Harmonik Fonksiyonların Geometrik Teorisi

Dilara Karakoyun

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Kasım 2009

The Geometric Theory of Harmonic Functions

Dilara Karakoyun

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics

November 2009

Harmonik Fonksiyonların Geometrik Teorisi

Dilara Karakoyun

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Dursun Eser

Kasım 2009

**ONAY**

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Dilara Karakoyun'un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Harmonik Fonksiyonların Geometrik Teorisi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** **:** Doç. Dr. Dursun Eser

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. BÜLENT SAKA

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. DURSUN IRK

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. İLKER AKÇA

**Üye :** Yrd. Doç. Dr ÖMER ÖZBAŞ

**Üye :**Prof. Dr. İSMAİL KOCAYUSUFOĞLU (yedek)

**Üye :** Prof. Dr. ZEKERİYA ARVASİ (yedek)

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ............................ tarih ve ........................ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

# ÖZET

Bu çalışmanın kısa bir girişi olan birinci bölümünde, tezde kullanılan tanımlara ve formüllere yer verilmiştir. İkinci bölüm ise *Laplace* denkleminin çözümlerinden biri olan harmonik fonksiyonların, küre ve birim çember üzerindeki incelemelerini içermektedir. Üçüncü ve son bölümde ise, *Fourier* analizi ve harmonik fonksiyonların açılım formüllerinden söz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik fonksiyon, Laplace denklemi

# SUMMARY

In the first chapter that includes a short introduction of this study, it has been mentioned definitions and formulas which are used in the thesis. The second chapter includes analysis of harmonic function which is one of the solutions of Laplace equation, in sphere and unit ball. In the last chapter, it has been talk about Fourier analysis and expansion formulas of harmonic equations.

Keywords: Harmonic functions, Laplace equation

# TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında yol göstericiliği ve eşsiz desteği için hocam ve Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Başkanı Prof. Dr. Zekeriya Arvasi'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarımda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Doç. Dr. Dursun Eser'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Lisans, Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve tez çalışmalarım sırasında yaşadığım her türlü zorlukta desteğini hiç eksik etmeyen hocam ve Fen-Edebiyat Fakültesi Dekan Yardımcısı Prof. Dr. İdris Dağ'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez çalışmalarımı bilgisayar ortamına aktarmamda yardımlarını eksik etmeyen Araş.Gör. Ali Şahin' e çok teşekkür ederim.

Son olarak çalışmalarım boyunca manevi destekleri ve yardımlarından dolayı, sevgili aileme ve Yiğit Nalbant'a minnettarım.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

Bu bölümde tezde kullanılan ifadelerden bahsedilecektir.

**Diferansiyel operatör:** Operatör, bir fonksiyonu başka bir fonksiyona dönüştüren bir işlemdir. $D$ operatörü de bunlardan bir tanesidir. Burada $D$, $x$'e göre türev olup,

$$Dy = y' = \frac{dy}{dx}$$

ile verilir. Yani $D$, $y$'yi türevine dönüştüren bir operatördür.

**Laplace denklemi:** *Laplace* denklemi, eliptik tipte bir denklem olup reel uzayda genel çözümü yoktur. Bunun için bu denklemlerin özel tipten çözümleri aranır. Bunların içinde en yaygın olanı değişkenlerine ayrılabilir tipten çözüm aramadır.

$U$ bağımlı, $x, y, z$ bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta U &: = U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ \Delta U &: = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \end{aligned}$$

denklemleri sırasıyla iki ve üç boyutlu *Laplace* denklemleri olarak isimlendirilir. Burada $\Delta$, *Laplace* operatörüdür.

**Harmonik fonksiyon:** *Laplace* denklemini sağlayan, 2. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olan fonksiyon harmonik fonksiyon olarak adlandırılır.Harmonik fonksiyonlar, maksimum ve minimum değerlerini tanımlı oldukları bölgenin sınırı üzerinde alırlar. $U$ harmonik fonksiyonu tanım bölgesinin iç kısmında yerel ekstremum değerine sahip olamaz.

**Sınır değer problemi:** İki ya da daha yüksek mertebeden bir diferensiyel denklemin, $y$ bağımlı değişkeninin farklı noktalardaki değerlerini sağlayan çözüm araştırılsın. Bu problem

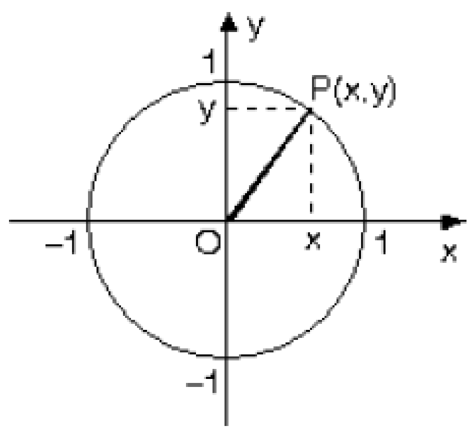
$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

$$y(\alpha) = y_{0,} \qquad y(\beta) = y_1$$

şeklinde tanımlanırsa, buna sınır-değer problemi denir.

**Birim çember:** Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine çember denir. Bu çemberin merkezi orjin $O(0,0)$ ve yarıçapı 1 birim olursa birim çember adını alır.

$$x^2 + y^2 = 1$$




Şekil 1.1 Yarıçapı 1 birim olan birim çember.

**Dirichlet problemi:** *Dirichlet* problemi, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünün, çözümün verilen bir bölgede bulunması ile alakalı olup, *Dirichlet* limit şartı sağlanmalıdır.

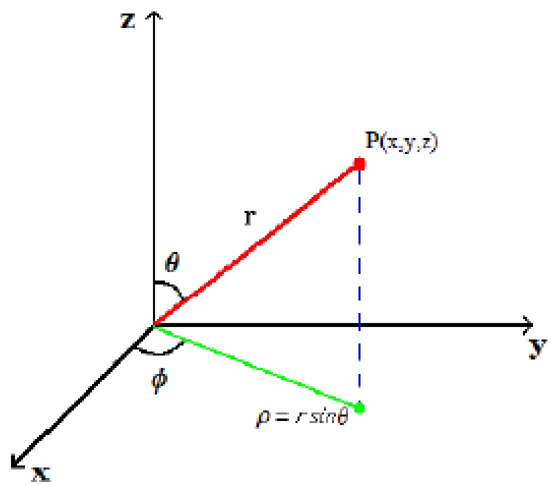
**Küresel koordinatlar:** Küre üzerindeki bir nokta bu sistemde üç tane bileşenle ifade edilir. Bunlar $r, \theta, \Phi$ 'dir. Koordinatların tanımlı olduğu aralıklar;

$r$ : Yarıçap, $P$ ve $(0,0,0)$ noktası arasındaki uzaklıktır. Tanım aralığı $0 \leq r \leq \infty$ olarak verilir.

$\theta$ : Enlem, $z$-ekseni ve çap arasındaki açıdır. $0 \leq \theta \leq 180^o$ aralığında tanımlıdır.

$\Phi$ : Boylam, $x$-ekseni ile çapın, $xy$-düzlemine izdüşümü $(\rho)$ arasındaki açıdır. $0 \leq \Phi \leq 360^o$ aralığında tanımlıdır. Küresel koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasındaki bağıntılar şu şekildedir.

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\Phi \\
y &= r \sin\theta \sin\Phi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$




Şekil 1.2 $r$ yarıçaplı bir küre üzerindeki herhangi bir $P$ noktasının küresel koordinatlarla gösterimi.

**Fourier serisi:**

$[-L, +L]$ aralığında, periyodu $2\pi$ olan $\sin nx$ ve $\cos nx$ trigonometrik fonksiyonları hem periyodik hem de ortogonaldir. Periyodu $2\pi$ olan bir $f(x)$ fonksiyonunu trigonometrik bir seri açılımı olarak,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ... + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + ... \\
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \cos nx)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazarsak $((a_n), (b_n))$ katsayılarını bulma işi *Fourier* serisi analizi olarak bilinir, ve Fourier katsayıları,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx
\end{aligned}
$$

olarak yazılırlar.

**Leibniz formülü:**

$f\,(x,t)$ ve $f_t(x,t)$ fonksiyonları $\{(x,t)\mid a\le x\le b,\ c\le t\le d\}$ bölgesinde sürekli olsun.

$$F'(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b f\,(x,t)\,dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f\,(x,t)\,dx$$

olarak ifade edilir.

**Hipergeometrik seri:**

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

ile tanımlanan seriye hipergometrik seri denir. Burada $a=1$ ve $c=b$ için bu seri, bildiğimiz

$$1+x+x^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

geometrik serisine indirgenir.

# BÖLÜM 2

# HARMONİK FONKSİYONLARIN GEOMETRİK TEORİSİ

Kompleks düzlemde,

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, |a| < 1 \tag{2.1}$$

dönüşümünü düşünelim. Burada $\bar{a}$, $a$ 'nın eşleniğidir ve dönüşüm

$$w = e^{i\theta}.z \tag{2.2}$$

şeklinde gösterilebilir.

Kompleks düzlemdeki $w = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ dönüşümünden,

$$\begin{aligned} 1-|w|^2 &= 1-\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} \\ &= \frac{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})-(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{|1-a\bar{z}|^2} \\ &= \frac{1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}z\bar{z}-z\bar{z}+z\bar{a}+a\bar{z}+a\bar{a}}{|1-a\bar{z}|^2} \\ &= \frac{1+a\bar{a}z\bar{z}-z\bar{z}+a\bar{a}}{|1-a\bar{z}|^2} \end{aligned}$$

$$1-|w|^2 = \frac{(1-|a|^2).(1-|z|^2)}{|1-a\bar{z}|^2} \tag{2.3}$$

elde edilir.

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

dönüşümü, birim çemberde $|z| = 1$ olacak şekilde alınırsa $|w| = 1$' i verir. Eğer birim çemberde $|z| < 1$ olacak şekilde alınırsa $|w| < 1$' i verir.

(2.2) dönüşümü de (2.1) dönüşümünün özelliğine sahiptir.

Üstelik (2.1) deki dönüşüm $z = a$ yı $w = 0$ a dönüştürür.

(2.1) dönüşümünün diferensiyeli alınırsa,

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{(z-a)'(1-\bar{a}z)-(z-a)(1-\bar{a}z)'}{(1-\bar{a}z)^2} \\
&= \frac{dz(1-\bar{a}z)-(z-a)(\bar{a}dz)}{(1-\bar{a}z)^2} \\
&= \frac{dz(1-\bar{a}z)}{(1-\bar{a}z)^2}+\frac{(z-a)\bar{a}dz}{(1-\bar{a}z)^2} \\
&= \frac{dz}{(1-\bar{a}z)}+\frac{(z-a)\bar{a}dz}{(1-\bar{a}z)^2} \\
&= \frac{dz}{(1-\bar{a}z)}+\frac{(\bar{a}z-a\bar{a})dz}{(1-\bar{a}z)^2} \\
&= \left(\frac{1}{(1-\bar{a}z)}+\frac{\bar{a}z-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}\right)dz \\
&= \frac{1-\bar{a}z+\bar{a}z-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz
\end{aligned}$$

Böylece

$$d\omega = \frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz$$

elde edilir.

(2.4) deki dönüşümü (2.3) e bölüp, mutlak değerin karesini alırsak,

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, |a| < 1$$

ve

$$w = e^{i\theta}.z$$

dönüşümlerine bağlı değişmeyen diferensiyel formunu elde ederiz.

2. dereceden diferensiyel forma karşı gelen değişmez diferensiyel operatör,

$$(1-|w|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\bar{w}} = (1-|z|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}} \tag{2.5}$$

dir.

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

operatörü *Laplaciandır*. (2.1) dönüşümü,

$$z = e^{i\tau},\ (\tau \in [0, 2\pi])$$

olduğunda birim çemberi birim çembere dönüştürür. Buradan $\psi \in [0, 2\pi]$ için

$$w = e^{i\psi}$$

olarak elde edilir.

Bu, (2.1) dönüşümünde uygulanırsa,

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\tau} - a}{1 - \bar{a}e^{i\tau}} = \frac{(1 - ae^{i\tau})}{1 - \bar{a}e^{i\tau}} e^{i\tau} \tag{2.6}$$

bulunur.

(2.6) dönüşümünün diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned}
e^{i\psi} d\psi &= \frac{(e^{i\tau} - a)'(1 - \bar{a}e^{i\tau}) - (e^{i\tau} - a)(1 - \bar{a}e^{i\tau})'}{(1 - \bar{a}e^{i\tau})^2} \\
e^{i\psi} d\psi &= \frac{ie^{i\tau}(1 - \bar{a}e^{i\tau}) - (e^{i\tau} - a)(-\bar{a}e^{i\tau})}{\left(-\bar{a}e^{i\tau}\right)^2} \\
e^{i\psi} d\psi &= \frac{ie^{i\tau}d\tau - i\bar{a}e^{2i\tau} - (-\bar{a}ie^{2i\tau} + a\bar{a}ie^{i\tau})d\tau}{(1 - \bar{a}e^{i\tau})^2} \\
e^{i\psi} d\psi &= \frac{ie^{i\tau}d\tau - i\bar{a}e^{2i\tau} + \bar{a}ie^{2i\tau}d\tau - a\bar{a}ie^{i\tau}d\tau}{(1 - \bar{a}e^{i\tau})^2}
\end{aligned}$$

$$e^{i\psi} d\psi = \frac{ie^{i\tau}(1 - a\bar{a})}{(1 - \bar{a}e^{i\tau})^2} d\tau \tag{2.7}$$

denklemi elde edilir.

Bu denklem (2.6) ya bölünürse,

$$d\psi = \frac{1 - a\bar{a}}{|1 - \bar{a}e^{i\tau}|^2} d\tau$$

bulunur.

Şimdi, elde edilen bu dönüşümde

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad \rho < 1$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
P(\rho, \theta - \tau) &= \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}e^{i\tau}|^2} = \frac{1 - |\rho e^{i\theta}|^2}{|1 - \rho e^{-i\theta}.e^{i\tau}|^2} \\
&= \frac{1 - |\rho|^2.|\cos\theta + i\sin\theta|^2}{|1 - \rho(\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\tau + i\sin\tau)|^2} \\
&= \frac{1 - |\rho|^2}{|1 - \rho(\cos\theta\cos\tau + \sin\theta\sin\tau + i\cos\theta\sin\tau - i\sin\theta\cos\tau)|^2} \\
&= \frac{1 - |\rho|^2}{|1 - \rho(\cos\theta\cos\tau + \sin\theta\sin\tau) - i\rho(\cos\theta\sin\tau + \sin\theta\cos\tau|^2} \\
&= \frac{1 - |\rho|^2}{|1 - \rho\cos(\theta - \tau) - i\rho\sin(\theta + \tau)|^2}
\end{aligned}$$

$$P(\rho, \theta - \tau) = \frac{1 - |\rho|^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} \tag{2.8}$$

elde edilir.

Elde edilen sonuncu ifade *Poisson çekirdeği* olarak isimlendirilir. *Poisson* çekirdeği aşağıdaki özelliklere sahiptir.

*(i)* $\rho < 1, \qquad P(\rho, \theta - \tau) > 0$ için pozitif tanımlılık

*(ii)* $\lim\limits_{\rho \to 1} P(\rho, \theta - \tau) = \begin{cases} 0 & , \quad \theta \neq \tau \text{ ise} \\ \infty & , \quad \theta = \tau \text{ ise} \end{cases}$

*(iii)* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)d\tau = 1$

*(iv)* $\rho < 1$ için, $P(\rho, \theta - \tau)$ ifadesi, kutupsal koordinatlarda *Laplace* denklemini gösterir:

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0 \tag{2.9}$$

$(i)$ ve $(ii)$ doğru olup, $(iii)$ ün ispatını yapalım.

$$P(\rho, \theta - \tau) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}e^{i\pi})^2} \quad \text{olup,}$$

$$d\psi = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}e^{i\pi}|^2} d\tau \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{1}{2\pi} \left[ \psi \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} [2\pi - 0] = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1 \qquad \text{elde edilir.}$$

$(iv)$ ün ispatına bakalım;

$$\begin{aligned} P(\rho, \theta - \tau) &= 1 + \frac{\rho e^{i(\theta - \tau)}}{1 - \rho e^{i(\theta - \tau)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta - \tau)}}{1 - \rho e^{-i(\theta - \tau)}} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \tau) \end{aligned}$$

olup

$$\rho^n \cos n(\theta - \tau)$$

açıkça (2.9) u gösterir.

Şimdi birim çember üzerinde *Dirichlet* problemini inceleyelim.

Periyodu $2\pi$ olan $\varphi(\theta)$ sürekli fonksiyonu verilsin. Açık birim çember üzerinde $u(\rho e^{i\theta})$ fonksiyonunun harmonik fonksiyon olup olmadığı araştırılırsa

$$\lim_{p \to 1} u(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\theta) \tag{2.10}$$

olduğu görülür.

Şimdi bu çözümü birkaç adımda inceleyelim. Önce ortalama değer formülünün verilmesi gerekir.

**a) Ortalama değer formülü:** $u(\rho e^{i\theta})$ fonksiyonu birim çember üzerinde harmonik ve birim çemberden birim çembere sürekli ise, $u$ kapalı birim çemberde süreklidir $(|z| \leq 1)$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = u(0), \qquad 0 \leq \rho \leq 1 \tag{2.11}$$

Bunun ispatı için, $\rho > 0$ iken *Laplace* denkleminden

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta\right) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta = \frac{-1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi} = 0$$

elde edilir.

Bu ifade integre edilirse,

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = k$$

elde edilip, $\rho \to 0$ 'a giderken, $k = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tekrar integre edilirse,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = c$$

olup, burada $\rho$ bağımsız değişkendir.

$\rho \to 0$ 'a giderken,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = u(0), \qquad 0 \leq \rho \leq 1$$

elde edilmiş olur.

**b)** Bir önceki adımdaki değişken değiştirme kullanılarak,

$$v(z) = u(w)$$

iken, böylece

$$v(e^{i\tau}) = u(e^{i\psi}), \qquad (\ v(a) = u(0)\ )\ .$$

dir.

$\rho = 1$ için, (2.11) denklemi,

$$\begin{aligned} v(a) &= v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\psi})d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\tau})\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau \end{aligned}$$

şeklini alır.

$\theta = \rho e^{i\theta}$ yazıp, sembolleri değiştirilirse,

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau \tag{2.12}$$

*Poisson* çekirdeği bulunur.

Diğer bir deyişle, $u(\rho e^{i\theta})$ harmonik fonksiyon ise, (2.12) formülü geçerlidir.

**c) Maksimum (minimum) prensibi:** Sabit olmayan bir fonksiyon, birim çember üzerinde harmonik ve sürekli ise, maksimumu (minimumu) birim çember üzerinde olmalıdır.

Maksimum (minimum) prensibinin ispatına bakalım.

**İspat:**

$\rho < 1$ için, $u(\rho e^{i\theta})$ maksimum değer olduğunu kabul edelim. O zaman (2.12) den

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1\text{-}2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau \leq u(\rho e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1\text{-}2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau = u(\rho e^{i\theta}) \tag{2.13}$$

elde edilir.

Eğer $u$ sabit değilse, birim çember üzerinde $u < u(\rho e^{i\theta})$ olacak şekilde bir yay vardır.

**d) Dirichlet probleminin çözümünün tekliği :**

Şimdi burada iki çözümün olduğunu düşünelim. Bunlar $u(\rho e^{i\theta})$ ve $v(\rho e^{i\theta})$ olsun. İkisine de limit uygulanırsa

$$\lim_{\rho\to 1} u(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\theta)\,,\ \lim_{\rho\to 1} v(\rho e^{i\tau}) = \varphi(\tau)$$

bulunur. Ayrıca bu iki fonksiyon harmonik fonksiyondur. Birim çember üzerinde bu harmonik fonksiyon 0 olduğundan,

$$w(e^{i\theta}) = 0$$

dır. Maksimum (minimum) prensibine dayanarak, kapalı disk üzerinde $|z| \leq 1$ olduğu bilinmektedir. Burada $w(\rho e^{i\theta})$ nın maksimum değerinin sıfırdan küçük ve eşit, minimum değerinin ise sıfırdan büyük ve eşit olduğu bilinmektedir. Buradan $w \equiv 0$ olacağından, çözümün tek olduğu ortaya çıkar.

**e) Çözümün ortaya çıkışı:**

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \tag{2.14}$$

Şimdi *Poisson* integralini düşünelim. Bu fonksiyon, aşağıdaki özelliklere sahiptir;

Birincisi,

$(iv)$ den görüleceği gibi, $u(\rho e^{i\theta})$ *Laplace* denklemini sağlar.

İkincisi,

$\delta$-fonksiyonunun $(ii)$ ve $(iii)$ özelliğinden (2.10) aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$(iii)$ 'den

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)\varphi(\theta)\, d\tau$$

yazılır.

Verilen bir $\varepsilon$ için, $\varphi(\theta)$ sürekli fonksiyon olduğundan, $|\theta - \tau| < \delta$ için

$$|\varphi(\theta) - \varphi(\tau)| < \varepsilon \tag{2.15}$$

olacak şekilde $\delta$ mevcuttur.

Yukarıda verilen (2.15) kullanılarak,

$$u(\rho e^{i\theta}) - \varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)\left(\varphi(\tau) - \varphi(\theta)\right) d\tau$$

integralinden

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta} P(\rho, \theta - \tau)\left(\varphi(\tau) - \varphi(\theta)\right) d\tau\right| \leq \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau) d\tau = \varepsilon$$

elde edilir.

Diğer taraftan ise, $|\theta - \tau| \geq \delta$ olduğunda, $\rho$ yi yeterince 1 'e yakın seçmek için $(ii)$ yi kullanabiliriz.

Böylece

$$P(\rho, \theta - \tau) < \varepsilon/2M$$

olup, burada $M$, $|\theta - \tau|$ nin üst sınırıdır.

Dolayısıyla,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geq\delta} P(\rho, \theta - \tau)\left(\varphi(\tau) - \varphi(\theta)\right) d\tau\right| < 2M\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2M} d\tau = \varepsilon$$

bulunur. Bu iki ifade biraraya getirilirse, 1 e yeterince yakın $\rho$ için,

$$\left|u(\rho e^{i\theta}) - \varphi(\theta)\right| < 2\varepsilon$$

olup, üstelik

$$\lim_{\rho \to 1} u(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$$

dur.

Böylece *Dirichlet* probleminin birkaç aşamada nasıl meydana geldiği görülmüştür.

## 2.1 Gerçel Formlar

Kompleks düzlemdeki,

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad |a| < 1$$

dönüşümünün gerçel formu düşünüldüğünde,

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{(z-a)(1-a\bar{z})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{z-az\bar{z}-a+a^2\bar{z}}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}z\bar{z}}$$

elde edilir.

Şimdi $a, b$ gibi tüm kompleks sayılar için,

$$a\bar{b} + \bar{a}b = 2a^* b^*$$

elde edilir. Burada $b^*$ transpozu gösterirken, sağ taraf matris çarpımını gösterir.

Üstelik,

$$a = b + ic \text{ ve } z = x + iy \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} a^2\bar{z} &= (b+ic)^2\,(x-iy) \\ &= (b^2 - c^2 + 2bci)(x - iy) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left(a^2\overline{z}\right)^* &= \left[(b^2-c^2)x+2bcy,\ 2bcx-(b^2-c^2)y\right] \\
&= (x,y)\begin{pmatrix} b^2-c^2 & 2bc \\ 2bc & -b^2+c^2 \end{pmatrix} \\
&= (x,y)\left[2(b,c)'(b,c)-(b,c)(b,c)'I\right] \\
&= z^*(2a^{*\prime}a^*-a^*a^{*\prime}I)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $I$, 2x2 tipinde birim matristir.

Yukarıdaki $w$ ifadesinin eşleniği alınırsa,

$$w^* = \frac{z^*-a^*-z^*z^{*\prime}a^*+z^*\left(2a^{*\prime}a^*-a^*a^{*\prime}I\right)}{1-2a^*z^{*\prime}+a^*a^{*\prime}z^*z^{*\prime}}$$

elde edilir.

## 2.2 Birim Çemberin Geometrisi

$x=(x_1,...,x_n)$ $n$ - boyutlu vektörü verilsin. Böylece

$$xx^*<1 \tag{2.2.1}$$

olacak şekildeki $x$ lerin kümesi $n$ - boyutlu uzaydaki birim küreyi temsil eder. Burada $x=[x_1,...,x_n]$ satır vektörü olarak tanımlanır. $x^*$ ise, $x$'in transpozunu gösterir.

Son yazılan

$$y=\frac{x-a-xx^*a+x(2a^*a-aa^*I)}{1-2ax^*+aa^*xx^*}, \quad aa^*<1 \tag{2.2.2}$$

dönüşümü birim küreden birim küreye bire-bir dönüşümdür ve $x=a$ yı $y=0$ a dönüştürür. Şimdi bunun ispatını verelim.

Önce (2.2.2) deki ifadeyi;

$$y = \frac{(1-aa^*)(x-a) - a(x-a)(x-a)^*}{(1-2ax^* + aa^*xx^*)} \tag{2.2.3}$$

olarak tekrar yazalım.

(2.2.3) ün iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned} yy^* &= \frac{(1-aa^*)^2(x-a)(x-a)^*}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2} - \frac{2(1-aa^*)(x-a)(x-a)^*a(x-a)^*}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2} \\ &\quad + \frac{aa^*\left[(x-a)(x-a)^*\right]^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2} \\ &= \frac{(x-a)(x-a)^*\left[(1-aa^*)^2 - 2(1-aa^*)a(x-a)^* + aa^*(x-a)(x-a)^*\right]}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2} \end{aligned}$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$yy^* = \frac{(x-a)(x-a)^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*} \tag{2.2.4}$$

elde edilir.

(2.2.3) ten

$$\begin{aligned} y + yy^*a &= \frac{(1-aa^*)(x-a) - a(x-a)(x-a)^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*} + \frac{a+(x-a)(x-a)^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*} \\ &= \frac{(1-aa^*)(x-a) - a(x-a)(x-a)^* + a(x-a)(x-a)^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*} \end{aligned}$$

$$y + yy^*a = \frac{(1-aa^*)(x-a)}{1-2ax^*+aa^*xx^*} \tag{2.2.5}$$

olduğu bulunur.

Tekrar aynı işlem uygulanırsa,

$$(y+yy^*a)(y+yy^*a)^* = \frac{(1-aa^*)(x-a)}{1-2ax^*+aa^*xx^*} . \frac{(1-aa^*)(x-a)^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*} = \frac{(1-aa^*)^2(x-a)(x-a)^*}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}$$

bulunup, buradan

$$\begin{aligned}(y+yy^*a)(y+yy^*a)^* &= (y+yy^*a)(y^*+y^*ya^*)\\ &= yy^*+y^*y^2a^*+yy^{2*}a+y^2y^{2*}aa^*\\ &= yy^*(1+ya^*+y^*a+yy^*aa^*)\\ &= yy^*(1+2ay^*+yy^*aa^*)\end{aligned}$$

$$yy^*(1+2ay^*+yy^*aa^*)=\frac{(1-aa^*)^2yy^*}{1+2ax^*+aa^*xx^*}$$

bulunur.

Eğer $yy^*=0$ ise, $y=0$ ve (2.2.4) ten $x=a$ bulunur.

Eğer $yy^*\neq 0$ ise,

$$1+2ay^*+aa^*yy^*=\frac{(1-aa^*)^2}{1-2ax^*+aa^*xx^*} \tag{2.2.6}$$

eşitliği elde edilir. (Burada $y=0$ için $x=a$ dır.)

$$y+yy^*a=\frac{(1-aa^*)(x-a)}{1-2ax^*+aa^*xx^*}$$

ifadesinde yerine koyulursa,

$$x=a+\frac{(y+yy^*a)(1-aa^*)}{1+2ay^*+aa^*yy^*}$$

olup

$$x=\frac{a+2a^2y^*+a^2a^*yy^*+y-aa^*y+yy^*a^2a^*+yy^*a}{1+2ay^*+aa^*yy^*}$$

$$x=\frac{y+a+ayy^*+y(2a^*a-aa^2I)}{1+2ay^*+aa^*yy^*} \tag{2.2.7}$$

elde edilir.

(2.2.4) ten

$$\begin{aligned}1-yy^* &= \frac{1-2ax^*+aa^*xx^*-(x-a)(x-a)^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*}\\ &= \frac{1-2ax^*+aa^*xx^*-(x-a)(x^*-a^*)}{1-2ax^*+aa^*xx^*}\\ &= \frac{1-2ax^*+aa^*xx^*-xx^*+2ax^*-aa^*}{1-2ax^*+aa^*xx^*}\\ &= \frac{1-aa^*+xx^*(aa^*-1)}{1-2ax^*+aa^*xx^*}\end{aligned}$$

$$1 - yy^* = \frac{(1-a^*)\,(1-xx^*)}{1-2ax^*+aa^*xx^*} \tag{2.2.8}$$

paydasında *Schwarz* eşitsizliğini kullanarak

$$1 - 2ax^* + aa^*xx^* = (1-ax^*)^2 + aa^*xx^* - (ax^*)^2 > 0$$

elde edilir. Bu da $yy^* < 1$ den küçük olmasını gerektirir. Böylece (2.2.2) dönüşümü birim küreden birim küreye bire-bir bir dönüşümdür.

## 2.3 Diferensiyel Metrik

$$y = \frac{(1-aa^*)(x-a)-(x-a)(x-a)^*a}{1-2ax^*+aa^*xx^*}$$

diferensiyel dönüşümünü araştıralım.

Türevi alınarak;

$$\begin{aligned} dy &= \left[(1-aa^*)dx - 2dx(x-a)^*a\right](1-2ax^*+aa^*xx^*) \\ &\quad - \left[-2dxa^* + 2aa^*dxx^*\right] \\ &\quad \left[(1-aa^*)\,(x-a)-(x-a)(x-a)^*a\right] / \left[(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (1-2ax^*+aa^*xx^*)^2\,dy &= (1-aa^*)dx \\ &\quad \cdot\{(1-2ax^*+aa^*xx^*)\,I - 2(1-2ax^*)x^*a \\ &\quad +2a^*x - 2xx^*a^*a - 2aa^*xx^*\} \\ &= (1-aa^*)dx \\ &\quad \cdot\{(1-2ax^*+aa^*xx^*)I - 2(1-2ax^*)(x^*a-a^*x) \\ &\quad +2(x^*a-a^*x)^2\} \end{aligned}$$

bulunur.

$$P = (1-2ax^*+aa^*xx^*)I - 2(1-ax^*)(x^*a-a^*x) + 2(x^*a-a^*x)^2$$

olsun.

$$M = x^*a - a^*x, \qquad \lambda = 1 - 2ax^* + aa^*xx^* \tag{2.3.1}$$

alınırsa,

$$P = \lambda I - 2(1 - ax^*)M + 2M^2 \tag{2.3.2}$$

yazılabilir. Böylece,

$$dy = \frac{(1 - aa^*)}{(1 - 2ax^* + aa^*xx^*)^2} dxP \tag{2.3.3}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} xM^2 &= \left[(ax^*)^2 - aa^*xx^*\right] x, \qquad (2.3.4)\\ aM^2 &= \left[(ax^*)^2 - aa^*xx^*\right] a,\\ M^3 &= \left[(ax^*)^2 - aa^*xx^*\right] M \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Böylece

$$
\begin{aligned}
PP^* &= (\lambda I - 2(1-2ax^*)M + 2M^2)(\lambda I + 2\left(1-2ax^*)M + 2M^2\right) && (2.3.5)\\
&= \lambda^2 I^2 + 2\lambda IM(1-2ax^*) + 2\lambda M^2 - 2\lambda IM(1-2ax^*) - 4M^2(1-2ax^*)^2\\
&\quad -4M^3(1-ax^*) + 2\lambda IM^2 + 4M^3(1-ax^*) + 4M^4\\
&= \lambda^2 I^2 + 4\lambda M^2 - 4M^2(1-ax^*)^2 + 4M^4\\
&= \lambda^2 I^2 + 4M^2\left[\lambda - (1-ax^*)^2\right] + 4M^4 \qquad (\lambda = 1-2ax^* + aa^*xx^* \text{ yazılırsa})\\
&= \lambda^2 I^2 + 4M^2\left[1-2ax^* + aa^*xx^* - 1 - (ax^*)^2 + 2ax^*\right] + 4M^4\\
&= \lambda^2 I^2 + 4M^2\left[aa^*xx^* - (ax^*)^2\right] + 4M^4\\
&= \lambda^2 I^2 + 4M\left\{\left[aa^*xx^* - (ax^*)^2\right]M + M^3\right\}\\
&= \lambda^2 I^2 + 4M\left\{\left[aa^*xx^* - (ax^*)^2\right]M + \left[(ax^*)^2 - aa^*xx^*\right]M\right\}\\
&= \lambda^2 I^2 + 4M.0\\
&= \lambda^2 I^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece,

$$
dy = \frac{1-aa^*}{(1-2ax^* + aa^*xx^*)}dxP
$$

ifadesinin $y^*$ye göre tekrar türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
dydy^* &= \frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^4}dxPP^*dx^* && (2.3.6)\\
&= \frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}dxdx^*
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1-a}{1-2ax^*+aa^*xx^*} = \frac{1-yy^*}{1-xx^*}
$$

olup, buradan

$$
\frac{dydy^*}{(1-yy^*)^2} = \frac{dxdx^*}{(1-xx^*)^2}
$$

elde edilir.

## 2.4 Diferensiyel Operatör

$$(1-yy^*)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+2(n-2)(1-yy^*)\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial u}{\partial y_i}=0 \tag{2.4.1}$$

Kısmi türevli denkleminin (2.2.2) dönüşümü altında değişmez olduğunu ispatlayacağız. (2.4.1) denklemi

$$(1-yy^*)^n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[(1-yy^*)^{2-n}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right]=0$$

olarak yazılabileceğinden ispat için

$$\begin{aligned}&(1-yy^*)^n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[(1-yy^*)^{2-n}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right]\\ =\;&(1-xx^*)^n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-xx^*)^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Burada $x$ ve $y$ (2.2.2) deki gibi birbirine bağlıdır.

(2.4.2) yi ispat etmeden önce, birkaç tane yardımcı teoremi ispat edelim.

**Yardımcı Teorem 1**

$\mu=1+2ay^*+aa^*yy^*$ olsun. O halde

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\mu^{n-2}}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)=0 \tag{2.4.3}$$

dir.

**İspat:**

(2.2.7) den

$$x_k=a_k+\frac{(1-aa^*)(y_k+yy^*a_k)}{1+2ay^*+aa^*yy^*}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan , ispat için

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\mu^{n-2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{y_k+yy^*a_k}{\mu}=0 \tag{2.4.4}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Sol tarafı,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\mu^n}[(\delta_{ik}+2y_ia_k)(1+2ay2+aa^*yy^*)-2(y_k+yy^*a_k)(a_i+aa^*y_i)]$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c}[2a_k(1+2ay^*+aa^*yy^*)+2(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa^*y_i)\\ -2(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa^*y_i)-2(y_k+yy^*a_k)aa^*](1+2ay^*+aa^*yy^*)\\ -2n[(\delta_{ik}+2y_ia_k)(1+2ay^*+aa^*yy^*)]\\ -2(y_k+yy^*a_k)(a_i+aa^*y_i)](a_i+aa^*y_i)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c}[2a_k(1+2ay^*)-2y_kaa^*](1+2ay^*+aa^*yy^*)\\ -2n(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa^*y_i)(1+2ay^*+aa^*yy^*)\\ +4n(y_k+yy^*a_k)(a_i+aa^*y_i)(a_i+aa^*y_i)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu^n}\left\{\begin{array}{c}[2a_k(1+2ay^*)-2y_kaa^*]-2n(a_k+aa^*y_k+2ay^*a_k+2aa^*yy^*a_k)\\ +4n(y_k+yy^*a_k)aa^*\end{array}\right\}$$

$$= 0$$

dır.

**Yardımcı Teorem 2**

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}=\frac{\lambda^2}{(1-aa^*)^2}\delta_{jk}$$

dir.

**İspat:**

$$dydy^*=\frac{(1-aa^*)^2}{\lambda^2}dxdx^*$$

den kolayca bulunabilir.

Şimdi geri dönüş yapalım ve (2.4.2) yi ispat edelim. Şimdi (2.2.8) den

$$\left(\frac{(1-aa^*)(1-xx^*)}{\lambda(x)}\right)^n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{(1-aa^*)(1-xx^*)}{\lambda(x)}\right)^{2-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right]\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

$$= (1-aa^*)^2\frac{(1-xx^*)^n}{\lambda(x)}\sum_{i,j,k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(1-xx^*)^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

$$+(1-aa^*)^2\left(\frac{1-xx^*}{\lambda(x)}\right)^n\sum_{i,j,k}(1-xx^*)^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

$$\equiv s_{1+}s_2$$

dir.

Yardımcı teorem 2 den, $s_1$ (2.4.2) nin sağ tarafıdır. Buradan sadece $s_2 = 0$ olduğunu göstermek kalır.

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda^{n-2} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0$$

dır. Fakat bu eşitlikten kolayca

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \lambda^{n-2} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0$$

sonucu çıkartılabilir. Buradan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \lambda^{n-2} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) = 0$$

olduğu dikkate alınmıştır. (2.2.6) dan $\lambda\mu = (1 - aa^*)^2$ olduğunu biliyoruz. Üstelik yukarıdaki eşitlik, yardımcı teorem 1*den kolayca ispatlanabilir.

## 2.5 Küresel Koordinatlar

$0 \leq \rho < \infty$ ve $u$ n-boyutlu uzayda bir vektör olmak üzere,

$$x = \rho u \ , \ uu* = 1$$

olsun. Bu durumda $du.u^* = 0$ dır.

Böylece

$$\begin{aligned} dxdx^* &= (d\rho u + \rho du)(d\rho u + \rho du)^* \\ &= d\rho^2 + \rho^2 dudu^* \end{aligned}$$

elde edilir.

Ve böylece

$$\frac{dxdx^*}{(1 - xx^*)^2} = \frac{d\rho^2 + \rho^2 dudu^*}{(1 - \rho^2)^2} \tag{2.5.1}$$

dir. Şimdi küresel koordinatları tanıtalım.

$$\begin{aligned} u &= (\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_{3,...}, \\ &\quad \sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-2} \leq \pi \\ 0 &\leq \theta_{n-1} \leq 2\pi \end{aligned}$$

Birim çember $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığında $(\cos\theta, \sin\theta)$ olarak da ifade edilebilir. Fakat bu durum, birim çemberin $[0, 2\pi]$ aralığına eşdeğer olduğunu söylemez. $[0, 2\pi]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların birim çember üzerinde sürekli olması gerekmez. Bunun nedeni ise $\theta = 0$ ve $\theta = 2\pi$ olup, aslında birim çember üzerinde aynı noktayı göstermesidir. O halde birim çember üzerindeki $f(\theta)$ sürekli fonksiyonunun periyodunun $2\pi$ olduğunu unutmamalıyız.

Birim küre üzerinde durum biraz daha karmaşıktır ;

$$(\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, ..., \sin\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1})$$

$2\pi$ periyotlu $\theta_1$' in fonksiyonu olmadığından dolayı, bu durumda küre üzerinde

$$f(\theta_1, ..., \theta_{n-1}), \qquad 0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$$

fonksiyonunun sürekliliğini nasıl tanımlayabiliriz ?

Buradaki temel nokta, aralıkların uç noktalarının davranışlarını gözlemlemektir. Sınırlı bir süre için, $\theta_2, ..., \theta_{n-1}$ değişkenlerini bir kenara koyarak, ilk olarak $\theta_1 = 0$ ın verdiği noktalar üzerinde düşünelim. $\theta_1 = 0$ olduğunda, $u = e_1 \equiv (1, 0, ..., 0)$ dır. Böylece, $u = e_1$ için, $f(\theta_1, ..., \theta_{n-1})$ sürekli fonksiyonu, küre üzerinde

$$\lim_{\theta_1 \to +0} f(\theta_1, ..., \theta_{n-1})$$

varlığını verir. Üstelik, $\theta_2, ..., \theta_{n-1}$ den bağımsızdır. Aynı nedenden dolayı,

$$\lim_{\theta_1 \to \pi - 0} f(\theta_1, ..., \theta_{n-1})$$

$u=-e_1$ de fonksiyonun değeridir ve aynı şekilde $\theta_2,...,\theta_{n-1}$ den bağımsızdır. Aynı biçimde devam edersek

$$\lim_{\theta_2\to+0} f(\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n-1})$$

in $\theta_3,...,\theta_{n-1}$ den bağımsız olduğunu görürüz. Son olarak,

$$\lim_{\theta_{n-1}\to+0} f(\theta_1,...,\theta_{n-1})=\lim_{\theta_{n-1}\to2\pi-0} f(\theta_1,...,\theta_{n-1})$$

elde ederiz. Küre üzerinde, yalnızca sürekli fonksiyonlar bu koşulları tam olarak sağlar.

$u$ vektörel büyüklüğünün diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} dudu^* &= d\theta_1^2+\sin^2\theta_1 d\theta_2^2+\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 d\theta_3^2+... \\ &\quad +\sin^2\theta_1...\sin^2\theta_{n-2}d\theta_{n-1}^2 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

sonucu kolayca elde edilebilir.

Küre üzerinde, $\dot{u}$ hacim elementi, kuadratik diferensiyel formunun determinantının kareköküdür. Yani ,

$$\dot{u}=\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2...\sin\theta_{n-2}d\theta_1 d\theta_2...d\theta_{n-1}$$

dir.

(Birim) kürenin hacminin

$$\omega_{n-1}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

olduğunu söylemek zor değildir. Basit ve doğrudan hesaplamalarla,

$$\begin{aligned} \partial_u^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}+...+\frac{1}{\sin^2\theta_1...\sin^2\theta_{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2} \\ &\quad +(n-2)\cot\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}+(n-3)\frac{\cot\theta_2}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\ &\quad +(n-4)\frac{\cot\theta_3}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}+... \\ &\quad +\frac{\cot\theta_{n-2}}{\sin^2\theta_1...\sin^2\theta_{n-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

olduğu yerde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{2.5.4}$$

*Laplacianının,* kutupsal formunun

$$\Delta = \frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \partial^2 u \tag{2.5.5}$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi,

$$(1 - xx^*)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2(n-2)(1 - xx^*) \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

diferensiyel operatörünün kutupsal koordinatlardaki formunun üzerinde düşünelim.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$$

den ve (2.5.5) den

$$\begin{aligned} & (1 - xx^*)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2(n-2)(1 - xx^*) \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ = \; & (1 - \rho^2)^2 \left[ \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \partial^2 u \right] + 2(n-2)\left(1 - \rho^2\right) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \\ = \; & (1 - \rho^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1 - \rho^2}{\rho} \left[ (n-1) + (n-3)\rho^2 \right] \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\left(1 - \rho^2\right)^2}{\rho^2} \partial^2 u \\ = \; & \frac{\left(1 - \rho^2\right)^n}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho^{n-1}}{\left(1 - \rho^2\right)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \frac{\left(1 - \rho^2\right)^2}{\rho^2} \partial^2 u \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

elde ederiz.

$\theta_2, \theta_{3,}..., \theta_{n-1}$ den bağımsız olmak üzere, (2.6.6) nın $\Phi(\rho \cos \theta_1, \rho \sin \theta_1)$ fonksiyonuna uygulandığını düşünelim.

$$\frac{\left(1 - \rho^2\right)^n}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho^{n-1}}{\left(1 - \rho^2\right)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi + \frac{\left(1 - \rho^2\right)^2}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + (n-2) \cot \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \Phi = 0$$

kısmi diferensiyel denklemini elde ederiz.

$\xi = \cos \theta_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1 - \rho^2\right)^n}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho^{n-1}}{\left(1 - \rho^2\right)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi + \frac{\left(1 - \rho^2\right)^2}{\rho^2} \\ & \times \left[ \left(1 - \xi^2\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - (n-1)\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \Phi \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

olup,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right. \\ &\left.+\left(1-\xi^2\right)^{-(n-3)/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(1-\xi^2\right)^{(n-1)/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\Phi \\ =\ & 0 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

olarak da yazılabilir.

Bu,

$$0\le\rho\le 1, \quad -1\le\xi\le 1$$

dikdörtgeninin içerisinde,

$$\begin{aligned} u &= (\rho,\xi), \\ \upsilon &= \upsilon(\rho,\xi) \end{aligned}$$

*yarı-conformal* dönüşümünü çalıştığımızı belirtir.

$u, \upsilon$ fonksiyon çifti

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} = (1-\xi^2)^{-(n-3)/2}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\xi} \\ \dfrac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\rho} = -(1-\xi^2)^{(n-1)/2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi} \end{cases} \tag{2.5.9}$$

diferensiyel denklem sistemini sağlar.

(2.5.9) dan ve $\upsilon$ 'u kaldırmak için

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi\partial\rho} = \frac{\partial^2\upsilon}{\partial\rho\partial\xi}$$

kullanırsak, $u$ nun (2.5.8) i sağladığını görürüz. $u$ 'yu kaldırmak için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\xi}$$

kullanırsak, $\upsilon$ nun

$$\left[\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\left(1-\xi^2\right)^{(n-1)/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)^{-(n-3)/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]\upsilon = 0$$

diferensiyel denklemini sağladığını görürüz. Bu iki diferensiyel denklemin ikinci dereceden terimleri eşit ve lineer terimlerin toplamları,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\right)+\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(1-\xi^2\right)^{[(n-1)/2-(n-3)/2]} \\
= \; & 2\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}-2\xi\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi}
\end{aligned}
$$

ifadesine eşittir.

## 2.6 Poisson Formülü

$$
dydy^* = \left(\frac{(1-aa^*)}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)}\right)^2 dxdx^*
$$

ile tanımlanan ifade, $x = u$ ve $y = v$ ve $uu* = vv^* = 1$ küresine karşı geldiği görülür.

Ayrıca,

$$
dvdu^* = \left(\frac{1-aa^*}{1-2au^*+aa^*uu^*}\right)^2 dudu^* \tag{2.6.1}
$$

yazılabilir.

Kürenin $\dot{u}$ ve $\dot{v}$ hacim elemanları,

$$
\dot{v} = \left(\frac{1-aa^*}{1-2au^*+aa^*}\right)^{n-1} \dot{u} \tag{2.6.2}
$$

ilişkiyi sağlar. Burada $uu^* = vv^* = 1$ olduğu dikkate alınmalıdır.

Bu da

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \left(\frac{1-xx^*}{1-2xu^*+xx^*}\right)^{n-1} \Phi\left(u\right)\dot{u} \tag{2.6.3}
$$

*Poisson* formülünü verir.

Yukarıdaki ifadede, verilen $\Phi\left(u\right)$ fonksiyonu birim küre üzerinde ise, birim çemberde tanımlanabilir. Ayrıca çember içinde (2.5.11) kısmi diferensiyel denklemini sağlar.

$$
P(x,u) = \left(\frac{1-xx^*}{1-2xu^*+xx^*}\right)^{n-1} \tag{2.6.4}
$$

Şimdi *Poisson* çekirdeğinin özelliklerinden bahsedelim.

$x = \rho v$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} P(x,u) &= \left(\frac{1-\rho v \rho^* v^*}{1-2\rho v u^* + \rho v \rho^* v^*}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1-\rho^2 v v^*}{1-2\rho\cos\langle u,v\rangle + \rho^2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle u,v\rangle$, $u$ ve $v$ vektörleri arasındaki açıyı gösterir.

$(a)$ $0 \leq \rho < 1$ olduğunda , $P(x,u) > 0$ dır. Buradan açıkça,

$$1 - 2\rho\cos\langle u,v\rangle + \rho^2 \geq 1 - 2\rho + \rho^2 = (1-\rho)^2$$

olduğu görülür.

$(b)$ $\underset{\rho\to 1}{lim}\, P(x,u) = \begin{cases} 0, & u \neq v \\ \infty, & u = v \end{cases}$

elde ederiz.

Şimdi $\langle u,v\rangle = \alpha$ ve $\delta$ pozitif bir sayı olsun. $|\alpha| > \delta$ olacak şekilde verilen herhangi bir $\varepsilon$ için $1 > \rho > \rho_0$ sağlayan bir $\rho_0$ vardır.

$$P(x,u) \leq \left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\delta + \rho^2}\right)^{n-1} < \varepsilon$$

olur.

$(c)$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int \underset{u}{\cdots} \int P(x,u)\dot{u} = 1$$

elde edilir.

$(d)$ $\rho < 1$ için, $P(x,u)$ , (2.5.1) in bir çözümdür.

**İspat:** $P(x,u)$ nun diferensiyeli alınırsa,

$$\frac{\partial P(x,u)}{\partial x_i} = 2(n-1)\frac{(1-xx^*)^{n-2}}{(1-2ux^*+xx^*)^n}\left[-2(1-ux^*)x_i + (1-xx^*)u_i\right]$$

olup sonuç olarak,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-xx^*)^{2-n}\frac{\partial P(x,u)}{\partial x_i}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= 2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{-2(1-ux^*)x_i+(1-xx^*)u_i}{(1-2ux^*+xx^*)^n}\right] \\
&= 2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-2(1-ux^*)+2u_ix_i-2x_iu_i}{(1-2ux^*+xx^*)^n}\right\} \\
&\quad -2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{n[-2(1-ux^*)x_i+(1-xx^*)u_i][-2u_i+2x_i]}{(1-2ux^*+xx^*)^{n+1}}\right\} \\
&= 2(n-1)\left\{\frac{-2n(1-ux^*)}{(1-2ux^*+xx^*)^n}-\frac{2n[2(1-ux^*)xx^*-2(1-ux^*)xx^*]}{(1-2ux^*+xx^*)^{n+1}}\right\} \\
&\quad -2(n-1)\left\{\frac{2n[(1-xx^*)\,uu^*+(1-xx^*)ux^*]}{(1-2ux^*+xx^*)^{n+1}}\right\}
\end{aligned}$$

$uu^* = 1$ olduğundan, yukarıdaki ifade 0 'a eşit olur.

**Teorem 1.**

$uu^* = 1$ küresi üzerinde $\Phi(u)$ sürekli fonksiyonunun tanımlı olduğunu varsayalım. O halde *Poisson* formülü

$$\Phi(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu^*=1}\left(\frac{1-xx^*}{1-2xu^*+xx^*}\right)^{n-1}\Phi(u)\dot{u}$$

(2.4.1) denklemini sağlayan birim küre içerisindeki fonksiyonu tanımlar. Ayrıca $\upsilon\upsilon^* = 1$ olacak şekilde, tüm $\upsilon$ lar için

$$\lim_{r\to 1}\Phi(r\upsilon) = \Phi(\upsilon)$$

dir.

**İspat:**

$r < 1$ iken, $P(x,u)$ , (2.4.1) i sağlar. Böylece integral işareti altında diferensiyeli alınırsa, $\Phi(x)$ in de ayrıca (2.4.1) i sağladığı görülür.

Şimdi $r \to 1$ iken $\Phi(r\upsilon) - \Phi(\upsilon)$ un 0 a gittiğini ispat etmeliyiz.

$$\Phi(r\upsilon) - \Phi(\upsilon) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \left( \frac{1-r^2}{1-2ru\upsilon^*+r^2} \right)^{n-1} \Phi(u) - \Phi(\upsilon)\dot{u}$$

elde edilir.

$\cos\alpha = \upsilon u^*$ olsun, integral ikiye ayrılırsa;

$$\Phi(r\upsilon) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \left( \int \cdots \int_{|\alpha|<\delta} + \int \cdots \int_{|\alpha|<\delta} \right) \equiv s_1 + s_2$$

dir. Yeterince küçük bir $\delta$ seçersek,

$$|\Phi(u) - \Phi(\upsilon)| < \varepsilon$$

olacak şekilde

$$s_1 = O\left( \varepsilon \int \cdots \int_{uu^*=1} \left( \frac{1-r^2}{1-2ru\upsilon^*+r^2} \right)^{n-1} \dot{u} \right) = O(\varepsilon)$$

elde ederiz. Şimdi yukarıda seçilen $\delta$ için, $r$ yi 1 e yeterince yakın alırsak,

$$\left| \frac{1-r^2}{1-2ru\upsilon^*+r^2} \right|^{n-1} \leq \varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$s_2 = O(\varepsilon)$$

dur.

## 2.7 Simetri Prensibi

Simetri prensibinin önemli olmasının nedenlerinden biri,

$$\left[ \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\delta^2}{\delta\theta^2} \right] \Phi = 0$$

2-boyutlu *Laplace* denkleminin tersine çevrildiğinde değişmez kalmasıdır.

$\tau = 1/\rho$ dersek,

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho} = -\tau\frac{\partial}{\partial\tau}$$

olur.

Bununla birlikte, $n \geq 3$ için, bu özellik sağlanmaz.

$$\frac{1}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\partial_u^2=\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+(n-1)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\partial_u^2$$

*Laplace* denklemi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{n-2}}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho^{n-2}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\partial_u^2 &= \tau^{n-2}\left(\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{1}{\tau^{n-2}}\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right)+\partial_u^2\\ &= \tau^{n-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau^{-n+3}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)+\partial_u^2\\ &= \tau^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-(n-3)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\partial_u^2,\end{aligned}$$

halini alır.

Böylece *Laplace* denkleminin ters dönüşüm altında sabit kaldığı bulunur.

Eğer $\Phi$ yerine $\tau^{n-2}\psi$ yazıp, 1. türevi alınırsa,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=\tau^{n-2}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}+(n-2)\,\tau^{n-3}\Psi$$

2. türevi alınırsa,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}=\tau^{n-2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+2(n-2)\tau^{n-3}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}+(n-2)(n-3)\tau^{n-4}\Psi$$

elde edilir.

Buradan,

$$\left[\tau^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-(n-3)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\partial_u^2\right]\Phi=\tau^{n-2}\left[\tau^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+(n-1)\tau\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right]+\tau^{n-2}\partial_u^2\Psi$$

olup, $x$ değişkenine bağlı, $\Phi$ fonksiyonu için

$$y=x/xx^*\ ,\Psi(y)=(xx^*)^{\frac{n}{2}-1}\Phi(x),$$

dönüşümü altında *Laplace* denklemi değişmezdir.

Diğer bir deyişle, $n$-boyutlu *Laplace* denkleminin simetri prensibinin, $x$ değişkenine bağlı $\Phi$ fonksiyonu dönüşmüş olur.

$$\frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}\partial_u^2\Phi=0$$

diferensiyel denklemi, $\rho = 1/\tau$ dönüşümü altında değişmezdir.

## 2.8 Laplace Denkleminin Değişmezliği

*Laplace* denklemi

$$y=\frac{(1-aa^*)(x-a)-(x-a)(x-a)^*a}{1-2ax^*+aa^*xx^*}, \qquad (aa^*<1) \tag{2.8.1}$$

altında değişmez kalmaz. Eğer diferensiye edilmiş fonksiyon dönüştürülürse, fonksiyonun diğer değişmezlik özelliklerini bulabiliriz. Bağımsız değişken (2.8.1) e göre dönüşüme uğrarsa ve fonksiyon da

$$Y=\left(\frac{1-2ax^*+aa^*xx^*}{1-aa^*}\right)^{\frac{n}{2}-1}X \tag{2.8.2}$$

ile dönüşüme uğrarsa, buradan

$$(1-xx^*)^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}=(1-yy^*)^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2} \tag{2.8.3}$$

yazılabilir.

Yukarıdaki ifadeyi ispatlamadan önce, doğrudan $n+1$ fonksiyonun, *Laplace* denklemini sağladığını ispatlayalım.

$$\Phi(x)=(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{1-\frac{n}{2}} \tag{2.8.4}$$

ifadesi

$$\Psi(x)=(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-\frac{n}{2}}\left[(1-aa^*)(x-a)-(x-a)(x-a)^*a\right] \tag{2.8.5}$$

biçiminde de yazılabilir.

Yukarıdaki ifade vektör olup $n$ bileşenli bir fonksiyondur. Önce $\Phi(x)$ fonksiyonunun harmonik fonksiyon olduğunu ispatlayalım.

1. türevini alalım.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 2\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(1-2ax^*+aa^*xx^*\right)^{-\frac{n}{2}}\left(aa^*x_i-a_i\right)$$

2. türevini de alıp, Laplace denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} &= 4\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}\right)\left(1-2ax^*+aa^*xx^*\right)^{-\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{n}(aa^*x_i-a_i)^2 \\ &\quad +2\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(1-2ax^*+aa^*xx^*\right)^{-\frac{n}{2}} naa^* \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\Psi(x)$ fonksiyonunun harmonik olduğunu ispatlayalım.

1. türevi alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} &= -n\left(1-2ax^*+aa^*xx^*\right)^{-\frac{n}{2}-1}\left(aa^*x_i-a_i\right)\left[\left(1-aa^*\right)(x-a)-(x-a)(x-a^*)a\right] \\ &\quad +\left(1-2ax^*+aa^*xx^*\right)^{-\frac{n}{2}}\left[(1-aa^*)e_i-2(x_i-a_i)a\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $e_i = (0,0,...,0,1,0,...,0)$ olup $i$. elemanı 1 ve gerisi 0 dır.

2.türevi alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} &= n(n+2)(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-\frac{n}{2}-2}(aa^*x_i-a_i)^2\left[\left(1-aa^*\right)(x-a)-(x-a)(x-a^*)a\right] \\ &\quad -n(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-\frac{n}{2}-1}aa^*\left[\left(1-aa^*\right)(x-a)-(x-a)(x-a^*)a\right] \\ &\quad -2n(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-\frac{n}{2}-1}(aa^*x_i-a_i)\left[(1-aa^*)e_i-2(x_i-a_i)a\right] \\ &\quad +(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-\frac{n}{2}}(-2a)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2} &= n(n+2)(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-n/2-1} \\
&\quad\times aa^*[(1-aa^*)(x-a)-(x-a)(x-a)^*a] \\
&\quad-n^2(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-n/2-1}aa^*[(1-aa^*)(x-a) \\
&\quad-(x-a)(x-a^*)a]-2n(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-n/2-1} \\
&\quad\times[aa^*(1-aa^*)x-(1-aa^*)a-2aa^*(xx2-ax)a \\
&\quad+2(ax^*-aa^*)a]-2n(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-n/2}a \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (2.9.3) ü ispatlamaya hazırız.

$$X=\Phi(x)Y(1-aa^*)^{\frac{n}{2}-1}$$

in kısmi türevlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
(1-aa^*)^{1-\frac{n}{2}}\frac{\partial X}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Phi(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}Y \\
(1-aa^*)^{1-\frac{n}{2}}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_j\partial y_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Phi(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\Phi(x)+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-aa^*)^{1-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_j\partial y_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i^2}\Phi(x) \qquad (2.8.6)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\Phi(x)+2\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}Y \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_j\partial y_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Phi(x) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi_j(x)}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}y_j\right] \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}Y
\end{aligned}$$

elde edilir. Son iki terimi 0 a eşit olur.

Tekrar

$$dydy^* = \frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}dxdx^*$$

olup, buradan

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}\delta_{jk}$$

ifadesi $\dfrac{\partial x_k}{\partial y_i}$ ile çarpılıp $k$ üzerinden toplanırsa,

$$\frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j},$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \frac{(1-aa^*)^2}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}\delta_{jk}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}(1-aa^*)^{1-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} &= \frac{(1-aa^*)^2\,\Phi(x)}{(1-2ax^*+aa^*xx^*)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2} \qquad (2.8.7)\\ &= (1-aa^*)^2\,(1-2ax^*+aa^*xx^*)^{-\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}\end{aligned}$$

$$1-xx^* = (1-2ax^*+aa^*xx^*)(1-yy^*)/(1-aa^*)$$

bağıntısını kullanarak

$$(1-xx^*)^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} = (1-yy^*)^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}$$

elde ederiz.

Böylece *Laplace* Denkleminin değişmezliği sağlanmış olur.

## 2.9 Laplace Denklemi İçin Ortalama Değer Formülü

**Teorem:** $xx^* \leq 1$ şeklinde birim dairede tanımlanmış ise, $\Phi(x) = \Phi(\rho u)$ fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\partial_u^2\Phi = 0 \qquad (2.9.1)$$

*Laplace* denklemini sağlar ve o zaman $0 \leq \rho \leq 1$ iken fonksiyon 2. basamaktan sürekli kısmi türevlere sahiptir.

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \Phi(\rho u) \dot{u} = \Phi(0) \tag{2.9.2}$$

dir.

**İspat:**

$$F(\rho) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \Phi(\rho u) \dot{u}$$

olsun. İntegral altında türevini alıp (2.10.1) i kullanarak,

$$\frac{1}{\rho^{n-3}} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^{n-1} \frac{dF}{d\rho} \right) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \frac{1}{\rho^{n-3}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) \dot{u} = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \partial_u^2 \Phi \dot{u}$$

elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
\partial_u^2 &= \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{p-2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta_p^2} + (n-p-1) \frac{\cot \theta_p}{\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{p-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right) \\
&= \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{p-1}} \frac{1}{\sin^{n-p-1} \theta_p} \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left( \sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\dot{u} = \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \int \cdots \int_{uu^*=1} \theta_p \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$$

olup

$$\int \cdots \int_{uu^*=1} \partial_u^2 \Phi(\rho u) \, \dot{u} = \sum_{p=1}^{n-1} J_p$$

elde edilir. Burada

$$J_p = \int \cdots \int_{uu^*=1} \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left( \sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_p} \right) \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-1}}{\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{p-1} \sin^{n-p-1} \theta_p}$$

olup, $J_p$ $(n-1)$ katlı integraldir.

$p$. integral ($p < n-1$ için)

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left( \sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_p} \right) d\theta_p = \sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_p} \Big|_0^\pi = 0$$

dır.

Bu nedenle $p < n-1$ iken $J_p = 0$ olup, $p = n-1$ iken $J_p$ nin $(n-1)$. integrali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_{n-1}^2} d\theta_{n-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_{n-1}} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

bulunur. Burada $\Phi$ nin periyodikliği, $\theta_{n-1}$ e bakılarak yapılır. Böylece $J_{n-1} = 0$ olur.

Sonuç olarak,

$$\int \cdots \int_{uu^*=1} \partial_u^2 \Phi \dot{u} = 0$$

elde edilir.

Bu nedenle

$$\frac{1}{\rho^{n-3}} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^{n-1} \frac{dF}{d\rho} \right) = 0$$

olur.

Buradan $k$ sabit olmak üzere,

$$\rho^{n-1} \frac{dF}{d\rho} = k,$$

sonucu çıkarılır. Böylece $\rho = 0$ iken, $k = 0$ olduğu görülür. Böylece $F$ nin sabit olduğu görülür. Tekrar $\rho = 0$ alınırsa (2.7.2) nolu ifade elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 2.10 Laplace Denklemi İçin Poisson Formülü

$$Y(y) = \left( \frac{1 - 2ax^* + aa^*xx^*}{1 - aa^*} \right)^{\frac{n}{2}-1} X(x)$$

fonksiyonu verilsin.

Eğer $Y(y)$ ifadesi *Laplace* denklemini sağlarsa, $X(x)$ denklemi de *Laplace* denklemini sağlar.

$Y(y)$ ye ortalama değer formülü uygulanırsa,

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{vv^*=1} Y(v) \dot{v} = Y(0)$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} Y(0) &= \left(\frac{1-2aa^*+(aa^*)^2}{1-aa^*}\right)^{\frac{n}{2}-1} X(a) \\ &= \left(\frac{(1-aa^*)^2}{1-aa^*}\right)^{\frac{n}{2}-1} X(a) \\ Y(0) &= (1-aa^*)^{\frac{n}{2}-1} X(a) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} Y(v) &= \left(\frac{1-2au^*+aa^*}{1-aa^*}\right)^{\frac{n}{2}-1} X(u) \\ \dot{v} &= \left(\frac{1-aa^*}{1-2au^*+aa^*}\right)^{n-1} \dot{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-aa^*)^{\frac{n}{2}-1} X(a) &= Y(0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{vv^*=1} Y(v)\dot{v} \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} X(u) \left(\frac{1-2au^*+aa^*}{1-aa^*}\right)^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1-aa^*}{1-2au^*+aa^*}\right)^{n-1} \dot{u} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu sonuç *Laplace* denklemi için *Poisson* formülü olup,

$$X(a) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \frac{1-aa^*}{(1-2au^*+aa^*)^{\frac{n}{2}}} X(u)\dot{u} \tag{2.10.1}$$

yazılır.

Bu sonuç da bize *Laplace* denklemi için, *Dirichlet* probleminin çözümünün tekliğini verir.

# BÖLÜM 3

# FOURIER ANALİZİ VE HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN AÇILIM FORMÜLLERİ

## 3.1 Küresel Fonksiyonların Özellikleri

Küresel polinomların birkaç özelliğini tanıtalım.

$\lambda > -\frac{1}{2}$ olduğunda, $P_m^{(\lambda)}$ küresel polinomu

$$P_m^{(\lambda)}(\xi) = \sum_{0 \leq l \leq m/2} (-1)^l \frac{\Gamma(m-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda) l!(m-2l)!} (2\xi)^{m-2l} \tag{3.1.1}$$

ile tanımlanan $m$. dereceden bir polinomdur. $m = -1$ iken $P_{-1}^{(\lambda)}(\xi) = 0$ olduğu tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} P_0^{(\lambda)}(\xi) &= 1, \qquad P_1^{(\lambda)}(\xi) = 2\lambda\xi, \\ P_2^{(\lambda)}(\xi) &= 2\lambda(\lambda+1)\xi^2 - \lambda \\ P_3^{(\lambda)}(\xi) &= (4/3)\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\xi^3 - 2\lambda(\lambda+1)\xi, ... \end{aligned}$$

olduklarını göstermek kolaydır.

Genelde, (3.1.1) denkleminden

$$mP_m^{(\lambda)}(\xi) = 2(m+\lambda-1)\xi P_{m-1}^{(\lambda)}(\xi) - (m+2\lambda-2)P_{m-2}^{(\lambda)}(\xi) \tag{3.1.2}$$

elde edilebilir.

(3.1.2) nin sağ tarafı;

$$
\begin{aligned}
& (m+\lambda-1)\sum_{0\le l\le (m-1)/2}(-1)^l\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)}{(\lambda)l!(m-1-2l)!}(2\xi)^{m-2l} \\
& -(m+2\lambda-2)\sum_{0\le l\le (m-1)/2}(-1)^l\frac{\Gamma\left(m-2-l+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2-2l)!}(2\xi)^{m-2l-2} \\
= & \sum_{0\le l\le m/2}(-1)^l\left[\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)(m+\lambda-1)}{\Gamma(\lambda)l!(m-1-2l)!}+\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)(m+2\lambda-2)}{\Gamma(\lambda)(l-1)!(m-2l)!}\right](2\xi)^{m-2l} \\
= & \sum_{0\le l\le m/2}(-1)^l\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l)!}\left[(m+\lambda-1)\,(m-2l)+(m+2\lambda-2)l\right](2\xi)^{m-2l} \\
= & \; m\sum_{0\le l\le m/2}(-1)^l\frac{\Gamma(m-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l)!}(2\xi)^{m-2l}
\end{aligned}
$$

eşittir.

(3.1.2) formülünden

$$
\sum_{m=0}^{n}(\lambda+m)P_m^{(\lambda)}(\xi)=\frac{1}{2}\frac{(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(\xi)-(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(\xi)}{1-\xi} \qquad (3.1.3)
$$

sonucu çıkarılabilir.

(3.1.2) formülünü $\rho^{m-1}$ ile çarpılıp $m$ üzerinden toplanırsa,

$$
\sum_{m=0}^{\infty}m\rho^{m-1}P_m^{(\lambda)}(\xi)=2\sum_{m=0}^{\infty}(m+\lambda-1)\xi P_{m-1}^{(\lambda)}(\xi)\rho^{m-1}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+2\lambda-2)P_{m-2}^{(\lambda)}(\xi)\rho^{m-1}
$$

bulunur. Buradan,

$$
h(\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(\lambda)}(\xi)\rho^m
$$

olup, bu açılım

$$
\begin{aligned}
h^*(\rho) &= 2\xi\rho^{1-\lambda}\left[\rho^{\lambda}h(\rho)\right]^*-\rho^{2-2\lambda}\left[\rho^{2\lambda}h(\rho)\right]^* \\
&= 2\xi\left[\lambda h(\rho)+\rho h^*(\rho)\right]-\left[2\lambda\rho h(\rho)+\rho^2h^*(\rho)\right]
\end{aligned}
$$

veya

$$
h^*(\rho)/h(\rho)=2\lambda(\xi-\rho)/(1-2\xi\rho+\rho^2)
$$

dir.

Burada $h(0) = P_0^{(\lambda)}(\xi) = 1$ i kullanıp son ifadenin integrali alınırsa,

$$h(\rho) = (1 - 2\xi\rho + \rho^2)^{-\lambda}$$

elde ederiz. Ve böylece,

$$(1 - 2\xi\rho + \rho^2)^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(\lambda)}(\xi)\rho^m \tag{3.1.4}$$

genelleştirilmiş fonksiyonunu buluruz.

(3.1.1) formülü diferensiyellenirse,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}P_m^{(\lambda)}(\xi) &= 2\sum_{0\leq l\leq (m-1)/2}(-1)^l\frac{\Gamma(m-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l-1)!}(2\xi)^{m-1-2l} \\ &= 2\lambda\sum_{0\leq l\leq (m-1)/2}(-1)^l\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)l!(m-1-2l)!}(2\xi)^{m-1-2l}\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece diferensiyel tekrar formülünden;

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)P_m^{(\lambda)}(\xi) = 2\lambda P_{m-1}^{(\lambda+1)}(\xi) \tag{3.1.5}$$

elde edilir.

$$\left(1-\xi^2\right)\frac{d^2}{d\xi^2}P_m^{(\lambda)}(\xi) - (2\lambda+1)\xi\frac{d}{d\xi}P_m^{(\lambda)}(\xi) + m(m+2\lambda)P_m^{(\lambda)}(\xi) = 0$$

olduğunu ispat etmek gayet basittir.

Eğer,

$$\eta = (1-\xi^2)^{\lambda-1/2}P_m^{(\lambda)}(\xi) \tag{3.1.6}$$

olursa, $\eta$

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (2\lambda-3)\xi\frac{d\eta}{d\xi} + (m+1)(m+2\lambda-1)\eta = 0 \tag{3.1.7}$$

diferensiyel denklemi sağlar.

Şimdi *Rodrique* formülünü ispat edelim.

$$\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-1/2}P_m^{(\lambda)}(\xi) = \frac{(-2)^m}{m!}\frac{\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} \tag{3.1.8}$$

*Rodrique* formülünü ispat etmeden önce, (3.1.1) den elde edilen sonucu inceleyelim.

$$mP_m^{(\lambda)}(\xi) = (m+2\lambda-1)\xi P_{m-1}^{(\lambda)}(\xi) - 2\lambda\left(1-\xi^2\right)P_{m-2}^{(\lambda+1)}(\xi) \qquad (3.1.9)$$

İndirgeme kullanarak, sağ tarafı

$$\begin{aligned}
&= (m+2\lambda-1)\xi\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2}\frac{(-2)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\Gamma(m-1+\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(m-1+2\lambda)}{\Gamma(2m+2\lambda-2)}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} \\
&\quad\cdot\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-3/2} \\
&\quad -2\lambda\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2}\frac{(-2)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\Gamma(m-1+\lambda)}{\Gamma(\lambda+1)}\frac{\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(2m+2\lambda-2)}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-2} \\
&\quad\cdot\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-3/2} \\
&= \frac{(-2)^{m-1}\Gamma(m-1+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda-2)}\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2} \\
&\quad\cdot\left[\xi\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-3/2}+(m-1)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-2}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-3/2}\right] \\
&= \frac{(-2)^{m-1}\Gamma(m-1+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda-2)}\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2} \\
&\quad\cdot\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}\left\{\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-3/2}\xi\right\} \qquad (\textit{Leibniz}\text{ formülünden}) \\
&= \frac{(-2)^{m-1}\Gamma(m-1+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda-2)}\left(\frac{-1}{2m+2\lambda-1}\right)\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m} \\
&\quad\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} \\
&= \frac{-(-2)^{m-1}\Gamma(m-1+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)(2m+2\lambda-2)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda-2)(2m+2\lambda-2)(2m+2\lambda-1)} \\
&\quad\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} \\
&= \frac{(-2)^{m}\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\left(1-\xi^2\right)^{-\lambda+1/2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2}
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

## 3.2 Ortogonallik Özelliği

$f(\xi)$ fonksiyonunun $[-1,+1]$ aralığında $m$ defa sürekli türevlere sahip olduğunu kabul edelim.

*Rodrique* formülünden,

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, P_m^{(\lambda)}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-1/2} d\xi \tag{3.2.1}$$

$$= \frac{-2^m \Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} d\xi$$

bulunur.

Kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} d\xi &= f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} \Big|_{-1}^{1} \\ &\quad -\int_{-1}^{1} f^*(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} d\xi\end{aligned}$$

olur.

$\lambda > 1/2$ olduğundan,

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} d\xi = -\int_{-1}^{1} f^*(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} d\xi$$

bulunur.

Son olarak

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, P_m^{(\lambda)}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-1/2} d\xi \tag{3.2.2}$$

$$= \frac{2^m \Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)} \int_{-1}^{1} \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m f(\xi)\, d\xi$$

elde edilir.

Eğer $f(\xi)$, $m$. dereceden polinom ise, en yüksek katsayısı $a$ ya eşittir.

Buradan,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(\xi)\, P_m^{(\lambda)}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-1/2} d\xi &= \frac{2^m \Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)} a \int_{-1}^{1} \left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-1/2} d\xi \\ &= \frac{2^m \Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)\,\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)\,\Gamma(m+\lambda+1)} a\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, P_m^{(\lambda)}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-1/2} d\xi = \frac{2^{-m-2\lambda+1}\pi\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(m+\lambda+1)} a \tag{3.2.3}$$

bulunur.

Burada

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+1/2) = 2^{1-2x}\pi^{1/2}\Gamma(2x)$$

kullanılmıştır.

Eğer $f(\xi) = P_l^{(\lambda)}(\xi)$ alırsak, (2.1) denkleminden

$$a = \begin{cases} 0, & l < m, \\ 2^m \dfrac{\Gamma(m+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\, m!}, & l = m, \end{cases}$$

elde edilir. Sonra,

$$\int_{-1}^{1} P_l^{(\lambda)}(\xi)\, P_m^{(\lambda)}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-1/2} d\xi \tag{3.2.4}$$

$$= \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ \dfrac{2^{l-2\lambda}\pi\Gamma(m+2\lambda)}{\left[\Gamma(\lambda)\right]^2 (m+\lambda)\,\Gamma(m+1)}, & l = m. \end{cases}$$

bulunur.

Bu da bize küresel koordinatlardaki ortogonallik özelliğini verir.

## 3.3 Sınır Değer Problemi

Birim çember ile başlayalım.

$$f\left(e^{i\theta}\right) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right), \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta, \qquad & a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \cos n\theta d\theta, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) \sin n\theta d\theta, & \end{cases} \tag{3.3.2}$$

olacak şekilde bir *Fourier* serisi varsa,

$$f\left(\rho e^{i\theta}\right) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) \rho^n \tag{3.3.3}$$

fonksiyonu, harmonik fonksiyondur. Ve sınırdaki değeri (3.3.1) dir. İlk önce, $\rho^n \cos n\theta, \rho^n \sin n\theta$ harmonik fonksiyonlar olup $\cos n\theta$ ve $\sin n\theta$ değerlerini sınırda alır.

Şimdi bunu küre üzerinde geliştirelim.

(3.3.2) ve (3.3.3) den,

$$f\left(\rho e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\psi}\right) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\psi}\right) \left(\cos n\psi \cos n\theta + \sin n\psi \sin n\theta\right) d\psi \tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\psi}\right) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\psi}\right) \cos n\left(\theta - \psi\right) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\psi}\right) \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\left(\theta - \psi\right)\right) d\psi \end{aligned}$$

$$f\left(\rho e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\psi}\right) \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos\left(\theta - \psi\right) + \rho^2} d\psi \tag{3.3.5}$$

bulunur.

(3.3.4) ifadesi, birim daire üzerinde $f\left(\rho u\right)$ fonksiyonunun olabileceğini gösterir.

$$f\left(\rho u\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{vv^*=1} f\left(v\right) \Phi_l\left(u, v\right) \dot{v} \tag{3.3.6}$$

Eğer bu olabilir ise, $f(\rho u)$ harmonik fonksiyon olup,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{vv^*=1} f(v)\, \Phi_l(u,v)\, \dot{v} \tag{3.3.7}$$

sınır değerlerini alması beklenir.

*Laplace* denkleminin *Poisson* çekirdeğine göz atalım.

$$x = \rho v, vv^* = 1$$

olduğunda,

$$\begin{aligned} \frac{1 - xx^*}{(1 - 2xu^* + xx^*)^{n/2}} &= (1-\rho^2) \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(n/2)}(uv^*)\, \rho^m \\ &= (1-\rho^2) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{0 \le k \le m/2} c_k P_{m-2k}^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv^*)\, \rho^m \end{aligned}$$

bulunur. Burada $c_k = m - 2k + (1/2)n - 1$ dir.

$l = m - 2k$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1 - xx^*}{(1 - 2xu^* + xx^*)^{n/2}} &= (1-\rho^2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l + \frac{1}{2}n - 1}{\frac{1}{2}n - 1} P_l^{(n/2-1)}(uv^*)\, \rho^l \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l + n - 2}{n - 2} \rho^l P_l^{(n/2-1)}(uv^*) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece *Poisson* integral formülünden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{vv^*=1} \frac{(1-\rho^2)\, f(v)}{(1 - 2\rho \cos uv^* + \rho^2)^{n/2}} \dot{v} \\ = & \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+n-2}{n-2} \rho^l \int \cdots \int_{vv^*=1} P_l^{(n/2-1)}(uv^*)\, f(v)\, \dot{v} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifadeden eğer $f(v)$ küre üzerinde açılıma sahip ise,

$$f(u) \sim \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+n-2}{n-2} \int \cdots \int_{vv^*=1} P_l^{(n/2-1)}(uv^*) f(v) \dot{v} \tag{3.3.8}$$

olup, buradan harmonik fonksiyon olduğu kabul edilip,

$$f(\rho u) \sim \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+n-2}{n-2} \rho^l \int \cdots \int_{vv^*=1} P_l^{(n/2-1)}(uv^*) f(v) \dot{v} \tag{3.3.9}$$

yazılır ve $f(u)$ yu sınır şartı olarak aldığı görülür.

(3.3.8) açılımı *Laplace* serisi olarak isimlendirilir ve bu serinin genelleştirilmiş hali *Fourier* serisini verir. $\left\{P_l^{(n/2-1)}(\xi)\right\}$ küresel fonksiyonu, ayrıca *Legendre* fonksiyonu ya da *Legendre* polinomu olarak da ifade edilir.

## 3.4 Küre Üzerinde Genelleştirilmiş Fonksiyonlar

Küre üzerinde genelleştirilmiş fonksiyonu tanımlayan bir metod düşünelim. Küre üzerinde verilen sürekli bir fonksiyon, birim çember üzerinde sınır şartlarını sağlayan harmonik bir fonksiyon olsun. Diğer bir deyişle, birim çember içinde her yerde harmonik olan fonksiyon, sürekli sınır şartına gerek duymaz. Hatta sınır üzerinde fonksiyon olarak görülmeyebilir.

Küre üzerinde genelleştirilmiş fonksiyon, harmonik fonksiyonun sınır değeri olup birim daire içindedir.

$$f(\rho u) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+n-2}{n-2} \rho^l \int \cdots \int_{vv^*=1} P_l^{(n/2-1)}(uv^*) f(v) \dot{v} \tag{3.4.1}$$

açılımını düşünelim. Üstelik,

$$\lim_{l \to \infty} \left| \int \cdots \int_{vv^*=1} P_l^{(n/2-1)}(uv^*) f(v) \dot{v} \right|^{-1/l} \leq 1,$$

olup, (3.4.1) serisi birim daire içinde yakınsar ve harmonik fonksiyonu tanımlar.

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\int\cdots\int_{vv^*=1}P_l^{(n/2-1)}\left(uv^*\right)f\left(v\right)\dot{v}$$

Şimdi, birim kürede genelleştirilmiş bir fonksiyonu *Laplace* serisi ile gösterebiliriz.

## 3.5 Küre Üzerinde Harmonik Analiz

*Laplace* serisi, *Fourier* serisinin en kesin genelleştirmelerinden biri değildir.

$\gamma$, $n$-boyutlu uzayın birim küresini temsil etsin. $u = (u_1, ..., u_n)$ vektörü

$$uu^* = 1 \tag{3.5.1}$$

olduğunu sağlar.

Küresel koordinatlarda, $\gamma$ küresi;

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos\theta_1, \\ u_2 &= \sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ u_n &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n, \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$0 \le \theta_r \le \pi \quad (1 \le r \le n-2), \quad 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi. \tag{3.5.3}$$

dir.

Kürenin hacim elemanı

$$\dot{u} = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}, \tag{3.5.4}$$

ve toplam hacmi

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{n-1} = \int \cdots \int_{uu^*=1} \dot{u} \qquad (3.5.5) \\ &= \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}. \end{aligned}$$

'e eşittir.

Küre üzerinde harmonik analizin ana amacı; $\gamma$ üzerinde ortonormal olan

$$\varphi_i(u) = \varphi_i(u_1, ..., u_n), \qquad i = 0, 1, 2, ...,$$

fonksiyonların sistemini bulmaktır. Yani

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu^*=1} \varphi_i(u)\varphi_j(u)\dot{u} = \delta_{ij},$$

dir.

Üstelik, $f(u)$, $\varphi_i(u)$ nun lineer kombinasyonları tarafından hesaplanabilir.

$\varepsilon > 0$ verilsin, $c_0, ...c_n$, var olmak üzere,

$$\left| f(u) - \sum_{i=0}^{M} c_i \varphi_i \right| < \varepsilon$$

yazılabilir.

Bunun yanında

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(u), \qquad c_i = \int \cdots \int_{vv^*=1} f(v)\varphi_i(v)\dot{v}$$

$f(u)$ fonksiyonunun *Fourier* serisi olarak tanımlanabilir.

## 3.6 Değişmez Denklemlerin Poisson Çekirdeğinin Açılımı

$$\left(\frac{1-xx^*}{1-2xu^*+xx^*}\right)^{n-1}$$

açılımını tekrar düşünelim.

$x=\rho\upsilon$ , $\upsilon\upsilon^*=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-xx^*}{1-2xu^*+xx^*}\right)^{n-1} &= \left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho u\upsilon^*+\rho^2}\right)^{n-1} \qquad (3.6.1)\\
&= \left(1-\rho^2\right)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(n-1)}\left(u\upsilon^*\right)\rho^m\\
&= \left(1-\rho^2\right)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma\left(n-1\right)}\sum_{0\le k\le\frac{m}{2}} c_k P_{m-2k}^{(n/2-1)}\left(u\upsilon^*\right)\rho^m\\
&= \left(1-\rho^2\right)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma\left(n-1\right)}\sum_{t=0}^{\infty}\psi_l\left(\rho\right)P_l^{(n/2-1)}\left(u\upsilon^*\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada ,

$$\begin{aligned}
\psi_l(\rho) &= \rho^l\sum_{k=0}^{\infty}c_k\rho^{2k}\\
&= \rho^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l+\frac{1}{2}n-1}{k!}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{\Gamma\left(l+k+n-1\right)}{\Gamma\left(l+k+\frac{1}{2}n\right)}\rho^{2k}\\
&= \rho^l\frac{\Gamma\left(l+n-1\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n-1\right)}F\left(\frac{1}{2}n, l+n-1; l+\frac{1}{2}n;\rho^2\right)
\end{aligned}$$

dir ve $F\left(\alpha,\beta,\gamma;x\right)$ hipergeometrik seridir.

Bir hipergeometrik serinin özelliğinden,

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma;x\right)=\left(1-x\right)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\gamma,\alpha-\beta,\gamma;x\right)$$

ve $\alpha+\beta-\gamma<0$ iken,

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma;1\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha-\alpha-\beta\right)\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\alpha-\alpha\right)\Gamma\left(\gamma-\beta\right)}$$

dur. Bu da ,

$$\lim_{\rho\to1}\tau_l\left(\rho\right)=1 \qquad (3.6.2)$$

i sağlayan

$$\tau_l(\rho)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n\right)}F\left(l,-\frac{1}{2}n+1;l+\frac{1}{2}n;\rho^2\right) \tag{3.6.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho u\upsilon^*+\rho^2}\right)^{n-1} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma(n-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+n-1)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n-1\right)} \\ &\quad \times\rho^l F\left(l,-\frac{1}{2}n+1;l+\frac{1}{2}n;\rho^2\right)P_l^{(n/2-1)}(u\upsilon^*) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma(n-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+n-1)\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma(l+n-1)} \\ &\quad \times\tau_l(\rho)\rho^l P_l^{(n/2-1)}(u\upsilon^*) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\tau_l(\rho)\rho^l P_l^{(n/2-1)}(u\upsilon^*)\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

olarak da yazılabilir.

Böylece *Poisson* formülü,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{\upsilon\upsilon^*=1}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho u\upsilon^*+\rho^2}\right)^{n-1}f(\upsilon)\dot{\upsilon} \\ =\ &\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\tau_l(\rho)\rho^l\int\cdots\int_{\upsilon\upsilon^*=1}P_l^{(n/2-1)}(u\upsilon^*)f(\upsilon)\dot{\upsilon}\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

olarak da yazılabilir. Diğer bir deyişle, eğer verilen $f(u)$ fonksiyonu

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\int\cdots\int_{\upsilon\upsilon^*=1}P_l^{(n/2-1)}(u\upsilon^*)f(\upsilon)\dot{\upsilon} \tag{3.6.6}$$

yakınsayan *Laplace* serisine sahipse, o zaman birim küre içerisinde değişmez denklemler

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\tau_l(\rho)\rho^l\int\cdots\int_{\upsilon\upsilon^*=1}P_l^{(n/2-1)}(u\upsilon^*)f(\upsilon)\dot{\upsilon}$$

çözümüne sahiptir ve bu çözüm, $f(\upsilon)$ u sınır değeri olarak alır.

# BÖLÜM 4

# SONUÇ

Birçok matematik problemlerinin çözümünde kullanılan bölgelerin yerine başka bir bölgede çalışılması gerekebilir. Onun için bir bölgeyi başka bir bölgeye dönüştüren dönüşümler gerekebilir.

Bu tezde, n-boyutlu uzayda birim küreyi birim küreye çeviren bir dönüşüm ele alınmıştır. Daha sonra birim kürenin geometrisinden bahsedilmiştir. Daha sonra Poisson formülü elde edilmiştir. Ayrıca Laplace denkleminin aynı dönüşüm altında değişmez olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, bu dönüşüm kullanılarak birim kürenin hacim elemanı ve toplam hacmi bulunabilir. Ayrıca harmonik fonksiyonların diklik ve bazı diğer özellikleri de bu çalışma neticesinde elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ebner, L., ve Koranyi, A., 1963, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Amer. Math. Soc., Providence, 164p.

Eser, D., ve Özer, M.N., 2002, Diferensiyel Denklemler, Birlik Yay., Eskişehir, Türkiye, 501s.

Koca, K., 2003, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz, İstanbul, Türkiye, 233s

Axler, S, J.2001, Harmonic Function Theory 2nd Edition, Springer, New York, America, 280p.