

q-çatı Vektörleri ile Oluşan Regle Yüzeyler

Seda Okur

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Kasım 2020

The Ruled Surfaces Generated by  $q$ -frame Vectors

Seda Okur

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics-Computer

November 2020

# q-çatı Vektörleri ile Oluşan Regle Yüzeyle

Seda Okur

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Kasım 2020

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum ”q-çatı Vektörleri ile Oluşan Regle Yüzeyler” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

13/11/2020

Seda Okur

## ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, tanjant vektör,  $\mathbf{k}$  izdüşüm vektörü, quasi normal vektör ve quasi binormal vektörleri yardımıyla tanımlanan q-çatı kullanılarak Öklidyen 3 boyutlu uzayda q-çatı vektörleri ile oluşan regle yüzeylerini incelemektir.

Regle yüzeyler bir doğrunun, bir eğri boyunca hareket etmesi ile meydana gelen yüzeylerdir. Beş bölümden oluşan bu çalışmanın giriş ve literatür araştırması bölümünde konunun tarihçesi ve gelişimi hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmamızda kullandığımız temel olan bazı tanım ve teoremlere değinilmiş, q-çatısı üzerinde durulmuştur. Dördüncü ve beşinci bölümde ise araştırma ile ilgili teoremler ispatlar ile birlikte verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Öklid uzayında quasi vektör olarak adlandırılan q-çatı vektörleri tarafından oluşturulan regle yüzeyler hakkında bilgiler verilmiştir. Birinci ve ikinci temel form katsayılarını hesaplayarak, q-çatı vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilmiştir. Daha sonra bu yüzeyler için açılabilirlik, striksiyon noktası ve dağılma parametresi gibi bazı geometrik özellikler araştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Frenet çatısı, q-çatısı, Regle yüzey.

## SUMMARY

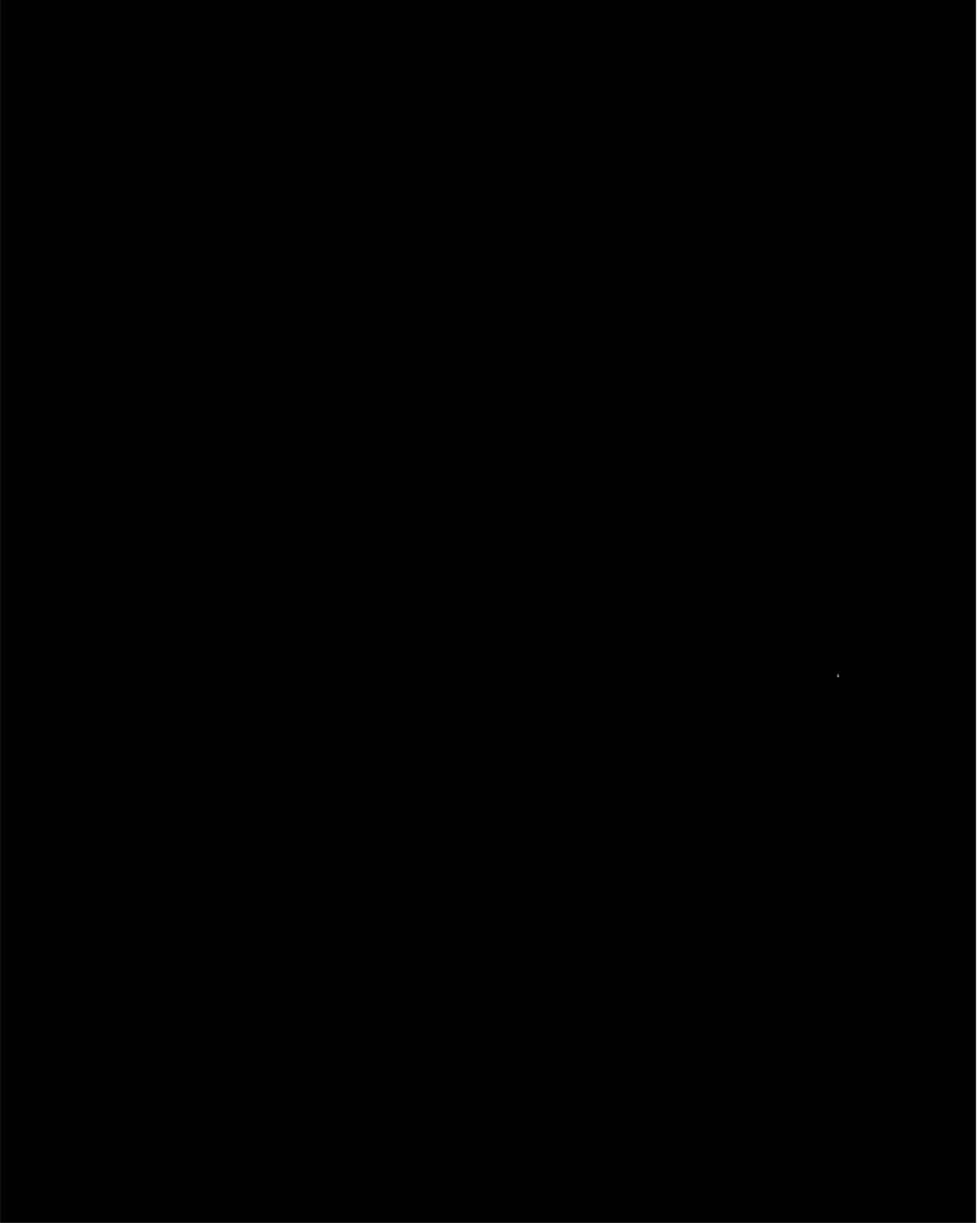
The purpose of this thesis is to examine the ruled surfaces generated by q-frame vectors defined by tangent,  $\mathbf{k}$  projection vector, quasi normal and quasi binormal vectors in 3-dimensional Euclidean space.

A ruled surface is the surface swept out by a straight line moving along a curve. In the introduction and literature review of this study which consists of five chapters, the knowledge is given regarding this subject. In the third chapter, some definitions and theorems that we use in our study are mentioned and the q-frame is emphasized. In the fourth and fifth chapters, the theorems related to the research with proofs are provided.

In this study, the information about the ruled surfaces generated by q-frame vectors called quasi-vectors in Euclidean space is mentioned. By calculating the coefficients of the first and second fundamental forms, Gaussian and mean curvatures of the ruled surfaces generated by q-frame vectors are obtained. Afterwards, some geometric properties such as developability, striction point and distribution parameter of these surfaces are investigated.

**Keywords:** Frenet frame, q-frame, Ruled surface.

## TEŞEKKÜR



# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET . . . . .	vi
SUMMARY . . . . .	vii
TEŞEKKÜR . . . . .	viii
İÇİNDEKİLER . . . . .	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .	xii
1. GİRİŞ VE AMAÇ . . . . .	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI . . . . .	2
3. TEMEL KAVRAMLAR . . . . .	4
3.1. Eğriler ve Frenet Çatısı . . . . .	4
3.2. Uzay Eğrisi Boyunca q-Çatı . . . . .	8
3.3. Frenet Çatısı ile q-Çatı Arasındaki Bağlantılar . . . . .	13
3.4. Regle Yüzeyle . . . . .	14
3.5. Çizgiler Uzayında Hareket . . . . .	17
4. FRENET VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞAN REGLE YÜZEYLER . . . . .	20
4.1. Öklid Uzayında Birim Teğet Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyle . . . . .	20
4.2. Öklid Uzayında Birim Normal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyle . . . . .	24
4.3. Öklid Uzayında Birim Binormal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyle . . . . .	29
4.4. Öklid Uzayında Genel Vektör Alanı Tarafından Oluşan Regle Yüzeyle . . . . .	37
5. q-ÇATI VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞAN REGLE YÜZEYLER . . . . .	46
5.1. Öklid Uzayında Birim (Quasi) Teğet Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyle . . . . .	46



## İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.2. Öklid Uzayında Birim Quasi Normal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler . . . . .	52
5.3. Öklid Uzayında Birim Quasi Binormal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler . . . . .	59
5.4. Öklid Uzayında (Quasi çatıyla verilen) Genel Vektör Alanı Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler . . . . .	65
6. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . .	76
7. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . . .	78
KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . .	79

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Düzleme izdüşürülmüş $\mathbf{X}$ vektörü . . . . .	9
3.2. Doğru boyunca yönlü q-çatı vektörleri . . . . .	9
3.3. Frenet çatısı . . . . .	12
3.4. q-çatısı . . . . .	13
3.5. q-çatısı ve Frenet çatısı . . . . .	14
4.1. Eğri ve onun $\phi_{\mathbf{b}}(t, v)$ yüzeyi . . . . .	37
5.1. $\alpha(t)$ eğrisi ve onun $\phi_{\mathbf{t}}(t, v)$ yüzeyi . . . . .	52
5.2. $\alpha(t)$ eğrisi ve onun $\phi_{\mathbf{n}_q}(t, v)$ yüzeyi . . . . .	59
5.3. $\alpha(t)$ eğrisi ve onun $\phi_{\mathbf{b}_q}(t, v)$ yüzeyi . . . . .	66

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{E}^3$	Üç Boyutlu Öklid Uzayı
$\alpha$	Uzay Eğrisi
$\mathbf{t}$	Birim Teğet Vektör
$\mathbf{n}$	Birim Normal Vektör
$\mathbf{b}$	Birim Binormal Vektör
$\mathbf{n}_q$	Quasi-Normal Vektör
$\mathbf{b}_q$	Quasi-Binormal Vektör
$\mathbf{k}$	İzdüşüm Vektörü
$\kappa$	Kappa Eğriliği
$\tau$	Burulma ( Torsiyon)
$k_1$	Birinci $q$ -Eğriliği
$k_2$	İkinci $q$ -Eğriliği
$k_3$	Üçüncü $q$ -Eğriliği
$\ \cdot\ $	Norm Fonksiyonu
$\langle, \rangle$	Skaler Çarpım Fonksiyonu
$\wedge$	Vektörel Çarpım Fonksiyonu
$\phi(t, v)$	Regle Yüzey
$P_X$	Dağılma Parametresi
$\beta$	Striksiyon Çizgisi
$H$	Ortalama Eğriliği
$K$	Gauss Eğriliği

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Yüzeyler, diferensiyel geometrinin en temel konularından biridir ve bu yüzeyler içerisinde uygulama açısından en ilginç regle yüzeylerdir. Regle yüzeylerin parametrelendirilmesi oldukça kolaydır. Bu yüzeyler Gaspard Monge tarafından bulunmuş ve incelenmiştir. Regle yüzey, düz bir çizginin bir eğri boyunca hareketi ile üretilen özel bir yüzey yahut bir eğri boyunca herhangi bir doğrunun sürekli hareketinin bir sonucu oluşan yüzey olarak tanımlanabilir. Bu eğrilere sırasıyla dayanak eğrisi ve doğrultman denir. 1991 yılında Ravani ve Ku regle yüzey üzerinde çalışıp bazı özelliklerini inceledikten sonra, 2007 yılında Sarıoğlu ve Tutar, 2009 yılında Kasap, Yüce ve Kuruoğlu, 2015 yılında Şentürk ve Yüce, 2017 yılında Dede, Tozak ve Ekici tarafından Öklid uzayında bu yüzeylerin çeşitli karakterizasyonları incelenmiştir. Ayrıca Hacısalihoğlu 1983-1994 yıllarında Diferensiyel Geometri ve Hareket Geometrisi - Kuaterniyonlar Teorisi üzerine çalışmalar yapmıştır. Bunların yanı sıra, 1997 yılında Turgut ve Hacısalihoğlu, 2004 yılında Kim ve Yoon, 2005 yılında Tosun ve Güngör, 2009 ve 2010 yıllarında Aydemir ve Orbay, Minkowski uzayında regle yüzeyleri incelemişlerdir.

Hacısalihoğlu, Aydemir ve Orbay tarafından yapılan çalışmalarda bir eğrinin Frenet vektörleri ile oluşan regle yüzeyler ele alınmıştır. Bu çalışmada, Öklid uzayında  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}_q$  ve  $\mathbf{b}_q$  olarak adlandırılan q-çatı vektörleri tarafından oluşturulan regle yüzeyler üzerinde çalışılmıştır. Birinci ve ikinci temel formların katsayıları hesaplayarak, q-çatı vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilmiştir. Daha sonra bu yüzeyler için striksiyon noktası ve dağılma parametresi gibi bazı geometrik özellikler araştırılmıştır. Regle yüzeylerin, açılabilir ve minimal olma durumları da bu tez çalışmasında ele alınmıştır. Açılabilir regle yüzeyler, ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olan regle yüzeylerdir. Minimal yüzeyler ise ortalama eğriliği sıfır olan yüzeylerdir. Öklid uzayı ve bu uzaydaki eğri ve yüzeyler başlığı altında Frenet çatısı, bir uzay eğrisi boyunca q-çatı, Frenet çatısı ve q-çatı arasındaki bağıntılar ve regle yüzeyler incelenmiştir.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Regle yüzeyler konusu diferensiyel geometride önemli çalışma alanlarından biridir ve matematikçilerin her zaman ilgi odağı olmuştur. Diferensiyel geometrinin incelenmesinde konu olan yüzeyler, fizik, mühendislik, bilgisayar grafikleri gibi birçok disiplinde başlıca yere sahiptir. Bu yüzeylerin en önemlilerinden biri, Gaspard Monge tarafından 1850 yılında keşfedilen regle yüzeydir. Regle yüzeylere dair çalışmalarda incelenen başlıca konular: eğrilik çizgileri, geodezikleri, striksiyon çizgileri ve regle yüzeylerin açılabilirliği. Regle yüzeyler en basit ve en sade şekliyle, dayanak eğrisi olarak adlandırılan bir uzay eğrisi boyunca, bir doğrunun hareket ettirilmesiyle oluşturulan yüzey olarak tanımlanır. Hareket ettirilen doğruya regle yüzeyin ana doğrusu, bu doğrunun doğrultmanına da regle yüzeyin doğrultmanı denir. M. Dede, C. Ekici, Y. Ünlütürk (2014) timelike regle yüzeyler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmada, q-çatı kullanılarak Öklid uzayında q-çatı vektörleri ve Frenet vektörleri tarafından oluşturulan regle yüzeyler incelenmiş ve dağılma parametreleri ile ilgili bazı yeni teoremler ve sonuçlar, bu yüzeylerin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği elde edilmiştir. Öklid uzayında regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar birçok kaynakta mevcuttur. Bunlardan bazıları Guggenheimer (1963) "Diferensiyel Geometri", Müller (1963) "Kinematik Dersleri", Biran (1981) "Diferensiyel Geometri Dersleri", Hacısalihoğlu (1983-1994) "Diferensiyel Geometri I-II" ve (1983b) "Hareket Geometrisi ve Kuarterniyonlar Teorisi", Kobayashi (1983) "Diferansiyel Geometrinin Temelleri", O'Neil (1983) "Yarı Riemann Geometrisi", Kuhnle (2002) "Diferansiyel Geometri, Eğriler-Yüzeyler-Manifoldlar", Sabuncuoğlu (2006) "Diferensiyel Geometri", Salimov ve Magden (2008) "Diferensiyel Geometri" adlı kitaplarıdır. A. Sabuncuoğlu ve M. Ergüt doktora tezlerinde genelleştirilmiş regle yüzeyler üzerine çalışmışlardır. Daha sonra regle yüzeyler n-boyutlu Lorentz uzayına genelleştirilmiştir. C. Ekici "Yarı Öklidiyen Uzaylarda Genelleştirilmiş Yarı-Regle Yüzeyler" adlı doktora tezinde sırt regle yüzeyi ve merkez regle yüzeyi ile ilgili orijinal çalışmalara yer vermiştir.

A. Turgut (1995) "3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler" adlı doktora tezini yapmıştır. M. Tosun (1995) doktora çalışmasında genelleştirilmiş regle yüzeyler teorisine değinmiş ve n-boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş regle yüzeyleri incelemiştir. Regle yüzeyler, açılabilir ve açılabilir olmayan şekilde ikiye ayrılırlar. Açılabilir regle yüzeyler, ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olan regle yüzeylerdir. M. Çimdiker ve C. Ekici (2017) regle yüzeylerin açılabilirliği ile ilgili teoremlere yer vermişlerdir. Lawrence (2010) açılabilir yüzeylerin tarihçesi ve uygulamaları hakkında çalışmıştır. Diferensiyel

geometrideki klasik bir sonuç ise, açılabilir regle yüzeylerin açık ve yoğun altkümesinin elemanlarını silindir, koni ve tanjant yüzeyi olduğunu ifade eder. Bu durum Öklid ve Minkowski uzayları için de geçerlidir. Lorentz metriği kullanılarak, Öklid uzayında elde edilen genel tanım ve teoremler 3- boyutlu Minkowski uzayında da Turgut ve Hacısalihoğlu (1997, 1998) tarafından ele alınmıştır. Sarıoğlugil ve Tutar (2007), paralel bir p-equidistant dual centroit eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin integral invaryantları üzerinde çalışmışlardır. Şenyurt (2012), tarafından ani Pfaff vektörünün oluşturduğu paralel p-equidistant regle yüzeylerin integral invaryantları bulunmuştur. As ve Şenyurt (2013), çalışmalarında asli normal vektörler paralel alınarak elde edilen equidistant regle yüzeylerin bazı özelliklerini vermişlerdir. Dede ve arkadaşları yönlü q-çatısının ardındaki temel fikir quasi-normal vektörün, izdüşüm vektörü ile teğet vektörün vektörel çarpımı olmasıdır (Dede vd. 2015). Yönlü q-çatısına göre uzay eğrisini göstererek, tubular yüzeylerin yeni bir versiyonunu tanıtmışlar ve Frenet çatısı ile q-çatısı arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmışlardır (Dede vd.2015a).

Bunların yanısıra regle yüzeyler, Galilean uzayı Kamenarovic (1991), Dede, Ekici ve Çöken (2013), Dede ve Ekici (2016), Divjak (2003), Minkowski uzayı Ekici, Çöken (2012), Ekici, Ünlütürk, Dede ve Ryuh (2008), Küçük (2004), pseudo-Galilean uzayı Ekici ve Dede (2011) gibi uzaylarda, kanal yüzeyleri Kaymanlı, Ekici ve Dede (2018), regle yüzeyler Ryuh ve Pennock (1988) gibi yüzeylerde ve Bertrand eğrileri Dede, Ekici ve Güven (2018) gibi eğrilerde de tanımlanmış ve ilgi çalışmalar yapılmıştır. Matematikçiler bu çalışmaların dışında eğriler için başka çatılarla da ilgilenmişlerdir. Referans çatısı Bloomenthal (1990) ve Darboux çatısı Ünlütürk, Çimdiker, Ekici (2016) gibi çatılarda da eğriler üzerine çalışmalar yapılmış ve regle yüzey kavramına değinilmiştir bunun yanı sıra Coquillart (1987) tarafından tanımlanan quasi-normal vektörü yardımıyla q-çatı tanımlanmıştır. Orbay ve Aydemir (2010), Minkowski uzayında space-like doğrultman vektörlü space-like yüzey ile bu yüzeyin dayanak eğrisinin Frenet vektörleri ile oluşturulan regle yüzeyleri incelemişlerdir. G. U. Kaymanlı, C. Ekici ve M. Dede (2020) q-çatı vektörleri kullanılarak elde edilen regle yüzeyleri incelemiş ve minimallik gibi özelliklerine değinmişlerdir. Ayrıca space-like doğrultman vektörlü space-like regle yüzeyin dayanak eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu arasında bazı yeni bağıntılar elde edildi. Bu çalışmada öncelikli olarak yönlü q- çatı kavramı ele alınarak, yönlü q- çatının diğer çatılara göre avantajlarından bahsedilmiştir. Frenet çatısına kıyasla q-çatı'nın iki önemli avantajı vardır bunlar: ikinci türevi tanımsız olan eğride tanımlanabilmesi ve teğet vektörü etrafında anlamsız dönme hareketini engellemesidir. Bu sebeple Bishop (1975) çatısına göre daha çok tercih edilmiştir. Kaymanlı, Ekici ve Okur (2019) q-çatı vektörleri tarafından üretilen regle yüzeyler üzerine çalışmıştır.

### 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid uzayı ve bu uzaydaki eğri ve yüzeyler için temel tanım ve teoremler verilmiştir.

#### 3.1 Eğriler ve Frenet Çatısı

Frenet çatısı, diferensiyel geometrinin farklı konularında birçok alanda kullanılmıştır. Klasik konuların ele alınmasında ve küresel eğriler, Mannheim eğrileri, Bertrand eğrileri üzerinde araştırılan konularda Frenet çatısı kullanılmıştır. Bu bölümde bir uzay eğrisi üzerinde en çok kullanılan Frenet çatısı ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

**Tanım 3.1.1**  $\mathbb{R}^3$  3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş  $\mathbb{R}^3$  afin uzayı ele alınsın.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  iki vektör olsun.  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece  $\mathbb{R}^3$  afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve  $\mathbb{E}^3$  ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.1.2**  $I \subseteq \mathbb{R}$  açık aralık olmak üzere,  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile tanımlanan ve

$$\alpha: I \rightarrow E^n, \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

parametrik ifadesi ile verilen  $M = \alpha(I) \subset E^n$  kümesine uzay eğrisi adı verilir. Bu eğri kısaca  $\alpha$  olarak gösterilecektir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.1.3**  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile bir  $M$  eğrisi verilmiş olsun. Eğer  $\forall s \in I$  için,  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  ya göre birim hızlı eğridir denir ve  $s$  ye de yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.1.4**  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile  $M \subset E^n$  eğrisi verilsin.  $s \in I$  yay parametresine karşılık gelen  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet r-ayaklısı  $\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{V}_r(\mathbf{s})\}$  olsun. Buna

göre

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i < r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle \mathbf{V}'_i(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $M$  eğrisinin  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonu ve  $s \in I$  için  $k_i(s)$  reel sayısına da  $\alpha(s)$  noktasında  $M$  nin  $i$ -yinci eğriliği denir (Hacısalihoglu, 1998; Carmo, 1976).

**Teorem 3.1.1**  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile  $M \subset E^n$  eğrisi verilsin.  $s \in I$  yay parametresi olmak üzere,  $\alpha(s)$  noktasında  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonu  $k_i(s)$  ve Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$  ise

$$\mathbf{V}'_1(s) = k_1(s)\mathbf{V}_2(s)$$

$$\mathbf{V}'_i(s) = -k_{i-1}(s)\mathbf{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\mathbf{V}_{i+1}(s) \quad 1 < i < r$$

$$\mathbf{V}'_r(s) = -k_{r-1}(s)\mathbf{V}_{r-1}(s)$$

olur (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 3.1.5**  $\alpha: I \rightarrow E^3$ ,  $s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$  eğrisi için  $s$  yay-parametresi olsun. Burada  $\mathbf{t} = \mathbf{V}_1$  birim teğet,  $\mathbf{n} = \mathbf{V}_2$  birim normal,  $\mathbf{b} = \mathbf{V}_3$  binormal ve  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  Frenet 3-ayaklısı adını alır. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s) \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olarak verilir. Buradan da

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olur (Sabuncuoğlu, 2010).

**Tanım 3.1.6**

$$\alpha: I \rightarrow E^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)),$$



$s$  yay parametresi ile verilen bir eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  olsun.

$$\mathbf{t}'(s) = k_1(s)\mathbf{n}(s)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}(s)$$

$$\mathbf{b}'(s) = -k_2(s)\mathbf{n}(s)$$

formüllerine Frenet formülleri denir. Burada  $k_1 = \kappa$  ve  $k_2 = \tau$  ile gösterilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

eşitliği mevcuttur (Hacısalihoglu, 1998). O halde

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}.$$

yazılabilir (Hacısalihoglu, 1998).

**Sonuç 3.1.1**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun.  $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$  değerine  $\alpha$  eğrisinin  $s$  noktasındaki eğrilik denir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.1.7**  $\alpha$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  yay parametresi olmak üzere,  $\alpha(s)$  noktasındaki  $i$ -yinci eğrilik  $k_i(s)$  ve Frenet  $r$ -ayaklısı

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } E_i(s) = \alpha^i(s) - \sum_{j < i} \langle \alpha^i(s), V_j(s) \rangle V_j(s), \quad 1 \leq i \leq r$$

olmak üzere

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}, \quad 1 \leq i \leq r$$

şeklindedir (Hacısalihoglu, 2000).

**Sonuç 3.1.2** Eğrilik  $\kappa$  ve torsiyon  $\tau$  olarak gösterilmek üzere

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

için ilgili matris

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

olup burada  $\nu = \|\alpha'(s)\|$  dır (Hacısalıhoğlu, 2000; Sabuncuoğlu, 2010).

**Örnek 3.1.1**  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(s) = \left(3 \cos\left(\frac{s}{5}\right), 3 \sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}s\right)$  olsun.  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektör alanlarını, eğrilik ve burulma fonksiyonlarını bulunsun. Bu eğrinin hız vektörü

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}\right)$$

olarak ifade edilir.  $\forall s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  olduğundan,  $\alpha$  birim hızlı eğridir.  $\mathbf{t}$  vektör alanı,  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  eşitliği ile tanımlanırsa

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}\right)$$

$$\mathbf{t}'(s) = \left(-\frac{3}{25} \cos\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{3}{25} \sin\left(\frac{s}{5}\right), 0\right)$$

olarak bulunur. Buradan  $\kappa$  (eğrilik)

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \|\mathbf{t}'(s)\| \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}'(s) \rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \left(-\frac{3}{25} \cos\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{3}{25} \sin\left(\frac{s}{5}\right), 0\right), \left(-\frac{3}{25} \cos\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{3}{25} \sin\left(\frac{s}{5}\right), 0\right) \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 \cos^2\left(\frac{s}{5}\right) + \left(\frac{3}{25}\right)^2 \sin^2\left(\frac{s}{5}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 \left(\cos^2\left(\frac{s}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{5}\right)\right)} \\ &= \frac{3}{25} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Eğrinin birim normali

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s) &= \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} \\ &= \frac{\left(-\frac{3}{25} \cos\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{3}{25} \sin\left(\frac{s}{5}\right), 0\right)}{\frac{3}{25}} \\ &= \left(-\cos\left(\frac{s}{5}\right), -\sin\left(\frac{s}{5}\right), 0\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\
 &= \left( -\frac{3}{5} \sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5} \right) \wedge \left( -\cos\left(\frac{s}{5}\right), -\sin\left(\frac{s}{5}\right), 0 \right) \\
 &= \left( \frac{4}{5} \sin\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{b}'(s) = \left( \frac{4}{25} \cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{25} \sin\left(\frac{s}{5}\right), 0 \right)$$

olduğundan  $\tau$  (torsiyon)

$$\begin{aligned}
 \tau(s) &= -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\
 &= -\left\langle \left( \frac{4}{25} \cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{25} \sin\left(\frac{s}{5}\right), 0 \right), \left( -\cos\left(\frac{s}{5}\right), -\sin\left(\frac{s}{5}\right), 0 \right) \right\rangle \\
 &= -\left( -\frac{4}{25} \cos^2\left(\frac{s}{5}\right) - \frac{4}{25} \sin^2\left(\frac{s}{5}\right) \right) \\
 &= \frac{4}{25} \left( \cos^2\left(\frac{s}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{5}\right) \right) \\
 &= \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

**Tanım 3.1.8**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.  $V$  üzerinde bir  $\mathbf{u}$  vektörünün uzunluğu veya boyu  $\|\mathbf{u}\|$  ile gösterilir ve

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bu değere  $\mathbf{u}$  vektörünün normu da denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

### 3.2 Uzay Eğrisi Boyunca q-Çatı

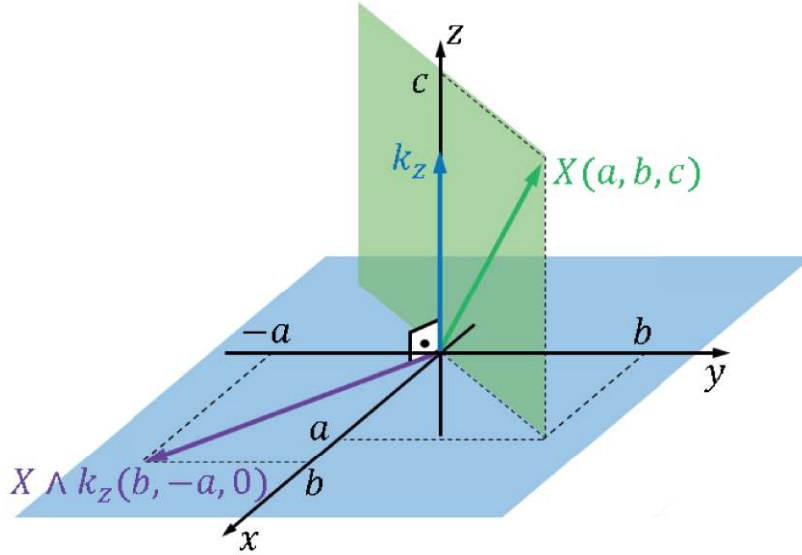
Dede vd. 2015 yılındaki çalışmasında bir uzay eğrisi boyunca tanımladıkları q-çatının Frenet çatısına göre bazı önemli avantajları olduğunu ifade etti. Bunlardan biri bu çatının ikinci türevinin tanımsız olduğu bir eğri için de tanımlanabilmesi ve teğet etrafında gereksiz bükülmenin önüne geçmesidir. Bu kısımda bir uzay eğrisi boyunca q-çatı tanımlanmış ve q-eğrilikleri elde edilmiştir. q-çatı eğriliğın sıfır olduğu bir doğru boyunca bile tanımlanabilir.

$$\mathbf{k}_z = (0, 0, 1) \text{ ve } \mathbf{X} = (a, b, c)$$

olarak ifade edilirse

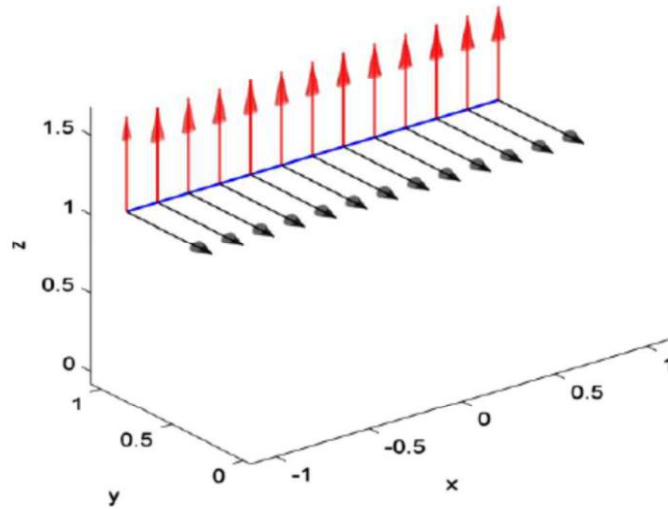
$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z = (a, b, c) \wedge (0, 0, 1) = (b, -a, 0)$$

olduğundan  $\mathbf{X}$  vektörünün  $xy$ -düzlemindeki izdüşümü elde edilmiş olur (Coquillart, 1987).



Şekil 3.1: Düzleme izdüşürülmüş  $\mathbf{X}$  vektörü

Buna göre  $\mathbf{k}$  izdüşüm vektörü eksenler doğrultusunda birim vektör olarak alınır. Bir eğrinin  $\mathbf{t}$  teğet vektörü ile  $\mathbf{k}$  izdüşüm vektörü paralel ise  $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = 0$  olduğu dikkate alınmalıdır.  $z$ -ekseni,  $y$ -ekseni ve  $x$ -ekseni yönündeki q-çatıları sırasıyla  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_z\}$ ,  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_y\}$  ve



Şekil 3.2: Doğru boyunca yönlü q-çatı vektörleri

$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_x\}$  ile gösterilir. Şekil 3.1 ile bir doğru boyunca  $y$ -ekseni yönündeki q-çatısı

gösterilmiştir. Burada izdüşüm vektörleri eksen sırasıyla  $\mathbf{k}_z = (0,0,1)$ ,  $\mathbf{k}_y = (0,1,0)$  ve  $\mathbf{k}_x = (1,0,0)$  olur (Dede, 2015a).

**Tanım 3.2.1** Bir uzay eğrisi boyunca yönlü q-çatı

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} \\ \mathbf{n}_q &= \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} \\ \mathbf{b}_q &= \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q\end{aligned}\tag{3.5}$$

olarak tanımlanır. Burada  $\mathbf{k}$  izdüşüm vektörü,  $\mathbf{t}$  eğrinin teğeti,  $\mathbf{n}_q$  eğrinin quasi-normali ve  $\mathbf{b}_q$  ise eğrinin quasi-binormali olarak adlandırılır (Dede, 2015).

**Teorem 3.2.1** Bir uzay eğrisi boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \|\boldsymbol{\alpha}'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}\tag{3.6}$$

şeklinde dir. q-eğriliği ise

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|} \\ k_2 &= \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|} \\ k_3 &= \frac{\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|}\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir (Dede vd., 2015).

Şimdi  $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, 1, 1)$  ile parametrelendirilmiş eğriyi (doğruyu) ele alalım. Yönlü q-çatı aşağıdaki gibi elde edilir:  $\mathbf{t} = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{n}_q = (0,0,1)$  ve  $\mathbf{b}_q = (0,-1,0)$  ile  $\mathbf{k}_y = (0,1,0)$  y eksenini yönlü q-çatı şekil 3.1 de gösterilmiştir.

**Tanım 3.2.2** Frenet eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  sabit fonksiyonlar ise  $\boldsymbol{\alpha}$ , bir dönme çizgisi ya da helis olarak adlandırılır (Gray, Salamon ve Abbena, 2006).

**Örnek 3.2.1**  $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t^3)$  eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü  $\mathbf{k}_z = (0,0,1)$  olan z

ekseni yönündeki q-çatısı

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-\sin(t), \cos(t), 3t^2) \\
 \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-\sin(t), \cos(t), 3t^2) \wedge (0, 0, 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(\cos(t), \sin(t), 0) \\
 \|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z\| &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \\
 \mathbf{n}_q &= (\cos(t), \sin(t), 0) \\
 \mathbf{b}_q &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-\sin(t), \cos(t), 3t^2) \wedge (\cos(t), -\sin(t), 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-3t^2 \sin(t), -3t^2 \cos(t), 1)
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}' &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}(-\cos(t), -\sin(t), 6t) \\
 \mathbf{n}'_q &= (-\sin(t), \cos(t), 0)
 \end{aligned}$$

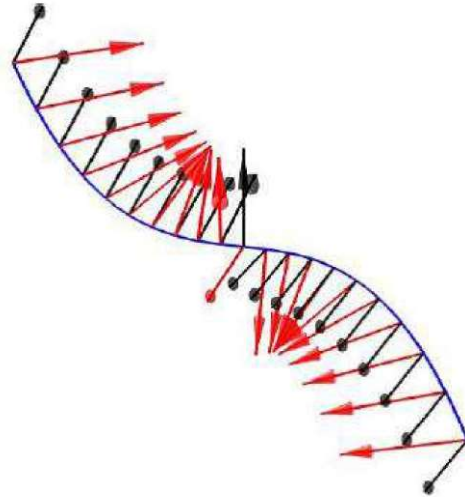
olarak bulunur. q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \langle (-\cos(t), -\sin(t), 6t), (\cos(t), \sin(t), 0) \rangle}{\sqrt{1+9t^4}} \\
 &= -\frac{1}{1+9t^4} \\
 k_2 &= \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)^2 \langle (-\cos(t), -\sin(t), 6t), (-3t^2 \sin(t), -3t^2 \cos(t), +1) \rangle}{\sqrt{1+9t^4}} \\
 &= \frac{\frac{1}{1+9t^4} (3t^2 \cos(t) \sin(t) + 3t^2 \cos(t) \sin(t) + 6t)}{\sqrt{1+9t^4}} \\
 &= \frac{1}{(1+9t^4)^{3/2}} (3t^2 (\cos(t) \sin(t) + \cos(t) \sin(t)) + 6t) \\
 &= \frac{1}{(1+9t^4)^{3/2}} (3t^2 (2 \cos(t) \sin(t)) + 6t)
 \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(1+9t^4)^{3/2}} (-3t^2 \sin(2t) + 6t) \\
 k_3 &= \frac{\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \frac{\langle (-\sin(t), \cos(t), 0), (-3t^2 \sin(t), -3t^2 \cos(t), 1) \rangle}{\sqrt{1+9t^4}} \\
 &= \frac{3t^2}{\sqrt{1+9t^4}} \\
 &= \frac{3t^2}{1+9t^4}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Dede, 2015 a).

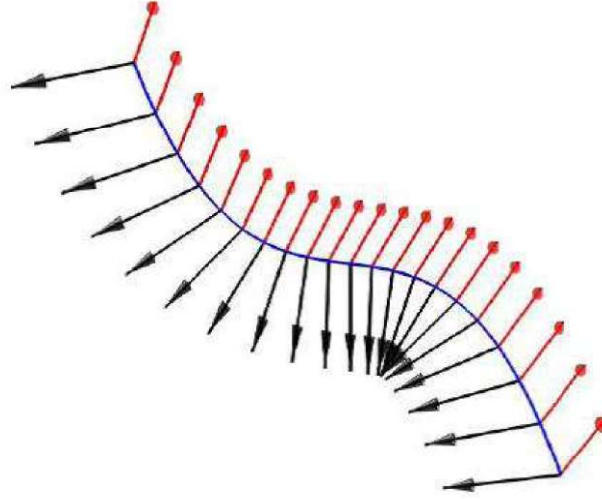


Şekil 3.3: Frenet çatısı

Şekil 3.3 de  $\alpha$  eğrisi boyunca Frenet çatısı ile normal düzlem vektörleri gösterilmiştir. Aynı  $\alpha$  eğrisi boyunca z-ekseni yönündeki q-çatısı için normal düzlem vektörleri Şekil 3.4 ile verilmiştir.

**Teorem 3.2.2** Öklid uzayında  $\alpha(t)$  düzgün bir eğri olsun. q-eğrilikler  $\alpha(t)$  eğrisinin türevleri cinsinden

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{\det[\alpha'', \alpha', \mathbf{k}]}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\| \|\alpha'\|^2} \\
 k_2 &= \frac{\langle \alpha', \mathbf{k} \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', \mathbf{k} \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|} \\
 k_3 &= \frac{\langle \alpha', \mathbf{k} \rangle \det[\alpha', \alpha'', \mathbf{k}]}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|^2 \|\alpha'\|^2}
 \end{aligned}$$



Şekil 3.4: q-çatısı

şeklinde verilmektedir (Dede, 2015 a).

**Sonuç 3.2.1** q-çatının  $k_1, k_2, k_3$  q-eğriliklerinin izdüşüm vektörü  $\mathbf{k}$  ya bağlı olduğu kolayca görülür (Dede vd., 2015 a).

### 3.3 Frenet Çatısı ile q-Çatı Arasındaki Bağlılıklar

$\mathbb{R}^3$  3-boyutlu uzayda keyfi parametreye bağlı herhangi bir uzay eğrisi için Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ \mathbf{b} &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak verilir. Ayrıca eğrinin  $k$  eğriliği  $\kappa$  ve burulması  $\tau$  olmak üzere

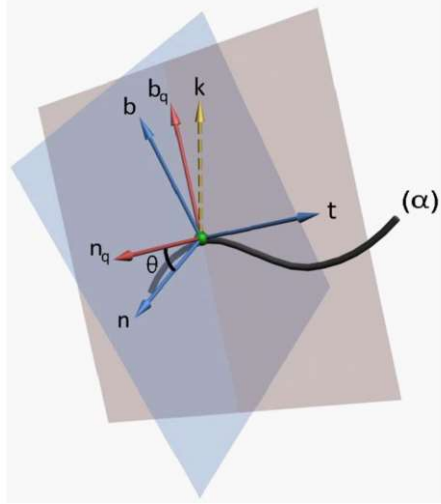
$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2010). Şekil 3.5 ile verilmiş olan Frenet çatısı ile q-çatısı arasındaki ilişki ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

olarak ifade edilir (Dede vd. 2015 a).





Şekil 3.5: q-çatısı ve Frenet çatısı

**Teorem 3.3.1**  $\alpha(s)$  eğrisinin yay uzunluğu  $s$  ile parametrelendirilirse (3.6) ifadesine bağlı olarak q-çatıda aşağıdaki eşitlik verilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Burada  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_3$  q-eğrilikleri

$$k_1 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle$$

$$k_2 = \langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle$$

$$k_3 = \langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle$$

olarak verilir (Dede ve Ekici, 2015 a).

**Teorem 3.3.2**  $\alpha(s)$  yay parametresi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. Bu takdirde  $\mathbf{n}$  ve  $\mathbf{n}_q$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere q-eğrilikleri ve Frenet eğrilikleri arasındaki ilişki

$$k_1 = \kappa \cos \theta$$

$$k_2 = -\kappa \sin \theta$$

$$k_3 = d\theta + \tau$$

şeklindedir (Dede ve Ekici, 2015).

### 3.4 Regle Yüzeyler

**Tanım 3.4.1** Eğer  $\alpha(s)$  bir eğri ve  $\mathbf{Z}(s)$  bir vektör ise, regle yüzey  $\phi(s, v)$  ile gösterilir.  $\phi(s, v)$  aşağıdaki gibi formülize edilir. Burada,  $\alpha$  eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi adı verilir.

$\mathbf{Z}(s)$  vektörüne de doğrusal yüzeyin  $\alpha(s)$  noktasındaki doğrultmanı denir (Izumiya, 2001).

$$\phi(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{Z}(s) \quad (3.11)$$

Yani, regle yüzey  $\mathbf{Z}$  çizgisinin  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket etmesiyle elde edilen yüzeydir (Hacısalıhoğlu, 2000). Bu çalışmada hareket ettirilen doğruya regle yüzeyin ana doğrusu, bu doğrunun doğrultmanını da regle yüzeyin doğrultmanı olarak ifade edeceğiz.

**Tanım 3.4.2** Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu komşu iki anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir. O halde  $\phi(s, v)$  regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_X = -\frac{\det(\alpha_s, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_s)}{\langle \mathbf{Z}_s, \mathbf{Z}_s \rangle} \quad (3.12)$$

ile tanımlı fonksiyondur (Izumiya, 2001; Ergün ve Çalışkan, 2012).

**Tanım 3.4.3** Bir regle yüzeyde  $\mathbf{Z}(s)$  ana doğrusu ile  $\mathbf{Z}(s + ds)$  komşu ana doğrusunun ortak dikmesinin  $\mathbf{Z}(s)$  üzerindeki ayağına regle yüzeyin boğaz noktası veya merkez noktası veya striksiyon noktası denir. Bu noktanın geometrik yerine de boğaz çizgisi veya striksiyon çizgisi denir. Regle yüzeydeki striksiyon çizgisi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, \mathbf{Z}_s \rangle}{\langle \mathbf{Z}_s, \mathbf{Z}_s \rangle} \mathbf{Z} \quad (3.13)$$

olarak ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 3.4.4** Bir regle yüzey üzerinde bütün ana doğruları kesen ( $C$ ) eğrisine yüzeyin dayanak eğrisi (referans eğrisi) denir (Hacısalıhoğlu, 1983). (3.11) ifadesinde  $\|\mathbf{Z}\| = 1$  regle yüzeyi için striksiyon eğrisinin yer vektörü  $\alpha$  ve dayanak eğrisine uzaklığı  $u$  olmak üzere

$$u = -\frac{\langle D_t \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle}{\|D_t \mathbf{X}\|^2}$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 3.4.5**  $M, E^3$  uzayında  $\phi(s, v)$  parametresi ile verilen bir yüzey olsun.  $M$  yüzeyinin keyfi bir noktada teğet vektör alanı  $\phi_s$  ve  $\phi_v$  vektörleri tarafından gerilir.  $M$  yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\ F &= \langle \phi_s, \phi_v \rangle \\ G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde verilir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.4.6** Bir  $M$  regle yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{\phi_s \wedge \phi_v}{\|\phi_s \wedge \phi_v\|} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır.  $M$  yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} L &= \langle \phi_{ss}, \mathbf{N} \rangle \\ M &= \langle \phi_{sv}, \mathbf{N} \rangle \\ N &= \langle \phi_{vv}, \mathbf{N} \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

olarak ifade edilir (Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.4.7**  $E^n$  uzayında bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $M$  yüzeyinin bir  $P$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det [S(P)] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $M$  yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu ve  $K(P)$  değerine de  $M$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki Gauss eğriliği denir ve

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1994; Do Carmo, 1976).

**Tanım 3.4.8**  $E^n$  uzayında bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $M$  yüzeyinin bir  $P$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = \text{iz}[S(P)] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $M$  yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu ve  $H(P)$  değerine de  $M$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki ortalama eğriliği denir ve

$$H = \frac{GL + EN - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

**Tanım 3.4.9** Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalıhoğlu, 1975).

**Tanım 3.4.10** Bir  $\phi(s, v)$  regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoglu, 1975).

**Tanım 3.4.11**  $M$ ,  $E^3$  uzayında bir yüzey olmak üzere,  $M$  yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Tanım 3.4.12**  $\forall s \in I$  için

$$\begin{aligned}\phi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (s, v) &\rightarrow \phi(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{X}(s)\end{aligned}$$

regle yüzeyi

$$\phi(s + 2\pi, v) = \phi(s, v)$$

şartını sağlıyorsa yani periyodik ise bu regle yüzeye kapalıdır denir (Hacısalihoglu, 1975).

**Tanım 3.4.13** Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir (Hacısalihoglu, 2000b).

**Sonuç 3.4.1**  $M$  yüzeyi minimal olması için gerek ve yeter koşul  $\alpha$  nın düzlem eğrisi olmasıdır (Aydemir ve Orbay, 2009).

**Sonuç 3.4.2**  $M$  yüzeyi açılabilir olması için gerek ve yeter koşul  $\alpha$  nın düzlem eğrisi olmasıdır. Eğer  $M$  yüzeyi açılabilir ise  $M$  yüzeyi minimaldir (Aydemir ve Orbay, 2009).

**Sonuç 3.4.3**  $P \neq 0$  olduğunda  $M$  yüzeyi açılabilir değildir (Aydemir ve Orbay, 2009).

### 3.5 Çizgiler Uzayında Hareket

$E^3$  Öklid uzayındaki 1-parametrelili hareketlerde  $E^3$  ün doğruları regle yüzeyler teorisi için önemlidir. Doğrular  $E^3$  ün lineer nokta cümleleridir. Bu yüzden  $E^3$  Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş bir uzay olarak düşünecek ve bunu belirtmek için de  $E^3$  e çizgiler uzayı adını vereceğiz (Hacısalihoglu, 1983). Uzayda hareketin gözlenebilmesi için bir referans noktasına ihtiyaç vardır. Bu noktanın sabit veya aynı noktada bulunan gözleyiciye göre sabit olduğu farzedilir. Bu noktayı  $0 \in E^3$  ile gösterelim ve hareketi inceleyebilmek için ortonormal bir

$$\{e_1(0), e_2(0), e_3(0)\} = \{0; e_1, e_2, e_3\}$$

sistemini tespit edelim. Ayrıca bu uzayda bütün noktaların sabit kaldığı yani hareket etmediği farzedilerek bu hade  $E^3$  uzayına sabit çizgiler uzayı denir ve  $H'$  ile gösterilir. Yani

$$H' = Sp\{e_1(0), e_2(0), e_3(0)\}$$

Diğer taraftan  $O$  noktasına göre hareketli bir  $P$  noktasını ve bu noktaya sıkı bir şekilde bağlı olan ortonormal bir  $\{E_1(P), E_2(P), E_3(P)\}$  sistemini düşünelim. Yani

$$H = Sp\{E_1(P), E_2(P), E_3(P)\}$$

olsun. Çizgiler uzayında artık, noktaların hareketi yerine doğruların hareketi alınabilir. Bu sebeple uzayın en basit elemanı olarak yönlü doğruları alırız. Hareketli bir  $P$  noktasının  $\mathbf{OP}$  yervektörü ve bu noktaya yerleştirilen bir  $\mathbf{a}$  birim vektörü ile belirlenen doğrunun parametrik denklemi

$$y = x + \lambda \mathbf{a}$$

şeklinindedir (Hacısalihoglu, 1983).  $P$  noktasının doğru üzerinde keyfi bir nokta olması için,  $\wedge$  vektörel çarpım olmak üzere

$$\mathbf{a} = x \wedge \mathbf{a} = y \wedge \mathbf{a}$$

vektörel momentini kullanarak doğruyu  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  çifti ile belirleyebiliriz.  $\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{a}$  vektörlerinin bileşenlerine normlanmış Plücker doğru koordinatları denir (Hacısalihoglu, 1983). Çizgiler uzayında hareketleri üç gruba ayıracağız:

- 1)  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  doğrusunun  $H'$  sabit uzayına göre hareketi
- 2)  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  doğrusunun  $H$  hareketli uzayına göre hareketi
- 3)  $H$  hareketli uzayının  $H'$  sabit uzayına göre hareketi

$H$  nın  $H'$  sabit uzayına göre 1-parametrel hareketine kısaca uzay hareketi diyerek  $H/H'$  ile göstereceğiz.  $H/H'$  hareketini  $O$  noktası etrafında bir dönme ve  $O$  noktasına göre bir öteleme olmak üzere iki kısma ayırmak mümkündür. Eğer sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki Öklid

koordinat sistemi, sırası ile  $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$  ve  $\{x_1, x_2, x_3\}$  ise

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $H/H'$  uzay hareketinin matris formunda  $A \in E^3$  ve  $C \in \mathbb{R}_1^3$  alınırsa

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 3.5.1**  $H/H'$  uzay hareketinin

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi dönmeye karşılık gelen  $A \in E^3$  ve ötelemeye karşılık gelen  $C \in \mathbb{R}_1^3$  matrisleri

$$A = A(t)$$

$$C = C(t)$$

olacak şekilde birtek reel  $t$  parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler  $H/H'$  uzay hareketine 1-parametrelili hareketi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

## 4. FRENET VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞAN REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde Öklid uzayında alınan bir uzay eğrisinin  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  Frenet vektörleri ve herhangi bir  $\mathbf{X}$  vektör alanı kullanılarak regle yüzey tanımlanmış ve bu yüzey üzerinde hesaplamalar yapılmıştır. Frenet vektörleri tarafından oluşan regle yüzeyler

$$M_1 \rightarrow \phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$$

$$M_2 \rightarrow \phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}(s)$$

$$M_3 \rightarrow \phi_3(s, z) = \alpha(s) + z\mathbf{b}(s)$$

$$M_4 \rightarrow \phi_4(s, w) = \alpha(s) + w\mathbf{X}(s)$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1994).

### 4.1 Öklid Uzayında Birim Teğet Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 4.1.1**  $\phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$  ile tanımlanan  $M_1$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_1} = 0 \text{ ve } \beta_{M_1}(s) = \alpha(s)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

**İspat** Bir  $\alpha : I \rightarrow E^3$  kapalı eğrisi boyunca tanımlanan kapalı bir  $H/H'$  uzay hareketinde  $H$  hareketli sistem ve  $H'$  sabit sistem olmak üzere,  $(\alpha)$  eğrisinin bir eğilim çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şart  $H/H'$  hareket iştirak eden birim(asli) normal ve binormal doğrularının  $H'$  üzerinde çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametreleri (dralleri) oranı için bir  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi boyunca alınan  $H/H'$  kapalı uzay hareketinde  $H$  yi geren  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  Frenet üç ayaklısının ayaklarına karşılık gelen doğruların  $H'$  üzerinde çizmiş oldukları regle yüzeylerin dağılma parametrelerini hesap edelim.  $\mathbf{t}$  teğetine karşılık gelen doğrunun  $H'$  üzerinde çizmiş olduğu regle yüzeyin  $P_t$  dağılma parametresi

$$P_t = \frac{\det \left[ \frac{d\alpha}{ds}, \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]}{\left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|^2}$$

olarak hesaplanır (Hacısalihoglu, 1994).

$$P_{\mathbf{t}} = P_{M_1}$$

olmak üzere dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \text{ ve } \mathbf{Z}(s) = \mathbf{t}(s) \quad (4.1)$$

olup (3.2) ve (4.1) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} P_{M_1} &= \frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}')}{\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle}{\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. (4.1) ve (3.2) denklemleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle &= 0 & \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle &= 0 & \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= 1 & \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle &= 1 & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ve (3.13) ile verilen striksiyon çizgisi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \beta_{M_1}(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle}{\|\mathbf{t}'\|^2} \mathbf{t} \\ &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \kappa \mathbf{n} \rangle}{\|k_1 \mathbf{n}\|^2} \mathbf{t} \\ &= \alpha(s) - \frac{\kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}{\|k_1 \mathbf{n}\|^2} \mathbf{t} \\ &= \alpha(s) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır (Hacısalihoglu, 1994).

**Teorem 4.1.2**  $\phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$  ile tanımlanan  $M_1$  yüzeyi için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği

$$H_{M_1} = -\frac{\tau}{2\kappa v} \text{ ve } K_{M_1} = 0$$

şeklinde verilir.

### İspat

$$\phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$$



ile tanımlanan  $M_1$  regle yüzeyinin  $s$  ve  $v$  ye göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri alınır ve (3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi_{1s} &= \mathbf{t} + v'\mathbf{t} + \mathbf{t}'v \\ &= \mathbf{t} + \kappa v\mathbf{n}\end{aligned}\quad (4.3)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\phi_{1v} = \mathbf{t} \quad (4.4)$$

olarak ifade edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (3.2) göz önüne alınır

$$\begin{aligned}\phi_{1ss} &= (\mathbf{t} + \kappa v\mathbf{n})' \\ &= \mathbf{t}' + \kappa v\mathbf{n}' \\ &= \kappa\mathbf{n} + \kappa v(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \\ &= -\kappa^2 v\mathbf{t} + \kappa\mathbf{n} + \kappa\tau v\mathbf{b}\end{aligned}\quad (4.5)$$

şeklinde bulunur ve

$$\begin{aligned}\phi_{1sv} &= (\mathbf{t} + \kappa v\mathbf{n})_v \\ &= \kappa\mathbf{n}\end{aligned}\quad (4.6)$$

ve

$$\phi_{1vv} = \mathbf{t}_v = 0 \quad (4.7)$$

olarak bulunur. (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}E &= \langle \phi_{1s}, \phi_{1s} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t} + \kappa v\mathbf{n}, \mathbf{t} + \kappa v\mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{t}, \kappa v\mathbf{n} \rangle + \langle \kappa v\mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + \langle \kappa v\mathbf{n}, \kappa v\mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \kappa v \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \kappa v \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + \kappa^2 v^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ &= 1 + \kappa^2 v^2\end{aligned}\quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned}F &= \langle \phi_{1s}, \phi_{1v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t} + \kappa v\mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \kappa v \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\ &= 1\end{aligned}\quad (4.9)$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
 G &= \langle \phi_{1v}, \phi_{1v} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

olarak bulunur. (3.15) dikkate alınırsa  $M_1$  regle yüzeyi için

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} &= \mathbf{0} & \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} &= \mathbf{b} & \mathbf{n} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{t} & \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} &= \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitlikleri ile (4.3) ve (4.4) göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
 \phi_{1s} \wedge \phi_{1v} &= (\mathbf{t} + \kappa \mathbf{v} \mathbf{n}) \wedge \mathbf{t} \\
 &= \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} + \kappa \mathbf{v} \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} \\
 &= -\kappa \mathbf{v} \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 \|\phi_{1s} \wedge \phi_{1v}\| &= \sqrt{\langle -\kappa \mathbf{v} \mathbf{b}, -\kappa \mathbf{v} \mathbf{b} \rangle} \\
 &= \sqrt{\kappa^2 \mathbf{v}^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \\
 &= \kappa \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

$M_1$  regle yüzeyinin normal vektörü(3.15) kullanılarak

$$\mathbf{N}_{M_1} = \frac{-\kappa \mathbf{v} \mathbf{b}}{\kappa \mathbf{v}} = -\mathbf{b}$$

olarak ifade edilir. (3.16), (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.2) dikkate alınır ve iç çarpımın dağılma özelliği kullanılırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \langle -\mathbf{b}, -\kappa^2 \mathbf{v} \mathbf{t} + \kappa \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{v} \mathbf{b} \rangle \\
 &= \langle -\mathbf{b}, -\kappa^2 \mathbf{v} \mathbf{t} \rangle + \langle -\mathbf{b}, \kappa \mathbf{n} \rangle + \langle -\mathbf{b}, \kappa \tau \mathbf{v} \mathbf{b} \rangle \\
 &= \kappa^2 \mathbf{v} \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle - \kappa \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle - \kappa \tau \mathbf{v} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= 0 + 0 - \kappa \tau \mathbf{v} \\
 &= -\kappa \tau \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
 M &= \langle -\mathbf{b}, \kappa \mathbf{n} \rangle \\
 &= -\kappa \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ayrıca

$$N = \langle -\mathbf{b}, 0 \rangle = 0 \quad (4.14)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan (4.8), (4.9), (4.10), (4.12), (4.13), (4.14), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} H_{M_1} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 \cdot (-\kappa\tau\nu) + (1 + \kappa^2\nu^2) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0}{(1 + \kappa^2\nu^2)1 - 1^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\kappa\tau\nu}{\kappa^2\nu^2} \right] \\ &= -\frac{\tau}{2\kappa\nu} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve

$$\begin{aligned} K_{M_1} &= \frac{(-\kappa\tau\nu) \cdot 0 - 0^2}{(1 + \kappa^2\nu^2) \cdot 1 - 1^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 4.1.1**  $M_1$  regle yüzeyi için dağılma parametresi

$$P_{M_1} = 0$$

olduğundan  $M_1$  açılabilir yüzeydir. Benzer şekilde ortalama eğrilik

$$H_{M_1} \neq 0$$

olduğundan  $M_1$  minimal yüzey değildir.

## 4.2 Öklid Uzayında Birim Normal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 4.2.1**  $\phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}(s)$  ile tanımlanan  $M_2$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_2} = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{ve} \quad \beta_{M_2}(s) = \alpha(s) + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \mathbf{n}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoglu, 1994).

**İspat**  $H$  hareketli sistem ve  $H'$  sabit sistem olmak üzere,  $\mathbf{n}$  asli normal vektörüne karşılık gelen doğrunun  $H$  üzerinde çizdiği regle yüzeyin  $P_{\mathbf{n}}$  dağılma parametresi (drali ) aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$P_{\mathbf{n}} = \frac{\det \left[ \frac{d\alpha}{ds}, \mathbf{n}, \frac{dn}{ds} \right]}{\left\| \frac{dn}{ds} \right\|^2} \quad \text{ve} \quad P_{\mathbf{n}} = P_{M_2}$$

olmak üzere dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}(s) = \mathbf{n}(s) \quad (4.15)$$

olup (3.2) ve (4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} P_{M_2} &= -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{n}')}{\langle \mathbf{n}', \mathbf{n}' \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle}{\langle \mathbf{n}', \mathbf{n}' \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{b}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \rangle}{\langle -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \rangle} \\ &= \frac{-\kappa \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle + \tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}{\kappa^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - 2\kappa\tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + \tau^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \\ &= \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

biçiminde ifade edilir. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilip (4.2), (4.15) ve (3.2) dikkate alınır

$$\begin{aligned} \beta_{M_2}(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle}{\|\mathbf{n}'\|^2} \mathbf{n} \\ &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{n}', \mathbf{n}' \rangle} \mathbf{n} \\ &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \rangle}{\langle -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \rangle} \mathbf{n} \\ &= \alpha(s) - \frac{-\kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}{\langle -\kappa \mathbf{t}, -\tau \mathbf{t} \rangle + 2 \langle -\kappa \mathbf{t}, \tau \mathbf{b} \rangle + \langle \tau \mathbf{b}, \tau \mathbf{b} \rangle} \mathbf{n} \\ &= \alpha(s) + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \mathbf{n} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır (Hacısalihoglu, 1994).

**Teorem 4.2.2**  $\phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}(s)$  ile tanımlanan  $M_2$  yüzeyi için ortalama eğrilik ve

Gauss eğriliği

$$H_{M_2} = 0 \quad \text{ve} \quad K_{M_2} = -\frac{\tau^2}{\left((1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2\right)^2}$$

şeklinde verilir.

### İspat

$$\phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}(s)$$

ile tanımlanan  $M_2$  regle yüzey denkleminin  $s$  ve  $u$  ya göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri alınır ve (3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \phi_{2s} &= \mathbf{t} + (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})u \\ &= \mathbf{t} - \kappa u\mathbf{t} + \tau u\mathbf{b} \\ &= (1 - \kappa u)\mathbf{t} + \tau u\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\phi_{2u} = \mathbf{n} \quad (4.18)$$

olarak ifade edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (3.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \phi_{2ss} &= \left((1 - \kappa u)\mathbf{t} + \tau u\mathbf{b}\right)' \\ &= (1 - \kappa u)\mathbf{t}' + \tau u\mathbf{b}' \\ &= (1 - \kappa u)(\kappa\mathbf{n}) + \tau u(-\tau\mathbf{n}) \\ &= \kappa\mathbf{n} - \kappa^2 u\mathbf{n} - \tau^2 u\mathbf{n} \\ &= (\kappa - \kappa^2 u - \tau^2 u)\mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde bulunur ve

$$\begin{aligned} \phi_{2su} &= \left((1 - \kappa u)\mathbf{t} + \tau u\mathbf{b}\right)_u \\ &= (t - \kappa u\mathbf{t} + \tau u\mathbf{b})_u \\ &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ve

$$\phi_{2uu} = \mathbf{n}_u = 0 \quad (4.21)$$

olarak bulunur. (4.2), (4.17) ve (4.18) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form

katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_{2s}, \phi_{2s} \rangle \\
&= \langle ((1 - \kappa u) \mathbf{t} + \tau u \mathbf{b}), ((1 - \kappa u) \mathbf{t} + \tau u \mathbf{b}) \rangle \\
&= (1 - \kappa u)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \tau^2 u^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + 2(1 - \kappa u) \tau u \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\
&= (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
F &= \langle \phi_{2s}, \phi_{2u} \rangle \\
&= \langle (1 - \kappa u) \mathbf{t} + \tau u \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\
&= (1 - \kappa u) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \tau u \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
G &= \langle \phi_{2u}, \phi_{2u} \rangle \\
&= \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.24}$$

olarak bulunur. (3.15), (4.11) dikkate alınırsa  $M_2$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
\phi_{2s} \wedge \phi_{2u} &= [(1 - \kappa u) \mathbf{t} + \tau u \mathbf{b}] \wedge \mathbf{n} \\
&= (1 - \kappa u) \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} + \tau u \mathbf{b} \wedge \mathbf{n} \\
&= (1 - \kappa u) \mathbf{b} - \tau u \mathbf{t} \\
&= -\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|\phi_{2s} \wedge \phi_{2u}\| &= \sqrt{\langle -\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}, -\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b} \rangle} \\
&= \sqrt{\tau^2 u^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + 2(-\tau u)(1 - \kappa u) \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + (1 - \kappa u)^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \\
&= \sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}
\end{aligned}$$

ve böylece normal vektörü

$$\mathbf{N}_{M_2} = \frac{-\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}}$$

olarak ifade edilir. (4.2), (3.16), (4.19), (4.20) ve (4.21) dikkate alınır ve iç çarpımın dağılıma

özelliği kullanılırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= \left\langle \frac{-\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}}, (\kappa - \kappa^2 u - \tau^2 u) \mathbf{n} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \langle -\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}, (\kappa - \kappa^2 u - \tau^2 u) \mathbf{n} \rangle \\
&= \frac{-\tau u (\kappa - \kappa^2 u - \tau^2 u)}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \frac{(1 - \kappa u) (\kappa - \kappa^2 u - \tau^2 u)}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
M &= \left\langle \frac{-\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \langle -\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}, -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \rangle \\
&= \frac{(-\tau u)(-\kappa)}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \frac{(1 - \kappa u) \tau}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
&= \frac{\kappa \tau u}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} + \frac{\tau - \kappa \tau u}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \\
&= \frac{\tau}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{-\tau u \mathbf{t} + (1 - \kappa u) \mathbf{b}}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{4.27}$$

olarak hesaplanır. Buradan (4.22), (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
H_{M_2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1.0 + \left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \left( \frac{\tau}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \right)}{\left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right) \cdot 1 - 0^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{0}{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2} \right] = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve

$$\begin{aligned}
 K_{M_2} &= \frac{0.0 - \left( \frac{\tau}{\sqrt{(1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2}} \right)^2}{\left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right) \cdot 1 - 0^2} \\
 &= \frac{-\tau^2}{\left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right) \left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right)} \\
 &= -\frac{\tau^2}{\left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right)^2}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 4.2.1**  $M_2$  regle yüzeyi için dağılma parametresi

$$P_{M_2} \neq 0$$

olduğundan  $M_2$  açılabilir yüzey değildir. Benzer şekilde ortalama eğrilik

$$H_{M_2} = 0$$

olduğundan  $M_2$  minimal yüzeydir. Ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği arasındaki ilişki

$$\frac{H_{M_2}}{K_{M_2}} = \frac{0}{-\frac{\tau^2}{\left( (1 - \kappa u)^2 + \tau^2 u^2 \right)^2}} = 0$$

şeklinde verilir.

### 4.3 Öklid Uzayında Birim Binormal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 4.3.1**  $\phi_3(s, z) = \alpha(s) + z\mathbf{b}(s)$  ile tanımlanan  $M_3$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_3} = \frac{1}{\tau} \text{ ve } \beta_{M_3}(s) = \alpha(s)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1994).



**İspat**  $H$  hareketli sistem ve  $H'$  sabit sistem olmak üzere,  $\mathbf{b}$  binormaline karşılık gelen doğrunun  $H$  de çizdiği regle yüzeyin  $P_{\mathbf{b}}$  dağılma parametresi

$$P_{\mathbf{b}} = \frac{\det \left[ \frac{d\alpha}{ds}, \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right]}{\left\| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right\|^2} = P_{M_3}$$

olmak üzere dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \text{ ve } \mathbf{Z}(s) = \mathbf{b}(s) \quad (4.28)$$

olup (3.2) ve (4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} P_{M_3} &= -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{b}')}{\langle \mathbf{b}', \mathbf{b}' \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle}{\langle \mathbf{b}', \mathbf{b}' \rangle} \\ &= \frac{\langle -\mathbf{n}, -\tau \mathbf{n} \rangle}{\langle -\tau \mathbf{n}, -\tau \mathbf{n} \rangle} \\ &= \frac{\tau}{\tau^2} \\ &= \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (4.29)$$

biçiminde ifade edilir. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilip (4.28) ve (3.2) dikkate alınır

$$\begin{aligned} \beta_{M_3}(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}' \rangle}{\|\mathbf{b}'\|^2} \mathbf{b} \\ &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, -\tau \mathbf{n} \rangle}{\langle -\tau \mathbf{n}, -\tau \mathbf{n} \rangle} \mathbf{b} \\ &= \alpha(s) + \frac{\tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}{\tau^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{b} \\ &= \alpha(s) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır (Hacısalihoglu, 1994).

**Teorem 4.3.2**  $\phi_3(s, z) = \alpha(s) + z\mathbf{b}(s)$  ile tanımlanan  $M_3$  yüzeyi için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği

$$H_{M_3} = -\frac{\kappa}{2(1 + \tau^2 z^2)^{1/2}} \text{ ve } K_{M_3} = -\frac{\tau^2 z^2}{(1 + \tau^2 z^2)^2}$$

şeklinde verilir.

### İspat

$$\phi_3(s, z) = \alpha(s) + z\mathbf{b}(s)$$

ile tanımlanan  $M_3$  regle yüzey denkleminin  $s$  ve  $z$  ye göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri alınır ve (3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\phi_{3s} &= \mathbf{t} + z'\mathbf{b} + \mathbf{b}'z \\ &= \mathbf{t} + (-\tau\mathbf{n})z \\ &= \mathbf{t} - \tau z\mathbf{n}\end{aligned}\tag{4.30}$$

şeklinde bulunur. Benzer olarak

$$\phi_{3z} = \mathbf{b}\tag{4.31}$$

olarak ifade edilir. İkinci dereceden kısmi türevler ise (3.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\phi_{3ss} &= (\mathbf{t} - \tau z\mathbf{n})' \\ &= \mathbf{t}' - \tau z\mathbf{n}' \\ &= \kappa\mathbf{n} - \tau z(-\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) \\ &= \kappa\tau z\mathbf{t} + \kappa\mathbf{n} - \tau^2 z\mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.32}$$

şeklinde bulunur ve

$$\begin{aligned}\phi_{3sz} &= \phi_{3zs} \\ &= (\mathbf{b})' \\ &= -\tau\mathbf{n}\end{aligned}\tag{4.33}$$

ve

$$\phi_{3zz} = (\mathbf{b})_z = 0\tag{4.34}$$

olarak bulunur. (4.2), (4.30) ve (4.31) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}E &= \langle \phi_{3s}, \phi_{3s} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t} - \tau z\mathbf{n}, \mathbf{t} - \tau z\mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \tau^2 z^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - 2\tau z \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ &= 1 + \tau^2 z^2\end{aligned}\tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \phi_{3s}, \phi_{3z} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{t} - \tau_z \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle - \tau_z \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
 G &= \langle \phi_{3z}, \phi_{3z} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

olarak bulunur. (3.15), (4.11) dikkate alınırsa  $M_3$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
 \phi_{3s} \wedge \phi_{3z} &= (\mathbf{t} - \tau_z \mathbf{n}) \wedge \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{t} \wedge \mathbf{b} - \tau_z \mathbf{n} \wedge \mathbf{b} \\
 &= -\mathbf{n} - \tau_z \mathbf{t} \\
 &= -\tau_z \mathbf{t} - \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 \|\phi_{3s} \wedge \phi_{3z}\| &= \sqrt{\langle -\tau_z \mathbf{t} - \mathbf{n}, -\tau_z \mathbf{t} - \mathbf{n} \rangle} \\
 &= \sqrt{\tau_z^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + 2\tau_z \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \\
 &= \sqrt{\tau_z^2 + 1}
 \end{aligned}$$

ve böylece normal vektörü

$$\mathbf{N}_{M_3} = \frac{-\tau_z \mathbf{t} - \mathbf{n}}{\sqrt{\tau_z^2 + 1}}$$

olarak ifade edilir.(4.2), (3.16), (4.32), (4.33)ve (4.34) dikkate alınır ve iç çarpımın dağılma özelliği kullanılırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \left\langle \frac{-\tau_z \mathbf{t} - \mathbf{n}}{\sqrt{\tau_z^2 + 1}}, \kappa \tau_z \mathbf{t} + \kappa \mathbf{n} - \tau_z^2 \mathbf{z} \mathbf{b} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{-\tau_z \mathbf{t}}{\sqrt{\tau_z^2 + 1}} + \frac{-\mathbf{n}}{\sqrt{\tau_z^2 + 1}}, \kappa \tau_z \mathbf{t} + \kappa \mathbf{n} - \tau_z^2 \mathbf{z} \mathbf{b} \right\rangle
 \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
L &= \frac{-\kappa\tau^2z^2}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \frac{-\kappa\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \frac{-\tau^3z^3}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\
&+ \frac{-\kappa\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + \frac{-\kappa}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \frac{\tau^2z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \\
&= \frac{-\kappa\tau^2z^2}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} + \frac{-\kappa}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \\
&= \frac{-\kappa\tau^2z^2 - \kappa}{\sqrt{\tau^2z^2+1}}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

ve

$$\begin{aligned}
M &= \left\langle \frac{-\tau z \mathbf{t} - \mathbf{n}}{\sqrt{\tau^2z^2+1}}, -\tau \mathbf{n} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle -\tau z \mathbf{t} - \mathbf{n}, -\tau \mathbf{n} \rangle \\
&= \frac{\tau^2z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \frac{\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\
&= \frac{\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{-\tau z \mathbf{t} - \mathbf{n}}{\sqrt{\tau^2z^2+1}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{4.40}$$

olarak hesaplanır. Buradan (4.35), (4.36), (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
H_{M_3} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 \cdot \frac{-\kappa\tau^2z^2 - \kappa}{\sqrt{\tau^2z^2+1}} + (1 + \tau^2z^2) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2+1}}}{(1 + \tau^2z^2) \cdot 1 - 0^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{-\kappa\tau^2z^2 - \kappa}{\sqrt{\tau^2z^2+1}}}{1 + \tau^2z^2} \right) \\
&= \frac{-\kappa\tau^2z^2 - \kappa}{2(1 + \tau^2z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{-\kappa(\tau^2z^2 + 1)}{2(1 + \tau^2z^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{\kappa}{2(1 + \tau^2z^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve

$$\begin{aligned}
 K_{M_3} &= \frac{-\kappa\tau^2z^2 - \kappa \cdot 0 - \left(\frac{\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2 + 1}}\right)^2}{(1 + \tau^2z^2) \cdot 1 - 0^2} \\
 &= \frac{-\left(\frac{\tau z}{\sqrt{\tau^2z^2 + 1}}\right)^2}{1 + \tau^2z^2} \\
 &= -\frac{\tau^2z^2}{(1 + \tau^2z^2)^2}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 4.3.1**  $M_3$  regle yüzeyi için dağılma parametresi

$$P_{M_3} \neq 0$$

olduğundan  $M_3$  açılabilir yüzey değildir. Benzer şekilde ortalama eğrilik

$$H_{M_3} \neq 0$$

olduğundan  $M_3$  minimal yüzey değildir. Ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
 \frac{H_{M_3}}{K_{M_3}} &= \frac{-\frac{\kappa}{2(1 + \tau^2z^2)^{1/2}}}{-\frac{\tau^2z^2}{(1 + \tau^2z^2)^2}} \\
 &= \left(-\frac{\kappa}{2(1 + \tau^2z^2)^{1/2}}\right) \cdot \left(-\frac{(1 + \tau^2z^2)^2}{\tau^2z^2}\right) \\
 &= \frac{\kappa(1 + \tau^2z^2)^{3/2}}{2\tau^2z^2}
 \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

**Sonuç 4.3.2** Bir  $\alpha : I \rightarrow E^3$  kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir  $H/H'$  uzay hareketinde  $(\alpha)$  eğrisinin harmonik eğriliği ile harekete iştirak eden birim (asli) normal ve binormal doğrularının  $H'$  üzerinde çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 = \frac{P_b}{P_n} - 1$$

bağıntısı vardır (Hacısalıhoğlu, 1994).

**İspat** (4.16) in pay ve paydası  $k_2^2$  ile bölünürse

$$P_n = \frac{\frac{1}{\tau}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1}$$

olur. Diğer taraftan (4.29) den dolayı

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{P_b}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1} \\ \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1 &= \frac{P_b}{P_n} \\ \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 &= \frac{P_b}{P_n} - 1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir (Hacısalihoglu, 1994). Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.3.3** Bir  $\alpha : I \rightarrow E^3$  kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir  $H/H'$  uzay hareketinde  $(\alpha)$  eğrisinin harmonik eğriliği ile harekete iştirak eden birim (asli) normal ve binormal doğrularının  $H'$  üzerinde çizdikleri regle yüzeylerin dağılma parametreleri göz önüne alınırsa

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit} \iff (\alpha) \text{ eğrisi bir eğilim çizgisi}$$

olarak ifade edilir (Hacısalihoglu, 1994).

**İspat** (4.41) göz önüne alınırsa

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

ise

$$\frac{P_b}{P_n} = \text{sabit}$$

olacağından  $H/H'$  hareketinde esas alınan  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi eğilim çizgisi ise

$$\frac{P_b}{P_n} = \text{sabit}$$

elde edilir. Tersine

$$\frac{P_b}{P_n} = \text{sabit}$$

ise

$$\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 = \text{sabit} \text{ ve } \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

olacağından  $(\alpha)$  eğrisi bir eğilim çizgisi olur (Hacısalihoglu, 1994).

**Örnek 4.3.1**  $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$  ile parametrelendirilen bir  $\alpha(t)$  eğrisi için (Şekil 4.1 ile gösterilmiştir.) Frenet vektörleri

$$\mathbf{t} = \left( \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \right)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}\sqrt{1+4t^2+9t^4}} (-t(2+9t^2), (1-9t^4), 3t(2t^2+1))$$

$$\mathbf{b} = \left( \frac{3t^2}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}, -\frac{3t}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}, \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}} \right)$$

şeklinde verilir.  $\mathbf{b}$  tarafından üretilen regle yüzey (Şekil 4.1 ile gösterilen) aşağıdaki şekilde parametrelendirilir.

$$\Phi_{\mathbf{b}}(t, v) = \left( t + \frac{3vt^2}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}, t^2 - \frac{3vt}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}, t^3 + \frac{v}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}} \right)$$

Bu bilgiler ile öncelikle (3.14) denklemini kullanılırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$E = \frac{729t^{12} + 1782t^{10} + 1620t^8 + 720t^6 + t^4(81v^2 + 180) + t^2(36v^2 + 22) + 1 + 9v^2}{(1 + 9t^2 + 9t^4)^2}$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

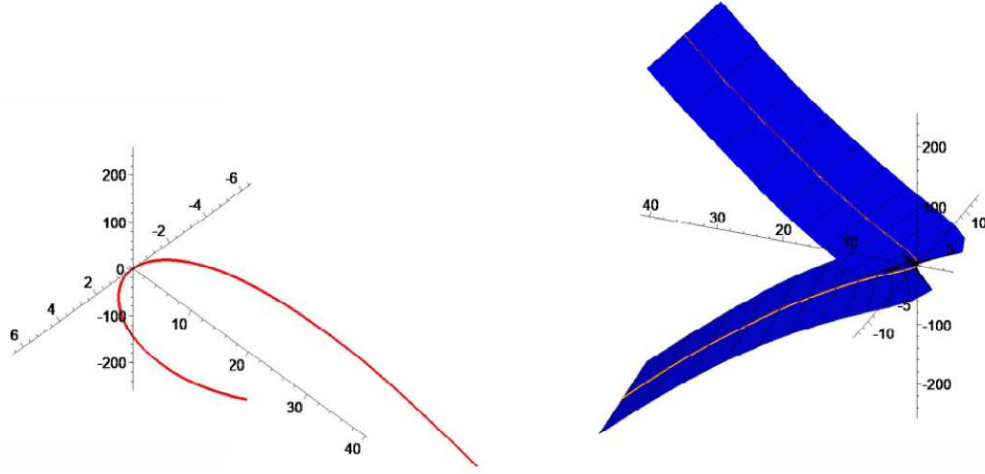
ve

$$L = \frac{-2(81t^8\sqrt{1+9t^2+9t^4} + 486vt^7 + 162t^6\sqrt{1+9t^2+9t^4} + 459vt^5 + 99t^4\sqrt{1+9t^2+9t^4} + 162vt^3 + 18t^2\sqrt{1+9t^2+9t^4} + 27vt + \sqrt{1+9t^2+9t^4} + 9v^2\sqrt{1+9t^2+9t^4})}{(1 + 9t^2 + 9t^4)\sqrt{729t^{12} + 1782t^{10} + 1620t^8 + 720t^6 + t^4(81v^2 + 180) + t^2(36v^2 + 22) + 1 + 9v^2}}$$

$$M = \frac{3(1 + 9t^2 + 9t^4)}{\sqrt{729t^{12} + 1782t^{10} + 1620t^8 + 720t^6 + t^4(81v^2 + 180) + t^2(36v^2 + 22) + 1 + 9v^2}}$$

$$N = 0$$

şeklinde hesaplanır. Ardından sırasıyla dağılma parametresi, striksiyon çizgisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği



Şekil 4.1: Eğri ve onun  $\phi_{\mathbf{b}}(t, v)$  yüzeyi

$$P_{\mathbf{b}} = -3t^4 - 3t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\beta_{\mathbf{b}} = (t, t^2, t^3)$$

$$K_{\mathbf{b}} = \frac{9(1 + 9t^2 + 9t^4)^2}{81t^8 + 162t^6 + 99t^4 + 18t^2 + 1 + 9v^2}$$

$$H_{\mathbf{b}} = \frac{-\left((81t^8 + 9v^2 + 162t^6 + 99t^4 + 18t^2 + 1)\left(\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}\right)\right)}{(729t^{12} + 1782t^{10} + 1620t^8 + 720t^6 + 81t^4v^2 + 180t^4 + 36t^2v^2 + 22t^2 + 1 + 9v^2)^{3/2}} \\ + \frac{486t^7v + 459vt^5 + 162vt^3 + 27vt}{(729t^{12} + 1782t^{10} + 1620t^8 + 720t^6 + 81t^4v^2 + 180t^4 + 36t^2v^2 + 22t^2 + 1 + 9v^2)^{3/2}}$$

elde edilir.

#### 4.4 Öklid Uzayında Genel Vektör Alanı Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 4.4.1**  $\phi_4(s, w) = \alpha(s) + w\mathbf{X}(s)$  ile tanımlanan  $M_4$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_4} = \frac{-x_3(x_1\mathbf{k} + x'_2 - x_3\boldsymbol{\tau}) + x_2(x_2\boldsymbol{\tau} + x'_3)}{(x'_1 - x_2\mathbf{k})^2 + (x_1\mathbf{k} + x'_2 - x_3\boldsymbol{\tau})^2 + (x_2\boldsymbol{\tau} + x'_3)^2}$$

$$\beta_{M_4}(s) = \alpha(s) - \frac{(x'_1x_1 - x_1x_2\mathbf{k})\mathbf{t} + (x'_1x_2 - x_2^2\mathbf{k})\mathbf{n} + (x'_1x_3 - x_2x_3\mathbf{k})\mathbf{b}}{(x'_1 - x_2\mathbf{k})^2 + (x_1\mathbf{k} + x'_2 - x_3\boldsymbol{\tau})^2 + (x_2\boldsymbol{\tau} + x'_3)^2}$$

şeklinde verilir.



**İspat** Dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \text{ ve } \mathbf{Z}(s) = \mathbf{X}(s) \quad (4.42)$$

olup (3.2) ve (4.2) göz önüne alınırsa

$$P_{M_4} = -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{X}(s), \mathbf{X}'(s))}{\langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle}$$

$$\mathbf{X}(s) = x_1(s)\mathbf{t}(s) + x_2(s)\mathbf{n}(s) + x_3(s)\mathbf{b}(s) \quad (4.43)$$

olup (3.2) kullanılırsa  $\mathbf{X}(s)$  ifadesinin türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'(s) &= x_1'\mathbf{t} + x_1\mathbf{t}' + x_2'\mathbf{n} + x_2\mathbf{n}' + x_3'\mathbf{b} + x_3\mathbf{b}' \\ &= x_1'\mathbf{t} + x_1(\kappa\mathbf{n}) + x_2'\mathbf{n} + x_2(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + x_3'\mathbf{b} + x_3(-\tau\mathbf{n}) \\ &= (x_1' - x_2\kappa)\mathbf{t} + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)\mathbf{n} + (x_2\tau + x_3')\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.44)$$

şeklinde bulunur.  $X$  birim vektör olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

olup (4.2) göz önüne alınır ve iç çarpımın lineerliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle &= \langle (x_1' - x_2\kappa)\mathbf{t} + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)\mathbf{n} + (x_2\tau + x_3')\mathbf{b}, (x_1' - x_2\kappa)\mathbf{t} \\ &\quad + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)\mathbf{n} + (x_2\tau + x_3')\mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle &= (x_1' - x_2\kappa)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + (x_2\tau + x_3')^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\ &\quad + (x_1' - x_2\kappa)(x_1\kappa + x_2' - x_3\tau) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + (x_1' - x_2\kappa)(x_2\tau + x_3') \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ &\quad + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)(x_2\tau + x_3') \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)(x_1' - x_2\kappa) \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\ &\quad + (x_2\tau + x_3')(x_1' - x_2\kappa) \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle + (x_2\tau + x_3')(x_1\kappa + x_2' - x_3\tau) \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &= (x_1' - x_2\kappa)^2 + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)^2 + (x_2\tau + x_3')^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

(4.2), (4.43), (4.44) ve (4.45) dikkate alınırsa dağılma parametresi

$$\begin{aligned} P_{M_4} &= \frac{-\det(\mathbf{t}, x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n} + x_3\mathbf{b}, (x_1' - x_2\kappa)\mathbf{t} + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)\mathbf{n} + (x_2\tau + x_3')\mathbf{b})}{\langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n} + x_3\mathbf{b}, (x_1' - x_2\kappa)\mathbf{t} + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)\mathbf{n} + (x_2\tau + x_3')\mathbf{b} \rangle}{(x_1' - x_2\kappa)^2 + (x_1\kappa + x_2' - x_3\tau)^2 + (x_2\tau + x_3')^2} \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
P_{M_4} &= \frac{\langle -x_3 \mathbf{n} + x_2 \mathbf{b}, (x'_1 - x_2 \kappa) \mathbf{t} + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau) \mathbf{n} + (x_2 \tau + x'_3) \mathbf{b} \rangle}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2} \\
&= \frac{-x_3 (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau) \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + x_2 (x_2 \tau + x'_3) \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - x_3 (x'_1 - x_2 \kappa) \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2} \\
&\quad + \frac{-x_3 (x_2 \tau + x'_3) \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + x_2 (x'_1 - x_2 \kappa) \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle + x_2 (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau) \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2} \\
&= \frac{-x_3 (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau) + x_2 (x_2 \tau + x'_3)}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilip (4.2), (4.42), (4.45) ve (3.2) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta_{M_4}(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, (x'_1 - x_2 \kappa) \mathbf{t} + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau) \mathbf{n} + (x_2 \tau + x'_3) \mathbf{b} \rangle (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b})}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2} \\
&= \alpha(s) - \frac{1}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2} [(x'_1 - x_2 \kappa) \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \\
&\quad (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + (x_2 \tau + x'_3) \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b})] \\
&= \alpha(s) - \frac{(x'_1 - x_2 \kappa)}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2} (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b}) \\
&= \alpha(s) - \frac{(x'_1 x_1 - x_1 x_2 \kappa) \mathbf{t} + (x'_1 x_2 - x_2^2 \kappa) \mathbf{n} + (x'_1 x_3 - x_2 x_3 \kappa) \mathbf{b}}{(x'_1 - x_2 \kappa)^2 + (x_1 \kappa + x'_2 - x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau + x'_3)^2}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

**Teorem 4.4.2**  $\phi_4(s, w) = \alpha(s) + w \mathbf{X}(s)$  ile tanımlanan  $M_4$  yüzeyi için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
H_{M_4} &= \frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - B\kappa) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - C\tau) + (Ax_2 - Bx_1)(B\tau + C')}{2 \left[ ((Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2)^{1/2} ((A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2) \right]} \\
&\quad - \frac{(2(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3))(x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)')}{2 \left[ ((Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2)^{1/2} ((A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2) \right]} \\
K_{M_4} &= \frac{[x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)']^2}{\left[ (Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2 \right] \left[ (A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2 \right]}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada

$$X \cdot = \frac{dX}{dw} \quad \text{ve} \quad X' = \frac{dX}{ds}$$

olarak verilir.

### İspat

$$\phi_4(s, w) = \alpha(s) + w\mathbf{X}(s)$$

ile tanımlanan  $M_4$  regle yüzey denkleminin,  $s$  ve  $z$  ye göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri alınır ve (3.2), (4.44) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \phi_{4s} &= \mathbf{t} + w\mathbf{X}'(s) \\ &= \mathbf{t} + w[(x'_1 - x_2\kappa)\mathbf{t} + (x_1\kappa + x'_2 - x_3\tau)\mathbf{n} + (x_2\tau + x'_3)\mathbf{b}] \\ &= [w(x'_1 - x_2\kappa) + 1]\mathbf{t} + w(x_1\kappa + x'_2 - x_3\tau)\mathbf{n} + w(x_2\tau + x'_3)\mathbf{b} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\begin{aligned} A &= [w(x'_1 - x_2\kappa) + 1] \\ B &= w(x_1\kappa + x'_2 - x_3\tau) \\ C &= w(x_2\tau + x'_3) \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$\phi_{4s} = A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b} \quad (4.46)$$

şeklinde bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} \phi_{4w} &= \mathbf{X}(s) \\ &= x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n} + x_3\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.47)$$

olarak ifade edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (3.2) göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \phi_{4ss} &= (A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b})' \\ &= A'\mathbf{t} + A\mathbf{t}' + B'\mathbf{n} + B\mathbf{n}' + C'\mathbf{b} + C\mathbf{b}' \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} \phi_{4ss} &= A'\mathbf{t} + A(\kappa\mathbf{n}) + B'\mathbf{n} + B(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + C'\mathbf{b} + C(-\tau\mathbf{n}) \\ &= (A' - B\kappa)\mathbf{t} + (A\kappa + B' - C\tau)\mathbf{n} + (B\tau + C')\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.48)$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_{4sw} &= (A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b})' \\ &= A'\mathbf{t} + B'\mathbf{n} + C'\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
 \phi_{4ww} &= \mathbf{X}(s) \\
 &= (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b}) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

olarak bulunur. (4.2), (4.46) ve (4.47) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \phi_{4s}, \phi_{4s} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{At} + \mathbf{Bn} + \mathbf{Cb}, \mathbf{At} + \mathbf{Bn} + \mathbf{Cb} \rangle \\
 &= A^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + B^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + C^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= A^2 + B^2 + C^2
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

ve

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \phi_{4s}, \phi_{4w} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{At} + \mathbf{Bn} + \mathbf{Cb}, x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b} \rangle \\
 &= Ax_1 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + Ax_2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + Ax_3 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + Bx_1 \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + Bx_2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\
 &\quad + Bx_3 \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + Cx_1 \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle + Cx_2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle + Cx_3 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
 G &= \langle \phi_{4w}, \phi_{4w} \rangle \\
 &= \langle x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b}, x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b} \rangle \\
 &= x_1^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + x_1 x_2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + x_1 x_3 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + x_1 x_2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + x_2^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\
 &\quad + x_2 x_3 \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + x_1 x_3 \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle + x_2 x_3 \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle + x_3^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \\
 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

olarak bulunur. (3.15), (4.11) dikkate alınırsa  $M_4$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
 \phi_{4s} \wedge \phi_{4w} &= (\mathbf{At} + \mathbf{Bn} + \mathbf{Cb}) \wedge (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n} + x_3 \mathbf{b}) \\
 &= \mathbf{At} \wedge x_1 \mathbf{t} + \mathbf{Bn} \wedge x_1 \mathbf{t} + \mathbf{Cb} \wedge x_1 \mathbf{t} + \mathbf{At} \wedge x_2 \mathbf{n} + \mathbf{Bn} \wedge x_2 \mathbf{n} \\
 &\quad + \mathbf{Cb} \wedge x_2 \mathbf{n} + \mathbf{At} \wedge x_3 \mathbf{b} + \mathbf{Bn} \wedge x_3 \mathbf{b} + \mathbf{Cb} \wedge x_3 \mathbf{b} \\
 &= -Bx_1 \mathbf{b} + Cx_1 \mathbf{n} + Ax_2 \mathbf{b} - Cx_2 \mathbf{t} - Ax_3 \mathbf{n} + Bx_3 \mathbf{t} \\
 &= (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (4.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{4s} \wedge \Phi_{4w}\| &= \sqrt{\langle \Phi_{4s} \wedge \Phi_{4w}, \Phi_{4s} \wedge \Phi_{4w} \rangle} \\
&= \langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}, \\
&\quad (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b} \rangle \\
&= \langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t}, (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} \rangle + \langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t}, (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} \rangle \\
&\quad + \langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t}, (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b} \rangle + \langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}, (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}, (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} \rangle + \langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}, (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b} \rangle \\
&\quad + \langle (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}, (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} \rangle + \langle (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}, (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} \rangle \\
&\quad + \langle (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}, (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b} \rangle \\
&= \sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}
\end{aligned}$$

ve böylece normal vektörü

$$\mathbf{N}_{M_4} = \frac{(Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}$$

olarak ifade edilir. (4.2), (3.16), (4.48), (4.49) ve (4.50) dikkate alınır ve iç çarpımın dağılıma özelliği kullanılırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}, \\
&\quad (A' - B\kappa) \mathbf{t} + (A\kappa + B' - C\tau) \mathbf{n} + (B\tau + C') \mathbf{b} \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} ((Bx_3 - Cx_2) (A' - B\kappa) \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + (Bx_3 - Cx_2) (A\kappa + B' - C\tau) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + (Bx_3 - Cx_2) (B\tau + C') \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + (Cx_1 - Ax_3) (A' - B\kappa) \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + (Cx_1 - Ax_3) (A\kappa + B' - C\tau) \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + (Cx_1 - Ax_3) (B\tau + C') \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + (Ax_2 - Bx_1) (A' - B\kappa) \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + (Ax_2 - Bx_1) (A\kappa + B' - C\tau) \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle + (Ax_2 - Bx_1) (B\tau + C') \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle) \\
&= \frac{(Bx_3 - Cx_2) (A' - B\kappa) + (Cx_1 - Ax_3) (A\kappa + B' - C\tau) + (Ax_2 - Bx_1) (B\tau + C')}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ve

$$\begin{aligned}
M &= \left\langle \frac{(Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}, A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b} \right\rangle \\
&= \frac{\langle (Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}, A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b} \rangle}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&= \frac{(Bx_3 - Cx_2)A\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (Cx_1 - Ax_3)B\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + (Ax_2 - Bx_1)C\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&\quad + \frac{(Bx_3 - Cx_2)B\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + (Bx_3 - Cx_2)C\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle + (Cx_1 - Ax_3)C\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&\quad + \frac{(Cx_1 - Ax_3)A\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle + (Ax_2 - Bx_1)A\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle + (Ax_2 - Bx_1)B\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&= \frac{(Bx_3 - Cx_2)A + (Cx_1 - Ax_3)B + (Ax_2 - Bx_1)C}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&= \frac{BAx_3 - CAx_2 + CBx_1 - ABx_3 + ACx_2 - BCx_1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&= \frac{x_3B^2(A/B) + x_2A^2(C/A) + x_1C^2(B/C)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{(Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n} + (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{4.56}$$

olarak hesaplanır. Buradan (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55), (4.56), (3.17) ve (3.18)

dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
 H_{M_4} &= \frac{1. [(Bx_3 - Cx_2)(A' - B\kappa) + (Cx_1 - Ax_3)(A\kappa + B' - C\tau) + (Ax_2 - Bx_1)(B\tau + C')]}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
 &\quad \frac{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 0}{2 \left[ (A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2 \right]} \\
 &\quad + \frac{2. (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3) \cdot \left( \frac{x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)'}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)}{2 \left[ (A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2 \right]} \\
 &= \frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - B\kappa) + (Cx_1 - Ax_3)(A\kappa + B' - C\tau) + (Ax_2 - Bx_1)(B\tau + C')}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
 &\quad \frac{(2(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)) (x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)')}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
 &\quad \frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - B\kappa) + (Cx_1 - Ax_3)(A\kappa + B' - C\tau) + (Ax_2 - Bx_1)(B\tau + C')}{2 \left[ ((Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2)^{1/2} ((A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2) \right]} \\
 &\quad \frac{(2(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)) (x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)')}{2 \left[ ((Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2)^{1/2} ((A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2) \right]}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 K_{M_4} &= \frac{\left[ \frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - B\kappa) + (Cx_1 - Ax_3)(A\kappa + B' - C\tau) + (Ax_2 - Bx_1)(B\tau + C')}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right] \cdot 0}{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \\
 &\quad \frac{\left[ \frac{x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)'}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right]^2}{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2}
 \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
 K_{M_4} &= \frac{- \left[ \frac{x_3 B^2 (A/B) + x_2 A^2 (C/A) + x_1 C^2 (B/C)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right]^2}{(A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \\
 &= \frac{\frac{[x_3 B^2 (A/B) + x_2 A^2 (C/A) + x_1 C^2 (B/C)]^2}{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}{(A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \\
 &= \frac{[x_3 B^2 (A/B) + x_2 A^2 (C/A) + x_1 C^2 (B/C)]^2}{\left[ (Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2 \right] \left[ (A^2 + B^2 + C^2) - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

bulunur.

**Sonuç 4.4.1**  $M_4$  regle yüzeyi için dağılma parametresi

$$P_{M_4} \neq 0$$

olduğundan  $M_4$  açılabilir yüzey değildir. Benzer şekilde ortalama eğrilik

$$H_{M_4} \neq 0$$

olduğundan  $M_4$  minimal yüzey değildir.



## 5. q-ÇATI VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞAN REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde Öklid uzayında alınan bir uzay eğrisinin  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$  q-çatisinin vektörleri ve herhangi bir  $\mathbf{X}$  vektör alanı kullanılarak regle yüzey tanımlanmış ve bu yüzey üzerinde hesaplamalar yapılmıştır.

### 5.1 Öklid Uzayında Birim (Quasi) Teğet Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 5.1.1**  $\phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$  ile tanımlanan  $M_1$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_1} = 0 \quad \text{ve} \quad \beta_{M_1}(s) = \alpha(s)$$

şeklinde verilir.

**İspat** Dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}(s) = \mathbf{t}(s) \quad (5.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle &= 0 & \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle &= 0 & \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= 1 & \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= 1 & \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} P_{M_1} &= -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}')}{\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle}{\langle \mathbf{t}', \mathbf{t}' \rangle} \\ &= \frac{\langle 0, \mathbf{t}' \rangle}{\langle k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q, k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilir ve (5.1) göz önüne alınırsa

$$\beta_{M_1}(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle}{\|\mathbf{t}'\|^2} \mathbf{t} = \alpha(s)$$

bulunur.

**Teorem 5.1.2**  $\phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$  ile tanımlanan  $M_1$  yüzeyi için ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$H_{M_1} = -\frac{k_3}{2v^2 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \text{ ve } K_{M_1} = 0$$

şeklinde verilir.

### İspat

$$\phi_1(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{t}(s)$$

ile tanımlanan  $M_1$  regle yüzey denkleminin  $s$  ve  $v$  ye göre 1.ve 2. mertebeden kısmi türevleri alınır ve q-çatının türev formülünün

$$\mathbf{t}' = k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q, \mathbf{n}'_q = -k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b}_q \text{ ve } \mathbf{b}'_q = -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q \quad (5.3)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \phi_{1s} &= \mathbf{t} + v'\mathbf{t} + \mathbf{t}'v \\ &= \mathbf{t} + vk_1\mathbf{n}_q + vk_2\mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklinde bulunur. Benzer olarak

$$\phi_{1v} = \mathbf{t} \quad (5.5)$$

elde edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (3.5) ve (5.3) olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \phi_{1ss} &= \mathbf{t}' + v(k_1\mathbf{n}'_q + k_2\mathbf{b}'_q) \\ &= k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q + v(k_1(-k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b}_q) + k_2(-k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q)) \\ &= k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q - k_1^2\mathbf{t}v + k_1k_3\mathbf{b}_qv - k_2^2\mathbf{t}v - k_2k_3\mathbf{n}_qv \\ &= (-k_1^2v - k_2^2v)\mathbf{t} + (k_1 - k_2k_3v)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_1k_3v)\mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.6)$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \phi_{1sv} &= (\mathbf{t} + vk_1\mathbf{n}_q + vk_2\mathbf{b}_q)_v \\ &= 0 + v'k_1\mathbf{n}_q + v'k_2\mathbf{b}_q \\ &= k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde bulunur. Benzer olarak

$$\phi_{1vv} = 0 \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.2), (5.4) ve (5.5) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları

hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_{1s}, \phi_{1s} \rangle \\
&= \langle \mathbf{t} + vk_1 \mathbf{n}_q + vk_2 \mathbf{b}_q, \mathbf{t} + vk_1 \mathbf{n}_q + vk_2 \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{t}, vk_1 \mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{t}, vk_2 \mathbf{b}_q \rangle + \langle vk_1 \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + \langle vk_1 \mathbf{n}_q, vk_1 \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle vk_1 \mathbf{n}_q, vk_2 \mathbf{b}_q \rangle + \langle vk_2 \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle + \langle vk_2 \mathbf{b}_q, vk_1 \mathbf{n}_q \rangle + \langle vk_2 \mathbf{b}_q, vk_2 \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + v^2 k_1^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + v^2 k_2^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle \\
&= 1 + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
F &= \langle \phi_{1s}, \phi_{1v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{t} + vk_1 \mathbf{n}_q + vk_2 \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle \\
&= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + vk_1 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + vk_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.10}$$

ve

$$\begin{aligned}
G &= \langle \phi_{1v}, \phi_{1v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.11}$$

olarak bulunur. Daha sonra yüzeyin normali hesaplanarak  $L$ ,  $M$  ve  $N$  hesapları yapılır. (3.15) dikkate alınırsa  $M_1$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} \wedge \mathbf{t} &= \mathbf{0} & \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q &= \mathbf{0} & \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q &= \mathbf{0} \\
\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q &= \mathbf{t} & \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q &= \mathbf{b}_q & \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t} &= \mathbf{n}_q
\end{aligned} \tag{5.12}$$

(5.4) ve (5.5) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{1s} \wedge \phi_{1v} &= (\mathbf{t} + vk_1 \mathbf{n}_q + vk_2 \mathbf{b}_q) \wedge \mathbf{t} \\
&= \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} + vk_1 \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t} + vk_2 \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t} \\
&= vk_2 \mathbf{n}_q - vk_1 \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (5.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|\phi_{1s} \wedge \phi_{1v}\| &= \sqrt{\langle -vk_1 \mathbf{b}_q + vk_2 \mathbf{n}_q, -vk_1 \mathbf{b}_q + vk_2 \mathbf{n}_q \rangle} \\
&= \sqrt{\langle -vk_1 \mathbf{b}_q, -vk_1 \mathbf{b}_q \rangle + 2 \langle -vk_1 \mathbf{b}_q, vk_2 \mathbf{n}_q \rangle + \langle vk_2 \mathbf{n}_q, vk_2 \mathbf{n}_q \rangle} \\
&= \sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}
\end{aligned}$$

ve böylece normal vektörü

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{M_1} &= \frac{vk_2\mathbf{n}_q - vk_1\mathbf{b}_q}{\sqrt{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}} \\
 &= \frac{v(k_2\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{b}_q)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\
 &= \frac{k_2\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{b}_q}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.16) , (5.2), (5.6), (5.7) ve (5.8) dikkate alınırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \left\langle \frac{k_2\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{b}_q}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, (-k_1^2v - k_2^2v)\mathbf{t} + (k_1 - k_2k_3v)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_1k_3v)\mathbf{b}_q \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \langle k_2\mathbf{n}_q - k_1\mathbf{b}_q, (-k_1^2v - k_2^2v)\mathbf{t} + (k_1 - k_2k_3v)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_1k_3v)\mathbf{b}_q \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} [\langle k_2\mathbf{n}_q, (-k_1^2v - k_2^2v)\mathbf{t} \rangle + \langle k_2\mathbf{n}_q, (k_1 - k_2k_3v)\mathbf{n}_q \rangle \\
 &\quad + \langle k_2\mathbf{n}_q, (k_2 + k_1k_3v)\mathbf{b}_q \rangle + \langle -k_1\mathbf{b}_q, (-k_1^2v - k_2^2v)\mathbf{t} \rangle \\
 &\quad + \langle -k_1\mathbf{b}_q, (k_1 - k_2k_3v)\mathbf{n}_q \rangle + \langle -k_1\mathbf{b}_q, (k_2 + k_1k_3v)\mathbf{b}_q \rangle]
 \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} [k_2(-k_1^2v - k_2^2v) \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle + k_2(k_1 - k_2k_3v) \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle \\
 &\quad + k_2(k_2 + k_1k_3v) \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle - k_1(-k_1^2v - k_2^2v) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle \\
 &\quad - k_1(k_1 - k_2k_3v) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle - k_1(k_2 + k_1k_3v) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle] \\
 &= \frac{k_1k_2 - k_2^2k_3v - k_1k_2 - k_1^2k_3v}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \tag{5.13} \\
 &= \frac{-k_3v(k_1^2 + k_2^2)}{(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}} \\
 &= -k_3v(k_1^2 + k_2^2)^{-1/2}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
M &= \left\langle \frac{k_2 \mathbf{n}_q - k_1 \mathbf{b}_q}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \langle k_2 \mathbf{n}_q - k_1 \mathbf{b}_q, k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} (k_1 k_2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_2^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle - k_1^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle - k_1 k_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \\
&= \frac{k_1 k_2 - k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{k_2 \mathbf{n}_q - k_1 \mathbf{b}_q}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{5.15}$$

olur. Buradan (5.9), (5.10), (5.11), (5.13), (5.14), (5.15), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
H_{M_1} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 \left( -k_3 v (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2} \right) + (1 + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2) 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0}{(1 + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2) \cdot 1 - 1^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{-k_3 v (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2}}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2} \right] \\
&= \frac{-k_3 v (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2}}{2v^2 (k_1^2 + k_2^2)} \\
&= -\frac{k_3}{2v^2 (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

ve

$$K_{M_1} = \frac{(-k_3 v (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2}) \cdot 0 - 0^2}{(1 + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2) \cdot 1 - 1^2} = 0$$

olarak elde edilir.

**Örnek 5 1.1**  $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 4t)$  ile parametrelendirilen bir  $\alpha(t)$  eğrisi için (Şekil

5.1 ile gösterilen) izdüşüm vektörü  $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$  olan  $z$  eksen yönündeki q-çatı vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \left( \frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, -\frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right) \\ \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z &= \left( -\frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, -\frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, 0 \right) \\ \|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z\| &= \frac{\sqrt{17}}{17} \\ \mathbf{n}_q &= (-\sin(t), -\cos(t), 0) \\ \mathbf{b}_q &= \left( \frac{4}{17} \cos(t) \sqrt{17}, -\frac{4}{17} \sin(t) \sqrt{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right)\end{aligned}$$

q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{1}{17} \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= -\frac{4}{17}\end{aligned}$$

şeklinde verilir.  $\mathbf{t}$  tarafından üretilen regle yüzey (Şekil 5.1 ile gösterilen) aşağıdaki şekilde parametrelendirilir.

$$\Phi_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}, v) = \left( \sin(t) + v \frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, \cos(t) - v \frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, 4t + v \frac{4\sqrt{17}}{17} \right)$$

Bu bilgiler ile öncelikle (3.14) denklemini kullanılırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}E &= 17 + \frac{v^2}{17} \\ F &= \sqrt{17} \\ G &= 1\end{aligned}$$

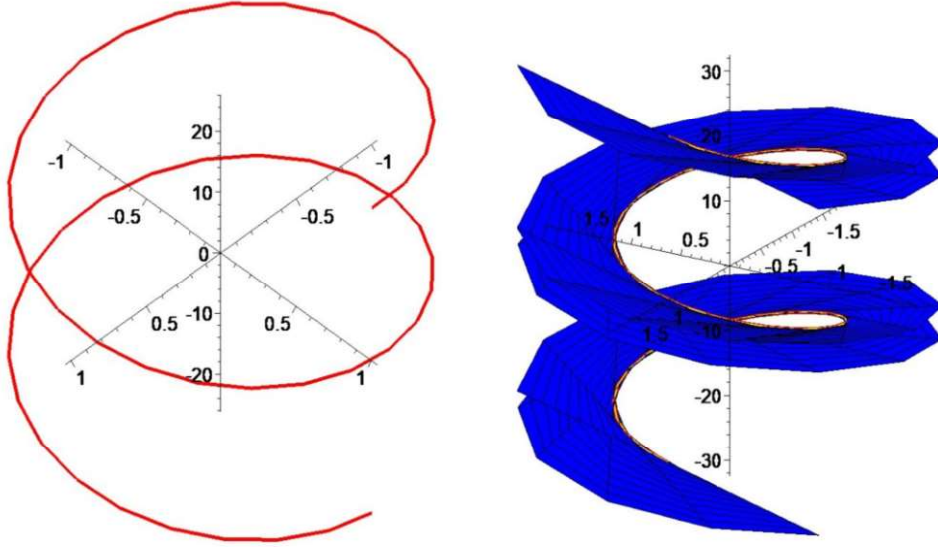
ve

$$\begin{aligned}L &= \frac{4}{17} \\ M &= 0 \\ N &= 0\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Sırasıyla dağılma parametresi, striksiyon çizgisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği

$$P_{\mathbf{t}} = 0 \quad \beta_{\mathbf{t}} = (\sin(t), \cos(t), 4t) \quad K_{\mathbf{t}} = 0 \quad H_{\mathbf{t}} = \pm 2$$

elde edilir.



Şekil 5.1:  $\alpha(t)$  eğrisi ve onun  $\phi_t(t, v)$  yüzeyi

## 5.2 Öklid Uzayında Birim Quasi Normal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 5.2.1**  $\phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}_q(s)$  ile tanımlanan  $M_2$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_2} = \frac{k_3}{k_1^2 + k_3^2} \quad \text{ve} \quad \beta_{M_2}(s) = \alpha(s) + \frac{k_1}{k_1^2 + k_3^2} \mathbf{n}_q$$

şeklinde verilir.

**İspat** Dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}(s) = \mathbf{n}_q(s) \quad (5.16)$$

(5.2) ve (5.3) olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} P_{M_2} &= -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{n}'_q)}{\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}'_q \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q, \mathbf{n}'_q \rangle}{\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}'_q \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{b}_q, -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q \rangle}{\langle -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q, -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q \rangle} \\ &= \frac{k_3}{k_1^2 + k_3^2} \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilir ve (5.16), (5.2) ve (5.3) göz önüne alınır

$$\begin{aligned}
\beta_{M_2}(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}'_q \rangle}{\|\mathbf{n}'_q\|^2} \mathbf{n}_q \\
&= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q \rangle}{\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{n}'_q \rangle} \mathbf{n}_q \\
&= \alpha(s) - \frac{-k_1 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_3 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}{\langle -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q, -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q \rangle} \mathbf{n}_q \\
&= \alpha(s) - \frac{-k_1}{k_1^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - 2k_1 k_3 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle} \mathbf{n}_q \\
&= \alpha(s) + \frac{k_1}{k_1^2 + k_3^2} \mathbf{n}_q
\end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 5.2.2**  $\phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}_q(s)$  ile tanımlanan  $M_2$  yüzeyi için ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
H_{M_2} &= \frac{k_2 (1 - 2k_1 u + (k_1^2 + k_3^2) u^2)}{2 \left( (1 - k_1 u)^2 + k_3^2 u^2 \right)^{3/2}} \\
K_{M_2} &= - \frac{[k_1 k_3 u + (1 - k_1 u) k_3 u]^2}{\left[ (1 - k_1 u)^2 + k_3^2 u^2 \right]^2}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

### İspat

$$\phi_2(s, u) = \alpha(s) + u\mathbf{n}_q(s)$$

ile tanımlanan  $M_2$  regle yüzey denkleminin  $s$  ve  $u$  ya göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevler alınır. (5.3) dikkate alınır

$$\begin{aligned}
\phi_{2s} &= \mathbf{t} + u' \mathbf{n}_q + \mathbf{n}'_q u \\
&= \mathbf{t} + (-k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q) u \\
&= (1 - k_1 u) \mathbf{t} + k_3 u \mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.17}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\phi_{2u} = \mathbf{n}_q \tag{5.18}$$



elde edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (3.5) ve (5.3) olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{2ss} &= ((1 - k_1u)\mathbf{t} + k_3u\mathbf{b}_q)' \\
&= (1 - k_1u)\mathbf{t}' + k_3u\mathbf{b}'_q \\
&= (1 - k_1u)(k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) + k_3u(-k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q) \\
&= -k_2k_3u\mathbf{t} + (k_1 - k_2^2u - k_3^2u)\mathbf{n}_q + (k_2 - k_1k_2u)\mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.19}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\phi_{2su} &= ((1 - k_1u)\mathbf{t} + k_3u\mathbf{b}_q)_u \\
&= -k_1\mathbf{t} + k_3u\mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.20}$$

şeklinde bulunur ve

$$\phi_{2uu} = (\mathbf{n}_q)_u = 0 \tag{5.21}$$

olarak hesaplanır. (5.2), (5.17) ve (5.18) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_{2s}, \phi_{2s} \rangle \\
&= \langle (1 - k_1u)\mathbf{t} + k_3u\mathbf{b}_q, (1 - k_1u)\mathbf{t} + k_3u\mathbf{b}_q \rangle \\
&= (1 - k_1u)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (1 - k_1u)k_3u \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + k_3^2u^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle \\
&= (1 - k_1u)^2 + k_3^2u^2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
F &= \langle \phi_{2s}, \phi_{2u} \rangle \\
&= \langle (1 - k_1u)\mathbf{t} + k_3u\mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle \\
&= (1 - k_1u) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle + k_3u \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
G &= \langle \phi_{2u}, \phi_{2u} \rangle \\
&= \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.24}$$

olarak bulunur. Daha sonra yüzeyin normali hesaplanarak  $L, M$  ve  $N$  hesapları yapılır ve (3.15),

(5.17), (5.18) ve (5.12) dikkate alınırsa  $M_2$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
 \Phi_{2s} \wedge \Phi_{2u} &= [(1 - k_1u) \mathbf{t} + k_3u \mathbf{b}_q] \wedge \mathbf{n}_q \\
 &= (1 - k_1u) \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q + k_3u \mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q \\
 &= (1 - k_1u) \mathbf{b}_q - k_3u \mathbf{t} \\
 &= -k_3u \mathbf{t} + (1 - k_1u) \mathbf{b}_q
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (5.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{2s} \wedge \Phi_{2u}\| &= \sqrt{\langle -k_3u \mathbf{t} + (1 - k_1u) \mathbf{b}_q, -k_3u \mathbf{t} + (1 - k_1u) \mathbf{b}_q \rangle} \\
 &= \sqrt{k_3^2u^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - 2k_3u(1 - k_1u) \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle + (1 - k_1u)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle} \\
 &= \sqrt{(1 - k_1u)^2 + k_3^2u^2}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve böylece normal vektörü

$$\mathbf{N}_{M_2} = \frac{-k_3u \mathbf{t} + (1 - k_1u) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1 - k_1u)^2 + k_3^2u^2}}$$

elde edilir. (3.16) , (5.2), (5.19), (5.20) ve (5.21) dikkate alınırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \left\langle \frac{-k_3u \mathbf{t} + (1 - k_1u) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1 - k_1u)^2 + k_3^2u^2}}, -k_2k_3u \mathbf{t} + (k_1 - k_2^2u - k_3^2u) \mathbf{n}_q + (k_2 - k_1k_2u) \mathbf{b}_q \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1 - k_1u)^2 + k_3^2u^2}} \langle -k_3u \mathbf{t} + (1 - k_1u) \mathbf{b}_q, -k_2k_3u \mathbf{t} \\
 &\quad + (k_1 - k_2^2u - k_3^2u) \mathbf{n}_q + (k_2 - k_1k_2u) \mathbf{b}_q \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1 - k_1u)^2 + k_3^2u^2}} [k_2k_3^2u^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - k_3u(k_1 - k_2^2u - k_3^2u) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle \\
 &\quad - k_3u(k_2 - k_1k_2u) \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle - k_2k_3u(1 - k_1u) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle \\
 &\quad + (1 - k_1u)(k_1 - k_2^2u - k_3^2u) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (1 - k_1u)(k_2 - k_1k_2u) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle]
 \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{k_2 k_3^2 u^2}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}} + \frac{(1-k_1 u)(k_2 - k_1 k_2 u)}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}} \\
 &= \frac{k_2 k_3^2 u^2 + k_2 - k_1 k_2 u - k_1 k_2 u + k_1^2 k_2 u^2}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}} \\
 &= \frac{k_2 - 2k_1 k_2 u + (k_1^2 + k_3^2) k_2 u^2}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
 M &= \left\langle \frac{-k_3 u \mathbf{t} + (1-k_1 u) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}}, -k_1 \mathbf{t} + k_3 u \mathbf{b}_q \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}} \langle -k_3 u \mathbf{t} + (1-k_1 u) \mathbf{b}_q, -k_1 \mathbf{t} + k_3 u \mathbf{b}_q \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}} [k_1 k_3 u \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - k_3^2 u^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle \\
 &\quad - k_1 (1-k_1 u) \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{t} \rangle + (1-k_1 u) k_3 u \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle] \\
 &= \frac{k_1 k_3 u + (1-k_1 u) k_3 u}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{-k_3 u \mathbf{t} + (1-k_1 u) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1-k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{5.27}$$

olur. Buradan (5.22), (5.23), (5.24), (5.25), (5.26), (5.27), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
H_{M_2} &= \frac{1. \frac{k_2 - 2k_1k_2u + (k_1^2 + k_3^2)k_2u^2}{\sqrt{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2}} + [(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2] \cdot 0 - 2.0. \left[ \frac{k_1k_3u + (1-k_1u)k_3u}{\sqrt{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2}} \right]}{2 \left[ \left( (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \cdot 1 \right) - 0^2 \right]} \\
&= \frac{\frac{k_2 - 2k_1k_2u + (k_1^2 + k_3^2)k_2u^2}{\left( (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \right)^{1/2}}}{2 \left( (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \right)} \\
&= \frac{k_2 - 2k_1k_2u + (k_1^2 + k_3^2)k_2u^2}{2 \left( (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \right)^{3/2}} \\
&= \frac{k_2 (1 - 2k_1u + (k_1^2 + k_3^2)u^2)}{2 \left( (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_{M_2} &= \frac{\left[ \frac{k_2 - 2k_1k_2u + (k_1^2 + k_3^2)k_2u^2}{\sqrt{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2}} \right] \cdot 0 - \left[ \frac{k_1k_3u + (1-k_1u)k_3u}{\sqrt{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2}} \right]^2}{\left[ (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \right] \cdot 1 - 0^2} \\
&= \frac{- \left[ \frac{k_1k_3u + (1-k_1u)k_3u}{\sqrt{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2}} \right]^2}{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2} \\
&= \frac{- \frac{[k_1k_3u + (1-k_1u)k_3u]^2}{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2}}{(1-k_1u)^2 + k_3^2u^2} \\
&= \frac{- [k_1k_3u + (1-k_1u)k_3u]^2}{\left[ (1-k_1u)^2 + k_3^2u^2 \right]^2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 5.2.1**  $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 4t)$  ile parametrelendirilen bir  $\alpha(t)$  eğrisi için (Şekil

5.2 ile gösterilen) izdüşüm vektörü  $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$  olan  $z$  eksenî yönündeki q-çatı vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \left( \frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, -\frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right) \\ \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z &= \left( -\frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, -\frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, 0 \right) \\ \|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z\| &= \frac{\sqrt{17}}{17} \\ \mathbf{n}_q &= (-\sin(t), -\cos(t), 0) \\ \mathbf{b}_q &= \left( \frac{4}{17} \cos(t) \sqrt{17}, -\frac{4}{17} \sin(t) \sqrt{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right)\end{aligned}$$

q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{1}{17} \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= -\frac{4}{17}\end{aligned}$$

şeklinde verilir.  $\mathbf{n}_q$  tarafından üretilen regle yüzey (Şekil 5.2 ile gösterilen) aşağıdaki şekilde parametrelendirilir.

$$\Phi_{\mathbf{n}_q}(t, v) = (\sin(t) - v \sin(t), \cos(t) - v \cos(t), 4t)$$

Bu bilgiler ile öncelikle (3.14) denklemini kullanılırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}E &= 17 - 2v + v^2 \\ F &= 0 \\ G &= 1\end{aligned}$$

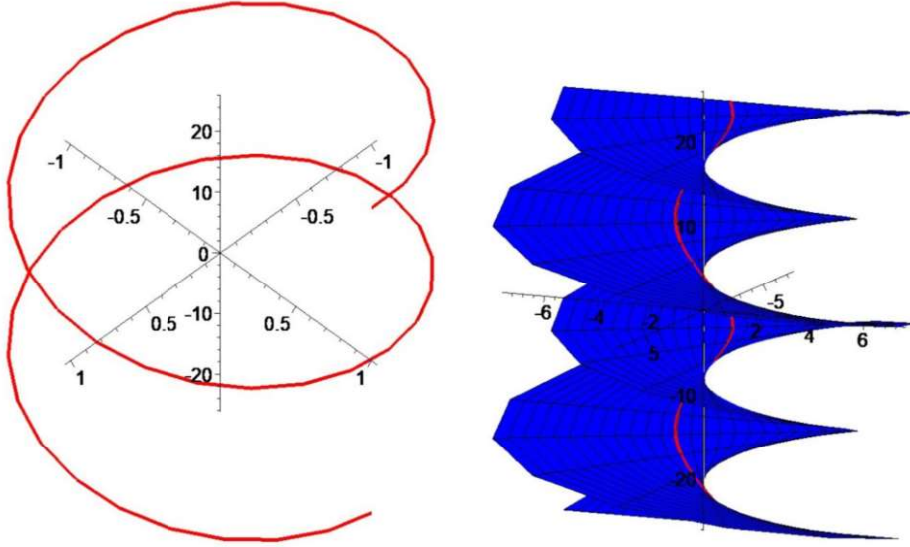
ve

$$\begin{aligned}L &= 0 \\ M &= -\frac{4}{\sqrt{17 - 2v + v^2}} \\ N &= 0\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Sırasıyla dağılma parametresi, striksiyon çizgisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği

$$P_{\mathbf{n}_q} = 4 \quad \beta_{\mathbf{n}_q} = (0, 0, 4t) \quad K_{\mathbf{n}_q} = -\frac{16}{(17 - 2v + v^2)^2} \quad H_{\mathbf{n}_q} = 0$$

elde edilir.



Şekil 5.2:  $\alpha(t)$  eğrisi ve onun  $\phi_{\mathbf{n}_q}(t, v)$  yüzeyi

### 5.3 Öklid Uzayında Birim Quasi Binormal Vektörü Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 5.3.1**  $\phi_3(s, z) = \alpha(s) + z\mathbf{b}_q(s)$  ile tanımlanan  $M_3$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_3} = \frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \quad \text{ve} \quad \beta_{M_3}(s) = \alpha(s) + \frac{k_2}{k_1^2 + k_3^2} \mathbf{b}_q$$

şeklinde verilir.

**İspat** Dağılma parametresi (3.12) ile verilir

$$\alpha' = \mathbf{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}(s) = \mathbf{b}_q(s) \quad (5.28)$$

(5.2) ve (5.3) olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} P_{M_3} &= -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q, \mathbf{b}'_q)}{\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_q \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q, \mathbf{b}'_q \rangle}{\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_q \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{n}_q, -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q \rangle}{\langle -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q, -k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q \rangle} \\ &= \frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilir ve (5.28), (5.2) ve (5.3) göz önüne alınır

$$\begin{aligned}
\beta_{M_3}(s) &= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}'_q \rangle}{\|\mathbf{b}'_q\|^2} \mathbf{b}_q \\
&= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \rangle}{\langle \mathbf{b}'_q, \mathbf{b}'_q \rangle} \mathbf{b}_q \\
&= \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \rangle}{\langle -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q, -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \rangle} \mathbf{b}_q \\
&= \alpha(s) - \frac{-k_2}{\langle -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q, -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \rangle} \mathbf{b}_q \\
&= \alpha(s) + \frac{k_2}{k_1^2 + k_3^2} \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 5.3.2**  $\phi_3(s, z) = \alpha(s) + z \mathbf{b}_q(s)$  ile tanımlanan  $M_3$  yüzeyi için ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
H_{M_3} &= \frac{k_1(-1 + 2k_2 - k_2^2 z^2 - k_3^2 z^2)}{2((k_3^2 z^2) + (k_2 z - 1)^2)^{3/2}} \\
K_{M_3} &= -\frac{(k_3(1 - k_1 z + k_2 z))^2}{((1 - k_2 z)^2 + k_3^2 z^2)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

### İspat

$$\phi_3(s, z) = \alpha(s) + z \mathbf{b}_q(s)$$

ile tanımlanan  $M_3$  regle yüzey denkleminin  $s$  ve  $z$  ye göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevler alınır. (5.3) dikkate alınır

$$\begin{aligned}
\phi_{3s} &= \mathbf{t} + z' \mathbf{b}_q + \mathbf{b}'_q z \\
&= \mathbf{t} + (-k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q) z \\
&= (1 - k_2 z) \mathbf{t} - k_3 z \mathbf{n}_q
\end{aligned} \tag{5.29}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\phi_{3z} = \mathbf{b}_q \tag{5.30}$$

elde edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (3.5) ve (5.3) olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{3ss} &= \left( (1 - k_2z) \mathbf{t} - k_3z \mathbf{n}_q \right)' \\
&= (1 - k_2z) \mathbf{t}' - k_3z \mathbf{n}'_q \\
&= (1 - k_2z) (k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q) - k_3z (-k_1 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{b}_q) \\
&= k_1 k_3 z \mathbf{t} + (k_1 - k_1 k_2 z) \mathbf{n}_q + (k_2 - k_2^2 z - k_3^2 z) \mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.31}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde

$$\phi_{3sz} = \phi_{3zs} = (\mathbf{b}_q)' = -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \tag{5.32}$$

şeklinde bulunur ve

$$\phi_{3zz} = (\mathbf{b}_q)_z = 0 \tag{5.33}$$

olarak hesaplanır. (5.2), (5.29) ve (5.30) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_{3s}, \phi_{3s} \rangle \\
&= \langle (1 - k_2z) \mathbf{t} - k_3z \mathbf{n}_q, (1 - k_2z) \mathbf{t} - k_3z \mathbf{n}_q \rangle \\
&= (1 - k_2z)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_3^2 z^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle - 2k_3z (1 - k_2z) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle \\
&= (1 - k_2z)^2 + k_3^2 z^2
\end{aligned} \tag{5.34}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
F &= \langle \phi_{3s}, \phi_{3z} \rangle \\
&= \langle (1 - k_2z) \mathbf{t} - k_3z \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle \\
&= (1 - k_2z) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle - k_3z \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
G &= \langle \phi_{3z}, \phi_{3z} \rangle \\
&= \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.36}$$

olarak bulunur. Daha sonra yüzeyin normali hesaplanarak  $L, M$  ve  $N$  hesapları yapılır. (3.15),



(5.29), (5.30) ve (5.12) dikkate alınırsa  $M_3$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
 \Phi_{3s} \wedge \Phi_{3z} &= [(1 - k_2z) \mathbf{t} - k_3z \mathbf{n}_q] \wedge \mathbf{b}_q \\
 &= (1 - k_2z) \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q - k_3z \mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q \\
 &= -(1 - k_2z) \mathbf{n}_q - k_3z \mathbf{t} \\
 &= -k_3z \mathbf{t} + (k_2z - 1) \mathbf{n}_q
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (5.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{3s} \wedge \Phi_{3z}\| &= \sqrt{\langle -k_3z \mathbf{t} + (k_2z - 1) \mathbf{n}_q, -k_3z \mathbf{t} + (k_2z - 1) \mathbf{n}_q \rangle} \\
 &= \sqrt{k_3^2 z^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_2z - 1)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle - k_3z(k_2z - 1) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle} \\
 &= \sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve böylece normal vektörü

$$\mathbf{N}_{M_3} = \frac{-k_3z \mathbf{t} + (k_2z - 1) \mathbf{n}_q}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}}$$

elde edilir. (3.16), (5.2), (5.31), (5.32) ve (5.33) dikkate alınırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \left\langle \frac{-k_3z \mathbf{t} + (k_2z - 1) \mathbf{n}_q}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}}, k_1 k_3 z \mathbf{t} + (k_1 - k_1 k_2 z) \mathbf{n}_q + (k_2 - k_2^2 z - k_3^2 z) \mathbf{b}_q \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}} \langle -k_3z \mathbf{t} + (k_2z - 1) \mathbf{n}_q, k_1 k_3 z \mathbf{t} + (k_1 - k_1 k_2 z) \mathbf{n}_q + (k_2 - k_2^2 z - k_3^2 z) \mathbf{b}_q \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}} (\langle -k_3z \mathbf{t}, k_1 k_3 z \mathbf{t} \rangle + \langle -k_3z \mathbf{t}, (k_1 - k_1 k_2 z) \mathbf{n}_q \rangle \\
 &\quad + \langle -k_3z \mathbf{t}, (k_2 - k_2^2 z - k_3^2 z) \mathbf{b}_q \rangle + \langle (k_2z - 1) \mathbf{n}_q, k_1 k_3 z \mathbf{t} \rangle \\
 &\quad + \langle (k_2z - 1) \mathbf{n}_q, (k_1 - k_1 k_2 z) \mathbf{n}_q \rangle + \langle (k_2z - 1) \mathbf{n}_q, (k_2 - k_2^2 z - k_3^2 z) \mathbf{b}_q \rangle) \\
 &= \frac{-k_1 k_3^2 z^2}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}} + \frac{(k_2z - 1)(k_1 - k_1 k_2 z)}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}} \\
 &= \frac{-k_1 k_3^2 z^2}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}} + \frac{k_1 k_2 z - k_1 k_2^2 z^2 - k_1 + k_1 k_2 z}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}} \\
 &= \frac{-k_1 + 2k_1 k_2 - k_1 k_2^2 z^2 - k_1 k_3^2 z^2}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2z - 1)^2}}
 \end{aligned}$$

(5.37)

ve

$$\begin{aligned}
M &= \left\langle \frac{-k_3 z \mathbf{t} + (k_1 z - 1) \mathbf{n}_q}{\sqrt{(1 - k_1 z)^2 + k_3^2 z^2}}, -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - k_1 z)^2 + k_3^2 z^2}} \langle -k_3 z \mathbf{t} + (k_1 z - 1) \mathbf{n}_q, -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - k_1 z)^2 + k_3^2 z^2}} [\langle -k_3 z \mathbf{t}, -k_2 \mathbf{t} \rangle + \langle -k_3 z \mathbf{t}, -k_3 \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle (k_1 z - 1) \mathbf{n}_q, -k_2 \mathbf{t} \rangle + \langle (k_1 z - 1) \mathbf{n}_q, -k_3 \mathbf{n}_q \rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - k_1 z)^2 + k_3^2 z^2}} [k_2 k_3 z \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_3^2 z \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad - k_2 (k_1 z - 1) \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{t} \rangle - k_3 (k_1 z - 1) \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - k_1 z)^2 + k_3^2 z^2}} [k_2 k_3 z - k_3 (k_1 z - 1)] \\
&= \frac{k_2 k_3 z - k_1 k_3 z + k_3}{\sqrt{(1 - k_2 z)^2 + k_3^2 z^2}}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{-k_3 u \mathbf{t} + (1 - k_1 u) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1 - k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{5.39}$$

olur. Buradan (5.34), (5.35), (5.36), (5.37), (5.38), (5.39), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
H_{M_3} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 \cdot \frac{-k_1 + 2k_1 k_2 - k_1 k_2^2 z^2 - k_1 k_3^2 z^2}{\sqrt{k_3^2 z u^2 + (k_2 z - 1)^2}} + \left( (1 - k_2 z)^2 + k_3^2 z^2 \right) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{k_2 k_3 z - k_1 k_3 z + k_3}{\sqrt{(1 - k_2 z)^2 + k_3^2 z^2}}}{\left[ (1 - k_2 z)^2 + k_3^2 z^2 \right] \cdot 1 - 0^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\frac{-k_1 + 2k_1 k_2 - k_1 k_2^2 z^2 - k_1 k_3^2 z^2}{\left( k_3^2 z u^2 + (k_2 z - 1)^2 \right)^{1/2}}}{(1 - k_2 z)^2 + k_3^2 z^2}
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} H_{M_3} &= \frac{-k_1 + 2k_1k_2 - k_1k_2^2z^2 - k_1k_3^2z^2}{2((k_3^2z^2) + (k_2z - 1)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_1(-1 + 2k_2 - k_2^2z^2 - k_3^2z^2)}{2((k_3^2z^2) + (k_2z - 1)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_{M_3} &= \frac{\left[ \frac{-k_1 + 2k_1k_2 - k_1k_2^2z^2 - k_1k_3^2z^2}{\sqrt{k_3^2z^2u^2 + (k_2z - 1)^2}} \right] \cdot 0 - \left[ \frac{k_2k_3z - k_1k_3z + k_3}{\sqrt{(1 - k_2z)^2 + k_3^2z^2}} \right]^2}{\left[ (1 - k_2z)^2 + k_3^2z^2 \right] \cdot 1 - 0^2} \\ &= \frac{- \left[ \frac{k_2k_3z - k_1k_3z + k_3}{\sqrt{(1 - k_2z)^2 + k_3^2z^2}} \right]^2}{(1 - k_2z)^2 + k_3^2z^2} \\ &= \frac{-(k_2k_3z - k_1k_3z + k_3)^2}{(1 - k_2z)^2 + k_3^2z^2} \\ &= \frac{(k_3(1 - k_1z + k_2z))^2}{\left( (1 - k_2z)^2 + k_3^2z^2 \right)^2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 5.3.1**  $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 4t)$  ile parametrelendirilen bir  $\alpha(t)$  eğrisi için (Şekil 5.3 ile gösterilen) izdüşüm vektörü  $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$  olan  $z$  eksenini yöündeki  $q$ -çatı vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \left( \frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, -\frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right) \\ \mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z &= \left( -\frac{1}{17} \sin(t) \sqrt{17}, -\frac{1}{17} \cos(t) \sqrt{17}, 0 \right) \\ \|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}_z\| &= \frac{\sqrt{17}}{17} \\ \mathbf{n}_q &= (-\sin(t), -\cos(t), 0) \\ \mathbf{b}_q &= \left( \frac{4}{17} \cos(t) \sqrt{17}, -\frac{4}{17} \sin(t) \sqrt{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right) \end{aligned}$$

q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \frac{1}{17}$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = -\frac{4}{17}$$

şeklinde verilir.  $\mathbf{b}_q$  tarafından üretilen regle yüzey (Şekil 5.3 ile gösterilen) aşağıdaki şekilde parametrelendirilir.

$$\phi_{\mathbf{b}_q}(t, v) = \left( \sin(t) + v\frac{4\sqrt{17}}{17} \cos(t), \cos(t) - v\frac{4\sqrt{17}}{17} \sin(t), 4t - v\frac{\sqrt{17}}{17} \right)$$

Bu bilgiler ile öncelikle (3.14) denklemi kullanılırsa birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$E = 17 + \frac{16v^2}{17}$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

ve

$$L = -\frac{\sqrt{17}(289 + 16v^2)}{17\sqrt{4913 + 272v^2}}$$

$$M = -\frac{68}{\sqrt{4913 + 272v^2}}$$

$$N = 0$$

şeklinde hesaplanır. Sırasıyla dağılma parametresi, striksiyon çizgisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği

$$P_{\mathbf{b}_q} = \frac{17}{4} \quad \beta_{\mathbf{b}_q} = (\sin(t), \cos(t), 4t) \quad K_{\mathbf{b}_q} = \frac{-4624}{(289 + 16v^2)^2} \quad H_{\mathbf{b}_q} = \frac{-\sqrt{17}}{2\sqrt{4913 + 272v^2}}$$

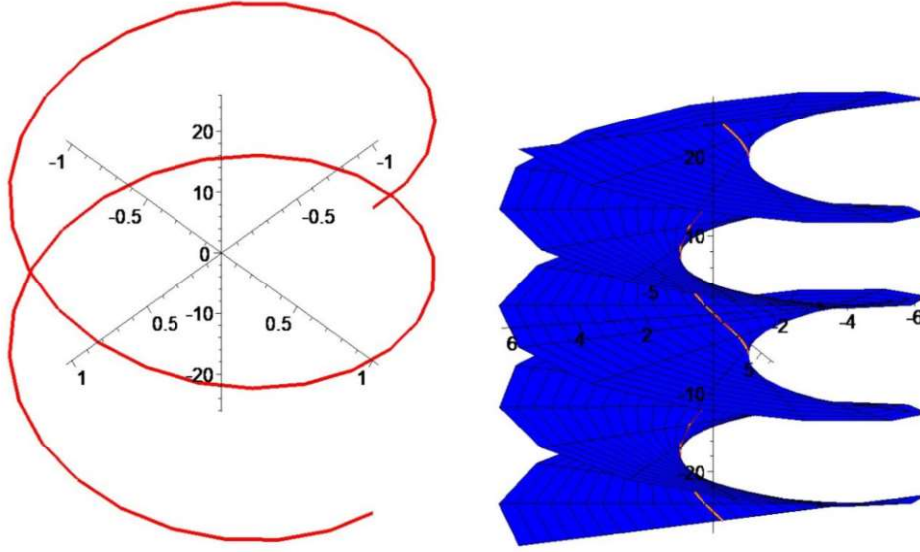
elde edilir.

## 5.4 Öklid Uzayında (Quasi çatıyla verilen) Genel Vektör Alanı Tarafından Oluşan Regle Yüzeyler

**Teorem 5.4.1**  $\phi_4(s, w) = \alpha(s) + w\mathbf{X}(s)$  ile tanımlanan  $M_4$  yüzeyi için dağılma parametresi ve striksiyon çizgisi

$$P_{M_4} = \frac{-k_1x_1x_3 - x_3x_2' + k_3x_3^2 + k_1x_1x_2 + k_3x_2^2 + x_2x_3'}{(x_1' - k_1x_2 - k_2x_3)^2 + (k_1x_1 + x_2' - k_3x_3)^2 + (k_2x_1 + k_3x_2 + x_3')^2}$$

$$\beta_{M_4}(s) = \alpha(s) - \frac{(x_1x_1' - k_1x_1x_2 - k_2x_1x_3)\mathbf{t} + (x_2x_1' - k_1x_2^2 - k_2x_2x_3)\mathbf{n}_q + (x_3x_1' - k_1x_2x_3 - k_2x_3^2)\mathbf{b}_q}{(x_1' - k_1x_2 - k_2x_3)^2 + (k_1x_1 + x_2' - k_3x_3)^2 + (k_2x_1 + k_3x_2 + x_3')^2}$$



Şekil 5.3:  $\alpha(t)$  eğrisi ve onun  $\phi_{\mathbf{b}_q}(t, v)$  yüzeyi

şeklinde verilir.

**İspat** Dağılma parametresi (3.12) ile verilip

$$\alpha' = \mathbf{t} \text{ ve } \mathbf{Z}(s) = \mathbf{X}'(s) \quad (5.40)$$

(5.2) ve (5.3) olduğu dikkate alınır

$$\mathbf{X}(s) = x_1(s)\mathbf{t}(s) + x_2(s)\mathbf{n}_q(s) + x_3(s)\mathbf{b}_q(s) \quad (5.41)$$

olup

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'(s) &= x_1'\mathbf{t} + x_1\mathbf{t}' + x_2'\mathbf{n}_q + x_2\mathbf{n}_q' + x_3'\mathbf{b}_q + x_3\mathbf{b}_q' \\ &= x_1'\mathbf{t} + x_1(k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) + x_2'\mathbf{n}_q + x_2(-k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b}_q) + x_3'\mathbf{b}_q + x_3(-k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q) \\ &= x_1'\mathbf{t} + x_1k_1\mathbf{n}_q + x_1k_2\mathbf{b}_q + x_2'\mathbf{n}_q - x_2k_1\mathbf{t} + x_2k_3\mathbf{b}_q + x_3'\mathbf{b}_q - x_3k_2\mathbf{t} - x_3k_3\mathbf{n}_q \\ &= (x_1' - x_2k_1 - x_3k_2)\mathbf{t} + (x_1k_1 + x_2' - x_3k_3)\mathbf{n}_q + (x_1k_2 + x_2k_3 + x_3')\mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.42)$$

şeklinde hesaplanır ve buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle &= \langle (x_1' - x_2k_1 - x_3k_2)\mathbf{t} + (x_1k_1 + x_2' - x_3k_3)\mathbf{n}_q + (x_1k_2 + x_2k_3 + x_3')\mathbf{b}_q, \\ &\quad (x_1' - x_2k_1 - x_3k_2)\mathbf{t} + (x_1k_1 + x_2' - x_3k_3)\mathbf{n}_q + (x_1k_2 + x_2k_3 + x_3')\mathbf{b}_q \rangle \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle &= [\langle (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t}, (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t}, (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t}, (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q \rangle \\
&\quad + \langle (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q, (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q, (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q, (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q \rangle \\
&\quad + \langle (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q, (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q, (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q, (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q \rangle] \\
&= (x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3)^2 + (k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3)^2 + (k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3)^2
\end{aligned} \tag{5.43}$$

elde edilir. (5.41) denklemini göz önüne alınırsa  $X(s)$  birim vektör olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{5.44}$$

olarak verilir ve

$$\begin{aligned}
P_{M_4} &= -\frac{\det(\mathbf{t}, \mathbf{X}(s), \mathbf{X}'(s))}{\langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle} \\
&= \frac{-\det(\mathbf{t}, x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n}_q + x_3\mathbf{b}_q, \mathbf{X}'(s))}{\langle \mathbf{X}'(s), \mathbf{X}'(s) \rangle} \\
&= \frac{\langle \mathbf{t} \wedge x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n}_q + x_3\mathbf{b}_q, \mathbf{X}'(s) \rangle}{(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3)^2 + (k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3)^2 + (k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3)^2} \\
&= \frac{\langle -x_3\mathbf{n}_q + x_2\mathbf{b}_q, (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t} + (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q + (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q \rangle}{(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3)^2 + (k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3)^2 + (k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3)^2} \\
&= \frac{1}{(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3)^2 + (k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3)^2 + (k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3)^2} (\langle -x_3\mathbf{n}_q, (x'_1 - x_2k_1 - x_3k_2) \mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle -x_3\mathbf{n}_q, (x_1k_1 + x'_2 - x_3k_3) \mathbf{n}_q \rangle + \langle -x_3\mathbf{n}_q, (x_1k_2 + x_2k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q \rangle)
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
& + \langle x_2 \mathbf{b}_q, (x'_1 - x_2 k_1 - x_3 k_2) \mathbf{t} \rangle + \langle x_2 \mathbf{b}_q, (x_1 k_1 + x'_2 - x_3 k_3) \mathbf{n}_q \rangle \\
& + \langle x_2 \mathbf{b}_q, (x_1 k_2 + x_2 k_3 + x'_3) \mathbf{b}_q \rangle ) \\
= & \frac{-k_1 x_1 x_3 - x_3 x'_2 + k_3 x_3^2 + k_1 x_1 x_2 + k_3 x_2^2 + x_2 x'_3}{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)^2 + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3)^2 + (k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3)^2}
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Striksiyon çizgisi (3.13) ile verilir ve (5.40), (5.2) ve (5.3) göz önüne

alınırsa

$$\beta_{M_4}(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{X}'(s) \rangle}{\|\mathbf{X}'(s)\|^2} X(s)$$

olarak ifade edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\beta_{M_4}(s) &= \alpha(s) - \left[ \frac{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3) \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}_q \rangle}{\|\mathbf{X}'(s)\|^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3) \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}_q \rangle}{\|\mathbf{X}'(s)\|^2} \right] X(s) \\
&= \alpha(s) - \frac{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)}{\|\mathbf{X}'(s)\|^2} X(s) \\
&= \alpha(s) - \frac{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3) (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n}_q + x_3 \mathbf{b}_q)}{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)^2 + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3)^2 + (k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3)^2} \\
&= \alpha(s) - \left[ \frac{x_1 x'_1 \mathbf{t} + x_2 x'_1 \mathbf{n}_q + x_3 x'_1 \mathbf{b}_q - k_1 x_1 x_2 \mathbf{t} - k_1 x_2^2 \mathbf{n}_q}{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)^2 + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3)^2 + (k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3)^2} \right. \\
&\quad \left. \frac{-k_1 x_2 x_3 \mathbf{b}_q - k_2 x_1 x_3 \mathbf{t} - k_2 x_2 x_3 \mathbf{n}_q - k_2 x_3^2 \mathbf{b}_q}{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)^2 + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3)^2 + (k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3)^2} \right] \\
&= \alpha(s) - \left[ \frac{(x_1 x'_1 - k_1 x_1 x_2 - k_2 x_1 x_3) \mathbf{t} + (x_2 x'_1 - k_1 x_2^2 - k_2 x_2 x_3) \mathbf{n}_q}{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)^2 + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3)^2 + (k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x_3 x'_1 - k_1 x_2 x_3 - k_2 x_3^2) \mathbf{b}_q}{(x'_1 - k_1 x_2 - k_2 x_3)^2 + (k_1 x_1 + x'_2 - k_3 x_3)^2 + (k_2 x_1 + k_3 x_2 + x'_3)^2} \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 5.4.2**  $\phi_4(s, w) = \alpha(s) + w \mathbf{X}(s)$  ile tanımlanan  $M_4$  yüzeyi için ortalama eğriliği ve

Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
H_{M_4} &= \frac{[(Bx_3 - Cx_2)(A' - Bk_1 - Ck_2) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - Ck_3) + (Ax_2 - Bx_1)(Ak_2 - Bk_3 + C')]}{2(A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3) \left( \sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2} \right)} \\
&\quad - \frac{2(AB^2x_1x_3(A/B) + A^3x_1x_2(C/A) + AC^2x_1^2(B/C) + B^3x_2x_3(A/B))}{2(A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3) \left( \sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2} \right)} \\
&\quad + \frac{2(BA^2x_2^2(C/A) + BC^2x_1x_2(B/C) + CB^2x_3^2(A/B) + CA^2x_2x_3(C/A) + C^3x_1x_3(B/C))}{2(A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3) \left( \sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2} \right)} \\
K_{M_4} &= - \frac{\left( \frac{x_3B^2(A/B) + x_2A^2(C/A) + x_1C^2(B/C)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)^2}{A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada

$$X \cdot = \frac{dX}{dw} \quad \text{ve} \quad X' = \frac{dX}{ds}$$

olarak tanımlanmıştır.

### İspat

$$\phi_4(s, w) = \alpha(s) + w\mathbf{X}(s)$$

ile tanımlanan  $M_4$  regle yüzey denkleminin  $s$  ve  $w$  ye göre 1. ve 2. mertebeden kısmi türevler alınır. (5.3) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\phi_{4s} &= \mathbf{t} + wX'(s) \\
&= \mathbf{t} + w \left[ (x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3) \mathbf{t} + (k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3) \mathbf{n}_q + (k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3) \mathbf{b}_q \right] \\
&= [w(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3) + 1] \mathbf{t} + w(k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3) \mathbf{n}_q + w(k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3) \mathbf{b}_q \\
&= A\mathbf{t} + B\mathbf{n}_q + C\mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.45}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\phi_{4w} &= \mathbf{0} + X(s) \\
&= x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n}_q + x_3\mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.46}$$

elde edilir. İkinci mertebeden kısmi türevler ise (5.2) ve (5.3) göz önüne alınırsa

$$\phi_{4ss} = \left[ [w(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3) + 1] \mathbf{t} + w(k_1x_1 + x'_2 - k_3x_3) \mathbf{n}_q + w(k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3) \mathbf{b}_q \right]' \tag{5.47}$$



olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + w(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3) \\
 B &= 1 + w(x'_1 - k_1x_2 - k_2x_3) \\
 C &= w(k_2x_1 + k_3x_2 + x'_3)
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

şeklinde tanımlanır ve (5.47) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \phi_{4ss} &= \mathbf{A}\mathbf{t}' + \mathbf{A}'\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{n}'_q + \mathbf{B}'\mathbf{n}_q + \mathbf{C}\mathbf{b}'_q + \mathbf{C}'\mathbf{b}_q \\
 &= A(k_1\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) + \mathbf{A}'\mathbf{t} + B(-k_1\mathbf{t} + k_3\mathbf{b}_q) + \mathbf{B}'\mathbf{n}_q + C(-k_2\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q) + \mathbf{C}'\mathbf{b}_q \\
 &= Ak_1\mathbf{n}_q + Ak_2\mathbf{b}_q + \mathbf{A}'\mathbf{t} - Bk_1\mathbf{t} + Bk_3\mathbf{b}_q + \mathbf{B}'\mathbf{n}_q - Ck_2\mathbf{t} - Ck_3\mathbf{n}_q + \mathbf{C}'\mathbf{b}_q \\
 &= (\mathbf{A}' - Bk_1 - Ck_2)\mathbf{t} + (Ak_1 + \mathbf{B}' - Ck_3)\mathbf{n}_q + (Ak_2 - Bk_3 + \mathbf{C}')\mathbf{b}_q
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

şeklinde bulunur benzer olarak

$$\begin{aligned}
 \phi_{4sw} &= [\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{n}_q + \mathbf{C}\mathbf{b}_q]' \\
 &= \mathbf{A}'\mathbf{t} + \mathbf{B}'\mathbf{n}_q + \mathbf{C}'\mathbf{b}_q
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

olarak bulunur benzer şekilde

$$\phi_{4ww} = (x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n}_q + x_3\mathbf{b}_q)' = 0 \tag{5.51}$$

olarak hesaplanır. (5.2), (5.45) ve (5.46) denklemleri kullanılarak  $E, F$  ve  $G$  birinci temel form katsayıları hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \phi_{4s}, \phi_{4s} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{n}_q + \mathbf{C}\mathbf{b}_q, \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{n}_q + \mathbf{C}\mathbf{b}_q \rangle \\
 &= \langle \mathbf{A}\mathbf{t}, \mathbf{A}\mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{t}, \mathbf{B}\mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{t}, \mathbf{C}\mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{n}_q, \mathbf{A}\mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{n}_q, \mathbf{B}\mathbf{n}_q \rangle \\
 &\quad + \langle \mathbf{B}\mathbf{n}_q, \mathbf{C}\mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{C}\mathbf{b}_q, \mathbf{A}\mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{C}\mathbf{b}_q, \mathbf{B}\mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{C}\mathbf{b}_q, \mathbf{C}\mathbf{b}_q \rangle \\
 &= A^2 + B^2 + C^2
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \phi_{4s}, \phi_{4w} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{n}_q + \mathbf{C}\mathbf{b}_q, x_1\mathbf{t} + x_2\mathbf{n}_q + x_3\mathbf{b}_q \rangle \\
 &= \langle \mathbf{A}\mathbf{t}, x_1\mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{t}, x_2\mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{t}, x_3\mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{n}_q, x_1\mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{n}_q, x_2\mathbf{n}_q \rangle \\
 &\quad + \langle \mathbf{B}\mathbf{n}_q, x_3\mathbf{b}_q \rangle + \langle \mathbf{C}\mathbf{b}_q, x_1\mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{C}\mathbf{b}_q, x_2\mathbf{n}_q \rangle + \langle \mathbf{C}\mathbf{b}_q, x_3\mathbf{b}_q \rangle \\
 &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

ve

$$\begin{aligned}
G &= \langle \phi_{4w}, \phi_{4w} \rangle \\
&= \langle x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n}_q + x_3 \mathbf{b}_q, x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n}_q + x_3 \mathbf{b}_q \rangle \\
&= \langle x_1 \mathbf{t}, x_1 \mathbf{t} \rangle + \langle x_1 \mathbf{t}, x_2 \mathbf{n}_q \rangle + \langle x_1 \mathbf{t}, x_3 \mathbf{b}_q \rangle + \langle x_2 \mathbf{n}_q, x_1 \mathbf{t} \rangle + \langle x_2 \mathbf{n}_q, x_2 \mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle x_2 \mathbf{n}_q, x_3 \mathbf{b}_q \rangle + \langle x_3 \mathbf{b}_q, x_1 \mathbf{t} \rangle + \langle x_3 \mathbf{b}_q, x_2 \mathbf{n}_q \rangle + \langle x_3 \mathbf{b}_q, x_3 \mathbf{b}_q \rangle \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.54}$$

olarak bulunur. Daha sonra yüzeyin normali hesaplanarak  $L$ ,  $M$  ve  $N$  hesapları yapılır. (3.15) ve

(5.12) dikkate alınırsa  $M_4$  regle yüzeyi için pay hesabı

$$\begin{aligned}
\phi_{4s} \wedge \phi_{4w} &= (\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{n}_q + \mathbf{C}\mathbf{b}_q) \wedge (x_1 \mathbf{t} + x_2 \mathbf{n}_q + x_3 \mathbf{b}_q) \\
&= (\mathbf{A}\mathbf{t} \wedge x_1 \mathbf{t}) + (\mathbf{A}\mathbf{t} \wedge x_2 \mathbf{n}_q) + (\mathbf{A}\mathbf{t} \wedge x_3 \mathbf{b}_q) + (\mathbf{B}\mathbf{n}_q \wedge x_1 \mathbf{t}) + (\mathbf{B}\mathbf{n}_q \wedge x_2 \mathbf{n}_q) \\
&\quad + (\mathbf{B}\mathbf{n}_q \wedge x_3 \mathbf{b}_q) + (\mathbf{C}\mathbf{b}_q \wedge x_1 \mathbf{t}) + (\mathbf{C}\mathbf{b}_q \wedge x_2 \mathbf{n}_q) + (\mathbf{C}\mathbf{b}_q \wedge x_3 \mathbf{b}_q) \\
&= Ax_2 \mathbf{b}_q - Ax_3 \mathbf{n}_q - Bx_1 \mathbf{b}_q + Bx_3 \mathbf{t} + Cx_1 \mathbf{n}_q - Cx_2 \mathbf{t} \\
&= (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (5.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|\phi_{4s} \wedge \phi_{4w}\| &= \sqrt{\langle \phi_{4s} \wedge \phi_{4w}, \phi_{4s} \wedge \phi_{4w} \rangle} \\
&= \sqrt{\langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t}, (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} \rangle + \langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q, (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q \rangle} \\
&\quad + \sqrt{\langle (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t}, (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q \rangle + \langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q, (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} \rangle} \\
&\quad + \sqrt{\langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q, (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q \rangle + \langle (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q, (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q \rangle} \\
&\quad + \sqrt{\langle (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q, (Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} \rangle + \langle (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q, (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q \rangle} \\
&\quad + \sqrt{\langle (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q, (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q \rangle} \\
&= \sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}
\end{aligned}$$

ve böylece normal vektörü

$$\mathbf{N}_{M_4} = \frac{(Bx_3 - Cx_2) \mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3) \mathbf{n}_q + (Ax_2 - Bx_1) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \tag{5.55}$$

elde edilir. (3.16), (5.2), (5.49), (5.50) ve (5.51) dikkate alınırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= \left\langle \frac{(Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n}_q + (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}_q}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}, (A' - Bk_1 - Ck_2)\mathbf{t} \right. \\
&\quad \left. + (Ak_1 + B' - Ck_3)\mathbf{n}_q + (Ak_2 - Bk_3 + C')\mathbf{b}_q \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} [\langle (Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t}, (A' - Bk_1 - Ck_2)\mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle (Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t}, (Ak_1 + B' - Ck_3)\mathbf{n}_q \rangle + \langle (Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t}, (Ak_2 - Bk_3 + C')\mathbf{b}_q \rangle \\
&\quad + \langle (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n}_q, (A' - Bk_1 - Ck_2)\mathbf{t} \rangle + \langle (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n}_q, (Ak_1 + B' - Ck_3)\mathbf{n}_q \rangle \\
&\quad + \langle (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n}_q, (Ak_2 - Bk_3 + C')\mathbf{b}_q \rangle + \langle (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}_q, (A' - Bk_1 - Ck_2)\mathbf{t} \rangle \\
&\quad + \langle (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}_q, (Ak_1 + B' - Ck_3)\mathbf{n}_q \rangle + \langle (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}_q, (Ak_2 - Bk_3 + C')\mathbf{b}_q \rangle] \\
&= \frac{(BA'x_3 - B^2k_1x_3 - BCk_2x_3 - CA'x_2 + BCk_1x_2 + C^2k_2x_2)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&\quad + \frac{(ACk_1x_1 + CB'x_1 - C^2k_3x_1 - A^2k_1x_3 - AB'x_3 + ACk_3x_3)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&\quad + \frac{(A^2k_2x_2 - ABk_3x_2 + AC'x_2 - ABk_2x_1 + B2k_3x_1 - BC'x_1)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&= \left[ \frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - Bk_1 - Ck_2) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - Ck_3)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(Ax_2 - Bx_1)(Ak_2 - Bk_3 + C')}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right]
\end{aligned} \tag{5.56}$$

ve

$$\begin{aligned}
M &= \left\langle \frac{(Bx_3 - Cx_2)\mathbf{t} + (Cx_1 - Ax_3)\mathbf{n}_q + (Ax_2 - Bx_1)\mathbf{b}_q}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}, A\mathbf{t} + B\mathbf{n}_q + C\mathbf{b}_q \right\rangle \\
&= \frac{BA \cdot x_3 - CA \cdot x_2 + CB \cdot x_1 - AB \cdot x_3 + AC \cdot x_2 - BC \cdot x_1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \\
&= \frac{x_3 B^2 \left(\frac{A}{B}\right)' + x_2 A^2 \left(\frac{C}{A}\right)' + x_1 C^2 \left(\frac{B}{C}\right)'}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

ayrıca

$$N = \left\langle \frac{-k_3 u \mathbf{t} + (1 - k_1 u) \mathbf{b}_q}{\sqrt{(1 - k_1 u)^2 + k_3^2 u^2}}, 0 \right\rangle = 0 \tag{5.58}$$

olarak ifade edilir. Buradan (5.52), (5.53), (5.54), (5.56), (5.57), (5.58), (3.17) ve (3.18) dikkate alınırsa ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
H_{M_4} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1.L + (A^2 + B^2 + C^2) \cdot 0}{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 \cdot (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3) \cdot \left( \frac{x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)'}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)}{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \right] \\
&= \frac{\frac{[(Bx_3 - Cx_2)(A' - Bk_1 - Ck_2) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - Ck_3) + (Ax_2 - Bx_1)(Ak_2 - Bk_3 + C')]}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}}{2 [A^2 + B^2 + C^2 - A^2 x_1^2 + B^2 x_2^2 + 2ABx_1 x_2 + C^2 x_3^2 + 2ACx_1 x_3 + 2BCx_2 x_3]} \\
&\quad - \frac{2 (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3) \left( \frac{x_3 B^2 (A/B)' + x_2 A^2 (C/A)' + x_1 C^2 (B/C)'}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)}{2 [A^2 + B^2 + C^2 - A^2 x_1^2 + B^2 x_2^2 + 2ABx_1 x_2 + C^2 x_3^2 + 2ACx_1 x_3 + 2BCx_2 x_3]}
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
H_{M_4} &= \frac{\frac{[(Bx_3 - Cx_2)(A' - Bk_1 - Ck_2) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - Ck_3) + (Ax_2 - Bx_1)(Ak_2 - Bk_3 + C')]}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}}{2[A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3]} \\
&\quad - \left[ \frac{2 \left( \frac{AB^2x_1x_3(A/B) \cdot + A^3x_1x_2(C/A) \cdot + AC^2x_1^2(B/C) \cdot + B^3x_2x_3(A/B) \cdot + BA^2x_2^2(C/A) \cdot}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)}{2[A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{BC^2x_1x_2(B/C) \cdot + CB^2x_3^2(A/B) \cdot + CA^2x_2x_3(C/A) + C^3x_1x_3(B/C) \cdot}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right] \\
&= \frac{\frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - Bk_1 - Ck_2) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - Ck_3) + (Ax_2 - Bx_1)(Ak_2 - Bk_3 + C')}{2[A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3]} \sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}}{2 \left[ \frac{2[AB^2x_1x_3(A/B) \cdot + A^3x_1x_2(C/A) \cdot + AC^2x_1^2(B/C) \cdot + B^3x_2x_3(A/B) \cdot + BA^2x_2^2(C/A) \cdot]}{2[A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3]} \right]} \\
&\quad \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right] \\
&\quad - \left[ \frac{2[BC^2x_1x_2(B/C) \cdot + CB^2x_3^2(A/B) \cdot + CA^2x_2x_3(C/A) + C^3x_1x_3(B/C) \cdot]}{2[A^2 + B^2 + C^2 - A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + 2ABx_1x_2 + C^2x_3^2 + 2ACx_1x_3 + 2BCx_2x_3]} \right] \\
&\quad \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_{M_4} &= \frac{\left( \frac{(Bx_3 - Cx_2)(A' - Bk_1 - Ck_2) + (Cx_1 - Ax_3)(Ak_1 + B' - Ck_3) + (Ax_2 - Bx_1)(Ak_2 - Bk_3 + C')}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right) \cdot 0}{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \\
&\quad - \left[ \frac{\left( \frac{x_3B^2(A/B) \cdot + x_2A^2(C/A) \cdot + x_1C^2(B/C) \cdot}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)^2}{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot 1 - (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^2} \right]
\end{aligned}$$

buradan

$$K_{M_4} = \frac{\left( \frac{x_3 B^2 (A/B) + x_2 A^2 (C/A) + x_1 C^2 (B/C)}{\sqrt{(Bx_3 - Cx_2)^2 + (Cx_1 - Ax_3)^2 + (Ax_2 - Bx_1)^2}} \right)^2}{A^2 + B^2 + C^2 - A^2 x_1^2 + B^2 x_2^2 + 2ABx_1 x_2 + C^2 x_3^2 + 2ACx_1 x_3 + 2BCx_2 x_3}$$

olarak elde edilir.

## 6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bir eğrinin pek çok özelliğini karakterize etmek için; Frenet üçlüsü ve bunların eğri boyunca değişimlerini içeren Frenet denklemleri kullanılır. Frenet vektörleri ile eğrilerin gibi bazı diferansiyel geometrik özellikleri bulunabilir ve eğrinin davranışı hakkında bilgi sahibi olunabilir. Ancak Frenet çatısının daha az avantajlı olduğu bazı konular vardır. Mesela; bu çatı eğriliğin türevinin sıfır olduğu yerlerde tanımsızdır. Bu da matematikçileri uygulamalarda daha kullanışlı olan çatı arayışlarına yöneltmiştir. Bu çabanın bir sonucu olarak eğriliğin sıfır olduğu bir doğru boyunca bile tanımlanabilen q-çatı olarak adlandırılan yeni bir çatı kurgulanmıştır. q-çatı diğer çatılara göre pek çok avantaja sahiptir ve kolayca hesaplanabilir bu nedenle Frenet ve Bishop gibi farklı çatılara göre daha çok tercih edilmiştir.

Tek parametrelili düz çizgiler ailesinden oluşan bir yüzeye regle yüzey denir. Regle yüzeyler, diferansiyel geometrinin en önemli konularından biridir. Uygulama alanı fazla olması sebebiyle bilim bir çok alanında çalışıldığı müşahade edilebilen regle yüzeyler, geometri alanında her açıdan detaylı olarak incelenmiştir. Regle yüzeylere dair çalışmalar başta matematik olmak üzere, mimarlık ve makine mühendisliği gibi farklı bilim dallarında da yoğunlukla incelenmiştir. Regle yüzeyler tasarımda da yaygın olarak uygulanmıştır. Arabalar, gemiler, ürünlerin imalatı ve robot hareket analizi ve simülasyonu gibi birçok alanda kullanılmıştır. Modern yüzey modelleme sistemleri, regle yüzeyleri içerir.

Regle yüzeyler parametrelendirilmesi en kolay yüzeylerden biridir. Öklid, Minkowski ve Galilean gibi farklı uzaylarda da regle yüzeyler üzerine çalışılmıştır. Regle yüzeyler Gaspard Monge tarafından, bir uzay eğrisinin teğet vektör alanına dik olan düzlemde yatan quasi-normal vektör ise Coquillart tarafından tanımlanmıştır. Bu tanımlamadan ilham alan Dede ve arkadaşlarının çalışmalarında, quasi çatıyla ilgili daha detaylı araştırmalara rastlanılmaktadır. Dede ve arkadaşları, öncelikle bir uzay eğrisi için yönlü q-çatıyı tanımladılar, ardından da bu çatıya dair sonuçları, Minkowski 3-uzayında elde ederek sundular. Literatürde, bu çatı kullanılarak gerek eğriler teorisinde içerisinde yer alabilecek yönlü Bertrand eğrileri, bir timelike uzay eğrisinin yönlü bağlantılı eğrileri, uzay eğrisinin yönlü q-çatı küresel eğrileri ve timelike uzay eğrisinin yönlü küresel göstergeleri gibi çalışmalar, gerekse yüzeyler teorisi içerisinde değerlendirilebilecek kanal yüzeyleri, tubular yüzeyler ve öteleme yüzeyleri gibi çalışmalar göze çarpmaktadır. Bu tez çalışmasında q-çatı alan vektörleri ve q-çatı alan vektörlerinin birleşimi olarak yazılan genel vektör alanı tarafından oluşan regle yüzeylerin striksiyon çizgisi, dağılma

parametresi, Gauss ve ortalama eğriliğinin hesapları elde edilmiş; minimallik, açılabilirlik gibi özellikleri incelenmiştir.



## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Öklid uzayında temel kavramlar ile hesaplamalarda yardımcı olacak tanımlar ve teoremler yer almıştır. Öncelikle Frenet çatısı tanımlanmış ve q-çatı ile arasındaki ilişkilere değinilmiştir. Üçüncü bölümde temel geometrik kavramlar üzerinde durulmuştur. Sonrasında bu kavramlar kullanılarak 3-boyutlu Öklid uzayında q-çatı vektörleri ile oluşturulan regle yüzeyler incelenmiştir. Dördüncü bölümde gerekli teoremler ve ispatları Frenet vektörleri tarafından oluşan regle yüzeyler için yapılırken, beşinci bölümde q-çatı vektörleri tarafından oluşan regle yüzeyler için verilmiştir.

Frenet ve q-çatı vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış, striksiyon çizgisi ve dağılma parametresi gibi özelliklerine değinilmiştir. Bu çalışma Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans Tezi olarak yapılmıştır. Benzer hesaplar Minkowski uzayında da yapılabilir. Hatta bu uzay üzerinde değişik çatılar alınarak bu çatılar tarafından üretilecek regle yüzeyler tanımlanabilir ve bu yüzeylerin bazı özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- As, E, Şenyurt, S., 2013, Some characteristic properties of parallel z-equidistant ruled surfaces, *Mathematical Problems in Engineering Journal*, 1-7.
- Aydemir, I., Orbay, K., 2009, The ruled surfaces generated by Frenet vectors of timelike ruled surface in the Minkowski space  $\mathbb{R}_1^3$ , *World Applied Science Journal*, 6(5), 692-696.
- Biran, L., 1981, *Diferansiyel Geometri Dersleri*, İstanbul Üniversitesi yayınları, s.128.
- Bishop, R. L., 1975, There is more than one way to frame a curve, *The American Mathematical Monthly*, 82(3), 246-251.
- Bloomenthal, J., 1990, Calculation of reference frames along a space curve, In *Graphics Gems.*, 567-571.
- Coquillart S. , 1987, Computing offsets of b-spline curves, *Computer-Aided Design*, 19(6), 305-09.
- Çimdiker M., Ekici C., 2017, On the spacelike parallel ruled surfaces with darboux frame, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 60-69.
- Dede M., Ekici C., and Cöken A. C., 2013, On the parallel surfaces in Galilean space, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42, 605-615.
- Dede M., Ekici C., Ünlütürk Y., 2014, On motion of robot end effector using the curvature theory of timelike ruled surfaces with timelike directrix, *Malaysian Journal of mathematical Sciences*, 8(2), 189-204.
- Dede, M., Ekici, C., Görgülü, A., 2015, Directional q-frame along a space curve, *IJARCSSE*, 5(12), 775-780.
- Dede, M., Ekici, C., Güven I.A., 2018, Directional Bertrand Curves, *Gazi University Journal of Science*, 31(1), 202-211.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dede, M., Tozak, H. and Ekici, C., 2017, On the parallel ruled surface with B-Darboux frame, 13th. Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA).
- Divjak B, Milin-Sipus Z., 2003, Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean space. Acta Math, Hungar, 98, 203-215.
- Do Carmo, M.P., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, p.503.
- Ekici C., Dede M., 2011, On the darbox vector of ruled surfaces in pseudo-Galilean space, Math. and Comp. App., 16, 830-838.
- Ekici C., Çöken A. C., 2012, The integral invariants of parallel timelike ruled surfaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 393(2), 97-107.
- Ekici C., Ünlütürk Y., Dede M., Ryuh B. S., 2008, On motion of robot end effector using the curvature theory of timelike ruled surfaces with timelike rulings, Mathematical Problems in Engineering, 1-19.
- Ergün, E., Çalışkan, M. , 2012, Ruled surface pair generated by a curve and its natural lift in  $\mathbb{R}_1^3$ , Pure Mathematical Sciences, 1(2), 75-80.
- Guggenheimer H.W., 1963, Differential Geometry, New York: McGraw-Hill, p.400.
- Gray, A., Salamon, S., Abbena, E., 2006, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC, p.1016.
- Dede M., Ekici C., 2016, On parallel ruled surfaces in Galilean space, Kragujevac Journal of Mathematics, 40(1), 47-59.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998, Diferensiyel Geometri II, Ankara Üniversitesi, s.269.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi, s.895.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N., 2001, Singularities of ruled surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , Math Proceedings of Cambridge Philosophical Soc., 130, 1-11.
- Kamenarovic I., 1991, Existence theorems for ruled surfaces in the Galilean space  $\mathbb{G}_3$ , Rad HAZU Math, 456, 183-196.
- Kasap E., Yüce S. and Kuruoğlu N., 2009, The Involute-Evolute offsets of ruled surfaces, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 33, 195-201.
- Kaymanlı U. G., Ekici C., Dede M., 2018, Directional canal surfaces in  $E^3$ , Current Academic Studies in Natural Sciences and Mathematics Sciences, 63-80.
- Kaymanlı U. G., Ekici C., Okur S., 2019, The ruled surfaces generated by quasi vectors, IV. International Scientific and Vocational Studies Congress – Science and Health, 123-129.
- Kaymanlı, G.U., Ekici, C. and Dede, M., 2020, Directional evolution of the ruled surfaces via the evolution of their directrix using q-frame along a timelike space curve, European Journal of Science and Technology 20, 392-3969.
- Kim, Y.H., Yoon, D.W., 2004, Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces, Journal of Geometry and Physics, 49, 89-100.
- Kobayashi, S., Nomizu, K., 1983, Foundations of Differential Geometry, A Wiley-Interscience Publication, New York, p.329.
- Kuhnel, W., 2002, Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, American Mathematical Society, p.380.
- Küçük, A., 2004, On the Developable Time-like Trajectory Ruled Surfaces in a Lorentz 3-space  $\mathbb{R}_1^3$ , Applied Mathematics and Computation, 157(2), 483-489.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Lawrence, S., 2010, Developable surfaces: their history and application, School of Education Bath Spa University Newton Park, 701-714.
- O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, p.468.
- Orbay, K., Aydemir, İ., 2010, The ruled surfaces generated by frenet vectors of a curve in  $\mathbb{R}_1^3$  Celal Bayar University Journal of Science, 6 (2) ,155-160.
- Monge, G., 1850, Application de L'analyse à la Géométrié, Paris, p.638.
- Müller, H. R., 1963, Kinematik Dersleri (Tercüme), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, s.246-281.
- Ravani, B., Ku, T.S., 1991, Bertrand offsets of ruled surface and developable surface, Computer-Aided Design, 23(2), 145-152.
- Ryuh B.S. and Pennock G.R., 1988, Accurate motion of robot end-effector using the curvature theory of ruled surfaces, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 10, 383-387.
- Sabuncuoğlu, A., 2010, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, s.515.
- Salimov, A., Mağden, A., 2008, Diferensiyel Geometri, Aktif Yayınevi, s.303.
- Sarioğlugil, A., Tutar, A., 2007, On ruled surface in Euclidean space  $E^3$ , Int. J. Contemp. Math. Sci. 2(1), 1-11.
- Şenturk, G.Y., Yüce, S., 2015, Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame in  $E^3$ , Kuwait J. Sci. 42(2), 14-33.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Şenyurt, S., 2012, Integral invariants of parallel p-equidistant ruled surfaces which are generated by instantaneous pfaff vector, Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 2 (1), 13-22.
- Turgut A, Hacısalihoğlu H.H., 1997, Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space, Far East J. Math. Sci., 5, 83-90.
- Turgut A., Hacısalihoğlu, H.H., 1997, Spacelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1-46, 83-91.
- Turgut A, Hacısalihoğlu H.H., 1998, Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space II, Turkish J. Math., 22, 33-46.
- Tosun M., 1995,  $\mathbb{R}_1^3$  Minkowski uzayında space-like doğrultman uzaylı genelleştirilmiş time-like yüzeyler , Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, 1-65.
- Tosun M., Güngör, M.A., 2005, A study on time-like complementary ruled surfaces in the Minkowski n-space , Iranian Journal of science & Technology Transaction : A-Science, 29 A2, 325-323.
- Ünlütürk Y., Çimdiker M., Ekici C., 2016, Characteristic properties of the parallel ruled surfaces with Darboux frame in  $E^3$  space, Communication in Mathematical Modeling and Applications, 1(1), 26-43.