Anti de-Sitter Uzayında Tam Maksimal Spacelike Yüzeyler

Evren Topcu

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2010

Complete Maximal Spacelike Surfaces in Anti de-Sitter Space

Evren Topcu

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

July 2010

Anti de-Sitter Uzayında Tam Maksimal Spacelike Yüzeyler

Evren Topcu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ali Görgülü

Temmuz 2010

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Evren Topcu'nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Anti de-Sitter Uzayında Tam Maksimal Spacelike Yüzeyler" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmanın amacı Anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike yüzeylerin bazı özelliklerini incelemektir.

Birinci ve ikinci bölümlerde, anti de-Sitter uzayı ile ilgili tarihsel gelişim ve çalışmamızda gerekli olan tanım ve teoriler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike yüzeylerin bazı özelikleri ile ikinci temel formun normunun karesi incelenmiştir. Bunu yaparken de sabit eğrilikli, boyutu ve indeksi iki olan bir Anti de-Sitter uzayı ele alınmıştır. Bunun için öncelikle konu ile ilgili temel kavramlar üzerinde durulmuş ve hem de-Sitter uzayı hem de anti de-Sitter uzayı ile ilgili çalışmalar bulunup araştırılmıştır. Bunun sonucunda sabit eğriliği c olan $H_2^4(c)$ anti de-Sitter Uzayındaki M^2 tam maksimal spacelike yüzeyi ile ikinci temel formun normunun karesi S arasında; M^2 yüzeyinin $H_2^4(c)$ total geodezik yüzeyi olması için gerek ve yeter şartın $S=0$, Hiperbolik Veronese yüzeyi olması için gerek ve yeter şartın $S=-\frac{4c}{3}$, $H_2^4(c)$ uzayının $H_1^3(c)$ total geodezik yüzeyin hiperbolik silindiri olması için gerek ve yeter şartın $S=2c$ olması gerektiği gösterilerek sonuçları açıklanmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Anti de-Sitter Uzayı, Yarı Riemann manifoldu, tam maksimal spacelike yüzey, ortalama eğrilik, ikinci temel form, Ricci eğrilik tensörü, Levi-Civita koneksiyon

SUMMARY

The aim of this thesis examine some properties of complete maximal spacelike surfaces in the Anti de-Sitter space.

In the first and second chapter, Historical improvement about Anti de-Sitter space and fundemental definitions and theorems are given.

In the third chapter, some properties of complete maximal spacelike surfaces in the Anti de-Sitter space and square of the norm of the second fundamental form are examined. For this aim is considered Anti de-Sitter space such that size and an index of two with constant curvature. First of all, to obtain required results fundemental concepts about the topic are considered and the studies about anti de-Sitter space are investigated.

On the result of these, the relation between complete maximal spacelike surface M^2 with the constant curvature c in the anti de-Sitter space $H_2^4(c)$ and the second fundamental form S is found such that M^2 surface is the total geodesic surface and hyperbolic Veronese surface, respectively if and only if $S=0$ and $S=-\frac{4c}{3}$, and the space $H_2^4(c)$ is hyperbolic cylinder the total geodesic surface of $H_1^3(c)$ if and only if $S=2c$.

Keywords: Anti de-Sitter Space, Semi-Riemannian manifold, complete maximal spacelike surface, mean curvature, second fundamental form, Ricci curvature tensor, Levi-Civita connection.

TEŞEKKÜR

Anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike yüzeyler üzerine adlı tez çalışmamda, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarımda, bana yardım eden ve her türlü olanağı sağlayan Sayın Yrd. Doç. Dr. Cumali Ekici ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali Görgülü' ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$H_{p-1}^{n+p-1}(c)$	c-sabit eğrilikli anti de-Sitter uzayı
$S_p^{n+p}(c)$	c-sabit eğrilikli de-Sitter uzayı
$\vec{h}$	Ortalama eğrilik vektörü
p	Yarı Riemann manifoldunun indeksi
S	İkinci temel formun karesi
Δ	Laplasyan
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
T_pM	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
R	Riemann eğrilik tensörü
∇	Levi-Civita koneksiyonu
$\mathcal{H}$	Ortalama eğrilik vektör alanı
Ric	Ricci eğrilik tensörü
R_{ij}	Ricci eğriliği
R_{ijkl}	Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri
w	Bir 1-form
dw	1-formun diferensiyeli
κ	Gauss eğriliği
h_{ij}	ikinci temel formun bileşenleri
ρ	Skalar eğrilik
K	Kesit eğriliği
T_p^*M	$p \in M$ deki dual uzay, kotanjant uzayı
$C^\infty(M,\ R)$	$M \to \mathbb{R}$ tanımlı $\mathbb{C}^\infty$ fonksiyonların kümesi
Γ_{jk}^i	Riemann-Christoffel sembolü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Genel rölativitenin geometrik uzayı, genel olarak Lorentz manifoldudur ve bu manifoldun en önemlilerinden biri de Anti de-Sitter uzayıdır.

$M_p^{n+p}(c)$, $(n+p)$ boyutlu, bağlantılı yarı-Riemann manifolduna p indeksli, c sabit eğirilikli indefinite uzay formu denir. İndefinite uzay formlarının standart modelleri;

$x = (x_1, x_2, ..., x_{n+p})$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_{n+p})$ standart tabana sahip $\mathbb{R}^{n+p}$ reel vektör uzayında tanımlanan

$$< \, , \, >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i y_i$$

iç çarpım ile $(\mathbb{R}^{n+p}, < \, , \, >)$ ikilisine $\mathbb{R}_p^{n+p}(c)$ olarak ifade edilen indefinite öklid uzayı;

$\mathbb{R}_p^{n+p+1}(c)$ uzayında $S_p^{n+p}(c)$ pozitif sabit eğrilikli ve

$$< x, x >= \frac{1}{c} = r^2$$

ile verilen bir hiperyüzey olsun. $S_p^{n+p}(c)$ uzayına $\mathbb{R}_p^{n+p+1}(c)$ boyunca indirgenmiş Riemann metriği bulunduran ve c sabit eğriliğe sahip de-Sitter uzayı;

Diğer yandan $\mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}(c)$ uzayında $H_p^{n+p}(c)$ negatif sabit eğrilikli ve

$$< x, x >= \frac{1}{c} = -r^2$$

ile verilen hiperyüzey olsun. $H_p^{n+p}(c)$ uzayına $\mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}(c)$ boyunca indirgenmiş Riemann metriği bulunduran ve c sabit eğriliğe sahip anti de-Sitter uzayı; şeklindedir.

M^n, $M_p^{n+p}(c)$ de indirgenmiş n -boyutlu bir Riemann manifoldu pozitif tanımlı ambiant uzaydan M^n üzerine indirgenmiş metrik ise spacelike olarak adlandırılır.

Calabi, 1970, ilk $n \leq 4$ için, $\mathbb{R}_1^{n+1}$ Minkowski uzayında bir maksimal spacelike tam eğri için Bernstein problemini inceledi ve $n \leq 4$ için bir hiperuzay olmak zorunda olduğunu ispatladı. Cheng ve Yau, 1976, bütün n'ler için sonucun doğru olduğunu ispatladı. Bernstein problemin bir genelleştirilmesi olarak Ishihara, 1988, anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike altmanifoldlarla ilgili problemi ele aldı ve $c \geq 0$ için $M_p^{n+p}(c)$ nin M^n tam spacelike maksimal alt manifoldunun total geodezik olduğunu gösterdi. Öte yandan, $H_p^{n+p}(c)$ de total geodezik olmayan tam maksimal spacelike alt manifold örnekleri de vardır.

$H_p^{n+p}(c)$ anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike alt manifoldların durumu, $\mathbb{R}_p^{n+p}$ indefinite öklid uzayı ve $S_p^{n+p}(c)$ de -Sitter uzayındakilerden çok farklıdır. Bundan dolayı $H_p^{n+p}(c)$ deki tam maksimal spacelike altmanifoldların incelenmesi çok ilginç bir durumdu.

Ishihara, 1988, $H_p^{n+p}(c)$ nin $H^{n_1}(\frac{nc}{n_1}) \times ... \times H^{n_{p+1}}(\frac{nc}{n_{p+1}})$ tam maksimal spacelike altmanifoldu karakterize etti. Yani $H_p^{n+p}(c)$ deki n-boyutlu tam maksimal spacelike manifold olan M^n nin, ikinci temel formun normunun karesi S olmak üzere, $S \leq -npc$ ve $S = -npc$ olması için gerek ve yeter şartın

$$M^n = H^{n_1}(\frac{nc}{n_1}) \times ... \times H^{n_{p+1}}(\frac{nc}{n_{p+1}})$$

olacağını ispatladı. Aynı zamanda $p = 1$ olduğunda $H_1^{n+1}(c)$ deki tam maksimal spacelike hiperyüzeylerin Bernstein tipi özellikleri üzerinde de durdu.

$n = 2$ olursa biliyoruz ki $H_2^4(c)$ anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike yüzeylerin iyi bilinen örnekleri $S = 0$ olan $H^2(c)$ total geodezik yüzeyi ve $S = \frac{-4c}{3}$ olan hiperbolik veronese yüzeyidir. Bu nedenle, $H_2^4(c)$ deki $S = sabit$ olan ve yukarıdaki verilenlerden farklı olan diğer tam maksimal spacelike yüzeylerin var olup olmadığını sormak doğal olacaktır. Eğer bu şekilde yüzeyler var ise, S nin bütün değerlerini bulabilir miyiz? Bu çalışmada bu problemlemin cevaplarını arayacağız.

Bu çalışmanın amacı, bir anti de-Sitter uzayında tam maksimal spacelike hiperyüzeylerin geometrisini incelemektir. Burada, önce bir anti de-Sitter uzayının yapı denklemleri ile lokal formüller ele alınmış olup, sonra da spacelike altmanifoldları ile ilgili temel özellikler incelenmiştir. Buna bağlı olarak anti de-Sitter uzayında ortalama scalar eğriliğine sahip tam maksimal spacelike yüzeylerin ikinci temel formun normunun karesi S olan ve S' nin aldığı değerlere göre tam maksimal spacelike yüzeyin değiştiği, ve bu tam maksimal spacelike yüzeyin değişiminin nasıl meydana geldiği teoremler ile açıklanmıştır.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için

i) $g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$

ii) $g(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = ag(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + bg(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}),$

$g(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}) = ag(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + bg(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2: V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna $pozitif\ definit$,

ii) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna $negatif\ definit$,

iii) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna $pozitif$ *semi-* $definit$,

iv) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna $negatif$ *semi-* $definit$,

v) $\forall \overrightarrow{w} \in V$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ iken $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ olmak zorunda ise g simetrik bilineer formuna *non-dejenere*, aksi halde $dejeneredir$ denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3: V bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g\mid_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun *indeksi* denir ve p ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.4: Bir g simetrik bilineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart g nin herhangi bir baza göre ters matrisinin olmasıdır(O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5: Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpma* denir.

V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine *skalar çarpımlı vektör uzayı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6: $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ *ve* $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ iken $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ise $\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{w}$ vektörleri diktir denir ve $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ şekilinde gösterilir. V reel vektör uzayının bir alt uzayı W olmak üzere, $W^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V : \overrightarrow{v} \perp W\}$ olsun. $W^{\perp}$ alt uzayına V nin *dik alt uzayı* denir. $W^{\perp}$ alt uzayı, W nın ortogonal komplemanı olamaz. Çünkü $W + W^{\perp}$ genellikle V nin tamamı değildir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.7: W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman,

$i)$ $boyW + boyW^{\perp} = boyV$

$ii)$ $(W^{\perp})^{\perp} = W$

özellikleri vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.8: V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım g ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer g, W üzerinde non-dejenere ise W ya *non-dejenere alt uzay*, non-dejenere değil ise *dejenere altuzaydır* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.9: V bir skalar çarpım uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. W nın non-dejenere alt uzay olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.10: Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpım g olsun. Bir $\overrightarrow{v} \in V$ vektörünün normu

$$\| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{| \, g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \, |}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre *birim vektör* ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de *ortonormal sistem* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.11: Bir $V \neq \{\overrightarrow{0}\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.12: V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall \ \overrightarrow{v} \in V$ vektörü

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\overrightarrow{v}, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.13: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi p olmak üzere, $p = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına *Lorentz Uzayı* denir(O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14: V bir Lorentz Uzayı olsun. $\overrightarrow{v} \in V$ olmak üzere,

i) $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$ veya $\overrightarrow{v} = 0$ ise $\overrightarrow{v}$ vektörüne *spacelike*,

ii) $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0$ ise $\overrightarrow{v}$ vektörüne *timelike*,

iii) $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ ise $\overrightarrow{v}$ vektörüne $lightlike(null)$ denir (O'Neill, 1983).

2.2 Yarı-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1: M bir C^∞ manifold olsun. P$\in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_P M$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g_p : \ T_P M \ \times \ T_P M \ &\to \mathbb{R} \\ (X_P, Y_P) \ &\to g_p(X_P, Y_P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere (0,2) tensörüne M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2: M bir C^∞ manifold olsun. M bir g metrik tensör ile donatılmışsa, M ye bir $yarı - Riemann\ manifoldu$ denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine $yarı - Riemann\ manifoldunun\ indeksi$ denir ve $\dot{I}ndM$ ile gösterilir.

Eğer, indeks p ise $0 \leq p \leq boyM$ dir. Özel olarak, $p = 0$ ise $\forall\ p \in M$ için $g\ |_p$, $T_P M$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemann manifoldu olur. $p = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir $Lorentz\ Manifoldu$ denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4: $\mathbb{R}^n$ Öklid n- uzay verilsin. $0 \leq p \leq n$ olmak üzere p tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$g(X_P, Y_P) = -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay *yarı-Öklid n-uzay* olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_p^n$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5: $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}_p^n$ üzerinde doğal sistemi olsun.
V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}_p^n$ üzerinde vektör alanı iseler,

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir.
Burada, $\{\partial_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}_p^n)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6 : Bir C^∞, M manifoldu üzerindeki ∇ koneksiyonu

i) $\nabla_V W$, V ye göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

ii)$\nabla_V W$, W ya göre $\mathbb{R}$ lineerdir.

iii)$\nabla_V (fW) = V(f)W + f\nabla_v W$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

olacak şekilde

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

fonksiyonudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7: Bir $\mathbb{M}$ yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde bir tek ∇ koneksiyonu vardır. ∇ ye M nin *Levi-*Ci*vita Koneksiyonu* denir ve Levi-Civita koneksiyonu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

Kozsul formulü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8: M bir yarı-Riemann manifold ve $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olsun. f fonksiyonunun Δf *Laplasyanı* f fonksiyonunun gradientinin divergensidir ve

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

olmak üzere doğal koordinat fonksiyonlarına göre;

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre M nin vektör alanları $e_1, e_2, ..., e_n$ olmak üzere,

$$\Delta f = \sum_i \varepsilon_i (e_i e_i(f) - \nabla_{e_i} e_i(f))$$

yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.9: Levi-Civita koneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifold M olsun. $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{array}{llll} R: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \to \chi(M) \\ & (X,Y,Z) & R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{array}$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde (1,3) tensördür. Bu tensöre M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.10: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(Y,X)Z, W)$

ii) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$

iii) $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.11: M bir semi-Riemann manifold ve $P \in M$ noktasındaki X_P, Y_P tanjant vektörlerinin gerdiği T_PM tanjant uzayının 2-boyutlu bir non-dejenere altuzayı $\prod$ olsun.

$$K(\prod) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\prod)$ reel sayısına, $\prod$ nin *kesit eğriliği* denir. M manifoldu sabit kesit eğriliğine sahipse M' ye *sabit eğriliklidir* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.12: Eğer M manifoldu sabit bir c eğriliğine sahipse M nin eğrilik tensörü $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\begin{array}{lll} Ric: & T_PM \ \times \ T_PM & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \rightarrow Ric(X,Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{array}$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne *Ricci eğrilik tensörü* ve $Ric(X,Y)$ değerine de *Ricci eğriliği* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.14: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} R_{ijk}^{k} \quad \text{veya} \quad \rho = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

değerine M nin *skalar eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.15: $F : E^n \to E^m$ bir dönüşüm ve $\overrightarrow{v} \in T_{E^n}(P)$ olsun. E^m nin $t \to F(\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{v})$ eğrisinin $t = 0$ anındaki hız vektörü $(F_*)_p(\overrightarrow{v}_p) \in T_{E^m}(F(P))$ ise

$$(F_*)_p : T_{E^n}(P) \to T_{E^m}(F(P))$$

fonksiyonuna F nin P noktasındaki *Türev dönüşümü* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.16: $\widetilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun C^∞ altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ deki metrik g olsun.

$$\begin{aligned} \phi : \quad & M \to \widetilde{M} \\ & P \to \phi(P) = P \end{aligned}$$

inclusion(daldırma) dönüşümü için $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$\phi_* \mid_p : T_P M \to T_P \widetilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$\phi^* \mid_p : T_P \widetilde{M}^* \to T_P M^*$$

olmak üzere, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\phi^* \mid_p (g_p)(X_p, Y_p) = g(\phi_*(X_p), \phi_*(Y_p))$$

eşitliği ile tanımlı $\phi^* \mid_p (g_p)$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nin bir *yarı-Riemann altmanifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.17:M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $T_P M^\perp$ uzayının boyutuna M nin *dik tümleyeninin boyutu* (*co dim ension*), $T_P M^\perp$ in indeksine de M nin *dik tümleyeninin indeksi* (*co-indeksi*) denir (O'Neill, 1983).

$T_P \widetilde{M} = T_P M \oplus T_P M^\perp$ olduğundan $X_p \in T_P \widetilde{M}$ için tanjant ve normal bileşenleri yardımıyla

$$X_p = \tan X_p + nor X_p$$

yazılışı tek türlüdür. Burada, $\tan X_p \in T_P M$, $nor X_p \in T_P M^{\perp}$ dir. Ortogonal izdüşümlerin sonucu olarak,

$$\tan : T_P \widetilde{M} \rightarrow T_P M$$

$$nor : T_P \widetilde{M} \rightarrow T_P M^{\perp}$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$-lineerdir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.18: M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. O zaman

$$ind\widetilde{M} = indM + coindM$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.19: $\forall\ X,\ Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} h:\ & \chi(M)\ \times\ \chi(M) \rightarrow \chi(M)^{\perp} \\ & (X,Y) \rightarrow h(X,Y) = nor\widetilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı h dönüşümü 2 - lineerdir ve simetriktir. h fonksiyonuna M nin *şekil tensörü* veya *ikinci temel form tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.20: M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $\widetilde{M}$ üzerindeki Leci-Civita koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olsun.

$$\begin{aligned} \nabla:\ & \chi(M)\ \times\ \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ & (X,Y) \rightarrow \nabla_X Y = \tan \widetilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

indirgenmiş fonksiyonuna M yarı-Riemann altmanifoldu üzerine *indirgenmiş koneksiyon* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.21:M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. ∇ ve $\widetilde{\nabla}$, sırasıyla M ve $\widetilde{M}$ üzerindeki Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere

$\forall\ X,\ Y \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

eşitliğine M nin *Gauss denklemi* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.22: M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. M, $\widetilde{M}$ nın Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla, R ve $\widetilde{R}$, şekil tensörleri de h olmak üzere $\forall\ V,\ W,\ X,\ Y \in \chi(M)$ için

$$< R_{VW}X, Y >=< \widetilde{R}_{VW}X, Y > - < h(V,X), h(W,Y) > + < h(V,Y), h(W,X) >$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.23: M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $p \in M$ ve p noktasında M nin bazı $e_1, e_2, ..., e_n$ olmak üzere, M nin $\mathcal{H}$ ortalama eğrilik vektör alanı

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h(e_i, e_i)$$

olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.24: Sabit eğrilikli**,** tam, bağlantılı yarı-Riemann manifolda *indefinit uzay formu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.25: $\widetilde{M}$, n-boyutlu yarı-Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ nin dik tümleyeninin boyutu (codimension) 1 olan altmanifolduna $\widetilde{M}$ nin bir *yarı-Riemann hiperyüzeyi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.26: $\widetilde{M}$ nin bir M yarı-Riemann hiperyüzeyi, koboyutu 1 olan yarı-Riemann altmanifoldudur.

M yarı-Riemann hiperyüzeyinin ε işareti;

$$\begin{cases} +1, coind M = 0 \\ -1, coind M = 1 \end{cases}$$

biçimindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.27:$M \subset \widetilde{M}$, M yarı-Riemann hiperyüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı U olsun. $\forall\ V, W \in \chi(M)$ için,

$$< S(V), W >=< h(V, W), U >$$

olacak şekilde, S, $(1,1)$ tensör alanına M nin *şekil operatörü* denir. Her bir $p \in M$ noktasında $S : T_P M \to T_P M$ bir lineer operatör belirtir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.28: $M \subset \widetilde{M}$, M yarı-Riemann hiperyüzeyinin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa : \quad & M \to \mathbb{R} \\ & P \to \kappa(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin *Gauss eğrilik fonksiyonu*, $\kappa(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 2.2.29: $\widetilde{M}$ nin M yarı-Riemann altmanifoldu, şekil tensörü $h = 0$ olduğunda total geodeziktir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.30: M ve N birer C^{∞} yarı-Riemann manifoldu olsun. f, M den N ye tanımlanan bir C^{∞} fonksiyon olmak üzere, (f_*) jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M nin her bir P noktası için bire-bir ise f foksiyonuna bir *immersiyon* denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.31: M ve N birer C^{∞} yarı-Riemann manifoldu olsun. f, M den N ye tanımlanan C^{∞} fonksiyon bir immersiyon olmak üzere $\forall\ X,\ Y \in T_PM$ için,

$$g(f_*(X), f_*(Y)) = g(X, Y)$$

ise f ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir. Burada g, T_PM den indirgenmiş metriktir (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.2.32: M, C^{∞} yarı-Riemann manifoldu olsun. M nin bir $p \in M$ noktasındaki kotanjant uzayı $T_P^*(M)$ olsun. Buna göre, bir

$$w : M \to \bigcup_{p\in M} T_P^*(M)$$

fonksiyonu için

$$\pi o w : M \to M$$

özdeşlik fonksiyonu olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{p\in M} T_P^*(M) \to M$$

fonksiyonu mevcut ise w ya M üstünde bir 1-*form* denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Lemma 2.2.33(Cartan Lemması): M, n-boyutlu Riemann manifoldu, $r \leq n$ ve M de $\forall\ p \in M$ için lineer bağımsız 1-formlar $w_1, w_2, ..., w_r$ olsun. M de

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge w_i = 0$$

olacak şekilde $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ 1-formları var ise, M üzerinde $h_{ij} = h_{ji}$ özelliğini sağlayan C^{∞} h_{ij} fonksiyonları mevcuttur, öyle ki $1 \leq i \leq r$ olmak üzere,

$$\theta_i = \sum_{i=1}^{r} h_{ij} w_j$$

yazılır (Willmore, 1993).

Tanım 2.2.34: M yarı-Riemann manifoldunun bir U komşuluğunda $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ koordinat sistemi alınsın. Bu koordinat sistemine karşılık gelen dual baz $\partial_1,\ \partial_2,\ ...,\ \partial_n$ olmak üzere;

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,\ \ (1 \leq i, j \leq n)$$

olacak şekilde U' da tanımlı Γ_{ij}^k reel değerli fonksiyonlarına $Christoffel\ sembolleri$ denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.35: M manifoldunun koneksiyonu ∇ ve bir $U \subset M$ açık altcümlesi üzerinde bir koordinat komşuluğu (U, ϕ) olsun. $\chi(U)$ üzerinde C^∞ vektör alanlarının ortonormal bazı $\{\partial_1,\ \partial_2,\ ...,\ \partial_n\}$ ve bu bazın dual bazı da $\{w^1, w^2, ..., w^n\}$ olmak üzere, $\forall\ X \in \chi(U)$ için

$$\nabla_X \partial_j = w_j^k(X)\partial_k$$

$$w^p(\nabla_X \partial_j) = w_j^p(X)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} w_j^p :\ & \chi(U) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ & X \rightarrow w_j^p(X) = w^p(\nabla_X \partial_j) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan w_j^p 1-formlarına, U üzerinde $\{\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n\}$ baz vektör alanlarına göre ∇ $koneksiyonunun\ 1-formları$ denir.

Özel olarak $X = \partial_k$ alınırsa

$$\begin{aligned} w_j^p(\partial_k) &= w^p(\nabla_{\partial_k}\partial_j) \\ &= w^p(\lceil_{jk}^j \partial_i) \\ &= \lceil_{jk}^j w^p(\partial_i) \quad , w^p(\partial_i) = \delta_i^p \\ &= \lceil_{jk}^p w^p(\partial_k) \quad , 1 \leq j, p \leq n \\ w_j^p &= \lceil_{jk}^i w^k \end{aligned}$$

olur (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.2.36: M yarı-Riemann manifold ve M nin bir A bölgesinde tanımlı C^∞ fonksiyon f olsun.

$$df(X) = X[f] = g(\nabla f, X)$$

biçiminde tanımlanan df 1-formuna f nin A' daki *dıs türevi* denir.

A üzerinde w bir C^∞ 1-form olmak üzere, w nin dw ile gösterilen dış türevi A üzerindeki 2-form olarak

$$dw(X,Y) = \frac{1}{2}(X[w(Y)] - Y[w(X)] - w[X,Y])$$

biçiminde tanımlanır ve bu eşitliğe *Ricci denklemi* denir (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.2.37: $n \geq 2$ ve $0 \leq p \leq n$ olmak üzere,

i) $S_p^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_p^{n+1} : g(X,X) = r^2\}$ hiperquadriğine, $\mathbb{R}_p^{n+1}$ de $r > 0$ yarıçaplı, n-boyutlu ve p indeksli *pseudo küre* denir.

ii) $H_p^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+1} : g(X,X) = -r^2\}$ hiperquadriğine, $\mathbb{R}_p^{n+1}$ de $r > 0$ yarıçaplı, n-boyutlu ve p indeksli $pseudo - hiperbolik\ uzay$ denir (O'Neill,1983).

Tanım 2.2.38: $n \geq 2$ ve $0 \leq p \leq n$ olsun.

i) $S_p^n(r)$ *pseudo küre*, $c = 1/r^2$ sabit pozitif eğrilikli, tam Riemann manifoldudur.

ii) $H_p^n(r)$ $pseudo - hiperbolik\ uzay$, $c = -1/r^2$ sabit negatif eğrilikli, tam Riemann manifoldudur (O'Neill,1983).

Tanım 2.2.39: $\mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}$ den indirgenen, indefinite Riemann metriğiyle verilen $H_p^{n+p}(c)$ hiperbolik uzayına, p indeksli, $c(c > 0)$ sabit eğrilikli bir $anti\ de -$ Si$tter\ uzayı$ denir.

Tanım 2.2.40: İkinci temel form h' nin kovaryant türevi $\overset{=}{D}$,

$$(\overset{=}{D}_X h)(Y,Z) = \overset{=}{D}{}^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\overset{=}{D}_X Y, Z) - h(Y, \overset{=}{D}_X Z)$$

şeklinde tanımlanır. h nin kovaryant türevi $\overset{=}{D}$ ya M nin üçüncü temel formu adı verilir. Eğer $\overset{=}{D} = 0$ ise M ye paralel ikinci temel form veya $1 - paralel$ dir denir. Buradaki $\overset{=}{D}$, M nin $T_M^{\perp}$ normal demetinde tanımlanan normal koneksiyon olup buna $Van\ der\ Waerden\ Bortolotti\ koneksiyonu$ denir (Hacısalihoğlu, 2003).

Teorem 2.2.41(Genelleştirilmiş Maksimum Prensibi): M, Ricci eğriliği ile alltan sınırlı olan tam Riemann manifold ve F, M üzerinde üstten sınırlı C^2-fonksiyon olsun. Böylece M de $\{p^m\}$ noktalar dizisi bulunabilir öyle ki,

$$\lim F(p^m) = \sup F, \lim \parallel \operatorname{grad} F(p^m) \parallel = 0 \text{ ve } \lim\sup \Delta F(p^m) \leq 0$$

dır (Omori, 1967;Yau, 1975).

2.3 Maksimal Spacelike Yüzeyler

Tanım 2.3.1: p indeksli, $-c(c > 0)$ sabit eğrilikli indefinite uzay formu $H_p^n(r)$, bir anti de-Sitter uzayı olsun. $H_p^n(r)$ ambiant uzayından M üzerinde indirgenen metrik pozitif ise, $H_p^n(r)$ nin n-boyutlu bir M altmanifolduna $spacelike\ altmanifold$ denir. $e_1, e_2, ..., e_n$ M ye teğet olacak şekilde $H_p^n(r)$ de indefinite Riemann metriğine uyarlanan

$$e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+p}$$

ortonormal çatının bir lokal alanını seçelim. M üzerinde bunun duali olan bir dual çatı alanı da $w_1, w_2, ..., w_n$ olsun. Herhangi $\alpha = n+1, ..., n+p$ için $h_{ij}^{\alpha} = h_{ji}^{\alpha}$ olmak üzere, M nin ikinci temel formu

$$h = \sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha} w_i w_j e_{\alpha}$$

ile verilir. M nin $\overrightarrow{h}$ ortalama eğrilik vektörü

$$\overrightarrow{h} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha}(\sum_{i} h_{ii}^{\alpha})e_{\alpha}$$

biçiminde tanımlanır ve

$$H = \| \overrightarrow{h} \| = \| \frac{1}{n}\sum_{\alpha}(\sum_{i} h_{ii}^{\alpha})e_{\alpha} \|$$

sayısına da M' nin ortalama eğriliği denir. Eğer her α için $\sum_{i} h_{ii}^{\alpha} = 0$ ise M' ye *maksimal* denir.

Tanım 2.3.2: (x, y, z) ve $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ sırasıyla $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_3^5$ ün doğal koordinat sistemleri olmak üzere $H^3(\frac{c}{3})$ *hiperbolik Veronese yüzeyi*, $H_2^4(c)$ de

$$u_1 = \frac{yz}{\sqrt{3c}} \qquad u_2 = \frac{xz}{\sqrt{3c}} \qquad u_3 = \frac{xy}{\sqrt{3c}}$$
$$u_4 = \frac{(x^2-y^2)}{2\sqrt{3c}} \qquad \text{ve} \qquad u_5 = \frac{(x^2+y^2+z^2)}{6\sqrt{c}}$$

biçiminde tanımlanan bir maksimal spacelike altmanifolddur (Cheng, 1994).

Teorem 2.3.3: M spacelike hiperyüzeyin ortalama eğriliği sabit ve Lorentz uzayın kapalı bir altkümesi ise M üzerindeki indirgenmiş metrik tam Riemann metriğidir ve M nin ikinci temel formun normu $n \| \overrightarrow{h} \|$ tarafından sınırlıdır.

Tanım 2.3.4: Lorentz uzayın kapalı alt kümesi olan sadece maksimal spacelike hiperyüzeyi lineer hiper uzaydır (Cheng ve Yau, 1976).

Teorem 2.3.5: M, $H_p^{2+p}(c)$ anti de-Sitter uzayında tam maksimal spacelike yüzey olsun. O halde, $S \leq 2c$ ve $S = 2c$ olması için gerek ve yeter şart $M = H^1(c/2) \times H^1(c/2)$ ve $p = 1$ olmasıdır (Cheng, 1994).

Teorem 2.3.6: Bir $H_p^{2+p}(c)$ anti de-Sitter uzayında tam maksimal spacelike yüzeyin Gauss eğriliği pozitif değildir(Cheng, 1994).

BÖLÜM 3

ANTİ DE-SİTTER UZAYINDA SPACELİKE HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde bir anti-de Sitter uzayında indeksi 1 olan spacelike hiperyüzeyler için yapı denklemleri elde edilecek ayrıca bazı lokal formüller verilecektir.

3.1 Bir Anti De-Sitter Uzayında Yapı Denklemleri ve Lokal Formüller

Çalışmanın tamamında tüm manifoldlar C^∞ ve bağlantılı kabul edilecektir. Şimdi M nin yapı denklemlerini bulalım.

$\widetilde{M}$ 1-indeksli, $(n+1)$-boyutlu anti de-Sitter uzayı ve M de $\widetilde{M}$ nin spacelike yüzeyi olsun. $\widetilde{M}$ de $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bir ortonormal baz ve bunun duali de $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ olmak üzere, $\widetilde{M}$ deki yarı-Riemann metriği

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(w_i)^2 - (w_{n+1})^2 = \sum_A \varepsilon_A (w_A)^2$$

dir. Burada $A, B, C, ... \epsilon \{1, 2, ..., n+1\}$ ve $i,\ j,\ k\ \epsilon\ \{1, 2, ..., n\}$ indis sıralaması göz önüne alınırsa $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_{n+1} = -1$ dir. Bir formun dış türev tanımından,

$$\begin{aligned}
dw_A(e_C, e_D) &= \tfrac{1}{2}\{e_C[w_A(e_D)] - e_D[w_A(e_C)] - w_A[e_C, e_D]\} \\
&= \tfrac{1}{2}\{e_C[\varepsilon_A \delta_{AD}] - e_D[\varepsilon_A \delta_{AC}] - w_A(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_D - \widetilde{\nabla}_{e_D} e_C)\} \\
&= -\tfrac{1}{2} w_A\{\sum_E \lceil_{CD}^{E} e_E - \sum_E \lceil_{DC}^{E} e_E\} \\
&= -\tfrac{1}{2}\{\sum_E \lceil_{CD}^{E} w_A(e_E) - \sum_E \lceil_{DC}^{E} w_A(e_E)\} \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_E\{\lceil_{CD}^{E} \varepsilon_A \delta_{AE} - \lceil_{DC}^{E} \varepsilon_A \delta_{AE}\}
\end{aligned}$$

ise,

$$dw_A(e_C, e_D) = -\frac{1}{2}\sum_A \varepsilon_A\{\lceil_{CD}^{A} - \lceil_{DC}^{A}\} \tag{3.1}$$

dir. Koneksiyon 1-formları tanımından

$$w_{AB}(e_C) = w_A(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_B) = \lceil_{CB}^{E} w_A(e_E)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $w_A(e_E) = \varepsilon_A \delta_{AE}$ olduğundan

$$w_{AB}(e_C) = \ \lceil^A_{CB} = \lceil^A_{CB} w_C(e_C)$$

$$w_{AB} = \lceil^A_{CB} w_C$$

dir.

Buna göre,

$$\begin{aligned}
\sum_B (w_{AB} \wedge w_B)(e_C, e_D) &= \frac{1}{2}\sum_B \{w_{AB}(e_C) w_B(e_D) - w_{AB}(e_D) w_B(e_C)\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_B \{w_A(\tilde{\nabla}_{e_C} e_B)\varepsilon_B \delta_{BD} - w_A(\tilde{\nabla}_{e_D} e_B)\varepsilon_B \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_B \{\sum_E \lceil^E_{CB} w_A(e_E)\varepsilon_B \delta_{BD} - \sum_E \lceil^E_{DB} w_A(e_E)\varepsilon_B \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_B \varepsilon_B \{\sum_E \lceil^E_{CB} \varepsilon_A \delta_{AE} \delta_{BD} - \sum_E \lceil^E_{DB} \varepsilon_A \delta_{AE} \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_B \varepsilon_B \{\sum_A \lceil^A_{CB} \varepsilon_A \delta_{BD} - \sum_A \lceil^A_{DB} \varepsilon_A \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{A,B} \varepsilon_A \varepsilon_B \{\lceil^A_{CB} \delta_{BD} - \lceil^A_{DB} \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{A,B} \varepsilon_A \varepsilon_B \{\lceil^A_{CB} - \lceil^A_{DB}\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olur. Böylece (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden birinci yapı denklemleri

$$dw_A = -\sum_B \varepsilon_B w_{AB} \wedge w_B \tag{3.3}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(w_{AB} + w_{BA})(e_C) &= w_{AB}(e_C) + w_{BA}(e_C) \\
&= w_A(\tilde{\nabla}_{e_C} e_B) + w_B(\tilde{\nabla}_{e_C} e_A) \\
&= \lceil^E_{CB} w_A(e_E) + \lceil^E_{CA} w_B(e_E) \\
&= \lceil^E_{CB} \varepsilon_A \delta_{AE} + \lceil^E_{CA} \varepsilon_B \delta_{BE} \\
&= \lceil^A_{CB} \varepsilon_A + \lceil^B_{CA} \varepsilon_B
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\tilde{\nabla}_{e_C} e_A = \lceil^B_{CA} \varepsilon_B$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_C} e_A, e_B) &= \lceil^B_{CA}\varepsilon_B \\ -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_C} e_B, e_A) &= -\tilde{g}(\lceil^A_{CB} e_A, e_A) \\ \lceil^A_{CB}\varepsilon_A &= \lceil^B_{CA}\varepsilon_B\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}(w_{AB}+w_{BA})(e_C) &= \lceil^A_{CB}\varepsilon_A + \lceil^B_{CA}\varepsilon_B \\ &= \lceil^A_{CB}\varepsilon_A - \lceil^A_{CB}\varepsilon_A \\ &= 0\end{aligned}$$

$$w_{AB}+w_{BA}=0 \tag{3.4}$$

elde edilir. $\tilde{R}$, $\tilde{M}$ nin eğrilik tensör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}\sum_{C,D}\tilde{R}_{ABCD}w_C\wedge w_D &= \tilde{R}_{ABCD} \\ &= \tilde{R}(e_A,e_B,e_{C,}e_D) \\ &= \tilde{g}(\tilde{R}(e_{C,}e_D)e_B,e_A) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_C}\tilde{\nabla}_{e_D}e_B - \tilde{\nabla}_{e_D}\tilde{\nabla}_{e_C}e_B - \tilde{\nabla}_{[e_{C,}e_D]}e_B, e_A) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_C}(\sum_E \lceil^E_{DB}\varepsilon_E) - \tilde{\nabla}_{e_D}(\sum_E \lceil^E_{CB}\varepsilon_E), e_A) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[e_{C,}e_D]}e_B, e_A) \\ &= \varepsilon_A\{\frac{\partial\lceil^A_{DB}}{\partial e_C} - \frac{\partial\lceil^A_{CB}}{\partial e_D} + \sum_E(\lceil^E_{DB}\lceil^A_{CE} - \lceil^E_{CB}\lceil^A_{DE})\} - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[e_{C,}e_D]}e_B, e_A)\end{aligned} \tag{3.5}$$

dır. Diğer taraftan

$$w_{AB}(e_N) = w_A(\sum_E \lceil^E_{NB}\varepsilon_E) = \sum_E \lceil^E_{NB} w_A(\varepsilon_E)$$

olmak üzere,

$$dw_{AB} + \sum_C \varepsilon_C w_{AC}\wedge w_{CB}$$

toplamı hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
& (dw_{AB}+\sum_{C}\varepsilon_C(w_{AC}\wedge w_{CB}))(e_M,e_N) \\
= \; & \frac{1}{2}\{e_M[w_{AB}(e_N)]-e_N[w_{AB}(e_M)]-w_{AB}[e_M,e_N]\} \\
& +\frac{1}{2}\sum_{C}\varepsilon_C\{w_{AC}(e_M)w_{CB}(e_N)-w_{AC}(e_N)w_{CB}(e_M) \\
= \; & \frac{1}{2}\{e_M[\sum_{E}\lceil^{E}_{NB}w_A(e_E)]-e_N[\sum_{E}\lceil^{E}_{MB}w_A(e_E)] \\
& -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_M,e_N]}e_B,e_A)+\sum_{C}\varepsilon_C(\sum_{E}\lceil^{E}_{MC}w_A(e_E)\sum_{E}\lceil^{E}_{NB}w_C(e_E)] \\
& -\sum_{E}\lceil^{E}_{NC}w_A(e_E)\sum_{E}\lceil^{E}_{MB}w_C(e_E))\} \\
= \; & \frac{1}{2}\{e_M[\sum_{E}\lceil^{E}_{NB}w_A(e_E)]-e_N[\sum_{E}\lceil^{E}_{MB}w_A(e_E)] \qquad (3.6) \\
& -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_M,e_N]}e_B,e_A)+\sum_{C}\varepsilon_C(\sum_{E}\lceil^{E}_{MC}w_A(e_E)\sum_{E}\lceil^{E}_{NB}w_C(e_E)] \\
& -\sum_{E}\lceil^{E}_{NC}w_A(e_E)\sum_{E}\lceil^{E}_{MB}w_C(e_E))\} \\
= \; & \frac{1}{2}\{e_M(\lceil^{A}_{NB}\varepsilon_A)-e_N(\lceil^{A}_{MB}\varepsilon_A)-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_M,e_N]}e_B,e_A) \\
& +\sum_{C}\varepsilon_C(\lceil^{A}_{MC}\varepsilon_A\lceil^{C}_{NB}\varepsilon_C-\lceil^{A}_{NC}\varepsilon_A\lceil^{C}_{MB}\varepsilon_C)\} \\
= \; & \frac{1}{2}\{\varepsilon_A(\frac{\partial\lceil^{A}_{DB}}{\partial e_C}-\frac{\partial\lceil^{A}_{CB}}{\partial e_D}+\sum_{E}(\lceil^{E}_{DB}\lceil^{A}_{CE}-\lceil^{E}_{CB}\lceil^{A}_{DE})) \\
& -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_C,eD]}e_B,e_A)\}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
dw_{AB}+\sum_{C}\varepsilon_C w_{AC}\wedge w_{CB} &= \tfrac{1}{2}\widetilde{R}_{ABCD} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{C,D}\widetilde{R}_{ABCD}w_C\wedge w_D
\end{aligned}
$$

olur. Böylece ikinci yapı denklemi

$$
dw_{AB}=-\sum_{C}\varepsilon_C w_{AC}\wedge w_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{C,D}\widetilde{R}_{ABCD}w_C\wedge w_D \qquad (3.7)
$$

biçiminde elde edilir. Şimdi de M spacelike hiperyüzeyi için birinci ve ikinci yapı denklemleri ile Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri elde edilecektir. Bunun için,

$$w_{n+1} = 0 \tag{3.8}$$

ve M nin

$$ds^2 = \sum (w_i)^2$$

Riemann metriği göz önüne alınacaktır. M spacelike hiperyüzeyinin ikinci temel formu

$$h = \sum h_{ij}^{\alpha} w_i \otimes w_j$$

olmak üzere

$$0 = dw_{n+1} = -\sum w_{n+1,i} \wedge w_i$$

ve Cartan lemmasından

$$w_{n+1,i} = \sum h_{ij}^{\alpha} w_i, \quad h_{ij}^{\alpha} = h_{ji}^{\alpha} \tag{3.9}$$

yazılabilir. O halde $\widetilde{M}$ nin birinci ve ikinci yapı denklemlerinden M nin birinci ve ikinci yapı denklemleri sırasıyla

$$dw_i = -\sum w_{ij} \wedge w_j, \quad w_i + w_j = 0 \tag{3.10}$$

$$dw_{ij} = -\sum_{C} w_{ik} \wedge w_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{C,D} \widetilde{R}_{ijkl} w_k \wedge w_l \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de M nin Gauss denklemlerini bulalım. M, $\widetilde{M}$ nin bir yarı-Riemann manifoldu, Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla R ve $\widetilde{R}$, şekil tensörü de h olmak üzere;

$\forall\ V, W, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
<\widetilde{R}_{VW}X, Y> &= <\widetilde{\nabla}_V\ \ \widetilde{\nabla}_W X, Y> - <\widetilde{\nabla}_W\ \ \widetilde{\nabla}_V X, Y> - <\widetilde{\nabla}_{[V,W]}X, Y> \\
&= <\widetilde{\nabla}_V(\nabla_W X + h(W, X), Y> - <\widetilde{\nabla}_W(\nabla_V X + h(V, X), Y> \\
&\quad - <\nabla_{[V,W]}X + h([V, W]), Y)> \\
&= <\widetilde{\nabla}_V \nabla_W X, Y> + <\widetilde{\nabla}_V h(W, X), Y> \\
&\quad - <\widetilde{\nabla}_W \nabla_V X, Y> - <\widetilde{\nabla}_W h(V, X), Y> \\
&\quad - <\nabla_{[V,W]}X, Y> \\
&= <\nabla_V \nabla_W X, Y> + <h(V, \nabla_W X), Y> + <\widetilde{\nabla}_V h(W, X), Y> \\
&\quad - <\nabla_W \nabla_V X, Y> - <h(W, \nabla_V X), Y> - <\widetilde{\nabla}_W h(V, X), Y> \\
&\quad - <\nabla_{[V,W]}X, Y> \\
&= <\nabla_V \nabla_W X, Y> + V <h(W, X), Y> - <h(W, X), \widetilde{\nabla}_V Y> \\
&\quad - <\nabla_W \nabla_V X, Y> - W <h(V, X), Y> + <h(V, X), \widetilde{\nabla}_W Y> \\
&\quad - <\nabla_{[V,W]}X, Y> \\
&= <\nabla_V \nabla_W X, Y> - <\nabla_W \nabla_V X, Y> - <\nabla_{[V,W]}X, Y> \\
&\quad - <h(W, X), \nabla_V Y + h(V, Y)> + <h(V, X), \nabla_W Y + h(W, Y)> \\
&= <R_{VW}X, Y> - <h(W, X), \nabla_V Y> - <h(W, X), h(V, Y)> \\
&\quad + <h(V, X), \nabla_W Y> + <h(V, X), h(W, Y)>
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<\widetilde{R}_{VW}X, Y> &= <R_{VW}X, Y> - <h(W, X), h(V, Y)> + <h(V, X), h(W, Y)> \\
<R_{VW}X, Y> &= <\widetilde{R}_{VW}X, Y> + <h(W, X), h(V, Y)> - <h(V, X), h(W, Y)>
\end{aligned}$$

elde edilir. Riemann eğrilik tensör tanımından

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= <R_{kl}e_i, e_j> \\
&= <\widetilde{R}_{kl}e_i, e_j> - <h_{ki}, h_{lj}> + <h_{li}, h_{kj}> \\
&= c\{<e_k, e_i><e_l, e_j> - <e_k, e_j><e_l, e_i>\} - <h_{ki}, h_{lj}> + <h_{li}, h_{kj}>
\end{aligned}$$

yazılır. Burada,

$$<e_k, e_i> = \varepsilon_i \delta_{ik},\ <e_l, e_j> = \varepsilon_j \delta_{lj},\ <e_l, e_i> = \varepsilon_i \delta_{li},\ <e_k, e_j> = \varepsilon_j \delta_{jk}$$

ve

$$i,\ j = 1, 2, ..., n \quad \text{için} \ \ \varepsilon_i,\ \varepsilon_j = 1$$

olacağından,

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= c\varepsilon_i\varepsilon_j\{\delta_{ik}\delta_{lj}-\delta_{li}\delta_{jk}\}-\sum_\alpha h_{ki}^\alpha h_{lj}^\alpha+\sum_\alpha h_{li}^\alpha h_{kj}^\alpha \\ &= c\{\delta_{ik}\delta_{lj}-\delta_{li}\delta_{jk}\}-\sum_\alpha h_{ki}^\alpha h_{lj}^\alpha+\sum_\alpha h_{li}^\alpha h_{kj}^\alpha \\ &= c\{\delta_{ik}\delta_{lj}-\delta_{li}\delta_{jk}\}-\sum_\alpha (h_{ki}^\alpha h_{lj}^\alpha-h_{li}^\alpha h_{kj}^\alpha) \end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. Benzer olarak

$\alpha,\ \beta=n+1,n+2,...,n+p$ için $\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta=-1$ ve $\alpha\neq i,\ j;\beta\neq i,\ j$

içinde

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta ij} &= c\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\{\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}-\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}\}-\sum_k h_{\alpha i}^k h_{\beta j}^k+\sum_k h_{\alpha j}^k h_{\beta i}^k \\ &= -\sum_k (h_{\alpha i}^k h_{\beta j}^k-h_{\alpha j}^k h_{\beta i}^k) \\ &= -\sum_k (h_{jk}^\alpha h_{ik}^\beta-h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta) \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir.

M nin h ikinci temel formunun sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü kovaryant türevlerinin bileşenleri $h_{ijk}^\alpha,\ h_{ijkl}^\alpha,\ h_{ijklm}^\alpha$ olmak üzere

$$h_{ijk}^\alpha=h_{ikj}^\alpha=h_{jik}^\alpha \tag{3.14}$$

$$h_{ijkl}^\alpha-h_{ijlk}^\alpha=\sum_m h_{im}^\alpha R_{mjkl}+\sum_m h_{mj}^\alpha R_{mikl}-\sum_\beta h_{ij}^\beta R_{\alpha\beta kl} \tag{3.15}$$

$$h_{ijklm}^\alpha-h_{ijkml}^\alpha=\sum_r h_{rjk}^\alpha R_{rilm}+\sum_r h_{irk}^\alpha R_{rjlm}+\sum_\beta h_{ijr}^\beta R_{rklm}-\sum_\beta h_{ijk}^\beta R_{\alpha\beta lm} \tag{3.16}$$

ile verilir.

h_{ij}^α nin laplasyanı $\Delta h_{ij}^\alpha=\sum_k h_{ijkk}^\alpha$ olduğundan bu eşitliğe

$$-\sum_k h_{ikjk}^\alpha+\sum_k h_{ikjk}^\alpha-\sum_k h_{ikkj}^\alpha+\sum_k h_{ikkj}^\alpha-\sum_k h_{kkij}^\alpha+\sum_k h_{kkij}^\alpha=0$$

ifadesi eklenirse sonuç değişmeyeceğinden

$$\begin{aligned}\Delta h^\alpha_{ij} &= \sum_k h^\alpha_{ijkk} - \sum_k h^\alpha_{ikjk} + \sum_k h^\alpha_{ikjk} - \sum_k h^\alpha_{ikkj} + \sum_k h^\alpha_{ikkj} - \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_k h^\alpha_{kkij} \\ &= \sum_k (h^\alpha_{ijkk} - h^\alpha_{ikjk}) + \sum_k (h^\alpha_{ikjk} - h^\alpha_{ikkj}) + \sum_k (h^\alpha_{ikkj} - h^\alpha_{kkij}) + \sum_k h^\alpha_{kkij}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}$ ve $h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ikj}$ olduğundan $h^\alpha_{ijkk} = h^\alpha_{ikjk},\ h^\alpha_{ikkj} = h^\alpha_{kkij}$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Delta h^\alpha_{ij} &= \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_k (h^\alpha_{ikjk} - h^\alpha_{ikkj}) \\ &= \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_k (\sum_m h^\alpha_{im} R_{mljl} + \sum_m h^\alpha_{lm} R_{mijl} - \sum_\beta h^\beta_{li} R_{\alpha\beta jl}) \\ &= \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_{k,m} h^\alpha_{im} R_{mljl} + \sum_{k,m} h^\alpha_{lm} R_{mijl} - \sum_{k,\beta} h^\beta_{li} R_{\alpha\beta jl}\end{aligned} \tag{3.17}$$

dır. İkinci temel formun uzunluğunun karesi $S = \sum\limits_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij})^2$ olmak üzere, S' nin laplasyanı

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta S &= \tfrac{1}{2}\sum_k (e_k e_k(S) - \nabla_{e_k} e_k(S)) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_k [e_k e_k(\sum_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij})^2) - \nabla_{e_k} e_k(\sum_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij})^2)] \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_k [e_k(2\sum_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij}) e_k(h^\alpha_{ij}) - 2\sum_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij}) \nabla_{e_k} e_k(h^\alpha_{ij})] \\ &= \sum_k [e_k(\sum_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij}) e_k(h^\alpha_{ij}) - \sum_{i,j,\alpha} (h^\alpha_{ij}) \nabla_{e_k} e_k(h^\alpha_{ij})] \\ &= \sum_{i,j,k} [e_k(h^\alpha_{ij}) e_k(h^\alpha_{ij}) + h^\alpha_{ij} e_k e_k(h^\alpha_{ij}) - (h^\alpha_{ij}) \nabla_{e_k} e_k(h^\alpha_{ij})] \\ &= \sum_{i,j,k} e_k(h^\alpha_{ij}) e_k(h^\alpha_{ij}) + \sum_{i,j,k} h^\alpha_{ij} e_k e_k(h^\alpha_{ij}) - \sum_{i,j,k} (h^\alpha_{ij}) \nabla_{e_k} e_k(h^\alpha_{ij}) \\ &= \sum_{i,j,k} e_k(h^\alpha_{ij}) e_k(h^\alpha_{ij}) + \sum_{i,j,k} h^\alpha_{ij} [(e_k e_k(h^\alpha_{ij}) - \nabla_{e_k} e_k(h^\alpha_{ij})] \\ &= \sum_{i,j,k} e_k(h^\alpha_{ij}) e_k(h^\alpha_{ij}) + \sum_{i,j,k} h^\alpha_{ij} \Delta h^\alpha_{ij}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\nabla h^\alpha_{ij}(e_k) = \sum_k h^\alpha_{ijk} w(e_k) = e_k(h^\alpha_{ij}) = h^\alpha_{ijk}$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} (h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j} h^\alpha_{ij} \Delta h^\alpha_{ij} \tag{3.18}$$

bulunur.

Ayrıca M maksimal ise skalar eğrilik

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i,j} R_{ijij} \\ &= \sum_{i,j}[c\{\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}\} - \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - h^{\alpha}_{ji}h^{\alpha}_{ij})] \\ &= \sum_{i,j}[c(1-\delta^2_{ij}) - \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - (h^{\alpha}_{ij})^2)] \\ &= \sum_{i,j} c - c\sum_{i,j}\delta^2_{ij} - \sum_{i,j}\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - (h^{\alpha}_{ij})^2) \\ &= \sum_{i,j} c - c\sum_{i=j}\delta^2_{ii} - \sum_{i,j}\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - (h^{\alpha}_{ij})^2) \\ &= cn^2 - cn - \sum_{i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj} - (h^{\alpha}_{ij})^2) \\ &= cn(n-1) - \sum_{i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{ij})^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak verilir. Böylece skalar eğriliğin sabit olması için gerek ve yeter şartın $S = \sum_{i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{ij})^2$ nin sabit olması sonucuna ulaşılır.

3.2.Anti de-Sitter uzayında Tam Maksimal Spacelike Yüzeyler

$H^{n+p}_p(c)$ anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike altmanifoldlar, $\mathbb{R}^{n+p}_p(c)$ indefinite öklid uzayı ve $S^{n+p}_p(c)$ deki de-Sitter uzayındakilerden çok farklıdır. Ishihara,1988, $H^{n+p}_p(c)$ deki n-boyutlu tam maksimal spacelike manifold olan M^n için $S \leq -npc$ ve $S = -npc$ olması için gerek ve yeter koşulun

$$M^n = H^{n_1}(\frac{nc}{n_1}) \times ... \times H^{n_{p+1}}(\frac{nc}{n_{p+1}})$$

olduğunu ispatladı. $p = 1$ olduğunda da $H^{n+1}_1(c)$ deki tam maksimal spacelike manifoldların Bernstein tipi özellikleri ile de ilgilendi.

Özellikle $n = 2$ olursa $H^4_2(c)$ anti de-Sitter uzayındaki tam maksimal spacelike yüzeylerin iyi bilinen örnekleri için $S = 0$ olan $H^2(c)$ tam geodezik yüzeyi ve $S = \frac{-4c}{3}$ olan Veronese yüzeyi olduğu bilinir. Bu nedenle $H^4_2(c)$ deki sabit S' ye sahip ve yukarıda verilenlerden farklı olan diğer tam maksimal spacelike yüzeylerin var olup olmadığını eğer varsa da S nin bütün değerlerini inceleyeceğiz.

Teorem 3.2.1: M^2, $H_2^4(c)$ nın sabit skalar eğrilikli tam maksimal spacelike yüzeyi olsun. S, M^2 yüzeyinin ikinci temel formun normunun karesi olmak üzere,

(1) $S = 0 \Leftrightarrow M^2$, $H_2^4(c)$ geodezik yüzeyinin tamamıdır.

(2) $S = \frac{-4c}{3} \Leftrightarrow M^2$, hiperbolik Veronese yüzeyidir.

(3) $S = -2c \Leftrightarrow H_2^4(c)$ nin tamamen geodezik olan $H_1^3(c)$ yüzeyinin hiperbolik silindiridir.

İspat: Bu bölümde $n = p = 2$ olduğunu varsayalım. Önce ana teoremin ispatı için bazı lokal formüller hesaplayalım.

$S_3 = \sum\limits_{i,j}(h_{ij}^3)^2$ ve $S_4 = \sum\limits_{i,j}(h_{ij}^4)^2$ olsun. Bu fonksiyonlar M^2 üzerinde global fonksiyonlardır. M^2 de keyfi sabit bir p noktası için h_{ij}^α simetrik olduğundan uygun $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazlar seçilerek

$$h_{ij}^3 = \lambda_i \delta_{ij} \tag{3.20}$$

biçiminde yazılabilir. M maksimal olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_i h_{ii}^3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_{11}^3 + h_{22}^3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \end{aligned}$$

bulunur. Aynı düşünceyle

$$h_{11}^4 = -h_{22}^4 = \mu \tag{3.21}$$

ve

$$h_{12}^4 = \mu_1 \tag{3.22}$$

yazabiliriz. $S_{\alpha\beta} = \sum\limits_{i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta$ (2x2) 'lik simetrik bir matrisdir. Uygun $\{e_3, e_4\}$

ortonormal bazları için köşegenel matris olarak alınabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} h^3_{ij}h^4_{ij} &= h^3_{11}h^4_{11} + h^3_{12}h^4_{12} + h^3_{21}h^4_{21} + h^3_{22}h^4_{22} = 0 \\ \sum_{i,j} h^3_{ij}h^4_{ij} &= 2\lambda\mu = 0\end{aligned} \tag{3.23}$$

alınabilir.

Teorem 3.2.2: $\alpha = 3, 4$ için; $S = S_3 + S_4 = \sum\limits_{i,j,\alpha}(h^\alpha_{ij})^2$; $S_3 = \sum\limits_{i,j}(h^3_{ij})^2$; $S_4 = \sum\limits_{i,j}(h^4_{ij})^2$ olduğunda

$$\begin{aligned}\Delta h^\alpha_{ij} &= (S+2c)h^\alpha_{ij} - 2\sum_{l,t,\alpha\neq\beta} h^\alpha_{lt}h^\beta_{tj}h^\beta_{il} + \sum_{l,t,\alpha\neq\beta} h^\alpha_{tl}h^\beta_{tl}h^\beta_{il} \\ \tfrac{1}{2}\Delta S &= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + (S+2c)S + 2S_3S_4\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Delta S_3 = \sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2 + (S+2c)S_3 + 2S_3S_4$$

dir.

İspat: $\Delta h^\alpha_{ij} = \sum\limits_l h^\alpha_{ijll} = \sum\limits_l h^\alpha_{lijl}$ ifadesi (3.16) eşitliği ile

$$\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_l h^\alpha_{lilj} + \sum_{l,t} h^\alpha_{ti}R_{tljl} + \sum_{l,t} h^\alpha_{lt}R_{tijl} - \sum_{l,\beta} h^\beta_{li}R_{\alpha\beta jl} \tag{3.24}$$

biçiminde yazılabilir. (3.12) ve (3.13) eşitlikleri ile (3.24) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta h^\alpha_{ij} &= \sum_{l,t} h^\alpha_{ti}[c(\delta_{tj}\delta_{ll} - \delta_{tl}\delta_{lj}) - \sum_\beta(h^\beta_{tj}h^\beta_{ll} - h^\beta_{tl}h^\beta_{lj})] \\ &\quad + \sum_{l,t} h^\alpha_{tl}[c(\delta_{tj}\delta_{il} - \delta_{tl}\delta_{ij}) - \sum_\beta(h^\beta_{tj}h^\beta_{il} - h^\beta_{tl}h^\beta_{ij})] \\ &\quad + \sum_{l,t,\beta} h^\alpha_{tl}(h^\beta_{tj}h^\beta_{tl} - h^\beta_{tl}h^\beta_{tj})\end{aligned}$$

$$\Delta h^\alpha_{ij} = (2c+S)h^\alpha_{ij} - 2\sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^\alpha_{tl}h^\beta_{tj}h^\beta_{il} + \sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^\alpha_{tl}h^\beta_{tl}h^\beta_{ij} \tag{3.25}$$

olur. (3.18) ve (3.25) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta S &= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij} \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ij}[(2c+S)h^\alpha_{ij} - 2\sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^\alpha_{tl}h^\beta_{tj}h^\beta_{il} + \sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^\alpha_{tl}h^\beta_{tl}h^\beta_{ij}] \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + (2c+S)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ij})^2 - 2\sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{tl}h^\beta_{tj}h^\beta_{il} + \sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{tl}h^\beta_{tl}h^\beta_{ij}
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + (2c+S)S + 2S_3S_4 \tag{3.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta S_3 &= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^3_{ijk})^2 + \sum_{i,j,k,\alpha} h^3_{ij}\Delta h^3_{ij} \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^3_{ijk})^2 + \sum_{i,j} h^3_{ij}[(2c+S)h^3_{ij} - 2\sum_{l,t} h^3_{tl}h^4_{tj}h^4_{il} + \sum_{l,t} h^3_{tl}h^4_{tl}h^4_{ij}] \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha}(h^3_{ijk})^2 + (2c+S)\sum_{i,j}(h^3_{ij})^2 - 2\sum_{l,t} h^3_{ij}h^3_{tl}h^4_{tj}h^4_{il} + \sum_{l,t} h^3_{ij}h^3_{tl}h^4_{tl}h^4_{ij}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Delta S_3 = \sum_{i,j,k,\alpha}(h^3_{ijk})^2 + (2c+S)S_3 + S_3S_4 \tag{3.27}$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 3.2.3:

$$\frac{1}{2}\Delta\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 = \sum_{i,j,k,l,\alpha}(h^\alpha_{ijkl})^2 + (\frac{9}{2}S+7c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 + 3\mid\nabla S\mid^2 - 5\sum_\alpha S_\alpha\sum_{i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 \tag{3.28}$$

M^2 maksimal olduğudan herhangi bir α değeri için

$$h^\alpha_{11} + h^\alpha_{22} = 0$$

dır. Böylece

$$h^\alpha_{11l} = -h^\alpha_{22l}\ , \quad h^\alpha_{11lk} = -h^\alpha_{22lk} \tag{3.29}$$

dır.

İspat: (3.24), (3.25) ve Treibergs, 1982, çalışması kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}\Delta h^{\alpha}_{ijk} = \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ijkll}\\
= &\sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}[h^{\alpha}_{ijlkl} + \nabla_l(\sum_t h^{\alpha}_{tj}R_{tikl} + \sum_t h^{\alpha}_{ti}R_{tjkl} - \sum_\beta h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl}]\\
= &\sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}[h^{\alpha}_{ijllk} + \sum_t h^{\alpha}_{tjl}R_{tikl} + \sum_t h^{\alpha}_{til}R_{tjkl} + \sum_t h^{\alpha}_{ijt}R_{tlkl} - \sum_\beta h^{\beta}_{ijl}R_{\alpha\beta kl}]\\
&+ \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}[h^{\alpha}_{tjl}R_{tikl} + \sum_t h^{\alpha}_{til}R_{tjkl} - \sum_\beta h^{\beta}_{ijl}R_{\alpha\beta kl}]\\
&+ \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}[h^{\alpha}_{tj}\nabla_l R_{tikl} + \sum_t h^{\alpha}_{ti}\nabla_l R_{tjkl} - \sum_\beta h^{\beta}_{ij}\nabla_l R_{\alpha\beta kl}]\\
= &\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}\{\nabla_k[(S+2c)h^{\alpha}_{ij} - 2\sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tj}h^{\beta}_{il} + \sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ij}]\}\\
&+2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}R_{tikl} + 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{til}R_{tjkl} + \sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ijt}R_{tlkl}\\
&-2\sum_{i,j,k,l,\alpha\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{ijl}R_{\alpha\beta kl} + \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}[\sum_t h^{\alpha}_{tj}\nabla_l R_{tikl} + \sum_t h^{\alpha}_{ti}\nabla_l R_{tjkl}\\
&-\sum_\beta h^{\beta}_{ij}\nabla_l R_{\alpha\beta kl}]
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

elde edilir. Şimdi bu ifadedeki her bir terimin eşitini bulalım.

$$
\nabla_k S = \nabla_k(\sum_{i,j}(h^{\alpha}_{ij})^2) = 2.\sum_{i,j,k} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ijk} \tag{3.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}\{\nabla_k[(S+2c)h^{\alpha}_{ij} - 2\sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tj}h^{\beta}_{il} + \sum_{l,t,\beta\neq\alpha} h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ij}]\}\\
= &(S+2c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + \sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ijk}\nabla_k\ S - 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha\neq\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tlk}h^{\beta}_{tj}h^{\beta}_{il}\\
&-2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha\neq\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tjk}h^{\beta}_{il} - 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha\neq\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tj}h^{\beta}_{ilk}\\
&+\sum_{i,j,k,l,t,\alpha\neq\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tlk}h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ij} + \sum_{i,j,k,l,t,\alpha\neq\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tlk}h^{\beta}_{ij} + \sum_{i,j,k,l,t,\alpha\neq\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ijk}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (S+2c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\frac{1}{2}\mid \nabla_k\ S\mid^2\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,l,t}h^3_{ijk}h^3_{tlk}h^4_{tj}h^4_{il}+\sum_{i,j,k,l,t}h^3_{ijk}h^3_{tlk}h^4_{tl}h^4_{ij}\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,t}(h^3_{ijk}h^3_{t1}h^4_{tjk}h^4_{i1}+h^3_{ijk}h^3_{t2}h^4_{tjk}h^4_{i2})\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,t}(h^4_{ijk}h^4_{t1}h^3_{tjk}h^3_{i1}+h^4_{ijk}h^4_{t2}h^3_{tjk}h^3_{i2})\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,t}(h^3_{ijk}h^3_{t1}h^4_{tj}h^4_{i1k}+h^3_{ijk}h^3_{t2}h^4_{tj}h^4_{i2k})\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,t}(h^4_{ijk}h^4_{t1}h^3_{tj}h^3_{i1k}+h^4_{ijk}h^4_{t2}h^3_{tj}h^3_{i2k})\\
&\quad +\sum_{i,j,k,t}(h^3_{ijk}h^3_{t1}h^4_{t1k}h^4_{ij}+h^3_{ijk}h^3_{t2}h^4_{t2k}h^4_{ij}+h^4_{ijk}h^4_{t1}h^3_{t1k}h^3_{ij}+h^4_{ijk}h^4_{t2}h^3_{t2k}h^3_{ij})\\
&\quad +\frac{S_3}{2}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (S+2c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\frac{1}{2}\mid \nabla S\mid^2\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,l,t}h^3_{ijk}h^3_{tlk}h^4_{tj}h^4_{il}+\sum_{i,j,k,l,t}h^3_{ijk}h^3_{tlk}h^4_{tl}h^4_{ij} \qquad (3.32)\\
&\quad -4\sum_{i,j,k,t}h^4_{ijk}h^3_{tjk}h^4_{ti}h^3_{ii}-4\sum_{i,j,k,t}h^4_{ijk}h^3_{tik}h^4_{tj}h^3_{jj}\\
&\quad +\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk}h^3_{11}h^4_{11k}h^4_{ij}+h^3_{ijk}h^3_{21}h^4_{21k}h^4_{ij}+h^3_{ijk}h^3_{12}h^4_{12k}h^4_{ij}+h^3_{ijk}h^3_{22}h^4_{22k}h^4_{ij}\\
&\quad +h^4_{ijk}h^4_{11}h^3_{11k}h^3_{ij}+h^4_{ijk}h^4_{21}h^3_{21k}h^3_{ij}+h^4_{ijk}h^4_{22}h^3_{22k}h^3_{ij})+\frac{S_3}{2}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2\\
&= (S+2c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2+\frac{1}{2}\mid \nabla S\mid^2+\frac{S_3}{2}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2\\
&\quad -2\sum_{i,j,k,l,t}h^3_{ijk}h^3_{tlk}h^4_{tj}h^4_{il}-8\sum_{i,j,k,t}h^4_{ijk}h^3_{tjk}h^4_{ti}h^3_{ii}\\
&\quad +\sum_{k}(\sum_{i,j}h^3_{ijk}h^4_{tj})^2+4\lambda\sum_{i,j,k}h^4_{11k}h^4_{ij}h^3_{ijk}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ijt} R_{tlkl} &= \sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ijt} [c(\delta_{tk}\delta_{ll} - \delta_{tl}\delta_{lk}) - \sum_\beta (h^\beta_{tk} h^\beta_{ll} - h^\beta_{tl} h^\beta_{lk})] \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha} \{ h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij1} [c(\delta_{1k}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{1k}) - \sum_\beta (h^\beta_{1k} h^\beta_{11} - h^\beta_{11} h^\beta_{1k})] \\
&\quad + h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij1} [c(\delta_{1k}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{2k}) - \sum_\beta (h^\beta_{1k} h^\beta_{22} - h^\beta_{12} h^\beta_{2k})] \\
&\quad + h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij2} [c(\delta_{2k}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{1k}) - \sum_\beta (h^\beta_{2k} h^\beta_{11} - h^\beta_{21} h^\beta_{1k})] \\
&\quad + h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij2} [c(\delta_{2k}\delta_{22} - \delta_{22}\delta_{2k}) - \sum_\beta (h^\beta_{2k} h^\beta_{22} - h^\beta_{22} h^\beta_{2k})] \} \\
&= \sum_{i,j,k,\alpha} c(h^\alpha_{ijk})^2 - \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij1} [\sum_\beta (h^\beta_{1k} h^\beta_{22} - h^\beta_{12} h^\beta_{2k})] \\
&\quad - \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij2} [\sum_\beta (h^\beta_{2k} h^\beta_{11} - h^\beta_{21} h^\beta_{1k})] \\
&= c \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 - \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij1} [h^3_{1k} h^3_{22} - h^3_{12} h^3_{2k} + h^4_{1k} h^4_{22} - h^4_{12} h^4_{2k}] \\
&\quad - \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ij2} [h^3_{2k} h^3_{11} - h^3_{21} h^3_{1k} + h^4_{2k} h^4_{11} - h^4_{21} h^4_{1k}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 - \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 [h^3_{11} h^3_{22} + h^4_{11} h^4_{22} - h^4_{12} h^4_{21} \\
&\quad h^3_{12} h^3_{22} + h^4_{12} h^4_{22} - h^4_{12} h^4_{22} + h^3_{21} h^3_{11} + h^4_{21} h^4_{11} - h^4_{21} h^4_{11} \\
&\quad h^3_{22} h^3_{11} + h^4_{22} h^4_{11} - h^4_{21} h^4_{12}] \\
&= c \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 - \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 [h^3_{11} h^3_{22} + h^3_{22} h^3_{11} + h^4_{11} h^4_{22} \\
&\quad - h^4_{12} h^4_{21} + h^4_{22} h^4_{11} - h^4_{21} h^4_{12}] \\
&= c \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 - \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 [-(h^3_{11})^2 - (h^3_{22})^2 - (h^4_{11})^2 \\
&\quad - (h^4_{12})^2 - (h^4_{21})^2 - (h^4_{22})^2]
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^\alpha_{ijk} h^\alpha_{ijt} R_{tlkl} = (\frac{S}{2} + c) \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 \qquad (3.33)$$

$$
\begin{aligned}
& -2\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{ijl}R_{\alpha\beta kl} \\
= \;& -2\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{ijl}[\sum_{t}(h^{\alpha}_{tk}h^{\beta}_{tl} - h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tk})] \\
= \;& -2\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{ijl}[(h^{\alpha}_{1k}h^{\beta}_{1l} - h^{\alpha}_{1l}h^{\beta}_{1k}) + (h^{\alpha}_{2k}h^{\beta}_{2l} - h^{\alpha}_{2l}h^{\beta}_{2k})] \\
= \;& -2\sum_{i,j,k,l}[h^{3}_{ijk}h^{3}_{ijl}(h^{3}_{1k}h^{3}_{1l} - h^{3}_{1l}h^{3}_{1k}) + (h^{3}_{2k}h^{3}_{2l} - h^{3}_{2l}h^{3}_{2k}) \\
& +h^{3}_{ijk}h^{4}_{ijl}(h^{3}_{1k}h^{4}_{1l} - h^{3}_{1l}h^{4}_{1k}) + (h^{3}_{2k}h^{4}_{2l} - h^{3}_{2l}h^{4}_{2k}) \\
& +h^{4}_{ijk}h^{3}_{ijl}(h^{4}_{1k}h^{3}_{1l} - h^{4}_{1l}h^{3}_{1k}) + (h^{4}_{2k}h^{3}_{2l} - h^{4}_{2l}h^{3}_{2k}) \\
& +h^{4}_{ijk}h^{4}_{ijl}(h^{4}_{1k}h^{4}_{1l} - h^{4}_{1l}h^{4}_{1k}) + (h^{4}_{2k}h^{4}_{2l} - h^{4}_{2l}h^{4}_{2k})] \\
= \;& -2\sum_{i,j}[h^{3}_{ij1}h^{4}_{ij2}(h^{3}_{11}h^{4}_{12} - h^{3}_{12}h^{4}_{11}) + (h^{3}_{21}h^{4}_{22} - h^{3}_{22}h^{4}_{21}) \\
& +h^{3}_{ij2}h^{4}_{ij1}(h^{3}_{12}h^{4}_{11} - h^{3}_{11}h^{4}_{12}) + (h^{3}_{22}h^{4}_{21} - h^{3}_{21}h^{4}_{22}) \\
& +h^{4}_{ij1}h^{3}_{ij2}(h^{4}_{11}h^{3}_{12} - h^{4}_{12}h^{3}_{11}) + (h^{4}_{21}h^{3}_{22} - h^{4}_{22}h^{3}_{21}) \\
& +h^{4}_{ij2}h^{3}_{ij1}(h^{4}_{12}h^{3}_{11} - h^{4}_{11}h^{3}_{12}) + (h^{4}_{22}h^{3}_{21} - h^{4}_{21}h^{3}_{22})] \\
= \;& -2\sum_{i,j}[h^{3}_{ij1}h^{4}_{ij2}h^{4}_{12}(h^{3}_{11} - h^{3}_{22}) + h^{3}_{ij2}h^{4}_{ij1}h^{4}_{12}(h^{3}_{22} - h^{3}_{11}) \\
& +h^{4}_{ij1}h^{3}_{ij2}h^{4}_{12}(h^{3}_{22} - h^{3}_{11}) + h^{4}_{ij2}h^{3}_{ij1}h^{4}_{12}(h^{3}_{11} - h^{3}_{22}) \\
& +h^{3}_{ij1}h^{4}_{ij2}h^{3}_{12}(h^{4}_{22} - h^{4}_{11}) + h^{3}_{ij2}h^{4}_{ij1}h^{3}_{12}(h^{4}_{11} - h^{4}_{22}) \\
& +h^{4}_{ij1}h^{3}_{ij2}h^{3}_{12}(h^{4}_{11} - h^{4}_{22}) + h^{4}_{ij2}h^{3}_{ij1}h^{3}_{12}(h^{4}_{22} - h^{4}_{11})]
\end{aligned}
$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
-2\sum_{i,j,k,l,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{ijl}R_{\alpha\beta kl} = -4\sum_{i,j,k,l} h^{3}_{ijk}h^{4}_{ijl}h^{4}_{lk}(h^{3}_{ll} - h^{3}_{kk}) \tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}R_{tikl} + 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{til}R_{tjkl} \\
= \; & 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}[c(\delta_{tk}\delta_{il}-\delta_{tl}\delta_{ik}) - \sum_{\beta}(h^{\beta}_{tk}h^{\beta}_{il}-h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ik})] \\
& +2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{til}[c(\delta_{tk}\delta_{jl}-\delta_{tl}\delta_{jk}) - \sum_{\beta}(h^{\beta}_{tk}h^{\beta}_{jl}-h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{jk})] \\
= \; & 4c\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 - 4\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}h^{\beta}_{tk}h^{\beta}_{il} + 4\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ik} \\
= \; & 4c\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 \\
& -4\,[\sum_{i,j,k,l,t} h^{3}_{ijk}h^{3}_{tjl}h^{3}_{tk}h^{3}_{il} + h^{3}_{ijk}h^{3}_{tjl}h^{4}_{tk}h^{4}_{il} + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tjl}h^{3}_{tk}h^{3}_{il} + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tjl}h^{4}_{tk}h^{4}_{il}] \\
& +4\,[\sum_{i,j,k,l,t} h^{3}_{ijk}h^{3}_{tjl}h^{3}_{tl}h^{3}_{ik} + h^{3}_{ijk}h^{3}_{tjl}h^{4}_{tl}h^{4}_{ik} + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tjl}h^{3}_{tl}h^{3}_{ik} + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tjl}h^{4}_{tl}h^{4}_{ik}] \\
= \; & 4c\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 - 4\sum_{i,j,k,l,t} h^{3}_{ijk}h^{3}_{tjl}(h^{4}_{tk}h^{4}_{il}-h^{4}_{tl}h^{4}_{ik}) \\
& +4\sum_{i,j,k,l,t} h^{4}_{ijk}h^{4}_{tjl}(h^{4}_{tk}h^{4}_{il}-h^{4}_{tl}h^{4}_{ik}) + 2S_3\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2
\end{aligned}
$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}R_{tikl} + 2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{til}R_{tjkl} \\
& = 4c\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 - 4\sum_{i,j,k,l,t} h^{3}_{ijk}h^{3}_{tjl}(h^{4}_{tk}h^{4}_{il}-h^{4}_{tl}h^{4}_{ik}) \\
& +4\sum_{i,j,k,l,t} h^{4}_{ijk}h^{4}_{tjl}(h^{4}_{tk}h^{4}_{il}-h^{4}_{tl}h^{4}_{ik}) + 2S_3\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}[\sum_{t} h^{\alpha}_{tj}\nabla_l R_{tikl} + \sum_{t} h^{\alpha}_{ti}\nabla_l R_{tjkl} - \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij}\nabla_l R_{\alpha\beta kl}] \\
= \; & \sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj}\nabla_l[c(\delta_{tk}\delta_{il}-\delta_{tl}\delta_{ik}) - \sum_{\beta}(h^{\beta}_{tk}h^{\beta}_{il}-h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ik})] \\
& + \sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ti}\nabla_l[c(\delta_{tk}\delta_{jl}-\delta_{tl}\delta_{jk}) - \sum_{\beta}(h^{\beta}_{tk}h^{\beta}_{jl}-h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{jk})] \\
& - \sum_{i,j,k,l,t,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj}\nabla_l[-\sum_{\beta}(h^{\beta}_{tk}h^{\beta}_{tl}-h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{tk})]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i,j,k,l,t,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj}(h^{\beta}_{tkl}h^{\beta}_{il} - h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ikl}) - \sum_{i,j,k,l,t,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj}(h^{\beta}_{tkl}h^{\beta}_{il} - h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ikl}) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l,t,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{ij}(h^{\beta}_{tkl}h^{\beta}_{tl} - h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{tkl}) \\
&= -2\sum_{i,j,k,l,t,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj}(h^{\beta}_{tkl}h^{\beta}_{il} - h^{\beta}_{tl}h^{\beta}_{ikl}) + \sum_{i,j,k,l,t,\alpha,\beta} h^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{ij}(h^{\alpha}_{tkl}h^{\beta}_{tl} - h^{\alpha}_{tl}h^{\beta}_{tkl}) \\
&= -2\sum_{i,j,k,l,t} [h^{3}_{ijk}h^{3}_{tj}(h^{3}_{tkl}h^{3}_{il} - h^{3}_{tl}h^{3}_{ikl}) + h^{3}_{ijk}h^{3}_{tj}(h^{4}_{tkl}h^{4}_{il} - h^{4}_{tl}h^{4}_{ikl}) \\
&\quad + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tj}(h^{3}_{tkl}h^{3}_{il} - h^{3}_{tl}h^{3}_{ikl}) + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tj}(h^{4}_{tkl}h^{4}_{il} - h^{4}_{tl}h^{4}_{ikl})] \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l,t} [h^{3}_{ijk}h^{3}_{ij}(h^{3}_{tkl}h^{3}_{tl} - h^{3}_{tl}h^{3}_{tkl}) + h^{3}_{ijk}h^{4}_{ij}(h^{3}_{tkl}h^{4}_{tl} - h^{3}_{tl}h^{4}_{tkl}) \\
&\quad + h^{4}_{ijk}h^{3}_{ij}(h^{4}_{tkl}h^{3}_{tl} - h^{4}_{tl}h^{3}_{tkl}) + h^{4}_{ijk}h^{4}_{ij}(h^{4}_{tkl}h^{4}_{tl} - h^{4}_{tl}h^{4}_{tkl})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\sum_{i,j,k,t} [h^{3}_{ijk}h^{3}_{tj}(h^{3}_{tk1}h^{3}_{i1} - h^{3}_{t1}h^{3}_{ik1}) + h^{3}_{ijk}h^{3}_{tj}(h^{3}_{tk2}h^{3}_{i2} - h^{3}_{t2}h^{3}_{ik2}) \\
&\quad + h^{3}_{ijk}h^{3}_{tj}(h^{4}_{tk1}h^{4}_{i1} - h^{4}_{t1}h^{4}_{ik1}) + h^{3}_{ijk}h^{3}_{tj}(h^{4}_{tk2}h^{4}_{i2} - h^{4}_{t2}h^{4}_{ik2}) \\
&\quad + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tj}(h^{3}_{tk1}h^{3}_{i1} - h^{3}_{t1}h^{3}_{ik1}) + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tj}(h^{3}_{tk2}h^{3}_{i2} - h^{3}_{t2}h^{3}_{ik2}) \\
&\quad + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tj}(h^{4}_{tk1}h^{4}_{i1} - h^{4}_{t1}h^{4}_{ik1}) + h^{4}_{ijk}h^{4}_{tj}(h^{4}_{tk2}h^{4}_{i2} - h^{4}_{t2}h^{4}_{ik2})] \\
&\quad + \sum_{i,j,k,t} [h^{3}_{ijk}h^{4}_{ij}(h^{3}_{tk1}h^{4}_{t1} - h^{3}_{t1}h^{4}_{tk1}) + h^{3}_{ijk}h^{4}_{ij}(h^{3}_{tk2}h^{4}_{t2} - h^{3}_{t2}h^{4}_{tk2}) \\
&\quad + h^{4}_{ijk}h^{3}_{ij}(h^{4}_{tk1}h^{3}_{t1} - h^{4}_{t1}h^{3}_{tk1}) + h^{4}_{ijk}h^{3}_{ij}(h^{4}_{tk2}h^{3}_{t2} - h^{4}_{t2}h^{3}_{tk2})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -2\sum_{i,j,k,t}[h^3_{ijk}h^3_{1j}(h^3_{1k1}h^3_{i1}-h^3_{11}h^3_{ik1})+h^3_{ijk}h^3_{2j}(h^3_{2k1}h^3_{i1}-h^3_{21}h^3_{ik1}) \\
& +h^3_{ijk}h^3_{1j}(h^3_{1k2}h^3_{i2}-h^3_{12}h^3_{ik2})+h^3_{ijk}h^3_{2j}(h^3_{2k2}h^3_{i2}-h^3_{22}h^3_{ik2}) \\
& +h^3_{ijk}h^3_{1j}(h^4_{1k1}h^4_{i1}-h^4_{11}h^4_{ik1})+h^3_{ijk}h^3_{2j}(h^4_{2k1}h^4_{i1}-h^4_{21}h^4_{ik1}) \\
& +h^3_{ijk}h^3_{1j}(h^4_{1k2}h^4_{i2}-h^4_{12}h^4_{ik2})+h^3_{ijk}h^3_{2j}(h^4_{2k2}h^4_{i2}-h^4_{22}h^4_{ik2}) \\
& +h^4_{ijk}h^4_{1j}(h^3_{1k1}h^3_{i1}-h^3_{11}h^3_{ik1})+h^4_{ijk}h^4_{2j}(h^3_{2k1}h^3_{i1}-h^3_{21}h^3_{ik1}) \\
& +h^4_{ijk}h^4_{1j}(h^3_{1k2}h^3_{i2}-h^3_{12}h^3_{ik2})+h^4_{ijk}h^4_{2j}(h^3_{2k2}h^3_{i2}-h^3_{22}h^3_{ik2})] \\
& +\sum_{i,j,k,t}[h^3_{ijk}h^4_{ij}(h^3_{1k1}h^4_{11}-h^3_{11}h^4_{1k1})+h^3_{ijk}h^4_{ij}(h^3_{2k1}h^4_{21}-h^3_{21}h^4_{2k1}) \\
& +h^3_{ijk}h^4_{ij}(h^3_{1k2}h^4_{12}-h^3_{12}h^4_{1k2})+h^3_{ijk}h^4_{ij}(h^3_{2k2}h^4_{22}-h^3_{22}h^4_{2k2}) \\
& +h^4_{ijk}h^3_{ij}(h^4_{1k1}h^3_{11}-h^4_{11}h^3_{1k1})+h^4_{ijk}h^3_{ij}(h^4_{2k1}h^3_{21}-h^4_{21}h^3_{2k1}) \\
& +h^4_{ijk}h^3_{ij}(h^4_{1k2}h^3_{12}-h^4_{12}h^3_{1k2})+h^4_{ijk}h^3_{ij}(h^4_{2k2}h^3_{22}-h^4_{22}h^3_{2k2})]
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^\alpha_{ijk}[\sum_t h^\alpha_{tj}\nabla_l R_{tikl}+\sum_t h^\alpha_{ti}\nabla_l R_{tjkl}-\sum_\beta h^\beta_{ij}\nabla_l R_{\alpha\beta kl}] \\
& = S_3\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2+\frac{S_3}{2}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2+\sum_k(\sum_{i,j}h^3_{ijk}h^4_{ij})^2-4\lambda\sum_{i,j}h^4_{11k}h^4_{ij}h^3_{ijk} \qquad (3.36) \\
& -2\sum_{i,j,k}h^4_{ijk}h^4_{tkl}h^4_{il}h^4_{tj}-2\sum_{i,j,k}h^4_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{tl}h^4_{tj}-4\sum_{i,j}h^3_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{jl}(h^3_{ii}-h^3_{jj})
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitlikleri (3.33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ijk}\Delta h^\alpha_{ijk} \quad = \quad & (\frac{3S}{2}+7c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2+\frac{1}{2}\mid\nabla S\mid^2+3S_3\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 \\
& -4\sum_{i,j,k,l}h^3_{ijk}h^4_{ijl}h^4_{lk}(h^3_{ll}-h^3_{kk})-4\sum_{i,j,k,l}h^3_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{jl}(h^3_{ii}-h^3_{jj}) \\
& -2\sum_{i,j,k,l,t}h^3_{ijk}h^3_{tlk}h^4_{tj}h^4_{il}-8\sum_{i,j,k,t}h^4_{ijk}h^3_{tjk}h^4_{ti}h^4_{ii} \qquad (3.37) \\
& -4\sum_{i,j,k,t,l}h^3_{ijk}h^3_{tjl}(h^4_{tk}h^4_{il}-h^4_{tl}h^4_{ik})-4\sum_{i,j,k,l,t}h^4_{ijk}h^4_{tjl}(h^4_{tk}h^4_{il}-h^4_{tl}h^4_{ik}) \\
& -2\sum_{i,j,k,l,t}h^4_{ijk}h^4_{tkl}h^4_{il}h^4_{tj}+2\sum_{i,j,k,l,t}h^4_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{tl}h^4_{tj} \\
& +2\sum_k(\sum_{i,j}h^3_{ijk}h^4_{ij})^2
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de bu son eşitlikteki her bir terimin eşitini bulalım.

$$
\begin{aligned}
& 8\sum_{i,j,k,t} h^4_{ijk}h^3_{tjk}h^4_{ti}h^3_{ii} \\
= \;& 8\sum_{j,k,t}[h^4_{1jk}h^3_{tjk}h^4_{t1}h^3_{11} + h^4_{2jk}h^3_{tjk}h^4_{t2}h^3_{22}] \\
= \;& 8\lambda\sum_{j,k,t}[h^4_{1jk}h^3_{tjk}h^4_{t1} - h^4_{2jk}h^3_{tjk}h^4_{t2}] \\
= \;& 8\lambda\sum_{j,k}[h^4_{1jk}h^3_{1jk}h^4_{11} - h^4_{2jk}h^3_{1jk}h^4_{12} \\
& +h^4_{1jk}h^3_{2jk}h^4_{21} - h^4_{2jk}h^3_{2jk}h^4_{22}] \\
= \;& 8\lambda\sum_{j,k}[h^4_{1jk}h^3_{1jk}\mu - h^4_{2jk}h^3_{1jk}\mu_1 \\
& +h^4_{1jk}h^3_{2jk}\mu_1 + h^4_{2jk}h^3_{2jk}\mu] \\
= \;& 8\lambda\sum_{j,k}[\mu(h^4_{1jk}h^3_{1jk} + h^4_{2jk}h^3_{2jk}) \\
& +\mu_1(h^4_{1jk}h^3_{2jk} - h^4_{2jk}h^3_{1jk})] \\
= \;& 8\lambda\mu_1\sum_{j,k}(h^4_{1jk}h^3_{2jk} - h^4_{2jk}h^3_{1jk}) \\
= \;& 8\lambda\mu_1(h^4_{111}h^3_{211} - h^4_{211}h^3_{111} \\
& +h^4_{112}h^3_{212} - h^4_{212}h^3_{112} \\
& +h^4_{121}h^3_{221} - h^4_{221}h^3_{121} \\
& +h^4_{122}h^3_{222} - h^4_{222}h^3_{122})
\end{aligned}
$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
8\sum_{i,j,k,t} h^4_{ijk}h^3_{tjk}h^4_{ti}h^3_{ii} = 32\lambda\mu_1(h^4_{222}h^3_{111} - h^4_{111}h^3_{222}) \tag{3.38}
$$

$$\begin{aligned}
&4\sum_{i,j,k,l} h^3_{ijk}h^4_{ijl}h^4_{lk}(h^3_{ll}-h^3_{kk})\\
=\;& 4\sum_{i,j}[h^3_{ij1}h^4_{ij2}h^4_{12}(h^3_{11}-h^3_{22})+h^3_{ij2}h^4_{ij1}h^4_{l2}(h^3_{22}-h^3_{11})]\\
=\;& -8\lambda\mu_1\sum_{i,j}(h^3_{1ij}h^4_{2ij}-h^3_{2ij}h^4_{1ij})\\
=\;& -8\lambda\mu_1[h^3_{111}h^4_{211}-h^3_{211}h^4_{122}+h^3_{112}h^4_{212}-h^3_{212}h^4_{112}\\
& +h^3_{121}h^4_{221}-h^3_{221}h^4_{121}+h^3_{122}h^4_{222}-h^3_{222}h^4_{122}]
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$4\sum_{i,j,k,l} h^3_{ijk}h^4_{ijl}h^4_{lk}(h^3_{ll}-h^3_{kk}) = 32\lambda\mu_1(h^4_{222}h^3_{111}-h^4_{111}h^3_{222}) \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
&4\sum_{i,j,k,l} h^3_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{lj}(h^3_{ii}-h^3_{jj})\\
=\;& 4\sum_{k,l}[(h^3_{12k}h^4_{1kl}h^4_{l2}(h^3_{11}-h^3_{22})+h^3_{21k}h^4_{2kl}h^4_{l1}(h^3_{22}-h^3_{11})]\\
=\;& 8\lambda\sum_{k,l}(h^3_{12k}h^4_{1kl}h^4_{l2}-h^3_{21k}h^4_{2kl}h^4_{l1})\\
=\;& 8\lambda(h^3_{121}h^4_{111}h^4_{12}-h^3_{211}h^4_{211}h^4_{11}+h^3_{121}h^4_{112}h^4_{22}-h^3_{211}h^4_{212}h^4_{21}\\
& +h^3_{122}h^4_{121}h^4_{12}-h^3_{212}h^4_{221}h^4_{21}+h^3_{122}h^4_{122}h^4_{22}-h^3_{212}h^4_{222}h^4_{21})
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$4\sum_{i,j,k,l} h^3_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{lj}(h^3_{ii}-h^3_{jj}) = 16\lambda\mu_1(h^4_{222}h^3_{111}-h^4_{111}h^3_{222}) \tag{3.40}$$

$$
\begin{aligned}
&4\sum_{i,j,k,t,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}(h^4_{tk}h^4_{il}-h^4_{tl}h^4_{ik})\\
&=4\sum_{i,j,k,t,\alpha}[h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj1}(h^4_{tk}h^4_{i1}-h^4_{t1}h^4_{ik})+h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tj2}(h^4_{tk}h^4_{i2}-h^4_{t2}h^4_{ik})]\\
&=4\sum_{i,j,k,\alpha}[h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{1j1}(h^4_{1k}h^4_{i1}-h^4_{11}h^4_{ik})+h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{1j2}(h^4_{2k}h^4_{i1}-h^4_{12}h^4_{ik})\\
&+h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{2j1}(h^4_{1k}h^4_{i2}-h^4_{21}h^4_{ik})+h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{2j2}(h^4_{2k}h^4_{i2}-h^4_{22}h^4_{ik})]\\
&=4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}h^4_{1k}h^4_{i1}-4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}h^4_{11}h^4_{ik}\\
&+4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{2k}h^4_{i1}-4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{12}h^4_{ik}\\
&+4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{1k}h^4_{i2}-4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{21}h^4_{ik}\\
&+4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{22j}h^4_{2k}h^4_{i2}-4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{22j}h^4_{22}h^4_{ik}\\
&=-8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{12}h^4_{ik}+8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{2k}h^4_{i1}\\
&-8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}h^4_{ik}h^4_{11}+4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}(h^4_{1k}h^4_{i1}-h^4_{2k}h^4_{i2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}[h^4_{11}h^4_{11}+h^4_{12}h^4_{11}+h^4_{21}h^4_{11}+h^4_{22}h^4_{11}]\\
&+4\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}[h^4_{11}h^4_{11}-h^4_{21}h^4_{21}+h^4_{11}h^4_{21}-h^4_{21}h^4_{22}\\
&+h^4_{12}h^4_{11}-h^4_{22}h^4_{12}+h^4_{12}h^4_{21}-h^4_{22}h^4_{22}]\\
&-8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{12}[h^4_{11}+h^4_{12}+h^4_{21}+h^4_{22}]\\
&+8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}[h^4_{11}h^4_{21}+h^4_{11}h^4_{22}+h^4_{12}h^4_{21}+h^4_{12}h^4_{22}]\\
= \quad & -16\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}h^4_{11}h^4_{12}+16\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{11j}h^4_{11}h^4_{12}\\
&-16\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}h^4_{12}h^4_{12}+8\sum_{i,j,k,\alpha}h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}[(h^4_{12})^2-(h^4_{11})^2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -8\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}[(h^4_{11})^2+(h^4_{12})^2] \\
&= -4[\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}[(h^4_{11})^2+(h^4_{22})^2]+\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{12j}[(h^4_{12})^2+(h^4_{21})^2]]
\end{aligned}
$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
4\sum_{i,j,k,t,l,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tjl}(h^4_{tk}h^4_{il}-h^4_{tl}h^4_{ik}) = 2S_4\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 \tag{3.41}
$$

eşitlikleri elde edilir. Herhangi bir α için,

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{i,j,k,l,t} h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{tlk}h^4_{tj}h^4_{il} \\
&= 2\sum_{i,j,k,l}(h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{1lk}h^4_{1j}h^4_{il}+h^{\alpha}_{ijk}h^{\alpha}_{2lk}h^4_{2j}h^4_{il}) \\
&= 2\sum_{i,k,l}h^{\alpha}_{1ik}h^{\alpha}_{1lk}h^4_{11}h^4_{il}+2\sum_{i,k,l}h^{\alpha}_{2ik}h^{\alpha}_{1lk}h^4_{12}h^4_{il} \\
&\quad +2\sum_{i,k,l}h^{\alpha}_{1ik}h^{\alpha}_{2lk}h^4_{21}h^4_{il}+2\sum_{i,k,l}h^{\alpha}_{2ik}h^{\alpha}_{2lk}h^4_{22}h^4_{il} \qquad (3.42) \\
&= 2\mu\sum_{i,k,l}(h^{\alpha}_{1ik}h^{\alpha}_{1lk}-h^{\alpha}_{2ik}h^{\alpha}_{2lk})h^4_{il}+4\mu_1\sum_{i,k,l}h^{\alpha}_{2ik}h^{\alpha}_{1lk}h^4_{il} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır.

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i,j}(\sum_{k}h^3_{ijk}h^4_{ij})^2 &= 2.\sum_{i,j}(\sum_{k}h^4_{ij}h^3_{ijk})^2 \\
&= 2.\sum_{k}(h^4_{ij})^2\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2 \qquad (3.43) \\
&= S_4\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i,j,k,l,t}h^4_{ijk}h^4_{ikl}h^4_{tl}h^4_{tj} &= 2\sum_{i,j,k,t}(h^4_{ijk}h^4_{ik1}h^4_{t1}h^4_{tj}+h^4_{ijk}h^4_{ik2}h^4_{t2}h^4_{tj}) \\
&= 2\sum_{i,j}(h^4_{ij})^2\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2 \qquad (3.44) \\
&= S_4\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2
\end{aligned}
$$

(3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) ve (3.44) eşitlikleri (3.37) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{i,j,k,\alpha} h^{\alpha}_{ijk}\Delta h^{\alpha}_{ijk} = (\frac{9}{2}S + 7c)\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + \frac{1}{2} \mid \nabla S \mid^2 -80\lambda\mu_1(h^3_{111}h^4_{222} - h^4_{111}h^3_{222}) \tag{3.45}$$

elde edilir. Herhangi bir α için

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2 &= (h^{\alpha}_{111})^2 + (h^{\alpha}_{112})^2 + (h^{\alpha}_{121})^2 + (h^{\alpha}_{122})^2 + (h^{\alpha}_{211})^2 + (h^{\alpha}_{212})^2 + (h^{\alpha}_{221})^2 + (h^{\alpha}_{222})^2 \\
&= 4\{(h^{\alpha}_{111})^2 + (h^{\alpha}_{222})^2\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mid \nabla S \mid^2 &= \sum_l (\nabla_l S)^2 = \sum_l (2\sum_{i,j,\alpha} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ijl})^2 \\
&= 4\sum_l(\sum_{i,j}(h^3_{ij}h^3_{ijl} + h^4_{ij}h^4_{ijl}))^2 \\
&= 4\sum_l(h^3_{11}h^3_{11l} + h^4_{11}h^4_{11l} + h^3_{12}h^3_{12l} + h^4_{12}h^4_{12l} \\
&\quad +h^3_{21}h^3_{21l} + h^4_{21}h^4_{21l} + h^3_{22}h^3_{22l} + h^4_{22}h^4_{22l})^2 \\
&= 16\sum_l(\lambda h^3_{11l} + \mu h^4_{11l} + \mu_1 h^4_{12l})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16\sum_l[(\lambda h^3_{11l})^2 + (\mu h^4_{11l})^2 + (\mu_1 h^4_{12l})^2 \\
&\quad +2(\lambda\mu h^3_{11l}h^4_{11l} + \lambda\mu_1 h^3_{11l}h^4_{12l} + \mu\mu_1 h^4_{11l}h^4_{12l})] \\
&= 16[(\lambda h^3_{111})^2 + (\mu h^4_{111})^2 + (\mu_1 h^4_{121})^2 \\
&\quad +(\lambda h^3_{112})^2 + (\mu h^4_{112})^2 + (\mu_1 h^4_{122})^2] \\
&\quad +32[\lambda\mu_1(h^3_{111}h^4_{121} + h^3_{112}h^4_{122}) \\
&\quad +\mu\mu_1(h^4_{111}h^4_{121} + h^4_{112}h^4_{122})] \\
&= 4\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ijl})^2 - 32\lambda\mu_1(h^3_{111}h^4_{222} - h^3_{222}h^4_{111}) \\
&= 2\sum_{i,j,k,\alpha} S_{\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 - 32\lambda\mu_1(h^3_{111}h^4_{222} - h^3_{222}h^4_{111})
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \mid \nabla S \mid^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,\alpha} S_\alpha (h^\alpha_{ijk})^2 = -8\lambda\mu_1 (h^3_{111} h^4_{222} - h^3_{222} h^4_{111}) \qquad (3.46)$$

elde edilir .(3.45) ve (3.46) eşitlikleri

$$\frac{1}{2}\Delta \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 = \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijkl})^2 + \sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ijk} \Delta h^\alpha_{ijk}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\Delta \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 = \sum_{i,j,k,l,\alpha} (h^\alpha_{ijkl})^2 + (\frac{9}{2}S + 7c) \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 + 3 \mid \nabla S \mid^2 - 5 \sum_\alpha S_\alpha \sum_{i,j,k} (h^\alpha_{ijk})$$

bulunur ve böylece Teorem 3.2.3 ispatlanmış olur.

Lemma 3.2.4:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l,\alpha} (h^\alpha_{ijkl})^2 &= \sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iijj} - h^\alpha_{jjii})^2 + \sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iijj} + h^\alpha_{jjii})^2 \\ &\quad + \sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iiij} - h^\alpha_{iiji})^2 + \sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iiij} + h^\alpha_{iiji})^2\end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l,\alpha} (h^\alpha_{ijkl})^2 &= \sum_{i,j,\alpha} [(h^\alpha_{ij11})^2 + (h^\alpha_{ij12})^2 + (h^\alpha_{ij21})^2 + (h^\alpha_{ij22})^2] \\ &= \sum_{i,\alpha} [(h^\alpha_{i111})^2 + (h^\alpha_{i211})^2 + (h^\alpha_{i112})^2 + (h^\alpha_{i212})^2 \\ &\quad + (h^\alpha_{i121})^2 + (h^\alpha_{i221})^2 + (h^\alpha_{i122})^2 + (h^\alpha_{i222})^2]^2 \\ &= \sum_\alpha [(h^\alpha_{1111})^2 + (h^\alpha_{2111})^2 + (h^\alpha_{1211})^2 + (h^\alpha_{2211})^2 \\ &\quad + (h^\alpha_{1112})^2 + (h^\alpha_{2112})^2 + (h^\alpha_{1212})^2 + (h^\alpha_{2212})^2 \\ &\quad + (h^\alpha_{1121})^2 + (h^\alpha_{2121})^2 + (h^\alpha_{1221})^2 + (h^\alpha_{2221})^2 \\ &\quad + (h^\alpha_{1122})^2 + (h^\alpha_{2122})^2 + (h^\alpha_{1222})^2 + (h^\alpha_{2222})^2] \\ &= \sum_{i,\alpha} (h^\alpha_{iiii})^2 + 3\sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iijj})^2 + \sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iiij})^2 + 3\sum_{i\neq j,\alpha} (h^\alpha_{iiji})^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iijj}-h^\alpha_{jjii})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iijj}+h^\alpha_{jjii})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iiij}-h^\alpha_{iiji})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iiij}+h^\alpha_{iiji})^2 \\
= & \sum_{i\neq j,\alpha}[(h^\alpha_{iijj})^2-2(h^\alpha_{iijj})(h^\alpha_{jjii})+(h^\alpha_{jjii})^2+(h^\alpha_{iijj})^2+2(h^\alpha_{ijij})(h^\alpha_{jjii})+(h^\alpha_{jjii})^2 \\
& (h^\alpha_{iiij})^2-2(h^\alpha_{iiij})(h^\alpha_{iiji})+(h^\alpha_{iiji})^2+(h^\alpha_{iiij})^2+2(h^\alpha_{iiij})(h^\alpha_{iiji})+(h^\alpha_{iiji})^2] \\
= & (h^\alpha_{1122})^2+(h^\alpha_{2211})^2-2\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iijj})(h^\alpha_{jjii})+(h^\alpha_{2211})^2+(h^\alpha_{1122})^2 \\
& +(h^\alpha_{1122})^2+(h^\alpha_{2211})^2+2\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iijj})(h^\alpha_{jjii})+(h^\alpha_{2211})^2+(h^\alpha_{1122})^2 \\
& +(h^\alpha_{1112})^2+(h^\alpha_{2221})^2-2\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iiij})(h^\alpha_{iiji})+(h^\alpha_{1121})^2+(h^\alpha_{2212})^2 \\
& +(h^\alpha_{1112})^2+(h^\alpha_{2221})^2+2\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iiij})(h^\alpha_{iiji})+(h^\alpha_{1121})^2+(h^\alpha_{2212})^2 \\
= & \sum_{i,\alpha}(h^\alpha_{iiii})^2+3\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iijj})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iiij})^2+3\sum_{i\neq j,\alpha}(h^\alpha_{iiji})^2
\end{aligned}
$$

Son iki ifade ile $h^\alpha_{iiii} = -h^\alpha_{jjii}$; $h^\alpha_{iiij} = -h^\alpha_{jjij}$ eşitlikleri göz önüne alındığında Lemma 3.2.4 ispatlanmış olur.

Lemma 3.2.5:

$$
\begin{aligned}
h^3_{1122}-h^3_{2211} &= \lambda(2c+S+S_4) \\
h^3_{1112}-h^3_{1121} &= 0 \\
h^4_{1122}-h^4_{2211} &= (2c+S)\mu \\
h^4_{1112}-h^4_{1121} &= -(2c+S+S_3)\mu_1
\end{aligned}
$$

İspat: (3.15) Ricci formülünü kullanarak

$$
\begin{aligned}
h^{\alpha}_{iijj} - h^{\alpha}_{jjii} &= h^{\alpha}_{ijij} - h^{\alpha}_{ijji} \\
&= \sum_t h^{\alpha}_{tj} R_{tiij} + \sum_t h^{\alpha}_{it} R_{tjij} - \sum_\beta h^{\beta}_{ij} R_{\alpha\beta kl} \\
&= \sum_t h^{\alpha}_{tj} [c(\delta_{it}\delta_{ij} - \delta_{tj}\delta_{ii}) - \sum_\beta (h^{\beta}_{it} h^{\beta}_{ij} - h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ii})] \\
&\quad + \sum_t h^{\alpha}_{it} [c(\delta_{ti}\delta_{jj} - \delta_{tj}\delta_{ij}) - \sum_\beta (h^{\beta}_{ti} h^{\beta}_{jj} - h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ij})] \\
&\quad + \sum_{t,\beta} h^{\beta}_{ij} (h^{\alpha}_{ti} h^{\beta}_{tj} - h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{ti})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_t h^{\alpha}_{tj} [c(\delta_{it}\delta_{ij} - \delta_{tj}\delta_{ii})] - \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{it} h^{\beta}_{ij} + \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ii} \\
&\quad + \sum_t h^{\alpha}_{it} [c(\delta_{ti}\delta_{jj} - \delta_{tj}\delta_{ij})] - \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{it} h^{\beta}_{ti} h^{\beta}_{jj} + \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{it} h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ij} \\
&\quad \sum_{t,\beta} h^{\beta}_{ij} h^{\alpha}_{ti} h^{\beta}_{tj} - \sum_{t,\beta} h^{\beta}_{ij} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{ti} \\
&= -\sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{it} h^{\beta}_{ij} + \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{it} h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ij} + c(h^{\alpha}_{ii} - h^{\alpha}_{jj}) \\
&\quad + \sum_t h^{3}_{tj} h^{3}_{tj} h^{3}_{ii} + \sum_t h^{3}_{tj} h^{4}_{tj} h^{4}_{ii} + \sum_t h^{4}_{tj} h^{3}_{tj} h^{3}_{ii} + \sum_t h^{4}_{tj} h^{4}_{tj} h^{4}_{ii} \\
&\quad - \sum_t h^{3}_{it} h^{3}_{ti} h^{3}_{jj} - \sum_t h^{3}_{it} h^{4}_{ti} h^{4}_{jj} - \sum_t h^{4}_{it} h^{3}_{ti} h^{3}_{jj} - \sum_t h^{4}_{it} h^{4}_{ti} h^{4}_{jj}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c(h^{\alpha}_{ii} - h^{\alpha}_{jj}) - \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{it} h^{\beta}_{ij} + \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{it} h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ij} \\
&\quad + \sum_t [(h^{3}_{tj})^2 h^{3}_{ii} + (h^{4}_{tj})^2 h^{4}_{ii}] - \sum_t [(h^{3}_{it})^2 h^{3}_{jj} + (h^{4}_{it})^2 h^{4}_{jj}] \\
&= c(h^{\alpha}_{ii} - h^{\alpha}_{jj}) - \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{it} h^{\beta}_{ij} + \sum_{t,\beta} h^{\alpha}_{it} h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ij} \\
&\quad + \sum_{\alpha,t} (h^{\alpha}_{tj})^2 h^{\alpha}_{ii} - \sum_{\alpha,t} (h^{\alpha}_{it})^2 h^{\alpha}_{jj} \\
&= c(h^{\alpha}_{ii} - h^{\alpha}_{jj}) - \frac{S}{2}(h^{\alpha}_{jj} - h^{\alpha}_{ii}) - \sum_{t,\beta\neq\alpha} h^{\alpha}_{tj} h^{\beta}_{it} h^{\beta}_{ij} + \sum_{t,\beta\neq\alpha} h^{\alpha}_{it} h^{\beta}_{tj} h^{\beta}_{ij}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\alpha = 3,\ i = 1$ *ve* $j = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} h^3_{1122} - h^3_{2211} &= c(h^3_{11} - h^3_{22}) - \frac{S}{2}(h^3_{22} - h^3_{11}) - \sum_t h^3_{t2}h^4_{1t}h^4_{12} + \sum_t h^3_{1t}h^4_{t2}h^4_{12} \\ &= (\lambda + \lambda)c + \frac{S}{2}(\lambda + \lambda) \\ &\quad -h^3_{12}h^4_{11}h^4_{12} - h^3_{22}h^4_{12}h^4_{12} + h^3_{11}h^4_{12}h^4_{12} + h^3_{12}h^4_{22}h^4_{12} \\ &= 2\lambda c + \lambda S + 2h^3_{11}(h^4_{12})^2 \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} h^4_{1122} - h^4_{2211} &= c(h^4_{11} - h^4_{22}) - \frac{S}{2}(h^4_{22} - h^4_{11}) - \sum_t h^4_{t2}h^3_{1t}h^3_{12} + \sum_t h^4_{1t}h^3_{t2}h^3_{12} \\ &= 2\mu c + \mu S \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ispatın benzeri yapılarak

$$\begin{aligned} h^3_{1112} - h^3_{1121} &= 0 \\ h^4_{1112} - h^4_{1121} &= -(2c + S + S_3)\mu_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri de elde edilir.

Şimdi Teorem 3.2.1' i ispatlayacağız. Daha önce skalar eğriliğin sabit olması için gerek ve yeter koşulun S nin sabit olması gerektiği belirtilmişti. Bu yüzden S nin sabit olduğunu varsayalım.

Eğer $S = 0$ ise M total geodeziktir. Çünkü S sabittir. $S \neq 0$ olsun.

S sabit ve $S \neq 0 \Rightarrow \nabla_l S = 0$ olur.

$$\begin{aligned} S &= S_3 + S_4 = \sum_{i,j}(h^3_{ij})^2 + \sum_{i,j}(h^4_{ij})^2 \\ &= (h^3_{11})^2 + 2(h^3_{12})^2 + (h^3_{22})^2 + (h^4_{11})^2 + 2(h^4_{12})^2 + (h^4_{22})^2 \\ &= 2(h^3_{11})^2 + 2(h^4_{11})^2 + 2(h^4_{12})^2 \end{aligned}$$

olur. $\nabla_l S = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \nabla_l S &= 2.h^3_{11}h^3_{11l} + 2.h^4_{11}h^4_{11l} + 2.h^4_{12}h^4_{12l} = 0 \\ &\Rightarrow\ 2\lambda h^3_{11l} + 2\mu h^4_{11l} + 2\mu_1 h^4_{12l} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$l = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} 2\lambda h^3_{111} + 2\mu h^4_{111} + 2\mu_1 h^4_{121} &= 0 \\ 2\lambda h^3_{111} + 2\mu h^4_{111} + 2\mu_1 h^4_{112} &= 0 \\ 2\lambda h^3_{111} + 2\mu h^4_{111} - 2\mu_1 h^4_{222} &= 0 \end{aligned}$$

ve

$l = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} 2\lambda h^3_{112} + 2\mu h^4_{112} + 2\mu_1 h^4_{122} &= 0 \\ -2\lambda h^3_{222} - 2\mu h^4_{222} - 2\mu_1 h^4_{111} &= 0 \\ 2\lambda h^3_{222} + 2\mu h^4_{222} + 2\mu_1 h^4_{111} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} 2\lambda h^3_{111} + 2\mu h^4_{111} - 2\mu_1 h^4_{222} &= 0 \Rightarrow 2\lambda h^3_{111} = -2\mu h^4_{111} + 2\mu_1 h^4_{222} \\ 2\lambda h^3_{222} + 2\mu h^4_{222} + 2\mu_1 h^4_{111} &= 0 \Rightarrow 2\lambda h^3_{222} = -2\mu h^4_{222} - 2\mu_1 h^4_{111} \end{aligned}$$

Burada her iki tarafın kareleri alıp toplanırsa,

$$4\lambda^2[(h^3_{111})^2 + (h^3_{222})^2] = (4\mu^2 + 4\mu_1^2)[(h^4_{111})^2 + (h^4_{222})^2]$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} S_3 \sum_{i,j,k} (h^3_{ijk})^2 &= \sum_{i,j} (h^3_{ij})^2 [(h^3_{111})^2 + (h^3_{222})^2] \\ &= 8\lambda^2 [(h^3_{111})^2 + (h^3_{222})^2] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S_4 \sum_{i,j,k} (h^4_{ijk})^2 &= \sum_{i,j} (h^4_{ij})^2 [(h^4_{111})^2 + (h^4_{222})^2] \\ &= 4(2\mu^2 + 2\mu_1^2) [(h^4_{111})^2 + (h^4_{222})^2] \end{aligned}$$

eşitlikleri de gözönüne alınırsa

$$S_3 \sum_{i,j,k} (h^3_{ijk})^2 = S_4 \sum_{i,j,k} (h^4_{ijk})^2 \tag{3.47}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

$S_3 S_4$, M üzerinde tanımlanan bir fonksiyondur. Kesitsel eğriliğin S nin sabit olmasından dolayı aşağıdan ve $S_3 S_4$ fonksiyonunda $0 \leq S_3 S_4 \leq S^2$ olmasından dolayı sınırlı olduğu sonucu çıkarılır. M' nin tam olması ve Genelleştirilmiş Maksimum Prensibi gereği $\{p_m\} \subset M^2$ 'nin bir dizisi aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\lim_{m \to \infty} (S_3 S_4)(p_m) = \inf(S_3 S_4)$$

$$\lim_{m \to \infty} \mid \nabla(S_3 S_4) \mid (p_m) = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} \inf \nabla(S_3 S_4)(p_m) \geq 0$$

Teorem 3.2.2 den ve S' nin sabit olmasından

$$\sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 = -S(S + 2c) - 2S_3 S_4$$

yazılabilir. Böylece $\sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2$ nin sınırlı olduğu ve dolayısıyla

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 (p_m) = \sup \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 \tag{3.48}$$

$$\lim_{m \to \infty} \mid \nabla \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 \mid (p_m) = -2 \lim_{m \to \infty} \mid \nabla(S_3 S_4) \mid (p_m) = 0 \tag{3.49}$$

eşitliklerinin varlıklarından söz edilebilir.

$$\begin{aligned} \Delta \sum_{i,j,k,\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2 &= \Delta[-S(S + 2c) - 2S_3 S_4] \\ &= \nabla[-2S_3 \nabla S_4 - 2S_4 \nabla S_3] \qquad (3.50) \\ &= -2\nabla S_3 \nabla S_4 - 2S_3 \nabla^2 S_4 - 2S_4 \nabla^2 S_3 - 2\nabla S_3 \nabla S_4 \\ &= -2S_3 \Delta S_4 - 4\nabla S_3 \nabla S_4 - 2S_4 \Delta S_3 \end{aligned}$$

$$\lim_{m \to \infty} \mid \nabla(S_3 S_4) \mid (p_m) = 0$$

$$\nabla_l(S_3S_4) = S_3\nabla_l S_4 + S_4\nabla_l S_3$$

$$\lim_{m\to\infty}(S_3\nabla_l S_4 + S_4\nabla_l S_3) = 0$$

eşitlikleri, Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 den $\sum\limits_{i,j,k,l,\alpha}(h^{\alpha}_{ijkl})^2$ sınırlı bulunur. Böylece bir alt dizi alarak

$$\begin{array}{cc}
\lim\limits_{m\to\infty} S_3(p_m) = \overset{\frown}{S}_3 & \lim\limits_{m\to\infty} S_4(p_m) = \overset{\frown}{S}_4 \\
\lim\limits_{m\to\infty} \lambda(p_m) = \overset{\frown}{\lambda} & \lim\limits_{m\to\infty} \mu(p_m) = \overset{\frown}{\mu} \\
\lim\limits_{m\to\infty} \mu_1(p_m) = \overset{\frown}{\mu}_1 & \lim\limits_{m\to\infty} (h^{\alpha}_{ijk})(p_m) = \overset{\frown}{h}{}^{\alpha}_{ijkl} \\
\lim\limits_{m\to\infty} (h^{\alpha}_{ijkl})(p_m) = \overset{\frown}{h}{}^{\alpha}_{ijkl} &
\end{array}$$

olduklarını varsayabiliriz.

$$S = S_3 + S_4 \Rightarrow \nabla_l S_3 = -\nabla_l S_4$$

$$\lim_{m\to\infty}(S_3 - S_4)\nabla_l S_4(p_m) = \lim_{m\to\infty}(S_4 - S_3)\nabla_l S_3(p_m) = 0$$

eşitliğinden

$$\lim_{m\to\infty}(S_3 - S_4) = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} S_3 = \lim_{m\to\infty} S_4 \Rightarrow \overset{\frown}{S}_3 = \overset{\frown}{S}_4$$

veya

$$\lim_{m\to\infty}\nabla_l S_3(p_m) = \lim_{m\to\infty}\nabla_l S_4(p_m) = 0$$

bulunur.

$i)\overset{\frown}{S}_3 = \overset{\frown}{S}_4$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{m\to\infty}\{\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + S(S+2c) + 2S_3S_4\} \\
&= \sup\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + S(S+2c) + \sup(2S_3S_4) \\
&= \sup\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 + (\frac{3}{2}S + 2c)S \\
&\Rightarrow \sup\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 = -(\frac{3}{2}S + 2c)S
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 &= -S(S+2c)-2S_3S_4\\ &= -(\frac{3}{2}S+2c)S-\frac{1}{2}(S_3-S_4)^2\\ &\geq -(\frac{3}{2}S+2c)S\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\inf\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 \geq -(\frac{3}{2}S+2c)S = \sup\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2$$

yani

$$\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 \equiv -(\frac{3}{2}S+2c)S \tag{3.51}$$

nın sabit olduğu sonucuna varılır. Buradan M^2 üzerinde $S_3 \equiv S_4$ ün sabit olduğu ve $\nabla_l S_3 = \nabla_l S_4 = 0$ sonucu çıkar. (3.47) den

$$\begin{aligned}S_3\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2 &= S_4\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2 \Rightarrow \sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2 = \sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2\\ &\Rightarrow \sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 = 0\end{aligned}$$

dır.

$\sum\limits_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 \equiv -(\frac{3}{2}S+2c)S \Rightarrow \frac{3}{2}S+2c=0 \Rightarrow S=-\frac{4c}{3}$ sonucu çıkar.

$ii)\breve{S}_3 \neq \breve{S}_4$ olsun. Yani $l=1,2$ için

$$\lim_{m\to\infty}\nabla_l S_3(p_m) = \lim_{m\to\infty}\nabla_l S_4(p_m) = 0$$

olsun. (3.47) den

$$\lim_{m\to\infty}S_3\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2(p_m) = \lim_{m\to\infty}S_4\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2(p_m) = 0$$

$$\breve{S}_3\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2(p_m) = \breve{S}_4\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2(p_m) = 0 \tag{3.52}$$

elde edilir. Eğer,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2 = \lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2 = 0$$

ise,

$$\begin{aligned}\sup\sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2 &= 0 \Rightarrow S(S+2c)+2S_3S_4=0\\ &\Rightarrow (\frac{3}{2}S+2c)S-\frac{1}{2}(S_3-S_4)^2=0\\ &\Rightarrow (\frac{3}{2}S+2c)S=\frac{1}{2}(S_3-S_4)^2>0\\ &\Rightarrow (\frac{3}{2}S+2c)S>0\\ &\Rightarrow S>-\frac{4c}{3}\end{aligned}$$

bulunur. $S = S_3 + S_4$ sabit ve S_3S_4 sabit olduğundan S_3 ve S_4 de sabit olurlar.

$S > 0$ için, $S_3 > 0$ olduğunu varsayalım. Teroem 3.2.2 den

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}\Delta S_\alpha = \sum_{i,j,k,\alpha}(h^\alpha_{ijk})^2+(2c+S)S_\alpha+S_3S_4\\ &\Rightarrow (2c+S)S_\alpha+S_3S_4=0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $S = -2c$ ve $H^3_1(c)$' ün total geodezik hiper yüzeyi hiperbolik silindir olduğu sonucuna varılır (Ishihara, 1988).

Şimdi genel özelliği bozmadan

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^4_{ijk})^2(p_m)\neq 0$$

olduğunu varsayalım. (3.52) den $\breve{S}_4 = 0$ olur. $S = S_3 + S_4 > 0$ sabit olduğundan $\breve{S}_3 \neq 0$ ve böylece

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2(p_m)=0$$

olur. Bu durumda $S = \frac{-10c}{11}$ olduğunu ispatlayacağız. $\breve{S}_4 = 0$ olduğundan Teorem 3.2.2 den

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2(p_m)+(2c+S)S=0$$
$$\Rightarrow \sup\sum_{i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2=-(2c+S)S$$

olur.

(3.48) ve (3.49) den $l=1,2$ için ve $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2(p_m)=0$ dan

$$\lim_{m\to\infty}\left|\,\Delta\sum_{i,j,k}(h^{\alpha}_{ijk})^2\quad\right| =0\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}h^3_{ijk}h^3_{ijkl}(p_m)+\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}h^4_{ijk}h^4_{ijkl}(p_m)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k}h^4_{ijk}h^4_{ijkl}(p_m)=0$$

yazılabilir. Böylece

$$\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{111}\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{2211}=-\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{222}\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1121}$$
$$\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{111}\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1112}=\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{222}\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1122}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.5 den

$$h^4_{1122}-h^4_{2211}=(2c+S)\mu$$
$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}(h^4_{1122}-h^4_{2211}) &= (2c+S)\lim_{m\to\infty}(h^4_{11})(p_m)\\
\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1122}-\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{2211} &= (2c+S).0\\
\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1122} &= \overset{\backsim}{h}{}^{4}_{2211}
\end{aligned}$$

ve

$$h^4_{1112}-h^4_{1121}=-(2c+S+S_3)\mu_1$$
$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}(h^4_{1112}-h^4_{1121}) &= \lim_{m\to\infty}[-(2c+S+S_3)(h^4_{12})](p_m)\\
\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1112}-\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1121} &= 0\\
\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1112} &\quad \overset{\backsim}{h}{}^{4}_{1121}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$(\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{111})^2\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{2211}+(\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{222})^2\overset{\backsim}{h}{}^{4}_{2211}=0$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k} h^4_{ijk}h^4_{ijkl}(p_m) &= 0 \Rightarrow \sum_{i,j,k}(\overset{\backsim 4}{h}_{ijk})^2\overset{\backsim 4}{h}_{ijkl} = 0\\
&\Rightarrow \sum_{i,j,k}\overset{\backsim 4}{h}_{ijkl} = 0\\
&\Rightarrow \overset{\backsim 4}{h}_{2211} = \overset{\backsim 4}{h}_{1122} = \overset{\backsim 4}{h}_{1121} = \overset{\backsim 4}{h}_{1112} = 0
\end{aligned}$$

Diğer yandan $S = \sum\limits_{i,j,\alpha}(h^\alpha_{ij})^2$ sabit olduğundan herhangi k ve l değerleri için

$$2\sum_{i,j,k,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ijk} = 0 \Rightarrow \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ijkl} + \sum_{i,j,k,l,\alpha} h^\alpha_{ijl}h^\alpha_{ijk} = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
\overset{\backsim}{S}_4 &= 0 \Rightarrow \sum_{i,j}(\overset{\backsim 4}{h}_{ij})^2 = 0\\
&\Rightarrow 2\sum_{i,j,k}\overset{\backsim 4}{h}_{ij}\overset{\backsim 4}{h}_{ijk} = 0\\
&\Rightarrow \sum_{i,j,k,l}\overset{\backsim 4}{h}_{ij}\overset{\backsim 4}{h}_{ijkl} + \sum_{i,j,k,l}\overset{\backsim 4}{h}_{ijl}\overset{\backsim 4}{h}_{ijk} = 0
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\sum_{i,j,k,l}\overset{\backsim 3}{h}_{ij}\overset{\backsim 3}{h}_{ijkl} + \sum_{i,j,k,l,\alpha}\overset{\backsim 3}{h}_{ijl}\overset{\backsim 3}{h}_{ijk} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i,j,k}(h^3_{ijk})^2(p_m) = 0$ eşitliğini de göz önüne alarak

$$\begin{aligned}
\overset{\backsim 3}{h}_{11}\overset{\backsim 3}{h}_{1112} + \overset{\backsim 3}{h}_{22}\overset{\backsim 3}{h}_{2212} &= 0 \Rightarrow 2\lambda\overset{\backsim\backsim 3}{h}_{1112} = 0\\
\overset{\backsim 3}{h}_{11}\overset{\backsim 3}{h}_{1121} + \overset{\backsim 3}{h}_{22}\overset{\backsim 3}{h}_{2221} &= 0 \Rightarrow 2\lambda\overset{\backsim\backsim 3}{h}_{1121} = 0\\
2\lambda\overset{\backsim\backsim 3}{h}_{1122} &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\alpha}(\overset{\backsim\alpha}{h}_{ijk})^2\\
2\lambda\overset{\backsim\backsim 3}{h}_{2211} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,\alpha}(\overset{\backsim\alpha}{h}_{ijk})^2
\end{aligned}$$

ve

$$(\overset{\backsim 3}{h}_{1122} + \overset{\backsim 3}{h}_{2211})^2 + (\overset{\backsim 3}{h}_{1112} + \overset{\backsim 3}{h}_{1121})^2 = 0$$

yazılır. Böylece Lemma 3.2.4 ve Lemma 3.2.5 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\sum_{i,j,k,l,\alpha}(h^{\alpha}_{ijkl})^2 &= \lim_{m\to\infty}[\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{\alpha}_{iijj}-h^{\alpha}_{jjii})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{\alpha}_{iijj}+h^{\alpha}_{jjii})^2 \\
&\quad +\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{\alpha}_{iiij}-h^{\alpha}_{iiji})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{\alpha}_{iisj}+h^{\alpha}_{iiji})^2] \\
&= \lim_{m\to\infty}[\sum_{i\neq j}(h^{3}_{iijj}-h^{3}_{jjii})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{3}_{iijj}+h^{3}_{jjii})^2 \\
&\quad +\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{3}_{iiij}-h^{3}_{iiji})^2+\sum_{i\neq j,\alpha}(h^{3}_{iisj}+h^{3}_{iiji})^2] \\
&= (\breve{h}^{3}_{1122}-\breve{h}^{3}_{2211})^2+(\breve{h}^{3}_{2211}-\breve{h}^{3}_{1122})^2 \\
&\quad +(\breve{h}^{3}_{1122}+\breve{h}^{3}_{2211})^2+(\breve{h}^{3}_{2211}+\breve{h}^{3}_{1122})^2 \\
&\quad +(\breve{h}^{3}_{1112}-\breve{h}^{3}_{1121})^2+(\breve{h}^{3}_{2221}-\breve{h}^{3}_{2212})^2 \\
&\quad +(\breve{h}^{3}_{1112}+\breve{h}^{3}_{1121})^2+(\breve{h}^{3}_{2221}+\breve{h}^{3}_{2212})^2 \\
&= 2(\breve{h}^{3}_{1122}-\breve{h}^{3}_{2211})^2 = 2[\breve{\lambda}(2c+S+\breve{S}_4)]^2 \\
&= [(\breve{h}^{3}_{11})^2+(\breve{h}^{3}_{22})^2](2c+S)^2
\end{aligned}
$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i,j,k,l,\alpha}(\breve{h}^{\alpha}_{ijkl})^2 = S(2c+S)^2 \tag{3.53}$$

elde edilir. Teorem 3.2.2 den

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2 &= -\Delta(S_3S_4) \\
&= -S_3\Delta S_4 - S_4\Delta S_3 - 2\Delta S_3\Delta S_4
\end{aligned}
$$

ve $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i,j,k}(h^{3}_{ijk})^2(p_m)=0$ ile $\breve{S}_4=0$ dan

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\Delta\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2(p_m) = -\lim_{m\to\infty}(S_3\Delta S_4)(p_m) = 2S(S+2c)S$$

bulunur. Teorem 3.2.2 den ve yukarıdaki eşitliklerden

$$2(S+2c)S^2 = \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\Delta\sum_{i,j,k,\alpha}(h^{\alpha}_{ijk})^2(p_m) = S(2c+S)^2-(\frac{9}{2}S+7c)(S+2c)S$$

bulunur ki $S=-\frac{10c}{11}$ dir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada anti de-Sitter uzayında tam maksimal spacelike yüzeylerin incelenmesinde gerekli olan yapı ve denklemler ele alınmıştır.
c sabit eğrilikli $H_2^4(c)$ anti de-Sitter uzayındaki M^2 tam maksimal spacelike yüzeyin ikinci temel formunun normunun karesi S olmak üzere aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

$i)$ M^2 yüzeyinin $H_2^4(c)$ total geodezik yüzeyi olabilmesi için gerek ve yeter şart $S = 0$ olmasıdır.

$ii)$ M^2 yüzeyinin hiperbolik Veronese Yüzeyi olabilmesi için gerek ve yeter şart $S = -\frac{4c}{3}$ olmasıdır.

$iii)$ M^2 yüzeyinin $H_2^4(c)$ uzayının $H_1^3(c)$ total geodezik yüzeyin hiperbolik yüzeyi olabilmesi için gerek ve yeter şart $S = 2c$ olmasıdır.

Bu çalışmadaki benzer özellikler tam maksimal timelike yüzeyler, farklı boyutta ve indekse sahip anti de-Sitter ve de-Sitter Uzaylarında da ele alınarak incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Calabi, E. 1970. Examples of Bernstein problems for nonlinear equations, Proc. Symp. Pure and Appl. Math. 15, 223-230.

Cheng, S. Y., Yau, S. T., 1976. Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz Minkowski space. Ann. of Math., 104; 407-419.

Cheng, Q. M. and H. Nakagawa, 1990. Totally umbilical hypersurfaces, Hiroshima Math. J. 20, 1-10.

Cheng, Q. M., 1991. Complete spacelike submanifolds in a de-Sitter space with parallel mean curvature. Math. Z., 206; 333 -339.

Cheng, Q. M., 1994. Complete maximal spacelike hypersurfaces of $H_2^4(c)$. Manuscripta Math., 82; 149-160.

Cheng, Q. M., 1994. Spacelike surfaces in an anti de-Sitter space. Colloquium Math. J., 46, 201 -208.

Cheng, Q. M., 2000. Complete maximal spacelike surfaces in an anti de-Sitter space $H_2^4(c)$. Glasgow Math. J., 42; 139-156.

Cheng, Q. M.,2000 Complete maximal spacelike surfaces in an $H_2^4(c)$, Glasgow Math.J. **42**, 139-156.

Chern, S. S., Do Carmo, M., Kobayashi, S., 1970. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, in Functional analysis and related fields. (Springer- Berlin), 59-750.

Duggal, L. K., Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers, 300 p., AH Dordrecht

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003. Tensör Geometri. Ankara Üniversitesi, 256s., Ankara

Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2000.

Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt III, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2004.

Ishihara, T., 1988. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian spaceform of constant curvature. Michigan Math. J., 35, 345-352.

Omori, H. 1967. Isometric immersion of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19, 205-214.

O'Neill, B., 1966. Elementary Differentiel Geometry Academic Press, Inc., 416p., New York.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, Inc., 468p., New York.

Simons, J. 1968. Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math. 88, 62-105

Treibergs. A. E. 1982, Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space, Invent.Math. **66**, 39-56

Yau, S. T., 1975. Harmonic functions on complete Riemaniann manifolds. Comm. Pureand Appl. Math., 28, 201-228.

Willmore, T. J., 1993. Riemannian Geometry. Clarendon Prees, Oxford, 318 p.