
	n_2	0,0530	0,0530	0,0534	0,0428	0,0320	0,0400
	n_3	0,0529	0,0529	0,0531	0,0493	0,0370	0,0400
	n_4	0,0510	0,0511	0,0514	0,0483	0,0480	0,0480
	n_5	0,0566	0,0566	0,0568	0,0537	0,0560	0,0600
	n_6	0,0528	0,0529	0,0530	0,0502	0,0510	0,0530
	n_7	0,0588	0,0577	0,0583	0,0475	0,0510	0,0570
	n_8	0,0605	0,0598	0,0601	0,0493	0,0450	0,0520
2.Durum	n_1	0,0565	0,0538	0,0547	0,0374	0,0440	0,0550
	n_2	0,0570	0,0567	0,0576	0,0489	0,0360	0,0410
	n_3	0,0543	0,0544	0,0546	0,0512	0,0380	0,0390
	n_4	0,0507	0,0508	0,0511	0,0489	0,0490	0,0520
	n_5	0,0550	0,0551	0,0553	0,0528	0,0570	0,0630
	n_6	0,0508	0,0508	0,0508	0,0492	0,0510	0,0560
	n_7	0,0555	0,0548	0,0554	0,0458	0,0530	0,0590
	n_8	0,0616	0,0606	0,0615	0,0493	0,0440	0,0470

$\mathrm{n}_1 = (12,12,12)$	$\mathrm{n}_3 = (70,70,70)$	$\mathrm{n}_5 = (50,100,150)$	$\mathrm{n}_7 = (12,30,70)$
$\mathrm{n}_2 = (25,25,25)$	$\mathrm{n}_4 = (100,100,100)$	$\mathrm{n}_6 = (150,100,50)$	$\mathrm{n}_8 = (70,30,12)$

Çizelge 5.22: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k} = 3, \mathrm{p} = 4)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0515	0,0575	0,0480	0,0467	0,0505	0,0418
	n_2	0,0455	0,0468	0,0432	0,0442	0,0456	0,0421
	n_3	0,0535	0,0543	0,0528	0,0534	0,0538	0,0526
	n_4	0,0506	0,0509	0,0500	0,0505	0,0509	0,0499
	n_5	0,0512	0,0510	0,0506	0,0485	0,0491	0,0474
	n_6	0,0522	0,0521	0,0523	0,0522	0,0534	0,0519
	n_7	0,0529	0,0546	0,0509	0,0493	0,0524	0,0464
	n_8	0,0520	0,0532	0,0503	0,0463	0,0502	0,0426
2.Durum	n_1	0,0677	0,0735	0,0616	0,0588	0,0632	0,0522
	n_2	0,0594	0,0620	0,0572	0,0568	0,0599	0,0539
	n_3	0,0654	0,0664	0,0647	0,0649	0,0658	0,0643
	n_4	0,0612	0,0617	0,0605	0,0608	0,0614	0,0602
	n_5	0,0320	0,0323	0,0316	0,0625	0,0640	0,0607
	n_6	0,1372	0,1379	0,1359	0,0639	0,0647	0,0626
	n_7	0,0306	0,0316	0,0288	0,0548	0,0580	0,0526
	n_8	0,2069	0,2103	0,2041	0,0660	0,0693	0,0626

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0666	0,0524	0,0509	0,0207	0,0120	0,0410
	n_2	0,0499	0,0486	0,0489	0,0336	0,0310	0,0410
	n_3	0,0521	0,0524	0,0524	0,0472	0,0350	0,0400
	n_4	0,0485	0,0490	0,0492	0,0450	0,0480	0,0520
	n_5	0,0522	0,0524	0,0527	0,0484	0,0520	0,0560
	n_6	0,0527	0,0529	0,0533	0,0492	0,0450	0,0510
	n_7	0,0790	0,0725	0,0725	0,0476	0,0370	0,0570
	n_8	0,0747	0,0680	0,0680	0,0441	0,0350	0,0790
2.Durum	n_1	0,0770	0,0611	0,0600	0,0272	0,0230	0,0570
	n_2	0,0519	0,0502	0,0504	0,0394	0,0310	0,0450
	n_3	0,0518	0,0525	0,0529	0,0464	0,0410	0,0440
	n_4	0,0506	0,0509	0,0512	0,0476	0,0520	0,0550
	n_5	0,0568	0,0571	0,0573	0,0520	0,0520	0,0560
	n_6	0,0535	0,0543	0,0544	0,0511	0,0450	0,0470
	n_7	0,0691	0,0656	0,0659	0,0384	0,0360	0,0550
	n_8	0,0869	0,0775	0,0774	0,0572	0,0380	0,0770

$\mathrm{n}_1 = (12{,}12{,}12)$	$\mathrm{n}_3 = (70{,}70{,}70)$	$\mathrm{n}_5 = (50{,}100{,}150)$	$\mathrm{n}_7 = (12{,}30{,}70)$
$\mathrm{n}_2 = (25{,}25{,}25)$	$\mathrm{n}_4 = (100{,}100{,}100)$	$\mathrm{n}_6 = (150{,}100{,}50)$	$\mathrm{n}_8 = (70{,}30{,}12)$

Çizelge 5.23: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 3, p = 6$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0473	0,0503	0,0415	0,0400	0,0443	0,0353
	n_2	0,0508	0,0525	0,0484	0,0495	0,0517	0,0461
	n_3	0,0521	0,0531	0,0513	0,0519	0,0531	0,0512
	n_4	0,0539	0,0542	0,0530	0,0538	0,0542	0,0529
	n_5	0,0480	0,0487	0,0475	0,0478	0,0485	0,0478
	n_6	0,0518	0,0523	0,0512	0,0503	0,0510	0,0499
	n_7	0,0529	0,0550	0,0508	0,0415	0,0438	0,0392
	n_8	0,0509	0,0523	0,0485	0,0418	0,0455	0,0383
2.Durum	n_1	0,0689	0,0736	0,0638	0,0564	0,0597	0,0498
	n_2	0,0686	0,0709	0,0667	0,0656	0,0681	0,0632
	n_3	0,0695	0,0698	0,0687	0,0686	0,0694	0,0682
	n_4	0,0689	0,0689	0,0680	0,0679	0,0684	0,0677
	n_5	0,1425	0,1439	0,1420	0,0742	0,0750	0,0730
	n_6	0,0521	0,0523	0,0515	0,0567	0,0580	0,0554
	n_7	0,2102	0,2162	0,2047	0,0869	0,0932	0,0804
	n_8	0,0600	0,0624	0,0568	0,0423	0,0449	0,0385

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0869	0,0438	0,0377	0,0068	0,0080	0,0510
	n_2	0,0562	0,0522	0,0518	0,0282	0,0210	0,0510
	n_3	0,0538	0,0544	0,0549	0,0465	0,0400	0,0470
	n_4	0,0507	0,0515	0,0515	0,0461	0,0490	0,0570
	n_5	0,0510	0,0515	0,0519	0,0454	0,0410	0,0490
	n_6	0,0523	0,0526	0,0528	0,0457	0,0440	0,0550
	n_7	0,1097	0,0907	0,0879	0,0321	0,0150	0,0770
	n_8	0,1091	0,0916	0,0886	0,0345	0,0200	0,0830
2.Durum	n_1	0,1052	0,0593	0,0495	0,0118	0,0170	0,0710
	n_2	0,0632	0,0563	0,0561	0,0344	0,0280	0,0510
	n_3	0,0537	0,0540	0,0543	0,0465	0,0390	0,0440
	n_4	0,0541	0,0545	0,0547	0,0490	0,0490	0,0590
	n_5	0,0525	0,0526	0,0528	0,0485	0,0480	0,0530
	n_6	0,0508	0,0513	0,0515	0,0456	0,0400	0,0450
	n_7	0,1287	0,1102	0,1070	0,0471	0,0280	0,0800
	n_8	0,1031	0,0891	0,0877	0,0340	0,0210	0,0670

$n_1 = (12,12,12)$	$n_3 = (70,70,70)$	$n_5 = (50,100,150)$	$n_7 = (12,30,70)$
$n_2 = (25,25,25)$	$n_4 = (100,100,100)$	$n_6 = (150,100,50)$	$n_8 = (70,30,12)$

Çizelge 5.24: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($\mathrm{k}=3, \mathrm{p}=8$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0480	0,0532	0,0422	0,0377	0,0418	0,0335
	n_2	0,0484	0,0503	0,0451	0,0461	0,0474	0,0428
	n_3	0,0520	0,0528	0,0517	0,0517	0,0525	0,0516
	n_4	0,0540	0,0548	0,0535	0,0540	0,0543	0,0534
	n_5	0,0518	0,0524	0,0508	0,0510	0,0514	0,0502
	n_6	0,0465	0,0471	0,0461	0,0482	0,0489	0,0469
	n_7	0,0562	0,0563	0,0554	0,0404	0,0425	0,0381
	n_8	0,0516	0,0525	0,0505	0,0358	0,0395	0,0339
2.Durum	n_1	0,0779	0,0839	0,0710	0,0604	0,0640	0,0532
	n_2	0,0759	0,0797	0,0734	0,0717	0,0749	0,0686
	n_3	0,0774	0,0790	0,0766	0,0764	0,0778	0,0754
	n_4	0,0829	0,0834	0,0815	0,0822	0,0824	0,0803
	n_5	0,1640	0,1650	0,1614	0,0782	0,0793	0,0772
	n_6	0,1287	0,1300	0,1270	0,0711	0,0713	0,0704
	n_7	0,2799	0,2859	0,2724	0,0975	0,1034	0,0902
	n_8	0,1821	0,1872	0,1745	0,0531	0,0566	0,0498

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1543	0,0565	0,0396	0,0001	0,0010	0,0390
	n_2	0,0654	0,0537	0,0518	0,0223	0,0210	0,0570
	n_3	0,0523	0,0523	0,0523	0,0402	0,0250	0,0430
	n_4	0,0537	0,0543	0,0545	0,0456	0,0440	0,0480
	n_5	0,0566	0,0566	0,0566	0,0490	0,0350	0,0440
	n_6	0,0503	0,0503	0,0503	0,0427	0,0430	0,0550
	n_7	0,1724	0,1295	0,1223	0,0094	0,0070	0,1040
	n_8	0,1667	0,1243	0,1174	0,0093	0,0010	0,0960
2.Durum	n_1	0,1874	0,0733	0,0501	0,0017	0,0010	0,0550
	n_2	0,0740	0,0599	0,0575	0,0273	0,0320	0,0680
	n_3	0,0565	0,0562	0,0565	0,0452	0,0400	0,0490
	n_4	0,0531	0,0539	0,0540	0,0460	0,0360	0,0390
	n_5	0,0625	0,0619	0,0621	0,0541	0,0430	0,0520
	n_6	0,0506	0,0507	0,0507	0,0416	0,0350	0,0390
	n_7	0,2347	0,1790	0,1688	0,0292	0,0200	0,1170
	n_8	0,1406	0,1122	0,1086	0,0082	0,0050	0,0510

$\mathrm{n}_1=(12,12,12)$	$\mathrm{n}_3=(70,70,70)$	$\mathrm{n}_5=(50,100,150)$	$\mathrm{n}_7=(12,30,70)$
$\mathrm{n}_2=(25,25,25)$	$\mathrm{n}_4=(100,100,100)$	$\mathrm{n}_6=(150,100,50)$	$\mathrm{n}_8=(70,30,12)$

$k = 3$ örneklem ve $p = 2,4,6,8$ değişken için varyans-kovaryans matrislerinin eşitlik varsayımı altında gözlem büyüklüklerinin tüm durumları dikkate alındığında, nominal anlamlılık düzeyine daha yakın deneysel hata değerleri Wilks Lambda, Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testlerinden elde edilmiştir. MANOVA test istatistikleri arasında $p = 2$ durumunda nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer, n_6 gözlem büyüklüğü için 0,0502 değeri ile Wilks Lambda test istatistiğinden elde edilmiştir. Pillai iz istatistiği testi $p = 4$ ve n_4 gözlem büyüklüğünde 0,0500 değeri ile deneysel I. tip hata oranı nominal anlamlılık düzeyine en yakın test istatistiği iken, $p = 6$ ve n_1 ile $p = 8$ ve n_2 gözlem büyüklüklerinde en iyi sonuç 0,0503 değeri ile Hotelling-Lawley test istatistiğinden elde edilmiştir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 3$ örneklem için klasik MANOVA test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleridir. Aynı zamanda $k = 3$ için MANOVA test istatistikleri, gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişiklerden oldukça fazla etkilenmektedir. $p = 2$ durumunda n_4 gözlem büyüklüğü için Wilks Lambda test istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %6,38 iken, n_5 gözlem büyüklüğünde %9,44 ve n_7 gözlem büyüklüğünde ise %11,75'e yükselmektedir. Benzer sonuçların Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testleri için de ortaya çıktığı görülmektedir. Ayrıca gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişikler için bağımlı değişken sayısı artıkça, MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve n_2 gözlem büyüklüğünde 0,0500 değeri ile düzeltilmiş Wilks Lambda test istatistiği nominal anlamlılık düzeyine daha yakın olan test istatistiği iken, $p = 4, p = 6$ ve $p = 8$ için en yakın sonuç düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testinden elde edilmiştir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 6$ ve n_1 iken 0,0498 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir. Gözlem sayılarının eşit olduğu durumlarda $k = 3$ için gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça MANOVA test istatistikleri ile düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarının yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca $k = 3$ için düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden en az etkilenen test istatistiğidir.

Johansen testi, $k = 3$ için hem homojenlik hem de heterojenlik varsayımı altında gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Ancak Johansen testi, gözlem büyüklüğünün azalmasından ve en küçük gözlem büyüklüğü ile en büyük gözlem büyüklüğü arasındaki farkın artmasından oldukça fazla etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 8$ için $n_4 = 100$ olduğunda Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,37 iken, $n_1 = 12$ gözlem büyüklüğünde ise %15,43'e yükselmektedir. Heterojenlik altında $p = 8$ için $n_4 = 100$ olduğunda Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,31 iken, $n_1 = 12$ gözlem büyüklüğünde ise %18,74'e yükselmektedir. Ayrıca heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,65 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %7,70, $p = 6$ olduğunda %10,52 ve $p = 8$ olduğunda ise %18,74'e çıkmaktadır. n_7 ve n_8 gözlem büyüklükleri için de Johansen test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yükseldiği görülmektedir.

MB ve AHT test istatistikleri de $k = 3$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2$ ve $p = 8$ durumlarında hem MB hem de AHT testleri nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koyarken, $p = 4$ durumunda en yakın değer 0,0502 değeri ile MB testinden elde edilmiştir. $p = 6$ ve n_1 olduğunda ise %4,95 değeri ile AHT testi nominal anlamlılık düzeyine en yakın test istatistiğidir. AHT testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0554 ve 0,0615 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,1688 ve 0,1086 değerleri ortaya koymuştur. n_7 ve n_8 dengesiz gözlem büyüklükleri için benzer sonuçlar MB testi için de elde edilmiştir. Dolayısıyla $k = 3$ örneklem durumunda bağımlı değişken sayısı artıkça dengesiz gözlemler için deneysel I. tip hata yapma olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinde uzaklaşmaktadır. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça gözlem sayısının çok küçük (n_1) olduğu durumlar için MB testi nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşırken, AHT testi çok fazla etkilenmemektedir.

MB ve AHT testleri gibi Eftekhar'ın YT ve FY testlerine ait deneysel I. tip hata oranları, bu test istatistiklerinin hem homojenlik hem de heterojenlik altında en küçük gözlem sayısından ve dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilendiğini göstermektedir. Örneğin homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ durumunda n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0332 ve 0,0330 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0001 ve 0,0010'a düşmektedir. Heterojenlik altında $p = 2$ durumunda n_1 için YT'nin deneysel I. tip hata oranı %3,32 iken, gözlem büyüklükleri arttıkça bu oranın nominal anlamlılık düzeyine yaklaştığı görülmektedir. Üstelik $p = 8$ için n_8 gözlem büyüklüğünde YT ve FY istatistikleri için deneysel I. tip hata yapma oranları sırasıyla 0,0082 ve 0,0050 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla YT ve FY testleri de bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlem büyüklükleri için Johansen, MB ve AHT testlerine paralel sonuçlar ortaya koymuştur.

PB testi ise $k = 3$ için hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Özellikle bağımlı değişken sayısı arttıkça eşit, dengeli ve dengesiz gözlem büyüklüklerinin tamamı için nominal anlamlılık düzeyine yakın daha fazla değer elde edilmiştir. Üstelik PB testi, YT, FT, Johansen, MB ve AHT testlerinin aksine dengesiz gözlem büyüklüklerinden çok fazla etkilenmemektedir. $p = 4$ ve n_7 gözlem büyüklüğü için homojenlik varsayımı altında elde edilen deneysel I. tip hata yapma olasılığı %5,70 iken heterojenlik altında ise bu olasılığın %5,50 olduğu görülmektedir.

İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.25'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.25: 2. modele göre mutlak ortalama hata değerleri $(\alpha = 0{,}05, k = 3)$

p	2	4	6	8
Λ	36,54	44,20	44,73	86,44
T	38,78	46,84	47,38	89,91
V	35,26	42,41	42,83	83,29
Λ^*	15,43	13,70	21,18	29,89
T^*	17,46	15,35	21,85	30,98
V^*	14,71	12,93	20,89	28,19
Joh	9,64	22,06	47,63	103,89
MB	9,25	15,28	28,50	53,08
AHT	9,95	15,15	27,04	46,74
YT	7,25	15,69	24,73	42,04
FY	14,13	24,88	36,50	51,38
PB	12,88	17,13	21,25	31,75

Çizelge 5.25'e göre $k = 3$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 7,25 MAPE değeri ile YT testinden elde edildiği görülmektedir. MB ve AHT testleri de sırasıyla 9,25 ve 9,95 MAPE değerleri ile YT testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir. Bu test istatistiğinin performansını düzeltilmiş Wilks Lambda ve düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistikleri takip etmektedir. Johansen testi 9,64 değeri ile oldukça iyi bir performans gösterirken; PB ve FY test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 12,88 ve 14,13 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir.

$p = 4$ için düzeltilmiş Pillai testi, 12,93 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. Düzeltilmiş Pillai test istatistiğini sırasıyla düzeltilmiş Wilks, AHT, MB, düzeltilmiş Hotelling-Lawley, YT ve PB testleri takip etmektedir. Johansen testinin performansının ise diğer testlere daha kötü olduğu görülmektedir. Ayrıca düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri, Johansen testine göre daha iyi performans ortaya koymuşlardır.

$p = 6$ ve $p = 8$ olduğunda ise en iyi performansın sırasıyla 20,89 ve 28,19 değerleri ile düzeltilmiş Pillai testinden elde edildiği görülmektedir. PB testi ile düzeltilmiş Wilks ve düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistiklerinin performanslarının ise birbirlerine yakın olduğu görülmektedir. Bu test istatistiklerini sırasıyla YT, AHT, FY ve MB testleri takip etmektedir. Bağımlı değişken sayısı artıkça AHT testi, MB'den daha iyi bir performans ortaya koyarken, YT'nin performansının ise AHT ve MB testlerinden daha iyi olduğu görülmüştür. En kötü performans ise Johansen testinden elde edilmiştir.

5.1.2.2. $k = 4$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde $k = 4$ örneklem için bağımlı değişken sayısının 2,4,6 ve 8 olduğu durumlara göre Model 2 dikkate alınarak test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.26, Çizelge 5.27, Çizelge 5.28 ve Çizelge 5.29'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.26: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 4, p = 2$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0531	0,0558	0,0489	0,0498	0,0520	0,0457
	n_2	0,0529	0,0538	0,0515	0,0521	0,0530	0,0512
	n_3	0,0518	0,0525	0,0509	0,0517	0,0524	0,0508
	n_4	0,0500	0,0504	0,0499	0,0499	0,0504	0,0499
	n_5	0,0510	0,0516	0,0505	0,0498	0,0503	0,0490
	n_6	0,0508	0,0510	0,0502	0,0513	0,0516	0,0505
	n_7	0,0536	0,0552	0,0527	0,0541	0,0555	0,0519
	n_8	0,0526	0,0528	0,0518	0,0526	0,0542	0,0497
2.Durum	n_1	0,0721	0,0738	0,0695	0,0661	0,0682	0,0619
	n_2	0,0735	0,0751	0,0718	0,0708	0,0721	0,0693
	n_3	0,0744	0,0747	0,0739	0,0735	0,0742	0,0728
	n_4	0,0705	0,0710	0,0701	0,0702	0,0706	0,0699
	n_5	0,0881	0,0887	0,0869	0,0722	0,0723	0,0713
	n_6	0,0616	0,0624	0,0606	0,0698	0,0709	0,0695
	n_7	0,1495	0,1501	0,1477	0,0724	0,0742	0,0700
	n_8	0,0765	0,0774	0,0751	0,0669	0,0688	0,0652

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0579	0,0514	0,0528	0,0380	0,0390	0,0560
	n_2	0,0572	0,0566	0,0574	0,0490	0,0440	0,0490
	n_3	0,0521	0,0524	0,0528	0,0487	0,0400	0,0430
	n_4	0,0510	0,0512	0,0514	0,0491	0,0640	0,0680
	n_5	0,0519	0,0519	0,0525	0,0474	0,0440	0,0510
	n_6	0,0522	0,0523	0,0531	0,0487	0,0490	0,0520
	n_7	0,0678	0,0661	0,0672	0,0583	0,0490	0,0600
	n_8	0,0640	0,0617	0,0634	0,0535	0,0570	0,0640
2.Durum	n_1	0,0596	0,0547	0,0555	0,0392	0,0350	0,0510
	n_2	0,0606	0,0602	0,0610	0,0517	0,0330	0,0440
	n_3	0,0546	0,0549	0,0550	0,0521	0,0490	0,0520
	n_4	0,0510	0,0511	0,0512	0,0493	0,0570	0,0550
	n_5	0,0519	0,0520	0,0528	0,0481	0,0440	0,0440
	n_6	0,0534	0,0536	0,0544	0,0488	0,0430	0,0480
	n_7	0,0664	0,0644	0,0651	0,0573	0,0470	0,0550
	n_8	0,0642	0,0629	0,0640	0,0536	0,0570	0,0670

$n_1 = (12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,90)$
$n_2 = (25,25,25,25)$	$n_5 = (40,50,60,70)$	$n_8 = (90,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70)$	$n_6 = (70,60,50,40)$	

Çizelge 5.27: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 4, p = 4$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0506	0,0551	0,0460	0,0459	0,0501	0,0399
	n_2	0,0498	0,0525	0,0477	0,0489	0,0513	0,0463
	n_3	0,0495	0,0510	0,0487	0,0494	0,0508	0,0485
	n_4	0,0537	0,0548	0,0527	0,0535	0,0546	0,0527
	n_5	0,0536	0,0544	0,0531	0,0537	0,0544	0,0521
	n_6	0,0526	0,0537	0,0508	0,0512	0,0524	0,0503
	n_7	0,0546	0,0558	0,0520	0,0483	0,0523	0,0443
	n_8	0,0581	0,0593	0,0563	0,0519	0,0568	0,0478
2.Durum	n_1	0,0768	0,0839	0,0709	0,0696	0,0761	0,0632
	n_2	0,0790	0,0816	0,0757	0,0768	0,0799	0,0745
	n_3	0,0746	0,0757	0,0730	0,0742	0,0757	0,0723
	n_4	0,0756	0,0767	0,0749	0,0755	0,0765	0,0748
	n_5	0,1068	0,1084	0,1054	0,0808	0,0821	0,0796
	n_6	0,0633	0,0639	0,0619	0,0802	0,0811	0,0786
	n_7	0,2230	0,2270	0,2189	0,0914	0,0965	0,0857
	n_8	0,0403	0,0416	0,0391	0,0622	0,0657	0,0587

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0746	0,0485	0,0459	0,0242	0,0460	0,0240
	n_2	0,0535	0,0503	0,0507	0,0386	0,0510	0,0390
	n_3	0,0514	0,0516	0,0520	0,0468	0,0520	0,0470
	n_4	0,0544	0,0547	0,0550	0,0519	0,0550	0,0520
	n_5	0,0559	0,0563	0,0566	0,0489	0,0570	0,0490
	n_6	0,0526	0,0517	0,0531	0,0465	0,0530	0,0470
	n_7	0,0824	0,0758	0,0756	0,0525	0,0760	0,0530
	n_8	0,0887	0,0729	0,0777	0,0554	0,0780	0,0550
2.Durum	n_1	0,0918	0,0639	0,0602	0,0326	0,0600	0,0330
	n_2	0,0633	0,0594	0,0599	0,0475	0,0600	0,0480
	n_3	0,0538	0,0540	0,0546	0,0493	0,0550	0,0490
	n_4	0,0533	0,0538	0,0540	0,0506	0,0540	0,0510
	n_5	0,0577	0,0577	0,0584	0,0520	0,0580	0,0520
	n_6	0,0597	0,0596	0,0605	0,0533	0,0610	0,0530
	n_7	0,0967	0,0866	0,0852	0,0671	0,0850	0,0670
	n_8	0,0845	0,0744	0,0774	0,0519	0,0770	0,0520

$n_1 = (12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,90)$
$n_2 = (25,25,25,25)$	$n_5 = (40,50,60,70)$	$n_8 = (90,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70)$	$n_6 = (70,60,50,40)$	

Çizelge 5.28: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 4, p = 6)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0501	0,0563	0,0447	0,0433	0,0489	0,0383
	n_2	0,0481	0,0502	0,0448	0,0466	0,0491	0,0436
	n_3	0,0512	0,0527	0,0508	0,0511	0,0525	0,0503
	n_4	0,0536	0,0540	0,0529	0,0534	0,0540	0,0528
	n_5	0,0504	0,0516	0,0487	0,0491	0,0506	0,0476
	n_6	0,0498	0,0510	0,0490	0,0489	0,0493	0,0480
	n_7	0,0494	0,0515	0,0479	0,0429	0,0455	0,0389
	n_8	0,0502	0,0520	0,0488	0,0450	0,0487	0,0416
2.Durum	n_1	0,0812	0,0900	0,0717	0,0671	0,0744	0,0590
	n_2	0,0785	0,0822	0,0749	0,0757	0,0793	0,0719
	n_3	0,0750	0,0771	0,0733	0,0740	0,0760	0,0723
	n_4	0,0741	0,0756	0,0733	0,0738	0,0752	0,0731
	n_5	0,0966	0,0988	0,0940	0,0808	0,0825	0,0786
	n_6	0,0794	0,0795	0,0776	0,0798	0,0810	0,0780
	n_7	0,2239	0,2316	0,2179	0,0866	0,0914	0,0802
	n_8	0,0890	0,0921	0,0858	0,0668	0,0700	0,0624

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1298	0,0528	0,0430	0,0123	0,0030	0,0400
	n_2	0,0641	0,0529	0,0517	0,0316	0,0240	0,0450
	n_3	0,0574	0,0574	0,0576	0,0493	0,0520	0,0570
	n_4	0,0540	0,0542	0,0546	0,0489	0,0370	0,0430
	n_5	0,0524	0,0513	0,0516	0,0426	0,0510	0,0670
	n_6	0,0569	0,0557	0,0558	0,0450	0,0530	0,0680
	n_7	0,1305	0,1042	0,1013	0,0440	0,0320	0,0850
	n_8	0,1235	0,1010	0,0971	0,0439	0,0170	0,0710
2.Durum	n_1	0,1602	0,0743	0,0603	0,0193	0,0150	0,0630
	n_2	0,0714	0,0582	0,0565	0,0387	0,0320	0,0410
	n_3	0,0559	0,0557	0,0562	0,0501	0,0520	0,0560
	n_4	0,0547	0,0552	0,0554	0,0511	0,0400	0,0450
	n_5	0,0579	0,0569	0,0571	0,0496	0,0560	0,0640
	n_6	0,0605	0,0594	0,0601	0,0505	0,0550	0,0630
	n_7	0,1489	0,1221	0,1189	0,0597	0,0400	0,0990
	n_8	0,1138	0,0923	0,0904	0,0383	0,0200	0,0630

$n_1 = (12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,90)$
$n_2 = (25,25,25,25)$	$n_5 = (40,50,60,70)$	$n_8 = (90,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70)$	$n_6 = (70,60,50,40)$	

Çizelge 5.29: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 4, p = 8$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0487	0,0551	0,0419	0,0403	0,0460	0,0334
	n_2	0,0500	0,0523	0,0468	0,0478	0,0508	0,0443
	n_3	0,0476	0,0491	0,0467	0,0474	0,0488	0,0464
	n_4	0,0492	0,0493	0,0482	0,0491	0,0493	0,0476
	n_5	0,0514	0,0527	0,0501	0,0507	0,0519	0,0495
	n_6	0,0529	0,0541	0,0513	0,0516	0,0528	0,0510
	n_7	0,0510	0,0524	0,0487	0,0444	0,0475	0,0411
	n_8	0,0488	0,0512	0,0471	0,0421	0,0449	0,0382
2.Durum	n_1	0,0807	0,0918	0,0686	0,0622	0,0734	0,0537
	n_2	0,0707	0,0761	0,0664	0,0662	0,0725	0,0613
	n_3	0,0734	0,0757	0,0716	0,0721	0,0751	0,0703
	n_4	0,0726	0,0740	0,0716	0,0721	0,0735	0,0711
	n_5	0,0589	0,0609	0,0562	0,0774	0,0803	0,0748
	n_6	0,1116	0,1144	0,1077	0,0758	0,0794	0,0721
	n_7	0,0242	0,0258	0,0227	0,0742	0,0790	0,0688
	n_8	0,2778	0,2861	0,2689	0,0811	0,0907	0,0691

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,2662	0,0726	0,0407	0,0019	0,0010	0,0560
	n_2	0,0807	0,0580	0,0548	0,0252	0,0170	0,0550
	n_3	0,0512	0,0509	0,0509	0,0411	0,0390	0,0570
	n_4	0,0485	0,0488	0,0491	0,0423	0,0510	0,0590
	n_5	0,0609	0,0569	0,0567	0,0412	0,0430	0,0630
	n_6	0,0571	0,0546	0,0545	0,0416	0,0330	0,0550
	n_7	0,2223	0,1641	0,1543	0,0218	0,0130	0,1210
	n_8	0,2148	0,1578	0,1467	0,0183	0,0110	0,1190
2.Durum	n_1	0,3271	0,1036	0,0590	0,0063	0,0040	0,0610
	n_2	0,0955	0,0686	0,0651	0,0390	0,0290	0,0550
	n_3	0,0549	0,0539	0,0540	0,0466	0,0430	0,0570
	n_4	0,0517	0,0519	0,0522	0,0471	0,0550	0,0630
	n_5	0,0644	0,0608	0,0608	0,0455	0,0600	0,0720
	n_6	0,0659	0,0614	0,0614	0,0490	0,0350	0,0510
	n_7	0,2508	0,1955	0,1878	0,0329	0,0280	0,1130
	n_8	0,2832	0,2166	0,2027	0,0499	0,0120	0,1110

$n_1 = (12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,90)$
$n_2 = (25,25,25,25)$	$n_5 = (40,50,60,70)$	$n_8 = (90,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70)$	$n_6 = (70,60,50,40)$	

Varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımı altında $k = 4$ için gözlem sayılarının bütün durumlarına göre nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel hata değerleri, Wilks Lambda, Hotelling-Lawley ve Pillai iz istatistiği testlerinden elde edilmiştir. MANOVA test istatistikleri için $p = 2$, $p = 4$, $p = 6$ ve $p = 8$ durumlarında Wilks Lambda test istatistiği sırasıyla 0,0500, 0,0498, 0,0501 ve 0,0500 değerleri ile nominal anlamlılık düzeyine en yakın test istatistiğidir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 4$ için klasik MANOVA test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleridir. Aynı zamanda $k = 4$ durumunda MANOVA test istatistikleri, gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişiklerden oldukça fazla etkilenmektedir.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve n_4 gözlem büyüklüğünde 0,0499 değeri ile düzeltilmiş Wilks Lambda ve düzeltilmiş Pillai iz istatistiği testleri nominal anlamlılık düzeyine en yakın I. tip hata oranları ortaya koymuştur. $p = 4$ ve n_1 iken 0,0501 değeri ile en yakın değer düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistiğinden elde edilirken, $p = 6$ ve n_4 için 0,0503 değeri ve $p = 8$ ve n_4 için 0,0495 değeri iledüzeltilmiş Pillai test istatistiği nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata değerleri ortaya koyan test istatistiğidir. Heterojenlik altında düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 8$ ve n_1 iken 0,0537 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir. Gözlem sayılarının eşit olduğu durumlarda $k = 4$ için gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça MANOVA test istatistikleri ile düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarının yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca $k = 4$ için düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden en az etkilenen test istatistiğidir.

Johansen testi, $k = 4$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,96 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %9,18, $p = 6$ olduğunda %16,02 ve $p = 8$ olduğunda ise %32,71'e yükselmektedir. n_7 ve n_8 gözlem büyüklükleri için de Johansen test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yükseldiği görülmektedir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı artıkça Johansen testi, gözlem sayılarının büyüklüğünden etkilenmektedir.

MB ve AHT test istatistikleri de $k = 4$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2$, $p = 4$, $p = 6$ ve $p = 8$ durumları için sırasıyla 0,0511, 0,0538, 0,0552 ve 0,0529 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koymuştur. Ayrıca MB testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0644 ve 0,0629 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,1955 ve 0,2166 değerleri elde edilmiştir. Benzer sonuçlar AHT testi için de geçerlidir. Dolayısıyla $k = 4$ için Johansen, MB ve AHT test istatistikleri gözlem sayılarının dengesiz değişimlerinden oldukça fazla etkilenmektedir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı artıkça dengesiz gözlemler için deneysel I. tip hata yapma olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinde uzaklaşmaktadır.

$k = 4$ ve $p = 2$ için hem homojenlik hem de heterojenlik altında YT ve FY testlerine ait deneysel I. tip hata oranları nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Ancak bağımlı değişken sayısı arttıkça YT ve FY test istatistikleri, en küçük gözlem sayısından ve dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilendiğini görülmektedir. Heterojenlik altında $p = 2$ durumunda n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0392 ve 0,0350 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0063 ve 0,0040 olduğu görülmektedir. Üstelik $p = 8$ için n_7 gözlem büyüklüğünde YT için deneysel I. tip hata oranı 0,0329 iken, n_8 gözlem büyüklüğünde FY için deneysel I. tip hata oranı ise 0,0120 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlem büyüklükleri için YT ve FY test istatistikleri nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır.

PB testi ise hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Nominal anlamlılık düzeyine en yakın değerler ise $p = 2$ durumunda elde edilmiştir. Ancak PB testi hem homojenlik hem de heterojenlik altında, $k = 4$ için bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz örneklem büyüklüklerinden etkilenmektedir. Heterojenlik varsayımı altında $p = 8$ ve n_7 gözlem büyüklüğü için deneysel I. tip hata yapma olasılığı %11,30 iken homojenlik söz konusu olduğunda ise bu olasılığın %12,10 olduğu görülmektedir. İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.30'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.30: 2. modele göre mutlak ortalama hata değerleri ($k = 4$)

p	2	4	6	8
Λ	35,25	47,84	50,74	54,06
T	37,04	51,53	55,78	59,08
V	33,05	45,51	48,54	51,29
Λ^*	21,78	28,56	29,16	26,54
T^*	23,84	32,04	30,68	30,36
V^*	20,00	26,96	27,58	23,96
Joh	14,48	34,29	73,99	174,78
MB	12,18	21,78	37,95	84,80
AHT	13,70	23,13	35,20	71,39
YT	7,53	12,54	18,49	31,29
FY	14,88	23,13	32,38	44,75
PB	12,88	12,54	30,25	46,00

Çizelge 5.30'a göre $k = 4$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 7,53 MAPE değeri ile YT testinden elde edildiği görülmektedir. MB ve PB testleri de sırasıyla 12,18 ve 12,88 MAPE değerleri ile YT testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. AHT, Johansen ve FY test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 13,70, 14,48 ve 14,88 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir. $p = 4$ için YT ve PB testleri 12,54 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistikleridir. MB testi 21,78 MAPE değeri ile bu testlerde sonra en iyi performansı ortaya koyarken, AHT ve FY ise 23,13 MAPE değeri ile MB testinden sonra en iyi performansa sahip test istatistikleridir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri ise Johansen testinden daha iyi bir performans göstermiştir. $p = 6$ için 18,49 MAPE değeri ile YT, yine en iyi performans gösteren test istatistiği olarak elde edilmiştir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri ise MB, AHT, PB, FY ve Johansen test istatistiklerinden daha iyi bir performans göstermiştir. $p = 8$ durumunda en iyi performansların düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri ile YT'den elde edildiği görülmektedir.

5.1.2.3. $k = 5$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde $k = 4$ ve $p = 2{,}4{,}6{,}8$ için Model 2 dikkate alınarak test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.31, Çizelge 5.32, Çizelge 5.33 ve Çizelge 5.34'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.31: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 5, p = 2$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0482	0,0513	0,0455	0,0459	0,0495	0,0428
	n_2	0,0533	0,0549	0,0521	0,0525	0,0543	0,0511
	n_3	0,0527	0,0527	0,0523	0,0527	0,0527	0,0520
	n_4	0,0502	0,0505	0,0493	0,0501	0,0505	0,0493
	n_5	0,0523	0,0529	0,0520	0,0527	0,0532	0,0521
	n_6	0,0503	0,0510	0,0499	0,0503	0,0509	0,0498
	n_7	0,0497	0,0506	0,0487	0,0481	0,0497	0,0469
	n_8	0,0485	0,0493	0,0482	0,0464	0,0480	0,0457
2.Durum	n_1	0,0752	0,0774	0,0722	0,0694	0,0726	0,0664
	n_2	0,0769	0,0786	0,0758	0,0745	0,0764	0,0733
	n_3	0,0812	0,0819	0,0808	0,0808	0,0810	0,0803
	n_4	0,0771	0,0774	0,0769	0,0765	0,0771	0,0763
	n_5	0,0974	0,0984	0,0966	0,0788	0,0790	0,0776
	n_6	0,0652	0,0657	0,0645	0,0757	0,0769	0,0751
	n_7	0,1783	0,1799	0,1762	0,0774	0,0792	0,0755
	n_8	0,0380	0,0380	0,0378	0,0685	0,0698	0,0674

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0579	0,0509	0,0518	0,0377	0,0370	0,0560
	n_2	0,0576	0,0566	0,0576	0,0483	0,0400	0,0470
	n_3	0,0510	0,0511	0,0518	0,0486	0,0250	0,0250
	n_4	0,0495	0,0497	0,0501	0,0476	0,0480	0,0507
	n_5	0,0530	0,0530	0,0536	0,0504	0,0520	0,0550
	n_6	0,0514	0,0514	0,0522	0,0483	0,0470	0,0550
	n_7	0,0643	0,0625	0,0639	0,0547	0,0430	0,0550
	n_8	0,0607	0,0581	0,0603	0,0518	0,0290	0,0330
2.Durum	n_1	0,0657	0,0564	0,0580	0,0486	0,0430	0,0670
	n_2	0,0618	0,0605	0,0618	0,0551	0,0270	0,0350
	n_3	0,0522	0,0526	0,0530	0,0506	0,0240	0,0290
	n_4	0,0500	0,0500	0,0503	0,0490	0,0510	0,0520
	n_5	0,0571	0,0570	0,0577	0,0539	0,0570	0,0570
	n_6	0,0523	0,0523	0,0530	0,0500	0,0520	0,0550
	n_7	0,0656	0,0640	0,0652	0,0588	0,0510	0,0560
	n_8	0,0581	0,0576	0,0584	0,0505	0,0350	0,0370

$n_1 = (12,12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,75,90)$
$n_2 = (25,25,25,25,25)$	$n_5 = (40,45,50,55,60)$	$n_8 = (90,75,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70,70)$	$n_6 = (60,55,50,45,40)$	

Çizelge 5.32: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k} = 5, \mathrm{p} = 4)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0529	0,0585	0,0462	0,0483	0,0548	0,0411
	n_2	0,0515	0,0545	0,0480	0,0504	0,0539	0,0471
	n_3	0,0508	0,0520	0,0495	0,0506	0,0516	0,0493
	n_4	0,0506	0,0512	0,0497	0,0506	0,0511	0,0496
	n_5	0,0529	0,0535	0,0518	0,0528	0,0546	0,0508
	n_6	0,0502	0,0525	0,0488	0,0509	0,0528	0,0496
	n_7	0,0504	0,0515	0,0483	0,0459	0,0497	0,0431
	n_8	0,0493	0,0506	0,0474	0,0707	0,0752	0,0663
2.Durum	n_1	0,0915	0,0993	0,0811	0,0811	0,0897	0,0705
	n_2	0,0804	0,0843	0,0766	0,0781	0,0821	0,0737
	n_3	0,0835	0,0847	0,0823	0,0832	0,0842	0,0822
	n_4	0,0831	0,0840	0,0824	0,0824	0,0838	0,0818
	n_5	0,1060	0,1086	0,1035	0,0842	0,0879	0,0829
	n_6	0,0724	0,0739	0,0713	0,0822	0,0843	0,0801
	n_7	0,2507	0,2551	0,2466	0,0967	0,1011	0,0922
	n_8	0,0611	0,0632	0,0589	0,0692	0,0733	0,0641

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0958	0,0578	0,0524	0,0281	0,0230	0,0600
	n_2	0,0590	0,0526	0,0529	0,0395	0,0440	0,0600
	n_3	0,0527	0,0529	0,0534	0,0495	0,0550	0,0580
	n_4	0,0535	0,0542	0,0545	0,0515	0,0440	0,0450
	n_5	0,0570	0,0566	0,0574	0,0500	0,0450	0,0490
	n_6	0,0524	0,0520	0,0527	0,0455	0,0520	0,0600
	n_7	0,0884	0,0805	0,0809	0,0586	0,0410	0,0680
	n_8	0,0903	0,0837	0,0841	0,0593	0,0490	0,0630
2.Durum	n_1	0,1064	0,0666	0,0616	0,0391	0,0430	0,0710
	n_2	0,0638	0,0583	0,0584	0,0467	0,0560	0,0720
	n_3	0,0499	0,0500	0,0505	0,0462	0,0560	0,0570
	n_4	0,0531	0,0532	0,0536	0,0510	0,0450	0,0480
	n_5	0,0581	0,0572	0,0583	0,0511	0,0630	0,0610
	n_6	0,0541	0,0535	0,0543	0,0489	0,0600	0,0650
	n_7	0,1002	0,0898	0,0900	0,0697	0,0590	0,0690
	n_8	0,0904	0,0835	0,0838	0,0599	0,0370	0,0510

$\mathrm{n}_1 = (12,12,12,12,12)$	$\mathrm{n}_4 = (100,100,100,100,100)$	$\mathrm{n}_7 = (12,20,50,75,90)$
$\mathrm{n}_2 = (25,25,25,25,25)$	$\mathrm{n}_5 = (40,45,50,55,60)$	$\mathrm{n}_8 = (90,75,50,20,12)$
$\mathrm{n}_3 = (70,70,70,70,70)$	$\mathrm{n}_6 = (60,55,50,45,40)$	

Çizelge 5.33: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($\mathrm{k} = 5, \mathrm{p} = 6$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0508	0,0577	0,0429	0,0427	0,0500	0,0360
	n_2	0,0494	0,0532	0,0463	0,0478	0,0512	0,0441
	n_3	0,0493	0,0505	0,0485	0,0492	0,0503	0,0484
	n_4	0,0513	0,0518	0,0508	0,0511	0,0517	0,0505
	n_5	0,0500	0,0513	0,0483	0,0489	0,0504	0,0479
	n_6	0,0491	0,0504	0,0477	0,0481	0,0497	0,0467
	n_7	0,0507	0,0528	0,0482	0,0486	0,0517	0,0453
	n_8	0,0531	0,0546	0,0513	0,0480	0,0516	0,0447
2.Durum	n_1	0,0828	0,0951	0,0701	0,0674	0,0793	0,0531
	n_2	0,0778	0,0832	0,0726	0,0726	0,0785	0,0684
	n_3	0,0822	0,0839	0,0799	0,0811	0,0826	0,0781
	n_4	0,0763	0,0773	0,0750	0,0755	0,0761	0,0743
	n_5	0,0660	0,0678	0,0637	0,0782	0,0814	0,0751
	n_6	0,0986	0,1020	0,0957	0,0764	0,0793	0,0732
	n_7	0,0383	0,0404	0,0365	0,0766	0,0814	0,0728
	n_8	0,2034	0,2092	0,1982	0,0741	0,0838	0,0653

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1760	0,0618	0,0447	0,0134	0,0090	0,0450
	n_2	0,0680	0,0525	0,0511	0,0336	0,0290	0,0550
	n_3	0,0531	0,0529	0,0531	0,0467	0,0430	0,0590
	n_4	0,0517	0,0520	0,0522	0,0468	0,0550	0,0560
	n_5	0,0580	0,0555	0,0556	0,0454	0,0410	0,0560
	n_6	0,0562	0,0538	0,0540	0,0452	0,0350	0,0510
	n_7	0,1438	0,1207	0,1181	0,0560	0,0310	0,0880
	n_8	0,1454	0,1195	0,1179	0,0566	0,0280	0,0890
2.Durum	n_1	0,2195	0,0882	0,0647	0,0280	0,0130	0,0590
	n_2	0,0817	0,0637	0,0623	0,0442	0,0360	0,0550
	n_3	0,0570	0,0563	0,0569	0,0499	0,0440	0,0520
	n_4	0,0558	0,0562	0,0567	0,0518	0,0590	0,0630
	n_5	0,0616	0,0594	0,0598	0,0514	0,0380	0,0430
	n_6	0,0635	0,0604	0,0609	0,0499	0,0480	0,0530
	n_7	0,1545	0,1324	0,1308	0,0640	0,0280	0,0890
	n_8	0,1744	0,1494	0,1458	0,0794	0,0320	0,0930

$\mathrm{n}_1 = (12,12,12,12,12)$	$\mathrm{n}_4 = (100,100,100,100,100)$	$\mathrm{n}_7 = (12,20,50,75,90)$
$\mathrm{n}_2 = (25,25,25,25,25)$	$\mathrm{n}_5 = (40,45,50,55,60)$	$\mathrm{n}_8 = (90,75,50,20,12)$
$\mathrm{n}_3 = (70,70,70,70,70)$	$\mathrm{n}_6 = (60,55,50,45,40)$	

Çizelge 5.34: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 5, p = 8$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0480	0,0541	0,0414	0,0403	0,0451	0,0349
	n_2	0,0493	0,0520	0,0456	0,0472	0,0505	0,0438
	n_3	0,0481	0,0496	0,0471	0,0479	0,0494	0,0470
	n_4	0,0493	0,0501	0,0487	0,0493	0,0501	0,0486
	n_5	0,0559	0,0575	0,0542	0,0547	0,0565	0,0529
	n_6	0,0490	0,0514	0,0478	0,0504	0,0528	0,0479
	n_7	0,0529	0,0547	0,0512	0,0468	0,0506	0,0429
	n_8	0,0518	0,0537	0,0511	0,0437	0,0458	0,0416
2.Durum	n_1	0,0881	0,1055	0,0716	0,0687	0,0841	0,0517
	n_2	0,0909	0,0990	0,0815	0,0834	0,0927	0,0741
	n_3	0,0825	0,0854	0,0800	0,0809	0,0829	0,0781
	n_4	0,0847	0,0858	0,0826	0,0833	0,0852	0,0815
	n_5	0,0870	0,0908	0,0833	0,0850	0,0888	0,0808
	n_6	0,0832	0,0870	0,0788	0,0773	0,0818	0,0733
	n_7	0,0819	0,0855	0,0773	0,0908	0,0972	0,0855
	n_8	0,1434	0,1479	0,1385	0,0566	0,0665	0,0485

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,3810	0,0856	0,0371	0,0032	0,0010	0,0450
	n_2	0,0965	0,0587	0,0555	0,0301	0,0190	0,0470
	n_3	0,0525	0,0504	0,0505	0,0412	0,0390	0,0480
	n_4	0,0546	0,0544	0,0546	0,0480	0,0530	0,0640
	n_5	0,0667	0,0600	0,0596	0,0453	0,0370	0,0560
	n_6	0,0607	0,0547	0,0543	0,0397	0,0360	0,0490
	n_7	0,2575	0,1989	0,1910	0,0334	0,0120	0,1080
	n_8	0,2531	0,1975	0,1890	0,0327	0,0120	0,1150
2.Durum	n_1	0,4317	0,1208	0,0546	0,0079	0,0050	0,0610
	n_2	0,1117	0,0668	0,0625	0,0389	0,0360	0,0600
	n_3	0,0586	0,0563	0,0564	0,0476	0,0480	0,0530
	n_4	0,0537	0,0535	0,0537	0,0469	0,0570	0,0670
	n_5	0,0689	0,0636	0,0633	0,0504	0,0430	0,0510
	n_6	0,0656	0,0597	0,0593	0,0450	0,0440	0,0570
	n_7	0,2934	0,2365	0,2282	0,0542	0,0350	0,0960
	n_8	0,2309	0,1765	0,1689	0,0289	0,0230	0,0910

$n_1 = (12,12,12,12,12)$	$n_4 = (100,100,100,100,100)$	$n_7 = (12,20,50,75,90)$
$n_2 = (25,25,25,25,25)$	$n_5 = (40,45,50,55,60)$	$n_8 = (90,75,50,20,12)$
$n_3 = (70,70,70,70,70)$	$n_6 = (60,55,50,45,40)$	

$k = 5$ örneklem ve $p = 2,4,6,8$ değişken için MANOVA test istatistikleri arasında $p = 2$ durumunda nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer, 0,0499 değeri ile Pillai iz istatistiğinde elde edilmiştir. $p = 4$ ve $p = 6$ iken sırasıyla 0,0502 ve 0,0500 değerleri ile Wilks Lambda test istatistiği en iyi sonucu ortaya koyarken, $p = 8$ durumunda ise 0,0501 değeri ile Hotelling-Lawley iz istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı nominal anlamlılık düzeyine en yakın olan test istatistiğidir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 5$ örneklem için klasik MANOVA test istatistiklerinin yine I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleri olduğu görülmektedir.. $p = 4$ durumunda n_4 gözlem büyüklüğü için Pillai iz istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %8,24 iken, n_5 gözlem büyüklüğünde %10,35'e ve n_7 gözlem büyüklüğünde ise %24,66'ya yükselmektedir. Benzer sonuçlar Wilks Lambda ve Hotelling-Lawley iz istatistiği testleri için de elde edilmiştir.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ için düzeltilmiş Wilks lambda ve $p = 8$ için düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistikleri 0,0501 deneysel I. tip hata oran değeri ile nominal anlamlılık düzeyine en yakın test istatistikleridir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 8$ ve n_8 iken 0,0485 değeri ile düzeltilmiş Pillai iz istatistiği istatistiğinden elde edilmiştir. Ayrıca $p = 8$ için n_3 gözlem büyüklüğünde düzeltilmiş Hotelling-Lawley test istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %8,29 iken, n_6 gözlem büyüklüğünde %8,18 ve n_8 gözlem büyüklüğünde ise %6,65 olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla $k = 5$ için düzeltilmiş MANOVA istatistikleri gözlem sayılarının dengesizliğinden daha az etkilenmektedir.

Johansen testi, $k = 5$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Ancak gözlem büyüklüğünden çok fazla etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 6$ için n_4 olduğunda Johansen testine ait hata yapma olasılığı %5,17 iken, n_1 gözlem büyüklüğünde ise %17,60'a yükselmektedir. Benzer sonuçların heterojenlik söz konusu olduğunda da görülmektedir. Ayrıca heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %6,57 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %10,64, $p = 6$ olduğunda %2,95 ve $p = 8$ olduğunda ise %43,17'ye yükselmektedir. n_7 ve n_8 gözlem büyüklükleri için de Johansen test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yükseldiği görülmektedir.

MB ve AHT test istatistikleri de $k = 5$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2,\ p = 4,\ p = 6$ ve $p = 8$ durumları için sırasıyla 0,0500, 0,0500, 0,0562 ve 0,0535 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koymuştur. Ayrıca AHT testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0652 ve 0,0584 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,2282 ve 0,1689 değerleri elde edilmiştir. Benzer sonuçlar MB testi için de geçerlidir. Dolayısıyla $k = 4$ için Johansen, MB ve AHT test istatistikleri gözlem sayılarının dengesiz değişimlerinden oldukça fazla etkilenmektedir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı artıkça dengesiz gözlemler için deneysel I. tip hata yapma olasılıkları nominal anlamlılık düzeyinde uzaklaşmaktadır.

YT ve FY testleri, gözlem büyüklüklerinin eşit ve dengeli değiştiği durumlarda dengesiz gözlem büyüklüğüne göre daha iyi bir performans göstermiştir. Ancak hem homojenlik hem de heterojenlik altında en küçük gözlem sayısından ve dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0377 ve 0,0370 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0327 ve 0,0120'ye düşmektedir. Heterojenlik durumunda da benzer sonuçların elde edildiği görülmektedir. Üstelik heterojenlik söz konusu olduğunda $p = 2$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için FY'nin deneysel I. tip hata oranı 0,*350 iken, $p = 8$ durumunda ise 0,0230 değeri ile nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır. FY'ye paralel olarak YT test istatistiği de dengesiz gözlem büyüklüğüne karşı oldukça duyarlıdır.

PB testi ise hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Ancak PB testi, $k = 5$ durumunda bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz örneklem büyüklüklerinden etkilenmektedir. Homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için PB testinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı %3,30 iken $p = 8$ olduğunda bu olasılık %11,50'ye yükselmektedir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise $p = 2$ ve n_8 gözlem büyüklüğü için deneysel I. tip hata yapma olasılığı %3,70 iken, $p = 8$ olduğunda %9,10 olarak elde edilmektedir. İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.35'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.35: 2. modele göre mutlak ortalama hata değerleri ($k = 5$)

p	2	4	6	8
Λ	40,71	54,84	44,61	44,83
T	41,99	59,68	50,05	51,35
V	40,00	52,08	42,36	39,94
Λ^*	27,44	36,11	27,46	31,99
T^*	28,30	41,34	31,20	37,43
V^*	26,58	33,10	24,71	27,84
Joh	13,65	40,66	102,53	217,14
MB	10,54	25,30	54,34	99,24
AHT	12,34	24,85	49,40	83,04
YT	5,96	13,45	19,51	26,98
FY	20,63	16,25	32,38	40,00
PB	19,09	21,63	28,75	36,25

Çizelge 5.35'e göre $k = 5$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 5,96 MAPE değeri ile YT testinden elde edildiği görülmektedir. MB ve AHT testleri de sırasıyla 10,54 ve 12,34 MAPE değerleri ile MB testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. Johansen ve PB test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 13,65 ve 19,09 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir. Ayrıca düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Pillai istatistiğinden elde edilmiştir. $p = 4$ için en iyi performansı 13,45 MAPE değeri ile YT testi ortaya koyarken, FY ve PB testleri de MB ve AHT testlerinden daha iyi bir performans göstermiştir. $p = 6$ için YT testi 19,51 MAPE değeri ile yine en iyi performans gösteren test istatistiğidir. Düzeltilmiş MANOVA ve PB testleri YT testini takip ederken, FY'nin performansının ise MB ve AHT'den daha iyi olduğu görülmektedir. $p = 8$ durumunda ise en iyi performansların YT ve düzeltilmiş MANOVA testlerinden elde edildiği görülmektedir. PB ve FY testleri, MB ve AHT testlerine göre daha iyi bir performans ortaya koyarken, en kötü performansı ise Johansen test istatistiği göstermiştir.

5.1.2.4. $k = 6$ iken elde edilen I. tip hata olasılıkları

α=0,05 anlamlılık düzeyinde $k = 6$ ve $p = 2,4,6,8$ için Model 2 dikkate alınarak test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.36, Çizelge 5.37, Çizelge 5.38 ve Çizelge 5.39'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.36: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 6, p = 2$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0494	0,0514	0,0469	0,0455	0,0482	0,0443
	n_2	0,0526	0,0541	0,0516	0,0518	0,0534	0,0507
	n_3	0,0509	0,0514	0,0506	0,0507	0,0514	0,0506
	n_4	0,0535	0,0533	0,0532	0,0534	0,0532	0,0530
	n_5	0,0494	0,0498	0,0491	0,0492	0,0495	0,0485
	n_6	0,0548	0,0551	0,0536	0,0546	0,0553	0,0539
	n_7	0,0529	0,0538	0,0523	0,0508	0,0515	0,0500
	n_8	0,0468	0,0472	0,0463	0,0488	0,0499	0,0481
2.Durum	n_1	0,0770	0,0798	0,0761	0,0710	0,0728	0,0676
	n_2	0,0825	0,0833	0,0817	0,0797	0,0816	0,0783
	n_3	0,0809	0,0814	0,0799	0,0799	0,0808	0,0795
	n_4	0,0783	0,0786	0,0783	0,0783	0,0784	0,0781
	n_5	0,1116	0,1123	0,1105	0,0801	0,0804	0,0796
	n_6	0,0524	0,0528	0,0518	0,0739	0,0748	0,0733
	n_7	0,1438	0,1449	0,1432	0,0768	0,0775	0,0752
	n_8	0,0355	0,0359	0,0354	0,0743	0,0753	0,0735

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,0610	0,0525	0,0531	0,0451	0,0320	0,0550
	n_2	0,0595	0,0582	0,0594	0,0533	0,0510	0,0640
	n_3	0,0510	0,0511	0,0522	0,0493	0,0400	0,0470
	n_4	0,0564	0,0564	0,0568	0,0556	0,0430	0,0480
	n_5	0,0517	0,0516	0,0523	0,0499	0,0320	0,0350
	n_6	0,0568	0,0567	0,0582	0,0549	0,0410	0,0410
	n_7	0,0703	0,0687	0,0704	0,0615	0,0400	0,0470
	n_8	0,0653	0,0644	0,0653	0,0594	0,0560	0,0630
2.Durum	n_1	0,0701	0,0583	0,0600	0,0548	0,0410	0,0590
	n_2	0,0596	0,0578	0,0590	0,0561	0,0590	0,0640
	n_3	0,0500	0,0500	0,0505	0,0485	0,0480	0,0480
	n_4	0,0527	0,0532	0,0537	0,0522	0,0470	0,0480
	n_5	0,0555	0,0551	0,0563	0,0540	0,0330	0,0360
	n_6	0,0572	0,0571	0,0579	0,0562	0,0410	0,0400
	n_7	0,0659	0,0645	0,0659	0,0590	0,0480	0,0520
	n_8	0,0673	0,0662	0,0679	0,0609	0,0630	0,0650

$n_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $n_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$n_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $n_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$n_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $n_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$n_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $n_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Çizelge 5.37: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları ($k = 6, p = 4$)

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda}^*$	$\boldsymbol{T}^*$	$\boldsymbol{V}^*$
1. Durum	n_1	0,0486	0,0529	0,0435	0,0449	0,0497	0,0394
	n_2	0,0503	0,0527	0,0481	0,0491	0,0514	0,0474
	n_3	0,0493	0,0497	0,0484	0,0491	0,0497	0,0483
	n_4	0,0534	0,0535	0,0529	0,0534	0,0534	0,0529
	n_5	0,0518	0,0524	0,0508	0,0503	0,0516	0,0495
	n_6	0,0514	0,0531	0,0501	0,0511	0,0524	0,0501
	n_7	0,0545	0,0551	0,0531	0,0497	0,0514	0,0479
	n_8	0,0500	0,0506	0,0489	0,0497	0,0519	0,0472
2.Durum	n_1	0,0889	0,0967	0,0802	0,0796	0,0873	0,0718
	n_2	0,0845	0,0876	0,0812	0,0822	0,0861	0,0785
	n_3	0,0835	0,0844	0,0819	0,0830	0,0841	0,0817
	n_4	0,0866	0,0874	0,0862	0,0863	0,0874	0,0858
	n_5	0,1117	0,1140	0,1096	0,0820	0,0841	0,0803
	n_6	0,0691	0,0709	0,0683	0,0842	0,0868	0,0823
	n_7	0,1634	0,1653	0,1610	0,0938	0,0971	0,0904
	n_8	0,0727	0,0745	0,0712	0,0790	0,0822	0,0750

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,1074	0,0593	0,0529	0,0392	0,0240	0,0570
	n_2	0,0602	0,0535	0,0539	0,0463	0,0410	0,0510
	n_3	0,0525	0,0526	0,0532	0,0485	0,0450	0,0470
	n_4	0,0526	0,0531	0,0537	0,0514	0,0530	0,0570
	n_5	0,0551	0,0540	0,0550	0,0494	0,0320	0,0350
	n_6	0,0575	0,0565	0,0573	0,0527	0,0470	0,0530
	n_7	0,0928	0,0866	0,0871	0,0665	0,0570	0,0730
	n_8	0,0953	0,0888	0,0895	0,0682	0,0490	0,0610
2.Durum	n_1	0,1250	0,0747	0,0671	0,0556	0,0290	0,0450
	n_2	0,0693	0,0623	0,0626	0,0551	0,0550	0,0680
	n_3	0,0532	0,0532	0,0539	0,0507	0,0520	0,0530
	n_4	0,0523	0,0526	0,0532	0,0512	0,0560	0,0600
	n_5	0,0591	0,0580	0,0588	0,0550	0,0390	0,0410
	n_6	0,0613	0,0601	0,0613	0,0561	0,0510	0,0570
	n_7	0,1032	0,0938	0,0948	0,0721	0,0600	0,0680
	n_8	0,0913	0,0840	0,0845	0,0649	0,0450	0,0600

$n_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $n_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$n_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $n_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$n_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $n_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$n_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $n_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Çizelge 5.38: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(k = 6, p = 6)$

Σ_i	(n_i)	Λ	T	V	Λ^*	T^*	V^*
1. Durum	n_1	0,0513	0,0587	0,0435	0,0444	0,0520	0,0364
	n_2	0,0503	0,0550	0,0457	0,0487	0,0539	0,0436
	n_3	0,0503	0,0517	0,0493	0,0501	0,0513	0,0492
	n_4	0,0530	0,0537	0,0516	0,0529	0,0536	0,0514
	n_5	0,0525	0,0539	0,0506	0,0505	0,0528	0,0488
	n_6	0,0494	0,0504	0,0483	0,0488	0,0504	0,0474
	n_7	0,0490	0,0502	0,0474	0,0474	0,0515	0,0445
	n_8	0,0485	0,0495	0,0468	0,0462	0,0488	0,0440
2.Durum	n_1	0,0817	0,0953	0,0702	0,0678	0,0797	0,0568
	n_2	0,0765	0,0821	0,0710	0,0722	0,0783	0,0656
	n_3	0,0738	0,0753	0,0730	0,0730	0,0746	0,0715
	n_4	0,0806	0,0814	0,0796	0,0802	0,0812	0,0792
	n_5	0,0567	0,0594	0,0555	0,0755	0,0773	0,0732
	n_6	0,1197	0,1233	0,1157	0,0794	0,0837	0,0759
	n_7	0,0509	0,0535	0,0491	0,0801	0,0852	0,0760
	n_8	0,1945	0,1991	0,1897	0,0690	0,0764	0,0627

Σ_i	(n_i)	Joh	MB	AHT	YT	FY	PB
1. Durum	n_1	0,2247	0,0697	0,0469	0,0288	0,0040	0,0610
	n_2	0,0756	0,0571	0,0551	0,0410	0,0360	0,0490
	n_3	0,0529	0,0515	0,0521	0,0464	0,0430	0,0470
	n_4	0,0543	0,0544	0,0548	0,0504	0,0470	0,0520
	n_5	0,0604	0,0579	0,0582	0,0501	0,0550	0,0610
	n_6	0,0643	0,0603	0,0603	0,0516	0,0400	0,0510
	n_7	0,1560	0,1327	0,1313	0,0674	0,0430	0,0850
	n_8	0,1614	0,1376	0,1357	0,0742	0,0510	0,0920
2.Durum	n_1	0,2638	0,0915	0,0618	0,0427	0,0160	0,0550
	n_2	0,0838	0,0634	0,0614	0,0501	0,0320	0,0470
	n_3	0,0542	0,0535	0,0538	0,0496	0,0450	0,0490
	n_4	0,0542	0,0544	0,0551	0,0517	0,0530	0,0590
	n_5	0,0630	0,0597	0,0600	0,0529	0,0570	0,0640
	n_6	0,0674	0,0630	0,0632	0,0565	0,0430	0,0560
	n_7	0,1624	0,1433	0,1414	0,0772	0,0470	0,0810
	n_8	0,1734	0,1490	0,1468	0,0818	0,0400	0,0800

$n_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $n_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$n_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $n_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$n_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $n_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$n_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $n_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Çizelge 5.39: 2. modele göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata oranları $(\mathrm{k} = 6, \mathrm{p} = 8)$

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{\Lambda}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\Lambda^*}$	$\boldsymbol{T^*}$	$\boldsymbol{V^*}$
1. Durum	n_1	0,0513	0,0600	0,0437	0,0423	0,0496	0,0362
	n_2	0,0519	0,0547	0,0489	0,0506	0,0527	0,0472
	n_3	0,0505	0,0510	0,0498	0,0504	0,0508	0,0493
	n_4	0,0486	0,0489	0,0475	0,0486	0,0488	0,0474
	n_5	0,0460	0,0481	0,0448	0,0459	0,0470	0,0442
	n_6	0,0490	0,0499	0,0475	0,0481	0,0503	0,0460
	n_7	0,0508	0,0527	0,0495	0,0473	0,0504	0,0448
	n_8	0,0527	0,0550	0,0509	0,0456	0,0486	0,0426
2.Durum	n_1	0,0948	0,1121	0,0773	0,0739	0,0892	0,0571
	n_2	0,0918	0,0992	0,0856	0,0859	0,0930	0,0784
	n_3	0,0895	0,0919	0,0865	0,0878	0,0908	0,0853
	n_4	0,0865	0,0883	0,0848	0,0858	0,0870	0,0836
	n_5	0,1092	0,1136	0,1046	0,0895	0,0931	0,0859
	n_6	0,0811	0,0845	0,0782	0,0776	0,0824	0,0735
	n_7	0,1195	0,1245	0,1148	0,0983	0,1032	0,0921
	n_8	0,0848	0,0888	0,0819	0,0570	0,0646	0,0496

$\boldsymbol{\Sigma_i}$	$(\boldsymbol{n_i})$	$\boldsymbol{Joh}$	$\boldsymbol{MB}$	$\boldsymbol{AHT}$	$\boldsymbol{YT}$	$\boldsymbol{FY}$	$\boldsymbol{PB}$
1. Durum	n_1	0,4996	0,1049	0,0355	0,0155	0,0030	0,0550
	n_2	0,1116	0,0618	0,0558	0,0382	0,0270	0,0470
	n_3	0,0546	0,0525	0,0525	0,0456	0,0370	0,0460
	n_4	0,0543	0,0538	0,0539	0,0475	0,0550	0,0640
	n_5	0,0689	0,0603	0,0594	0,0461	0,0430	0,0650
	n_6	0,0721	0,0645	0,0643	0,0511	0,0470	0,0670
	n_7	0,2865	0,2356	0,2290	0,0643	0,0170	0,1120
	n_8	0,2942	0,2358	0,2290	0,0632	0,0150	0,1160
2.Durum	n_1	0,5407	0,1424	0,0530	0,0280	0,0110	0,0610
	n_2	0,1274	0,0721	0,0641	0,0462	0,0360	0,0690
	n_3	0,0594	0,0566	0,0566	0,0497	0,0520	0,0630
	n_4	0,0564	0,0558	0,0562	0,0509	0,0530	0,0590
	n_5	0,0807	0,0703	0,0693	0,0548	0,0520	0,0590
	n_6	0,0769	0,0669	0,0663	0,0529	0,0410	0,0490
	n_7	0,3221	0,2730	0,2675	0,0846	0,0150	0,0670
	n_8	0,2742	0,2259	0,2197	0,0625	0,0210	0,0650

$\mathrm{n}_1 = (12,12,12,12,12,12)$ $\mathrm{n}_5 = (30,40,50,60,70,80)$
$\mathrm{n}_2 = (25,25,25,25,25,25)$ $\mathrm{n}_6 = (80,70,60,50,40,30)$
$\mathrm{n}_3 = (70,70,70,70,70,70)$ $\mathrm{n}_7 = (12,20,50,80,90,120)$
$\mathrm{n}_4 = (100,100,100,100,100,100)$ $\mathrm{n}_8 = (120,90,80,50,20,12)$

Varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımı altında ve $k = 6$ durumunda MANOVA test istatistikleri için $p = 2$, $p = 6$ ve $p = 8$ durumunda nominal anlamlılık düzeyine en yakın değerler sırasıyla 0,0498, 0,0502 ve 0,0499 değerleri ile Hotelling-Lawley test istatistiğinden elde edilmiştir. $p = 8$ olduğunda ise 0,0500 değeri ile Wilks Lambda test istatistiği nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata yapma olasılığına sahip olan test istatistiğidir. Heterojenlik söz konusu olduğunda ise $k = 6$ için klasik MANOVA test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıklarının nominal anlamlılık düzeyinden en fazla uzaklaşan test istatistikleridir. Aynı zamanda $k = 6$ durumunda MANOVA test istatistikleri, gözlem sayılarındaki dengeli ve dengesiz değişiklerden oldukça fazla etkilenmektedir.

Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için homojenlik varsayımı sağlandığında $p = 2$ ve $p = 4$ için düzeltilmiş Pillai iz istatistiği nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata oranı ortaya koyarken, $p = 4$ için en yakın sonuç düzeltilmiş Wilks Lambda istatistiğinden ve $p = 8$ için düzeltilmiş Hotelling-Lawley iz istatistiğinden elde edilmiştir. Heterojenlik durumu söz konusu olduğunda ise düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için nominal anlamlılık düzeyine en yakın değer $p = 8$ ve n_8 iken 0,0496 değeri ile düzeltilmiş Hotelling-Lawley iz istatistiğinden elde edilmiştir. Gözlem sayılarının eşit olduğu durumlarda $k = 6$ için gözlem sayılarının büyüklükleri arttıkça düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarının MANOVA test istatistiklerine yaklaştığı gözlemlenmektedir. Ayrıca heterojenlik durumunda $p = 2$ için düzeltilmiş düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinin deneysel I. tip hata yapma olasılığı n_4 gözlem büyüklüğünde %7.81 iken, n_6 gözlem büyüklüğünde %7,33 ve n_8 gözlem büyüklüğünde ise %7,35 olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla $k = 6$ için diğer test istatistiklerine göre düzeltilmiş MANOVA istatistikleri, gözlem sayılarının dengesizliğinden daha az etkilenmektedir. Ancak bağımlı değişken sayısı arttıkça dengesiz gözlemler, test istatistiklerinin deneysel I. tip hata yapma olasılıklarını etkilemektedir.

Johansen testi, $k = 6$ için gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik altında $p = 2$ ve n_1 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %7,01 iken bu oran, $p = 4$ olduğunda %12,50, $p = 6$ olduğunda %26,38 ve $p = 8$ olduğunda ise %54,07'ye yükselmektedir. Ayrıca heterojenlik altında $p = 2$ ve n_7 gözlem büyüklüğü için Johansen testine ait hata yapma olasılığı %6,59 iken bu oran, $p = 4$

olduğunda %10,32, $p = 6$ olduğunda %16,24 ve $p = 8$ olduğunda ise %32,21'e yükselmektedir. Dolayısıyla bağımlı değişken sayısı artıkça Johansen testi, gözlem sayılarının büyüklüğünden etkilenmektedir.

$k = 6$ için MB ve AHT test istatistikleri gözlem sayılarının eşit olduğu ya da dengeli olarak değiştiği durumlarda nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koymuştur. Heterojenlik varsayımı geçerli olduğunda $p = 2$, $p = 4$, $p = 6$ ve $p = 8$ durumları için sırasıyla 0,0500, 0,0526, 0,0535 ve 0,0558 değerleri ile MB testi nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koymuştur. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça MB ve AHT testleri, gözlem büyüklüklerindeki dengesiz değişikliklerden çok fazla etkilenmektedir. MB testi, n_7 ve n_8 gözlem durumunda $p = 2$ için sırasıyla 0,0645 ve 0,0662 deneysel I. tip hata oranlarına sahip iken, $p = 8$ olduğunda ise sırasıyla 0,2730 ve 0,2259 değerleri elde edilmiştir. Benzer sonuçlar AHT testi için de geçerlidir. Dolayısıyla $k = 4$ için Johansen, MB ve AHT test istatistikleri gözlem sayılarının dengesiz değişimlerinden oldukça fazla etkilenmektedir. Ancak bağımlı değişken sayısı arttıkça gözlem sayısının çok küçük (n_1) olduğu durumlar için MB testi nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşırken, AHT testi çok fazla etkilenmemektedir.

Hem homojenlik hem de heterojenlik altında YT testine ait deneysel I. tip hata oranları nominal anlamlılık düzeyine yakın değerler ortaya koyarken, bağımlı değişken sayısı arttıkça FY testine ait deneysel I. tip hata oranlarının nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaştığı görülmektedir. Heterojenlik altında YT test istatistiği için nominal anlamlılık düzeyine en yakın deneysel I. tip hata oranı $p = 6$ ve n_2 gözlem büyüklüğünde %5,01 olarak elde edilmiştir. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça FY test istatistiğinin en küçük gözlem büyüklüğü ile dengesiz gözlem büyüklüklerinden etkilendiği görülmektedir. YT ise yalnızca en küçük gözlem büyüklüğünden etkilenmektedir. $p = 2$ durumunda n_1 için YT ve FY'nin deneysel I. tip hata oranları sırasıyla 0,0548 ve 0,0410 iken, $p = 8$ durumunda ise bu değerlerin 0,0280 ve 0,0110 olduğu görülmektedir. Dengesiz gözlem büyüklüklerinde ise $p = 2$ ve n_7 için FY'nin deneysel I. tip hata oranı 0,0480 iken, $p = 8$ durumunda ise bu değer 0,0150 olarak elde edilmiştir. PB testi ise hem homojenlik ve hem de heterojenlik altında oldukça iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Üstelik heterojenlik durumunda PB testinin $k = 6$ için dengesiz gözlem büyüklüklerinden çok fazla etkilenmediği gözlemlenmiştir.

İncelenen tüm durumlar altında test istatistiklerinin performanslarını karşılaştırmak için MAPE değerleri hesaplanmış ve Çizelge 5.40'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.40: 2. modele göre mutlak ortalama hata değerleri $(k = 6)$

p	2	4	6	8
Λ	38,76	46,74	43,11	46,35
T	39,91	50,18	49,19	53,68
V	38,14	44,70	40,85	41,61
Λ^*	28,98	35,30	26,90	34,88
T^*	29,85	38,48	31,64	39,19
V^*	27,80	33,64	24,80	31,08
Joh	18,79	48,51	121,48	272,45
MB	15,23	30,39	62,38	129,03
AHT	17,36	29,85	55,51	107,64
YT	10,64	14,51	19,43	20,94
FY	17,88	16,63	22,50	37,38
PB	16,50	18,75	25,63	35,00

Çizelge 5.40'a göre $k = 6$ iken $p = 2$ için en iyi performansın 10,64 MAPE değeri ile YT testinden elde edildiği görülmektedir. MB, PB ve AHT testleri de sırasıyla 15,23, 16,50 ve 17,36 MAPE değerleri ile YT testinden sonra en iyi performans ortaya koyan test istatistikleridir. FY ve Johansen test istatistiklerinin MAPE değerleri ise sırasıyla 17,88 ve 18,79 değerleri ile kabul edilebilir düzeydedir. Düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri için en iyi performans düzeltilmiş Pillai iz istatistiğinden elde edilmiştir.

$p = 4$ için YT testi yine 14,51 MAPE değeri ile en iyi performans gösteren test istatistiğidir. FY testi 16,63 MAPE değeri ile YT testinden sonra en iyi performansı ortaya koyarken, PB testi de 18,75 MAPE değeri ile FY testinden sonra en iyi performansa sahip test istatistiği olarak elde edilmiştir. AHT ve MB testlerinin performansının ise düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerine göre daha iyi olduğu görülmektedir.

$p = 6$ ve $p = 8$ olduğunda ise en iyi performansın sırasıyla 19,43 ve 20,94 değerleri ile YT'den elde edildiği görülmektedir. Ayrıca FY ve PB testlerinin performansı ile düzeltilmiş MANOVA istatistiklerinin performanslarının oldukça yakın olduğu belirlenmiştir. Bağımlı değişken sayısı arttıkça AHT testi MB'den daha iyi bir performans ortaya koyarken, en kötü performans ise Johansen testinden elde edilmiştir.

5.2. Yüksek Boyutlu Behrens-Fisher Problemleri İçin Simülasyon Çalışması

Yüksek boyutlu Behrens-Fisher problemlerinin çözümünde alternatif test istatistiklerinin I. tip hata olasılıklarını belirlemek için ilk olarak $N_p(0, I_p)$ olacak şekilde p boyutlu çok değişkenli normal dağılımdan simüle edilmiş örneklemler türetilmiştir. Varyans-kovaryans matrislerinin heterojen olduğu durumlarda test istatistiklerinin ortaya koyduğu I. tip hata olasılıklarını belirlemek için Konietschke vd.nin (2015) parametrik ve parametrik olmayan MANOVA problemleri için incelediği iki farklı model yapısı dikkate alınmıştır. Bu durumda p boyutlu 1'lerden oluşan bir vektör J_p ve p boyutlu birim matris I_p olmak üzere bu modeller $i = 1, \dots, k$ için

$$\Sigma_i = \sigma_{i,ab} = i * I_p + \rho^{|a-b|} \tag{5.5}$$

$$\Sigma_i = i * I_p + \rho * (J_p - I_p) \tag{5.6}$$

şeklindedir. Eşitlik 5.5'deki model heterojen otoregresif (AR) varyans-kovaryans modelini ifade derken, eşitlik 5.6'daki modelde ise heterojen bileşik (Compound) varyans-kovaryans modeli dikkate alınmıştır. Çalışmada bütün test istatistikleri için 5000 iterasyon gerçekleştirilmiştir. Her bir test istatistiği için $k = 3\ ve\ k = 4$ olmak üzere iki farklı grup yapısı ve her bir grup için $p = 25,50,100,150,200,250$ olacak şekilde altı farklı bağımlı değişken yapısı dikkate alınmıştır. Heterojenlik yapısını temsil eden varyans-kovaryans matrisleri için korelasyon katsayısı sırasıyla $\rho = 0{,}2\ ve$ 0,8 olarak hesaplanmıştır. Ayrıca nominal anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ olarak belirlenmiştir.

5.2.1. Heterojen otoregresif (AR) modeline göre elde edilen deneysel hata oranları

Çalışmada ilk olarak çok değişkenli normal dağılımdan türetilen veriler için AR modeline göre simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. İncelenen test istatistikleri için I. tip hata yapma olasılıklarını gösteren tablolar, korelasyon katsayısının $\rho = 0{,}2$ ve $\rho = 0{,}8$ olmasına göre ikiye ayrılmıştır. Deneysel koşulların her biri dikkate alınarak önerilen test istatistikleri için I. tip hata yapma olasılıkları elde edilmiştir.

Çizelge 5.41: Heterojen otoregresif (AR) varyans-kovaryans modeline göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata yapma olasılıkları (k = 3)

ρ	p	(n_i)	T_{NH}	T_{YH}	T_{Hu}	T_{Cao}	T_{Zhou}
0,2	25	n_1	0,0890	0,0720	0,0592	0,0518	0,0528
		n_2	0,0676	0,0792	0,0632	0,0538	0,0548
		n_3	0,0642	0,0766	0,0626	0,0520	0,0534
	50	n_1	0,0752	0,0730	0,0558	0,0528	0,0538
		n_2	0,0728	0,0632	0,0510	0,0434	0,0450
		n_3	0,0754	0,0812	0,0658	0,0538	0,0554
	100	n_1	0,0748	0,0684	0,0544	0,0466	0,0506
		n_2	0,0644	0,0722	0,0578	0,0492	0,0560
		n_3	0,0592	0,0722	0,0558	0,0468	0,0540
	150	n_1	0,0748	0,0684	0,0544	0,0466	0,0506
		n_2	0,0644	0,0722	0,0578	0,0492	0,0560
		n_3	0,0592	0,0722	0,0558	0,0468	0,0540
	200	n_1	0,0780	0,0724	0,0564	0,0486	0,0546
		n_2	0,0660	0,0718	0,0536	0,0476	0,0548
		n_3	0,0556	0,0686	0,0532	0,0438	0,0466
	250	n_1	0,0652	0,0688	0,0518	0,0442	0,0528
		n_2	0,0670	0,0740	0,0552	0,0502	0,0550
		n_3	0,0580	0,0694	0,0508	0,0466	0,0520
0,8	25	n_1	0,1106	0,0878	0,0746	0,0640	0,0654
		n_2	0,0882	0,0802	0,0652	0,0572	0,0582
		n_3	0,0772	0,0798	0,0670	0,0576	0,0554
	50	n_1	0,0952	0,0770	0,0632	0,0556	0,0586
		n_2	0,0840	0,0778	0,0648	0,0556	0,0564
		n_3	0,0840	0,0868	0,0730	0,0660	0,0646
	100	n_1	0,0890	0,0796	0,0644	0,0542	0,0608
		n_2	0,0752	0,0796	0,0630	0,0558	0,0582
		n_3	0,0734	0,0762	0,0600	0,0550	0,0562
	150	n_1	0,0948	0,0796	0,0640	0,0540	0,0608
		n_2	0,0790	0,0808	0,0686	0,0578	0,0632
		n_3	0,0648	0,0760	0,0650	0,0530	0,0554
	200	n_1	0,0878	0,0728	0,0606	0,0516	0,0576
		n_2	0,0744	0,0764	0,0596	0,0484	0,0550
		n_3	0,0654	0,0714	0,0606	0,0458	0,0536
	250	n_1	0,0834	0,0690	0,0598	0,0474	0,0552
		n_2	0,0730	0,0770	0,0606	0,0532	0,0584
		n_3	0,0670	0,0698	0,0592	0,0476	0,0542

$n_1 = (10,15,20)$ $n_2 = (20,30,40)$ $n_3 = (30,45,60)$

Çizelge 5.42: Heterojen otoregresif (AR) varyans-kovaryans modeline göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata yapma olasılıkları (k = 4)

ρ	p	(n_i)	T_{NH}	T_{YH}	T_{Hu}	T_{Cao}	T_{Zhou}
0,2	25	n_1	0,0894	0,0710	0,0620	0,0456	0,0560
		n_2	0,0728	0,0724	0,0626	0,0442	0,0512
		n_3	0,0706	0,0680	0,0586	0,0444	0,0494
	50	n_1	0,0838	0,0742	0,0598	0,0476	0,0592
		n_2	0,0738	0,0738	0,0582	0,0458	0,0554
		n_3	0,0640	0,0670	0,0520	0,0404	0,0484
	100	n_1	0,0860	0,0728	0,0596	0,0450	0,0596
		n_2	0,0654	0,0664	0,0540	0,0410	0,0548
		n_3	0,0666	0,0644	0,0496	0,0390	0,0456
	150	n_1	0,0766	0,0668	0,0560	0,0412	0,0548
		n_2	0,0612	0,0636	0,0498	0,0396	0,0512
		n_3	0,0620	0,0732	0,0608	0,0458	0,0596
	200	n_1	0,0724	0,0650	0,0532	0,0386	0,0538
		n_2	0,0622	0,0644	0,0532	0,0406	0,0508
		n_3	0,0608	0,0676	0,0550	0,0406	0,0532
	250	n_1	0,0670	0,0694	0,0544	0,0420	0,0588
		n_2	0,0670	0,0626	0,0482	0,0370	0,0474
		n_3	0,0598	0,0684	0,0588	0,0416	0,0546
0,8	25	n_1	0,1082	0,0748	0,0680	0,0540	0,0594
		n_2	0,0864	0,0766	0,0678	0,0506	0,0564
		n_3	0,0818	0,0666	0,0574	0,0458	0,0476
	50	n_1	0,1034	0,0784	0,0702	0,0550	0,0640
		n_2	0,1022	0,0802	0,0690	0,0540	0,0612
		n_3	0,0800	0,0726	0,0618	0,0494	0,0572
	100	n_1	0,1034	0,0752	0,0684	0,0486	0,0618
		n_2	0,0812	0,0656	0,0608	0,0452	0,0534
		n_3	0,0774	0,0682	0,0614	0,0456	0,0530
	150	n_1	0,0904	0,0706	0,0608	0,0442	0,0572
		n_2	0,0752	0,0700	0,0564	0,0432	0,0542
		n_3	0,0706	0,0756	0,0638	0,0520	0,0602
	200	n_1	0,0936	0,0730	0,0582	0,0442	0,0592
		n_2	0,0718	0,0738	0,0608	0,0458	0,0610
		n_3	0,0706	0,0688	0,0558	0,0454	0,0556
	250	n_1	0,0838	0,0666	0,0544	0,0452	0,0556
		n_2	0,0746	0,0678	0,0580	0,0444	0,0532
		n_3	0,0688	0,0688	0,0616	0,0464	0,0536

$n_1 = (10,15,20,25)$ $n_2 = (20,30,40,50)$ $n_3 = (30,45,60,75)$

α=0,05 anlamlılık düzeyinde AR modeli dikkate alınarak $k = 3\ ve\ 4$ ile $p = 50,100,150,200,250$ değerleri için test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.41 ve Çizelge 5.42 yer almaktadır. Çizelge 5.41'e göre örneklem sayısının üç olduğu durumlarda $(k = 3)$ ρ ve p'nin tüm durumları için T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerinin diğer test istatistiklerine göre daha iyi performans ortaya koyduğu gözlemlenmiştir. $k = 3$ ve $\rho = 0,2$ durumunda T_{Cao} test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranları 0,434 ile 0,538 arasında değerler alırken, T_{Zhou} test istatistiği ise 0,450 ile 0,560 değerleri arasında deneysel I. tip hata oranları ortaya koymuştur. Benzer şekilde $k = 3$ ve $\rho = 0,8$ durumunda T_{Cao} test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranları 0,458 ile 0,660 arasında değerler alırken, T_{Zhou} test istatistiği ise 0,536 ile 0,654 değerleri arasında deneysel I. tip hata oranları ortaya koymuştur. T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerinden sonra nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler T_{Hu} test istatistiğinden elde edilmiştir. Bağımlı değişken sayısı arttıkça T_{Hu} test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerine yaklaştığı gözlemlenmiştir. Örneklem sayısının dört olduğu durumda $(k = 4)$ ise ρ ve p'nin tüm durumları için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yer aldığı Çizelge 5.42'de ise Çizelge 5.41'e benzer şekilde nominal anlamlılık düzeyine en yakın değerler sırasıyla T_{Cao}, T_{Zhou} ve T_{Hu} test istatistiklerinden elde edilmiştir. T_{NH} ve T_{NH} test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıkları ise daha uzaktır.

Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.42'deki tüm sonuçlar incelendiğinde; T_{Cao}, T_{Zhou} ve T_{Hu} test istatistiklerinin daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir. Ayrıca bağımlı değişken sayısının gözlem büyüklüğüne oranı artıkça deneysel I. tip hata oranları nominal anlamlılık düzeyine yaklaşırken, ρ değeri arttıkça test istatistiklerinin deneysel hata oranları nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır.

5.2.2. Heterojen bileşik (compound) modeline göre elde edilen deneysel hata oranları

Çalışmada ikinci olarak da bmçok değişkenli normal dağılımdan türetilen veriler için compound modeline göre simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. İncelenen test istatistikleri için I. tip hata yapma olasılıklarını gösteren tablolar, korelasyon katsayısının $\rho = 0,2$ ve $\rho = 0,8$ olmasına göre ikiye ayrılmıştır. Deneysel koşulların her biri dikkate alınarak önerilen test istatistikleri için I. tip hata yapma olasılıkları elde edilmiştir.

Çizelge 5.43: Heterojen bileşik (Compound) varyans-kovaryans modeline göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata değerleri (k = 3)

ρ	p	(n_i)	T_{NH}	T_{YH}	T_{Hu}	T_{Cao}	T_{Zhou}
0,2	25	n_1	0,1016	0,0794	0,0676	0,0568	0,0596
		n_2	0,0762	0,0764	0,0650	0,0542	0,0560
		n_3	0,0728	0,0766	0,0618	0,0542	0,0538
	50	n_1	0,0982	0,0728	0,0640	0,0562	0,0576
		n_2	0,0824	0,0696	0,0600	0,0482	0,0518
		n_3	0,0740	0,0828	0,0704	0,0594	0,0584
	100	n_1	0,0998	0,0770	0,0708	0,0572	0,0620
		n_2	0,0810	0,0758	0,0648	0,0584	0,0608
		n_3	0,0782	0,0830	0,0696	0,0620	0,0648
	150	n_1	0,1064	0,0856	0,0742	0,0658	0,0728
		n_2	0,0878	0,0828	0,0740	0,0620	0,0674
		n_3	0,0734	0,0798	0,0666	0,0578	0,0610
	200	n_1	0,1028	0,0834	0,0740	0,0648	0,0712
		n_2	0,0928	0,0810	0,0734	0,0622	0,0656
		n_3	0,0762	0,0800	0,0664	0,0620	0,0658
	250	n_1	0,1036	0,0810	0,0732	0,0666	0,0708
		n_2	0,0888	0,0928	0,0808	0,0708	0,0752
		n_3	0,0806	0,0832	0,0716	0,0638	0,0700
0,8	25	n_1	0,1230	0,0948	0,0874	0,0770	0,0736
		n_2	0,0898	0,0808	0,0716	0,0626	0,0584
		n_3	0,0836	0,0812	0,0700	0,0626	0,0568
	50	n_1	0,1214	0,0908	0,0822	0,0758	0,0710
		n_2	0,0942	0,0834	0,0710	0,0626	0,0576
		n_3	0,0862	0,0858	0,0706	0,0642	0,0612
	100	n_1	0,1202	0,0894	0,0836	0,0720	0,0688
		n_2	0,0892	0,0826	0,0712	0,0636	0,0622
		n_3	0,0890	0,0874	0,0822	0,0710	0,0652
	150	n_1	0,1208	0,0928	0,0824	0,0756	0,0758
		n_2	0,0990	0,0914	0,0830	0,0764	0,0702
		n_3	0,0816	0,0798	0,0690	0,0662	0,0586
	200	n_1	0,1156	0,0914	0,0820	0,0778	0,0732
		n_2	0,1044	0,0884	0,0778	0,0710	0,0650
		n_3	0,0826	0,0856	0,0726	0,0684	0,0638
	250	n_1	0,1210	0,0924	0,0838	0,0732	0,0702
		n_2	0,0946	0,0926	0,0804	0,0736	0,0714
		n_3	0,0894	0,0918	0,0780	0,0738	0,0700

$n_1 = (10,15,20)$ $n_2 = (20,30,40)$ $n_3 = (30,45,60)$

Çizelge 5.44: Heterojen bileşik (Compound) varyans-kovaryans modeline göre üretilen simülasyon verisi için I. tip hata değerleri (k = 4)

ρ	p	(n_i)	T_{NH}	T_{YH}	T_{Hu}	T_{Cao}	T_{Zhou}
0,2	25	n_1	0,0968	0,0738	0,0656	0,0528	0,0590
		n_2	0,0828	0,0732	0,0646	0,0460	0,0526
		n_3	0,0778	0,0674	0,0584	0,0450	0,0486
	50	n_1	0,1048	0,0806	0,0700	0,0522	0,0652
		n_2	0,0894	0,0734	0,0654	0,0516	0,0582
		n_3	0,0758	0,0658	0,0558	0,0456	0,0516
	100	n_1	0,1076	0,0780	0,0742	0,0558	0,0644
		n_2	0,0774	0,0730	0,0622	0,0522	0,0594
		n_3	0,0816	0,0722	0,0636	0,0496	0,0564
	150	n_1	0,1022	0,0662	0,0606	0,0472	0,0564
		n_2	0,0932	0,0722	0,0660	0,0532	0,0600
		n_3	0,0874	0,0844	0,0740	0,0622	0,0692
	200	n_1	0,0978	0,0792	0,0750	0,0616	0,0688
		n_2	0,0902	0,0758	0,0738	0,0570	0,0634
		n_3	0,0830	0,0746	0,0694	0,0532	0,0608
	250	n_1	0,0930	0,0764	0,0712	0,0594	0,0692
		n_2	0,0872	0,0790	0,0726	0,0588	0,0676
		n_3	0,0822	0,0736	0,0658	0,0552	0,0630
0,8	25	n_1	0,1216	0,0908	0,0828	0,0706	0,0712
		n_2	0,0978	0,0858	0,0764	0,0658	0,0640
		n_3	0,0900	0,0718	0,0674	0,0550	0,0518
	50	n_1	0,1322	0,0886	0,0860	0,0736	0,0732
		n_2	0,1022	0,0834	0,0776	0,0668	0,0664
		n_3	0,0884	0,0722	0,0690	0,0586	0,0568
	100	n_1	0,1280	0,0908	0,0874	0,0722	0,0744
		n_2	0,0866	0,0848	0,0746	0,0698	0,0680
		n_3	0,0910	0,0830	0,0744	0,0650	0,0668
	150	n_1	0,1162	0,0802	0,0778	0,0634	0,0660
		n_2	0,1010	0,0846	0,0762	0,0684	0,0680
		n_3	0,0924	0,0884	0,0820	0,0746	0,0720
	200	n_1	0,1150	0,0920	0,0810	0,0772	0,0762
		n_2	0,1028	0,0870	0,0820	0,0708	0,0698
		n_3	0,0870	0,0802	0,0764	0,0620	0,0628
	250	n_1	0,1092	0,0812	0,0812	0,0720	0,0726
		n_2	0,0944	0,0908	0,0810	0,0702	0,0732
		n_3	0,0848	0,0844	0,0744	0,0660	0,0648

$n_1 = (10,15,20,25)$ $n_2 = (20,30,40,50)$ $n_3 = (30,45,60,75)$

α=0,05 anlamlılık düzeyinde bileşik varyans-kovaryans modeli dikkate alınarak $k = 3\ ve\ 4$ ile $p = 50,100,150,200,250$ değerleri için test istatistiklerine ait simülasyon sonuçları sırasıyla Çizelge 5.43 ve Çizelge 5.44 yer almaktadır. Çizelge 5.43'e göre örneklem sayısının üç olduğu durumlarda $(k = 3)$ ρ ve p'nin tüm durumları için T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerinin diğer test istatistiklerine göre daha iyi performans ortaya koyduğu gözlemlenmiştir. $k = 3$ ve $\rho = 0{,}2$ durumunda T_{Cao} test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranları 0,482 ile 0,708 arasında değerler alırken, T_{Zhou} test istatistiği ise 0,518 ile 0,752 değerleri arasında deneysel I. tip hata oranları ortaya koymuştur. Benzer şekilde $k = 3$ ve $\rho = 0{,}8$ durumunda T_{Cao} test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranları 0,626 ile 0,778 arasında değerler alırken, T_{Zhou} test istatistiği ise 0,568 ile 0,758 değerleri arasında deneysel I. tip hata oranları ortaya koymuştur. T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerinden sonra nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler T_{Hu} test istatistiğinden elde edilmiştir. Bağımlı değişken sayısı arttıkça T_{Hu} test istatistiği için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerine yaklaştığı gözlemlenmiştir. Örneklem sayısının dört olduğu durumda $(k = 4)$ ise ρ ve p'nin tüm durumları için elde edilen deneysel I. tip hata oranlarının yer aldığı Çizelge 5.44'de ise Çizelge 5.43'e benzer şekilde nominal anlamlılık düzeyine en yakın değerler sırasıyla T_{Cao}, T_{Zhou} ve T_{Hu} test istatistiklerinden elde edilmiştir. T_{NH} ve T_{NH} test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıkları ise nominal anlamlılık düzeyine en uzak olan test istatistikleridir.

Çizelge 5.43 ve Çizelge 5.44'deki tüm sonuçlar incelendiğinde; T_{Cao}, T_{Zhou}ve T_{Hu} test istatistiklerinin daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir. Bağımlı değişken sayısının gözlem büyüklüğüne oranı artıkça deneysel I. tip hata oranları nominal anlamlılık düzeyine yaklaşırken, ρ değeri arttıkça test istatistiklerinin deneysel hata oranları nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaşmaktadır. Ayrıca bileşik varyans-kovaryans modeli dikkate alındığında $\rho = 0{,}2$ için T_{Cao} test istatistiği T_{Zhou}'a göre nominal anlamlılık düzeyine daha yakın I. tip hata olasılıkları ortaya koyarken, $\rho = 0{,}8$ olduğunda ise T_{Zhou} test istatistiğinden elde edilen deneysel hata oranlarının daha yakın olduğu gözlemlenmiştir. Bu durumda bileşik varyans-kovaryans modeli için ρ değeri, T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistiklerinin performanslarını değiştirmektedir.

5.3. Sayısal Veri Uygulaması

Çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerinin çözümü için sunulan test istatistikleri, gerçek bir veri örneği üzerinde gösterilmiştir. Uygulama çalışması için R.Studio paket programındaki “rrcov” paketi tarafından sunulan “OsloTransect” veri seti kullanılmıştır. Bu veri seti, Norveç’in Oslo şehrinde 120 km uzunluğundaki bir yol boyunca 360 farklı bitkiden alınan örnekleri içermektedir. Elde edilen bitkilerin her biri için 25 farklı kimyasal elemente ait değerler ölçülmüştür. Bu veri seti Reimann vd. (2007) tarafından elde edilmiştir. Todorov ve Filzmoser (2007) ise, Wilks lambda test istatistiği için önerdikleri robust tahmincilere dayalı yeni test istatistiklerini bu veri setini kullanarak örneklendirmiştir.

Bölgedeki farklı kayaç yapısına göre sınıflandırılan bitki örnekleri için “CAMSED”, “GNEIS_O”, “GNEIS_R” ve “MICSH” olmak üzere dört farklı kayaç yapısındaki bitki örnekleri dikkate alınmıştır. Ayrıca Baryum (Ba), Kadmiyum (Cd), Kobalt (Co) ve Manganez (Mn) olmak üzere dört farklı kimyasal bileşenin değerleri incelenmiştir. Eksik değerlere sahip gözlemler veri setinden çıkartılmış ve geri kalan değerler logaritmaları alınarak kullanılmıştır. Böylece 228 gözlem için dört farklı kaya tipi üzerinde yer alan bitki türleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından farklılık olup olmadığı araştırılmıştır.

Dört farklı grup arasında ilgilenilen dört farklı kimyasal bileşen bakımından bir farklılık olup olmadığını test etmek için

$$H_0\colon \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{31} \\ \mu_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \mu_{32} \\ \mu_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \\ \mu_{33} \\ \mu_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \\ \mu_{44} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

şeklindeki yokluk hipotezi oluşturulmuştur. Çalışmada ilgilenilen $k = 4$ grup ve $p = 4$ değişken için gözlem sayıları, ortalama vektörler ve varyans-kovaryans matrisleri sırasıyla

$$n_1 = 98 \qquad n_2 = 89 \qquad n_3 = 32 \qquad n_4 = 9$$

$$\hat{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 4,289 \\ -1,902 \\ -2,001 \\ 5,704 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 3,554 \\ -1,986 \\ -1,623 \\ 6,145 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_3 = \begin{pmatrix} 4,062 \\ -1,999 \\ -1,995 \\ 6,187 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_4 = \begin{pmatrix} 4,527 \\ -2,057 \\ -2,234 \\ 5,434 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1,479 & -0,375 & 0,288 & 0,133 \\ & 0,720 & 0,457 & 0,411 \\ & & 0,970 & 0,618 \\ & & & 1,298 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} -1,417 & -0,328 & 0,602 & 0,115 \\ & 0,481 & 0,153 & 0,207 \\ & & 1,127 & 0,258 \\ & & & 1,162 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0,727 & 0,073 & 0,261 & 0,566 \\ & 0,770 & 0,398 & 0,294 \\ & & 0,601 & 0,349 \\ & & & 1,0401 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_4 = \begin{pmatrix} 1,389 & -0,057 & 0,850 & 0,479 \\ & 0,289 & 0,168 & 0,017 \\ & & 0,946 & 0,667 \\ & & & 1,147 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir. Çok değişkenli normal dağılım varsayımını karşılayan dört grubun ortalamalar vektörlerini karşılaştırmak için varyans-kovaryans matrislerinin homojenliği varsayımının karşılanması gerekmektedir. Bunun için ilk olarak Box's M testi uygulanmıştır.

Ortak varyans-kovaryans matrisi

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\hat{\Sigma}_i}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)} = \begin{pmatrix} 1,347 & -0,283 & 0,428 & 0,198 \\ & 0,618 & 0,319 & 0,301 \\ & & 0,980 & 0,441 \\ & & & 1,203 \end{pmatrix}$$

olmak üzere M ve C^{-1} değeri sırasıyla

$$M = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\, ln\left|\hat{\Sigma}\right| - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\, ln\left|\hat{\Sigma}_i\right| = 59,689$$

$$C^{-1} = 1 - A_1 = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}\right] = 0{,}917$$

şeklinde elde edilmiştir. Böylece $MC^{-1} = 54{,}714 > \chi^2_{\frac{1}{2}(k-1)p(p+1)} = 43{,}773$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilmektedir. Bu durumda varyans-kovaryans matrislerinin homojen olmadığı belirlenmiştir. Dolayısıyla çok değişkenli varyans analizi için bilinen test istatistiklerinin uygulanması doğru olmayacaktır. Bu nedenle alternatif test istatistiklerinin sonuçları elde edilmiştir.

Eşitlik 8.1'deki yokluk hipotezini sınamak için grup içi ve gruplar arası matrisler

$$W = \begin{pmatrix} 301{,}814 & -63{,}481 & 95{,}825 & 44{,}458 \\ & 138{,}360 & 71{,}447 & 67{,}322 \\ & & 219{,}443 & 98{,}816 \\ & & & 269{,}518 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 28{,}435 & 2{,}182 & -15{,}461 & -16{,}788 \\ & 0{,}520 & -0{,}864 & -1{,}684 \\ & & 8{,}793 & 8{,}234 \\ & & & 13{,}475 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca Wald tipi test istatistiğini hesaplamak için W_i matrisleri

$$\mathrm{W}_1 = \left(\frac{\hat{\Sigma}_i}{\mathrm{n}_i}\right)^{-1} = \left(\tilde{\Sigma}_i\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 112{,}612 & 116{,}340 & -82{,}310 & -9{,}234 \\ & 320{,}570 & -162{,}443 & -36{,}215 \\ & & 235{,}143 & -52{,}015 \\ & & & 112{,}720 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{W}_2 = \begin{pmatrix} 124{,}540 & 116{,}567 & -78{,}777 & -15{,}575 \\ & 314{,}206 & -94{,}227 & -46{,}498 \\ & & 135{,}081 & -5{,}456 \\ & & & 87{,}652 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{W}_3 = \begin{pmatrix} 85{,}317 & 22{,}363 & -26{,}455 & -43{,}811 \\ & 69{,}675 & -46{,}486 & -16{,}241 \\ & & 98{,}890 & -5{,}656 \\ & & & 61{,}042 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{W}_4 = \begin{pmatrix} 22{,}863 & 21{,}190 & -29{,}425 & 7{,}244 \\ & 56{,}551 & -37{,}705 & 12{,}229 \\ & & 56{,}959 & -20{,}270 \\ & & & 16{,}428 \end{pmatrix}$$

$$W = \sum_{i=1}^{k} W_i = \begin{pmatrix} 345,333 & 276,360 & -216,977 & -61,376 \\ & 761,002 & -340,861 & -86,725 \\ & & 526,074 & -83,398 \\ & & & 277,843 \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Böylece

$$\hat{\mu}_0^* = W^{-1} \sum_{i=1}^{k} W_i \hat{\mu}_i = \begin{pmatrix} 3,916 \\ -1,949 \\ -1,928 \\ 5,964 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right)$ test istatistiği

$$T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0^*)' \mathrm{W}_i (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0^*) = 110,691$$

şeklindedir.

<u>Johansen Testi:</u>

Johansen test istatistiği için

$$A = \sum_{i=1}^{k} \frac{tr(I - W^{-1}W_i)^2 + \left(tr(I - W^{-1}W_i)\right)^2}{2(n_i - 1)} = 1,383$$

ve

$$c = p(k-1) + 2A - \frac{6A}{p(k-1)+2} = 14,173$$

olmak üzere $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right)$ test istatistiğinin c değerine oranlaması ile Johansen (1980) test istatistiği

$$T_{Johansen}^2 = \frac{T^2(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i)}{c} = 7,810$$

olur. Ayrıca $T_{Johansen}^2$ test istatistiği için kritik değer $sd_1 = p(k-1) = 12$ ve $sd_2 = \frac{p(k-1)[p(k-1)+2]}{3A} = 40,49$ olmak üzere $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha} = 2.000$ olarak elde edilmiştir. Bu durumda Johansen test istatistiği $T_{Johansen}^2 > F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilir. Dolayısıyla farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

<u>Coombs'un (1992) Düzeltilmiş MANOVA Testleri:</u>

Coombs'un düzeltilmiş test istatistikleri için

$$f=\frac{tr^2\left[\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right]+tr\left[\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1}\left\{tr^2\left[\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right]+tr\left[\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i\right]^2\right\}}=60{,}285$$

olmak üzere Brown-Forstyhe (1974) düzeltmesi ile birlikte düzeltilmiş grup içi kovaryans matrisi

$$\widetilde{W}=\left(\frac{f}{k-1}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{N}\right)\hat{\Sigma}_i=\begin{pmatrix}110{,}535 & -12{,}257 & 47{,}403 & 32{,}945\\ & 49{,}530 & 25{,}832 & 18{,}977\\ & & 80{,}323 & 43{,}722\\ & & & 103{,}816\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

<u>Coombs'un (1992) Düzeltilmiş Wilks Lambda Test İstatistiği:</u>

B ve $\widetilde{W}$ matrisleri yardımıyla düzeltilmiş Wilks Lambda test istatistiği

$$\Lambda^*=\frac{|\widetilde{W}|}{|B+\widetilde{W}|}=0{,}417$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda $l=2$ ve $M^*=58{,}785$ olup Wilks olabilirlik oran testi için $F_{CoombsWilks}$ değeri

$$F_{CoombsWilks}=\frac{\left(1-\Lambda^{*1/l}\right)\left[(M^*\times l+1)-\frac{(k-1)p}{2}\right]}{\Lambda^{*1/l}(k-1)p}=7{,}867$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $sd_1=12$ ve $sd_2=114{,}569$ için $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}=1{,}838$ olup $F_{CoombsWilks}>F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilir. Dolayısıyla farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Coombs'un (1992) Düzeltilmiş Hotelling-Lawley İz İstatistiği Testi:

Gruplar arası ve düzeltilmiş grup içi matrislerin iz yaklaşımı kullanılarak Hotelling-Lawley test istatistiği

$$T^{*} = tr\left(B\widetilde{W}^{-1}\right) = 1{,}316$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda $\tilde{n}^{*} = 27{,}642$, $m = 0$ ve $s = 3$ için Hotelling-Lawley test istatistiğine ait $F_{CoombsHotelling}$ değeri

$$F_{CoombsHotelling} = \frac{2(s\tilde{n}^{*}+1)}{s(2m+s+1)}\frac{T^{*}}{s} = 6{,}134$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $sd_1 = 12$ ve $sd_2 = 167{,}85$ için $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha} = 1{,}810$ olup $F_{CoombsHotelling} > F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilir. Dolayısıyla farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Coombs'un (1992) Düzeltilmiş Pillai İz İstatistiği Testi:

Gruplar arası ve düzeltilmiş grup içi matrislerin iz yaklaşımı kullanılarak Pillai iz istatistiği ise

$$V^{*} = tr\left(B\left(B+\widetilde{W}\right)^{-1}\right) = 0{,}619$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu durumda $\tilde{n}^{*} = 27{,}642$, $m = 0$ ve $s = 3$ için Pillai iz istatistiğine ait $F_{CoombsPillai}$ değeri

$$F_{CoombsPillai} = \frac{2\tilde{n}^{*}+s+1}{2m+s+1}\frac{V^{*}}{s-V^{*}} = 3{,}852$$

biçiminde elde edilmektedir. Ayrıca $sd_1 = 12$ ve $sd_2 = 177{,}85$ için $F_{sd_1,sd_2,1-\alpha} = 1{,}807$ olup $F_{CoombsPillai} > F_{sd_1,sd_2,1-\alpha}$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilir. Dolayısıyla farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Krishnamoorthy ve Lu'nun (2007) Parametrik Bootsrap Testi:

Parametrik bootsrap testinde $T^{2}\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right)$ test istatistiğinin gözlemlenen bir t_0 değeri

$$T^{2}_{PB}\left(\hat{\mu}_{PBi}, \tilde{\Sigma}_{PBi}\right) = 110{,}691$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu durumda test istatistiğinin gözlemlenen t_0 değeri kullanılarak anlamlılık (p) değerlerini hesaplamak için $\left(\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \dots, \tilde{\Sigma}_k\right)$'nın gözlemlenen değerleri $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_k)$ olmak üzere $a_i a_i' = \tilde{s}_i$ olacak şekilde a_i Cholesky faktörleri

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0{,}123 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}031 & 0{,}080 & 0 & 0 \\ 0{,}024 & 0{,}068 & 0{,}069 & 0 \\ 0{,}011 & 0{,}057 & 0{,}032 & 0{,}094 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0{,}126 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}029 & 0{,}067 & 0 & 0 \\ 0{,}054 & 0{,}049 & 0{,}086 & 0 \\ 0{,}010 & 0{,}039 & 0{,}005 & 0{,}107 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0{,}151 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}015 & 0{,}154 & 0 & 0 \\ 0{,}054 & 0{,}075 & 0{,}101 & 0 \\ 0{,}117 & 0{,}048 & 0{,}009 & 0{,}128 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0{,}393 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}016 & 0{,}178 & 0 & 0 \\ 0{,}240 & 0{,}126 & 0{,}177 & 0 \\ 0{,}136 & 0{,}023 & 0{,}218 & 0{,}247 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Hesaplanan a_i Cholesky faktörlerini kullanarak 10000 iterasyon ile birlikte PB testinin anlamlılık (p) değeri 0,0008 olarak elde edilmiştir. Bu durumda $p = 0{,}0008 < \alpha = 0{,}05$ olduğunda yokluk hipotezi reddedilmektedir. Dolayısıyla farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Zhang ve Liu'nun (2011) Düzeltilmiş Bartlett Testi (MB):

Eşitlik 8.1'de oluşturulan yokluk hipotezi GLHT problemlerinin özel bir formudur. Bu form yardımıyla MB ve AHT test istatistiklerini oluşturmak için

$$\mu = \left(\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{31} \\ \mu_{41} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \mu_{32} \\ \mu_{42} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \\ \mu_{33} \\ \mu_{43} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \\ \mu_{44} \end{pmatrix} \right)'$$

ve

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \otimes I_4$$

olmak üzere Eşitlik 8.1'deki yokluk hipotezi GLHT formunda

$$H_0 : C\mu = c$$

biçimindeki yeniden yazılabilir. Bu durumda $\hat{\Sigma} = diag\left(\frac{\hat{\Sigma}_1}{n_1}, \dots, \frac{\hat{\Sigma}_k}{n_k}\right)$ olmak üzere GLHT formuna göre

$$\widehat{\Omega}_i = n_i^{-1}\left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1/2} C_1 \hat{\Sigma}_i C_1' \left(C\hat{\Sigma}C'\right)^{-1/2}$$

değerleri için $\widehat{\Delta}_1$, $\widehat{\Delta}_2$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ parametreleri sırasıyla

$$\widehat{\Delta}_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{tr\left(\widehat{\Omega}_i^2\right)}{n_i - 1} = 0{,}556$$

$$\widehat{\Delta}_2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{tr^2\left(\widehat{\Omega}_i\right)}{n_i - 1} = 2{,}210$$

$$n_{min}\hat{\beta}_1 = \frac{q(q+2)}{2\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2} = 50{,}571$$

$$n_{min}\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = \frac{(q+2)\left(2q - \widehat{\Delta}_2\right)}{4\widehat{\Delta}_1 + 2\widehat{\Delta}_2} = 45{,}915$$

biçiminde elde edilmiştir. Böylece $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right) = 110{,}691$ olmak üzere MB test istatistiği

$$\hat{T}_{MB} = \left(n_{min}\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\right) log\left(1 + \frac{T^2}{n_{min}\hat{\beta}_1}\right) = 53{,}245$$

şeklinde hesaplanmıştır. Dolayısıyla $\hat{T}_{MB} = 53{,}245 > \chi^2_{12,(1-\alpha)} = \chi^2_{12,(0.95)} = 21{,}026$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilmektedir. Yani farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Zhang (2012) Yaklaşık Hotelling T^2 (AHT) Testi:

$\hat{\Sigma} = diag\left(\frac{\hat{\Sigma}_1}{n_1}, \dots, \frac{\hat{\Sigma}_k}{n_k}\right)$ olmak üzere GLHT formuna göre AHT test istatistiği için $rankC = q = 12$ olduğundan $\hat{d}$ değeri

$$\hat{d} = \frac{q(q+1)}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)^{-1}\left[tr\left(\hat{\Omega}_i^2\right) + tr^2\left(\hat{\Omega}_i\right)\right]} = 56{,}399$$

biçiminde elde edilmiştir. Böylece $T_{q,\hat{d}}^2$ test istatistiğinin kritik değeri

$$\frac{q\hat{d}}{\hat{d} - q + 1} F_{q,\hat{d}-q+1} = 29{,}405$$

şeklindedir. Bu durumda $T_{q,\hat{d}}^2 = 110{,}691 > 29{,}405$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilmektedir. Dolayısıyla farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Eftekhar vd.nin (2018) Fiducial Yaklaşım (FY) Testi:

Fiducial yaklaşım testinde $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right)$ test istatistiğinin gözlemlenen bir t_0 değeri

$$T_{PB}^2\left(\hat{\mu}_{PBi}, \tilde{\Sigma}_{PBi}\right) = 110{,}691$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu durumda test istatistiğinin gözlemlenen t_0 değeri kullanılarak 10000 iterasyon ile birlikte FY testinin anlamlılık (p) değeri 0,0048 olarak elde edilmiştir. Böylece $p = 0{,}0048 < \alpha = 0{,}05$ olduğunda yokluk hipotezi reddedilmektedir. Dolayısıyla FY testine göre farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

Eftekhar vd.nin (2018) Yaklaşık Testi (YT):

Eşitlik 5.46'da tanımlanan T_f fiducial testi için $i = 1, \dots, k$ ve $n_i > p + 2$ olmak üzere verilen $\tilde{s}_i$ değerlerine bağlı olarak T_f'nin beklenen değeri yaklaşık olarak

$$E\left(T_f\right) \approx p\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n_i - p - 2} - tr\left[\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \tilde{s}_i^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{n_i - p - 2}\tilde{s}_i^{-1}\right] = 20{,}553$$

şeklinde hesaplanmıştır. T_f fiducial istatistiğinin beklenen değeri dikkate alınarak $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right)$ test istatistiği için kritik değer

$$\frac{E(T_F)}{p(k-1)}\chi^2_{p(k-1),(1-\alpha)} = 36{,}013$$

olarak hesaplanmıştır. Bu durumda $T^2\left(\hat{\mu}_i, \tilde{\Sigma}_i\right) = 110{,}691 > 36{,}013$ olduğundan yokluk hipotezi reddedilmektedir. Dolayısıyla YT'ye göre $\alpha = 0{,}05$ için farklı kaya tipleri arasında dört kimyasal bileşen bakımından anlamlı bir farklılık vardır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

İstatistiksel analiz yöntemleri, varsayımları sağlandığı takdirde güçlü ve güvenilir sonuçlar ortaya koymaktadır. İlgilenilen bir araştırma problemi üzerinde istatistiksel bir analiz yönteminin uygulanabilmesi, kullanılan tekniğin tüm varsayımlarının sağlanmasını gerektirir. Çok değişkenli $\boldsymbol{k}$ tane grup ortalaması arasındaki farkın eşitliğine ilişkin MANOVA problemlerinin çözümünde de temel olarak, çok değişkenli normal dağılım ve varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımlarına dayanır. Varsayımlar sağlandığı takdirde MANOVA problemlerinin çözümü için genellikle $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{V}$ test istatistiklerinden yararlanılmaktadır. Ancak varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında $\boldsymbol{k}$ tane grup ortalama vektörü arasındaki farkın eşitliğini sınama problemi Behrens-Fisher problemi olarak tanımlanmaktadır. Behrens-Fisher problemlerinde klasik MANOVA test istatistiklerini kullanılması ise hatalı sonuçların elde edilmesine neden olmaktadır.

Bu tez çalışmasında da, varyans-kovaryans matrislerinin homojenlik varsayımı sağlanmadığında çok değişkenli Behrens-Fisher problemlerini çözümü için kullanılabilecek en uygun çözümleme yaklaşımı araştırılmış ve test istatistiklerinin performansları bir simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Çalışmada test istatistiklerinin algoritmaları RStudio paket programı üzerinde oluşturulmuştur. Ayrıca önerilen test istatistikleri sayısal bir veri seti üzerinde uygulanmıştır.

Simülasyon çalışması sonucunda incelenen test istatistiklerinin performanslarının, bağımlı değişken sayısına ve gözlem büyüklüklerine bağlı olarak farklılaştığı gözlemlenmiştir. Hem homojenlik ve hem de heterojenlik koşulları altında gözlem sayıları eşit iken, test istatistiklerinin I. tip hata yapma olasılıkları nominal anlamlılık düzeyine daha yakın bulunmuştur. Eşit sayıdaki gözlem birimlerinin her biri çok küçük olduğunda ise Johansen, MB, YT ve FY testleri için elde edilen deneysel hata oranlarının nominal anlamlılık düzeyinden uzaklaştığı görülmüştür. Ancak PB, AHT ve düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri, çok küçük gözlem boyutlarından daha az etkilenmektedir.

Varyans-kovaryans matrislerinin homojenliği varsayımı sağlandığında en iyi sonuçlar klasik MANOVA test istatistiklerinden elde edilmesine rağmen incelen bütün test istatistikleri nominal anlamlılık düzeyine oldukça yakın değerler ortaya koymuşlardır. Ancak heterojenlik söz konusu olduğunda klasik MANOVA test istatistiklerinin performanslarının azaldığı görülmektedir. İncelenen deneysel koşullar altında Olson'un (1974) çalışmasına paralel olarak klasik MANOVA test istatistikleri arasında Pillai iz istatistiği testi, varsayım ihlallerine karşı en sağlam test istatistiği olarak elde edilmiştir.

Shenging'e (2012) göre düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri dengesiz gözlem büyüklüğünden daha az etkilenmektedir. Ayrıca Coombs'un (1992) uyguladığı deneysel koşullar altında düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri Johansen testine göre daha iyi bir performans ortaya koymaktadır. Bu çalışmada uygulanan deneysel koşullar altında da, düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin dengesiz gözlem büyüklüklerine karşı daha az duyarlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca çok küçük gözlem büyüklüklerinde düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin performansı Johansen testine göre daha iyi ortaya konmuştur. Ancak gözlem sayılarının bütün durumları birlikte değerlendirildiğinde bağımlı değişken sayısının küçük olması halinde Johansen testi daha iyi bir performans göstermektedir.

Gözlem sayılarındaki dengeli değişimler test istatistiklerinin performanslarını çok fazla etkilememektedir. Ancak en küçük ve en büyük gözlem büyüklüğü arasındaki oran büyüdükçe ve bağımlı değişken sayısı arttıkça Johansen, MB, YT, FY ile birlikte AHT testlerinin performanslarının etkilendiği gözlemlenmiştir.

Bağımlı değişken bakımından incelendiğinde ise daha küçük boyutlar mevcut iken MB testi AHT testinden daha iyi bir performans ortaya koymaktadır. Ancak bağımlı değişken sayısı artıkça AHT testinin performansı MB testini geçmektedir. Üstelik bağımlı değişken sayısı artıkça PB, YT, FY ve düzeltilmiş MANOVA test istatistiklerinin performansı ise MB ve AHT testlerinden daha iyi çıkmaktadır. Ayrıca bağımlı değişken sayısı arttıkça Johansen testinin performansı diğer testlerin gerisinde kalmaktadır.

Grup sayısının artması bütün test istatistiklerinin MAPE değerlerinin de belirli bir ölçüde artmasına neden olmuştur. Üstelik grup sayısı artıkça YT'nin performansı diğer testlere göre daha iyi bulunmaktadır. Ancak Johansen testinin performansı ise MB ve AHT testlerinden uzaklaşmaktadır. Zhang'da (2012), AHT testinin Johansen testine göre daha iyi bir performans gösterdiğini ve grup sayısı arttıkça Johansen testinin performansının AHT'den daha kötü olduğunu ifade etmektedir.

Zhang ve Liu (2011) ile Zhang (2012); PB, MB ve AHT test istatistiklerinin karşılaştırılabilir olduğunu göstermişlerdir. Ancak MB ve AHT testlerinin en küçük gözlem büyüklüğünden çok fazla etkilendiğini ifade etmektedirler. Shenging'de (2012), MB ve AHT testlerinin en küçük gözlem büyüklüğünden çok fazla etkilendiğini belirtmektedir. PB, YT ve FY testlerinin karşılaştıran Eftekhar vd.de (2018), $n_i > p + 2$ koşulu sağlandığında YT'nin kullanılmasını önermektedir.

Bu araştırmada uygulanan simülasyon çalışmasına göre elde edilen bütün sonuçlar incelendiğinde ise;

- ✓ Gözlem sayılarının eşit ve büyük olduğu durumlarda MB, AHT ve Johansen test istatistikleri,
- ✓ En küçük gözlem büyüklüğü çok küçük olduğunda ya da dengesiz gözlem büyüklükleri söz konusu olduğunda düzeltilmiş MANOVA istatistikleri,
- ✓ Grup sayısının ve bağımlı değişken sayısının küçük olduğu durumlarda MB ve AHT istatistikleri,
- ✓ Bağımlı değişken sayısı yükseldikçe düzeltilmiş MANOVA test istatistikleri ile birlikte YT, PB ve FY test istatistikleri,
- ✓ Grup sayısı ve bağımlı değişken sayısı yükseldikçe PB ve YT istatistikleri,
- ✓ Normallik varsayımının ihlal edildiği durumlarda ise YT istatistiği,

diğer test istatistiklerine göre daha iyi sonuçlar ortaya koymaktadır. Dolayısıyla elde edilen sonuçların bazıları literatürde yapılan çalışmalar ile benzerlik gösterirken, ilgilenilen deneysel koşullara bağlı olarak bazı koşullar altında test istatistiklerinin performanslarının değiştiği gözlemlenmiştir.

Yüksek boyutlu Behrens-Fisher problemlerinin çözümünde ise farklı bir uzaklık ölçüsü dikkate alınarak yeni yaklaşımlar benimsenmiştir. Cao vd. (2019), yüksek boyutlu Behrens-Fisher problemlerinin çözümü için önerdiği test istatistiğini Hu vd.nin (2015) test istatistiği ile karşılaştırmış ve dengesiz gözlem büyüklüğünde Cao vd.nin (2019) test istatistiğinin daha iyi performans ortaya koyduğunu göstermiştir. Zhou (2016) ise L^2 norm istatistiğine dayalı olarak önerdiği test istatistiğine ait deneysel hata oranlarının, T_{YH}'dan daha küçük olduğunu ifade etmektedir. Çalışmada uygulanan deneysel koşullar altında T_{NH}, T_{YH}, T_{Hu}, T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistikleri karşılaştırıldığında ise T_{Cao}, T_{Zhou} ve T_{Hu} test istatistiklerinin T_{NH} ve T_{YH} istatistiklerine göre daha iyi performans göstermiştir.

Ayrıca T_{Cao} ve T_{Zhou} test istatistikleri de T_{Hu} test istatistiğine göre nominal anlamlılık düzeyine daha yakın değerler ortaya koymuştur. Yüksek boyutlu Behrens-Fisher problemleri için incelenen beş test istatistiğinin bağımlı değişken sayısı ile ρ değeri artışından etkilendiği gözlemlenmiştir. Ayrıca simülasyon çalışmasında kullanılan varyans-kovaryans matrislerine ait model yapılarının da, test istatistiklerinin performansları üzerinde etkili olduğu görülmüştür.

Uygulanan simülasyon çalışmalarına göre test istatistiklerinin performansları; grup sayısından, bağımlı değişken sayısından, gözlemlerin dengeli ve dengesiz değişimlerinden, en küçük gözlem büyüklüğünden ve varyans-kovaryans matrislerinin farklı heterojen yapılarından çok fazla etkilenmektedir. Bu durum, çalışmanın en büyük sınırlılığını oluşturmaktadır. Çünkü farklı deneysel koşullar altında test istatistiklerini performansları da değişmektedir. Bu nedenle yapılacak olan istatistiksel analizlerde, ilgilenilen veri seti setinin özelliklerine göre test istatistiklerinin performansları karşılaştırılmalı ve en iyi performansı ortaya koyan test istatistiği kullanılmalıdır.

Bu tez çalışması, çok değişkenli ortalama vektörlerin eşitliği problemleri için varyans-kovaryans matrislerinin homojenliği varsayımı sağlanmadığında uygun çözümleme yaklaşımlarının araştırılması açısından önemlidir. Ayrıca varsayımların ihlal edildiği durumlarda mevcut test istatistiklerinin kullanılarak hatalı ve yanlı sonuçlar elde edilmesine karşı bir çözüm önerisi sunmaktadır. Varyans-kovaryans matrislerinin homojen olmadığı ortalama vektörlerin karşılaştırılma problemleri söz konusu olduğunda, incelenen veri setine ait istatistiksel özellikler dikkate alınarak, test istatistiklerinin performanslarının incelenmesi ve en iyi performansı ortaya koyan test istatistiğinin kullanılması gerekmektedir. Böylece elde edilen sonuçların doğru ve güvenilir olması beklenmektedir.

Bu çalışma göz önüne alınarak gelecekteki araştırmalarda önerilen test istatistiklerinin performansları, farklı istatistiksel dağılımlar altında ya da karma dağılım model yapılarına göre oluşturulan veri üretme modelleri kullanılarak araştırılabilir. Bununla birlikte önerilen bu test istatistikleri ile varsayımların sağlanmadığı durumlarda kullanılan parametrik olmayan yöntemler karşılaştırılarak, uygulamalı araştırmalarda doğru istatistiksel çözümleme yaklaşımın belirlenmesi sağlanabilir. Ayrıca yüksek boyutlu iki örneklem Behrens-Fisher problemlerinin çözümü için önerilen test istatistikleri, k tane grup ortalama vektörünün eşitliğini sınama problemleri için genellenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aelst, SV., Willems, G., 2011, Robust and efficient one-way MANOVA Tests, Journal of the American Statistical Association, 106(494): 706-718.

Alexander, R.A., Govern, D.M., 1994, A new and simpler approximation and ANOVA under variance heterogeneity. Journal of Educational Statistics, 19(2): 91-101.

Algina, J., Tang, K.L., 1988, Type I error rates for Yao's and James' tests of equality of mean vectors under variance-covariance heteroscedasticity, Journal of Educational Statistics, 13(3): 281–290.

Algina, J., Oshima, T.C., Tang, K.L., 1991, Robustness of Yao's, James', and Johansen's tests under variance-covariance heteroscedasticity and nonnormality, Journal of Educational Statistics, 16(2): 125- 139.

Alpar, R., 2011, Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemler, Detay Yayıncılık, Ankara.

Anderson, T.W., 1963, A test for equality of means when covariance matrices are unequal, Annals of Mathematical Statistics, 34(2): 671-672.

Aoshima, M., Yata, K., 2011, Two-stage procedures for high-dimensional data, Sequential Analysis, 30(4): 356-399.

Bai, Z., Saranadasa, H., 1996, Effect of high dimension: By an example of a two sample problem, Statistica Sinica, 6(2): 311–329.

Bartlett, M.S., 1937, Properties of sufficiency and statistical tests. Proceedings of Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences,160(901): 268-282.

Bartlett, M.S., 1939, A note on tests of significance in multivariate analysis, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 35(2): 180–185.

Behrens, W.V., 1929, Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen (A contribution to error estimation with few observations), Landwirtschaftliches Jahrbuch, 68: 807-837.

Bennett, B.M., 1951, Note on a solution of the generalized Behrens–Fisher problem, Annals of the Institute Statistical Mathematics, 2, 87–90.

Box, G.E.P., 1949, A general distribution theory for a class of likelihood criteria, Biometrika, 36(3/4): 317–346.

Brown, M.B., Forsythe, A.B., 1974, The small sample behavior of some statistics which test the equality of several means, Technometrics, 16(l): 129-132.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Cai, T.T., Xia, Y., 2014, High-dimensional sparse MANOVA, Journal of Multivariate Analysis, 131: 174-196.

Cao, M., Park, J., He, D., 2019, A test for the k sample Behrens-Fisher problem in high dimensional data, Journal of Statistical Planning and Inference, 201: 86-102.

Chang, C.H., Pal, N., 2008, A revisit to the Behrens–Fisher problem: Comparison of five test methods, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 37(6): 1064-1085.

Chen, S., Qin, Y., 2010, A two-sample test for high-dimensional data with applications to gene-set testing, The Annals of Statistics, 38(2): 808–835.

Christensen, W.F., Rencher, A.C., 1997, A comparison of type I error rates and power levels for seven solutions to the multivariate Behrens-Fisher problem, Communication in Statistics: Simulation and Computation, 26(4): 1251-1273.

Coombs, W.T., 1992, Solutions to the multivariate g-sample Behrens-Fisher problem based upon generalizations of the Brown-Forsythe F* and Wilcox Hm tests, Phd Dissertation, University of Florida, 147 s.

Coombs, W.T., Algina, J., 1996, New test statistics for MANOVA/descriptive discriminant analysis, Educational and Psychological Measurement, 56(3): 382-402.

Coombs, W.T., Algina, J., Oltman, D.O., 1996, Univariate and multivariate omnibus hypothesis tests selected to control type I error rates when population variances are not necessarily equal, Review of Educational Research, 66(2): 137-179.

Çavuş, M., 2016, Aykırı değer durumunda genelleştirilmiş Behrens-Fisher problemi için düzeltilmiş testler, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, 129 s.

Dempster, A.P., 1958, A high dimensional two sample significance test, Annals of Mathematical Statistics, 29(4): 995–1010.

Dempster, A. P., 1960, A significant test for the separation of two highly multivariate small samples, Biometrics, 16(1): 41–50.

Eftekhar, S., Sadooghi-Alvandi, M., Kharrati-Kopaei, M., 2018, Testing the equality of several multivariate normal mean vectors under heteroscedasticity: A fiducial approach and an approximate test, Communications in Statistics – Theory and Methods, 47(7): 1747-1766.

Erdoğan, S., 2018, Heterojenlik altında iki grup ortalama vektörlerinin karşılaştırılması için önerilen yeni bir hesaplamalı yaklaşım testi, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, 78 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Feng, L., Zou, C., Wang, Z., Zhu, L., 2015. Two sample Behrens-Fisher problem for high-dimensional data, Statistica Sinica, 25(4): 1297-1312.

Finch, H., French, B., 2013, A monte carlo comparison of robust MANOVA test statistics, Journal of Modern Applied Statistical Methods, 12(2): 35-81.

Fisher, R.A., 1930, Inverse probability. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 26(4): 528–535.

Fisher, R.A., 1935, The fiducial argument in statistical inference, Annals of Eugenics, 6(4): 391-398.

Friedrich, S., Pauly, M., 2018, MATS: Inference for potentially singular and heteroscedastic MANOVA, Journal of Multivariate Analysis, 165: 166-179.

Fujikoshi, Y., 2000, Transformations with improved chi-squared approximations, Journal of Multivariate Analysis, 72(2): 249-263.

Fujikoshi, Y., Himeno, T., Wakaki, H., 2004, Asymptotic results of a high dimensional MANOVA test and power comparisons when the dimension is large compared to the sample size, Journal of Japan Statistical Society, 34: 19-26.

Gamage, J., Mathew, T., Weerahandi, S., 2004, Generalized p-values and generalized confidence regions for the multivariate Behrens-Fisher problem and MANOVA. Journal of Multivariate Analysis, 88(1): 177-189.

Harrar, S.W., Bathke, A.C., 2011, A modified two-factor multivariate analysis of variance: Asymptotics and small sample approximations, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 64(1): 135-165.

Heck, D.L., 1960, Charts of some upper percentage points of the distribution of the largest characteristic root, Annals of Mathematical Statistics, 31(3): 625–642.

Hotelling, H., 1951, A generalized T test and measure of multivariate dispersion, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 23-41.

Hu, J., Bai, Z., Wang, C., Wang, W., 2015, On testing the equality of high dimensional mean vectors with unequal covariance matrices, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 67: 1-23.

Hughes, D.T., Saw, J.G., 1972, Approximating the percentage points of Hotelling's generalized T02 statistic, Biometrika, 59(1): 224-226.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ito, K., Schull, W.J., 1964, On the robustness of the T02 test in multivariate analysis of variance when variance-covariance matrices are not equal, Biometrika, 51(1-2): 71-82.

James, G.S., 1951, The comparison of several groups of observations when the ratios of the population variances are unknown. Biometrika, 38(3-4): 324-329.

James, G.S., 1954, Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown, Biometrika, 41(1/2): 19-43.

Jiamwattanapong, K., Chongcharoen, S., 2015, A new test fort he mean vector in high-dimensional data, Songklanakarin Journal of Science and Technology, 37(4), 477-484.

Johansen, S., 1980, The Welch-James approximation to the distribution of the residual sum of squares in a weighted linear regression, Biometrika, 67(1): 85-92.

Kanık, E.A., 1999, Çok değişkenli varyans analizinde kovaryans matrislerinin homojenliği ön şartı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 126 s.

Kawasaki, T., Seo, T., 2014, A two sample test for mean vectors with unequal covariance matrices, Communications in Statistics: Simulation and Computation, 44(7): 1850-1866.

Kim, S., 1992, A practical solution to the multivariate Behrens- Fisher problem, Biometrika, 79(1): 171-176.

Konietschke, F., Bathke, A.C., Harrar, S.W., Pauly, M., 2015, Parametric and nonparametric bootstrap methods for general MANOVA, Journal of Multivariate Analysis, 140: 291-301.

Krishnamoorthy, K., Yu, J., 2004, Modified Nel and Van der Merwe test for the multivariate Behrens–Fisher problem, Statistics and Probability Letters, 66: 161–169.

Krishnamoorthy, K., Lu, F., Mathew, T., 2007, A parametric bootstrap approach for ANOVA with unequal variances: Fixed and random models, Computational Statistics and Data Analysis, 51(12): 5731-5742.

Krishnamoorthy, K., Lu, F., 2010, A parametric bootstrap solution to the MANOVA under heteroscedasticity, Journal of Statistical Computation and Simulation, 80(8): 873-887.

Lawley, D.N., 1938, A generalization of Fisher’s z-test, Biometrika, 30(1/2): 180–187.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Lu, F., 2007, ANOVA and MANOVA under heteroscedasticity, Phd Dissertation, University of Louisiana at Lafayette, 71 s.

Liu, Z., Liu, B., Zheng, S., Shi, N.Z., 2017, Simultaneous testing of mean vector and covariance matrix for high-dimensional data, Journal of Statistical Planning and Inference, 188: 82-93.

Mendeş, M., 2002, Normal dağılım ve varyansların homojenliği ön şartlarının gerçekleşmediği durumlarda varyans analizi tekniğinin yerine kullanılabilecek bazı parametrik testlerin I. Tip hata ve testin gücü bakımından irdelenmesi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 307 s.

Mehrotra, D.V., 1997, Improving the Brown-Forsythe solution to the generalizied Behrens-Fisher problem, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 26 (3): 1139–1145.

Nanda, D.N., 1950, Distribution of the sum of roots of a determinantal equation, Annals of Mathematical Statistics, 21(3): 432-439.

Nel, D.G., Van der Merwe, C.A., 1986, A Solution to the Multivariate Behrens-Fisher Problem, Communication Statistics-Theory and Methods, 15(12): 3719-3735.

Nishiyama, T., Hyodo. M., Seo, T., Pavlenko, T., 2013, Testing linear hypotheses of mean vectors for high dimension data with unequal covariance matrices, Journal of Statistical Planning and Inference, 143(11): 1898–1911.

Olson, C.L., 1974, Comparative robustness of six test in multivariate analysis of variance, Journal of the American Statistical Association, 69(348): 894-908.

Oyeyemi, G.M., Adebayo, P.O., Adeleke, B.L., 2018, Heteroscedasticity in one way multivariate analysis of variance, Journal of Physical Mathematics, 9(2): 1-5.

Özdamar, K., 2018, Eğitim, Sağlık ve Sosyal Bilimler İçin SPSS Uygulamalı Temel İstatistik, Nisan Kitabevi, s.116.

Özkip, E., Yazıcı, B., Sezer, A., 2014, A simulation study on tests for the Behrens-Fisher problem, Türkiye Klinikleri Journal of Biostatistics, 6(2): 59-66.

Park, J., Sinha, B., 2009, Some aspects of multivariate Behrens-Fisher problem, Calcutta Statistical Association Bulletin, 61, 241-244.

Pearson, K., 1895, Contributions to the mathematical theory of evolution. II. skew variations in homogeneous material, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 186: 343–414.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Pillai, K.C.S., 1955, Some new test criteria in multivariate analysis, The Annals of Mathematical Statistics, 26(1): 117–121.

Rao, C.R., 1951, An Asymptotic expansion of the distribution of Wilks criterion, Bulletin of the International Statistical Institute, 33(2): 177-180.

Reimann, C., Arnoldussen, A., Boyd, R., Finne, T.E., Koller, F., Nordgulen, Oe., And Englmaier, P., 2007, Element contents in leaves of four plant species (birch, mountain ash, fern and spruce) along anthropogenic and geogenic concentration gradients, The Science of the Total Environment, 377(2-3): 416-433.

Roy, S.N., 1945, The individual sampling distribution of the maximum, the minimum and any intermediate of the p-statistics on the null-hypothesis, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, 7(2): 133-158.

Roy, S.N., 1953, On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis, Annals of Mathematical Statistics, 24(2): 220-238.

Roy S.N., 1957, Some Aspects of Multivariate Analysis, Wiley, New York.

Satterthwaite, F.E., 1946, An approximate distribution of estimate of variance components, Biometrics Bulletin, 2(6): 110-114.

Scheffé, H., 1943, On solutions of the Behrens–Fisher problem, based on the t-distribution, Annals of Mathematical Statistics, 14(1): 35–44.

Scott, A.J., Smith, T.M.F., 1971, Interval estimates for linear combinations of means, Applied Statistics, 20(3): 276-285.

Schott, J.R., 2007, A test for the equality of covariance matrices when the dimension is large relative to the sample size, Computational Statistics and Data Analysis, 51(12): 6535–6542.

Schott, J.R., 2007, Some high-dimensional tests for a one-way MANOVA, Journal of Multivariate Analysis, 98(9): 1825-1839.

Shengning, X., 2012, Modified MANOVA tests under heteroscedasticity, Phd Dissertation, National University of Singapore, 151 s.

Srivastava, M.S., 2007, Multivariate theory for analyzing high-dimensional data, Journal of the Japan Statistical Society, 37(1): 53–86.

Srivastava, M.S., Yanagira, H., Kubokawa, T., 2014, Tests for covariance matrices in high dimension with less sample size, Journal of Multivariate Analysis, 130: 289-309.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Srivastava , M.S., Du, M., 2008, A test for the mean vector with fewer observations than the dimension, Journal of Multivariate Analysis, 99(3): 386-402.

Srivastava, M.S., Fujikoshi, Y., 2006, Multivariate analysis of variance with fewer observations than the dimension, Journal of Multivariate Analysis 97(9): 1927–1940.

Srivastava, M.S., Kubokawa, T., 2013, Tests for multivariate analysis of variance in high dimension under non-normality, Journal of Multivariate Analysis, 115: 204-216.

Sürsal, N., 1980, Pearson Dağılımları, İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi, 9(1): 129-144.

Tang, K.L., Algina, J., 1993, Performance of four multivariate tests under variance-covariance heteroscedasticity, Multivariate Behavioral Research, 28(4): 391–405.

Todorov, V., Filzmoser, P., 2010, Robust statistic for the one-way MANOVA, Computational Statistics and Data Analysis, 54(1): 37–48.

Tsui, K.W., Weerahandi, S., 1989, Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters, Journal of the American Statistical Association, 84(406): 602-607.

Welch, B.L., 1938, The significance of the difference between two means when the population variances are unequal, Biometrika, 29(3/4): 350–362.

Welch, B.L., 1947, The generalization of Student's problem when several different population variances are involved, Biometrika, 34(1-2): 28-35.

Welch, B.L., 1951, On the comparison of several mean values: An alternative approach, Biometrika, 38(3-4): 330-336.

Wilks, S.S., 1932, Certain generalizations in the analysis of variance, Biometrika, 24(3-4): 471-494.

Xu, L.W., 2014, MANOVA for nested designs with unequal cell sizes and unequal cell covariance matrices, Journal of Applied Mathematics, 1-10.

Xu, L.W., 2015, Parametric bootstrap approaches for two-way MANOVA with unequal cell sizes and unequal cell covariance matrices, Journal of Multivariate Analysis, 133: 291-303.

Yamada, T., Himeno, T., 2015, Testing Homogeneity of Mean Vectors Under Heteroscedasticity in High-Dimension, Journal of Multivariate Analysis, 139: 7–27.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yamada, T., Srivastava, M.S., 2012, A test for the multivariate analysis of variance in high-dimension, Communication in Statistics – Theory and Methods, 41: 2602–2612.

Yanagihara, H., Yuan, K.H., 2005, Three approximate solutions to the multivariate Behrens-Fisher problem, Communication in Statistics - Simulation and Computation, 34(4): 975-988.

Yao, Y., 1965, An approximate degrees of freedom solution to the Multivariate Behrens-Fisher problem, Biometrika, 52(1-2): 139-147.

Yiğit, E., 2009, Homojen olmayan varyans varsayımı altında ortalamaların eşitliği için test istatistikleri, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 109 s.

Zhang, J.T., Xu, J., 2009, On the k-sample Behrens-Fisher problem for high-dimensional data, Science in China Series A:Mathematics, 52 (6): 1285-1304.

Zhang, J.T., Liu, X., 2011, A modified Bartlett test for heteroscedastic one-way MANOVA, Metrika, 76: 135–152.

Zhang, J.T., 2011, Two-way MANOVA with unequal cell sizes and unequal cell covariance matrices, Technometrics, 53(4): 426-439.

Zhang, J.T., 2012, An approximate Hotelling T2-test for heteroscedastic one-way MANOVA, Open Journal of Statistics, 2(1): 1-11.

Zhang, J.T. Zhou, B., Liu, X., 2016, A modified Bartlett test for heteroscedastic two-way MANOVA, Journal of Advanced Statistics, 1(2): 94-108.

Zhou, B., 2016, Linear hypothesis testing for high-dimensional data under heteroscedasticity, Phd Dissertation, National University Of Singapore, 142 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Mehmet Sandal

Uyruğu **:** T.C.

Doğum Yeri / Tarihi **:** Mersin / 01.12.1989

Telefon (İş) **:** 02362018000-8080

İş Adresi **:** MCBÜ Muradiye Kampüsü, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, A Blok, Kat:1

E-Posta Adresi **:** mehmet.sandal@cbu.edu.tr

Eğitim Bilgileri:

Doktora **:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı (2015-2020)

Yüksek Lisans **:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı (2013-2015)

Lisans **:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2008-2012)

Görevler:

2017- : Manisa Celâl Bayar Üniversitesi/İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi/Ekonometri Bölümü/İstatistik Anabilim Dalı

2013-2017 : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi/Fen-Edebiyat Fakültesi/İstatistik Bölümü/Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı (35. Md. görevlendirmesi)