n. Mertebeden Genelleştirilmiş Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Serkan Kızılavuz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Kasım 2020

Some Fixed Point Theorems on Generalized Metric Space with order n

Serkan Kızılavuz

MASTER OF SCIENCE THESIS

Deparment of Mathematics - Computer

November 2020

n. Mertebeden Genelleştirilmiş Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Serkan Kızılavuz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

”Bu tez ESOGÜ BAP tarafından 201919A108 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Kasım 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özcan GELİŞGEN danışmanlığında hazırlamış olduğum “n.Mertebeden Genelleştirilmiş Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremleri” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 25/11/2020

Serkan KIZILAVUZ

ÖZET

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmada, bir metrik uzayın sırasıyla 2-metrik, D-metrik, Quasi-metrik ve G metrik olmak üzere dört ayrı genellemesi olmasına rağmen bu tezde en genel metrik uzay olan G_n-metrik uzay ve bu uzayda bazı genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Birinci ve ikinci bölümlerde sabit nokta teorisi ve 1906 yılında Fréchet tarafından tanımlanan ”uzaklık fonksiyonu” kavramının tarihsel olarak gelişiminden bahsedilip, daha sonra F. Hausdorff tarafından metrik ismi verilen dönüşümün zaman içinde genellemesi olduğu iddia edilen 2-metrik, D-metrik hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Üçüncü Bölümde, bazı temel tanımlar, kontrol fonksiyonları, metrik ve topolojik yapılara değinilmiştir.

Dördüncü bölümde, G-metrik hakkında bilgi verilip, G-metrik uzayın sağladığı bazı özelliklere değinilmiştir.

Beşinci bölümde, metrik uzay konseptine en yeni ve en genel yaklaşım olan G_n-metrik uzay kavramın tanıltılmış, sağlanan özelliklerden bahsedilip topolojisi hakkında bilgi verilmiştir.

Altıncı bölümde, standart metrik uzaydaki bazı sabit nokta teoremlerini sırasıyla standart, G ve G_n-metrikteki karşılıkları verilip gerekmedikçe sadece G_n-metrikte ispatları verilmiştir.

Yedinci ve sekizinci bölümlerde bulgular ve tartışma ile sonuç ve öneriler ile tez bitirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Metrik Uzay, Metrik Uzay, Sabit Nokta Teorisi

SUMMARY

In this eight-chapters study, although there are four generalizations of a standart metric space, namely 2-metric, D-metric, Quasi-metric and G metric we try to give a more general meaning to standart metric with G_n-metrik space and after that some fixed point theorems are given.

In the first and second chapters, the historical development of the concept of distance function which is defined by Fréchet in 1906 and later called **metric** by F.Hausdorff and some short information was given about the 2-metric, D-metric which was claimed to be generalized metric over time.

In the third chapter, some basic definitions, control functions, metric and topological structures are mentioned.

In the fourth chapter, information about G-metric space has been given and some features of G-metric space have been mentioned.

In the fifth chapter, G_n metric space is defined as the newest and most general approach, also given some properties and informations about it's proporties and it's topology.

In the sixth chapter, some fixed point theorems are given respectively standart, G-metric and G_n-metric. And only proofs in the G_n-metric are given unless necessary.

In the seventh and eighth chapters, results and discussion along with conclusion and recommendations can be found.

Anahtar Kelimeler: Generalized Metric Space, Metric Space, Fixed Point Theory

TEŞEKKÜR

[redacted]

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Fonksiyonel analiz temel olarak lineer ve lineer olmayan şekilde katagorilere ayrılan matematiğin önemli bir dalıdır. Sonsuz küçük girdilerin mikroskopik çıktılar ile sonuçlanabileceği doğrusal olmayan bir dünyada yaşıyoruz. Bu nedenle, fonksiyonel analiz ayrı ve pratik bir matematik alanına dönüşür. Ayrıca benzer gerekçe ile lineer olmayan fonksiyonel analiz bağımsız ve kullanışlı bir konu haline gelmiştir.

Sabit nokta teorisi modern matematiğin çok güçlü ve verimli araçlarından birisidir ve lineer olmayan analizin çekirdek (temel) bir konusu olarak göz önüne alınabilir. Teorinin orijini 19. yüzyılın sonlarına uzanan, özellikle diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğini teşkil etmek için ardışık yaklaşımların kullanımına dayanır. Bu metod Cauchy, Fredholm, Liouville, Lipschitz, Peano ve Picard gibi birçok meşhur matematikçi ile ilişkilidir. Banch'ın formülasyonu metrik sabit nokta teorisinin başlangıç noktası olarak kabul edildiğini belirtmek gereklidir. Ancak sabit nokta teorisi Felix Brouwer'in büyük katkısı olmadan matematiğin aktif ve hayati bir dalı olarak lineer olmayan fonksiyonel analizin gelişimi yeterince ivme kazanamazdı.

Sabit nokta teorisi, T bir X kümesi üzerinde tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere $x = T(x)$ formundaki operatör denkleminin çözümü olan X kümesinin x noktalarının varlığını garanti eden koşullar ile ilgilenir. Böylesi bir problemin çözüm kümesi boş olabilir, bir sonlu küme olabilir veya bir sayılabilir yada sayılamaz sonsuz bir küme olabilir. Sabit nokta teorisi matematiksel analizin çeşitli alanlarında ortaya çıkan problemlerin çözümü için gerekli araçları sağlar. Bölünmüş fizibilite problemleri, değişken eşitsizlik problemleri, lineer olmayan optimizasyon problemleri, denge problemleri, tamamlayıcı problemler, seçme ve eşleme problemleri, integral ve diferansiyel denklemlerin çözümlerinin ispatı gibi problemlerin çözümü kategorisine girer. Özellikle çözümler lineer olmayan fonksiyonel analizde derin köklere sahiptir.

Sabit nokta teorisindeki araştırmalar genel olarak

(a) Sabit noktaların varlığını garanti eden dönüşüm üzerindeki kısıtlayıcı koşulların azaltılmasının araştırılmasını,

(b) Sabit noktaların tekliğini garanti eden koşulların çalışılmasını,

(c) Daha genel uzaylar elde etmek için tanımların, tanım kümelerinin yapılarının değiştirilmesini, zenginleştirilmesini ve genişletilmesi çalışmalarını,

(d) Karakterizasyon tanımlaması çalışmalarını,

(e) Sabit noktaların yaklaşım ve inşaa araştırmalarını,

(f) İnceleme altındaki dönüşümün sabit noktalarının kümesinin yapısının çalışılmasını

konularını içerir.

Sabit nokta teorisinde üç temel yaklaşım vardır. Bunlar ise metrik yaklaşım, topolojik yaklaşım ve ayrık yaklaşımdır. Tarihsel olarak bu yaklaşımlar üç büyük teoremin keşfi ile başlar. Bu teoremler sırasıyla, Banach sabit nokta teoremi, Brouwer sabit nokta teoremi ve Tarski sabit nokta teoremdir.

Bu tez çalışmasında sabit nokta teorisinin metrik yaklaşımı temel alınarak yukarıda listenen araştırma alanlarından (c) ile ifade edilen daha genel uzaylardaki dönüşümlerin sabit noktaların varlığı ve tekliği üzerine araştırmalar yapılmıştır. Biraz daha açık ifade edilecek olursa 1906 yılında Fréchet in tanılamasıyla başlayan metrik uzay kavramı, sonrasında Gähler tarafından 2-metrik uzay olarak, Dhage tarafından D-metrik uzay olarak genelleştirilmeye çalışılmış ancak bazı aksaklıklar olduğu ortaya çıkarılmıştır. Sonrasında Mustafa ve Sims çalışmaları ile alışılmış metrik uzay kavramını G-metrik uzay adını verdikleri uzaya genellemişlerdir. Şimdilerde bu kavramda G_n-metrik uzay şeklinde dahada genellenmiştir. Bu tez çalışmasında G_n-metrik uzayda, alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen bazı sabit nokta teoremleri ele alınmış ve bu uzaydaki karşılıkları verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

2.1 Kısa Bir Araştırma İle Giriş

1906 yılında Frechet, boştan farklı bir X kümesinin elemanlarının her (x, y) çiftini negatif olmayan $d(x, y)$ reel sayısına eşleyen d ”uzaklık” fonksiyonunu tanıttı. Buna göre $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

(d1) $x = y$ ise $d(x, y) = 0$

(d2) $x \neq y$ ise $d(x, y) > 0$

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$

(d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomlarını sağlar. İlk başlarda ’uzaklık fonksiyonu’ olarak adlandırılan kavram sonralarda ilk kez Hausdorff tarafından ’metrik’ ismi ile kullanılmıştır. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

2.2 2-Metrik Uzay

1963 ve 1966 yıllarında yayınladığı makaleler ile Gähler, alışılmış metrik uzayın bir genelleştirmesi olduğunu iddia ettiği 2-metrik uzayı tanıttı. X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \times X \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ fonksiyonu

(t1) Farklı $x, y \in X$ noktaları için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır.

(t2) (x, y, z) üçlüsünün herhangi iki elemanı birbirine eşit ise $d(x, y, z) = 0$ dır.

(t3) (x, y, z) üçlüsünün tüm permütasyonları için

$$d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(z, x, y) = d(z, y, x) = d(y, z, x) = d(y, x, z)$$

dır.

(t4) Her $x, y, z, a \in X$ için

$$d(x, y, z) \leq d(a, y, z) + d(x, a, z) + d(x, y, a)$$

dır.

aksiyomlarını sağlayan d fonksiyonuna bir "2-metrik", (X, d) ikilisine bir 2**-metrik uzay** ismi verilir. $\mathbb{R}^2$ analitik düzleminde, her $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ noktaları için bu noktalar üzerinde oluşturulan üçgenin alanını veren fonksiyon göz önüne alındığında bu fonksiyonun bir 2-metrik olduğu kolaylıkla görülebilir. Gahler 1963 yılında yayınladığı bir makalede 2-metrik ifadesinin alışılmış metriğin fonksiyonunun bir genellemesi olduğunu iddia etmiştir. Ancak 1988 yılında **Ha et al** yayınladığı bir makalesi ile 2-metrik fonksiyonunun değişkenleri üzerinde sürekli olması gerekmediğini göstermiştir. Ayrıca özellikle alışılmış metrik uzay ve 2-metrik uzaydaki büzülme dönüşümü teoremi birbiri ile alakasızdır. Dolayısıyla 2-metrik uzayın, alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olmadığı anlaşılmıştır. Bunun üzerine 1992 yılında Dhage yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay yapısı tanımlamış ve buna D-metrik uzay ismini vermiştir.

2.3 D-Metrik Uzay

X boştan farklı bir küme olmak üzere $D : X\times X\times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için

(D1) $D(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ dir.

(D2) (x, y, z) üçlülerinin tüm permütasyonları için

$$D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(z, x, y) = D(z, y, x) = D(y, z, x) = D(y, x, z)$$

dir

(D3) $\forall x, y, z, a \in X$ için

$$D(x, y, z) \leq D(a, y, z) + D(x, a, z) + D(x, y, a)$$

dir.

koşullarını sağlıyor ise D fonksiyonuna bir "**D-metrik**", (X, D) ikilisine bir **D-metrik uzay** veya **Genelleştirilmiş Metrik Uzay** adı verilir. Bir D metrik uzayında $\forall x, y, z \in X$ için

$$D(x, y, y) < D(x, z, z) + D(z, y, y)$$

özelliği fazladan bir özellik olarak verilebilir. Eğer her $x, y \in X$ için $D(x, x, y) = D(x, y, y)$ ise D-metriğine "**simetriktir**" denir. $\mathbb{R}^2$ de $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ noktalarını köşe kabul eden bir üçgenin çevresi D metriğine verilebilecek tipik bir örnektir. Dhage 1992 yılında yayımladığı bir makalesinde (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\forall x, y, z \in X$ için,

(E_1) $D_s(d)(x, y, z) = \dfrac{1}{3}[d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)]$

(E_2) $D_m(d)(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$

şeklinde tanılanan D-metrik uzay örneklerini vermiştir.

Tanım 2.1 *(X,D) bir D-metrik uzay olmak üzere bu uzayda bir (x_n) dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsaması aşağıda ifade edilen üç muhtemel şekilde tanımlanır.*

(C_1) *$n \to \infty$ için $D(x_n, x, x) \to 0$ ise $x_n \to x$ dır.*

(C_2) *$n \to \infty$ için $D(x_n, x_n, x) \to 0$ ise $x_n \to x$ dır.*

(C_3) *$n, m \to \infty$ için $D(x_m, x_n, x) \to 0$ ise $x_n \to x$ dır.*

Yukarıda verilen tanım 2.1'den açıkça görülüyor ki C_3, C_2 yi gerektirir. Ayrıca D simetrik ise C_1 ve C_2 karşılıklı olarak birbirini gerektirirler. Genel olarak diğer çıkarımlar doğru değildir. Ayrıca Dhage, 1992 de D-metrik uzayda Cauchy dizisini aşağıdaki biçimde tanımlamıştır.

Tanım 2.2 *(X,D) bir D-metrik uzay ve (x_n) bu D-metrik uzayda bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ değeri verildiğinde $m > n > p \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $m,n,p \in \mathbb{N}$ için $D(x_m, x_n, x_p) < \epsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise (x_n) dizisine bir D-Cauchy dizisi denir.*

Dhage aynı makalesinde herhangi bir D-metrik uzayda τ ve τ^* adını verdiği iki topoloji tanımlanabileceğinden bahseder ve τ topolojisindeki yakınsaklık kavramına yöndeş olarak C_3 anlamında yakınsaklığı göz önünde bulundurarak τ^* topolojisini tanımlar. Bununla ilgili daha fazla bilgi için Dhage'nin 1994 ve 2000 yıllarında yayınladığı makaleleri incelenebilir.

2.4 D-Metrik Uzay İle İlgili Bazı Problemler

Dhage 1992 de τ^* topolojisini üreten tabanı, $x \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$(B_1) B^*(x,r) := \{y \in X | D(x,y,y) < r\}$$

formundaki açık yuvarlardan oluşan aile olarak tanımlamıştır. Buna göre τ^* topolojisinde bir dizinin yakınsaklığının C_2 yakınsaklığına denk olduğunu iddia etmiştir. Halbuki 1994 yılında D-metrik uzayındaki τ^* topolojisini incelediği makalesinde Dhage bir dizinin yakınsaklığını hem C_1 hemde C_2 anlamında yakınsaklık olarak tanımlamış ve τ^*, D-metrik topolojisindeki yakınsaklığı, X üzerindeki dizilerin yakınsaklıklarının D-metrik topolojisi ile aynı olduğunu iddia etmiştir. Ancak bu iddia doğru değildir. Mustafa ve Sims 2006 da bunun doğru olmadığını bazı örnekler vererek göstermiştir. Böylelikle D-metrik uzaydaki yakınsaklık kavramı τ^* topolojisindeki yakınsaklığa göre daha kuvvetli olduğu görülmüştür. Mustafa ve Sims yakınsaklık kavramını yalnızca C_2 anlamında yakınsaklık olarak kabül ederek düzeltmeye çalışmışlarsa da bu durum yeni bir problemin doğmasına sebep olmuştur. Bu problem C_2 anlamında yakınsak olan bir dizinin D-Cauchy dizisi olmamasıdır. Dhage 1992 yılındaki makalesinde bir τ topolojisini tanımlamanın ilk girişimini $x \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$\mathbf{(}B_2\mathbf{)}B(x,r) := \bigcap_{z\in X} \{y, z \in X | D(x,y,z) < r\}$$

olarak vermiştir. İkinci girişimini 2000 yılındaki makalesinde τ topolojisinin tanımı düzenlemek amacı ile

$$(B_2)'B(x,r) := \{y, z \in X | D(x,y,z) < r\}$$

olarak verip bunun eğer D-metrik uzayındaki bir D-Cauchy dizisinin C_3 anlamında yakınsak olan bir alt dizisi var ise bu durumda dizinin kendisinin yakınsak olduğunu iddia etmiştir. Fakat Mustafa ve Sims makalelerinde bunun genel olarak doğru olmadığını örneklerle göstermiştir. Dahası, Dhage 2006 yılındaki makalesinde bir (X, D) D-metrik uzayındaki bir $x \in X$ noktasının $A \subset X$ kümesine uzaklığını,

$$d(x,x,A) := \inf\{D(x,x,a) | a \in X\}$$

olarak tanımlamış ve $f(x) := d(x,x,A)$ fonksiyonun hem τ topolojisinde hem de τ^* topolojisinde sürekli olduğunu iddia etmiştir. Ancak bu makaledeki Lemma1.2 ve Lemma5.1 önermelerinin ispatları D üzerindeki ilgili topolojilerdeki sürekliliğe dayanmakta ve aynı zamanda hatalar içermektedir. Mustafa ve Sims aynı zamanda simetrik bir D-metriğinin yarı-metrikten elde edilse bile C_3 anlamında yakınsaklık ile değişkenleri üzerinde sürekli olması gerekmediğini ve bunu aynı yılki makalesindeki Lemma2.1 deki iddiası ile çeliştiğini göstermişlerdir.

Bu bilgilerden de anlaşılacağı üzere D-metrik uzay kavramıda alışılmış metrik uzayın bir genellemesi değildir. Bundan sonra alışılmış metrik uzay kavramının genelleştirilmesine dair çalışmalar devam etmiş ve Mustafa ve Sims G-metrik uzay kavramını tanıtmışlardır. G-metrik uzay, alışılmış metrik uzayın bir genellemesidir ve detaylı özellikleri 4. bölümde ele alınmıştır.

Sabit nokta teorisindeki araştırma konularından biride bir dönüşümün sabit noktasının varlığını ve sonrasında tekliğini garanti eden koşulların araştırılması olduğu ifade edilmiştir. Metrik sabit nokta teorisi yaklaşımında bu konu yaklaşımın çıkış noktası olan Banach büzülme prensibindeki büzülme koşulu üzerine oluşturulmuştur. Bu nedenle, Banach büzülme koşulunun değiştirilmesi ile ilgili elde edilen Banach büzülme prensibinin genelleştirilme çalışmaları literatürde büyük bir yer kaplar. Bu tür genelleştirmelere örnek olarak Kannan, Zamfirescu, Chatterjea, Edelstein vb. verilebilir. Bu tür genelleştirmelere ait bilgiler tezde bütünlüğü sağlamak adına ilgili yerde verilecektir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Ön Hazırlık

Metrik sabit nokta teorisi, değişken ve lineer eşitsizlikler, optimizasyon teori, sınır değer problemleri gibi farklı alanlardaki uygulamalarından dolayı önemli bir matematiksel disiplindir. Ayrıca teorinin lineer olmayan analizde de matris denklemleri, integral denklemleri ve polinom yaklaşımlarında bazı uygulamaları vardır.

1922 de ispatlanan Banach büzülme prensibi metrik sabit nokta teorisinin kalbinde yer alır ve lineer olmayan fonksiyonel analizin pek çok yönünde temel bir rol oynar. Prensip, $T(x) = x$ operatör denkleminin çözümünün varlığı ve tekliğini teşkil etmek için ardışık yaklaşımların kullanılmasından doğmuştur. Bu prensip geniş uygulama alanlarıyla birlikte güçlü bir araç haline gelmiştir. Özellikle diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığını ispatlamak için kullanılır. Matematik ve diğer disiplinlerdeki uygulamaları sayesinde birçok yönden genelleştirilmiştir.

Banach büzülme prensibinin genellemeleri ya dönüşümlerin tanım kümelerinin genelleştirilmesi ile ya da dönüşümler üzerindeki büzülme koşullarının genelleştirilmesi ile yapılır. Bu türden bir çok çalışma literatürde mevcuttur. Bu tez çalışmasında da bu alanda öncelikle dönüşümün tanım kümesi yani uzay genelleştirilip sonrasında genelleştirilen bu uzayda büzülme koşullarının genelleştirilmesi ile ilgili çalışmalar yapılacaktır. Ancak bu çalışmalardan bahsedilmeden önce tez boyunca kullanılacak temel kavram ve özellikler, tezi mümkün olduğunca diğer kaynaklardan bağımsız kılmak adına bu bölümde verilmiştir. Bu bölümde yer alan bilgiler Agarwal vd 2015 kaynağından özetle verilmiştir.

3.2 Kümeler, Dönüşümler ve Diziler

Tez boyunca $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ile sırasıyla negatif olmayan tam sayılar, reel sayılar, negatif olmayan reel sayılar temsil edilmektedir. Ayrıca $|x|$ ile bir reel sayının mutlak değeri gösterilmektedir. Yani, $|x| := \max\{x, -x\}$ dır. X ve Y ile boştan farklı kümeler temsil edilmek üzere X in ve Y nin elemanlarına genellikle noktalar ve $n \in \mathbb{N}$ sayısı için X^n ile X in kendisi ile n kez kartezyan çarpımı yani $X^n := X \times X \times X \ldots \times X$ ifadesi gösterilecektir. $f : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere, X kümesine, f nin tanım kümesi denir ve **Domf** ile gösterilir. Ayrıca f nin görüntü kümesi ise $\forall x \in X$ için x lerin f altındaki değerlerinin Y içinde oluşturduğu küme olup $f(X)$ ile gösterilir. Bir dönüşüm tanım kümesi, görüntü kümesi ve $\forall x \in Dom(f)$ için $f(x) \in f(X)$ile karakterize edilir. Herhangi bir X kümesi için $I_x : X \to X$ **birim dönüşümü** $\forall x \in X$ için $I_x(x) = x$ olarak tanımlanır. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna

(1) $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ iken $f(x) \neq f(y)$ veya benzer anlamda $\forall x, y \in X$ için $f(x) = f(y)$ iken $x = y$ ise f birebirdir,

(2) $\forall y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in X$ varsa f örtendir,

denir.

Önerme 3.1 *$T : X \to X$ dönüşümü örten ise $T \circ T' = I_x$ olacak şekilde $T' : X \to X$ dönüşümü vardır.*

İspat *T dönüşümü örten olduğundan her bir $x \in X$ noktası için $T(y_x) = x$ olacak şekilde en az bir $y_x \in X$ vardır.Bundan yararlanarak $\forall x \in X$ için $T'(x) = y_x$ olacak şekilde $T' : X \to X$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\forall x \in X$ için $T(T'(x)) = T(y_x) = x$ olup istenen sağlanır.*

(*) $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ dönüşümler olmak üzere, $\forall x \in Domf$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ olarak tanımlı $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonuna f ve g nin bileşkesi denir.

(*) $f, g : X \to X$ dönüşümleri ele alındığında $\forall x \in X$ için $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ise f ile g için **değişmelidir** denir.

(*) $f : X \to X$ dönüşümün iterasyonu $\{f^n : X \to X\}_{n \in \mathbb{N}}$ ile tanımlıdır ve $f^0 = I_x$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ..., $f^{n+1} = f^n \circ f$, ...dir.

(*) $f : X \to X$ dönüşümü olmak üzere

$$O_f(x) = \{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\} = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$$

kümesine $x \in X$ noktasının **yörüngesi** adı verilir..

(*) Bir X kümesi üzerindeki dizi $x : \mathbb{N} \to X$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olup, (x_n) ile temsil edilir. $(x_n) \subseteq X$ ile elemanları X kümesinde olan bir dizi işaret edilecektir. $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kesin monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $(x_{m(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ifadesine $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi denir. Yani, (x_n) dizisinin bazı terimleri atılarak geriye kalan elemanların sırasının değiştirilmeksizin elde edilen yeni diziye (x_n) dizisini bir **alt dizisi** denir. Örneğin bir $n_0 \in \mathbb{N}$ noktası için $y(x) = x_{(n+n_0)}$ olarak tanılanan $y : \mathbb{N} \to X$ dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisidir ve $(x_n)_{n \geq n_0}$ ile gösterilir.

(*) $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ bir reel sayı dizisi olsun. Buna göre,

(i) $\forall \varepsilon > 0$ değeri verildiğinde $\forall n, m \geq n_0$ özelliğindeki doğal sayılar için $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ değeri varsa (a_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ değeri verildiğinde $\forall n \geq n_0$ özelliğindeki doğal sayılar için $|a_n - L| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ değeri varsa (a_n) dizisi L noktasına yakınsıyor denir ve $(a_n) \to L$ ile gösterilir.

Aşağıdaki önermedeki ifade analizdeki önemli özelliklerden biri olup "**sandwich teoremi**" veya "**sıkıştırma teoremi**" olarak bilinir.

Önerme 3.2 *(a_n), (b_n), (c_n) birer reel sayı dizisi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n \leq c_n$ olsun. Eğer bir $L \in \mathbb{R}$ noktası için $(a_n) \to L$ ve $(c_n) \to L$ ise $(b_n) \to L$ dir.*

İspat *$\epsilon > 0$ olsun. $(a_n) \to L$ olduğundan $n \geq n_1$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n - L| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde $(c_n) \to L$ olduğundan $n \geq n_2$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $|c_n - L| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınsın. Bu taktirde $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için,*

$$b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| \leq \varepsilon \text{ ve } L - b_n \leq L - a_n \leq |a_n - L| \leq \varepsilon$$

olur. O halde buradan sonuç olarak her $n \geq n_0$ için $|b_n - L| = \max\{b_n - L, L - b_n\} \leq \varepsilon$ bulunur. Bu ise $(b_n) \to L$ olmasıdır.

Sonuç 3.1 *$(a_n), (b_n) \subseteq [0, \infty)$ iki dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olsun. Eğer $(b_n) \to 0$ ise $(a_n) \to 0$ dır.*

Sonuç 3.2 *$(a_n), (b_n), (c_n) \subseteq [0, \infty)$ üç dizi ve $L \in [0, \infty)$ için,*

$$(max(a_n, b_n)) \to 0 \text{ ve } (\max(a_n, b_n, c_n)) \to L \text{ olsun. Bu durumda } (c_n) \to L$$

sağlanır.

İspat $\forall n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned} 0 \leq |L - c_n| &\leq |L - \max(a_n, b_n, c_n)| + |\max(a_n, b_n, c_n - c_n)| \\ &\leq |L - \max(a_n, b_n, c_n)| + \max(a_n, b_n, c_n) - c_n \\ &\leq |L - \max(a_n, b_n, c_n)| + \max(a_n, b_n) + c_n - c_n \\ &= |L - \max(a_n, b_n, c_n)| + \max(a_n, b_n) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\Big(|L - max(a_n, b_n, c_n)| + \max(a_n, b_n)\Big) \to 0$$

olduğundan ***Sonuç(3.1)*** *den* $(|L - c_n|) \to 0$ *dır. Dolayısıyla* $(c_n) \to L$ *olur.*

Sonuç 3.3 $(a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ *negatif olmayan reel sayıların N adet dizisi olmak üzere*

$$(\max(a_n^1, \ldots, a_n^N))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

olsun. Bu durumda $\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *için* $(a_n^i) \to 0$ *dır.*

İspat *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n = \max(a_n^1, \ldots, a_n^N)$ *olsun. Bu taktirde her* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $0 \leq a_n \leq b_n$ *dir. O halde* ***Sonuç 3.1*** *gereğince her* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *için* $(a_n^i \to 0)$ *olur.*

Eğer maksimum 0 a yakınsamıyor ise aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 3.1 $(a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ *reel sayıların alttan sınırlı N tane dizisi olmak üzere*

$$(\max(a_n^1, \ldots, a_n^N))_{n\in\mathbb{N}} \to \delta$$

olsun. Bu durumda $\{a_{n(k)}^{i_0}\} \to \delta$ *olacak şekilde bir* $\{a_{n(k)}^{i_0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *alt dizisi ve bir* $i_0 \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *değeri vardır.*

İspat $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n = \max(a_n^1, \ldots, a_n^N)$ *olsun.* (b_n) *dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır.* $\forall n \in \mathbb{N}$ *ve* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *için* $a_n^i \leq b_n$ *olduğundan her* (a_n^i) *dizisi sınırlıdır.* $(a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ *reel sayıların sınırlı bir dizisi olduğundan* $(a_{\sigma(n)}^1) \to a_1$ *olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahiptir.* $N - 1$ *tane reel sayıların sınırlı dizileri* $(a_{\sigma_1(n)}^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_{\sigma_1(n)}^N)_{n\in\mathbb{N}}$ *göz* *önüne alınsın ve aynı zamanda δ noktasına yakınsak olan $\{b_{\sigma_1(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi düşünülsün. $(a^2_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olduğundan $\{a^2_{\sigma_2\sigma_1(n)}\} \to a_2$ olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu durumda $N-2$ tane reel sayıların sınırlı dizisi $(a^2_{\sigma_2\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a^N_{\sigma_2\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ için $(a^1_{\sigma_2\sigma_1(n)}) \to a_1$ ve $(b_{\sigma_2\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}} \to \delta$ olur. Bu süreç N kez tekrar edilir ise $\sigma = \sigma_n.\ldots.\sigma_1$ olmak üzere her $\forall i \in \{1,2,\ldots,N\}$ için $\{a^i_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \to a_i$ olacak şekilde $(a^1_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(a^N_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ biçiminde n tane alt dizisi bulunabilir. Dikkat edilirse*

$$(b_{\sigma(n)}) = (\max(a^1_{\sigma(n)}, \ldots, a^N_{\sigma(n)})) \to \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

olduğundan $\delta = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olur. Ayrıca $a_{i_0} = \delta$ olacak şekilde $i_0 \in \{1,2,\ldots,N\}$ için olur. Buradan $\exists i_0 \in \{1,2,\ldots,N\}$ değeri vardır. Böylelikle $(a^{i_0}_{\sigma(n)}) \to a_{i_0} = \delta$ olacak şekilde bir $(a^{i_0}_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi ve $i_0 \in \{1,2,\ldots,N\}$ değeri vardır.

Yardımcı Teorem 3.2 *$(a^1_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a^N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ negatif olmayan reel sayıların N adet dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için*

$$a^1_{n+1} + a^2_{n+1} + \ldots + a^N_{n+1} \leq \lambda(a^1_n + a^2_n + \ldots + a^N_n)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,\infty)$ var olsun. Bu durumda $\forall i \in \{1,2,\ldots,N\}$ için $(a^i_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ dır.

İspat *$\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = a^1_n + a^2_n + \ldots + a^N_n$ olsun. Bu taktirde $b_n \leq \lambda b_{n-1} \leq \lambda^2 b_{n-2} \leq \ldots \leq \lambda^n b_0$ dır. Eğer $b_0 = 0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = 0$ ve özellikle her $i \in \{1,2,\ldots N\}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a^i_n = 0$ olur. Böylelikle $\forall i \in \{1,2,\ldots N\}$ için $(a^i_n) \to 0$ dır. Varsayılsın ki $b_0 > 0$ ve $\forall \epsilon > 0$ olsun. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrik dizisi olup 0 a yakınsar. Buradan $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ için $\lambda^{n_0} \leq \frac{\epsilon}{b_0}$ sağlanır ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olduğunda*

$$0 \leq b_n \leq \lambda^n b_0 \leq \lambda^{n_0} b_0 \leq \frac{\epsilon}{b_0} b_0 = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ için $0 \leq a^i_n \leq b_n$ olduğundan $(a^i_n) \to 0$ sağlanır.

Sonuç 3.4 *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ bir dizi her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} \leq \lambda a_n$ olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ var olsun. Bu durumda $(a_n) \to 0$ olur.*

Negatif olmayan reel sayıların bir çifte dizisi $A : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,\infty)$ fonksiyonudur. $L \in [0,\infty)$ sayısı verilsin. Her $\varepsilon > 0$ değeri verildiğinde $m, n \geq n_0$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $|A(n,m) - L| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ değeri varsa A fonksiyonuna L ye yakınsıyor denir ve

$$\lim_{n,m\to 0} A(n,m) = L$$

ile gösterilir

3.3 Sabit, Çakışık Ve Ortak Sabit Noktalar

Tanım 3.1 *$T : X \to X$ dönüşümü için $x \in X$ noktası $T(x) = x$ koşulunu sağlıyor ise x noktasına T dönüşümünün* ***sabit noktasıdır*** *denir. T nin sabit noktalarının kümesi* ***Fix(T)*** *ile gösterilir. Benzer şekilde $T, g : X \to X$ dönüşümleri için $x \in X$ noktası $T(x) = g(x)$ koşulunu sağlıyor ise $x \in X$ noktasına T ve g nin* ***çakışık noktası*** *denir. Eğer $T(x) = g(x) = x$ koşulu sağlanır ise $x \in X$ noktasına T ve g dönüşümlerinin* ***ortak sabit noktası*** *denir. T ve g nin ortak sabit noktalarının kümesi* ***Co(T,g)*** *ile gösterecegiz.*

T, g dönüşümlerinin çakışık noktası olan x noktası aslında $T(x) = g(x)$ lineer olmayan denkleminin bir çözümüdür.

Yardımcı Teorem 3.3 *$T, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon ve $T(a) < g(a)$, $T(b) > g(b)$ olsun. Bu taktirde $\exists c \in [a,b]$ için $T(c) = g(c)$ dir.*

Sonuç 3.5 *Eğer T ve g değişmeli ve x, T ve g dönüşümlerinin çakışık bir noktası ise $y = T(x)$ de aynı zamanda T ve g nin çakışık bir noktasıdır. Buradan*

$$T(y) = T(g(x)) = g(T(x)) = g(y)$$

dir.

3.4 Kontrol Fonksiyonları

$\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümünün özelliklerinin bir listesi aşağıda verilmiştir.

(P_1) Her $0 \leq t \leq s$ için $\phi(t) \leq \phi(s)$ ise ϕ azalmayan bir dönüşümdür.

(P_2) Her $0 \leq t < s$ için $\phi(t) < \phi(s)$ ise ϕ artan bir dönüşümdür.

(P_3) $\phi(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \equiv \phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

(P_4) ϕ dönüşümü süreklidir.

(P_5) ϕ dönüşümü sağdan süreklidir.

(P_6) ϕ dönüşümü soldan süreklidir.

(P_7) ϕ dönüşümü alt-yarı süreklidir.

(P_8) ϕ dönüşümü üst-yarı süreklidir.

(P_9) Her $t > 0$ ve $\forall k \geq k_0$ için

$$\phi^{k+1}(t) \leq \lambda \phi^k(t) + v_k$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0,1)$ ve $\sum\limits_{k \geq 1} v_k$ negatif olmayan reel sayıların yakınsak serisi vardır.

(P_{10}) $\forall t > 0$ için $\sum\limits_{n \geq 1} \phi^n(t)$ serisi yakınsaktır.

(P_{11}) $\forall t > 0$ için $\lim\limits_{n \to \infty} \phi^n(t) = 0$ dir.

(P_{12}) $\forall t > 0$ için $\phi(t) < t$ dir.

(P_{13}) $\lim\limits_{t \to 0^+} \phi(t) = 0$ dir.

(P_{14}) $\forall t > 0$ için $\lim\limits_{s \to t^+} \phi(s) < t$ dir.

(P_{15}) $\forall t > 0$ için $\lim\limits_{s \to t} \phi(s) > 0$ dir.

(P_{16}) $\forall t > 0$ için $\phi(t) < 1$ dir. Yani $\phi : [0,\infty) \to [0,1)$ dır.

(P_{17}) Eğer $(\phi(t_n)) \to 1$ olacak şekilde $(t_n) \subseteq [0,\infty)$ dizisi var ise $(t_n) \to 0$ olur.

(P_{18}) $\forall t, s \geq 0$ için $\phi(s+t) \leq \phi(s) + \phi(t)$ dir.

Sonuç 3.6 *Yukarıda listelenen ϕ fonksiyonunun özellikleri arasında aşağıda ifade edilen gerektirmeler vardır.*

- $(P_1) \Rightarrow (P_2)$
- $(P_4) \Rightarrow (P_5), (P_6), (P_7), (P_8)$
- $(P_9) \Leftrightarrow (P_{10})$
- $(P_{10}) \Rightarrow (P_{11})$
- $(P_{12}) \Rightarrow (P_{13})$

Aşağıda bazı kontrol fonksiyon aileleri verilmiştir.

İsim	Aile	Özellik
Mukayese Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{com}$	$(P_1), (P_{11})$
c-Mukayese Fonksiyonları	$\mathcal{F}^c_{com}$	$(P_1), (P_9)$
Değişen Uzaklık Foksiyonu	$\mathcal{F}_{alt}$	$(P_1), (P_4), (P_3)$
Değişen Uzaklık Foksiyonuna Bağlantılı(I)	$\mathcal{F}'_{alt}$	$(P_3), (P_7)$
Değişen Uzaklık Foksiyonuna Bağlantılı(II)	$\mathcal{F}''_{alt}$	$(P_3), (P_{13}), (P_{15})$
Geraghty Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{Ger}$	$(P_{16}), (P_{17})$
Body-Wong Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{BW}$	$(P_8), (P_{12})$
Mukarjea Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{Muk}$	$(P_5), (P_{12})$
Ćirić Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{Cir}$	$(P_{12}), (P_{14})$
Browder Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{Br}$	$(P_1, (P_5)$
Krasnaselskii Fonksiyonları	$\mathcal{F}_{Kr}$	$(P_3), (P_4)$
YardımcıFonksiyonları	$\mathcal{F}_A$	$(P_1), (P_3)$

3.5 Mukayese Fonksiyonları

Matkowski, 2000 de $(P_1), (P_{11})(P_{12})$ koşullarını sağlayan fonksiyonları gözönüne alarak genel olarak (P_{11}) ve (P_{12}) arasında bir ilişki olmadığını göstermiştir. Örnegin, $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 1 \; ise \\ 2 & , t = 1 \; ise \end{cases}$$

(P_{11}) özelliğini sağlarken (P_{12}) özelliğini sağlamaz. Yani $t_0 = 1$, $\phi(t_0) = 2$, $\phi^2(t_0) = 0$,...,$\phi^n(t_0) = 0$ olup $\lim\limits_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$ olur. Ancak $t_0 = 1$ için $\phi(t_0) = 2$

olduğundan $\phi(t_0) \not< t_0$ bulunduğundan (P_{12}) özelliği sağlanmaz. Tersine

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 1 \; ise \\ \dfrac{1+t}{2} & , t > 1 \; ise \end{cases}$$

fonksiyonu (P_{12}) özelliğini sağlarken (P_{11}) özelliğini sağlamaktadır. (t_n) dizisi $t_0 = 2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_{n+1} = \phi(t_n)$ olarak alınırsa dizi 1 noktasına yakınsar ve

$$t_1 = \phi(t_0) = \phi(2) = 1 < 2 = t_0$$

dır. Böylelikle $\forall t > 0$ için $\phi(t) < t$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} \phi^n(t) \neq 0$ bulunur. Fakat ϕ azalmayan bir dönüşüm ise (P_{11}) ile (P_{12}) arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Önerme 3.3 (Matkowski, 1977**)**

$$(P_1) + (P_{11}) \Rightarrow (P_{12})$$

sağlanır.

İspat *Varsayalım ki (P_{12}) sağlanmasın. Bu durumda $\exists t_0 > 0$ sayısı için $t_0 < \phi(t_0)$ koşulu sağlanır. ϕ azalmayan bir dönüşüm olduğundan*

$$\phi(t_0) \leq \phi(\phi(t_0)) \quad ve \quad t_0 \leq \phi(t_0) \leq \phi^2(t_0)$$

olur. Tümevarım ile $\forall n \in \mathbb{N}$ sayısı için $t_0 \leq \phi^n(t_0)$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (P_{11}) özelliği sağlanmaz.

Buradan (P_1) ve (P_{11}) özelliklerini sağlayan (dolayısıyla (P_{12}) özelliğini de sağlayan) fonksiyonlara **Matkowski fonksiyonu** olarak adlandırılmasına rağmen literatürde bu fonksiyonlara **mukayese** fonksiyonları da denir.

Tanım 3.2 *$\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir azalmayan fonksiyon olmak üzere her $t > 0$ için $(\phi^n(t)) \to 0$ ise ϕ ye bir mukayese fonksiyonu denir ve tüm mukayese fonksiyonlarının ailesi "$\mathcal{F}_{com}$" ile gösterilir. Matkowski ayrıca $\mathcal{F}_{Muk}$ sınıfına ait fonksiyonları kullanarak* ***Önerme 3.3*** *ün kısmi anlamda tersine işaret etmiştir. Bu ifade aşağıdadır.*

Önerme 3.4 (Matkowski, 1977**)** *$(P_5) + (P_{12}) \Rightarrow (P_{11})$ sağlanır.*

İspat *ϕ, (P_5) ve (P_{12}) özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. ϕ fonksiyonu (P_5) özelliğinden $t = 0$ noktasında sağdan süreklidir ve (P_{12}) özelliğinden $\forall t > 0$ için $\phi(t) < t$ dir. O halde $\phi(0) = 0$ olur. $t_0 > 0$ keyfi bir nokta ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \phi^n(t_0)$ olsun. Bu taktirde iki durum söz konusudur.*

- *1.Durum;$\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$ dir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < t_{n+1} = \phi(t_n) < t_n$ olur. Bu taktirde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alttan sınırlı, azalan bir reel sayı dizisi olacağından bir $L \geq 0$ noktasına yakınsar. ϕ fonksiyonu sağdan sürekli olduğundan*

$$\phi(L) = \lim_{t\to L^+} \phi(t_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = \lim_{n\to\infty} t_{n+1} = L$$

  olur. Böylelikle $L = 0$ olup $(\phi^n(t)) \to 0$ dır.

- *2.Durum;$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ için $t_{n_0} = 0$ olsun. Bu durumda $t_{n_0+1} = \phi(t_{n_0}) = \phi(0) = 0$ olur. Tümevarım ile $\forall n \geq n_o$ için $t_n = 0$ dır. Dolayısıyla $(\phi^n(t_{n_0})) = (t_n) \to 0$ dır.*

Uyarı 3.1 *Lakshmikantham ve Ćirić, 2009 da Teorem 2.2 nin ispatında (P_{12}) ve (P_{14}) özelliklerinin (P_{11}) i gerektirdiğini söylenmiştir. Ancak bu ifade yanlıştır. Örneğin $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu*

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \; ise \\ 0 & , t > 0 \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\phi \in \mathcal{F}_{cir}$ olur ama $\lim_{n\to\infty} \phi^n(t)$ limiti yoktur. Çünkü $(\phi^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ bir birbirini sıra ile izleyen dizi olup $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ şeklindedir ve bir noktaya yakınsamaz.

Yardımcı Teorem 3.4 (Rus, 2001**)** *$\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir mukayese fonksiyonu olsun. Bu taktirde*

(1) ϕ^n nin her bir iterasyonu da yine bir mukayese fonksiyonudur.

(2) $\forall t > 0$ için $\phi(t) < t$ dır.

(3) ϕ fonksiyonu $t = 0$ noktasında sürekli ve $\phi(0) = 0$ dır.

Kullanımdaki pratiklik için Berinde,1997 da (c)-mukayese fonksiyonları, $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalmayan fonksiyon olmak üzere her $k \geq k_0$ ve her $t \geq 0$ için $\phi^{k+1}(t) \leq \phi^k(t) + v_k$ koşulunu sağlayan $\sum_{k\geq 1} v_k$ negatif olmayan terimli yakınsak bir seri, $k_0 \in \mathbb{N}$ ve $a \in (0,1)$ değerleri varsa ϕ ye (c)-mukayese fonksiyonu denir şeklinde tanımlamıştır. Bazı kaynaklarda (c)-mukayese fonksiyonları Bianchini-Grandolfi Gouge fonksiyonu olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 3.5 (Berinde, 2002**)** *$\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir (c)-mukayese fonksiyonu ise,*

(1) ϕ bir mukayese fonksiyonudur.

(2) $\forall t \in (0,\infty)$ için $\phi(t) < t$ dır.

(3) ϕ fonksiyonu $t = 0$ noktasında sürekli ve $\phi(0) = 0$ dır

(4) $\forall t \in [0,\infty)$ için $\sum\limits_{n\geq 1} \phi^n(t)$ serisi yakınsaktır.

(5) $\forall t \in [0,\infty)$ ve $n \to \infty$ için $\{\phi^n(t)\} \to 0$ olur.

(6) $\forall t \geq 0$ için $\psi_\phi(t = \sum_{n\geq 1} \phi^k(t))$ şeklinde tanımlanan $\psi_\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu azalmayandır ve $t = 0$ noktasında süreklidir.

özellikleri sağlanır.

3.6 Değişen Uzaklık Fonksiyonu ve Bağlantılı Fonksiyon

Tanım 3.3 *(Khan vd, 1984) $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli, azalmayan bir fonksiyon ve $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ koşulunu sağlıyor ise ϕ ye değişen uzaklık fonksiyonu denir ve bu fonksiyonların ailesi $\mathcal{F}_{alt}$ ile gösterilir. Buna göre*

$$\mathcal{F}_{alt} := \{\phi : [0,\infty) \to [0,\infty) | \phi \text{ sürekli, azalmayan fonksiyon ve } \phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}\}$$

dır. Büzülme ilkesini içeren birçok sabit nokta teoremi $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ ve $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ fonksiyonlarını içerir.

Önerme 3.5 *$\mathcal{F}_{alt} \subseteq \mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_{alt} \subseteq \mathcal{F}_{Kr}$ dir.*

Önerme 3.6 *$\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalmayan bir fonksiyon ve $(a_n) \subseteq [0,\infty)$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\phi(a_{n+1}) < \phi(a_n)$ koşulunu sağlıyorsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} < a_n$ dir. Özel olarak (a_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L < a_n$ dir.*

İspat *Eğer $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ için $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$ oluyor ise $\phi(a_{n_0}) \leq \phi(a_{n_0+1}) < \phi(a_{n_0})$ olacağından bir çelişkidir. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} < a_n$ olmalıdır.*

Yardımcı Teorem 3.6 *$\phi \in \mathcal{F}_A$ ve $(a_n) \subseteq [0,\infty)$ dizisi için $(\phi(a_n)) \to 0$ ise $(a_n) \to 0$ dır.*

İspat *$(\phi(a_n)) \to 0$ ve $(a_n) \to 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $m > n$ özelliğinde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı var ve $a_m \geq \epsilon_0$ olacak şekilde $\varepsilon_0 > 0$ vardır. Özel olarak (a_n) dizisinin $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_{n(k)} \geq \epsilon_0$ olacak şekilde bir $(a_{n(k)})$ alt dizisi vardır. $\phi(\{0\}) = \{0\}$ olduğundan $\phi(\epsilon_0) > 0$ olmalıdır. Üstelik ϕ azalmayan dönüşüm olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \phi(\epsilon_0) \leq \phi(a_{n(k)})$ olur. Fakat $(\phi(a_{n(k)}))$ dizisi 0 noktasına yakınsayan $(\phi(a_n))$ dizisinin bir alt dizisidir. $(\phi(a_{n(k)})) \to 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $(a_n) \to 0$ olmalıdır.*

Bir önceki yardımcı teoremdeki monotonluk koşulunu süreklilik ile değiştirirsek teorem sağlanmaz. Örnegin,
$\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\phi(t) = \begin{cases} t & ,0 \leq t \leq l \\ \dfrac{1}{t} & ,t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $a_n = n$ alınırsa $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ olup $(a_n) \to \infty$ olur. Bir çok sabit nokta teoremi $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ ve $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ olmak üzere $\psi - \phi$ farkını içeren bir büzülme koşulu kullanır.

Yardımcı Teorem 3.7 *$\psi, \phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere ψ bir azalmayan fonksiyon, $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ve $t, r, s \in [0,\infty)$ olsun. Buna göre,*

(i) $\psi(t) \leq \psi(s) - \phi(r)$ ise $t < s$ veya $r = 0$ dır.

(ii) $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ve $\psi(t) \leq (\psi - \phi)(s)$ koşulları sağlanıyor ise $t < s$ veya $t = s = 0$ dır. Yani $t \leq s$ dir.

özellikleri sağlanır.

İspat *(i) $t \geq s$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $r = 0$ olduğu ispatlanmalıdır. Gerçekten ψ azalmayan olduğundan $\psi(t) \leq \psi(s) - \phi(r) \leq \psi(s) \leq \psi(t)$ olur. Sonuç olarak $\psi(t) = \psi(s)$ ve $\phi(r) = 0$ dır. Dolayısıyla $r = 0$ dır.*

(ii) $\psi(t) \leq (\psi - \phi)(s)$ ve $t \geq s$ varsayılsın. (i) den dolayı $s = 0$ olmalıdır. O halde,

$$0 \leq \psi(t) \leq \psi(0) - \phi(0) = 0$$

bulunurki bu nedenle $\phi(t) = 0$ ve $t = 0$ dır.

Sonuç 3.7 *$\psi, \phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere ψ azalmayan fonksiyon ve $\psi^{-1}(\{0\}) = \phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ olsun. Ayrıca $(t_n), (s_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri için $(s_n) \to 0$ olsun. Bu durumda*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$için $\psi(t_n) \leq \psi(s_n) - \phi(s_n)$ ise $(t_n) \to 0$ dır.

(ii) $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\psi(t_n) \leq \psi(s_n)$ ise $(t_n) \to 0$ dır.

İspat *(i) Yardımcı teorem 3.7 nin $i)$ şıkkından $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n < s_n$ ve $t_n = s_n = 0$ dır. Buna göre her durumda $0 \leq t_n \leq s_n$ olur. Hipotezden $(s_n) \to 0$ olduğundan $(t_n) \to 0$ elde edilir.*

(ii) ψ sürekli olduğundan $(s_n) \to 0$ iken $\psi(s_n) \to \psi(0)$ olup $\psi(0) = 0$ olduğundan $(\psi(s_n)) \to 0$ dır. Ayrıca $\psi(t_n) \leq \psi(s_n)$ olduğundan $(\psi(t_n)) \to 0$ ve $(t_n) \to 0$ bulunur.

Yardımcı Teorem 3.8 *$\psi, \phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere ψ sürekli ve $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ olsun. $(t_n), (s_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri aynı $L \in [0, \infty)$ noktasına yakınsasın ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için*

$$\psi(t_n) \leq \psi(s_n) - \phi(s_n)$$

bağıntısı sağlansın. Bu durumda $L = 0$ ve $(\phi(s_n)) \to 0$ dır.

İspat *Hipotezdeki bağıntıdan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \phi(s_n) \leq \psi(s_n) - \psi(t_n)$ olur. ψ sürekli olduğundan*

$$\lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = \lim_{n\to\infty} \psi(s_n) = \psi(L)$$

olur. Böylelikle $(\phi(s_n)) \to 0$ dır. $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ olduğundan ϕ alt yarı sürekli ve $(\phi(s_n))$ nin yakınsaklığından dolayı

$$0 \leq \phi(L) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(s_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n) = 0$$

olur. Bundan dolayı da $\phi(L) = 0$ elde edilir ve $\phi(0) = 0$ olduğundan $L = 0$ bulunur.

Sonuç 3.8 *$(t_n), (s_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri aynı $L \in [0, \infty)$ noktasına yakınsasın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için*

$$\psi(t_n) \leq \psi(s_n) - \phi(s_n)$$

bağıntısını sağlayan $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ fonksiyonları var olsun. Bu durumda $L = 0$ ve $(\phi(s_n)) \to 0$ dır.

İspat *Yardımcı teorem 3.8 in özel bir halidir.*

Sonuç 3.9 $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ *ve* $(t_n), (s_n) \subseteq [0, \infty)$ *dizileri aynı* $L \in [0, \infty)$ *noktasına yakınsasın ve* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_n \leq s_n - \phi(s_n)$ *bağıntısı sağlansın. Bu taktirde* $L = 0$ *ve* $(\phi(s_n)) \to 0$ *dır.*

İspat $\forall t \geq 0$ *için* $\psi(t) = t$ *olmak üzere Yardımcaı teorem 3.8 in özel halidir.*

Yardımcı Teorem 3.9 $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$, $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ *ve* $(t_n) \subseteq [0, \infty)$ *ifadesi* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\psi(t_{n+1}) \leq \psi(t_n) - \phi(t_n)$$

bağıntısı sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $(t_n) \to 0$ *dır.*

İspat *İspat iki duruma ayrılarak verilecektir.*

1.Durum $t_{n_0} \leq t_{n_0+1}$ *olacak şekilde bazı* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayılarının olduğunu varsayılsın.* ψ *azalmayan bir fonksiyon olduğundan*

$$\psi(t_{n_0+1}) \leq \psi(t_{n_0}) - \phi(t_{n_0}) \leq \psi(t_{n_0}) \leq \psi(t_{n_0+1})$$

olur. Böylelikle $\psi(t_{n_0}) = \psi(t_{n_0+1})$ *ve* $\phi(t_{n_0}) = 0$ *dır. Bu nedenle* $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ *olduğundan* $t_{n_0} = 0$ *sonucuna varılır. Hipotezdeki bağıntıdan* $\psi(t_{n_0+1}) \leq \psi(0) - \phi(0) = 0$ *dır. Bu nedenle* $\psi(t_{n_0+1}) = 0$ *dır. Aynı zamanda* $t_{n_0+1} = 0$ *olur. Bu süreç devam ettirilerek* $\forall n \geq n_0$ *için* $t_n = 0$ *bulunur. Özel olarak da* $(t_n) \to 0$ *olur.*

2.Durum $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_{n+1} < t_n$ *olsun. O halde* (t_n) *terimleri negatif olmayan reel sayılar olan, kesin monoton azalan bir dizidir. Bu durumda* $(t_n) \to L$ *olacak şekilde bir* $L \geq 0$ *sayısı vardır.* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $0 \leq \phi(t_n) \leq \psi(t_n) - \psi(t_{n+1})$ *olduğundan ve* ψ *nin sürekliliğinden dolayı* $(\phi(t_n)) \to 0$ *dır. O halde Yardımcı teorem 3.8'e benzer yolla*

$$0 \leq \phi(L) \leq \liminf_{n \to \infty} \phi(s_n) = \lim_{n \to \infty} \phi(s_n) = 0$$

olup $\phi(L) = 0$ *ve* $L = 0$ *elde edilir. Yani* $(t_n) \to 0$ *dır.*

Yardımcı teorem 3.9 da $\forall t \geq 0$ için $\psi(t) = t$ alınır ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.10 $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ *ve* $(t_n) \subseteq [0, \infty)$ *dizisi* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_{n+1} \leq t_n - \phi(t_n)$ *bağıntısını sağlasın. Bu durumda* $(t_n) \to 0$ *dır.*

$\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ ve $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ fonksiyonları verildiğinde $s \leq t$ ise $\psi(s) \leq \psi(t)$ dir. Fakat $\psi(t) - \phi(t)$ ile $\psi(s) - \phi(s)$ arasındaki ilişki bilinmiyordu. Aşağıdaki ifade bu durum için bir yaklaşımdır.

Yardımcı Teorem 3.10 *$\psi, \phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere $\phi(0) = 0$ ve $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ olsun. $(t_n), (s_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq t_n$, $\psi(t_{n+1}) \leq \max\{\psi(t_n) - \phi(t_n), \psi(s_n) - \phi(s_n)\}$ koşullarını sağlasın. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(1) $t_{n_0} = 0$ olacak şekilde bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ değerleri varsa $\forall n \geq n_0$ için $t_n = 0$ dır. Özel olarak $(t_n) \to 0$ ve $(s_n) \to 0$ olur.

(2) ψ azalmayan fonksiyon, $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$ ise $t_{n+1} \leq t_n$ eşitsizliği her zaman sağlanır.

(3) $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ ve $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ ise (t_n), (s_n), $(\phi(t_n))$ ve $(\phi(s_n))$ dizileri 0 noktasına yakınsaktır.

İspat *(1) $0 \leq s_{n_0} \leq t_{n_0} = 0$ olduğundan $t_n = s_n = 0$ dır. Böylelikle*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \psi(t_{n_0+1}) \\ &\leq \max\{\psi(t_{n_0}) - \phi(t_{n_0}), \psi(s_{n_0}) - \phi(s_{n_0})\} \\ &= \psi(0) - \phi(0) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ olduğundan dolayı $t_{n_0+1} = 0$ dır. Tümevarım prensibi gereğince $\forall n \geq n_0$ için $t_n = 0$ sonucuna ulaşılır.

(2) ψ nin bir azalmayan fonksiyon olduğu, $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ olduğu ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$ olduğu varsayılsın. $s_n \leq t_n$ olduğundan $\psi(s_n) \leq \psi(t_n)$ dir. Böylelikle $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \psi(t_{n+1}) &\leq \max\{\psi(t_n) - \phi(t_n), \psi(s_n) - \phi(s_n)\} \\ &\leq \max\{\psi(t_n), \psi(s_n)\} = \psi(t_n) \end{aligned}$$

olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_{n+1} \leq t_n$ eşitsizliğini göstermek için bir çelişkiye ihtiyaç vardır. Buna göre $t_n < t_{n+1}$ olacak şekilde bazı $n \in \mathbb{N}$ değerlerinin olduğu varsayılsın. Bu durumda

$$\psi(t_n) \leq \psi(t_{n+1}) \leq \max\{\psi(t_n) - \phi(t_n), \psi(s_n) - \phi(s_n)\} \leq \psi(t_n)$$

bulunur. Böylelikle

$$\psi(t_n) = \psi(t_{n+1}) = \max\{\psi(t_n) - \phi(t_n), \psi(s_n) - \phi(s_n)\}$$

olur. Maksimu ifadesine bağlı olarak çelişki elde etmek için iki duruma ayrılacaktır.

(i) Eğer $\max\{\psi(t_n)-\phi(t_n),\psi(s_n)-\phi(s_n)\}=\psi(t_n)-\phi(t_n)$ *ise*

$$\psi(t_n)=\psi(t_n)-\phi(t_n)\Rightarrow\phi(t_n)=0$$

olur. $\phi^{-1}(\{0\})=\{0\}$ *olduğundan* $t_n=0$ *sonucuna ulaşılır ki bu bir çelişkidir. Çünkü* $\forall n\in\mathbb{N}$ *için* $t_n>0$ *idi.*

(ii) Eğer $\max\{\psi(t_n)-\phi(t_n),\psi(s_n)-\phi(s_n)\}=\psi(s_n)-\phi(s_n)$ *ise*

$$\psi(t_n)=\psi(s_n)-\phi(s_n)$$

olur. Buradan $\psi(t_n)=\psi(s_n)-\phi(s_n)\leq\psi(t_n)-\phi(s_n)\leq\psi(t_n)$ *olduğundan dolayı* $\psi(t_n)=\psi(s_n)$ *ve* $\phi(s_n)=0$ *neticesine varılır.* $\phi(\{0\}=\{0\})$ *olduğundan dolayı* $s_n=0$ *dır. Bundan dolayı,*

$$\begin{aligned}\psi(t_{n+1}) &= \max\{\psi(t_n)-\phi(t_n),\psi(s_n)-\phi(s_n)\}\\ &= \psi(s_n)-\phi(s_n)\\ &= \psi(0)-\phi(0)=0\end{aligned}$$

olup $t_{n+1}=0$ *bulunur. Bu ise* $t_{n+1}>0$ *olması ile çelişir. Sonuç olarak tüm durumlar için* $t_n<t_{n+1}$ *imkansızdır ve bu nedenle* $\forall n\in\mathbb{N}$ *için* $t_{n+1}<t_n$ *sonucuna ulaşılır.*

(3) Eğer $t_{n_0}=0$ *olacak şekilde bazı* $n_0\in\mathbb{N}$ *değerleri var ise (1) nolu durumdan* $\forall n\geq n_0$ *için* $t_n=0$ *olur.* $0\leq s_n\leq t_n=0$ *olduğundan* $s_n=0$ *ve* $\forall n\geq n_0$ *için* $\phi(s_n)=0$ *dır. Özel olarak* (t_n)*,* (s_n) *ve* $(\phi(s_n))$ *dizileri* 0 *noktasına yakınsar. Şimdi* $\forall n\in\mathbb{N}$ *için* $t_n>0$ *olsun. (2) nolu durumdan* $\forall n\in\mathbb{N}$ *için* $t_{n+1}\leq t_n$ *olup* (t_n) *azalmayan ve alttan sınırlı bir dizi olur. Buna göre* (t_n) *yakınsak olur. O halde* $\lim_{n\to\infty}t_n=L$ *olsun.*$\forall n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\psi(t_{n+1})\leq\max\{\psi(t_n)-\phi(t_n),\psi(s_n)-\phi(s_n)\}\leq\psi(t_n)$$

dir. ψ *sürekli olduğundan yukarıdaki eşitsizlik* $n\to\infty$ *için araştırılırsa,*

$$\lim_{n\to\infty}\max\{\psi(t_n)-\phi(t_n),\psi(s_n)-\phi(s_n)\}=\psi(L)$$

sonucu elde edilir. Buradan $\{\psi(t_n)-\phi(t_n)\}$ *ve* $\{\psi(s_n)-\phi(s_n)\}$ *dizilerinden birinin* $\psi(L)$ *noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır. O halde burada iki durum söz konusudur.* $(\psi(t_{n(k)})-\phi(t_{n(k)}))$ *dizisi* $\{\psi(t_n)-\phi(t_n)\}$ *dizisinin* $\psi(L)$ *noktasına yakınsayan bir alt dizisi olsun. Buna göre burada* ψ *sürekli ve* $(t_n)\to L$ *olduğundan dolayı*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\phi(t_{n(k)}) &= \lim_{k\to\infty}[\psi(t_{n(k)})-(\psi(t_{n(k)})-\phi(t_{n(k)}))]\\ &= \psi(L)-\psi(L)=0\end{aligned}$$

elde edilir. ϕ fonksiyonu $t = L$ noktasında alt-yarı sürekli olduğundan dolayı

$$0 \leq \phi(L) \leq \liminf_{t\to L} \phi(t) \leq \lim_{k\to\infty} \phi(t_{n(k)}) = 0$$

elde edilir. Böylelikle $\phi(L) = 0$ olduğundan $L = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $(t_n) \to L = 0$ olduğunu ispatlar.

Diğer bir durumda $(\psi(s_{n(k)}) - \phi(s_{n(k)}))$ dizisi $(\psi(s_n) - \phi(s_n))$ dizisinin $\psi(L)$ noktasına yakınsayan alt dizisi olsun. Burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 \leq s_{n(k)} \leq t_{n(k)}$ ve $(t_{n(k)}) \to L$ olduğundan $(s_{n(k)})$ sınırlı bir reel sayı dizisi olur. Sonuç olarak yakınsak bir alt diziye sahiptir. $(s_{n'(k)})$ ifadesi $(s_{n(k)})$ dizisinin bir yakınsak alt dizisi olsun. Bu taktirde $(s_{n'(k)}) \to L'$ ve $\psi(s_{n'(k)}) - \psi(s_{n'(k)}) \to \psi(L)$ olacak şekilde $L' \geq 0$ değeri vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq s_{n'(k)} \leq t_{n'(k)}$ ve $(t_{n'(k)}) \to L$ olduğundan $0 \leq L' \leq L$ dır. ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\psi(L') \leq \psi(L)$ dir. ψ aynı zamanda sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k\to\infty} \phi(s_{n'(k)}) \\ &= \lim_{k\to\infty} [\psi(s_{n'(k)} - (\psi(s_{n'(k)}) - \phi(s_{n'(k)}))] \\ &= \psi(L') - \psi(L) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak, $\lim_{k\to\infty} \phi(s_{n'(k)}) = 0$ dır. ϕ fonksiyonu $t = L$ noktasında alt-yarı sürekli olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi(L') &\leq \liminf_{t\to L'} \phi(t) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \phi(s_{n'(k)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\phi(L') = 0$ ve $L' = 0$ dır. Özel olarak $(s_{n'(k)}) \to L' = 0$ dır. Buradan ψ nin sürekliliği gereğince,

$$\psi(L) = \lim_{k\to\infty} [\psi(s_{n'(k)}) - \phi(s_{n'(k)})] = \psi(0) - 0 = 0$$

dır. Böylelikle $L = \lim_{n\to\infty} t_n$ olup her durumda $(t_n) \to 0$ olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq s_n \leq t_n$ olduğundan $(s_n) \to 0$ dır. Dahası $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \psi(t_{n+1}) &\leq \max\{\psi(t_n) - \phi(t_n), \psi(s_n) - \phi(s_n)\} \\ &= \psi(t_n) - \phi(t_n) + \psi(s_n) - \phi(s_n) \end{aligned}$$

olup bu ifade

$$\begin{aligned} 0 \leq \max\{\phi(t_n), \phi(s_n)\} &\leq \phi(t_n) + \phi(s_n) \\ &\leq \psi(t_n) + \psi(s_n) - \psi(t_{n+1}) \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. ψ sürekli olduğundan dolayı $(\max\{\phi(t_n), \phi(s_n)\}) \to 0$ sonucuna varılır. Bu nedenle $(\phi(t_n)) \to 0$ ve $(\phi(s_n)) \to 0$ olur.

Yardımcı Teorem 3.11 *$\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ ve $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ olacak şekilde iki fonksiyon ve (t_n), (s_n), $(r_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri $\forall n \in \mathbb{N}$ için $r_n \leq s_n$ ve $\psi(t_n) \leq \max\{\psi(s_n) - \phi(s_n), \psi(r_n) - \phi(r_n)\}$ koşullarını sağlayan üç dizi olsun. Eğer $t_n \to L$ ve $s_n \to L$ olacak şekilde bazı $L \in [0, \infty)$ değeri varsa $L = 0$ dır.*

İspat *ψ azalmayan bir fonskiyon olduğundan $\psi(r_n) \leq \psi(s_n)$ dir. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için;*

$$\psi(t_n) \leq \max\{\psi(s_n) - \phi(t_n), \psi(r_n) - \phi(r_n)\} \leq \max\{\psi(s_n), \psi(r_n) \leq \psi(s_n)\}$$

dir. ψ sürekli ve $(t_n) \to L$ ve $(s_n) \to L$ olduğundan Yardımcı teorem 3.1 gereğince,

$$\lim_{n\to\infty} \max\{\psi(s_n) - \phi(s_n), \psi(r_n) - \phi(r_n\} = \psi(L)$$

bulunur. O halde $(\psi(s_n) - \phi(s_n))$ veya $(\psi(s_n) - \phi(r_n))$ dizilerinden birisi $\psi(L)$ noktasına yakınsakyan bir alt dizi içerir. Bu taktirde iki duruma ayrılarak inceleme yapılır.

1.Durum *$(\psi(s_{n(k)}) - \phi(s_{n(k)}))$ dizisi $(\psi(s_n) - \phi(s_n))$ dizisinin $\psi(L)$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi olsun. Bu taktirde ψ nin sürekliliğinden ve $(s_{n(k)}) \to L$ olmasından dolayı,*

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \phi(s_{n(k)}) &= \lim_{k\to\infty} [\psi(s_{n(k)}) - (\psi(s_{n(k)}) - \phi(s_{n(k)})] \\ &= \psi(L) - \psi(L) = 0\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ϕ fonksiyonu $t = L$ noktasında alt-yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq \phi(L) \leq \liminf_{t\to L} \phi(t) \leq \lim_{k\to\infty} \phi(s_{n(k)}) = 0$$

olur. Dolayısıyla $\phi(L) = 0$ ve $L = 0$ dır.

2.Durum *$(\psi(r_{n(k)}) - \phi(r_{n(k)}))$ dizisi $(\psi(r_n) - \phi(r_n))$ dizisinin $\psi(L)$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 \leq r_{n(k)} \leq s_{n(k)}$ ve $(s_{n(k)}) \to L$ olduğundan $(r_{n(k)})$ sınırlı bir reel sayı dizisidir. Sonuç olarak, bir yakınsak alt diziye sahiptir. $(r_{n'(k)})$, $(r_{n(k)})$ nın bir yakınsak alt dizisi olsun. Bu taktirde $(r_{n'(k)}) \to L'$ ve $L' \in [0, \infty)$ için ve $(\psi(r_{n'(k)}) - \phi(r_{n'(k)})) \to \psi(L)$ olacak şekilde $L' \geq 0$ değeri vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq r_{n(k)} \leq s_{n(k)}$ ve $(s_{n(k)}) \to L$ olduğundan $0 \leq L' \leq L$ dir. ψ fonksiyonu azalmayan olduğundan $\psi(L') \leq \psi(L)$ dir. ψ sürekli olduğu için*

$$\begin{aligned}0 \leq \lim_{k\to\infty} \phi(r_{n'(k)}) &= \lim_{k\to\infty} [\psi(r_{n'(k)}) - (\psi(r_{n'(k)}) - \phi(r_{n'(k)})] \\ &= \psi(L') - \psi(L) \leq 0\end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak, $\lim_{k\to\infty} \phi(r_{n'(k)}) = 0$ dır. ϕ nin $t = L'$ noktasında alt-yarı sürekli olmasından dolayı

$$0 \leq \phi(L') \leq \liminf_{t\to L'} \phi(t) \leq \lim_{k\to\infty} \phi(r_{n'(k)}) = 0$$

dır. Böylelikle $\phi(L') = 0$ *olup* $L' = 0$ *bulunur. Özellikle* $(r_{n'(k)}) \to L' = 0$ *dır.* ψ *fonksiyonunun sürekliliğinden*

$$\psi(L) = \lim_{k\to\infty} [\psi(r_{n'(k)}) - \phi(r_{n'(k)})] = \psi(0) - 0 = 0$$

sonucuna ulaşılır. $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ *olmasından* $\psi(L) = 0$ *koşulu* $L = 0$ *olmasını gerektirir. Her durumda* $L = 0$ *olması ispatlanmış olur.*

Uyarı 3.2 *Daha önceden bahsedildiği gibi birçok sabit nokta teoremi* $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ *ve* $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ *olmak üzere* $\psi - \phi$ *farkını içeren bir büzülme koşulu içerir. Aslında bu teroremlerin birçoğu* $\phi \in \mathcal{F}''_{alt}$ *fonksiyonu kullanıldığında da geçerlidir. Ancak* $\mathcal{F}''_{alt}$ *ile* $\mathcal{F}'_{alt}$ *aileleri arasında bir kapsama bağıntısı yoktur. Örneğin;*

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & ,t = 0\, ise \\ 1 & ,t > 0\, ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon açıkça $\phi \in \mathcal{F}'_{alt}$ *dır. Ancak bu fonksiyon* (P_{13}) *özelliğini sağlamaz. O halde* $\phi \in \mathcal{F}'_{alt} \backslash \mathcal{F}''_{alt}$ *olur. Diğer taraftan*

$$\phi(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t < 1\, ise \\ 2 & , \quad t = 1\, ise \\ 1 & , \quad t > 1\, ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu da $\phi \in \mathcal{F}''_{alt}$ *dır. Fakat bu fonksiyonda* (P_7) *özelliğini sağlamaz. Dolayısıyla* $\phi \in \mathcal{F}''_{alt} \backslash \mathcal{F}'_{alt}$ *dır.*

Yardımcı Teorem 3.12 (t_n), $(s_n) \subseteq [0, \infty)$ *dizileri aynı* $L \in [0, \infty)$ *elemanına yakınsasın.* $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ *ve* $\phi \in \mathcal{F}''_{alt}$ *fonksiyonlarının* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\psi(t_n) \le \psi(s_n) - \phi(s_n)$ *bağıntısını sağladığı varsayılsın. O halde* $L = 0$ *dır.*

İspat $L > 0$ *olsun.* $\phi \in \mathcal{F}''_{alt}$ *olduğundan* $\forall t > 0$ *için* $\lim_{s\to L} \phi(s) > 0$ *dır.* ψ *sürekli olduğundan ve hipotezdeki bağıntıdan,*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \psi(t_n) &\le \lim_{n\to\infty} (\psi(s_n) - \phi(s_n)) \\ \Rightarrow \psi(L) &\le \psi(L) - L \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ancak bu ise $L > 0$ *olması ile çelişir. O halde* $L = 0$ *olmalıdır.*

Yardımcı Teorem 3.13 $\psi \in \mathcal{F}_{alt}$ *ve* $\phi \in \mathcal{F}''_{alt}$ *şeklinde tanımlı iki fonksiyon ve* $(s_n) \subseteq [0, \infty)$ *dizisi* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\psi(t_{n+1)} \le \psi(s_n) - \phi(t_n)$ *bağıntısını sağlasın. O halde* $(t_n) \to 0$ *dır.*

İspat *Yardımcı teorem 3.7 nin (ii) özelliğinden* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_{n+1} \leq t_n$ *dir. Buradan* (t_n) *artmayan negatif olmayan reel terimli bir dizi olup yakınsaktır.* $\lim_{n\to\infty} t_n = L$ *denilirse bir önceki Yardımcı teoremden* $L = 0$ *elde edilir. Böylelikle* $(t_n) \to 0$ *bulunur.*

3.7 Ćirić Fonksiyonları

Boyd ve Wong ile Mukherjea çalışmalarından ilham alınarak Lakshmikantham ve Ćirić (P_{12}) ve (P_{14}) koşullarını sağlayan fonksiyonları incelediler. Bu fonksiyonların ailesine **Ćirić fonksiyonları** denir ve $\mathcal{F}_{Cir}$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.14 $\phi \in \mathcal{F}_{Cir}$ *fonksiyonu ve* $(a_n) \subseteq [0, \infty)$ *dizisi için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

1. $M \geq 0$ *ise* $\forall t \in [0, M]$ *için* $\phi(t) \leq \max\{\phi(0), M\}$ *dir. Özellikle* $\forall t \geq 0$ *için* $\phi(t) \leq \max\{\phi(0), t\}$ *dir.*
2. $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_{m+1} \leq \phi(a_m)$ *ise* $\forall m, k \geq 0$ *için* $a_{m+k} \leq \max\{\phi(0), a_m\}$ *dir.*
3. $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_m \neq 0$ *ve* $a_{m+1} \leq \phi(a_m)$ *ise* $(a_m) \to 0$ *dır*
4. $(a_m) \to L$ *olacak ve* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $L \leq \phi(a_m)$ *koşulunu sağlayacak şekilde* $L \geq 0$ *değeri var ise* $L = 0$ *dır.*
5. $(b_m) \subseteq [0, \infty)$ *dizisi* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $b_m \leq \phi(a_m)$ *eşitsizliğini sağlayan ve ayrıca* (b_m) *dizisi "*$a_{m_0} = 0$ *olacak şekilde bazı* $m_0 \in \mathbb{N}$ *değerleri var ise* $b_{m_0} = 0$*" özelliğine sahip olsun. Bu taktirde* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $b_m \leq a_m$ *dir. Sonuç olarak* $(a_m) \to 0$ *ise* $(b_m) \to 0$ *dır.*
6. $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_{m+1} \leq \phi(a_m)$*olsun. Ayrıca "*$a_{m_0} = 0$ *olacak şekilde bazı* $m_0 \in \mathbb{N}$ *değerleri varsa* $a_{m_0+1} = 0$ *dır" özelliğinin sağlandığı varsayılsın. Bu durumda* $(a_m) \to 0$ *dır.*
7. $\phi(0) = 0$ *ise* ϕ *fonksiyonu* $t = 0$ *noktasında süreklidir.*
8. $\phi(0) = 0$*,* $(b_m) \subseteq [0, \infty)$ *dizisi* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_m \leq \phi(b_m)$ *koşulunu sağlıyor ve* $(b_m) \to 0$ *ise* $(a_m) \to 0$ *dır.*
9. $\phi(0) = 0$ *ve* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_{m+1} \leq \phi(a_m)$ *ise* $(a_m) \to 0$ *ve* $(\phi(a_m)) \to 0$ *dır.*

İspat **(1)** $M \geq 0$ *noktası sabitlensin ve* $t \in [0, M]$ *keyfi noktası alınsın.*

(i) $t = 0$ *için* $\phi(0) \leq \max\{\phi(0), M\}$ *olup aşikardır.*

(ii) $t > 0$ *için* (P_{12}) *den dolayı* $\phi(t) < t \leq M \leq \max\{\phi(0), M\}$ *olup istenilen özellik sağlanır.*

(2) *(i)* $k = 0$ *ise* $a_m \leq \max\{\phi(0), a_m\}$ *dır.*

(ii) $k = 1$ *ise her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $a_{m+1} \leq \phi(a_m) \leq \max\{\phi(0), a_m\}$ *koşulu sağlanır.*

Tümevarım prensibi gereğince $k \geq 1$ *ve* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_{m+k} \leq \max\{\phi(0), a_m\}$ *koşulu sağlansın. Buna göre koşulun* $k+1$ *için sağlandığı gösterilmelidir. Buna göre*

$$\begin{aligned} a_{m+(k+1)} = a_{(m+1)+k} &\leq \max\{\phi(0), a_{m+1}\} \\ &\leq \max\{\phi(0), \max\{\phi(0), a_m\}\} \\ &= \max\{\phi(0), a_m\} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) $a_m \neq 0$ *olduğundan* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_{m+1} \leq \phi(a_m) \leq a_m$ *eşitsizliği* (1) *koşulu gereğince sağlanır. Böylelikle* (a_m) *dizisi azalan, alttan sınırlı bir reel sayı dizisi olup yakınsaktır. Yani* $(a_m) \to L$ *olacak şekilde* $L \geq 0$ *vardır.* $L > 0$ *ise her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $0 < L \leq a_{m+1} \leq \phi(a_m) \leq a_m$ *eşitsizliği sağlanır. Buradan* $(\phi(a_m)) \to L$ *ve* (a_m) *dizisinin kesin monoton azalan bir dizi olduğu anlamı çıkar. Halbuki* $L = \lim\limits_{m\to\infty} \phi(a_m) = \lim\limits_{t\to L^+} \phi(t) < L$ *olduğundan dolayı bu bir çelişkidir. O halde* $L = 0$ *olmalıdır. Bu durumda* $(a_m) \to L = 0$ *dır.*

(4) $L > 0$ *varsayılsın.* $(a_m) \to L$ *olduğundan* $\forall m \geq m_0$ *için* $a_m \geq \dfrac{L}{2} \geq 0$ *olacak şekilde* $m_0 \in \mathbb{N}$ *değeri vardır.* $\phi \in \mathcal{F}_{Cir}$ *ve* $\forall m \geq m_0 \in \mathbb{N}$ *için* $a_m > 0$ *olduğundan* $L \leq \phi(a_m) < a_m$ *her zaman sağlanır.* $m \to \infty$ *için limit alınır ise* $(a_{m+m_0}) \to L^+$ *bulunur.* $\phi \in \mathcal{F}_{Cir}$ *olduğundan dolayı* $L = \lim\limits_{m\to\infty} \phi(a_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \phi(a_{m+m_0}) = \lim_{s\to L^+} \phi(s) < L$ *olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde* $L = 0$ *olmalıdır.*

(5) $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $b_m \leq a_m$ *olsun. Buna göre iki durum için ispat verilecektir.*

1.Durum $m \in \mathbb{N}$ *keyfi olmak üzere* $a_m \neq 0$ *ise hipotezden* $b_m \leq \phi(a_m) \leq a_m$ *olup* $m \to \infty$ *için* $a_m \to 0$ *ise* $b_m \to 0$ *olur.*

2.Durum $a_m = 0$ *ise hipotezden* $b_m = 0$ *olur ve dolayısıyla* $b_m = 0 = a_m$ *olur. Her iki durumda da* $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $b_m \leq a_m$ *olup sonuç olarak* $(a_m) \to 0$ *ise* $(b_m) \to 0$ *dır.*

(6) *1.Durum* $a_{m_0} = 0$ *olacak şekilde bazı* $m_0 \in \mathbb{N}$ *değerlerinin varolduğu varsayılsın. Bu durumda hipotezden* $a_{m_0+1} = 0$ *dır. Hipotezi tekrar tekrar kullanarak* $\forall m \geq m_0$ *için* $a_m = 0$ *olur. Böylelikle* $(a_m) \to 0$ *dır.*

2.Durum $\forall m \in \mathbb{N}$ *için* $a_m \neq 0$ *olsun. Bu durumda (3.) koşuldan dolayı* $(a_m) \to 0$ *olmalıdır.*

(7) $(b_m) \subseteq [0,\infty)$ *bir dizi ve* $(b_m) \to 0$ *koşulunu sağlasın. (1.) özellikten* $M = b_m$ *için uygulanırsa* $0 \leq \phi(b_m) \leq b_m$ *dir.* $(\phi(b_m)) \to \phi(0) = 0$ *olur. Bu ise* ϕ *fonksiyonun* $t = 0$ *noktasındaki sürekliliğini gerektirir.*

(8) ϕ*,* $t = 0$ *noktasında sürekli olduğundan* $(\phi(b_m)) \to \phi(0) = 0$ *olur ve* $(a_m) \to 0$ *dır.*

(9) *(2.) özelliğinden* $\forall m \geq 0$ *için* $a_{m+1} \leq \max\{\phi(0), a_m\} = a_m$ *dır.* (a_m) *dizisi artmayan, üsten sınırlı bir reel sayı dizisi olduğundan yakınsak olup bir* $L \in [0,\infty)$ *noktası için* $(a_m) \to L$ *dir. Eğer* $L > 0$ *ise* $0 < L \leq a_m$ *olur. Ancak (3.) özellikten* $(a_m) \to 0$ *olur. Bu* $L > 0$ *olması ile çelişir. O halde* $L = 0$ *olmalıdır.* ϕ *sürekli olduğundan* $(a_m) \to 0$ *için* $(\phi(a_m)) \to \phi(0) = 0$ *elde edilir.*

Yardımcı teorem 3.14, 5. özellikteki "$a_{m_0} = 0$ olacak şekilde bazı $m_0 \in \mathbb{N}$ değerleri varsa $b_m = 0$" koşulu kaldırılır ise sağlanmaz. Örnegin, $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\phi(0) = 1$ ve her $t > 0$ için $\phi(t) = 0$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $\phi \in \mathcal{F}_{Cir}$ dir. Genel terimleri

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{m çift ise} \\ 1, & \text{m tek ise} \end{cases}$$

$$b_m = \begin{cases} 1, & \text{m çift ise} \\ 0, & \text{m tek ise} \end{cases}$$

şeklinde verilen diziler göz önüne alınsın. O halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $b_m \leq \phi(a_m)$ bulunur. m çift iken $b_m \leq a_m$ koşulu sağlanmaz.

Yardımcı Teorem 3.15 $\phi \in \mathcal{F}_{Cir}$ *ve* $(t_n) \subseteq [0,\infty)$ *dizisi* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_{n+1} \leq \phi(t_n)$ *koşulu sağlansın. Ayrıca "*$t_{n_0} = 0$ *olacak şekilde bazı* $n_0 \in \mathbb{N}$ *değerleri varsa* $t_{n_0+1} = 0$ *dır" özelliği sağlansın. Bu durumda* $(t_n) \to 0$ *dır.*

İspat *1.Durum:* $t_{n_0} = 0$ *olacak şekilde* $n_0 \in \mathbb{N}$ *varolsun. Bu durumda hipotezden dolayı* $t_{n_0+1} = 0$ *dır. Gerçekten* $\forall n \geq n_0$ *için* $t_n = 0$ *sağlanır. Böylelikle* $(t_n) \to 0$ *dır.*

2.Durum: $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_n > 0$ *olsun.* $t_{n+1} \leq \phi(t_n) \leq t_n$ *olup dizi sınırlı, azalan olup bir* $L \in [0,\infty)$ *noktasına yakınsak olur.*$L > 0$ *ise*

$$L = \lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = \lim_{s\to L^+} \phi(t_n) < L$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $L = 0$ *olmalıdır.*

Yardımcı Teorem 3.16 *$\psi \in \mathcal{F}_{Cir}$ olsun. $(t_n), (s_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri aynı $L \in [0, \infty)$ noktasına yakınsasın ve her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \leq \psi(s_n)$ ile $L \leq s_n$ koşulları sağlansın. O halde $L = 0$ dır.*

İspat *$L > 0$ olduğunu varsayalım. $(s_n) \to L$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $s_n \geq \frac{L}{2} > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Üstelik $\psi \in \mathcal{F}_{Cir}$ ve her $n \geq n_0$ için $s_n \neq 0$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için $t_n \leq \psi(s_n) \leq s_n$ dir. Böylelikle Yardımcı teorem 3.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} \psi(s_n) = L$ olur. Ancak $\psi \in \mathcal{F}_{Cir}$ ve $(s_n) \to L$ olduğu için*

$$L = \lim_{n\to\infty} \psi(s_n) = \lim_{s\to L} \psi(s) < L$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $L = 0$ olmalıdır.

Yardımcı Teorem 3.17 *$\psi \in \mathcal{F}_{Cir}$ ve (t_n), $(s_n) \subseteq [0, \infty)$ dizileri aynı $L \in [0, \infty)$ noktasına yakınsak olsun. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L \leq t_n \leq \psi(s_n)$ koşulunu sağlasın. O halde $L = 0$ dır.*

İspat *$L > 0$ olduğu varsayılsın. $(s_n) \to L$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için $s_n \geq \dfrac{L}{2} > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Üstelik $\psi \in \mathcal{F}_{Cir}$ ve $\forall n \geq n_0$ için $s_n \neq 0$ olduğundan $L < t_n \leq \psi(s_n) < s_n$ sağlanır. Böylece Yardımcı teorem 3.1 gereğince $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} \psi(s_n) = L$ olur. Fakat $\psi \in \mathcal{F}_{Cir}$ ve $(s_n) \to L^+$ olduğundan*

$$L = \lim_{n\to\infty} \psi(s_n) = \lim_{s\to L^+} \psi(s_n) < L$$

sonucu bulunur. Bu ise açıkca bir çelişkidir. O halde $L = 0$ olmalıdır.

Yardımcı Teorem 3.18 *$\psi \in \mathcal{F}_{BW}$ ve $(a_m) \subseteq [0, \infty)$ bir dizi olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $a_{m+1} \leq \psi(a_m)$ ve $a_m \neq 0$ ise $(a_m) \to 0$ dır.*

3.8 Kontrol Fonksiyonlarının Özellikleri

Uyarı 3.3 *Kesin monoton artan $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $s, t \in [0, \infty)$ için*

$$\phi(t) \leq \phi(s) \Rightarrow t \leq s$$

özelliğini sağlar. Fakat azalmayan bir fonksiyon yukarıdaki bu koşulu sağlamak zorunda değildir. Örneğin $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$\phi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \; ise \\ 1, & \quad t > 1 \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu bir değişen uzaklık fonksiyonudur ama $t = 2$ *ve* $s = 1$ *için* $\phi(t) = 1$*,* $\phi(s) = 1$ *olup* $\phi(t) \leq \phi(s)$ *iken* $t \nleq s$ *olup yukarıdaki eşitsizlik sağlanmaz. Azalmayan fonksiyonlar için bu özelliği kullanmak literatürde sıkça yapılan bir hatadır.*

Uyarı 3.4 (P_{13}) *ve* (P_{15}) *özellikleri* (P_3) *özelliğini garantilemek için yeterince güçlü değildir. Örnegin N pozitif bir tam sayı olmak üzere*

$$A_n = \{\frac{k}{N} \in [0,\infty) : k \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots\}$$

şeklinde tanımlansın. $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *fonksiyonu* $\forall N \in \mathbb{Z}$ *için*

$$t \to \phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \in A_n \; ise \\ t, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{N} \; ise \\ 1, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda ϕ *fonksiyonu* (P_{13}) *ve* (P_{15}) *özelliklerini sağlar. Fakat sonsuz çoklukta* 0 *değerini alır.*

Önerme 3.7 $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *bir alt toplamsal fonksiyon ise* $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*,* $t \in [0,\infty)$ *için*

$$\frac{1}{n}\psi(t) \leq \psi(\frac{t}{n})$$

olur.

İspat $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *ve* $t \in [0,\infty)$ *olsun. Tümevarım presnsibi gereğince,*

$$\begin{aligned} \psi(t) = \psi(\frac{t}{n}n) &= \psi(\underbrace{\frac{t}{n} + \frac{t}{n} + \cdots + \frac{t}{n}}_{n}) \\ &\leq \psi(\frac{t}{n}) + \cdots + \psi(\frac{t}{n}) \\ &= n\psi(\frac{t}{n}) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla hipotezdeki iddia ispatlanmış olur.

Tanım 3.4 $\phi : [0,\infty) \to [0,1)$ *fonksiyonu "eğer* $(t_n) \subseteq [0,\infty)$ *ve* $(\phi(t_n)) \to 1$ *ise* $(t_n) \to 0$ *dır" özelliğini sağlıyor ise* ϕ *ye bir **Geraghty fonksiyonu** denir. Geraghty fonksiyonlarını içeren aile* $\mathcal{F}_{Ger}$ *ile gösterilir.*

3.9 Metrik Yapılar

Tanım 3.5 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için*

1) $d(x, x) = 0$

2) $x \neq y$ *ise* $d(x, y) > 0$

3) $d(x, y) = d(y, x)$

4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

*aksiyomlarını sağlıyor ise d ye X kümesi üzerinde bir **uzaklık fonksiyonu** veya **metrik** adı verilir. Ayrıca (X, d) ikilisine de bir **metrik uzay** denir.*

Örnek(1) *$\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere X üzerinde alışılmış metrik veya Öklidyen metrik $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlıdır.*

Örnek(2) *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde Öklidyen metrik $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$ olmak üzere,*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek(3) *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$ ve $\forall p > 0$ için*

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

şeklinde tanımlı uzaklık fonksiyonu $p = 2$ için özel olarak Öklidyen metriği içerir.

Örnek(4) *$p \to \infty$ için, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere*

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

şeklinde tanımlanan d_∞ fonksiyonu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde başka bir metrik tanımlar. Bu metrik literatürde maksimum metriği veya Chebyshev metriği olarak bilinir.

Örnek(5) *$X \neq \emptyset$ olmak üzere X üzerinde **ayrık metrik** $\forall x, y \in X$ için*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \, ise \\ 1, & x \neq y \, ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek(6) *$\emptyset \neq Y \subseteq X$ ve d, X üzerinde bir metrik olsun. Bu durumda d nin $Y \times Y$ kümesine kısıtlandığında ortaya çıkan fonksiyon da Y üzerinde bir metrik belirtir ve bu metriğe X den indirgenen metrik denir.*

Tanım 3.6 *$d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyon ve $\forall x, y, z \in X$ olsun. Buna göre,*

1) *d fonksiyonu $d(x, x) = 0$, $x \neq y$ ise $d(x, y) > 0$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir **quasi-metrik(simetrik olmayan)**,*

2) *d fonksiyonu $d(x, x) = 0$, $x \neq y$ ise $d(x, y) > 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir **yarı-metrik**,*

3) *d fonksiyonu $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ koşullarını sağlıyorsa X üerinde bir **psudeo metrik**,*

4) *d fonksiyonu $d(x, x) = 0$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y))$ koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir **psudeo-quasi metrik**,*

5) *d fonksiyonu ∞ değerini alıyor ise bir genelleştirilmiş reel değerli metrik,*

6) *d fonksiyonu üçgen eşitsizliği yerine daha güçlü olan $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ koşulunu sağlıyor ise X üzerinde bir **ultra-metrik** denir.*

*Eğer d, X üzerinde bir yarı-metrik ise (X, d) ikilisine **yarı-metrik uzay** denir. Benzer isimlendirme diğerleri içinde yapılır.*

3.10 Quasi-Metrik Uzay

Quasi metrikleri tartışmak ilgi çekicidir, çünkü G-metriğin iki argümanını tekrar ederek bir quasi metrik yapısı elde edilebilir. Burada bir Quasi-metrik uzayda yakınsaklık, Cauchy olma ve tamlık gibi kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 3.7 *$X \neq \emptyset$ küme olmak üzere $q : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu olup $\forall x, y, z \in X$ için,*

1) *$q(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*

2) *$q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$*

*koşullarını sağlıyorsa q fonksiyonuna X üzerinde bir **quasi-metrik** denir. (X, q) ikilisine bir **quasi-metrik uzay** denir.*

Tanım 3.8 (X, q) *bir Quasi-metrik uzay,* (x_n)*, X de bir dizi ve* $x \in X$ *olsun. Bu taktirde* $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} q(x, x_n) = 0$ *ise* (x_n) *dizisi* $x \in X$ *noktasına* ***yakınsıyor*** *denir.* $\forall\epsilon > 0$ *değeri verildiğinde* $m, n \geq n_0$ *özelliğindeki her* $m, n \in \mathbb{N}$ *için* $q(x_n, x_m) < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *değeri varsa* (x_n) *ye* ***Cauchy dizisi*** *denir. Bir Quasi-metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise uzaya* ***tamdır*** *denir.* q *quasi-metriğinin simetrik olması gerekmediğinden bazı kaynaklarda dizilerin yakınsaması, Cauchy dizileri ve tamlık kavramları sol ve sağ şeklinde ayrım yapılarak verilir.*

Tanım 3.9 (X, q) *bir Quasi-metrik uzay ve* (x_n)*, X de bir dizi olsun. Bu durumda* $x \in X$ *için*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$ *ise* (x_n) *dizisi* x *noktasına* ***sağdan yakınsaktır,***

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} q(x, x_n) = 0$ *ise* (x_n) *dizisi* x *noktasına* ***soldan yakınsaktır,***

(iii) $\forall\epsilon > 0$ *değeri verildiğinde* $m > n \geq n_0$ *özelliğindeki* $\forall m, n \in \mathbb{N}$ *için* $q(x_n, x_m) < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *değeri varsa* (x_n) *ye* ***sağdan Cauchy dizisi,***

(iv) $\forall\epsilon > 0$ *değeri verildiğinde* $m > n \geq n_0$ *özelliğindeki* $\forall m, n \in \mathbb{N}$ *için* $q(x_m, x_n) < \epsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *değeri varsa* (x_n) *ye* ***soldan Cauchy dizisi*** *denir.*

Uyarı 3.5 *1) Quasi-metrik uzayda yakınsak olan bir dizi bir tek noktaya yakınsar. Ama bu ifade sağdan ve soldan limitleri düşününce yanlış olur.*

2) Eğer bir (x_n) *dizisinin sağdan limiti* x *soldan limiti* y *ise* $x = y$ *dir.* (x_n) *yakınsak ve limiti tektir. Ancak* (x_n) *dizisi hiç bir sol limiti yok iken iki farklı sağ limite sahip olabilir.*

Örnek 3.1 *X,* $\mathbb{R}$ *nin* $[0, 1)$ *aralığını içeren bir alt kümesi olmak üzere* $\forall x, y \in X$ *için*

$$q(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \; ise \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $q : X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu tanımlansın. Buna göre* (X, q) *bir Quasi-metrik uzaydır.* $(q(\frac{1}{n}, 0)) \to 0$ *olup* $(q(0, \frac{1}{n})) \to 1$ *dir. Dolayısıyla* $(\frac{1}{n})$ *dizisi* 0 *noktasına sağdan yakınsak ama soldan yakınsak değildir. Buna göre bir Quasi-metrik uzayda "Bir dizinin sağ limiti varsa tektir" özelliği ifade edilmiş olur.*

Tanım 3.10 (X, q) *bir Quasi-metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* $(q(x_n, u)) \to 0$ *olacak şekilde her* $u \in X$ *ve her* $(x_n \subseteq X)$ *dizileri için* $(q(T(x_n), T(u))) \to 0$ *ise* T *ye* ***sağdan süreklidir*** *denir.*

Bazı tek boyutlu sonuçların avantajlarını elde etmek için X üzerinde quasi-metriklerin $X \times X$ çarpım uzayına genişletmeye ihtiyaç vardır. Aşağıdaki yardımcı teoremdeki ifadeler X üzerindeki quasi-metrikler yardımıyla $X \times X$ üzerindeki quasi-metrikleri göz önüne almanın kolay bir yoludur.

Yardımcı Teorem 3.19 $q : X \times X \to [0, \infty)$ *ve* $Q_s^q, Q_m^q : X \times X \times X \times X \to [0, \infty)$ *şeklinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere bu fonksiyonlar* $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ *için,*

$$Q_s^q((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = q(x_1, y_1) + q(x_2, y_2)$$

ve

$$Q_m^q((x_1, x_2), (y_x, y_2)) = \max\{q(x_1, y_1), q(x_2, y_2)\}$$

koşullarını sağlasın. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) q, X üzerinde bir quasi-metriktir.

(b) Q_s^q*,* $X \times X$ *üzerinde bir quasi-metriktir.*

(c) Q_m^q*,* $X \times X$ *üzerinde bir quasi-metriktir.*

Üstelik aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $((x_n, y_n)) \subseteq X \times X$ *dizisi için*

$$\begin{aligned} ((x_n, y_n)) \xrightarrow{Q_s^q} (x, y) \quad &\Leftrightarrow \quad ((x_n, y_n)) \xrightarrow{Q_m^q} (x, y) \\ &\Leftrightarrow \quad [(x_n) \xrightarrow{q} nx \wedge (y_n) \xrightarrow{q} y] \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} ((x_n, y_n)) \subseteq X \times X \text{\textit{dizisi bir }} Q_s^q\text{\textit{-Cauchydir.}} \quad &\Leftrightarrow \quad ((x_n, y_n))\text{\textit{dizisi bir }} Q_m^q\text{\textit{-Cauchydir}} \\ &\Leftrightarrow \quad [(x_n) \wedge (y_n)\text{\textit{dizileri birer q-Cauchydir.}}] \end{aligned}$$

3) (1) ve (2) özellikleri sağdan ve soldan da geçerlidir.

4) (X, q) *sağdan tamdır* $\Leftrightarrow$ $(X \times X, Q_s^q)$ *sağdan tamdır* $\Leftrightarrow$ $(X \times X, Q_m^q)$ *sağdan tamdır.*

5) (X, q) *soldan tamdır* $\Leftrightarrow$ $(X \times X, Q_s^q)$ *soldan tamdır* $\Leftrightarrow$ $(X \times X, Q_m^q)$ *soldan tamdır.*

6) (X, q) *tamdır* $\Leftrightarrow$ $(X \times X, Q_s^q)$ *tamdır* $\Leftrightarrow$ $(X \times X, Q_m^q)$ *tamdır.*

7) Aşağıdaki önermeler denktir.

(a) (X, q) *uzayındaki her bir sağ yakınsak dizinin bir tek sağ limiti vardır.*

(b) $(X \times X, Q_s^q)$ *uzayındaki her bir sağ yakınsak dizinin bir tek sağ limiti vardır.*

(c) $(X \times X, Q_m^q)$ *uzayındaki her bir sağ yakınsak dizinin bir tek sağ limiti vardır.*

3.11 Topolojik Yapılar

Tanım 3.11 *X boştan farklı bir küme ve I bir indis kümesi olmak üzere, X üzerinde bir topoloji $\tau = \{A_i\}_{i \in I}$, $\emptyset$ ve X kümelerinin ikisini de içeren ve keyfi sayıda birleşim ile sonlu sayıdaki arakesit işlemlerine göre kapalı olan X in alt kümelerinin bir ailesidir. Yani,*

i) $X, \emptyset \in \tau$

ii) *I bir indis kümesi olmak üzere $i \in I$ için* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$

iii) *$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere $A_i \subseteq \tau$ için* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

koşullarını sağlayan $J = \{A_i\}_{i \in J}$ ailesine X üzerinde bir ***topoloji****, (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir. $A \subseteq X$ kümesi için $A \in \tau$ ise A ya τ-açık ve A nın X te tümleyeni olan $X \backslash A$ ifadesi τ-açık ise A τ-kapalı denir. $U \subseteq X$ alt kümesine $x \in X$ noktası için $x \in A \subseteq U$ olacak şekilde $A \in \tau$ varsa U ya $x \in X$ noktasının bir τ-komşuluğu denir. X üzerinde bir τ topolojisi $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için x in bir U ve y nin bir V τ-komşuluğu $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bulunuyor ise X uzayına* ***Hausdorff*** *tur denir. τ, X üzerinde bir topoloji olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren tüm J-açık altkümelerinin β_x ailesine, x noktasındaki* ***komşuluk sistemi*** *denir.*

Yardımcı Teorem 3.20 *$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $x \in X$ için β_x, X in boştan farklı alt kümelerinin bir boştan farklı ailesi olmak üzere,*

i) *$\forall B \in \beta_x$ için $x \in B$ dir.*

ii) *$\forall B_1, B_2 \in \beta_x$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \beta_x$ vardır.*

iii) *Her $B \in \beta_x$ için $y \in B'$ olacak şekilde $B' \in \beta_x$, $B'' \subset B$ olacak şekilde $B'' \in \beta_y$ vardır.*

koşulları sağlansın. Bu taktirde β_x, x noktasında bir komşuluk sistemi olacak şekilde X üzerinde bir tek τ topolojisi vardır.

4. G-METRİK UZAY

2006 yılında Mustafa ve Sims yayınladıkları makalede D-metrik uzayının topolojik özellikleri olarak verilen birçok ifadenin yanlış olduğunu ispatladılar. Bu yanlışlıkları düzeltmek telafi etmek için genelleştirilmiş metrik uzaylara daha uygun bir kavram karşılık getirerek **G-metrik uzayı** tanımladılar. Mustafa doktora tezinde G-metrik uzay için birçok örnek verdi ve G-metrik uzayın birçok özelliğini geliştirdi. Örnegin, G-metrik uzayın Hausdorff topoloji şartlarını sağladını ispatladı ve buradan diğer topolojik kavramlar olan yakınsak diziler, limit, Cauchy dizileri, sürekli dönüşümler, tamlık ve kompaktlık kavramlarını tanımladı. Daha da ileri giderek G-metrik uzay ile yola çıkıp bilinen metrik uzayın özelliklerini elde etti ve bilinen metrik uzaydan türetilen G-metrik uzayın özelliklerini araştırdı. Bu bölümde alışılmış metrik uzayın bir genellemesi olan G-metrik uzay ve bazı özellikleri Agarwal vd 2015 kaynağından özetle verilmiştir.

Tanım 4.1 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z, a \in X$ için,*

(G_1) *$x = y = z$ ise $G(x, y, z) = 0$ dır.*

(G_2) *$\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $G(x, x, y) > 0$ dır.*

(G_3) *$\forall x, y, z \in X$ ve $y \neq z$ için $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ dır.*

(G_4) *$G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(z, x, y) = G(z, y, x) = G(y, z, x) = G(y, x, z)$ dır.*

(G_5) *$G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ dır.*

*koşullarını sağlıyor ise G fonksiyonuna X üzerinde bir **G-metrik** ve (X, G) ikilisine bir **G-metrik uzay** denir.*

(X, d) bir metrik uzay ve $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$$G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, G) bir G-metrik uzaydır. Burada $G(x, y, z)$ fonksiyonu x, y, z köşelerine sahip bir üçgenin çevresi olarak yorumlanabilir. Örneğin, (G_1) aksiyomunun anlamı bir nokta ile bir çevre yok demektir, (G_2) nin anlamı birbirinden farklı iki nokta arasındaki uzaklığın sıfır olmamasıdır, (G_4) ise bir üçgenin isimlendirmesini degiştirmek üçgenin çevresini değiştirmez, (G_5) üçgen eşitsizliğinin dört *nokta için genellemesidir. Buradaki en çekişmeli aksiyom geometrik bir yorumu olan* (G_3) *aksiyomudur.* (G_3) *ün anlamı bir üçgenin bir kenarının uzunluğu çevresinin yarısından küçük veya eşittir. Yani*

$$d(x,y) \leq \frac{d(x,y) + d(y,z) + d(x,z)}{2}$$

dir.

Aşağıdaki örnekler G-metrik ve G-metrik uzay yapısının çeşitliliğini göstermektedir. Örneklerde verilen fonksiyonların ilgili koşulları sağladığı kolaylıkla görülebilir.

Örnek 4.1 X*,* $\mathbb{R}$ *nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere* $\forall x, y, z \in X$ *için*

$$G(x,y,z) = |x-y| + |y-z| + |x-z|$$

şeklinde tanımlanan $G : X \times X \times X \to [0,\infty)$ *fonksiyonu* X *üzerinde bir G-metriktir. Aşağıdaki örnekler G-metrik ve G-metrik uzay yapısının çeşitliliğini göstermektedir. Örneklerde verilen fonksiyonların ilgili koşulları sağladığı kolaylıkla görülebilir.*

Örnek 4.2 *Boştan farklı her* X *kümesi için* ***Ayrık G-metrik*** *kavramı* $\forall x, y, z, \in X$ *için*

$$G(x,y,z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \, ise \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.3 $X = [0,\infty)$ *olmak üzere,*

$$G(x,y,z) = \begin{cases} 0, & x = y = z \, ise \\ \max\{x,y,z\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan G *fonksiyonu* X *üzerinde bir tam G-metriktir.*

Örnek 4.4 G*,* X *üzerinde bir G-metrik ve* $\alpha > 0$ *ise* $\forall x, y, z \in X$ *için* $G_\alpha(x,y,z) = \alpha G(x,y,z)$ *biçiminde tanımlanan* G_α *fonksiyonu* X *üzerinde başka bir G-metriktir.*

Örnek 4.5 G*,* X *üzerinde bir G-metrik olsun. Bu durumda* $G' : X \times X \times X \to [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x, y, z \in X$ *için,* $G'(x,y,z) = \dfrac{G(x,y,z)}{1 + G(x,y,z)}$ *şeklinde tanımlanırsa* G'*,* X *üzerinde bir diğer G-metriktir.*

4.1 G-Metrik Uzayın Bazı Özellikler

Bu kısımda G-metrik uzayın bazı temel ve kullanışlı özellikleri verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.1 *(X, G) bir G-metrik uzay olsun. Bu durumda $\forall x, y, z \in X$ için*

$$G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$$

olur.

İspat *G metriğin (G_4) ve (G_5)özellikleri kullanılarak*

$$G(x, y, y) = G(y, y, x) \leq G(y, x, x) + G(x, y, x) = 2G(y, x, x)$$

elde edilir. Bu ise istenilen sonucu verir.

Yardımcı Teorem 4.2 *(X, G) bir G-metrik uzay olsun. Bu taktirde $\forall x, y, z, a \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(1) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$ *dir.*

(2) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(y, a, a) + G(z, a, a)$ *dir.*

(3) $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq \max\{G(a, z, z), G(z, a, a)\}$ *dir.*

(4) $n \geq 2$ *ve* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *için*

$$G(x_1, x_n, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i, x_{i+1}, x_{i+1})$$

ve

$$G(x_1, x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i, x_i, x_{i+1})$$

dir.

(5) $G(x, y, z) = 0$ *ise* $x = y = z$ *dir.*

(6) $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$ *dir.*

(7) $G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}[G(x, y, z) + G(x, a, z) + G(a, y, z)]$ *dir.*

(8) $x \in X \backslash \{z, a\}$ *için* $|G(x, y, z) - G(x, y, a)| \leq G(a, x, z)$ *dir.*

(9) $G(x, y, y) \leq 2G(x, y, z)$ *dir.*

Bu yardımcı teoremdeki özellikler G-metriğin özelliklerinden kolaylıkla türetildiği için ispatlarına yer verilmemiştir.

4.2 Alışılmış Metrik ve G-Metrik Arasındaki Bazı İlişkiler

X üzerindeki her alışılmış metrik farklı yollarla X üzerinde bir G-metrik türetir.

Yardımcı Teorem 4.3 *(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda her $x, y, z \in X$ için,*

$$G_m^d(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$$

$$G_s^d(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(x, z)$$

şeklinde tanımlanan $G_m^d, G_s^d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonları X üzerinde birer G-metriktir ve $\forall x, y, z \in X$ için

$$G_m^d(x, y, z) \leq G_s^d(x, y, z) \leq 3G_m^d(x, y, z)$$

olur.

Tersine X üzerinde tanımlı bir G-metrik yine X üzerinde bir alışılmış metriğe indirgenebilir. Aşağıdaki yardımcı teorem bu duruma örnekler sunmaktadır.

Yardımcı Teorem 4.4 *(X, G) bir G-metrik uzay olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için ,*

$$d_m^G(x, y) = \max\{G(x, y, y), G(y, x, x)\}$$

$$d_s^G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x)$$

$d_m^G, d_s^G : X \times X \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar X üzerinde birer alışılmış metriktir ve üstelik $\forall x, y \in X$ için

(1) $d_m^G(x, y) \leq d_s^G(x, y) \leq 2d_m^G(x, y)$ dir.

(2) d_m^G ve d_s^G, X üzerinde denk metriklerdir ve X üzerinde aynı topolojiyi üretirler.

4.3 Simetrik G-metrik Uzaylar

Tanım 4.2 *(X, G) bir G-metrik uzay olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $G(x, y, y) = G(y, x, x)$ koşulunu sağlıyor ise G-metriğine* ***simetriktir*** *denir.*

Simetrik ve simetrik olmayan G-metrik örnekleri sırasıyla aşağıdadır.

Örnek 4.6 $X = \mathbb{R}$ *olsun.* $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $\forall x, y, z \in X$ *için* $G(x, y, z) = |x - y| + |x - z| + |y - z|$ *şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon bir G-metriktir ve aynı zamanda açıkça simetriktir. Üstelik Yardımcı teorem 4.3'de verilen* G_m^d *ve* G_s^d *ifadeleri birer simetrik G-metriktirler.*

Örnek 4.7 $X = \{0, 1, 2\}$ *ve* $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu,*

(x,y,z)	*G(x,y,z)*
(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2)	*0*
(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)	*1*
(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)	*2*
(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(0,2,2),(2,0,2),(2,2,0)	*3*
(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(0,1,2),(0,2,1),(1,0,2)	*4*
(1,2,0),(2,0,1),(2,1,0)	*4*

şeklinde tanımlandığında X üzerinde bir G-metrik olur. Ancak kolaylıkla görülebilir ki simetrik değildir. Çünkü $G(1, 1, 2) = 4 \neq 2 = G(2, 2, 1)$ dir.

4.4 G-metrik Uzayın Topolojisi

Bu kısımda bir G-metrik uzayın topolojik kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 4.3 (X, G) *bir G-metrik uzay olsun. Bu taktirde* $x \in X$ *ve* $r > 0$ *olmak üzere,*

(i) $B_G(x, r) = \{y \in X : G(x, y, y) < r\}$ *kümesine* (X, G) *G-metrik uzayında* $x \in X$ *merkezli* r *yarıçaplı açık yuvar,*

(ii) $\overline{B}_G(x, r) = \{y \in X : G(x, y, y) \leq r\}$ *kümesine* (X, G) *G-metrik uzayında* $x \in X$ *merkezli* r *yarıçaplı kapalı yuvar denir.*

Buradan $B_G(x, r) \subseteq \overline{B}_G(x, r)$ olduğu açıktır.

Önerme 4.1 (X, G) *bir G-metrik uzay ve* d_m^G *ve* d_s^G X *üzerinde Yardımcı teorem 4.4 te tanımlanan metrikler olsunlar. Bu taktirde* $\forall x \in X$ *ve* $\forall r > 0$ *için*

$$B_{d_s^G}(x, r) \subseteq B_{d_m^G}(x, r) \subseteq B_G(x, r) \subseteq B_{d_m^G}(x, 2r) \subseteq B_G(x, 2r)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat *$y \in B_{d_m^G}(x,r)$ olsun. Bu durumda* $\max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} = d_m^G(x,y) < r$ *olup özellikle $G(x,y,y) < r$ olduğundan dolayı $y \in B_G(x,r)$ bulunur. Bu ise $B_{d_m^G}(x,r) \subseteq B_G(x,r)$ olduğunu ispatlar. Benzer şekilde $B_{d_m^G}(x,2r) \subseteq B_G(x,2r)$ dır. Şimdi $y \in B_G(x,r)$ için $G(x,y,y) < r$ olduğundan ve G-metrik özelliklerinden*

$$G(y,x,x) \leq 2G(x,y,y) \leq 2r$$

elde edilir. Böylelikle $d_m^G(x,y) = \max\{G(x,y,y), G(y,x,x)\} < 2r$ *olacağından $y \in B_{d_m^G}(x,2r)$ dir. O halde $B_G(x,r) \subseteq B_{d_m^G}(x,2r)$ bulunur.*

Örnek 4.8 *(X,d) bir metrik uzay ve X üzerinde tanımları önceden verilmiş olan G_m^d ve G_s^d iki G-metrik uzay olsun. Buna göre $\forall x_0 \in X$ ve $\forall r > 0$ için,*

(i) $B_{G_m^d}(x_0,r) = B_d(x_0,r)$

(ii) $B_{G_s^d}(x_0,r) = B_d(x_0,\frac{r}{2})$

(iii) $\overline{B}_{G_m^d}(x_0,r) = \overline{B}_d(x_0,r)$

(iv) $\overline{B}_{G_s^d}(x_0,r) = \overline{B}_d(x_0,\frac{r}{2})$

özelliklerini sağlanır.

Örnek 4.9 *X boştan farklı bir küme ve X üzerinde G_{dis} gösterimi ile ayrık G-metrik tanımlansın. Bu durumda $\forall x_0 \in X$ ve $\forall r > 0$ için,*

(1) $r < 1$ *ise* $B_{G_{dis}}(x_0,r) = \overline{B}_{G_{dis}}(x_0,r) = \{x_0\}$

(2) $r = 1$ *ise* $B_{G_{dis}}(x_0,r) = \{x_0\}$ *ve* $\overline{B}_{G_{dis}}(x_0,r) = X$

(3) $r > 1$ *ise* $B(x_0,r) = \overline{B}(x_0,r) = X$

özellikleri sağlanır.

Teorem 4.1 *Bir (X,G) G-metrik uzayında, $\forall x \in X$ için x merkezli bütün açık yuvarların ailesi β_x aynı x noktasında bir komşuluk sistemi olacak şeklide bir tek τ_G topolojisi vardır.*

İspat *Yardımcı teorem 3.19 gereğince,*

$$B(x,r_1) \bigcap B(x,r_2) = B(x, \min\{r_1,r_2\})$$

olduğundan ilk iki özellik aşikardır. $B = B(x,r) \in \beta_x$ bir açık yuvar ve $B' = B \in \beta_x$ olsun. $\forall y \in B$ için $B'' \subseteq B$ olacak şekilde $\exists B'' \in \beta_y$ varlığı gösterilmelidir. Şimdi $y \in B = B(x,r)$ noktası sabitlensin. Böylece $G(x,y,y) < r$ olur. s ve δ $G(x,y,y) < s < s+\delta < r$ olacak şekilde keyfi sayılar olsun. İddia edilen $B'' = B(y,\delta) \subseteq B = B(x,r)$ olduğudur. Keyfi bir $z \in B(y,\delta)$ elemanı için $G(y,z,z) < \delta$ dır. Bu taktirde G-metrik şartlarından (G_5) aksiyomu gereğince $G(x,z,z) \leq G(x,y,y) + G(y,z,z) < s+\delta < r$ olur. Bu nedenle $z \in B(x,r)$ olduğu görülür. Böylelikle Yardımcı teorem 3.19 gereğince (X,G) G-metrik uzayında $\forall x \in X$ elemanı için x merkezli bütün açık yuvarların bir ailesi β_x aynı x noktasında komşuluk sistemi olacak şekilde bir tek τ_G topolojisi olduğunu garanti eder.

4.5 Yakınsaklık Ve Cauchy Dizileri

Bu kısımda τ_G topolojisi kullanılarak yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramları tanılacaktır.

Tanım 4.4 *(X,G) bir G-metrik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun.*

*(1) $\forall \varepsilon > 0$ değeri verildiğinde $n,m \geq n_0$ özelliğindeki her $n,m \in \mathbb{N}$ için $G(x_n,x_m,x) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ değeri varsa (x_n) dizisi x noktasına **G-yakınsaktır** denir ve $(x_n) \xrightarrow{G} x$ veya $(x_n \to x)$ ile gösterilir. Yani*

$$\lim_{n,m\to\infty} G(x_n,x_m,x) = 0$$

ise $(x_n) \xrightarrow{G} x$ dir.

*(2) $\forall \varepsilon > 0$ değeri verildiğinde $\forall n,m,k \in \mathbb{N}$ için $G(x_n,x_m,x_k) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ değeri varsa (x_n) dizisine **G-Cauchy dizisi** denir.*

*(3) Bir (X,G) G-metrik uzayındaki her G-Cauchy dizisi G-yakınsak ise (X,G) G-metrik uzayına **tam** denir.*

Önerme 4.2 *Bir (X,G) G-metrik uzayında G-yakınsak bir dizisinin limiti tektir.*

İspat *(X,G) bir G-metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir G-yakınsak bir dizi olsun. $x,y \in X$ ve $x \neq y$ için $(x_n) \to x$, $(x_n) \to y$ olduğu varsayılsın. İddia $\forall \varepsilon > 0$ için $G(x,y,y) < \varepsilon$ dır. Gerçekten keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için tanımdan dolayı $m,n \geq n_1$ ve $m,n \geq n_2$ özelliğindeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için sırasıyla,*

$$\begin{aligned} G(x_n,x_m,x) &\leq \frac{\varepsilon}{3} \\ G(x_n,x_m,y) &\leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olacak şekilde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *vardır.* $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ *olsun. Bu taktirde* G_5 *özelliği ve Yardımcı teorem 4.1 gereğince her* $n \geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned} G(x,y,y) &\leq G(x,x_n,x_n) + G(x_n,y,y) \\ &\leq G(x_n,x_n,x) + 2G(x_n,x_n,y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu ifade her $\varepsilon > 0$ *için geçerli olduğundan* $G(x,y,y) = 0$ *olmasını gerektirir. Dolayısıyla* $x = y$ *olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani G-metrik uzaydaki yakınsak bir dizinin limiti tektir.*

Önerme 4.3 *Bir* (X,G) *G-metrik uzayındaki yakınsak her dizi bir G-Cauchy dizisidir.*

İspat $(x_n) \subseteq X$*,* (X,G) *G-metrik uzayında* $x \in X$ *noktasına yakınsayan bir dizi olsun.* $\varepsilon > 0$ *alınsın. Bu durumda tanımdan* $n, m \geq n_0$ *özelliğindeki her* $m, n \in \mathbb{N}$ *için*

$$G(x_n, x_m, x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Buradan G-metrik koşulu olan* (G_4)*,* (G_5) *ve Yardımcı teorem 4.1 den dolayı her* $m, n, \geq n_0$ *için*

$$\begin{aligned} G(x_n,x_m,x_k) &\leq G(x_n,x,x) + G(x,x_m,x_k) \\ &\leq 2G(x_n,x_n,x) + G(x,x_m,x_k) \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (x_n) *bir G-Cauchy dizisidir.*

Yardımcı Teorem 4.5 (x_n) *ve* (y_n) (X,G) *G-metrik uzayının iki dizisi olsunlar. Bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} G(x_n, x_n, y_n) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} G(x_n, y_n, y_n) = 0$$

dır.

İspat *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için Yardımcı teorem 4.1 ve G-metriğin özelliği kullanılarak*

$$0 \leq G(x_n, x_n, y_n) \leq 2G(x_n, y_n, y_n) \leq 4G(x_n, x_n, y_n)$$

elde edilir. Yardımcı teorem 3.1 kullanırsa istenen sonuç direkt olarak elde edilir.

Aşağıdaki iki önerme bir (X, G) G-metrik uzayında G-yakınsaklık ve G-Cauchy kavramları karakterize eder.

Önerme 4.4 *(X, G) bir G-metrik uzay, $(x_n) \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) (x_n) *dizisi* $x \in X$ *noktasına G-yakınsaktır.*

(b) *Her* $\varepsilon > 0$ *değeri verildiğinde* $n \geq n_0$ *özelliğindeki her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \in B_G(x, \varepsilon)$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *vardır. Yani* $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_n, x) = 0$ *olur.*

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x, x) = 0$ *dir.*

(d) $\lim\limits_{n,m\to\infty, m\geq n} G(x_n, x_m, x) = 0$ *dir.*

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_n, x) = 0$ *ve* $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x) = 0$ *dir.*

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x, x) = 0$ *ve* $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x) = 0$ *dir.*

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ *ve* $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x) = 0$ *dir.*

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ *ve* $\lim\limits_{n\to\infty, m>n} G(x_n, x_m, x) = 0$ *dir.*

(i) $\lim\limits_{n,m\to\infty, m>n} G(x_n, x_m, x) = 0$ *dir.*

önermeleri denktir.

İspat

$(a) \Rightarrow (b)$ $m = n$ *eşitliği kullanılarak kolaylıkla gösterilir.*

$(b) \Rightarrow (c)$ *Yardımcı teorem 4.1 gereğince her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $G(x_n, x, x) \leq 2G(x_n, x_n, x)$ *olduğundan istenilen sağlanır.*

$(c) \Rightarrow (a)$ *G-metrik uzayın* (G_5) *ve* (G_4) *aksiyomları gereğince* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *için,*

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x) &\leq G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x) \\ &= G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x) \end{aligned}$$

dir.

Aşağıdaki ifadelerin gösterimi aşikardır.

$$(a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (b), (a) \Rightarrow (e) \Rightarrow (b), (a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (c)$$

$(a) \Rightarrow (h)$ *Önerme 4.3 gereğince* (x_n) *bir Cauchy dizisidir. Buna göre Cauchy disizinin tanımından* $m = k = n+1$ *için* $\lim_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ *dır. Özellikle* (a) *koşulu*

$$\lim_{n,m\to\infty, m>n} G(x_n, x_m, x) = 0$$

olmasını sağlar.

$(h) \Rightarrow (g)$ $m = n+1$ *eşitliği kullanılarak kolayca görülebilir.*

$(g) \Rightarrow (b)$ *Her* $n \in \mathbb{N}$ *değeri ve* (G_5), (G_4) *aksiyomlarını kullanarak*

$$\begin{aligned} G(x_n, x_n, x) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_n, x) \\ &= G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_{n+1}, x) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Özellikle $(a) \Rightarrow (i)$ *ifadesi buradan belirgindir.*

$(i) \Rightarrow (b)$ *Yardımcı teorem 4.2 deki* (9) *koşulu gereğince*

$$G(x_n, x_n, x) \leq 2G(x_n, x, x_{n+1}) = 2G(x_n, x_{n+1}, x)$$

dir.

Önerme 4.5 (X, G) *bir G-metrik uzay,* $(x_n) \subseteq X$ *bir dizi ve* $x \in X$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) (x_n) *dizisi G-Cauchy dizisidir.*

(b) $\lim_{n,m\to\infty} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ *dir.*

(c) $\lim_{n,m\to\infty, m\geq n} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ *dir.*

(d) $\lim_{n,m\to\infty, m>n} G(x_n, x_m, x_m) = 0$ *dir.*

(e) $\lim_{n,m\to\infty} G(x_n, x_n, x_m) = 0$ *dir.*

(f) $\lim_{n,m\to\infty, m\geq n} G(x_n, x_n, x_m) = 0$ *dir.*

(g) $\lim_{n,m\to\infty, m>n} G(x_n, x_n, x_m) = 0$ *dir.*

(h) $\lim_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ *ve* $\lim_{n,m\to\infty, m>n} G(x_n, x_{n+1}, x_m) = 0$ *dir.*

İspat $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ *kolaylıkla görülebilir.*

$(c) \Rightarrow (a)$ *$\varepsilon > 0$ değeri verildiğinde (c) özelliği gereğince $G(x_n, x_m, x_m) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ her $m, n \in \mathbb{N}$ değerleri için $m \geq n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır. $n, m, k \in \mathbb{N}$ değerleri $n, m, k \geq n_0$ olacak şekilde alınsın ve $n' = \min\{n, m, k\}$, $k' = \max\{n, m, k\}$, $m' = \{n, m, k\} \setminus \{n', k'\}$ olsun. Buradan (G_5) ve (G_4) aksiyomları gereğince*

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_k) = G(x_{n'}, x_{m'}, x_{k'}) &\leq G(x_{n'}, x_{k'}, x_{k'}) + G(x_{k'}, x_{m'}, x_{k'}) \\ &= G(x_{n'}, x_{k'}, x_{k'}) + G(x_{m'}, x_{k'}, x_{k'}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle (x_n) bir Cauchy dizisidir.

$(c) \Rightarrow (d)$ *İfadesi kolaylıkla görülebilir.*

$(d) \Rightarrow (c)$ *$m = n$ için $G(x_n, x_m, x_m) = G(x_n, x_n, x_n) = 0$ dır. $m > n$ olarak alındığında $G(x_n, x_m, x_m) \leq \varepsilon$ dir.*

$(b) \Leftrightarrow (e)$, $(c) \Leftrightarrow (f)$, $(d) \Leftrightarrow (g)$ *yardımcı teorem* 4.1 *den kolaylıkla görülebilir.*

$(h) \Rightarrow (g)$ *Her $m, n \in \mathbb{N}$ değeri $m > n$ olacak şekilde alındığında*

$$\begin{aligned} G(x_n, x_n, x_m) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_n, x_m) \\ &= G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_n, x_{n+1}, x_m) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.6 G-metrik Uzaylar Arasında Sürekli Dönüşümler

Tanım 4.5 *(X, G) bir G-metrik uzay olsun. Bu durumda,*

(1) *$T : X \to X$ dönüşümü ve $(x_n) \xrightarrow{G} x$ olacak şekildeki her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $(T(x_n)) \xrightarrow{G} T(x)$ ise T dönüşümü $x \in X$ noktasında G-süreklidir denir.*

(2) *$F : X^n \to X$ dönüşümü ve her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $(x_i^m) \xrightarrow{G} x_i$ olacak şekildeki her $((x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)) \subseteq X^n$ dizisi için $(F(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)) \xrightarrow{G} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise F dönüşümü $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ noktasında G-süreklidir denir.*

(3) *$H : X^n \to X^m$ bir dönüşüm ve $\pi_i^m : X^m \to X$ fonksiyonu X^n nin X üzerine izdüşümü yani her $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X^m$ için $\pi_i^m(a_1, a_2 \ldots, a_m) = a_i$ olsun. Buna göre her $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ için $\pi_i^m \circ H : X^n \to X$ dönüşümü $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ noktasında G-sürekli ise $H : X^n \to X^m$ dönüşümü $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ noktasında G-süreklidir.*

Teorem 4.2 (X, G) *bir G-metrik uzay olmak üzere* $G(x, y, z)$ *fonksiyonu üç bileşenin tümünün üzerinde süreklidir. Yani* $x, y, z \in X$ *ve* $(x_m), (y_m), (z_m) \subseteq X$*,* X *de* $(x_m) \xrightarrow{G} x$*,* $(y_m) \xrightarrow{G} y$*,* $(z_m) \xrightarrow{G} z$ *olacak şekilde üç dizi ise* $(G(x_m, y_m, z_m)) \to G(x, y, z)$ *dir.*

İspat (G_5) *aksiyomu üst üste kullanılarak,*

$$\begin{aligned} G(x_m, y_m, z_m) &\leq G(x_m, x, x) + G(x, y_m, z_m) \\ &\leq G(x_m, x, x) + G(y_m, y, y) + G(y, x, z_m) \\ &\leq G(x_m, x, x) + G(y_m, y, y) + G(z_m, z, z) + G(z, y, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yöntem ile,

$$G(x, y, z) \leq G(x, x_m, x_m) + G(y, y_m, y_m) + G(z, z_m, z_m) + G(z_m, x_m, y_m)$$

elde edilir. Özel olarak her $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$G(x, y, z) - G(x, x_m, x_m) - G(y, y_m, y_m) - G(z, z_m, z_m) \leq G(x_m, y_m, z_m)$$

$$\leq G(x_m, x, x) + G(y_m, y, y) + G(z_m, z, z) + G(z, y, x)$$

dir. Önerme 3.2 ve Önerme 4.4 gereğince $(G(x_m, y_m, z_m)) \to G(x, y, z)$ *olduğu görülür.*

5. N. MERTEBEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ G METRİK UZAY

1906 yılında Fréchet'in uzaklık fonksiyonu yani Hausdorff'un deyimi ile metrik kavramı ve doğal olarak metrik uzay kavramı ile ilgili pek çok çalışma geçen süreçte verilmiştir. Bu süreç boyunca alışılmış metrik uzayın genelleştirilmesi adına da çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları başarısız olmuştur. Hatırlanacağı üzere 2-metrik uzay, D-metrik uzay gibi çalışmalara kısaca değinilmişti. 2006 yılında Mustafa ve Sims tarafından tanmlanan G-metrik uzay kavramı X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X \times X$ üzerinde tanımlanmıştı. 2018 yılında Choi, Kim, Yong yaptıkları bir çalışma ile G-metrik kavramını $\overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{n \text{ tane}}$ olacak şekilde genelleştirmişlerdir. Bu bölümde n. mertebeden genelleştirilmiş G-metrik uzayın yapısı hakkında bilgiler Choi vd. 2018 kaynağından özetle verilecektir.

5.1 G_n-Metrik Uzay Ve Bazı Özellikleri

Tanım 5.1 *X boştan farklı bir küme olsun. Bir $G_n : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için,*

(g_1) $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ *dir.*

(g_2) $\{1, 2, \ldots, n\}$ *kümesi üzerindeki keyfi bir σ permütasyonu için* $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_n(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ *dir.*

(g_3) $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ *noktaları ve* $\{x_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \subsetneq \{y_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ *için*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dir.

(g_4) $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2 \ldots, y_t, w \in X$ *ve* $s + t = n$ *için*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t) \leq G_n(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + G_n(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t)$$

*koşulları sağlanıyor ise G_n dönüşümüne **G_n-metrik**, (X, G_n) ikilisine **n.mertebeden G_n-metrik uzay** denir.*

Bu tanımdaki (g_1) aksiyomuna pozitif tanımlılık, (g_2) aksiyomuna permütasyon değişmezliği(invaryantlığı), (g_3) aksiyomuna monotonluk ve (g_4) aksiyomuna üçgen eşitsizliği adı verilecektir.

Tanım 5.2 *Bir (X, G_n) G_n-metrik uzayında $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere $\{x_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} = \{y_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ olacak şekildeki $x, y \in \overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{n}$ noktaları için,*

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

koşulu sağlıyor ise G_n-metriğine ***"çok katlı bağımsız"*** *denir. Çok katlı bağımsız bir G_3-metrik uzay için $G_3(x, y, y) = G_3(y, x, x)$ koşulu ve çok katlı bağımsız bir G_4-metrik uzay için $G_4(x, y, y, y) = G_4(x, x, y, y) = G_4(x, x, x, y)$ ve $G_4(x, x, y, z) = G_4(x, y, y, z) = G_4(x, y, z, z)$ koşullarını sağlamaktadır.*

Uyarı 5.1 *$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{n}$ kümesinde elemanlar olmak üzere tanımdaki monotonluk koşulunda eşitliğe izin verilirse yani*

$$\{x_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq \{y_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

için her G_n-metrik uzay çok katlı bağımsız olur.

(g_4) özelliği üçgen eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Çünkü $d : X \times X \to [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonu için üçgen eşitsizliği $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y)$ şeklindedir. w noktası x ile y arasındaki uzaklığı x ile w ve w ile y arasındaki uzaklıklar ile yaklaşık olarak ölçmek için gereklidir. Dikkat edilirse herhangi biri x ile y arasındaki uzaklıklığı $w_1 \neq w_2$ olmak üzere $d(x, w_1)$ ve $d(y, w_2)$ ile ölçemez. $d(x, y)$ uzaklığı x ile y arasındaki farklılıklar olarak düşünülebilir. Açıkça $x = y$ ise farklılık sıfırdır tam terside doğrudur. Aynı zamanda x ile y arasındaki farklılık ve y ile x arasındaki farklılık aynıdır. Eğer x ile z yeteri kadar benzer ise bu durumda üçgen eşitsizliği gereğince x ile y yeteri kadar benzer olmak zorundadır. Benzer şekilde üçgen eşitsizliği G_n-metriğe genellenebilir. Özellikle eğer $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s, w, w, \ldots, w)$ ile $G_n(y_1, y_2, \ldots, y_t, w, w, \ldots, w)$ yeteri kadar küçük ise $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t)$ de yeteri kadar küçük olmalıdır. Bu ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_s, w\}$ ve $\{y_1, y_2, \ldots, y_t, w\}$ çok benzer iki veri kümesi için $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ veri kümeside çok benzerliğe sahiptir. Dikkat edilirse w her bir veri kümesinin benzerliklerine ilişkin bilgileri birleştirmek için gerekli noktadır.

Teorem 5.1 *X boştan farklı bir küme olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler doğrudur,* *(1) d, X üzerinde bir G_2-metriktir $\Leftrightarrow$ d, X üzerinde bir metriktir.*

(2) d, X üzerinde bir G_3-metriktir $\Leftrightarrow$ d, X üzerinde bir G-metriktir. Ayrıca, G_3-metrik uzayı çok katlı bağımsızdır $\Leftrightarrow$ G-metrik uzayı simetriktir.

İspat *1) d, bir G_2-metrik uzay ise $\forall x, y, z \in X$ için,*

(g_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(g_2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(g_3) $x \neq y$ *ise* $0 = d(x, x) \leq d(x, y)$,

(g_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşulları G_n-metrik tanımı gereği sağlanır. Bunlar ise açıkca bir uzaklık fonksiyonun aksiyomlarıdır.

2) d, bir G_3-metrik uzay ise $\forall x, y, z, w \in X$ için,

(g_1) $d(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

(g_2) $d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(z, x, y) = d(z, y, x) = d(y, z, x) = d(y, x, z)$,

(g_3) $y \neq z$ *için* $d(x, x, y) \leq d(x, y, z)$,

(g_4) $d(x, y, z) \leq d(x, w, w) + d(w, y, z)$

koşulları G_n-metirk tanımı gereği sağlanır. Bunlar ise açıkça G-metrik uzayı aksiyomlarıdır. Böylelikle bir G_3-metrik aynı zamanda bir G-metriktir. Dahası G_3-metrik uzaydaki çok katlılık ile G-metrik uzaydaki simetri kavramları biribirine denktir.

Dikkat edilirse boş olmayan X kümesi üzerinde bir G_3-metrik aynı zamanda bir G-metrik olduğundan G_3-metrik G-metriğin bütün özelliklerini sağlar. Üstelik d, X üzerinde bir G_3-metrik ise aynı zamanda bir D-metriktir.

Önerme 5.1 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \times X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Buna göre (X,d)'nin bir G_4-metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır. Buna göre $\forall x, y, p, q, w \in X$ için,*

(1) $d(x, y, p, q) = 0 \Leftrightarrow x = y = p = q$ *dır.*

(2) $d(x, y, p, q) = d(y, x, p, q) = d(p, y, x, q) = d(q, y, p, x) = d(x, p, y, q) = d(x, y, q, p)$ *dır.*

(3) $\forall x, y, p, q \in X$ *farklı noktaları için,*

$$\begin{aligned} d(x,y,y,y) &\leq d(x,x,y,p) \\ d(x,y,y,y) &\leq d(x,y,y,p) \\ d(x,y,y,y) &\leq d(x,y,p,p) \\ d(x,x,y,y) &\leq d(x,x,y,p) \\ d(x,x,y,y) &\leq d(x,y,y,p) \\ d(x,x,y,y) &\leq d(x,y,p,p) \\ d(x,y,p,p) &\leq d(x,y,p,q) \end{aligned}$$

dır.

(4)

$$\begin{aligned} d(x,y,p,q) &\leq d(x,w,w,w) + d(y,p,q,w) \\ d(x,y,p,q) &\leq d(x,y,w,w) + d(p,q,w,w) \end{aligned}$$

dır.

İspat *(1) özelliği* (g_1) *aksiyomuna denk geldiğinden açıktır.* $s + t = 2$ *olduğundan* (g_4) *aksiyomu gereğince üç olasılık vardır. Bunlar*

(i) $s = 0$ *ve* $t = 2$

(ii) $s = 1$ *ve* $t = 1$

(iii) $s = 2$ *ve* $t = 0$

dır. Dolayısıyla (4) şıkkında verilen iki farklı eşitsizlik bulunur.(g_3) *aksiyomu için* $X \subsetneq Y$ *olmak üzere* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *ve* $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ *olsun. Buna göre 6 olasılık vardır. Bunlar,*

(i) $n(X) = 1$ *ve* $n(Y) = 2$

(ii) $n(X) = 1$ *ve* $n(Y) = 3$

(iii) $n(X) = 1$ *ve* $n(Y) = 4$

(iv) $n(X) = 2$ *ve* $n(Y) = 3$

(v) $n(X) = 2$ *ve* $n(Y) = 4$

(vi) $n(X) = 3$ *ve* $n(Y) = 4$

dir. Dikkat edilirse (1) şıkkı (i), (ii), (iii) özellikleri için (g_3) aksiyomunu sağlar. Aynı zamanda (g_3) aksiyomu (iv), (vi) şıkları için sağlanıyor ise (v) içinde sağlanır. Dolayısıyla (g_1), (g_2), (g_3) ve (g_4) aksiyomları (1), (2), (4), ve (iv) ile (vi) koşullarına denktir. (iv) koşulu için $X = \{x, y\}$, $Y = \{x, y, p\}$ ve $x, y, p \in X$ için

$$\begin{aligned} d(x,y,y,y) &\leq d(x,x,y,p), \quad d(x,y,y,y) \leq d(x,y,y,p) \\ d(x,y,y,y) &\leq d(x,y,p,p), \quad d(x,x,y,y) \leq d(x,x,y,p) \\ d(x,x,y,y) &\leq d(x,y,y,p), \quad d(x,x,y,y) \leq d(x,y,p,p) \end{aligned}$$

dır. (vi) koşulu için $X = \{x, y, p\}$, $Y = \{x, y, p, q\}$ ve $x, y, p, q \in X$ için

$$d(x,y,p,p) \leq d(x,y,p,q)$$

olur.

Aşağıdaki yardımcı teorem verilen G_n-metrikten yeni G_n-metriklerin üretilebileceğini göstermektedir.

Yardımcı Teorem 5.1 *(X, G_n) ve (X, G'_n) iki G_n-metrik uzay olsun. Bu taktirde d ile gösterilen aşağıdaki fonksiyonlar X üzerinde birer G_n-metriktir.*

(i) $d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

(ii) *ψ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı olmak üzere, $\forall x, y, \in [0, \infty)$ için,*

  (1) *ψ,$[0, \infty)$ üzerinde artandır.*

  (2) *$\psi(0) = 0$ dır*

  (3) *$\psi(x + y) \leq \psi(x) + \psi(y)$ dır.*

  koşullarını sağlasın. Bu durumda $d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ dir.

İspat

i) (g_1)

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n \end{aligned}$$

olur.

(g_2) *G_n ve G'_n birer G_n-metrik olduğundan d için yapılan tüm permütasyonlar G_n ve G'_n için yapılacak ve aynı değerler oluşacağından d altında permütasyon değişmezliği sağlanmış olunur.*

(g_3) *$\{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ olsun. G_n ve G'_n birer G_n-metrik olduğundan dolayı*

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\leq G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) + G'_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= d(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

olur. Böylece monotonluk koşulu sağlanır.

(g_4) *$s + t = n$ olmak üzere $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t \in X$ olsun. O halde,*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &= G_n(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) + G'_n(x_1, \ldots, x_s, y_1 \ldots, y_t) \\ &\leq G_n(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + G_n(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) \\ &+ G'_n(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + G'_n(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) \\ &\leq d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + d(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla üçgen eşitsizliği sağlanır.

Bu ise d nin bir G_n-metrik olduğunu gösterir.

ii) (g_1) *$\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olduğundan (g_1) koşulu sağlanır.*

(g_2) *G_n-metrik tanımından d için yapılan permütasyonlar G_n içinde yapılacak ve aynı değerler oluşacağından d altında permütasyon değişmezliği sağlanmış olunur.*

(g_3) *$\{x_i : i = 0, 1, \ldots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$ olsun. G_n-metrik tanımından $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dir ve ψ nin artanlığından dolayı*

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \psi(G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ &\leq \psi(G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ &= d(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

olur. Yani monotonluk koşulu sağlanır.

(g_4) *$s+t=n$ olmak üzere $x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t \in X$ olsun. Buna göre,*

$$\begin{aligned} d(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) &= \psi(G_n(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)) \\ &\leq \psi(G_n(x_1,\ldots,x_s,w,\ldots,w)+G_n(w,\ldots,w,y_1,\ldots,y_t)) \\ &\leq \psi(G_n(x_1,\ldots,x_s,w,\ldots,w)+\psi(G_n(w,\ldots,w,y_1,\ldots,y_t)) \\ &\leq \psi(G_n(x_1,\ldots,x_s,w,\ldots,w))+\psi(G_n(w,\ldots,w,y_1,\ldots,y_t)) \\ &= d(x_1,\ldots,x_s,w,\ldots,w)+d(w,\ldots,w,y_1,\ldots,y_t) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla üçgen eşitsizliği sağlanır.

Bu ise d nin bir G_n-metrik olduğunu gösterir.

Örnek 5.1 *ψ, $[0,\infty)$ üzerinde artan, $\psi(0)=0$, $\forall x,y,\in[0,\infty)$ için $\psi(x+y)\leq\psi(x)+\psi(y)$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Böylece her bir g G_n-metriği için $\psi\circ g$ bir G_n-metriktir. Aşağıda bunun birkaç örneği verilmektedir.*

(1) $k>0$ sabit bir nokta ve $\psi(x)=kx$ için $(\psi\circ g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=kg(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dir.

(2) $\psi(x)=\dfrac{x}{1+x}$ olmak üzere $(\psi\circ g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\dfrac{g(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{1+g(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ dir.

(3) $\psi(x)=\sqrt{x}$ olmak üzere $(\psi\circ g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt{g(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ dir. Üstelik $p\geq 1$ sabit olacak şekilde $\psi(x)=x^{1/p}$ içinde doğrudur.

(4) $\psi(x)=\log(x+1)$ olmak üzere $(\psi\circ g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\log(g(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1)$ dir.

(5) $k>0$ sabit bir nokta $\psi(x)=\min\{k,x\}$ için

$$(\psi\circ g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\min\{k,g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$$

şeklinde tanımlı her bir $\psi\circ g$ fonksiyonu birer G_n-metriktir.

Yukarıdaki ifadelerin yalnızca bir tanesi ispatlanacaktır, diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

İspat *$k>0$ sabit bir sayı ve $\psi(x)=kx$ olmak üzere,*

$$(\psi\circ g)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=kg(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

olsun. Bu şekilde tanımlanan bileşke fonksiyonun G_n-metrik koşullarını sağlandığı gösterilmelidir. Her $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ için,

(g_1)

$$\begin{aligned}(\psi \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= kg(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n\end{aligned}$$

olur.

(g_2) g bir G_n-metrik olduğundan $(\psi \circ g)$ için yapılan tüm permütasyonlar g için yapılacağından ve aynı değerler oluşacağından $(\psi \circ g)$ altında permütasyon değişmezliği sağlanmış olur.

(g_3) $\{x_i; i = \{1, 2, \ldots, n\}\} \subsetneq \{y_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$ olsun. g bir G_n-metrik olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}(\psi \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= kg(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\leq kg(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (\psi \circ g)(y_1, y_2, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

olur. Böylece monotonluk koşulu sağlanır.

(g_4) $s + t = n$ olmak üzere $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, w \in X$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(\psi \circ g)(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &= kg(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) \\ &\leq k(g(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + g(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t)) \\ &= kg(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + kg(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) \\ &= (\psi \circ g)(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + (\psi \circ g)(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla üçgen eşitsizliği sağlanır.

Örnek 5.2 (Ayrık G_n-metrik) *X boştan farklı bir küme ve $d : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için,*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = \ldots = x_n \; ise \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda d, X üzerinde bir G_n-metriktir.

İspat

(1) (g_1) ve (g_2) durumları açıktır.

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ *elemanları için* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subsetneq \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *koşulu sağlansın. Eğer* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *kümesinin eleman sayısı* 1 *ise* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ *olacağından*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 < 1 = d(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

elde edilir. Eğer $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *kümesinin eleman sayısı birden büyük ise*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 = d(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

olup istenilen sağlanmış olur.

(3) $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_t, w \in X$ *ve* $s + t = n$ *olsun. Eğer* $d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) = 1$ *veya* $d(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) = 1$ *ise bu durumda*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &\leq 1 \\ &\leq d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + d(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) \end{aligned}$$

olur. Eğer $d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) = 0$ *veya* $d(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) = 0$ *ise bu durumda* $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ *ve* $j \in \{1, \ldots, t\}$ *için* $d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) = 0$ *olur. Böylelikle*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) &= 0 \\ &= d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + G_n(y_1, \ldots, y_t, w, \ldots, w) \end{aligned}$$

olur.

Örnek 5.3 (G_n-metrik Uzayda Çap) $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ *olmak üzere,* $d : \overbrace{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+}^{n} \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonu* $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ *için*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} - \min_{1 \leq j \leq n} \{x_j\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda d, $\mathbb{R}_+$ *üzerinde bir* G_n*-meriktir.*

İspat *d fonksiyonunun* (g_1), (g_2) *ve* (g_3) *aksiyomlarını sağladığı açıktır.* (g_4) *aksiyomunun da sağlandığı gösterilmelidir. Buna göre* $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, w \in \mathbb{R}_+$ *ve* $s + t = n$ *olsun.* $M_x := \max\{x_1, \ldots, x_s\}$, $m_x := \min\{x_1, \ldots, x_s\}$, $M_y := \max\{y_1, \ldots, y_t\}$ *ve* $m_y := \min\{y_1, \ldots, y_t\}$ *olsun. Genelliği bozmadan* $M_x \leq M_y$ *olarak alınabillir. Bu taktirde üç durum söz konusudur. Bu durumlar,*

(i) $m_x \leq M_x \leq m_y \leq M_y$

(ii) $m_x \leq m_y \leq M_x \leq M_y$

(iii) $m_y \leq m_x \leq M_x \leq M_y$

şeklindedir. Kolaylık açısından $A = d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t)$, $B = d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w)$ *ve* $C = d(w \ldots, , w, y_1, \ldots, y_t)$ *olarak alınsın.*(i) *durumu için* $A = M_y - m_x$ *olup w için aşağıdaki gibi beş farklı ihtimal vardır. Bu ihtimaller*

$$\begin{aligned}
m_x \leq M_x \leq m_y \leq M_y \leq w &\implies A \leq w - m_x = B \leq B + C \\
m_x \leq M_x \leq m_y \leq w \leq M_y &\implies A = M_y - m_y + m_y - m_x \leq B + C \\
m_x \leq M_x \leq w \leq m_y \leq M_y &\implies A = M_y - w + w - m_x = B + C \\
m_x \leq w \leq M_x \leq m_y \leq M_y &\implies A = M_y - w + w - m_x \leq B + C \\
w \leq m_x \leq M_x \leq m_y \leq M_y &\implies A \leq M_y - w = C \leq B + C
\end{aligned}$$

şeklindedir. (ii) *durumu için* $A = M_y - m_x$ *olup w için aşağıdaki gibi beş farklı ihtimal vardır. Benzer şekilde bu ihtimaller*

$$\begin{aligned}
m_x \leq m_y \leq M_x \leq M_y \leq w &\implies A \leq w - m_x = B \leq B + C \\
m_x \leq m_y \leq M_x \leq w \leq M_y &\implies A = M_y - m_y + m_y - m_x \leq B + C \\
m_x \leq m_y \leq w \leq m_x \leq M_y &\implies A = M_y - w + w - m_x \leq B + C \\
m_x \leq w \leq m_y \leq m_x \leq M_y &\implies A = M_y - w + w - m_x \leq B + C \\
w \leq m_x \leq m_y \leq m_x \leq M_y &\implies A \leq M_y - w = C \leq B + C
\end{aligned}$$

şeklindedir. (iii) *durumu için* $M_y \leq w$ *veya* $w \leq m_y$ *olduğunda* $d(x_1, \ldots, x_s, y, \ldots, y_t) \leq d(y_1, \ldots, y_t, w, \ldots, w)$ *olur. Diğer durumlarda*

$$d(x_1, \ldots, x_s, y, \ldots, y_t) = d(y_1, \ldots, y_t, w, \ldots, w)$$

olur. Böylelikle d *nin* (g_4) *aksiyomu sağladığı gösterilmiş olur. O halde d, bir* G_n*-metriktir.*

Uyarı 5.2 $(X, \|.\|)$ *normlu bir uzay ve* $d : \overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{n} \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $\forall x_1, \ldots, x_n \in X$ *için*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| - \min_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu taktirde d*, X üzerinde bir* G_n*-metrik değildir. Genelde* d *fonksiyonu* (g_2)*,* (g_3) *ve* (g_4) *aksiyomlarını sağlar ama genel olarak* (g_1) *aksiyomu sağlamaz. Aslında bazı* $i \neq j$ *için* $x_i \neq x_j$ *olmasına rağmen* $\|x_0\| = \|x_1\| = \ldots = \|x_n\|$ *olacak şekilde* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *olması ihtimalleri vardır.*

Örnek 5.4 (Ortalama G_n-metrik) *(X,δ) bir metrik uzay olmak üzere $\forall x_1,\ldots,x_n \in X$ için $d : \overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{n} \to [0,\infty)$ fonksiyonu*

$$d(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \delta(x_i,x_j)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda d, X üzerinde bir G_n-metriktir.

İspat *Örnek 5.1 (i) şıkkı gereğince, $d(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i<j} \delta(x_i,x_j)$ nin X üzerinde bir G_n-metrik olduğunu görtermek yeterlidir. Açıkca d fonksiyonu (g_2) ve (g_3) aksiyomlarını sağlar.*

- (g_1) *δ, X üzerinde bir metrik olduğundan $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ise $d(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ dır. Tersine $d(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ ise $\forall i,j = 1,\ldots,n$ için $\delta(x_i,x_j) = 0$ olup $x_1 = \ldots = x_n$ bulunur.*
- (g_4) *$x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t,w \in X$ ve $s+t=n$ olsun. δ, X üzerinde bir metrik olduğundan $\forall i \in \{1,\ldots,s\}$ ve $\forall j \in \{1,\ldots,t\}$ için $\delta(x_i,y_j) \le \delta(x_i,w)+\delta(w,y_j)$ sağlanır. O halde kolayca*

$$\sum_{i,j} \delta(x_i,y_j) \le \sum_{i} \delta(x_i,w) + \sum_{j} \delta(w,y_j)$$

olup her iki tarafa da $\sum_{i<j} \delta(x_i,x_j)$ ve $\sum_{i<j} \delta(y_i,y_j)$ ifadeleri eklenerek

$$d(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) \le d(x_1,\ldots,x_s,w,\ldots,w) + d(w,\ldots,w,y_1,\ldots,y_t)$$

elde edilir.

Örnek 5.5 (Max G_n-metrik) *(X,δ) bir metrik uzay olmak üzere, $d : X^n \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\forall x_1,,x_n \in X$ için*

$$d(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \max_{1\le i,j\le n} \delta(x_i,x_j)$$

ile tanımlansın. Bu durumda d, X üzerinde bir G_n-metriktir.

İspat *Açıkça d fonksiyonu (g_1), (g_2), ve (g_3) aksiyomlarını sağlar. (g_4) özelliği için $x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t,w \in X$ ve $s+t=n$ olsun. a ve b*

$$d(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t) = \delta(a,b)$$

olacak şekilde farklı elemanlar olsun. Buna göre üç farklı olasılık vardır. Bunlar ise,

(i) $a,b \in \{x_1,\ldots,x_s\}$

(ii) $a, b \in \{y_1, \ldots, y_t\}$

(iii) $a \in \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ *ve* $b \in \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$

olmasıdır. (i) ve (ii) şıkları için (g_4) *aksiyomunun sağlandığı açıktır. iii) durumu ele alındığında* $i \in \{1, \ldots, s\}$ *ve* $j \in \{1, \ldots, t\}$ *için* $\delta(x_i, y_j) \leq \delta(x_i, w) + \delta(w, y_j)$ *olduğundan* $\max_{i,j} \delta(x_i, y_j) \leq \max_i \delta(x_i, w) + \max_j \delta(w, y_j)$ *olur. Böylelikle,*

$$\begin{aligned} d(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) &= \delta(a, b) = \max_{i,j} \delta(x_i, y_j) \\ &\leq \max_i \delta(x_i, w) + \max_j \delta(w, y_j) \\ &\leq d(x_1, \ldots, x_s, w, \ldots, w) + d(w, \ldots, w, y_1, \ldots, y_t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 5.3 *Ortalama G_n-metrik örneğinde,* (X, δ) *metrik uzayı için,*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} \delta(x_i, x_j)$$

bir G_n-metrik uzaydı. Buradan bu G_n-metrik ve max G_n-metrikleri $(n) \times (n)$ *matrisinin girdileri* $m_{ij} = \delta(x_i, x_j)$ *olmak üzere* $M = \{m_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ *için,*

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta(x_i, x_j) = \|M\|_1$$

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{1 \leq i,j \leq n} \delta(x_i, x_j) = \|M\|_\infty$$

olarak göz önüne alınabilir. Bu nedenle $\|.\|_1$ *ve* $\|.\|_\infty$ *normları sırasıyla* ℓ_1 *ve* ℓ_∞ *matris normlarıdır. Doğal olarak ortaya şu soru çıkar. "*$1 < p < \infty$ *için* $\|M\|_p$ *fonksiyonu* (X, δ) *metrik uzayı üzerinde bir G_n-metrik uzay mıdır?"*

Örnek 5.6 (En Kısa G_n-Metrik Yolu) (X, δ) *öklidyen bir metrik uzay ve* $d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $\forall x, y, z \in X$ *için,*

$$d(x, y, z) = \min\{\delta(x, y) + \delta(y, z), \delta(x, z) + \delta(z, y), \delta(y, x) + \delta(x, z)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda d, bir G_3-metriktir.

İspat *Bir G_3-metrik aynı zamanda bir G-metrik olduğundan d nin bir G-metrik olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Buna göre* $\forall x, y, z, w \in X$ *için,*

(G_1) *δ, X üzerinde bir metrik olduğundan $\forall x \in X$ için $\delta(x,x) = 0$ olup $d(x,x,x) = 0$ bulunur.*

(G_2) *$\forall x \neq y$ için, $d(x,x,y) = \min\{\delta(x,y), 2\delta(x,y), \delta(x,y)\} = \delta(x,y) > 0$ dır.*

(G_3) *$d(x,x,y) = \delta(x,y) \leq \min\{\delta(x,y)+\delta(y,z), \delta(x,z)+\delta(z,y), \delta(y,z)+\delta(z,x)\} = d(x,y,z)$ olur.*

(G_4) *Her $a, b \in X$ için $\delta(a,b) = \delta(b,a)$ olduğundan $d(x,y,z) = d(x,z,y) = d(z,x,y) = d(z,y,x) = d(y,z,x) = d(y,x,z)$ bulunur.*

(G_5) *Genelliği bozmadan $d(w,y,z) = \delta(w,y) + \delta(y,z)$ alınabilir. Bu taktirde,*

$$\begin{aligned} d(x,w,w) + d(w,y,z) &= \delta(x,w) + \delta(w,y) + \delta(y,z) \\ &\geq \delta(x,y) + \delta(y,z) \\ &\geq d(x,y,z) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle d bir G-metrik uzay olur. Yani d, bir G_3-metrik uzaydır.

Uyarı 5.4

(1) Yukarıda verilen örneklerde tanımlanan tüm G_n-metrikler çok katlı bağımsızdır.

(2) (X,δ) metrik uzayı verildiğinde $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için $d : X^n \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min_{\pi \in S} \sum_{i=1}^{n-1} \delta(x_{\pi(i)}, x_{\pi(i+1)})$$

olacak şekilde tanımlanırsa Örnek 5.6. daki G_3-metriği genelleştirilmiş olur. Burada S, $\{1, 2, \ldots, n\}$ nin tüm permütasyonlarının kümesini temsil eder. Yani $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sayısı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarını birleştiren en kısa yolun uzunluğudur.

(3) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Yani X, n-boyutlu bir veri kümesi olarak göz önüne alınabilir. $d : X^n \to [0,\infty)$ fonksiyonunda $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq B$ olacak şekilde en küçük kapalı B yuvarının çapı olarak tanımlansın. Bu ise ***Slyvester*** *tarafindan tanıtılan ”verilen n noktayı içeren en küçük çember problemi” dir. Bu problem $n \geq 3$ olduğu durumda d nin bir G_n-metrik olması durumu açık bir problemdir.*

Teorem 5.2 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

(1)

$$G_n(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{s\ tane},y,y,\ldots,y) \leq$$
$$G_n(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{s\ tane},w,w,\ldots,w) + G_n(\underbrace{w,w,\ldots,w}_{s\ tane},y,y,\ldots,y)$$

dir.

(2) $G_n(x,y,y,\ldots,y) \leq G_n(x,w,w,\ldots,w)+G_n(w,y,y,\ldots,y)$ *ve* G_n *çok katlı bağımsız ise,*

$$G_n(x,y,y,\ldots,y) \leq G_n(x,w,w,\ldots,w) + G_n(y,w,w,\ldots,w)$$

olur.

(3) $G_n(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{s\ tane},w,w,\ldots,w) \leq sG_n(x,w,w,\ldots,w)$ *ve*
$G_n(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{s\ tane},w,w,\ldots,w) \leq (n-s)G_n(w,x,x,\ldots,x)$ *dir.*

(4) $G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} G_n(x_i,w,w,\ldots,w)$ *dir.*

(5)

$$|G_n(y,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) - G_n(w,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})| \leq$$
$$\max\{G_n(y,w,\ldots,w), G_n(w,y,\ldots,y)\}$$

dır.

(6)

$$|G_n(\overbrace{x,x,\ldots,x}^{s\ tane},w,w,\ldots,w) - G_n(\overbrace{x,x,\ldots,x}^{s'\ tane},w,w,\ldots,w)| \leq$$
$$|s-s'|G_n(x,w,w,\ldots,w)$$

dir.

(7) $G_n(x,w,w,\ldots,w) \leq (1+(s-1)(n-s))G_n(\overbrace{x,x,\ldots,x}^{s\ tane},w,w,\ldots,w)$ *dır.*

İspat *(1) ve (2)* G_n*-metriğin* (g_4) *aksiyomu gereği sağlanır. Dikkat edilirse çok katlı bağımsız bir* G_n*-metrik uzay için* $G_n(y,w,\ldots,w) = G_n(w,y,\ldots,y)$ *dir.*

(3) (g_4) *aksiyomu gereğince,*

$$\begin{aligned} G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s tane}},w,\dots,w) &\leq G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s-1 tane}},w,w)+G_n(x,w,\dots,w) \\ &\leq G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s-2 tane}},w,w,w)+G_n(x,w,\dots,w)+G_n(x,w,\dots,w) \\ &\vdots \\ &\leq G_n(x,w,\dots,w)+G_n(x,w,\dots,w)+\dots+G_n(x,w,\dots,w) \\ &\leq sG_n(x,w,\dots,w) \end{aligned}$$

bulunur.

(4) (g_2) *ve* (g_4) *aksiyomları gereğince,*

$$\begin{aligned} G_n(x_1,\dots,x_n) &\leq G_n(x_1,w,\dots,w)+G_n(x_2,\dots,x_n,w) \\ &\leq G_n(x_1,w,\dots,w)+G_n(x_2,w,\dots,w)+G_n(x_3,\dots,x_n,w,w) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_1^n G_n(x_i,w,\dots,w) \end{aligned}$$

elde edilir.

(5) (g_4) *aksiyomu gereğince*

$$G_n(y,x_1,\dots,x_{n-1}) \leq G_n(w,x_1,\dots,x_{n-1})+G_n(y,w,\dots,w)$$

olduğundan dolayı

$$G_n(y,x_1,\dots,x_{n-1})-G_n(w,x_1,\dots,x_{n-1}) \leq G_n(y,w,\dots,w)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$G_n(w,x_1,\dots,x_{n-1})-G_n(y,x_1,\dots,x_{n-1}) \leq G_n(w,y,\dots,y)$$

(6) (3) gereğince açıktır.

(7) (3) gereğince

$$\begin{aligned} G_n(x,w,\dots,w) &\leq G_n(x,x,w\dots,w)+G_n(w,x,\dots,x) \\ &\leq G_n(x,x,x,w\dots,w)+G_n(w,x,\dots,x)+G_n(w,x,\dots,x) \\ &\vdots \\ &\leq G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s tane}},w,\dots,w)+(s-1)G_n(w,x,\dots,x) \\ &\leq G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s tane}},w,\dots,w)+(s-1)(n-s)G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s tane}},w,\dots,w) \\ &= (1+(s-1)(n-s))G_n(\underbrace{x,\dots,x}_{\text{s tane}},w,\dots,w) \end{aligned}$$

bulunur.

Aşağıdaki örnek bir G_n-metrik verildiğinde bu metrik ile bir uzaklık fonksiyonunun nasıl oluşturulabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.7 *Herhangi bir (X, G_n) G_n-metrik uzayı için,*

(1) $d(x,y) = G_n(\overbrace{x,x,\ldots,x}^{s \text{ tane}}, y,y,\ldots,y) + G_n(\overbrace{y,y,\ldots,y}^{s \text{ tane}}, x,x,\ldots,x)$

(2) $d(x,y) = G_n(x,y,y,\ldots,y) + G_n(x,x,y,y,\ldots,y) + \ldots + G_n(x,x,\ldots,x,y)$

(3) $d(x,y) = \max\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n), : x_i \in \{x,y\}, 1 \leq i \leq n\}$

şeklinde tanımlanan $d : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonları birer uzaklık fonksiyonudur.

İspat *Burada tanımlı olan d fonksiyonlarının uzaklık fonksiyonu olduğunu göstermek için özdeşlik negatif olmama simetri ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterlidir. Ancak bu fonksiyonların herbiri için özdeşlik, negatif olmama, simetri özellikleri açıkca görülmektedir. Dolayısıyla herbir fonksiyon için üçgen eşitsizliğini göstermek yeterlidir.*

1) Her $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= G_n(\overbrace{x,x,\ldots,x}^{s \text{ tane}}, z,z,\ldots,z) + G_n(\overbrace{z,z,\ldots,z}^{s \text{ tane}}, x,x,\ldots,x) \\ &\quad + G_n(\underbrace{z,z,\ldots,z}_{s \text{ tane}}, y,y,\ldots,y) + G_n(\underbrace{y,y,\ldots,y}_{s \text{ tane}}, z,z,\ldots,z) \\ &\geq G_n(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{s \text{ tane}}, y,y,\ldots,y) + G_n(\underbrace{y,y,\ldots,y}_{s \text{ tane}}, x,x,\ldots,x) = d(x,y) \end{aligned}$$

olacağından d fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

2) Her $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= G_n(x,z,\ldots,z) + \ldots + G_n(x,x,\ldots,x,z) \\ &\quad + G_n(z,y,\ldots,y) + \ldots + G_n(z,z,\ldots,z,y) \\ &\geq G_n(x,y,\ldots,y) + \ldots + G_n(x,x,\ldots,x,y) = d(x,y) \end{aligned}$$

bulunur.

3) $x, y \in X$ için $x = y$ ise $d(x,y) = 0$ olduğundan d fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. $x \neq y$ ise $d(x,y) = G_n(a_1,\ldots,a_n)$ olacak şekilde $a_1,\ldots,a_n \in \{x,y\}$ elemanları vardır. Her $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{x,y\}$ için,

$$G_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) \geq G_n(b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

olur. $A := \{i : a_i = x\}$ *olsun. Açıkça* $1 \leq n(A) \leq n$ *dır.* $d = n(A)$ *olarak alınsın. Genelliği bozmaksızın* $a_1 = \ldots = a_d = x$ *ve* $a_{d+1} = \ldots = a_n = y$ *varsayımı yapılabilir. Buna göre*

$$d(x,y) = G_n(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{d \text{ tane}}, y, y, \ldots, y)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &\geq G_n(\overbrace{x, x, \ldots, x}^{d \text{ tane}}, z, z, \ldots, z) + G_n(\overbrace{z, z, \ldots, z}^{d \text{ tane}}, y, y, \ldots, y) \\ &\geq G_n(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{d \text{ tane}}, y, y, \ldots, y) = d(x,y) \end{aligned}$$

bulunur.

5.2 G_n-Metrik Uzayın Topolojisi

Tanım 5.3 (X, G_n) *bir* G_n*-metrik uzay olsun.* $x_0 \in X$ *ve* $r > 0$ *olmak üzere*

$$B_{G_n}(x_0, r) := \{y \in X : G_n(x_0, y, \ldots, y) < r\}$$

kümesine x_0 *merkezli* r *yarıçaplı* G_n*-açık yuvarı denir.*

Önerme 5.2 (X, G_n) *bir* G_n*-metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

i) $G_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) < r$ *ve* $n(\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}) \geq 3$ *ise* $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *için* $x_i \in B_{G_n}(x_0, r)$ *dir.*

ii) G_n *çok katlı bağımsız ve* $G_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) < r$ *ise* $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *için* $x_i \in B(x_0, r)$ *dir.*

iii) $y \in B_{G_n}(x_1, r_1) \bigcap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *olmak üzere*

$$B_{G_n}(y, \delta) \subseteq B_{G_n}(x_1, r_1) \bigcap B_{G_n}(x_2, r_2)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ *değeri vardır.*

İspat $G_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) < r$ *ve* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ *olsun.*

(i) $n(X) \geq 3$ *olduğundan* $\forall i \in \mathbb{N}$ *için* $\{x_0, x_i, \ldots, x_i\} \subsetneq X$ *olduğu açıktır.* G_n *metriğin monotonluk şartından*

$$G_n(x_0, x_i, \ldots, x_i) \leq G_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) < r$$

olup $\forall i \in \mathbb{N}$ *için* $x_i \in B_{G_n}(x_0, r)$ *dir.*

(ii) $n(X) = 2$ *için sağlandığını göstermek yeterlidir.* G_n*-metriği çok katlı bağımsız olduğundan*

$$G_n(x_0, x_i, \ldots, x_i) \leq G_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) < r$$

olur. Dolayısıyla her $i \in \mathbb{N}$ *için* $x_i \in B_{G_n}(x_0, r)$ *dir.*

(iii) $y \in B_{G_n}(x_1, r_1) \bigcap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *olduğundan* $i = 1, 2$ *için* $G_n(x_i, y, \ldots, y) < r_i$ *dir.* $\delta := \min_{i=1,2}\{r_i - G_n(x_i, y, \ldots, y)\}$ *olarak alınsın. Bu taktirde* $\forall z \in B(y, \delta)$ *ve* $i = 1, 2$ *için*

$$G_n(x_i, z, \ldots, z) \leq G_n(x_i, y, \ldots, y) + G_n(y, z, \ldots, z) < G_n(x_i, y, \ldots, y) + \delta < r_i$$

bulunur. Böylelikle $B_{G_n}(y, \delta) \subseteq B_{G_n}(x_0, r_1) \bigcap B_{G_n}(x_2, r_2)$ *dir.*

Bu önermede ki $\mathbf{B} = \{B_{G_n}(x, r) : x \in X, r > 0\}$ tüm G_n-yuvarlarının koleksiyonu X üzerinde bir topoloji için taban oluşturur. Bu topolojiye **B** tarafından üretilen G_n-metrik topoloji denir.

Teorem 5.3 (X, G_n) *bir* G_n*-metrik uzay ve* $d(x, y) = G_n(x, y, \ldots, y) + G_n(y, x, \ldots, x)$ *olsun. Bu durumda*

$$B_{G_n}(x_0, \frac{r}{n}) \subseteq B_d(x_0, r) \subseteq B_{G_n}(x_0, r)$$

olur.

İspat $y \in B_{G_n}(x_0, r) \Leftrightarrow G_n(x_0, y, \ldots, y) < r$ *olduğu hatırlansın.*

(i) $x \in B_{G_n}(x_0, \frac{r}{n})$ *olsun. Bu durumda* $G_n(x_0, x, \ldots, x) < \frac{r}{n}$ *dir. O halde*

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &= G_n(x_0, x, \ldots, x) + G_n(x, x_0, \ldots, x_0) \\ &\leq G_n(x_0, x, \ldots, x) + (n-1)G_n(x_0, x, \ldots, x) \\ &\leq (n)G_n(x_0, x, \ldots, x) < r \end{aligned}$$

olur ve bu nedenle $x \in B_d(x_0, r)$ *dir.*

(ii) $x \in B_d(x_0, r)$ *olsun. Bu durumda* $d(x_0, x) = G_n(x_0, x, \ldots, x) + G_n(x, x_0, \ldots, x_0) < r$ *dir.* $G_n(x_0, x, \ldots, x) \leq (n-1)G_n(x, x_0, \ldots, x_0)$ G_n*-metrik özelliklerinde sağlanır ve* $(1/n-1)G_n(x_0, x, \ldots, x) \leq G_n(x, x_0, \ldots, x_0)$ *olur. Eşitsizliğin her iki tarafına* $G_n(x_0, x, \ldots, x)$ *ifadesi eklenirse buradan*

$$(\frac{n}{n-1})G_n(x_0, x, \ldots, x) \leq G_n(x_0, x, \ldots, x) + G_n(x, x_0, \ldots, x_0) < r$$

olur ve böylelikle $G_n(x_0, x, \ldots, x) \leq \frac{n-1}{n} r < r$ *olup* $x \in B_{G_n}(x_0, r)$ *bulunur.*

Böylelikle her G_n-metrik uzay bir d metrikten türetilen metrik uzaya topolojik olarak denktir. Bu ise birçok kavram ve sonucun metrik uzaylardan G_n-metrik uzaylara taşınmasına imkan verir.

5.3 G_n-Metrik Uzayda Yakınsaklık Ve Süreklilik

Tanım 5.4 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay olsun. $x \in X$ bir nokta ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun.*

1) Her $\varepsilon > 0$ değeri verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \geq N$ için

$$G_n(x, x_{i_1}, x_{i_2}, , x_{i_{n-1}}) < \varepsilon$$

*olacak şekilde varsa (x_n) dizisi x noktasına G_n**-yakınsar** denir ve $(x_n) \xrightarrow{G_n} x$ ile gösterilir. Bu durumda (x_n) ye X te G_n-yakınsak ve de $x \in X$ de (x_n) nin G_n-limiti denir.*

2) Her $\varepsilon > 0$ değeri verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $i_1, i_2, \ldots, i_n \geq N$ için

$$G_n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) < \varepsilon$$

*olacak şekilde varsa (x_n) dizisine G_n**-Cauchy** dizisi denir.*

*3) (X, G_n) uzayındaki her G_n-Cauchy dizisi G_n-yakınsak ise (X, G_n) uzayına G_n**-tam** denir.*

Önerme 5.3 *Aşağıdaki önermeler doğrudur.*

(1) G_n-metrik uzayındaki G_n-yakınsak olan bir dizinin limiti tektir.

(2) G_n-metrik uzayındaki G_n-yakınsak her dizi G_n-Cauchy dizisidir.

İspat

1) (X, G_n) bir G_n-metrik uzay ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ noktaları yakınsak $(x_n) \subseteq X$ dizisinin limit noktaları olsunlar. Bu durumda G_n-yakınsaklık tanımından dolayı $\forall i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \geq N_1$ için

$$G_n(x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}) < \frac{\varepsilon}{n}$$

$\forall i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \geq N_2$ için

$$G_n(y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}) < \frac{\varepsilon}{n}$$

olacak şekilde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N := \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $m \geq N$ ise üçgen eşitsizliği ve G_n-metrik özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} G_n(x, y, \ldots, y) &\leq G_n(x, x_m, \ldots, x_m) + G_n(x_m, y, \ldots, y) \\ &\leq G_n(x, x_m, \ldots, x_m) + (n-1)G_n(y, x_m, \ldots, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{n} + (n-1)\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olduğundan $G_n(x, y, \ldots, y) = 0$ olur. O halde $x = y$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde G_n-metrik uzayda G_n-yakınsak bir dizinin limiti tektir.

2) *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay ve $x \in X$ noktası yakınsak $(x_n) \subseteq X$ dizisinin limit noktası olsun. Yakınsaklık tanımdan $\forall i_1, \ldots, i_{n-1} \geq N$ için*

$$G_n(x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}) < \frac{\varepsilon}{n}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan G_n-metrik özellikleri ve monotonluğu gereğince,

$$G_n(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} G_n(x_{i_k}, x, x, \ldots, x) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla (x_n) dizisi (X, G_n) de bir G_n-Cauchy dizisi olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 5.2 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay, $(x_n) \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) $(x_n) \xrightarrow{G_n} x$

(2) *Her $\varepsilon > 0$ değeri verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı her $k \geq N$ için $x_k \in B_{G_n}(x, \varepsilon)$ olacak şekilde vardır.*

(3) *$1 \leq s \leq n-1$ değeri için $\lim\limits_{k_1, \ldots, k_s \to \infty} G_n(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, x, \ldots, x) = 0$ dır. Yani her $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı $k_1, \ldots, k_s \geq N$ için $G_n(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, x, \ldots, x) < \varepsilon$ olacak şekilde vardır.*

İspat

($(1) \Leftrightarrow (2)$) *G_n-yakınsaklık tanımından dolayı açıktır.*

((2) ⇒ (3)) *Her* $\varepsilon > 0$ *verildiğinde* $k > N$ *olacak şekildeki* $N \in \mathbb{N}$ *için* $x_k \in B_{G_n}(x, \frac{\varepsilon}{s})$ *dir. Yani* $G_n(x, x_k, x_k, \ldots, x_k) < \frac{\varepsilon}{s}$ *dir.* $k_1, k_2, \ldots, k_s \geq N$ *için Teorem 5.2 (4) şıkkı gereğince*

$$G_n(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}, x, \ldots, x) \leq \sum_{j=1}^{s} G_n(x, x_{k_j}, \ldots, x_{k_j}) < \varepsilon$$

bulunur.

((3) ⇒ (2)) $\varepsilon > 0$ *olsun.* $k_1, k_2, \ldots, k_s \geq N$ *ve*

$$G_n(k_1, \ldots, k_s, x, \ldots, x) < \frac{\varepsilon}{(1 + (s-1)(n-s))}$$

sağlanacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ *sayısı var olsun. Buradan Teorem 5.2 (7) şıkkı gereğince*

$$G_n(x, x_k, \ldots, x_k) \leq (1 + (s-1)(n-s))G_n(\underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{s \text{ tane}}, x, \ldots, x) < \varepsilon$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 5.3 (X, G_n) *bir* G_n*-metrik uzay ve* $(x_n) \subseteq X$ *bir dizi olsun. Bu durumda*

(i) (x_n) *dizisi* G_n*-Cauchy dizisidir.*

(ii) $n \to \infty$ *için* $G_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) \to 0$ *dır.*

(iii) Sabit bir $1 \leq s \leq n$ *sayısı için*

$$\lim_{k,l \to \infty} G_n(\overbrace{x_k, \ldots, x_k}^{s \text{ tane}}, x_l, \ldots, x_l) = 0$$

ifadeleri denktir.

İspat

((1) ⇒ (2)) (x_n)*,* G_n*-Cauchy dizisi olsun. O halde her* $\varepsilon > 0$ *verildiğinde* $i_1, i_2, \ldots, i_n \geq N$ *için* $G_n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) < \varepsilon$ *olacak şekilde* $N \in \mathbb{N}$ *vardır. Bu durumda her* $\forall n \geq N$ *için* $x_{i_1} = x_{i_n}$ *ve* $x_{i_2} = \ldots = x_{i_{n+1}}$ *olursa*

$$G_n(x, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) \leq G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) < \varepsilon$$

olur. ε *keyfi olduğundan dolayı* $G_n(x, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) = 0$ *bulunur.*

((2) $\Rightarrow$ (1)) *$n \to \infty$ iken $G_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) \to 0$ dır. Yani $\forall N \in \mathbb{N}$ için $n \geq N$ olmak üzere $G_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) \to 0$ dır. O halde her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall N \in \mathbb{N}$ için $n \geq N$ olmak üzere $G_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) < \dfrac{\varepsilon}{n.n}$ dir. Bu durumda açıkça,*

$$\begin{aligned} G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq \sum_{i=1}^{n} G_n(x_i, x_n, \ldots, x_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (i+1) G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{n} + 2\frac{\varepsilon}{2n} + \ldots + n\frac{\varepsilon}{n.n} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde açıkça her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $1, 2, \ldots, n \geq N$ için $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır.

((2) $\Rightarrow$ (3)) *Genelliği bozmaksızın $k < l$ varsayılsın. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde her bir $m = 0, 1, \ldots, l-k-1$ için $G_n(x_{k+m}, x_{k+m+1}, \ldots, x_{k+m+1}) < \dfrac{\varepsilon}{n(l-k)}$ olacak şekilde $N_m \in \mathbb{N}$ vardır. $N := \max\{N_0, \ldots, N_{l-k-1}\}$ olsun. Buna göre $\forall k \geq N$ için,*

$$\begin{aligned} G_n(\underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{s \text{ tane}}, x_l, \ldots, x_l) &\leq sG_n(x_k, x_l, \ldots, x_l) \\ &\leq s(G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(x_{k+1}, x_l, \ldots, x_l)) \\ &\vdots \\ &\leq s(\sum_{i=k}^{l-1} G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1})) < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $k, l \geq N$ ise $G_n(\underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{s \text{ tane}}, x_l, \ldots, x_l) < \varepsilon$ olur.

((3) $\Rightarrow$ (1)) *$\varepsilon > 0$ verilsin. Varsayalım ki ve $k, l \geq N$ iken*

$$G_n(\underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{s \text{ tane}}, x_l, \ldots, x_l) < \frac{\varepsilon}{n(1 + (s+1)(n+1-s))}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ var olsun. Eğer $i_1, \ldots, i_n \geq N$ ise

$$\begin{aligned} G_n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) &\leq \sum_{k=1}^{n} G_n(x_{i_k}, x_{i_0}, \ldots, x_{i_0}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} (1 + (s+1)(n-1+s)) G_n(\overbrace{x_{i_k}, \ldots, x_{i_k}}^{s \text{ tane}}, x_{i_0}, \ldots, x_{i_0}) < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 5.5 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.*

*(1) Her bir $x \in X$ için $x \in B_{G_n}(a, \varepsilon)$ olacak şekilde $a \in A$ var ise $A \subseteq X$ kümesine (X, G_n) nin bir ε,G_n-**ağ** denir. Eğer A kümesi sonlu ise A ya (X, G_n) nin bir sonlu ε,G_n-ağ denir.*

*(2) $\forall \varepsilon > 0$ için (X, G_n) içinde sonlu bir ε,G_n-ağ var ise (X, G_n) ye **tamamen** G_n**-sınırlı** denir.*

*(3) (X, G_n) uzayı tam ve tamamen G_n-sınırlı ise bu (X, G_n) uzayına G_n**-kompakttır** denir.*

Tanım 5.6 *(X, G_n) ve $(Y, \tilde{G_n})$ G_n-metrik uzaylar olsun,*

*1) $T : X \to Y$ dönüşümü her bir $B_{\tilde{G_n}}(T(x), \varepsilon)$ yuvarı için $T(B_{G_n}(x, \delta)) \subseteq B_{\tilde{G_n}}(T(x), \varepsilon)$ olacak şekilde $B_{G_n}(x, \delta)$ açık yuvarı varsa T dönüşümüne $x \in X$ noktasında G_n**-süreklidir** denir.*

*2) $T : X \to Y$ dönüşümü $\forall x \in X$ için sürekli ise T dönüşümüne G_n**-süreklidir** denir.*

*3) $T : X \to Y$ dönüşümü bire bir, örten ve T ile T^{-1} G_n-sürekli ise T ye bir G_n**-homeomorfizm** denir. Bu durumda X ve Y uzaylarına da G_n**-homeomorfiktir** denir.*

*4) ”Eğer X uzayı bir P özelliğine sahip ve X uzayı ile Y uzayı G_n-homeomorfik ise bu durumda Y uzayıda P özelliğine sahiptir.” koşulunu sağlayan G_n-metrik uzayın P özelliğine G_n**-topolojik degişmez** adı verilir.*

Önerme 5.4 *(X, G_n) ve $(Y, \tilde{G_n})$ G_n-metrik uzaylar ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) T dönüşümü G_n-süreklidir.

(ii) $\forall x \in X$ ve $(x_n) \subseteq X$ dizisi için (x_n) dizisi x noktasına G_n-yakınsak ise $(T(x_n))$ dizisi $T(x)$ noktasına G_n-yakınsaktır.

İspat **(**$(1) \Rightarrow (2)$**)** *$x \in X$ ve $(x_n) \subseteq X$ de x noktasına G_n-yakınsak bir dizi olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü G_n-sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $T(B_{G_n}(x, \delta)) \subseteq B_{\tilde{G_n}}(T(x), \varepsilon n^{-2})$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $(x_n) \xrightarrow{G_n} x$ olduğundan dolayı her $i_1, \ldots, i_{n-1} \geq N$ için $G_n(x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) < \delta$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylelikle $\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$ için $G_n(x, x_{i_k}, \ldots, x_{i_k}) < \delta$ elde edilir. Buradan T nin G_n-sürekliliğinden $\forall k \in \mathbb{N}$ için,*

$$G_n(T(x), T(x_{i_k}), \ldots, T(x_{i_k})) < \frac{\varepsilon}{n^2}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde

$$\begin{aligned} G_n(T(x), T(x_{i_k}), \ldots, T(x_{i_k})) &\leq \sum_{k=1}^{n} G_n(T(x_{i_k}), T(x), \ldots, T(x)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} nG_n(T(x), T(x_{i_k}), \ldots, T(x_{i_k})) < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu ise $(T(x_n))$ dizisinin $T(x)$ noktasına G_n-yakınsamasıdır.

($(2) \Rightarrow (1)$) *Varsayalım ki T dönüşümü G_n-sürekli olmasın.*
Bu durumda $\exists x \in X$ elemanı için T, x noktasında G_n-sürekli değildir. Bu durumda $\delta > 0$ için $G_n(x, y, \ldots, y) < \delta$ ve $G_n(T(x), T(y), \ldots, T(y)) \geq \varepsilon$ olup $y \in X$ var olacak biçimde $\exists \varepsilon > 0$ vardır. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $G_n(x, x_k, \ldots, x_k) < \frac{1}{k}$ ve $G_n(T(x), T(x_k), \ldots, T(x_k)) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x \in X$ alınabilir. Dolayısıyla (x_k) dizisi x noktasına G_n-yakınsar ancak $(T(x_k))$ dizisi $T(x)$ noktasına G_n-yakınsamaz. Bu ise kabül ile çelişir.

Yardımcı Teorem 5.4 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay ise G_n fonksiyonu tüm n bileşenlerinde süreklidir. Yani her bir $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ için $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G_n} x_i$ olacak şekilde X de bir dizi ise $k \to \infty$ iken $(G_n((x_1^k), (x_2^k), \ldots, (x_n^k))) \to G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dir.*

İspat *Varsayalım ki her bir $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ için $k \to \infty$ iken $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{G_n} x_i$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için Yardımcı teorem 5.2 nin (3) şıkkı gereğince $k \geq N_i$ için $G_n(x_i^k, x_i, \ldots, x_i) < \frac{\varepsilon}{n}$ olacak şekilde $N_i \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$ olsun. Bu taktirde G_n-metriğinin permütasyon bağımsızlığı ve üçgen eşitsizliği aksiyomları gereğince $k \geq N$ için,*

$$\begin{aligned} G_n(x_1^k, \ldots, x_n^k) &\leq G_n(x_1^k, x_1, \ldots, x_1) + G_n(x_1, x_2^k, \ldots, x_n^k) \\ &\leq G_n(x_1^k, x_1, \ldots, x_1) + G_n(x_2, x_2^k, \ldots, x_2) + G_n(x_1, x_2, x_3^k \ldots, x_n^k) \\ &\leq \ldots \leq \sum_{i=1}^{n} G_n(x_i^k, x_i, \ldots, x_i) + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &< \varepsilon + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer yolla $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \varepsilon + G_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $|G_n(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) - G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$ bulunur. Buda istenen sonucu verir.

6. BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu kısımda bazı sabit nokta teoremleri alışılmış metrik uzay, G-metrik uzay ve G_n-metrik uzayda verilmiştir. Bu teoremlerin alışılmış metrik uzay ve G-metrik uzaydaki durumları gerek olmadıkça ispatlanmamıştır. Gerçekte alışılmış metrik uzayda iyi bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin G-metrik uzay ve G_n-metrik uzay versiyonları verilmiştir.

Aşağıdaki ilk teorem alışılmış metrik uzayda iyi bilinen Banach sabit nokta teoremidir. Sonrasındaki iki teorem sırasıyla G-metrik ve G_n-metrik uzayda Banach sabit nokta teoremleridir.

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde $0 \leq \lambda < 1$ değeri varsa T'ye büzülme dönüşümü denir.

Teorem 6.1 *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Yani $T(x) = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır. Özellikle x_0, X te keyfi bir nokta ve $x_{n+1} = T^n(x_0)$ şeklinde tanımlanan X de bir dizi olarak alınır ise (x_n) dizisi bu sabit noktaya yakınsar.*

Teorem 6.2 *(X, G) bir tam G-metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ ve $\lambda \in [0, 1)$ için*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq \lambda G(x, y, z)$$

koşulunu sağlansın. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.3 *(X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü her $x_1, \ldots, x_n \in X$ ve $\lambda \in [0, 1)$ için*

$$G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \lambda G_n(x_1, \ldots, x_n)$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat *$y_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $y_{k+1} = T(y_k) = T^k(y_0)$ olsun. Buna göre $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ için $y_{k_0+1} = y_{k_0}$ ise $T(y_{k_0}) = y_{k_0}$ olacağından y_{k_0} sabit noktası bulunur. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için*

$y_{k+1} \neq y_k$ olsun. Buradan hipotez gereğince,

$$\begin{aligned} G_n(y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{k+2}) &= G_n(T(y_k), T(y_{k+1}), \ldots, T(y_{k+1})) \\ &\leq \lambda G_n(y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+1}) \\ &= \lambda G_n(T(y_{k-1}), T(y_k), \ldots, T(y_k)) \\ &\leq \lambda^2 G_n(y_{k-1}, y_k, \ldots, y_k) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{k+1} G_n(y_0, y_1, \ldots, y_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınacak olunursa $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $\lambda^{k+1} \to 0$ olur. Dolayısıyla $G_n(y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{k+2}) \to 0$ elde edilir. Buradan Yardımcı teorem 5.3 gereğince $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bir G_n-Cauchy dizidir. X bir tam G_n-metrik uzay olduğundan (y_n) dizisi yakınsakdır ve $y_k \to z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Buna göre,

$$G_n(y_{k+1}, T(z), \ldots, T(z)) \leq \lambda G_n(y_k, z, \ldots, z)$$

olup $k \to \infty$ için limit alınacak olunursa $y_k \to z$ olduğundan $G_n(y_k, z, \ldots, z) = 0$ olur. Dolayısıyla $G_n(y_{k+1}, T(z), \ldots, T(z)) = G_n(z, T(z), \ldots, T(z)) = 0$ olur ve $T(z) = z$ sabit noktasına ulaşılır.

Sabit noktanın tekliği için $z, \bar{z}$ farklı sabit noktalar olsunlar. Bu taktirde,

$$G_n(z, \bar{z}, \ldots, \bar{z}) = G_n(T(z), T(\bar{z}), \ldots, T(\bar{z})) \leq \lambda G_n(z, \bar{z}, \ldots, \bar{z})$$

olur. Bu ise $\lambda = 1$ için sağlanır. Ancak $\lambda \in [0,1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $G_n(z, \bar{z}, \ldots, \bar{z}) = 0$ olup $z = \bar{z}$ dir, yani sabit nokta var ve tektir.

Aşağıdaki teorem alışılmış metrik uzayda Kannan sabit nokta teoremidir. Takip eden iki teorem ise Kannan sabit nokta teoreminin sırasıyla G-metrik uzay ve G_n-metrik uzaydaki karşılıklarıdır.

Teorem 6.4 *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ ve her $x, y \in X$ için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$$

koşulu sağlanıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.5 *(X, G) bir tam G-metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü $\lambda \in [0, \frac{1}{3})$ ve her $x, y, z \in X$ için*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq \lambda[G(x, T(x), T(x)) + G(y, T(y), T(y)) + G(z, T(z), T(z))]$$

koşulu sağlanıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 6.6 (X, G_n) *bir tam* G_n*-metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\lambda \in [0, \frac{1}{n})$ *ve her* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *için*

$$G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \lambda[G_n(x_1, T(x_1), \ldots, T(x_1)) + \ldots + G_n(x_n, T(x_n), \ldots, T(x_n))]$$

koşulu sağlanıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat $x_0 \in X$, $x_{k+1} = T(x_k) = T^k(x_0)$ *şeklinde tanımlı X içinde bir dizi olsun. Buna göre hipotez gereğince* $\lambda \in [0, \frac{1}{n})$ *için,*

$$\begin{aligned} G_n(T(x_k), T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) \leq \lambda[&G_n(x_k, T(x_k), \ldots, T(x_k) \\ &+G_n(x_{k+1}, T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) + \ldots + G_n(x_{k+1}, T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})] \\ &= \lambda[G_n(x_k, T(x_k), \ldots, T(x_k)) + (n-1)G_n(x_{k+1}, T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1}))] \\ &= \lambda G_n(x_k, T(x_k), \ldots, T(x_k)) + \lambda(n-1)G_n(x_{k+1}, T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$G_n(T(x_k), T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) \leq \left(\frac{\lambda}{1-(n-1)\lambda}\right) G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}))$$

elde edilir. Buna göre $\lambda \in [0, \frac{1}{n})$ *olduğundan* $\beta = \dfrac{\lambda}{1-(n-1)\lambda} \in [0, 1)$ *olur. Bu taktirde bu süreç tekrar edilirse,*

$$\begin{aligned} G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) =& G_n(T(x_k), T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) \\ \leq& \beta G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \\ =& \beta G_n(T(x_{k-1}), T(x_k), \ldots, T(x_k))) \\ \leq& (\beta)^2 G_n(x_{k-1}, x_k, \ldots, x_k) \\ &\vdots \\ \leq& (\beta)^{k+1} G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ *için limit alındığında* $\beta \in [0, 1)$ *olduğundan* $(\beta)^{k+1} \to 0$ *olup* $G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \to 0$ *olur. Yardımcı teorem* 5.3 *gereğince* (x_k) *bir* G_n*-Cauchy dizisidir.* X *bir tam* G_n*-metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *koşulunu sağlayacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Böylelikle*

$$\begin{aligned} G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) \leq& G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(x_{k+1}, T(u), \ldots, T(u)) \\ \leq& G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + \beta G_n(x_k, u, \ldots, u) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ *için limit alındığında* $G_n(u, T(u), \dots, T(u)) \to 0$ *olacağından* $T(u) = u$ *olup sabit noktanın varlığı görülmüş olur. Tekliği için* $u \neq v$ *ve u,v T nin sabit noktaları olmak üzere*

$$\begin{aligned} G_n(u, v, \dots, v) =& G_n(T(u), T(v), \dots, T(v)) \\ \leq& \lambda[G_n(u, T(u), \dots, T(u)) + (n-1)G_n(v, T(v), \dots, T(v))] \\ =& 0 \end{aligned}$$

olup $\lambda \in [0, \frac{1}{n})$ *olduğundan* $(n-1)\lambda \in [0, 1)$ *olur. Bu durumda* $G_n(u, v, \dots, v) = 0$ *olmalıdır. Buradan da* $u = v$ *olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde sabit nokta var ve tektir.*

Aşağıdaki ilk iki teorem alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Chaterjee teoremi ve bu teoremin $G-$metrik uzaylardaki versiyonudur. Aşağıda yer alan üçüncü teorem ise Chaterjee sabit nokta teoreminin G_n-metrik uzaydaki karşılığıdır.

Teorem 6.7 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ *ve* $\forall x, y \in X$ *için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \gamma[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$$

koşulu sağlanıyor ise T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sabittir.

Teorem 6.8 (X, G) *bir G-tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\gamma \in [0, \frac{1}{6})$ *ve* $\forall x, y, z \in X$ *için*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq \gamma[G(x, T(y), T(z)) + G(y, T(x), T(z)) + G(z, T(x), T(y))]$$

koşulu sağlanıyor ise T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sabittir.

Teorem 6.9 (X, G_n) *bir tam* G_n*-metrik uzay ve* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\gamma \in [0, \frac{1}{2n})$ *ve* $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ *için*

$$\begin{aligned} &G_n(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)) \leq \\ &\qquad \gamma[G_n(x_1, T(x_2), \dots, T(x_n)) + \ldots + G(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_{n-1}), x_n)] \end{aligned}$$

koşulu sağlanıyor ise T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sabittir.

İspat *$x_0 \in X$, $x_{k+1} = T(x_k) = T^k(x_0)$ olacak şekilde tanımlı X de bir dizi olsun. Buna göre hipotez gereğince,*

$$\begin{aligned}
&G_n(T(x_k), T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) \leq \\
&\quad \gamma[G_n(x_k, T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1})) + (n-1)G_n(x_{k+1}, T(x_k), T(x_{k+1}), \ldots, T(x_{k+1}))] \\
&=\gamma[G_n(x_k, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) + (n-1)G_n(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})] \\
&\leq\gamma[G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) + (2n-2)G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})] \\
&=\gamma G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + (2n-1)\gamma G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})
\end{aligned}$$

olduğundan buradan basit bir düzenleme ile

$$G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \leq \frac{\gamma}{1-(2n-1)\gamma} G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1})$$

elde edilir. Buna göre $\gamma \in [0, \frac{1}{2n})$ olduğundan $\lambda := \frac{\gamma}{1-(2n-1)\gamma} \in [0, 1)$ dir. Bu taktirde bu süreç tekrar edilirse açıkça

$$G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \leq \lambda^{k+1} G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1)$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa $\lambda \in [0, 1)$ olduğundan $\lambda^{k+1} \to 0$ olacağından dolayı $G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \to 0$ bulunur. Yardımcı teorem 5.3 gereğince (x_k) bir G_n-Cauchy dizisidir. X bir tam G_n-metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Buna göre

$$\begin{aligned}
G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) &\leq G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(x_{k+1}, T(u), \ldots, T(u)) \\
&\leq G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + \lambda G_n(x_k, u, \ldots, u)
\end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limit alınırsa $G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) \to 0$ olacağından $T(u) = u$ bulunur. Dolayısıyla sabit noktanın varlığı görülmüş olur. Tekliği için $u \neq v$ ve u, v T nin sabit noktaları olmak üzere,

$$\begin{aligned}
G_n(u, v, \ldots, v) &= G_n(T(u), T(v), \ldots, T(v)) \\
&\leq \gamma[G_n(u, v, \ldots, v) + (n-1)G_n(u, v, \ldots, v)] \\
&= \gamma n G_n(u, v, \ldots, v)
\end{aligned}$$

olup $\gamma \in [0, \frac{1}{2n})$ olduğundan $\gamma n \in [0, \frac{1}{2})$ dir. Dolayısıyla $G_n(u, v, \ldots, v) = 0$ olmalıdır. Yani $u = v$ olur ve bu bir çelişkidir. O halde sabit nokta vardır ve tektir.

Tanım 6.1 *Bir (X, d) metrik uzayında her $x, y \in X$ için*

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

olacak şekilde bir $z \in X$ noktası bulunuyor ise (X, d) metrik uzayına ***M-konveks*** *denir.*

Tanım 6.2 *(X, d) bir metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $T_M(x)$ M-konvekslik tanımından $d(x, T(x)) = d(x, T_M(x)) + d(T_M(x), T(x))$ koşulunu sağlayan nokta ve ayrıca $i \in \{1, \ldots, 5\}$ olmak üzere $a_i > 0$, $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ için,*

$$\begin{aligned} d(T(T_m(x)), T(T_M(y))) \leq\ & a_1 d(x, y) + a_2 d(x, T(T_M(x))) + a_3 d(y, T(T_M(y))) \\ & + a_4 d(x, T(T_M(y))) + a_5 d(y, T(T_M(x))) \end{aligned}$$

*koşulunu sağlıyor ise T ye **genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümü** denir.*

Aşağıdaki teorem alışılmış metrik uzayda M-konvekslik ve genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümünün sabit nokta ile ilgisini vermektedir. İfadenin ispatı için Chaterjee, 1983 makalesine bakılabilir.

Teorem 6.10 *(X, d) M-konveks tam metrik uzay, $T : X \to X$ genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümü ve X', X in tüm limit noktalarının kümesi olmak üzere $\forall x \in X'$ için $T(T_M(x)) = T_M(T(x))$ olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır.*

Aşağıdaki teoremde G-metrik uzayda M-konvekslik ve genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümünün sabit nokta ile ilgisini ortaya koymaktadır. İfade G_n-metrik uzayın bir özel hali olduğundan ispatına yer verilmemiştir.

Teorem 6.11 *(X, G) M-konveks tam G-metrik uzay, $T : X \to X$ genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümü ve $\forall x \in X$ için $T(T_M(x)) = T_M(T(x))$ olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır.*

Tanım 6.3 *Bir (X, G_n) G_n-metrik uzayında her $x_1, \ldots, x_n \in X$ için $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_n(x_1, z, \ldots, z) + G_n(z, x_2, \ldots, x_n)$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası bulunuyor ise (X, G_n) G_n-metrik uzayına **M-konveks** denir.*

Tanım 6.4 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü her $x_1, \ldots, x_n \in X$ ve $T_M(x)$ M-konvekslik tanımından*

$$G_n(x, T(x), \ldots, T(x)) = G_n(x, z, \ldots, z) + G_n(z, T(x), \ldots, T(x))$$

koşulunu sağlayan nokta ve $i = \{1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $a_i > 0$, $a_1 + (n+1)(a_2 + a_3) \in [0, 1)$ *için,*

$$\begin{aligned} G_n(T(T_M(x_1)), \ldots, &T(T_M(x_n))) \leq a_1 G_n(x_1, \ldots, x_n) + \\ & a_2\Big[\sum_{i=1}^{n} G_n(x_i, T(T_M(x_i)), \ldots, T(T_M(x_i)))\Big] + \\ & a_3\Big[\sum_{i,j=1 i\neq j}^{n} G_n(x_j, T(T_M(x_i)), \ldots, T(T_M(x_{i+n-1})))\Big] \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise T ye ***genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümü*** *denir.*

Teorem 6.12 (X, G_n) *M-konveks çok katlı bağımsız, tam* G_n*-metrik uzay,* $T : X \to X$ *genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümü ve* X'*, X in tüm limit noktalarının kümesi olmak üzere* $\forall x \in X'$ *için* $T(T_M(x)) = T_M(T(x))$ *özelliği sağlansın. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır.*

İspat $x_0 \in X$ *ve* $x_{k+1} = T(T_M(x_k))$ *şeklinde tanımlanan bir dizi olsun. T genelleştirilmiş ara değer büzülme dönüşümü olduğundan,*

$$\begin{aligned} G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2) = G_n(T(T_M(x_0)), T(T_M(x_1)), \ldots, T(T_M(x_1))) \leq \\ a_1 G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1) + a_2[G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1) + (n-1)G_n(x_1, x_2 \ldots, x_2)] + \\ a_3[G_n(x_0, x_2, \ldots, x_2) + (n-1)G_n(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_2)] \end{aligned}$$

elde edilir. G_n *çok katlı bağımsız olduğundan* $G_n(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_2) = G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2)$ *ve* $G_n(x_0, x_2, \ldots, x_2) \leq G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1) + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2)$ *için eşitsizlik*

$$\begin{aligned} G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2) \leq (a_1 + a_2 + a_3)&G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1) + \\ (a_2(n-1) + a_3 n)&G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2) \end{aligned} \tag{6.1}$$

halini alır. Buradan açıkca

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2) \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{1 - n(a_2 + a_3)} G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1)$$

sonucuna ulaşılır. $0 \leq a_1 + (n+1)(a_2 + a_3) < 1$ *olduğundan* $q := \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{1 - n(a_2 + a_3)} \in [0, 1)$ *olur. O halde tümevarım yöntemi ile her* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *için* $q_i \in [0, 1)$ *olmak üzere*

$$G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \leq q_1 q_2 \ldots q_k G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1)$$

elde edilir. Buna göre Yardımcı teorem 5.3 gereğince (x_k) bir Cauchy dizisidir. (X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ noktası vardır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&G_n(u, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) \leq \\
&\quad G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(x_{k+1}, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) = \\
&\quad G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(T(T_M(x_k)), T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) \leq \\
&\quad G_n(u, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + a_1 G_n(x_n, u, \ldots, u) + \\
&\quad a_2[G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + (n-1)G_n(u, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u)))] + \\
&\quad a_3[G_n(x_k, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) + (n-1)G_n(u, T(T_M(x_k)), T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u)))]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifade $k \to \infty$ için $(x_k) \to u$ olduğu göz önüne alınıp düzenlenirse

$$G_n(u, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) \leq ((n-1)a_2 + na_3) G_n(u, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u)))$$

elde edilir. Buradan $(n-1)a_2 + na_3 \in [0,1)$ olup $G_n(u, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) = 0$ olur. Yani $T(T_M(u)) = u$ dur. Şimdi $u \in X$ noktasının sabit nokta olduğu gösterilsin. Bunun için $T(T_M(x)) = T_M(T(x))$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) &= G_n(T(T_M(u)), T(T(T_M(u))), \ldots, T(T(T_M(u)))) \\
&= G_n(T(T_M(u)), T(T_M(T(u))), \ldots, T(T_M(T(u)))) \\
&\leq a_1 G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) + \\
&\quad a_2[G_n(u, T(T_M(u)), \ldots, T(T_M(u))) + \\
&\quad (n-1)G_n(T(u), T(T_M(T(u))), \ldots, T(T_M(T(u))))] + \\
&\quad a_3[G_n(u, T(T_M(T(u))), \ldots, T(T_M(T(u)))) + \\
&\quad (n-1)G_n(T(u), T(T_M(u)), T(T_M(T(u))), \ldots, T(T_M(T(u))))]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu noktada $T(T_M(u)) = u$ sonucu kullanılır ise yukarıdaki ifade

$$G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) \leq (a_1 + na_3) G_n(u, T(u), \ldots, T(u))$$

olup $G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) = 0$ olur. Yani istenildiği gibi $T(u) = u$ sabit noktası bulunur. Sabit noktanın tek olduğunu göstermek için $u \neq v$ ve u ile v T nin sabit noktaları olsun. Bu *durumda,*

$$\begin{aligned}
G_n(u,v,\ldots,v) &= G_n(T(u),T(v),\ldots,T(v))\\
&= G_n(T(T(T_M(u))),T(T(T_M(v))),\ldots,T(T(T_M(v))))\\
&= G_n(T(T_M(T(u))),T(T_M(T(v))),\ldots,T(T_M(T(v))))\\
&\le a_1 G_n(T(u),T(v),\ldots,T(v))+\\
&\quad a_2[G_n(T(u),T(T_M(T(u))),\ldots,T(T_M(T(u)))+\\
&\quad (n-1)G_n(T(v),T(T_M(T(v))),\ldots,T(T_M(T(v))))]+\\
&\quad a_3[G_n(T(u),T(T_M(T(v))),\ldots,T(T_M(T(v))))+\\
&\quad (n-1)G_n(T(v),T(T_M(T(u))),T(T_M(T(v))),\ldots,T(T_M(T(v))))]\\
&\le (a_1+na_3)G_n(T(u),T(v),\ldots,T(v))\\
&= (a_1+na_3)G_n(u,v,\ldots,v)
\end{aligned}$$

olup $0 < a_1 + na_3 < 1$ *olduğundan* $G_n(u,v,\ldots,v) = 0$ *dır. Dolayısıyla* $u = v$ *olur. Bu ise* $u \neq v$ *kabulü ile çelişir. O halde sabit nokta var ve tektir.*

Tanım 6.5 (X,d) *bir metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun. Her bir* $x \in X$ *ve her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $T^{k+1} = T \circ T^k$ *ve* T^0*, X üzerinde birim dönüşüm olmak üzere* $O(x,N) = \{x, T(x), \ldots, T^N(x)\}$ *ve* $O(x,\infty) = \{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$ *şeklinde tanımlansın. Buna göre bazı* $x \in X$ *için* $O(x,\infty)$ *de içerilen her Cauchy dizisi, X de yakınsak ise* (X,d) *metrik uzayına* ***T yörüngesel tamdır*** *denir. Ayrıca* $A \subset X$ *için* $\delta(A) := \sup\{d(a,b) | a,b \in A\}$ *olarak tanımlansın. Bir* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x,y \in X$ *için*

$$d(T(x),T(y)) \le q \max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), d(x,T(y)), d(y,T(x))\}$$

olacak şekilde $q \in [0,1)$ *var ise T ye bir* ***quasi büzülme dönüşümü*** *denir.*

Yardımcı Teorem 6.1 $T : X \to X$ *bir quasi-büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde her* $x \in X$*, her* $n \in \mathbb{N}$*,* $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ *ve* $q \in [0,1)$ *için*

$$d(T^i(x), T^j(x)) \le q\delta[O(x,n)]$$

sağlanır.

İspat $x \in X$*,* $n \in \mathbb{N}$ *ve* $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ *olmak üzere,*

$$T^{i-1}(x), T^i(x), T^{j-1}(x), T^j(x) \in O(x,n)$$

dır. T quasi-büzülme olduğundan

$$\begin{aligned} d(T^i(x), T^j(x)) &= d(T(T^{i-1}(x)), T(T^{j-1}(x))) \\ &\leq q \max\{d(T^{i-1}(x), T^{j-1}(x)), d(T^{i-1}(x), T^i(x)), \\ &\quad d(T^{j-1}(x)), T^j(x)), d(T^{i-1}(x), T^j(x)), d(T^{j-1}(x), T^i(x))\} \\ &\leq q\delta[O(x,n)] \end{aligned}$$

olup istenilen sağlanır.

Sonuç 6.1 *$T : X \to X$ bir quasi-büzülme dönüşümü ve $x \in X$ olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $d(x, T^k(x)) = \delta[O(x,n)]$ olacak şekilde $k \leq n$ pozitif tam sayısı vardır.*

Aşağıdaki ispatsız verilen teorem alışılmış metrik uzayda iyi bilinen Ćirić sabit nokta teoremi olarak bilinir. İspat için Ćirić,1974 e bakılabilir.

Teorem 6.13 *(X,d) T-yörüngeli tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir quasi-büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1) T dönüşümünün X de bir tek u sabit noktası vardır.

2) $\forall x \in X \lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$ sağlanır.

3) $d(T^n(x), u) \leq \dfrac{q^n}{1-q} d(x, T(x))$

Sıradaki teorem G-metrik uzayda Ćirić sabit nokta teoremidir. G-metrik uzay G_n-metrik uzayın özel hali olduğundan ispatsız verilmiştir.

Teorem 6.14 *(X,G) bir T-yörüngeli tam G-metrik uzay $T : X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\phi \in \mathcal{F}_{Cir}$ için*

$$G(T(x), T(y), T(y)) \leq \phi(G(x,y,y))$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 6.6 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Buna göre her $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$ ve $T^{k+1} = T \circ T^k(x)$ ve de T^0, X üzerinde birim dönüşüm olmak üzere*

$$O(x,N) = \{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^N(x)\}$$

ve

$$O(x,\infty)=\{x,T(x),T^2(x),\ldots\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca her $A\subseteq X$ *için*

$$\delta[A]=\sup\{G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_i\in A\}$$

olarak tanımlansın.

Tanım 6.7 (X,G_n) *bir* G_n*-metrik uzay olsun.* $x\in X$ *için* $O(x,\infty)$ *da içerilen her* G_n*-Cauchy dizisi X de* G_n*-yakınsak ise X,* G_n*-metrik uzayına T yörüngesel tam* G_n*-metrik uzay adı verilir.*

Tanım 6.8 (X,G_n) *bir* G_n*-metrik uzay olsun. Bir* $T:X\to X$ *dönüşümü* $\lambda\in[0,1)$ *olmak üzere* $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ *için,*

$$\begin{aligned}G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n))\leq \frac{\lambda}{n}\max\{&G_n(x_1,\ldots,x_n)\\ &\cup\{G_n(x_i,T(x_j),\ldots,T(x_j)):i,j=1,2,\ldots,n\}\}\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyorsa T ye bir G_n*-quasi büzülme denir.*

Yardımcı Teorem 6.2 $T:X\to X$ *dönüşümü, bir* (X,G_n) G_n*-metrik uzayda bir* G_n*-quasi büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda her* $x\in X$*,* $\lambda\in[0,1)$ *ve* $k_1,\ldots,k_n\in\{1,\ldots,N\}$ *için,*

(1) $G_n(T^{k_1}(x),\ldots,T^{k_n}(x))\leq\dfrac{\lambda}{n}\delta[O(x,N)]$

(2) $\delta[O(x,\infty)]\leq\dfrac{n}{1-\lambda}G_n(x,T(x),\ldots,T(x))$

özellikleri sağlanır.

İspat *(1)* $x\in X$ *olsun.* $\{T^{k_i}(x),T^{k_i+1}(x),\ldots,T^{k_n}(x)\}$ *kümesi* $O(x,N)$ *nin bir alt kümesi olduğundan ve T dönüşümü bir* G_n*-quasi dönüşüm olduğundan dolayı,*

$$\begin{aligned}G_n(T^{k_1}(x),\ldots,T^{k_n}(x))&=G_n(T(T^{k_i-1}(x)),\ldots,T(T^{k_n-1}(x)))\\&\leq\frac{\lambda}{n}\max\{\{G_n(T^{k_i-1}(x),\ldots,T^{k_n-1}(x))\}\bigcup\{G_n(T^{k_i-1}(x),T^{k_j}(x),\ldots,T^{k_j}(x)\}\}\\&\leq\frac{\lambda}{n}\delta(O(x,N))\end{aligned}$$

olacak şekilde $\lambda\in[0,1)$ *vardır.*

(2) $x \in X$ *olsun.* $(\delta(O(x,N)))_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi monoton artan olduğundan* $\delta(O(x,\infty)) = \sup\{\delta(O(x,N)) | N \in \mathbb{N}\}$ *olur. Sabit* N_0 *pozitif tam sayısı için* (1) *ifadesi* $G_n(x, T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_{n-1}}(x)) = \delta(O(x, N_0))$ *olacak şekilde* $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in \{1, 2, \ldots, N_0\}$ *var olmasını gerektirir. Genelliği bozmaksızın* $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_{n-1}$ *olduğu varsayılabilir. Eğer* $k_{n-1} = 0$ *(yani her i için* $k_i = 0$*) ise* $\delta(O(x,N)) = G_n(x, x, \ldots, x) = 0$ *dır. Varsayalım ki* $k_j \neq 0$ *ve* $k_{j-1} = 0$ *olacak şekilde* $1 \leq j \leq n$ *olsun. Bu durumda Teorem 5.2 (4) ve (1) ifadesinden dolayı*

$$\begin{aligned}
G_n(x,&T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_{n-1}}(x)) \leq G_n(x, T(x), \ldots, T(x)) + \sum_{i=1}^{n-1} G_n(T^{k_i}(x), T(x), \ldots, T(x)) \\
&= jG_n(x, T(x), \ldots, T(x)) + \sum_{i=j}^{n-1} G_n(T^{k_i}(x), T(x), \ldots, T(x)) \\
&\leq jG_n(x, T(x), \ldots, T(x)) + (n-j)\frac{\lambda}{n}\delta(O(x, N_0)) \\
&= jG_n(x, T(x), \ldots, T(x)) + (n-j)\frac{\lambda}{n}G_n(x, T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_{n-1}})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunu neticesinde,

$$\begin{aligned}
\delta(O(x, N_0)) &= G_n(x, T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_{n-1}}) \\
&\leq \frac{j}{1 - \frac{n-j}{n}\lambda} G_n(x, T(x), \ldots, T(x)) \\
&\leq \frac{n}{1-\lambda} G_n(x, T(x), \ldots, T(x))
\end{aligned}$$

bulunur. N_0 *keyfi olduğundan dolayı açıkça*

$$\delta(O(x,\infty)) \leq \frac{n}{1-\lambda} G_n(x, T(x), \ldots, T(x))$$

dir.

Teorem 6.15 (X, G_n) *bir T-yörüngesel tam* G_n*-metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir* G_n*-quasi büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde* $\lambda \in [0, 1)$ *ve* $x, y \in X$ *için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) T nin X de bir tek y sabit noktası vardır.

(2) $N \to \infty$ *için* $(T^N(x)) \xrightarrow{G_n} y$ *dir.*

(3) $G_n(T^N(x), y, \ldots, y) \leq \frac{\lambda^N}{n^{N-1}(1-\lambda)} G_n(x, T(x), \ldots, T(x))$ *dir.*

İspat *(2) $x \in X$ alınsın. T, G_n-quasi büzülme dönüşümü ve Yardımcı teorem 6.2 (1) şıkkı gereğince, $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ olacak şekildeki $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ sayıları için,*

$$\begin{aligned} G_n(T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_n}(x)) &= G_n(T(T^{k_1-1}(x)), \ldots, T(T^{k_n-1}(x))) \\ &\leq \frac{\lambda}{n}\delta[O(T^{k_1-1}(x), k_n - k_0 + 1)] \end{aligned}$$

dir. Tekrar Yardımcı teorem 6.2 (1) gereğince

$$\delta[O(T^{k_1-1}(x), k_n - k_0 - 1)] = G_n(T^{k_1-1}(x), T^{l_1}(T^{k_1-1}(x)), \ldots, T^{l_n}(T^{k_1-1}(x)))$$

olacak şekilde $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n$ biçiminde $l_1, \ldots, l_n \in \{0, 1, \ldots, k_n - k_1 + 1\}$ sayıları vardır. Buradan

$$\begin{aligned} G_n(T^{k_1-1}(x),&T^{l_1}(T^{k_1-1}(x)), \ldots, T^{l_n}(T^{k_1-1}(x))) = \\ &G_n(T(T^{k_1-2}(x)), T^{l_1+1}(T^{k_1-2}(x)), \ldots, T^{l_n+1}(T^{k_1-2}(x))) \\ &\leq \frac{\lambda}{n}\delta[O(T^{k_1-2}(x), l_n + 1)] \\ &\leq \frac{\lambda}{n}\delta[O(T^{k_1-2}(x), k_n - k_1 + 2)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre tümevarım ile,

$$G_n(T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_n}(x)) \leq \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_1} \delta[O(x, k_n)]$$

elde edilir. Yardımcı teorem 6.2 (2) şıkkı gereğince

$$G_n(T^{k_1}(x), \ldots, T^{k_n}(x)) \leq \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_1} \frac{n}{1-\lambda} G_n(x, T(x), \ldots, T(x))$$

bulunur. Buradan $k_1 \to \infty$ için limit alınırsa $\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_1} \to 0$ olur. Bu ise $(T^N(x))$ itere fonksiyon dizisinin bir G_n-Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X, T-yörüngeli tam G_n-metrik uzay olduğundan $T^N \to y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır.

(1) İddia, $y \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Teorem 5.2 (2) şıkkı gereğince

$$\begin{aligned} G_n(y, T(y), \ldots, &T(y)) \leq G_n(y, T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y)) + G_n(T^{N+1}(y), T(y), \ldots T(y)) \\ &\leq G_n(y, T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y)) + \frac{\lambda}{n}\max\{G_n(T^N(y), y, \ldots, y), \\ &G_n(T^N(y), T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y)), G_n(y, T(y), \ldots, T(y)) \\ &G_n(T^N(y), T(y), \ldots, T(y)), G_n(y, T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y))\} \\ &\leq G_n(y, T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y)) + \frac{\lambda}{n}(G_n(T^N(y), y, \ldots, y) \\ &+ G_n(T^N(y), T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y)) + G_n(y, T(y), \ldots, T(y)) \\ &+ G_n(y, T^{N+1}(y), \ldots, T^{N+1}(y))) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $N \in \mathbb{N}$ için

$$G_n(y,T(y),\ldots,T(y)) \leq \frac{\lambda}{n-\lambda}[G_n(T^N(y),y,\ldots,y)+$$
$$G(T^N(y),T^{N+1}(y),\ldots,T^{N+1}(y)) + \left(\frac{n}{\lambda}+1\right) G_n(y,T^{N+1}(y),\ldots,T^{N+1}(y))]$$

elde edilir. $N \to \infty$ için limit alınırsa $(T^N(x)) \to y$ olduğundan $G_n(y,T(y),\ldots,T(y)) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $T(y) = y$ sabit noktası bulunur. İddia $T(y) = y$ sabit noktası tektir. $y, \bar{y}$ farklı sabit noktalar olsunlar. Buna göre T nin G_n-quasi büzülme dönüşümü olması göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
G_n(\bar{y},y,\ldots,y) &= G_n(T(\bar{y}),T(y),\ldots,T(y)) \\
&= \frac{\lambda}{n}\max\{G_n(\bar{y},y,\ldots,y), G_n(\bar{y},T(\bar{y}),\ldots,T(\bar{y})) \\
&\quad G_n(y,T(y),\ldots,T(y)), G_n(\bar{y},T(y),\ldots,T(y)), G_n(y,T(\bar{y}),\ldots,T(\bar{y}))\} \\
&\leq \frac{\lambda}{n}\max\{G_n(\bar{y},y,\ldots,y), G_n(y,\bar{y},\ldots,\bar{y})\} \\
&\leq \frac{\lambda}{n}\max\{G_n(\bar{y},y,\ldots,y), nG_n(\bar{y},y\ldots,y)\} \\
&= \lambda G_n(\bar{y},y,\ldots,y)
\end{aligned}$$

bulunur. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $G_n(\bar{y},y,\ldots,y) = 0$ olmalıdır.Dolayısıyla $\bar{y} = y$ bulunur. O halde sabit nokta tektir

(3)

$$G_n(T^{k_1}(x),\ldots,T^{k_n}(x)) \leq \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_1} \frac{n}{1-\lambda} G_n(x,T(x),\ldots,T(x))$$

ifadesinde $k_2 \to \infty$ için limit alındığında

$$G_n(T^{k_1}(x),y\ldots,y) \leq \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k_1} \frac{n}{1-\lambda} G_n(x,T(x),\ldots,T(x))$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.3 *(X,G_n) bir G_n metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm, her $x_1,\ldots,x_n \in X$, $\lambda \in [0,1)$, $\beta,\gamma,h \in [0,\frac{1}{n})$ ve*

$$A := G_n(x_1,T(x_1),\ldots,T(x_1)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_n),\ldots,T(x_n))$$

$$B := G_n(x_1,T(x_2),\ldots,T(x_n)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_1),\ldots,T(x_{n-1}))$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) (i) $G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq \lambda G_n(x_1,\ldots,x_n)$ dir.

(ii)

$$G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq$$
$$\beta[G_n(x_1,T(x_1),\ldots,T(x_1)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_n),\ldots,T(x_n))]$$

dir.

(iii)

$$G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq$$
$$\gamma[G_n(x_1,T(x_2),\ldots,T(x_n))) + \ldots + [G_n(x_n,T(x_1),\ldots,T(x_{n-1}))]$$

dir.

(2) a,b,c negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere

$$\sup\{a(x_1,\ldots,x_n) + nb(x_1,\ldots,x_n) + nc(x_1,\ldots,x_n)\} \leq \lambda < 1$$

koşulu her $x_1,\ldots,x_n \in X$ *için sağlansın. Buradan,*

$$G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq a(x_1,\ldots,x_n)G_n(x_1,\ldots,x_n)+$$
$$b(x_1,\ldots,x_n)[G_n(x_1,T(x_1),\ldots,T(x_1)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_n),\ldots,T(x_n)]+$$
$$c(x_1,\ldots,x_n)[G_n(x_1,T(x_2),\ldots,T(x_n)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_1),\ldots,T(x_{n-1}))]$$

olur.

(3) $G_n(T(x_0),\ldots,T(x_n)) \leq h\max\left\{G_n(x_1,\ldots,x_n), \frac{A}{n}, \frac{B}{n}\right\}$ *dir.*

İspat

$(1) \Rightarrow (2)$ *Her* $x_1,\ldots,x_n \in X$ *için T dönüşümü,*

(1) (i) koşulunu sağlıyor ise $a(x_1,\ldots,x_n) = \lambda$, $b(x_1,\ldots,x_n) = c(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *alınırsa* 2) *koşulu sağlanır. T dönüşümü*

(1) (ii) koşulunu sağlıyor ise $b(x_1,\ldots,x_n) = \beta$, $a(x_1,\ldots,x_n) = c(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *alınırsa* 2) *koşulu sağlanır. T dönüşümü*

(1) (iii) koşulunu sağlıyor ise $c(x_1,\ldots,x_n) = \gamma$, $a(x_1,\ldots,x_n) = b(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *alınırsa* 2) *koşulu sağlanır.*

$(2) \Rightarrow (3)$

$$A := G_n(x_1,T(x_1),\ldots,T(x_1)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_n),\ldots,T(x_n))$$

$$B := G_n(x_1,T(x_2),\ldots,T(x_n)) + \ldots + G_n(x_n,T(x_1),\ldots,T(x_{n-1}))$$

ve $M(x_1,\dots,x_n) := \max\left\{G_n(x_1,\dots,x_n), \frac{A}{n}, \frac{B}{n}\right\}$ *olsun.* T *dönüşümü* 2) *koşulunu sağladığından,*

$$\begin{aligned}
G_n(T(x_1),\dots,T(x_n)) \leq\ & a(x_1,\dots,x_n)G_n(x_1,\dots,x_n) \\
& + b(x_1,\dots,x_n)A + c(x_1,\dots,x_n)B \\
=& a(x_1,\dots,x_n)G_n(x_1,\dots,x_n) \\
& + nb(x_1,\dots,x_n)\frac{A}{n} + nc(x_1,\dots,x_n)\frac{B}{n} \\
\leq& a(x_1,\dots,x_n)M(x_1,\dots,x_n) \\
& + nb(x_1,\dots,x_n)M(x_1,\dots,x_n) + nc(x_1,\dots,x_n)M(x_1,\dots,x_n) \\
=& (a(x_1,\dots,x_n) + nb(x_1,\dots,x_n) + nc(x_1,\dots,x_n))M(x_1,\dots,x_n) \\
\leq& \lambda M(x_1,\dots,x_n) \\
=& \lambda \max\left\{G_n(x_1,\dots,x_n), \frac{A}{n}, \frac{B}{n}\right\}
\end{aligned}$$

olup T *dönüşümünün* 3) *koşulunu sağladığı görülür.*

$(3) \Rightarrow (1)$ *Her* $x_1,\dots,x_n \in X$ *için,*
$M(x_1,\dots,x_n) = G_n(x_1,\dots,x_n)$ *ve* $\lambda = h$ *için* T *dönüşümü* 1) (i) *koşulunu sağlar.*
$M(x_1,\dots,x_n) = \frac{A}{n}$ *ve* $\beta = \frac{h}{n}$ *için* T *dönüşümü* 1) (ii) *koşulunu sağlar.*
$M(x_1,\dots,x_n) = \frac{B}{n}$ *ve* $\gamma = \frac{h}{n}$ *için* T *dönüşümü* 1) (iii) *koşulunu sağlar.*

Yardımcı Teorem 6.4 (X, G_n) *bir* G_n *metrik uzay,* $T : X \to X$ *bir dönüşüm,*

$$A := G_n(x_1, T(x_1),\dots,T(x_1)) + \dots + G_n(x_n, T(x_n),\dots,T(x_n))$$

ve

$$B := G_n(x_1, T(x_2),\dots,T(x_n)) + \dots + G_n(x_n, T(x_1),\dots,T(x_{n-1}))$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $\sup\{q(x_1,\dots,x_n) + r(x_1,\dots,x_n) + t(x_1,\dots,x_n)\} \leq \lambda < 1$ *ve her* $x_1,\dots,x_n \in X$ *için,*

$$\begin{aligned}
G_n(T(x_0),\dots,T(x_n)) \leq\ & q(x_1,\dots,x_n)G_n(x_1,\dots,x_n) + \\
& r(x_1,\dots,x_n)A + t(x_1,\dots,x_n)B
\end{aligned}$$

(2) $h \in [0,1)$ *ve her* $x_1,\dots,x_n \in X$ *için*

$$G_n(T(x_0),\dots,T(x_n)) \leq h \max\left\{G_n(x_1,\dots,x_n), A, \frac{B}{n}\right\}$$

(3) $\alpha \in [0,1)$, $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{n})$ *ve her* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *için*

(i) $G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \alpha G_n(x_1, \ldots, x_n)$

(ii) $G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \beta A$

(iii) $G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \frac{\gamma}{n} B$

İspat

$(2) \Rightarrow (3)$ *Her* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *ve* $M(x_1, \ldots, x_n) := \max\left\{G_n(x_1, \ldots, x_n), A, \frac{B}{n}\right\}$ *için* $M(x_1, \ldots, x_n) = G_n(x_1, \ldots, x_n)$ *ve* $\alpha = h$ *için* T *dönüşümü* $3)\ i)$ *koşulunu sağlar ve* $M(x_1, \ldots, x_n) = A$ *ve* $\beta = \frac{h}{n}$ *için* T *dönüşümü* $3)\ ii)$ *koşulunu sağlar.* $M(x_1, \ldots, x_n) = \frac{B}{n}$ *ve* $\gamma = h$ *için* T *dönüşümü* $3)\ iii)$ *koşulunu sağlar.*

$(1) \Rightarrow (3)$ *Her* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *için,*
$q(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$, $r(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *için* $3)\ i)$ *koşulu sağlanır.*
$r(x_1, \ldots, x_n) = \beta$, $q(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *için* $3)\ ii)$ *koşulu sağlanır.*
$t(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\gamma}{n}$, $q(x_1, \ldots, x_n) = r(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *için* $3)\ iii)$ *koşulu sağlanır.*

$(1) \Rightarrow (2)$ $M(x_1, \ldots, x_n) := \max\left\{G_n(x_1, \ldots, x_n), A, \frac{B}{n}\right\}$ *için,* T *dönüşümü* $1)$ *koşulunu sağladığından,*

$$\begin{aligned}
G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq\ & q(x_1, \ldots, x_n) G_n(x_1, \ldots, x_n) \\
& + r(x_1, \ldots, x_n) A + t(x_1, \ldots, x_n) \frac{B}{n} \\
\leq\ & q(x_1, \ldots, x_n) M(x_1, \ldots, x_n) \\
& + r(x_1, \ldots, x_n) M(x_1, \ldots, x_n) + t(x_1, \ldots, x_n) M(x_1, \ldots, x_n) \\
=\ & (q(x_1, \ldots, x_n) + r(x_1, \ldots, x_n) + t(x_1, \ldots, x_n)) M(x_1, \ldots, x_n) \\
\leq\ & \lambda M(x_1, \ldots, x_n) \\
=\ & \lambda \max\left\{G_n(x_1, \ldots, x_n), A, \frac{B}{n}\right\}
\end{aligned}$$

olup T *dönüşümünün* $2)$ *koşulunu sağladığı görülür.*

Sıradaki teorem Zamfirescu sabit nokta teoremidir ve sırasıyla alışılmış metrik uzay, G-metrik uzay ve G_n-metrik uzayda ispatları ile verilmiştir.

Teorem 6.16 (X, d) *bir tam metrik uzay olmak üzere* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\forall x, y \in X$, $a \in [0,1)$ *ve* $b, c \in [0, \frac{1}{2})$ *için,* *(z1)* $d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y)$

(z2) $d(T(x), T(y)) \leq b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$

(z3) $d(T(x), T(y)) \leq c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$

koşullarından en az birini sağlıyor ise T *nin bir tek* $x \in X$ *sabit noktası var olup* $x_{n+1} = T(x_n)$ *ile tanımlı Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar.*

İspat $x, y \in X$ *noktalarını sabitleyelim. Buradan*

- *Eğer (z2) koşulu sağlanıyor ise üçgen eşitsizliği aksiyomunu kullanarak,*

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \\ \Rightarrow d(T(x), T(y)) &\leq b[d(x, T(x)) + d(y, x) + d(x, T(x)) + d(T(x), T(y))] \\ \Rightarrow (1-b)d(T(x), T(y)) &\leq 2bd(x, T(x)) + bd(x, y) \\ \Rightarrow d(T(x), T(y)) &\leq \frac{2b}{1-b}d(x, T(x)) + \frac{b}{1-b}d(x, y) \end{aligned}$$

  olur.

- *Eğer (z3) koşulu sağlanıyor ise üçgen eşitsizliği aksiyomunu kullanarak,*

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \\ \Rightarrow d(T(x), T(y)) &\leq c[d(x, T(y)) + d(y, x) + d(x, T(y)) + d(T(y), T(x))] \\ \Rightarrow (1-c)d(T(x), T(y)) &\leq 2cd(x, T(y)) + cd(x, y) \\ \Rightarrow d(T(x), T(y)) &\leq \frac{2c}{1-c}d(x, T(y)) + \frac{c}{1-c}d(x, y) \end{aligned}$$

  olur.

Buradan

$$\delta := \max\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\}$$

olmak üzere $a \in [0, 1)$ *ve* $b, c \in [0, \frac{1}{2})$ *olduğundan* $\delta \in [0, 1)$ *elde edilir. Bu taktirde,*

(z2) $d(T(x), T(y)) \leq 2\delta d(x, T(x)) + \delta d(x, y)$

(z3) $d(T(x), T(y)) \leq 2\delta d(x, T(y)) + \delta d(x, y)$

formuna dönüşür. Bu durumda T *nin sabit noktası olduğu gösterilsin.* $x_0 \in X$ *ve* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $x_{n+1} = T(x_n)$ *Picard iterasyonu olacak şekilde alınsın. Eğer* $x = x_n$ *ve* $y = x_{n-1}$

olarak alınırsa $(z3)$ *ü kullanarak*

$$\begin{aligned} d(T(x_n), T(x_{n-1})) &\leq 2\delta d(x_n, T(x_{n-1})) + \delta d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \delta d(x_n, x_{n-1}) \end{aligned}$$

olur. Bu ise dizinin terimlerinin indis büyüdükçe birbirine yakınlaştığını yani dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X *tam metrik uzay olduğundan* $x_n \to x^*$ *olacak şekilde bir* $x^* \in X$ *vardır. Buradan*

$$\begin{aligned} d(x^*, T(x^*)) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(x^*)) \\ &= d(x^*, x_{n+1})) + d(T(x_n) + T(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + 2\delta d(x_n, T(x^*)) + \delta d(x^*, x_n) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ *için limit alındığında* $d(x^*, T(x^*)) \leq 2\delta d(x^*, T(x^*))$ *olup* $d(x^*, T(x^*)) = 0$ *elde edilir. O halde* $T(x^*) = x^*$ *sabit noktası bulunur. Tekliği için* $x \neq y$ *olacak şekilde x ve y sabit noktaları için*

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \delta d(x, y)$$

olup $\delta \in [0, 1)$ *olduğundan* $d(x, y) = 0$ *olmalıdır. Buna göre* $x = y$ *olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde* $x = y$ *olup bir tek sabit noktanın olduğu görülür.*

Teorem 6.17 (X, G) *bir tam G-metrik uzay olmak üzere* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\forall x, y, z \in X$*,* $\alpha \in [0, 1)$*,* $\beta \in [0, \frac{1}{3})$ *ve* $\gamma \in [0, \frac{1}{6})$ *için,*

(z1) $G(T(x), T(y), T(z)) \leq \alpha G(x, y, z)$

(z2) $G(T(x), T(y), T(z)) \leq \beta[G(x, T(x), T(x)) + G(y, T(y), T(y)) + G(z, T(z), T(z))]$

(z3) $G(T(x), T(y), T(z)) \leq \gamma[G(x, T(y), T(z)) + G(y, T(x), T(z)) + G(z, T(x), T(y))]$

koşullarından en az birini sağlıyor ise T *nin bir tek* $x \in X$ *sabit noktası var olup* $x_{n+1} = T(x_n)$ *ile tanımlı Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar.*

İspat $x_0 \in X$ *keyfi bir nokta,* $x_{k+1} = T(x_k) = T^k(x_0)$ *olacak şekilde tanımlı* (x_k) *dizisi ele alınsın.* $\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-2\beta}, \frac{\gamma}{1-5\gamma}\right\}$ *olsun. Açıkça dikkat edilirse* $\delta < 1$ *dir. Bu durumda* $x = x_{k+1}$*,* $y = z = x_{k+2}$ *alınsın. Bu noktalar için üç durum söz konusudur.*

(1.durum) x, y, z *noktaları (z1) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) \leq \alpha G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) \leq \delta G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1})$$

olur.

(2.durum) *x, y, z noktaları (z2) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) &\leq \beta[G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) + G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) + G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2})] \\ &= \beta G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) + 2\beta G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) &\leq \frac{\beta}{1-2\beta} G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) \\ &\leq \delta G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.durum) *x, y, z noktaları (z3) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) &\leq \gamma[G(x_k, x_{k+2}, x_{k+2}) + G(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2}) + G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+1})] \\ &\leq \gamma[G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) + G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) + G(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2})] \\ &\leq \gamma[G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) + 5G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2})] \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) &\leq \frac{\gamma}{1-5\gamma} G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) \\ &\leq \delta G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

O halde açıkça her üç durum içinde

$$G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) \leq \delta G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1})$$

sonucu elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$G(x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+2}) \leq \delta^k G(x_0, x_1, x_1)$$

sağlanır. Bu eşitsizlik her k için doğru olduğundan dolayı Yardımcı teorem 5.3 gereğince (x_k) bir G-Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (X, G) bir tam metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Şimdi varsayalım ki $T(u) \neq u$ olsun. Buna göre $x = x_{k+1}$, $y = z = T(u)$ noktaları için 3 durum söz konusudur.

(1.durum) *Bu noktalar (z1) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G(x_{k+1}, T(u), T(u)) \leq \alpha G(x_k, u, u)$$

olup $k \to \infty$ için limit alınır ve G-metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı $G(u, T(u), T(u)) \leq \alpha G(u, u, u)$ bulunur. Buna göre

$$G(u, T(u), T(u)) = 0 \Rightarrow T(u) = u$$

olur.

(2.durum) *Bu noktalar (z2) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G(x_{k+1}, T(u), T(u)) \leq \beta[G(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) + G(u, T(u), T(u)) + G(u, T(u), T(u))]$$

olup $k \to \infty$ için limit alınır ve G-metrik uzayın tüm değişkenleri üzerinde sürekli olduğu göz önünde bulunursa

$$G(u, T(u), T(u)) \leq \beta G(u, u, u) + 2G(u, T(u), T(u)) = 2\beta G(u, T(u), T(u))$$

bulunur. $\beta \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olduğundan $2\beta \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$ dır. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde $T(u) = u$ olmalıdır.

(3.durum) *Bu noktalar (z3) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G(x_{k+1}, T(u), T(u)) \leq \gamma[G(x_k, T(u), T(u)) + G(x_{k+1}, u, T(u)) + G(x_{k+1}, T(u), u)]$$

olup $k \to \infty$ için limit alınır ve G-metrik uzayın tüm değişkenleri üzerinde sürekli olduğu göz önünde bulunursa

$$\begin{aligned} G(u, T(u), T(u)) &\leq \gamma[G(u, T(u), T(u)) + G(u, u, T(u)) + G(u, T(u), u)] \\ &\leq 5\gamma G(u, T(u), T(u)) \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma \in \left[0, \frac{1}{6}\right)$ olduğundan $5\gamma \in \left[0, \frac{5}{6}\right)$ dır. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde $T(u) = u$ olmalıdır.

Üç duruma göre u nun T nin sabit noktası olduğu görülmüş olur. Şimdi sabit noktanın tekliğini ispat etmek için $u \neq v$ olmak üzere u ile v nin T nin sabit noktaları oldukları kabul edilsin. O halde $x = T(u)$, $y = z = T(v)$ noktaları için öncekilerde olduğu gibi üç durum incelensin.

(1.durum) *Noktalar (z1) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G(u, v, v) = G(T(u), T(v), T(v)) &\leq \alpha G(u, v, v) \\ \Rightarrow G(u, v, v) &\leq \alpha G(u, v, v) \end{aligned}$$

olur. $\alpha \in [0, 1)$ olduğundan $G(u, v, v) = 0$ olmalıdır. O halde $u = v$ sonucuna ulaşılır.

(2.durum) *Noktalar (z2) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G(T(u), T(v), T(v)) &\leq \beta[G(u, T(u), T(u)) + G(v, T(v), T(v)) + G(v, T(v), T(v))] \\ \Rightarrow G(u, v, v) &\leq \beta[G(u, u, u) + G(v, v, v) + G(v, T(v), T(v))] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan açıkça $G(u, v, v) = 0 \Rightarrow u = v$ dir.

(3.durum) *Noktalar (z3) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G(T(u),T(v),T(v)) &\leq \gamma[G(u,T(v),T(v))+G(T(u),v,T(v))+G(T(u),T(v),v)] \\ \Rightarrow G(u,v,v) &\leq 3\gamma G(u,v,v) \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma \in \left[0,\dfrac{1}{6}\right)$ *olduğundan* $3\gamma \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ *dir. Dolayısıyla* $G(u,v,v) = 0$ *olmalıdır. O halde* $u = v$ *sonucuna ulaşılır.*

Her üç durumda incelendiğinde sabit noktanın tek olduğu görülmüş olur.

Teorem 6.18 *(X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $\forall x_1,\ldots,x_n \in X$, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in \left[0,\dfrac{1}{n}\right)$ ve $\gamma \in \left[0,\dfrac{1}{2n}\right)$ için,*

(z_1) $G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq \lambda G_n(x_1,\ldots,x_n)$

(z_2)

$$G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq \\ \beta[G_n(x_1,T(x_1),\ldots,T(x_1))+\ldots+G_n(x_n,T(x_n),\ldots,T(x_n))]$$

(z_3)

$$G_n(T(x_1),\ldots,T(x_n)) \leq \gamma[G_n(x_1,T(x_2),\ldots,T(x_n)) \\ +G_n(x_2,T(x_1),T(x_3),\ldots,T(x_n))+\ldots+G_n(x_n,T(x_1),T(x_2),\ldots,T(x_{n-1}))]$$

koşullarında en az biri sağlanıyor ise T nin bir tek sabit noktası vardır ve $x_{n+1} = T(x_n)$ Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar.

İspat *$x_0 \in X$ keyfi bir nokta, (x_k), $x_{k+1} = T(x_k) = T^k(x_0)$ şeklinde tanımlı bir dizi olsun.* $\delta = \max\left\{\alpha, \dfrac{\beta}{1-(n-1)\beta}, \dfrac{\gamma}{1-(2n-1)\gamma}\right\}$ *olsun. Açıkça dikkat edilirse $\delta < 1$ dir. Bu durumda $x_1 = x_{k+1}$, $x_2 = \ldots = x_n = x_{k+2}$ alınsın. Bu noktalar için üç durum söz konusudur.*

(1.durum) *Noktalar (z1) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G_n(x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_{k+2}) \leq \alpha G_n(x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+1}) \leq \delta G_n(x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+1})$$

olur.

(2.durum) *Noktalar (z2) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \leq \beta[&G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \\ &+ G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) + \ldots + G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})] \\ &= \beta G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + (n-1)\beta G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) &\leq \frac{\beta}{1-(n-1)\beta} G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \\ &\leq \delta G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \end{aligned}$$

bulunur.

(3.durum) *Noktalar (z3) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \leq &\gamma[G_n(x_k, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \\ &+ (n-1)G_n(x_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})] \\ \leq &\gamma[G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \\ &+ 2(n-1)G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})] \\ = &\gamma G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) + (2n-1)\gamma G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \end{aligned}$$

olup buradan düzenleme ile

$$\begin{aligned} G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) &\leq \frac{\gamma}{1-(2n-1)\gamma} G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \\ &\leq \delta G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

O halde açıkça her üç durum içinde

$$G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \leq \delta G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1})$$

sonucu elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) \leq \delta^k G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1)$$

sağlanır. Bu eşitsizlik her k için doğru olduğundan ve Yardımcı teorem 5.3 gereğince (x_k) *bir* G_n*-Cauchy dizisidir. Dolayısıyla* (X, G_n) *bir tam* G_n*-metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır.Şimdi* $T(u) \neq u$ *olduğunu varsayalım. Buna göre* $x_1 = x_{k+1}$, $x_2 = \ldots = x_n = T(u)$ *noktaları için 3 durum söz konusudur.*

(1.durum) *Noktalar (z1) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G_n(x_{k+1}, T(u), \ldots, T(u)) \leq \alpha G_n(x_k, u, \ldots, u)$$

olup $k \to \infty$ için limit alanır ve G_n-metrik uzayın tüm değişkenleri üzerinde sürekli olduğu göz önünde bulunur ise

$$G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) \leq \alpha G_n(u,u,\ldots,u))$$

bulunur. O hlade açıkça $G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) = 0$ olup $T(u) = u$ olduğu görülür.

(2.durum) *Noktalar (z2) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G_n(x_{k+1},T(u),\ldots,T(u)) \leq \beta[G_n(x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+1})+(n-1)G_n(u,T(u),\ldots,T(u))]$$

olup $k \to \infty$ için limit alınır ve G_n-metrik uzayın tüm değişkenleri üzerinde sürekli olduğu göz önünde bulunur ise

$$\begin{aligned} G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) &\leq \beta[G_n(u,u,\ldots,u) + (n-1)G_n(u,T(u),\ldots,T(u))] \\ &= (n-1)\beta G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) \end{aligned}$$

elde edilir. $\beta \in \left[0,\dfrac{1}{n}\right)$ olduğundan $(n-1)\beta \in [0,1)$ dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde $T(u) = u$ olmalıdır.

(3.durum) *Noktalar (z3) koşulunu sağlıyor ise,*

$$G_n(x_{k+1},T(u),\ldots,T(u)) \leq \gamma[G_n(x_k,T(u),\ldots,T(u))+(n-1)G_n(u,x_{k+1},T(u),\ldots,T(u))]$$

olup $k \to \infty$ için limit alnır ve G_n-metrik uzayın tüm değişkenleri türünden sürekli olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) &\leq \gamma[G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) + (n-1)G_n(u,u,T(u),\ldots,T(u))] \\ &\leq (2n-1)\gamma G_n(u,T(u),\ldots,T(u)) \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma \in \left[0,\dfrac{1}{2n}\right)$ olduğundan $(2n-1)\gamma \in [0,1)$ dir. O halde bu bir çelişkidir. Yani $T(u) = u$ olmalıdır.

Bu taktirde her üç durum için u noktasının T nin sabit noktası olduğu görülmüş olur. Şimdi sabit noktanın tekliğini ispat etmek için $u \neq v$ olmak üzere u ile v nin T nin sabit noktaları oldukları varsayılsın. O halde $x_1 = T(u)$, $x_2 = \ldots = x_n = T(v)$ noktaları için öncekilerde olduğu gibi üç durum söz konusudur.

(1.durum) *Noktalar (z1) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G_n(u,v,\ldots,v) = G_n(T(u),T(v),\ldots,T(v)) &\leq \alpha G_n(u,v,\ldots,v) \\ \Rightarrow G_n(u,v,\ldots,v) &\leq \alpha G_n(u,v,\ldots,v) \end{aligned}$$

olur. $\alpha \in [0,1)$ olduğundan $G_n(u,v,\ldots,v) = 0$ olmalıdır. Buna göre $u = v$ sonuçuna ulaşılır.

(2.durum) *Noktalar (z2) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G_n(T(u), T(v), \ldots, T(v)) &\leq \beta[G_n(u, T(u), \ldots, T(u)) + (n-1)G_n(v, T(v), \ldots, T(v))] \\ \Rightarrow G_n(u, v, \ldots, v) &\leq \beta[G_n(u, u \ldots, u) + (n-1)G_n(v, v, \ldots, v)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda açıkça $G_n(u, v, \ldots, v) = 0$ *ve* $u = v$ *sonucuna varılır.*

(3.durum) *Noktalar (z3) koşulunu sağlıyor ise,*

$$\begin{aligned} G_n(T(u), &T(v), \ldots, T(v)) \leq \gamma[G_n(u, T(v), \ldots, T(v)) \\ &+ G_n(T(u), v, T(v), \ldots, T(v)) + \ldots + G_n(T(u), T(v), \ldots, T(v), v)] \\ &\leq \gamma[G_n(u, v, \ldots, v) + \ldots + G_n(u, v, \ldots, v)] \\ &= n\gamma G_n(u, v, \ldots, v) \end{aligned}$$

dolayısıyla $G_n(u, v, \ldots, v) \leq n\gamma G_n(u, v, \ldots, v)$ *olur.* $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2n}\right)$ *olduğundan* $n\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *dir. Buradan* $G_n(u, v, \ldots, v) = 0$ *olmalıdır. Yani açıkça* $u = v$ *dir. Her üç durumda incelendiğinde sabit noktanın tek olduğu görülmüş olur.*

Teorem 6.19 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *Krasnoselskii anlamında bir genelleştirilmiş büzülme dönüşümü olsun. Yani* $0 < a < b$ *olmak üzere* $\forall x, y \in X$, $a < d(x, y) < b$, α *negatif olmayan bir fonksiyon ve* $\alpha(a, b) < 1$ *için,*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha(a, b)d(x, y)$$

sağlanır. Bu durumda $T(x_0) = x_0$ *olacak şekilde bir tek* $x_0 \in X$ *vardır.*

İspat $x_{n+1} = T(x_n)$ *olmak üzere* $a_n = d(x_n, x_{n-1})$ *dizisi göz önüne alınsın.* T, *Krasnoselskii anlamında büzülme dönüşümü olduğundan,*

$$a_n = d(x_n, x_{n-1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \leq \alpha(a, b)d(x_{n-1}, x_{n-2})$$

sağlanır. Buradan $\alpha(a, b) < 1$ *olduğundan* $a_n \leq a_{n-1}$ *olup bu ise* (a_n) *dizisinin artmayan bir dizi olduğunu gösterir.* $\forall x, y \in X$ *için* $a < d(x, y) < b$ *olduğundan* (a_n) *sınırlı ve artmayan olup*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$$

olacak şekilde $a^* \in X$ *vardır. Dahası* $a^* = 0$ *dır. Varsayalım ki* $a^* > 0$ *olsun. Bu taktirde* $\forall m \in \mathbb{N}$ *ve yeteri kadar büyük bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *için,*

$$\begin{aligned} a_{n_0+m} &\leq [\alpha(a, a+1)]^m a_{n_0} \\ a^* &\leq ka^* \\ a^*(1-k) &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $k < 1$ *olduğundan* $(1-k) > 0$ *olup* $a^* \leq 0$ *dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde* $a^* = 0$ *olur. Buradan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0$$

elde edilir. Bu ise (x_n) *dizisinin* X *de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.* X *tam olduğundan* $x_n \to x_0$ *olacak şekilde* $x_0 \in X$ *vardır. Şimdi* $\varepsilon > 0$ *ve* $n_0 \in \mathbb{N}$ *için* $a_{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}\Big[1 - \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)\Big]$ *olacak şekilde seçilsin. Burada*

$$B := \{x \in X : d(x, x_{n_0}) \leq \varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. Buna göre

$$T(B) = \{T(x) \in X : d(T(x), T(x_0)) \leq \varepsilon\}$$

olur. Dahası

- $d(x, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *ise,*

$$\begin{aligned} d(T(x), T(x_0)) &\leq d(T(x), T(x_0)) + a_{n_0} \\ &\leq \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

  dir.

- $\frac{\varepsilon}{2} \leq d(x, x_0) < \varepsilon$ *ise,*

$$\begin{aligned} d(T(x), T(x_0)) &\leq d(T(x), T(x_0)) + a_{n_0} \\ &\leq \varepsilon\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

  olur. O halde

$$\begin{aligned} 0 \leq d(T(x_0), x_n) &= d(T(x_0), T(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) d(x_0, x_{n-1}) \end{aligned}$$

  olup $n \to \infty$ *için limit alındığında* $x_{n-1} \to x_0$ *ve* T *nin sürekliliğinden* $T(x_{n-1}) \to T(x_0)$ *olur. Diğer yandan*

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 = T(x_0)$$

sabit noktası bulunur. Tekliği için $x \neq y$ olmak üzere x ile y T nin sabit noktaları olsun. O halde

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \alpha(a, b)d(x, y)$$

olup $\alpha(a, b) \in [0, 1)$ olduğundan $d(x, y) = 0$ ve $x = y$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Yani sabit nokta var ve tektir.

Teorem 6.20 *(X, G) bir tam G-metrik uzay ve $T : X \to X$ Krasnoselskii anlamında bir büzülme dönüşümü olsun. Yani $0 < a < b$ olmak üzere $\forall x, y, z \in X$, $a < G(x, y, z) < b$ ve $\alpha(a, b) < 1$ için,*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq \alpha(a, b)G(x, y, z)$$

sağlanır. Bu durumda $T(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in X$ vardır.

İspat *$x_{n+1} = T(x_n)$ olmak üzere $a_n = G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1})$ dizisi alınsın. T Krasnoselskii anlamında büzülme dönüşümü olduğundan,*

$$a_n = G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1}) = G(T(x_{n-1}), T(x_{n-2}), T(x_{n-2})) \leq \alpha(a, b)G(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-2})$$

sağlanır. Buradan $\alpha(a, b) < 1$ olduğundan $a_n \leq a_{n-1}$ olup bu ise (a_n) dizisinin artmayan bir dizi olduğunu gösterir. $\forall x, y, z \in X$ için $a < G(x, y, z) < b$ olduğundan (a_n) sınırlı ve artmayan bir dizi olup

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$$

olacak şekilde $a^* \in X$ vardır. Üstelik $a^* = 0$ dır. Varsayalım ki $a^* > 0$ olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ ve yeteri kadar büyük bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} a_{n_0+m} &\leq [\alpha(a, a+1)]^m a_{n_0} \\ a^* &\leq ka^* \\ a^*(1-k) &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. $k < 1$ olup $(1 - k) > 0$ olduğundan $a^* \leq 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $a^* = 0$ olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1}) = 0$$

elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. şimdi $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ için, $a_{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}[1 - \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)]$ olacak şekilde alınsın. Ayrıca burada

$$B := \{x \in X : G(x, x_{n_0}, x_{n_0}) \leq \varepsilon\}$$

kümesi tanımlansın. O halde

$$T(B) = \{T(x) \in X : G(T(x), T(x_0), T(x_0)) \leq \varepsilon\}$$

olur. Ayrıca

- $G(x, x_0, x_0) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ *ise,*

$$\begin{aligned} G(T(x), T(x_0), T(x_0)) &\leq G(T(x), T(x_0), T(x_0)) + a_{n_0} \\ &\leq \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

dir.

- $\dfrac{\varepsilon}{2} \leq G(x, x_0, x_0) < \varepsilon$ *ise,*

$$\begin{aligned} G(T(x), T(x_0), T(x_0)) &\leq G(T(x), T(x_0), T(x_0)) + a_{n_0} \\ &\leq \varepsilon\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} 0 \leq G(T(x_0), x_n, x_n) &= G(T(x_0), T(x_{n-1}), T(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)G(x_0, x_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında $x_{n-1} \to x_0$ ve T nin sürekliliğinden $T(x_{n-1}) \to T(x_0)$ olur. Diğer yandan

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 = T(x_0)$$

sabit noktası bulunur. Tekliği için $x \neq y$ olmak üzere x ile y T nin sabit noktaları olsun. Bu taktirde,

$$G(x, y, y) = G(T(x), T(y), T(y)) \leq \alpha(a, b)G(x, y, y)$$

olup $\alpha(a, b) \in [0, 1)$ olduğundan $G(x, y, y) = 0$ ve $x = y$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde var olan sabit nokta tektir.

Teorem 6.21 *(X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü eğer $0 < a < b$ olmak üzere $\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$, $a \leq G_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leq b$ ve $\alpha(a, b) < 1$ için,*

$$G_n(T(x_0), T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \alpha(a, b)G_n(x_0, \ldots, x_n)$$

Krasnoselskii anlamında G_n-büzülme koşulunu sağlıyor ise T nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat $x_{k+1} = T(x_k)$ *Picard iterasyonu ve* $a_k = G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2})$ *pozitif terimli dizisi ele alınsın.* T*, Krasnoselskii büzülme koşulunu sağladığından*

$$\begin{aligned} a_k = G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) &= G_n(T(x_k), T(x)_{k+1}, \ldots, T(x_{k+1})) \\ &\leq \alpha(a,b) G_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+1}) \\ &= \alpha(a,b) a_{k-1} \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan $\alpha(a,b) < 1$ *olduğundan* $a_k \leq a_{k-1}$ *olduğu görülür. Yani* $a \leq a_n \leq b$ *ve* (a_n) *artmayan bi dizi olup* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$ *olacak şekilde* $a^* \in X$ *vardır. Ayrıca* $a^* = 0$ *dır. Bunu göstermek için varsayalım ki* $a^* > 0$ *olsun.* $\forall m \in \mathbb{N}$ *ve yeteri kadar büyük bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *için*

$$a_{n_0+m} \leq [\alpha(a, a+1)]^m a_{n_0}$$

olup $m \to \infty$ *için limit alındığında* $a^* \leq ka^*$ *ve* $a^*(1-k) \leq 0$ *olur.* $1 - k > 0$ *olduğundan* $a^* \leq 0$ *olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde* $(a_n) \to a^* = 0$ *olur. Buradan*

$$\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} G_n(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+2}) = 0$$

olup Yardımcı teorem 5.3 gereğince (x_n) *bir* G_n*-Cauchy dizisi olur.* X *bir tam* G_n*-metrik uzay olduğundan* $(x_n) \to z$ *olacak şekilde bir* $z \in X$ *vardır. Şimdi* $\varepsilon > 0$ *ve* $k_0 \in \mathbb{N}$ *için* $a_{k_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}[1 - \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)]$ *olacak şekilde alınsın. Ayrıca burada*

$$B := \{x \in X | G_n(x, x_{k_0}, \ldots, x_{k_0}) \leq \varepsilon\}$$

kümesi tanımlansın. O halde

$$T(B) = \{T(x) \in X | G_n(T(x), T(x_{k_0}), \ldots, T(x_{k_0})) \leq \varepsilon\}$$

olur. Ayrıca

- $G_n(x, x_0, \ldots, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *ise,*

$$\begin{aligned} G_n(T(x), T(x_{k_0}), \ldots, T(x_{k_0})) &\leq G_n(T(x), T(x_0), \ldots, T(x_0)) + a_{k_0} \\ &\leq \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

- $\frac{\varepsilon}{2} < G_n(x, x_0, \ldots, x_0) \leq \varepsilon$ *ise,*

$$\begin{aligned} G_n(T(x), T(x_{k_0}), \ldots, T(x_{k_0})) &\leq G_n(T(x), T(x_0), \ldots, T(x_0)) + a_{k_0} \\ &\leq \varepsilon\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} 0 \leq G_n(T(x_0), x_k, \ldots, x_k) &= G_n(T(x_0), T(x_{k-1}), \ldots, T(x_{k-1})) \\ &\leq \alpha(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) G_n(x_0, x_{k-1}, \ldots, x_{k-1}) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limit alınırsa $x_{k-1} \to x_0$ ve T nin sürekliliğinden dolayı $T(x_{k-1}) \to T(x_0)$ olur. Diğer taraftan

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} T(x_{k-1}) = T(x_0)$$
$$\Rightarrow x_0 = T(x_0)$$

sabit noktası bulunur. Tekliği için $z \neq z^*$ olmak üzere z ile z^* T nin sabit noktaları olsun. O halde,

$$\begin{aligned} G_n(z, z^*, \ldots, z^*) &= G_n(T(z), T(z^*), \ldots, T(z^*)) \\ &= \alpha(a, b) G_n(z, z^*, \ldots, z^*) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha(a, b) < 1$ olduğundan $G_n(z, z^*, \ldots, z^*) = 0$ olmalıdır. O halde $z = z^*$ olmalıdır. Bu ise çelişkidir. O halde sabit nokta var ise tektir.

Yardımcı Teorem 6.5 (X, d) *bir metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü her* $x \in X$, $k < 1$ *ve* $n(y)$ *pozitif tam sayısı için*

$$d(T^{n(y)}(x), T^{n(y)}(y)) \leq kd(x, y)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$r(x) := \sup_n \{d(T^n(x), x)\}$$

kümesi sonludur.

İspat $x \in X$ *keyfi bir nokta ve* $\mathcal{L}(x) = \max\{d(T^k(x), x) | k = 1, 2, \ldots, n(x)\}$ *kümesi tanımlansın. Buradan* $n \in \mathbb{N}$ *için* $sn(x) < n \leq (s+1)n(x)$ *ve*

$$\begin{aligned} d(T^n(x), x) &\leq d(T^{n(x)}(T^{n-n(x)}(x)), T^{n(x)}(x)) + d(T^{n(x)}(x), x) \\ &\leq kd(T^{n-n(x)}, x) + \mathcal{L}(x) \\ &\leq \mathcal{L}(x) + k\mathcal{L}(x) + k^2\mathcal{L}(x) + \ldots + k^s\mathcal{L}(x) \\ &\leq \mathcal{L}(x)\frac{1}{1-k} \end{aligned}$$

sağlayacak şekilde $\exists s \geq 0$ *tam sayısı vardır. Dolayısıyla* $r(y) := \sup_n \{d(T^n(y), y)\}$ *kümesi sonlu olur.*

Teorem 6.22 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $B \subset X$ kümesi için,*

i) $T(B) \subset B$ *dir.*

ii) $k < 1$, $\forall y \in B$ *ve* $\forall x \in B$ *için,*

$$d(T^{n(y)}(x), T^{n(y)}(y)) \leq kd(x,y)$$

olacak şekilde $\exists n(y) \geq 1$ *tam sayısı vardır.*

iii) *Bir* $x_0 \in B$ *için* $\overline{\{T^n(x_0) : n \geq 1\}} \subset B$ *dir.*

koşulları sağlanıyor ise bir tek $u \in B$ için $T(u) = u$ sağlanıp $\forall y_0 \in B$ için $T^n(y_0) \to u$ olur.

İspat $r(y) := \sup_n \{d(T^n(y), y)\}$ *sonlu kümesi ve hipotezin (iii) koşulundan $\forall x_0 \in B$ için,*

$$\begin{array}{ccc} m_0 = n(x_0) & , & x_1 = T^{m_0}(x_0) \\ m_1 = n(x_1) & , & x_2 = T^{m_1}(x_1) \\ & \vdots & \\ m_i = n(x_i) & , & x_{i+1} = T^{m_i}(x_i) \end{array}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisi $i \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} d(x_{i+1}, x_i) &= d(T^{m_i}(x_i), T^{m_{i-1}}(x_{i-1})) \\ &\leq kd(x_i, x_{i-1}) \\ &= kd(T^{m_{i-1}}(x_{i-1}), T^{m_{i-2}}(x_{i-2})) \\ &\leq k^2 d(x_{i-1}, x_{i-2}) \\ &\vdots \\ &\leq k^i d(x_1, x_0) \\ &= k^i d(T^{m_0}(x_0), x_0) \\ &\leq k^i r(x_0) \end{aligned}$$

sağlanır. $j > i$ için,

$$d(x_j, x_i) \leq \sum_{l=i}^{j-1} d(x_{l+1}, x_l) \leq \frac{k^i}{1-k} r(x_0)$$

olur. Buradan $i \to \infty$ için limit alındığında $\dfrac{k^i}{1-k} \to 0$ olduğundan $d(x_j, x_i) \to 0$ olup (x_n) bir Cauchy dizisi olur. X tam metrik uzay olduğundan ve (iii) den $x_n \to u$ olacak şekilde $u \in B$ vardır. Böylece $\forall y \in B$ için,

$$d(T^{n(u)}(y), T^{n(u)}(u)) \leq kd(y,u)$$

olacak şekilde $n(u) \geq 1$ *tam sayısı vardır ve* $T^{n(u)}(x_i) \to T^{n(u)}(u)$ *olur. Buradan*

$$d(T^{n(u)}(u), u) = \lim_{i\to\infty} d(T^{n(u)}(x_i), x_i)$$

ve

$$\begin{aligned} d(T(x_i), x_i) &= d(T^{m_{i-1}}(T(x_{i-1})), T^{m_{i-1}}(x_{i-1})) \\ &\leq kd(T(x_{i-1}), x_{i-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^i d(T(x_0), x_0) \end{aligned}$$

bulunur. $i \to \infty$ *için limit alındığında* $k^i \to 0$ *olup* $d(T(u), u) = 0$ *olur. Buradan* $T(u) = u$ *sabit noktası bulunur. Tekliği için,* $u \neq v$ *birbirinden farklı sabit noktalar olmak üzere,*

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(T^{n(u)}(u), T^{n(u)}(v)) \\ &\leq kd(u, v) \end{aligned}$$

olup $k < 1$ *olduğundan* $d(u, v) = 0$ *olmalıdır. Yani* $u = v$ *olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.*

Teorem 6.23 (X, G) *bir tam G-metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* $B \subset X$ *kümesi için,*

i) $T(B) \subset B$ *dir.*

ii) $k < 1$, $\forall y \in B$, *ve* $\forall x \in B$ *için,*

$$G(T^{n(y)}(x), T^{n(y)}(y), T^{n(y)}(y)) \leq kG(x, y, y)$$

olacak şekilde $\exists n(y) > 1$ *tam sayısı vardır.*

iii) Bir $x_0 \in B$ *için,* $\overline{\{T^n(x_0) : n \geq 1\}} \subset B$ *dir.*

koşulları sağlanıyor ise bir tek $u \in B$ *için* $T(u) = u$ *sağlanıp* $\forall y_0 \in B$ *için* $T^n(y_0) \to u$ *olur.*

İspat $r(y) := \sup\{G(T^n(y), y, y)\}$ *sonlu kümesi ve hipotezin* (iii) *koşulundan* $\forall x_0 \in B$ *için,*

$$\begin{aligned} m_0 = n(x_0) \quad &, \quad x_1 = T^{m_0}(x_0) \\ m_1 = n(x_1) \quad &, \quad x_2 = T^{m_1}(x_1) \\ &\vdots \\ m_i = n(x_i) \quad &, \quad x_{i+1} = T^{m_i}(x_i) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı (x_n) *dizisi* $i \geq 1$ *için,*

$$\begin{aligned} G(x_{i+1}, x_i, x_i) &= G(T^{m_i}(x_i), T^{m_{i-1}}(x_{i-1}), T^{m_{i-1}}(x_{i-1})) \\ &\leq kG(x_i, x_{i-1}, x_{i-1}) \\ &= kG(T^{m_{i-1}}(x_{i-1}), T^{m_{i-2}}(x_{i-2}), T^{m_{i-2}}(x_{i-2})) \\ &\leq k^2 G(x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-2}) \\ &\vdots \\ &\leq k^i G(x_1, x_0, x_0) \\ &= k^i G(T^{m_0}(x_0), x_0, x_0) \\ &\leq k^i r(x_0) \end{aligned}$$

sağlanır. $j > i$ *için,*

$$G(x_j, x_i, x_i) \leq \sum_{l=i}^{j-1} G(x_{l+1}, x_l, x_l) \leq \frac{k^i}{1-k} r(x_0)$$

olur. Buradan $i \to \infty$ *için limit alındığında* $\dfrac{k^i}{1-k} \to 0$ *olduğundan* $G(x_j, x_i, x_i) \to 0$ *olup* (x_n) *bir Cauchy dizisi olur.* X *tam G-metrik uzay olduğundan ve* (iii) *den* $(x_n) \to u$ *olacak şekilde* $u \in B$ *vardır. Böylece* $\forall y \in B$ *için,*

$$G(T^{n(u)}(y), T^{n(u)}(u), T^{n(u)}(u)) \leq kG(y, u, u)$$

$n(u) \geq 1$ *olacak şekilde tam sayısı vardır ve* $T^{n(u)}(x_i) \to T^{n(u)}(u)$ *olur. Buradan*

$$G(T^{n(u)}(u), u, u) = \lim_{i \to \infty} G(T^{n(u)}(x_i), x_i, x_i)$$

ve

$$\begin{aligned} G(T(x_i), x_i, x_i) &= G(T^{m_{i-1}}(T(x_{i-1})), T^{m_{i-1}}(x_{i-1}), T^{m_{i-1}}(x_{i-1})) \\ &\leq kG(T(x_{i-1}), x_{i-1}, x_{i-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^i G(T(x_0), x_0, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. $i \to \infty$ *için limit alındığında* $k^i \to 0$ *olup buradan* $T(u) = u$ *sabit noktası bulunur. Tekliği için,* $u \neq v$ *birbirinden farklı sabit noktalar olmak üzere,*

$$\begin{aligned} G(u, v, v) &= G(T^{n(u)}(u), T^{n(u)}(v), T^{n(u)}(v)) \\ &\leq kG(u, v, v) \end{aligned}$$

olup $k < 1$ *olduğundan* $G(u, v, v) = 0$ *olmalıdır. Yani* $u = v$ *olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde sabit nokta var ise tektir.*

Teorem 6.24 *(X, G_n) bir tam G_n-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $B \subset X$ için*

a) *$T(B) \subset B$ dir.*

b) *$k < 1$ ve $\forall x, y \in B$ için*

$$G_n(T^{n(u)}(x), T^{n(u)}(y), \ldots, T^{n(u)}(y)) \leq kG_n(x, y, \ldots, y)$$

olacak şekilde $n(y) \geq 1$ tam sayısı vardır.

c) *Bir $x_0 \in B$ için $\overline{\{T^n(x_0) | n \geq 1\}} \subset B$ dir.*

koşulları sağlanıyor ise $T(u) = u$ olacak şekilde bir tek $u \in B$ vardır ve $\forall y_0 \in B$ için $T^n(y_0) \to u$ sağlanır. Dahası $\forall x \in X$ için

$$G_n(T^{n(u)}(x), T^{n(u)}(y), \ldots, T^{n(u)}(y)) \leq kG_n(x, y, \ldots, y))$$

sağlanıyor ise u noktası X in içinde tektir ve $\forall x_0 \in X$ için $T^n(x_0) \to u$ sağlanır.

İspat *$r(y) := \sup\{G_n(y, T^n(y), \ldots, T^n(y)) | n \geq 1\}$ sonlu kümesi ve hipotezin (c) şıkkından $x_0 \in B$ için*

$$\begin{aligned} m_0 = n(x_0) \quad &, \quad x_1 = T^{m_0}(x_0) \\ m_1 = n(x_1) \quad &, \quad x_2 = T^{m_1}(x_1) \\ &\vdots \\ m_i = n(x_i) \quad &, \quad x_{i+1} = T^{m_i}(x_i) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı (x_i) dizisi $i \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) &= G_n(T^{m_{i-1}}(x_{i-1}), T^{m_i}(x_i), \ldots, T^{m_i}(x_i)) \\ &\leq kG_n(x_{i-1}, x_i, \ldots, x_i) \\ &= kG_n(T^{m_{i-2}}(x_{i-2}), T^{mi-1}(x_{i-1}), \ldots, T^{m_{i-1}}(x_{i-1})) \\ &\leq k^2 G_n(x_{i-2}, x_{i-1}, \ldots, x_{i-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^i G_n(x_0, x_1, \ldots, x_1) \\ &= k^i G_n(x_0, T^{m_0}(x_0), \ldots, T^{m_0}(x_0)) \\ &\leq k^i r(x_0) \end{aligned}$$

sağlanır. $j > i$ için

$$G_n(x_i, x_j, \ldots, x_j) \leq \sum_{l=i}^{j-1} G_n(x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+1}) \leq \frac{k}{1-k} r(x_0)$$

olur. O halde $i \to \infty$ *için limit alındıgında* $k < 1$ *olduğundan* $k^i \to 0$ *olur ve* $G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) \to 0$ *olup Yardımcı teorem 5.3 geregince* (x_i) *bir Cauchy dizisi olur.* X *bir tam* G_n*-metrik olduğundan ve* (c) *koşulundan* $(x_i) \to u$ *olacak şekilde bir* $u \in B$ *elemanı vardır. Böylece* $\forall y \in B$ *için*

$$G_n(T^{n(u)}(y), T^{n(u)}(u), \ldots, T^{n(u)}(u)) \leq kG_n(y, u, \ldots, u)$$

olacak şekilde $n(u) \geq 1$ *tam sayısı vardır ve buradan* $T^{n(u)}(x_i) \to T^{n(u)}(u)$ *olur. Buradan*

$$G_n(u, T^{n(u)}(u), \ldots, T^{n(u)}(u)) = \lim_{i \to \infty} G_n(x_i, T^{n(u)}(x_i), \ldots, T^{n(u)}(x_i))$$

ve

$$\begin{aligned} G_n(x_i, T(x_i), \ldots, T(x_i)) &= G_n(T^{m_{i-1}}(x_i), T^{m_{i-1}}(T(x_{i-1})), \ldots, T^{m_{i-1}}(T(x_{i-1}))) \\ &\leq kG_n(x_i, T(x_{i-1}), \ldots, T(x_{i-1})) \\ &\vdots \\ &\leq k^i G_n(x_0, T(x_0), \ldots, T(x_0)) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $i \to \infty$ *için limit alındığında* $k^i \to 0$ *olup buradan* $T(u) = u$ *sağlanır. Tekliği için,* $u \neq v$ *olacak şekilde sabit noktaları için*

$$\begin{aligned} G_n(u, v, \ldots, v) &= G_n(T^{n(u)}(u), T^{n(u)}(v), \ldots, T^{n(u)}(v)) \\ &\leq kG_n(u, v, \ldots, v) \end{aligned}$$

olup $k < 1$ *olduğundan* $G_n(u, v, \ldots, v) = 0$ *olmalıdır. Yani* $u = v$ *olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde sabit nokta var ise tektir.*

Tanım 6.9 (X, d) *bir metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *sürekli dönüşümü tanım kümesi içinde*

$$d(T(x), x) \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir x noktası var ise bu x noktasına T dönüşümünün ε*-sabit noktası denir.*

Teorem 6.25 (X, d) *bir metrik uzay* $T : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. O halde* $\forall \varepsilon > 0$ *için* T *nin* ε*-sabit noktası vardır.*

İspat $\varepsilon > 0$ *olsun.* T *bir büzülme dönüşümü olduğundan* $\forall x, y \in X$ *için,*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ *vardır.* $x_0 \in X$ *keyfi noktası ve* $x_{n+1} = T(x_n)$ *Picard iterasyonu için,*

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(T(x_{n+1}), T(x_n)) &\leq kd(x_{n+1}, x_n) \\ &= kd(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq k^2 d(x_n, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^{n+1} d(T(x_0), x_0) \end{aligned}$$

olur. Bu noktada en az bir $x_0 \in X$ *için* $d(T(x_0), x_0) = 0$ *oluyorsa* $x_0 \in X$ *sabit noktadır. O halde* $\forall x \in X$ *için* $d(T(x), x) \neq 0$ *olduğu varsayılsın. Buna göre,*

$$\begin{aligned} n &> \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(d(T(x), x))}{\ln(k)} \\ n\ln(k) &< \ln(\varepsilon) - \ln(d(T(x), x)) \\ n\ln(k) + \ln(d(T(x), x)) &< \ln(\varepsilon) \\ \ln(k^n d(T(x), x)) &< \ln(\varepsilon) \\ e^{\ln(k^n d(T(x), x))} &< e^{\ln(\varepsilon)} \end{aligned}$$

olur. e^x *fonksiyonu artan olduğundan dolayı*

$$d(T(x_{n+1}), T(x_n)) \leq k^{n+1} d(T(x), x) < \varepsilon$$

koşulu sağlanır. Bu eşitsizliği sağlayan n *değerleri için,*

$$d(T(x_{n+1}), T(x_n)) = d(x_n, T(x_n)) < \varepsilon$$

olup ε*-sabit noktasına sahip olduğu görülür.*

Teorem 6.26 (X, G) *bir G-metrik uzay* $T : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. O halde* $\forall \varepsilon > 0$ *için* T *nin* ε*-sabit noktası vardır.*

İspat $\varepsilon > 0$ *olsun.* T *bir büzülme dönüşümü olduğundan* $\forall x, y, z \in X$ *için,*

$$G(T(x), T(y), T(z)) \leq \lambda G(x, y, z)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ *vardır.* $x_0 \in X$ *keyfi noktası için,*

$$\begin{aligned} G(x_{n+2}, x_{n+1}, x_{n+1}) &= G(T(x_{n+1}), T(x_n), T(x_n)) \\ &\leq \lambda G(x_{n+1}, x_n, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{n+1} d(T(x_0), x_0, x_0) \end{aligned}$$

olur. Buradan en az bir $x_0 \in X$ için $G(T(x_0), x_0, x_0) = 0$ oluyorsa $x_0 \in X$ sabit noktadır. O halde $\forall x \in X$ için $G(T(x), x, x) \neq 0$ olduğu varsayılsın. Buna göre,

$$\begin{aligned} n &> \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(G(T(x), x, x))}{\ln(k)} \\ n \ln(k) &< \ln(\varepsilon) - \ln(G(T(x), x, x)) \\ n \ln(k) + \log(G(T(x), x, x)) &< \ln(\varepsilon) \\ \ln(k^n G(T(x), x, x)) &< \ln(\varepsilon) \\ e^{\ln(k^n G(T(x), x, x))} &< e^{\ln(\varepsilon)} \end{aligned}$$

olur. e^x fonksiyonu artan olduğundan

$$G(T(x_{n+1}), T(x_n), T(x_n)) \leq \lambda^{n+1} G(T(x), x, x) < \varepsilon$$

sağlanır. Bu eşitsizliği sağlayan n değerleri için,

$$G(T(x_{n+1}), T(x_n), T(x_n)) = G(x_n, T(x_n), T(x_n)) < \varepsilon$$

olup x_n, ε-sabit noktası vardır.

Teorem 6.27 *(X, G_n) bir G_n-metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm, $\lambda \in [0, 1)$ ve $\forall x_1, \ldots, x_n \in X$ için*

$$G_n(T(x_1), \ldots, T(x_n)) \leq \lambda G_n(x_1, \ldots, x_n)$$

sağlansın. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için T nin bir ε-sabit noktası vardır.

İspat *$x_0 \in X$ keyfi bir nokta ve $\varepsilon > 0$ için hipotezden,*

$$\begin{aligned} G_n(x_{n+2}, x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}) &= G_n(T(x_{n+1}), T(x_n), \ldots, T(x_n)) \\ &\leq \lambda G_n(x_{n+1}, x_n, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{n+1} G_n(T(x), x, \ldots, x) \end{aligned}$$

olur. En az bir $x_0 \in X$ için $G_n(T(x_0), x_0, \ldots, x_0)) = 0$ ise $x_0 \in X$ ε-sabit noktadır. O halde $\forall x \in X$ için $G_n(T(x), x, \ldots, x) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} n &> \frac{\log(\varepsilon) - \log(G_n(T(x), x, \ldots, x))}{\log(\lambda)} \\ n \log(\lambda) &< \log(\varepsilon) - \log(G_n(T(x), x, \ldots, x)) \\ \log(\lambda^n) + \log(G_n(T(x), x, \ldots, x)) &< \log(\varepsilon) \\ \log(\lambda^n G_n(T(x), x, \ldots, x)) &< \log(\varepsilon) \\ e^{\log(\lambda^n G_n(T(x), x, \ldots, x))} &< e^{\log(\varepsilon)} \end{aligned}$$

olur. Buradan e^x fonksiyonunun artanlığından

$$G_n(T(x_{n+1}), T(x_n), \ldots, T(x_n)) \leq \lambda^{n+1} G_n(T(x), x, \ldots, x) \leq \varepsilon$$

olur ve bu eşitsizliği sağlayan n değerleri için,

$$G_n(T(x_{n+1}), T(x_n), \ldots, T(x_n)) = G_n(x_n, T(x_n), T(x_n)) \leq \varepsilon$$

olduğundan bir ε-sabit noktaya sahip olur.

Tanım 6.10 *(X, d) bir metrik uzay olsun. Her $a, b \in X$ için $i = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $d(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ biçiminde noktaların sonnlu bir kümesi var ise X metrik uzayına ε-zincirlenebilirdir denir.*

Tanım 6.11 *(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ alındığında*

$$B(x, \varepsilon_x) = \{y | d(x, y) \leq \varepsilon_x\}$$

kümesindeki her p,q elemanları için

$$d(T(p), T(q)) \leq \lambda_x d(p, q)$$

olacak şekilde en az bir $\varepsilon_x > 0$ ve $\lambda_x \in [0, 1)$ varsa T ye yerel büzülebilir adı verilir. Eğer bu koşuldaki ε ve λ x noktasından bağımsız ise T ye (ε, λ)-düzgün yerel büzülebilir dönüşüm denir.

Teorem 6.28 *(X, d) bir ε-zincirlenebilir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ ifadesi (ε, λ)-düzgün yerel büzülebilir bir dönüşüm olsun. O halde $T(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in X$ vardır.*

İspat *X, ε-zincirlenebilir olduğundan herhangi bir $x \in X$ için $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = T(x)$ noktaları $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Buradan üçgen eşitsizliği kullanılarak*

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_1) + d(x_1, T(x)) \\ &\leq d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, T(x)) \\ &\vdots \\ &< n\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan T, (ε,λ)-düzgün yerel büzülebilir dönüşüm olduğundan $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere

$$d(T(x_{i-1}), T(x_i)) \leq \lambda d(x_{i-1}, x_i) < \lambda\varepsilon$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(T^m(x_{i-1}), T^m(x_i)) &= d(T(T^{m-1}(x_{i-1})), T(T^{m-1}(x_i))) \\ &\leq \lambda d(T^{m-1}(x_{i-1}), T^{m-1}(x_{i-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^m \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $n > m$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d(T^m(x), T^n(x)) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(T^i(x), T^{i+1}(x)) \\ &\vdots \\ &\leq n\varepsilon(\lambda^m + \ldots + \lambda^{n-1}) \\ &\leq n\varepsilon \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \end{aligned}$$

olur ve $m \to \infty$ için limit alındığında $d(T^m(x), T^n(x)) \leq 0$ olması $(T^n(x))$ dizisinin terimlerinin indis büyüdükçe birbirine yakınsamaları olup dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam metrik uzay olduğundan $T^n(x) \to x_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ elemanı vardır ve

$$T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) = x_0$$

olup $T(x_0) = x_0$ sabit noktası bulunur. Tekliği için, x ve y, T nin farklı sabit noktaları olmak üzere,

$$\begin{aligned} d(x,y) = d(T(x), T(y)) &\leq \sum_{i=1}^{n} d(T^n(x_{i-1}), T^n(x_i)) \\ &\leq \lambda^m n\varepsilon \end{aligned}$$

olup $m \to \infty$ için limit alındığında $d(T(x), T(y)) \leq 0$ olacağından $T(x) = T(y)$ olur ve buradan $x = y$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde sabit nokta var ise tektir.

Teorem 6.29 *(X, G) bir ε-zincirlenebilir tam G-metrik uzay ve $T : X \to X$ (ε,λ) düzgün yerel büzülebilir bir dönüşüm olsun. O halde $T(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir tek $x_0 \in X$ vardır.*

İspat *X, ε-zincirlenebilir olduğundan $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = T(x)$ noktaları $G(x_{i-1}, x_i, x_i) < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Burada G metrik uzayın aksiyomlarından (G5) kullanılarak,*

$$
\begin{aligned}
G(x, T(x), T(x)) &\leq G(x, x_1, x_1) + G(x_1, T(x), T(x)) \\
&\leq G(x, x_1, x_1) + G(x_1, x_2, x_2) + G(x_2, T(x), T(x)) \\
&\vdots \\
&\leq n\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan T, (ε, λ) düzgün yerel büzülebilir dönüşüm olduğundan

$$G(T(x_{i-1}), T(x_i), T(x_i)) \leq \lambda G(x_{i-1}, x_i, x_i) \leq \lambda\varepsilon$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
G(T^m(x_{i-1}), T^m(x_i), T^m(x_i)) &= G(T(T^{m-1}(x_{i-1})), T(T^{m-1}(x_i)), T(T^{m-1}(x_i))) \\
&\leq \lambda G(T^{m-1}(x_{i-1}), T^{m-1}(x_i), T^{m-1}(x_i)) \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^m G(x_{i-1}, x_i, x_i) \\
&\leq \lambda^m \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Böylelikle $n > m$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
G(T^m(x), T^n(x), T^n(x)) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} G(T^i(x), T^{i+1}(x), T^{i+1}(x)) \\
&\leq n\varepsilon(\lambda^m + \ldots + \lambda^{n-1}) \\
&\leq n\varepsilon \frac{\lambda^m}{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

olur ve $m \to \infty$ için limit alındığında $G(T^m(x), T^n(x), T^n(x)) \leq 0$ olması $(T^n(x))$ dizisinin terimlerinin indis büyüdükçe birbirine yaklaşıyor olduğunu ve dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X bir tam G-metrik olduğundan $T^n(x) \to x_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ elemanı vardır ve

$$T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) = x_0$$

olup $T(x_0) = x_0$ sabit noktası bulunur. Tekliği için, x ve y T nin farklı sabit noktaları olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
G(T(x), T(y), T(y)) &\leq \sum_{i=1}^{n} G(T^n(x_{i-1}), T^n(x_i), T^n(x_i)) \\
&\leq \lambda^m n\varepsilon
\end{aligned}
$$

olup $m \to \infty$ için limit alındığında $G(T(x), T(y), T(y)) \leq 0$ olur ve buradan $T(x) = T(y)$ dolayısıyla $x = y$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani sabit nokta varsa tektir.

Teorem 6.30 *(X, G_n) bir ε-zincirlenebilir tam G_n-metrik uzay ve $T : X \to X$ (ε, λ) düzgün yerel büzülebilir bir dönüşüm olsun. O halde $T(z) = z$ olacak şekilde bir tek $z \in X$ vardır.*

İspat *X ε-zincirlenebilir olduğundan $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = T(x)$ ve $G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Burada G_n-metrik uzayın 4. aksiyomu kullanılarak,*

$$\begin{aligned} G_n(x, T(x), \ldots, T(x)) &\leq G_n(x, x_1, \ldots, x_1) + G_n(x_1, T(x), \ldots, T(x)) \\ &= G_n(x, x_1 \ldots, x_1) + G_n(x_1, x_2, \ldots, x_2) + G_n(x_2, T(x), \ldots, T(x)) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) \\ &\leq n\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan T, (ε, λ)-düzgün yerel büzülebilir dönüşüm olduğundan

$$G_n(T(x_i), T(x_{i+1}), \ldots, T(x_{i+1})) \leq \lambda G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) \leq \lambda\varepsilon$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} G_n(T^m(x_i), T^m(x_{i+1}, \ldots, x_{i+1})) &\leq \lambda G_n(T^{m-1}(x_i), T^{m-1}(x_{i+1}, \ldots, T^{m-1}(x_{i+1}))) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^m G_n(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) \\ &\leq \lambda^m \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $n > m$ için,

$$\begin{aligned} G_n(T^m(x), T^n(x), \ldots, T^n(x)) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} G_n(T^i(x), T^{i-1}(x), \ldots, T^{i-1}(x)) \\ &\leq n\varepsilon(\lambda^m + \ldots + \lambda^{n-1}) \\ &\leq n\varepsilon \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \end{aligned}$$

olur. O halde $m \to \infty$ için limit alındığında $\lambda \in [0, 1)$ olduğundan $\lambda^m \to 0$ olur ve $G_n(T^m(x_i), T^m(x_{i+1}), \ldots, T^m(x_{i+1})) \to 0$ olup Yardımcı teorem 5.3 gereğince $(T^m(x_i))$ bir Cauchy dizisi olur. X bir tam G_n-metrik uzay olduğundan $(T^m(x_i)) \to z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Buradan $\lim_{m\to\infty} T^m(x_i) = z$ dir.

$$T(z) = T(\lim_{m\to\infty}(T^m(x_i))) = \lim_{m\to\infty} T^{m+1}(x_i) = z$$

olup $T(z) = z$ *sabit noktası bulunur. Tekliği için, z ve t T nin farklı sabit noktaları olmak üzere* $z = x_0, x_1, \ldots, x_n = t$ ε*-zinciri için*

$$\begin{aligned} G_n(T(z), T(t), \ldots, T(t)) &= G_n(T^m(z), T^m(t), \ldots, T^m(t)) \\ &\leq \lambda G_n(T^{m-1}(z), T^{m-1}(t), \ldots, T^{m-1}(t)) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^m G_n(z, t, \ldots, t) \\ &\leq \lambda^m \varepsilon \end{aligned}$$

olup $m \to \infty$ *için limit alındığında* $\lambda^m \to 0$ *olduğundan* $G_n(z, t, \ldots, t) = 0$ *olur ve buradan* $z = t$ *çelişkisi doğar. O halde sabit nokta var ise tektir.*

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

1906 yılında Fréchet ile başlayan metrik uzay çalışmaları aradan geçen süreçte pek çok bilim insanı tarafından sürdürülmüştür. Alışılmış metrik uzaylardaki sabit nokta çalışmaları Banach tarafından verilen Banach büzülme teoremi merkezde yer almak üzere metrik sabit nokta çalışmaları genel başlığı altında toplanabilir. Bu noktada ilk çalışmalar genellikle Banach büzülme koşulunun genelleştirilmesi veya çalışılan metrik uzayın özelliklerinin belirlenmesi zeminde bulunarak yapılmıştır. Bu bağlamda yapılan genelleştirmelerden olan G-metrik uzay kavramı $X \times X \times X$ kartezyan çarpım kümesi üzerinde tanımlı iken bu kavram $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{\textbf{n tane}}$ kartezyan çarpım kümesine genelleştirilmiştir ve adına G_n-metrik uzay denilmiştir. Bu tezde yapılan çalışmalar ile alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Chaterjee, Zamfirescu, Ćirić, Edelstein, Guseman sabit nokta teoremlerinin G_n-metrik uzaydaki karşılıkları bir başka deyişle G_n-metrik uzay versiyonları verilmiştir. Ayrıca Zamfirescu ve Ćirić sabit nokta teoremlerinin denkliği gösterilmiştir. Üstelik G_n-metrik uzaylar G-metrik uzayların genellemesi olduklarından G-metrik uzaylar içinde benzer sonuçlar otomatik olarak elde edilmiş olur.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Alışılmış metrik uzayın bir genellemesi Mustafa ve Sims tarafından 2006 yılında yaptıları bir makale ile verilen G-metrik uzay kavramıdır. Sonralarında verilen çalışma ile G-metrik uzay kavramıda $X \times X \times X$ kümesinden $\overbrace{X \times X \times \ldots \times X}^{\textbf{n tane}}$ kümesine genişletilmiştir. Bu tezde yürütülen çalışma ile alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Chatterjee, Zamfirescu, Ćirić, Edelstein, Gusemann sabit nokta teoremlerinin G_n-metrik uzaydaki karşılıkları verilmiştir. Zamfirescu ve Ćirić sabit nokta teoremlerinin denkliği gösterilmiştir. G_n-metrik uzay, G-metrik uzayın bir genellemesi olduğundan elde edilen sonuçlar G-metrik uzaylara indirgenebilir. Dolayısıyla G-metrik uzayda bilinenler dışında yukarıda adı geçen sabit nokta teoremlerinin G-metrik uzayları da verilmiştir.

G_n-metrik uzay kavramı henüz yeni ortaya atılmış bir kavram olduğundan alışılmış metrik uzaylara dair bilinen daha pek çok sabit nokta teoreminin karşılıkları verilebilir veya bu uzaya has kavramlar yeni G_n-metrik uzalarda olup alışılmış metrik uzaylarda olmayan kavramlar araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Agarwal R.P., Karapınar E., O'Regan D. 2015, Francisco A., Fixed Point Theory In Metrik Type Space, Springer

Berinde, V., 2002, Iterative Approximation of Fixed Points. Editura Efemeride, Baia Mare

Berinde V.,1997, Berinde M., 2005, On Zamfirescu's fixed point theorem, Revue Roumaine des Mathematiques Pures et Appliquees

Berinde, V.,1997, Contrac¸tii generalizate ¸si aplica¸tii. Editura Cub Press 22, Baia Mare, Romania

Boyd, D.W., Wong, J.S.W.: On nonlinear contractions. Proc. Am. Math. Soc. 20, 458–464 (1969)

Choi H., Kim S., Yeop Yang S., 2018, Structure For g-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems

Dhage, B.C., 1992, Generalized metric spaces and mapping with fixed point. Bull. Cal. Math. Soc. 84, 329–336

Dhage, B.C., 1994, Generalized metric space and topological structure II. Pure Appl. Math. Sci. 40, 37–41

Dhage, B.C., 2000, Generalized metric space and topological structure I. An. Stiint. Univ. Al.I, Cuza. Iazi, Mat (ANS) 46, 3–24

Edelstein M., 1961, An extension of Banach's contraction principle Pro. Amer. Math. Soc.12: 7-10

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22, 1–74

Gähler, S., 1963, 2-Metriche raume und ihre topologische strukture. Math. Nachr. 26, 115–148

Guseman L.F., 1970, Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point, Proc. Am. Math. Soc. 26, 615-618.

Gähler, S., 1966, Zur geometric 2-metriche raume. Revue Roumaine de Math. Pures Appl. XI, 664–669

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Jenganathan, P., 1992, “Fixed Point For Nonexpansive Mappings In Banach Spaces”, Copyright by the university of Cape Town., Republic of South Africa, 12–13

Krasnoselskii M.A., 1964, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 45

Khan, M.S., Swaleh, M., Sessa, S., 1984, Fixed point theorems by altering distances between the points. Bull. Aust. Math. Soc. 30, 1–9

Lakshmikantham, V., Ćirić, Lj.B.: Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces. Nonlinear Anal. 70, 4341–4349 (2009)

M.Edelstein, 1962, On Fixed and Periodic Points Under Contractive Mappings, Journal of London Mathematical Society, Volumes1-37, Issue1, Pages 74-79

Matkowski, J., 1977, Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point. Proc. Am. Math. Soc. 62, 344–348

Mukherjea, A.: Contractions and completely continuous mappings. Nonlinear Anal. 1(3), 235–247 (1997)

Mustafa, Z., 2000, A New Structure for Generalized Metric Spaces with Application to Fixed Point Theory. Ph.D. Thesis. The University of Newcastle

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 7(2), 289–297

Rus, I.A.: Generalized Contractions and Applications. Cluj University Press, Cluj-Napoca (2001)