Diskrit Oluşum Denklemlerinin İntegrallenebilirliği

Ömer Ünsal

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2012

Integrability of Discrete Evolution Equations

Ömer Ünsal

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

June, 2012

Diskrit Oluşum Denklemlerinin İntegrallenebilirliği

Ömer Ünsal

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Haziran 2012

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Ömer Ünsal'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Diskrit Oluşum Denklemlerinin İntegrallenebilirliği" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Üye : Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Halis BİLGİL

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Kesikli değerler kümesinde değişen değişkenlere sahip problemler fark denklemleriyle modellenir. Ayrıca pür fark ve fark oluşum denklemlerinin birçok bilim dalında uygulamaları mevcuttur. Bu yüksek lisans tezi kapsamında da fark oluşum denklemlerinin integrallenebilirliği üzerine çalışılmıştır.

Taylor seri açılımı kullanılarak uygulanan sonlu farklar metodu yardımıyla ayrıklaştırma işleminin nasıl yapıldığı adi ve kısmi türevli denklemler için ayrı ayrı gösterilmiş, değişkenlerin birinin veya tamamının ayrıklaştırılma işlemi verilmiştir. Ayrıca literatürde sıklıkla kullanılan fark denklemlerinin bir listesi verilmiştir.

Fark oluşum denklemlerinin çeşitli yöntemlerle integrallenebilirliği incelenmiş, bu denklemlerin sürekli hallerinde incelenen Lax çifti, hareket integrali, Miura dönüşümleri, Spektral problem gibi kavramların fark halindeki karşılıkları verilmiştir.

Bunlara ek olarak en çok bilinen Schrödinger denklemi, 3. Mertebeden Schrödinger fark, Kuple Schrödinger fark ve Modifiye Schrödinger fark denklemlerinden çok ölçekli açılım metodu ile Korteweg-de-Vries tipi fark denklemleri elde edilmiştir.

Fark oluşum denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak integrallenebilir Schrödinger fark denklemi ile Klein-Gordon fark denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir.

Ayrıca bu çalışmaların devamı olarak çeşitli fark oluşum denklemlerinden diğer oluşum denklemlerinin çok ölçekli açılım metodu ile elde edilebilirliği incelenebilir.

Anahtar Kelimeler: Ayrıklaştırma, integrallenebilirlik, çok ölçekli açılım metodu, tam çözüm.

SUMMARY

The problems which have variables changes in the set of discrete values are represented by disrcete equations. Moreover, pure discrete and discrete evolution equations have applications in many science areas. This master thesis is a scientific work on the integrability of discrete evolution equations.

Discretization is shown for both ordinary and partial differential equations by using finite difference method used with the Taylor’s expansion. What’s more, discretization of one and all of variables are given. However, a list of commonly used discrete evolutiıon equations is given.

The integrability of discrete evolutiıon equations is studied with different methods. The concepts of discrete evolution equations, such as Lax pairs, integral of motion, Miura transformation and spectral problem, corresponding to the continuum form are given.

Furthermore, derivation of discrete Korteweg-De-Vries equation from discrete forms of most famous Schrödinger equation, Schrödinger equation of third order, Coupled Schrödinger equation and Modified Schrödinger equation by using multiple scales method is shown.

Exact solutions of integrable discrete Schrödinger equation and discrete Klein-Gordon equation are found by using the exponential function method which is used to find the exact solution of discrete evolution equations.

As the continuation of this work, the derivation of other discrete evolution equations from another one with the aid of mulltiple scales method can be studied.

Keywords: Discretization, integrability, multiple scales method, exact solution.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam süresince bilgileriyle beni aydınlatan, değerli görüşlerinden faydalandığım, ilgisini ve desteğini esirgemeyen Hocalarım, Sayın,

Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER ve Doç. Dr. Filiz TAŞCAN'a,

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, her kararımda yanımda olan annem

Neriman ÜNSAL'a

en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans çalışmalarım boyunca beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2012 Ömer ÜNSAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
ALNLS	Ablowitz-Ladik lineer olmayan Schrödinger
DNLS	Diskrit lineer olmayan Schrödinger
KdV	Korteweg de Vries
mKdV	Modifiye Korteweg de Vries
NLS	Lineer olmayan Schrödinger

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Giriş

Fark (diskrit) denklemleri; mühendislik, kimya, fizik, biyoloji(genetik), kuantum(radyasyon), ekonomi gibi birçok bilim dallarında kullanılmaktadır. Fark denklemleriyle diferensiyel denklemler çok benzerdir. Ancak fark denklemleri, diferensiyel denklemlere nazaran daha yeni bir çalışma alanıdır. Kesikli değerler kümesinde değişen bazı değiskenlere sahip problemler genellikle fark denklemlerini içeren matematik modellerle ifade edilir. Bir fonksiyonun değerini, köklerini veya bir diferensiyel denklemin çözümünü yaklaşık olarak belirlemek için kullandığımız Sonlu Farklar Metodu, Newton Metodu gibi iterasyon fonksiyonu oluşturarak çözüm yapılan yöntemlerde, aslında temel problem fark denklemlerini oluşturmakdır. Ayrıca son yıllarda lineer olmayan integrallanebilir diferensiyel fark denklemlerine olan ilgi bir hayli artmıştır. İntegrallenebilen diferensiyel fark denklemleri "Lax çiftleri, Hamiltoniyen sistemler, korunum kanunları, Backlund dönüşümleri, Soliton çözümlere" sahip olmakla kalmaz aynı zamanda "Matematiksel Fizik, Nümerik Analiz, İstatistiksel Fizik, Kuantum Fiziği" gibi birçok uygulamada kullanılır. Ayrıca fark denklemlerini belirtmek için çoğu zaman örgü, ağ ve bunların ingilizce karşılığı olan latis yada ayrıklaştırılmış anlamına gelen diskrit kelimeleri yaygınca kullanılır.

1.2 Sonlu Fark Formülasyonları

Kısmi diferensiyel denklemlerde yer alan türevlerin bilgisayarda sayısal hesabı için yaklaşık formda yazılması gerekir. Bu tip ayrıklaştırma işlemlerine genel olarak **sonlu fark formülasyonu** adı verilir. Sonlu fark formülasyonları çoğu zaman Taylor seri açılımına dayanılarak yapılır(Elaydi, 2005; Leveque, 2007; Sloughter, 2000). Bunun yanında polinomlar yardımıyla da ayrıklaştırma yapılabilir.

1.2.1 Taylor seri açılımı ve birinci türev için yaklaşımlar

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $(x+\Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ... \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Delta x)^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan birinci türev çekilirse;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - ... \tag{1.2}$$

veya

$$O(\Delta x) = -\frac{\Delta x}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - ... \tag{1.3}$$

hata terimi olmak üzere kısaca,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{1.4}$$

yazılabilir. Bu ifade f büyüklüğünün x değişkenine göre birinci türevi için yapılmış birinci mertebeden bir yaklaşımdır. İndissel formda

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{1.5}$$

şeklinde gösterilir ve türev için **birinci mertebeden ileri fark formülasyonu** olarak adlandırılır. Adım uzunluğu azaltıldıkça bu yaklaşık formülün gerçek türeve o kadar yakın olacağı açıktır.

Taylor açılımı,

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ... \tag{1.6}$$

şeklinde yazılarak benzeri işlemlerle

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{1.7}$$

şeklinde **birinci mertebeden geri fark formülasyonu** elde edilir.

(1.1) denkleminden (1.6) denklemi çıkarılırsa,

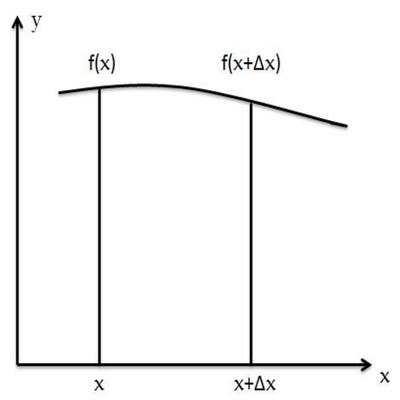
$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ... \tag{1.8}$$

elde edilir. Buradan $\frac{\partial f}{\partial x}$ çekilirse

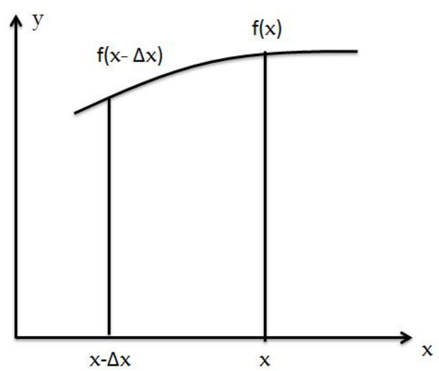
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \tag{1.9}$$

elde edilir. Bu ifadeye **birinci türev için merkezi fark formülasyonu** adı verilir. Dikkat edilirse bu formülasyon ikinci mertebedendir.

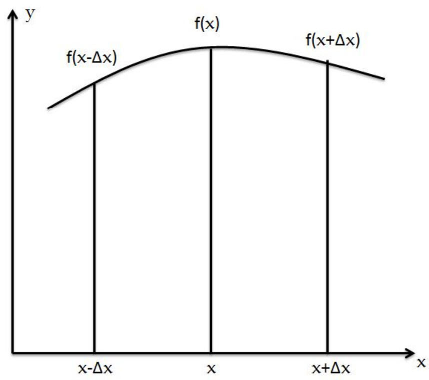
Birinci türev için yazılan formülasyonlarda hangi ağ noktalarının kullanıldığı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir. Şekiller sırasıyla ileri fark, geri fark ve merkezi fark formülasyonlarını göstermektedir.



Şekil 1.1 İleri fark formülasyonu



Şekil 1.2 Geri fark formülasyonu



Şekil 1.3 Merkezi fark formülasyonu

1.2.2 İkinci türev için formülasyon

Taylor serisinin $(x+2\Delta x)$ ve $(x-2\Delta x)$ noktalarındaki açılımları

$$f(x+2\Delta x) = f(x)+(2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+... \quad (1.10)$$

$$f(x-2\Delta x) = f(x)-(2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+... \quad (1.11)$$

şeklinde yazılabilir. (1.1) eşitliği 2 ile çarpılıp (1.10) denkleminden çıkartılırsa;

$$f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)=-f(x)+(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+... \quad (1.12)$$

elde edilir. Bu eşitlikten ikinci türev çekilirse,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \quad (1.13)$$

bulunur. Bu bağıntı indissel formda yazılırsa;

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \quad (1.14)$$

şeklinde **ikinci türevin ileri fark formülü** elde edilir. (1.6) eşitliği 2 ile çarpılıp (1.11)denkleminden çıkartılırsa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f(x)-2f(x-\Delta x)+f(x-2\Delta x)}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \quad (1.15)$$

elde edilir. Bu bağıntı indissel formda yazılırsa

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_i-2f_{i-1}+f_{i-2}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \quad (1.16)$$

şeklinde **ikinci türevin geri fark formülü** elde edilir.

(1.1) ve (1.6) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)=2f(x)+(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{2\,(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+... \tag{1.17}$$

elde edilir. Buradan ikinci türev çekilirse

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}+O((\Delta x)^2) \tag{1.18}$$

elde edilir. Bu bağıntı indissel formda yazılırsa

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{(\Delta x)^2}+O((\Delta x)^2) \tag{1.19}$$

şeklinde **ikinci türevin merkezi fark formülü** elde edilir.

1.2.3 Kısmi türevli denklemlerin fark denklemlerine dönüştürülmesi

$U=f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0) noktasında Taylor serisine açıldığında

$$\begin{aligned} f(x,y) \;\approx\;& f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}[f_x(x_0,y_0)(x\text{-}x_0)+f_y(x_0,y_0)(y\text{-}y_0)] \\ &+\frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0,y_0)(x\text{-}x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x\text{-}x_0)(y\text{-}y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(y\text{-}y_0)]+... \end{aligned} \tag{1.20}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} x-x_0 &= h \;\text{ ise ileri fark} \\ x-x_0 &= -h \;\text{ ise geri fark} \\ y-y_0 &= k \end{aligned} \tag{1.21}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$f(x_0+h,y_0+k)\approx f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}[f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k]+... \tag{1.22}$$

gibi her iki değişkeninde diskrit edildiği duruma **ayrıklaştırma**, sadece konumsal değişkenin diskrit edildiği duruma **yarı ayrıklaştırma** denir. Buna rağmen literatürde sadece konumsal değişkenlerin diskrit edildiği duruma ayrıklaştırma denildiğide çokça görülür.

$U=U(x,t)$ olmak üzere, bu fonksiyonun (x_0,t) noktası etrafında Taylor seri açılımı

$$U(x,t)\approx U(x_0,t)+\frac{1}{1!}[U_x(x_0,t)(x-x_0)]+\frac{1}{2!}[U_{xx}(x_0,t)(x-x_0)^2]+... \tag{1.23}$$

ve

$$U(x_0+h,t)=U_{n+1}(t), U(x_0-h,t)=U_{n-1}(t), U(x_0,t)=U_n(t) \tag{1.24}$$

olmak üzere,

$$U_{n+1}(t) = U_n(t)+[U_x(x_0,t)h]+\frac{1}{2!}[U_{xx}(x_0,t)h^2]+... \tag{1.25}$$

$$U_{n-1}(t) = U_n(t)-U_x(x_0,t)h+\frac{1}{2!}[U_{xx}(x_0,t)h^2]+... \tag{1.26}$$

ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa; x değişkenine göre birinci türev

$$U_x(x_0,t)=\frac{U_{n+1}(t)-U_{n-1}(t)}{2h}, \tag{1.27}$$

taraf tarafa toplanırsa, x değişkenine göre ikinci türev

$$U_{xx}(x_0,t)=\frac{U_{n+1}(t)-2U_n(t)+U_{n-1}(t)}{h^2} \tag{1.28}$$

olarak bulunur.

Buradan hareketle

$$iu_t+u_{xx}=|u|^2 u \tag{1.29}$$

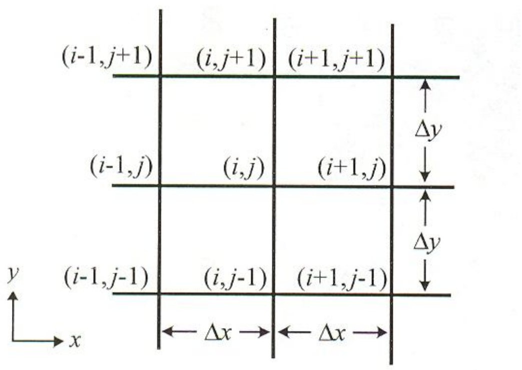
tipindeki Schrödinger denkleminin fark formu

$$i\dot{u}_n+\frac{u_{n+1}(t)-2u_n(t)+u_{n-1}(t)}{h^2}=|u_n|^2 u_n \tag{1.30}$$

olarak bulunur.

1.2.4 Değişkenlerin tümünün diskrit edilmesi hali

Ayrıklaştırma için bölge üzerinde



Şekil 1.4 Ayrıklaştırma ağı

gibi bir ağ alalım. u, iki değişkenli bir fonksiyon ve bağımsız değişkenler x, y olsunlar. Bu fonksiyonun x_i ve y_j noktasındaki değerini

$$u_{i,j} = u\left(x_i, y_j\right) \tag{1.31}$$

ile gösterelim.

$u(x, y)$ fonksiyonu, Şekil 1.4 de görüldüğü gibi, serbest değişkenleri Δx ve Δy gibi eşit aralıklarla sıralanan bir ağ üzerinde verilsin. Şekilde ağ üzerindeki noktaların indisleri görülmektedir. x_i ve y_j noktası civarında $u_{i+1,j}$ ve $u_{i-1,j}$ değerleri,

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ... \tag{1.32}$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ... \tag{1.33}$$

dir. $u(x, y)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) noktasında x **değişkenine göre kısmi türevi**, $\partial u/\partial x$, yukarıda verilen (1.32) eşitliğinden veya (1.33) eşitliğinden veya (1.32) ile (1.33) eşitliğinin birbirinden çıkartılmasıyla aşağıda verilen üç ayrı şekilde elde edilir. (Not: (1.32) ve (1.33) eşitliklerinin sağ tarafındaki terimlerden ikisi kullanılmış üçüncü terim hata mertebesini vermektedir).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O\left(\Delta x\right) \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O\left(\Delta x\right) \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left[(\Delta x)^2\right]. \tag{1.36}$$

Bu türevlerden (1.34); **ileri fark**, (1.35) **geri fark** ve (1.36) ise **merkezi fark** formunda yazılmıştır. Benzer şekilde; $u(x, y)$ fonksiyonun (x_i, y_j) noktasında y **değişkenine göre** kısmi türevi, $\partial u/\partial y$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O\left(\Delta y\right) \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O\left(\Delta y\right) \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O\left[\left(\Delta y\right)^2\right] \tag{1.39}$$

olmak üzere üç farklı şekilde bulunur. **İkinci türev** ise (1.32) ve (1.33) eşitliklerinin toplanmasıyla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\left(\Delta x\right)^2} + O\left[\left(\Delta x\right)^2\right] \tag{1.40}$$

olarak bulunur. Fonksiyonun y **değişkenine göre ikinci kısmi türevi**, benzer şekilde,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\left(\Delta y\right)^2} + O\left[\left(\Delta y\right)^2\right] \tag{1.41}$$

olarak bulunur. Karışık türev ise, (1.36) ve (1.39) ile verilen birinci türevin merkezi fark bağıntısı kullanılarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\Delta y}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j-1}\right] \tag{1.42}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O\left[\left(\Delta x + \Delta y\right)^2\right] \tag{1.43}$$

şeklinde bulunur. u fonksiyonunun x değişkenine göre üçüncü, dördüncü ve karışık türevlerinin hesaplanışı ve sonuçları aşağıda verilmiştir.

Üçüncü mertebeden türevler

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left[\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i+1,j} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i-1,j}\right] + O\left[\left(\Delta x\right)^2\right] \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2\left(\Delta x\right)^3} + O\left[\left(\Delta x\right)^2\right] \tag{1.45}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + 2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{2\left(\Delta y\right)^3} + O\left[\left(\Delta y\right)^2\right] \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left[\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i+1,j} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i-1,j}\right] + O\left[\left(\Delta x + \Delta y\right)^2\right] \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + 2u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} + O\left[(\Delta x + \Delta y)^2\right] \tag{1.48}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2\Delta y}\left[\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j+1} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j-1}\right] + O\left[(\Delta x + \Delta y)^2\right] \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + 2u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2} + O\left[(\Delta x + \Delta y)^2\right]. \tag{1.50}$$

Dördüncü mertebeden türevler

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i+1,j} - 2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i-1,j}\right] + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{(\Delta x)^4} + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{1.52}$$

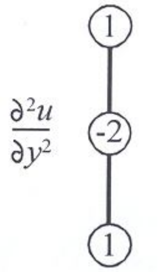
$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{(\Delta y)^4} + O\left[(\Delta y)^2\right]. \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j+1} - 2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j-1}\right] + O\left[(\Delta x + \Delta y)^2\right] \tag{1.54}$$

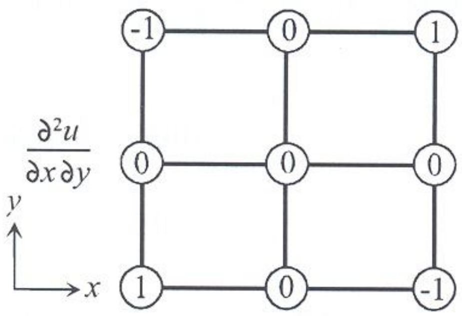
$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i-1,j}}{(\Delta y)^2(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{(\Delta y)^2(\Delta x)^2} \tag{1.55}$$

olarak elde edilir. Yukarıda verilen türevlerde fonksiyon değerlerinin katsayıları hatırlamak ve bazı uygulamalarda yardımcı olması için aşağıdaki şekillerde verilen şablonlar kullanılır. Şablonlarda, tek mertebeli türevlerde (birinci ve üçüncü türev) ilgili eksenin yönü önemli olduğundan, eksenin yönü şekilde gösterilmiştir. Eksen yönü olarak şekilde gösterilen yönün tersi alındığında, değiştirilen eksen doğrultusundaki katsayıların simetriğini almak gerekir. Buna ait örnek şekilde $\partial^2 u/\partial x \partial y$ ve $\partial^3 u/\partial x^3$ türevinde gösterilmiştir.

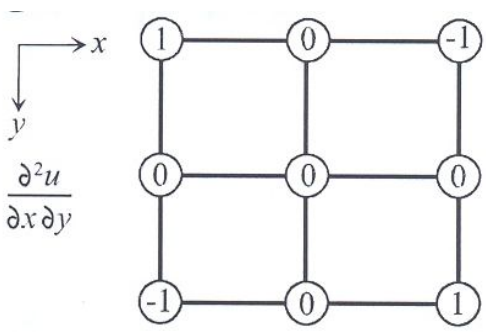
Şekil 1.5 x değişkenine göre ikinci mertebeden türev



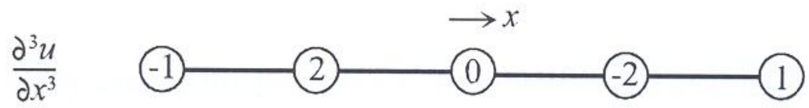
Şekil 1.6 y değişkenine göre ikinci mertebeden türev



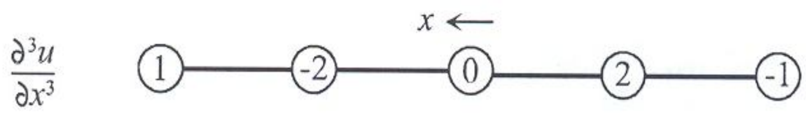
Şekil 1.7 y ve x değişkenlerine göre ikinci mertebeden karışık türev



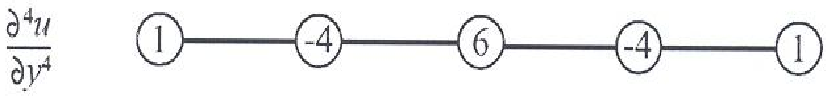
Şekil 1.8 x ve y değişkenlerine göre ikinci mertebeden karışık türev



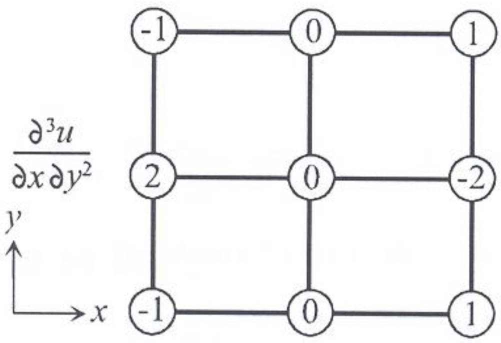
Şekil 1.9 x değişkenine göre üçüncü mertebeden türev



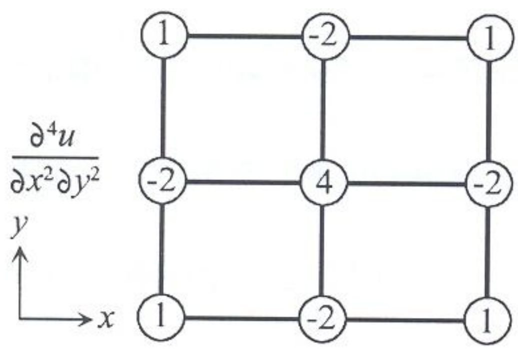
Şekil 1.10 x değişkenine göre üçüncü mertebeden türev



Şekil 1.11 y değişkenine göre dördüncü mertebeden türev



Şekil 1.12 y ve x değişkenlerine göre üçüncü mertebeden karışık türev



Şekil 1.13 y ve x değişkenlerine göre dördüncü mertebeden karışık türev

Ayrıca lieratürde en çok kullanılan fark oluşum denklemleri aşağıda verilmiştir.

Çizelge 1.1 Bazı fark oluşum denklemleri

Toda Latisi	$\frac{d^2u_n}{dt^2} = e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n-u_{n-1}}$
Klein-Gordon zinciri	$\frac{d^2u_n}{dt^2} - w_1^2\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + w_0^2 u_n + r u_n^3 = 0$
Sine-Gordon zinciri	$\frac{d^2u_n}{dt^2} - w_1^2\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + w_0^2 \sin(u_n) = 0$
Hybrid Latisi	$\frac{du_n}{dt} = \left(1 + \alpha u_n + \beta u_n^2\right)\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)$
Langmuir zinciri	$\frac{du_n}{dt} = u_n\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)$
Rölativistik Toda Latisi	$\frac{du_n}{dt} = \left(1 + \alpha u_n\right)\left(v_n - v_{n-1}\right)$ $\frac{dv_n}{dt} = v_n\left(u_{n+1} - u_n + \alpha v_{n+1} - \alpha v_{n-1}\right)$
Sine-Gordon denklemi	$\frac{du_{n+1}}{dt} - \frac{du_n}{dt} - \sin(u_{n+1} + u_n) = 0$
Toda denklemi	$\frac{d^2u_n}{dt^2} - \left(\frac{du_n}{dt} + 1\right)\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) = 0$
DNLS	$i\frac{du_n}{dt} = \left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + \lvert u_n\rvert^2 u_n$
ALNLS	$i\frac{du_n}{dt} = \left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + \lvert u_n\rvert^2 \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$
mKdV equation 1	$\frac{du_n}{dt} = \left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)\left(1 + u_n^2\right)$
mKdV equation 2	$\frac{du_n}{dt} = \left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)\left(1 + u_n\right)^2$

1.3 Tezin Organizasyonu

İzleyen bölümlerde fark oluşum denklemlerinin çeşitli metodlar yardımıyla integrallenebilirliklerine, sürekli oluşum denklemlerde karşılaşılan Lax çifti, hareket integrali gibi kavramların fark oluşum denklemlerindeki karşılıklarına değinilmektedir. Çok ölçekli açılım metodu kullanılarak Schrödinger tipi denklemlerden KdV tipi denklemlerin elde edilişi verilip, integrallenebilir denklemlerden integrallenebilir denklemlerin, integrallenebilir olmayan denklemlerden de integrallenebilir olmayan denklemlerin elde edildiği örnekler sunulmaktadır. Fark oluşum denklemlerinin korunum kanunu cinsinden yaılabilirliği açıklanıp çeşitli örnekler verilmiştir. Son olarak, bazı fark oluşum denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

İNTEGRALLENEBİLİRLİK ve FARK OLUŞUM DENKLEMLERİ

2.1 Giriş

Uygulamalı bilimler adı altında çalışılan "merdiven tipi elektrik yolları, fizikteki parçacıkların ve latislerin titreşimleri, istatistiksel mekanikteki dönme latisleri, kristal kavramı, moleküler zincirler" gibi birçok problem diferensiyel fark denklemleriyle veya pür diskrit denklemlerle modellenir. Fark denklemleri ve onların q-analogları kuantum gruplarının temsilinde ve dolayısıyla özel fonksiyonlar teorisinde önemli rol oynarlar. Bunların yanında fark denklemlerinin yoğunca kulanıldığı bir başka alan ise nümerik yaklaşımlardır. Bugüne kadar kısmi diferensiyel denklemlerde olduğu kadar olmasa da fark denklemlerinin integrallenebilirliğini incelemek içinde birçok çalışma yapılmıştır.

Bu bağlamda kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğini incelemek için geliştirilen metodların fark halleri için uyarlaması veya benzer metodlar incelenmiştir. Lineer olmayan problemlerin genelde integrallenebilir olmadığı ve çözülemediği görülmüştür. Bu tür problemlerin genelde stabil(durgun) çözümleri, küçük bir parametre yardımıyla pertürbasyon analizi yada denklemi lineerleştirme yoluna gidilerek çözümü incelenir.

Bu bilgilerin ışığında, eğer bir fark oluşum denklemi yada pür fark denklem aşağıdaki kriterlerden birini sağlıyorsa **integrallenebilir** olduğu söylenir (Sahadevan, 2001).

· Denklem için integrallenebilirlik (compatibility) koşulunu sağlayan bir **Lax çifti** bulunabilir.

· Denklemin gerekli sayıda **hareket integrali** vardır.

· Denkleme **tekillik sınırlandırması** metodu uygulandığında geçerli sonuç alınır (Grammaticos, et al., 1991; Ramani, et al., 1992, 1993; Grammaticos and Ramani, 2000).

· Denklem lineer değildir ve uygun bir **dönüşüm** ile lineer hale getirilebilir.

· Denklem **cebirsel entropi** metodunu sağlamaktadır (Lafortune, et al., 1997; Ramani and Grammaticos, 2000; Ohta, et al., 1999; Tamizhmani et al., 1999).

· Denklem **korunum kanunu** cinsinden yazılabilir (Ablowitz and Herbst, 1993).

2.2 Lax Çifti ile İntegrallenebilirlik Testi

$$u_n = u_n(t) \quad , \quad \dot{u}_n = \frac{du_n(t)}{dt} \tag{2.1}$$

olmak üzere,

$$\dot{u}_n = F(...,\ u_{n-1},\ u_n,\ u_{n+1},\ ...) \tag{2.2}$$

şeklindeki bir diferensiyel fark denklemi için Lax çifti

$$V_{n+1} = M_n V_n \tag{2.3}$$

$$\frac{dV_n(t)}{dt} = N_n V_n \tag{2.4}$$

olarak verilir. Burada M_n ve N_n (2.3) ve (2.4) eşitliklerini sağlayan ve bilinmeyen birer matristir.

$$\frac{d(SV_n)}{dt} = S\frac{dV_n(t)}{dt} \tag{2.5}$$

$$SV_n = V_{n+1} \tag{2.6}$$

ile tanımlanan S operatörüne kaydırma (şift) operatörü adı verilir. (2.3)-(2.4) ve (2.5)-(2.6) arasındaki ilişkiyi kuran ve integrallenebilme koşulunun bir başka ifadesi olan eşitlik

$$\frac{dM_n(t)}{dt} = N_{n+1}M_n - M_n N_n \tag{2.7}$$

olarak verilir. Şimdi bunun nasıl elde edildiğini gösterelim.

(2.3)-(2.4) ve (2.5)-(2.6) verildiğinde, (2.5)-(2.6) göz önüne alınarak (2.4) eşitliğinden

$$\frac{dV_{n+1}(t)}{dt} = N_{n+1}(t)V_{n+1}(t) \tag{2.8}$$

yazılabilir. Ayrıca (2.3) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{dV_{n+1}(t)}{dt} = \frac{dM_n(t)}{dt}V_n(t) + M_n(t)\frac{dV_n(t)}{dt} \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.8) ve (2.9) göz önünde bulundurularak,

$$N_{n+1}(t)V_{n+1}(t) = \frac{dM_n(t)}{dt}V_n(t) + M_n(t)\frac{dV_n(t)}{dt} \tag{2.10}$$

$$N_{n+1}(t)M_n(t)V_n(t) = \frac{dM_n(t)}{dt}V_n(t) + M_n(t)N_n(t)V_n(t) \tag{2.11}$$

bulunur. (2.11) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\left[\frac{dM_n(t)}{dt} + M_n(t)N_n(t) - N_{n+1}(t)M_n(t)\right]V_n(t) = 0 \tag{2.12}$$

ve buradan da

$$\frac{dM_n(t)}{dt} + M_n(t)N_n(t) - N_{n+1}(t)M_n(t) = 0$$

yada

$$\frac{dM_n(t)}{dt} = N_{n+1}(t)M_n(t) - M_n(t)N_n(t)$$

elde edilir.

Literatürde, bir denklemin Lax çiftinin var olması ile o denklemin integrallenebilir olması birbirine denk tutulur. Çünkü eğer bir denklemin Lax çifti var ise, o denklem ters saçınım dönüşümü (inverse scattering transform) metodu ile çözülebilir olduğu söylenir.

Örnek: İlk olarak Volterra (V3)

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{2.13}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem için Lax çifti Faddeev ve Takhtajan tarafından

$$M_n = \begin{bmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N_n = \begin{bmatrix} u_n & \lambda u_n \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

olarak bulunmuştur (Faddeev, 1987). Şimdi verilen bu M_n, N_n değerlerinin gerçekten V3 denkleminin bir Lax çifti olduğunu gösterelim.

Bunun için (2.9) eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$\frac{dM_n(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{u}_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} & \lambda u_{n+1} \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_n \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
N_{n+1}M_n - M_nN_n &= \begin{bmatrix} u_{n+1} & \lambda u_{n+1} \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n & \lambda u_n \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda u_{n+1} - \lambda u_{n+1} & u_n u_{n+1} \\ -\lambda^2 + \lambda^2 - u_n & -\lambda u_n \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \lambda u_n - \lambda u_n & -\lambda^2 u_n + \lambda^2 u_n + u_n u_{n-1} \\ -u_n & -\lambda u_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & u_n\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \dot{u}_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{dM_n}{dt}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla V3 denklemi ters saçınım dönüşümü metodu ile çözülebilir. Yani integrallenebilirdir (Chandre and Eilbeck, 2002).

Örnek: Beşinci mertebeden Volterra (V5)

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1} + \alpha\left(u_{n+2} - u_{n-2}\right)) \tag{2.16}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem için Lax çifti

$$M_n = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 + u_n \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

$$N_n = \begin{bmatrix} u_n + \alpha\left(u_{n+1} + u_{n-1}\right) & \lambda\left(u_n - u_{n-1} + \alpha\left(u_{n+1} - u_n + u_{n-1} - u_{n-2}\right)\right) \\ 0 & u_{n-1} + \alpha\left(u_n + u_{n-2}\right) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

olarak verilir. Şimdi verilen bu M_n, N_n değerlerinin gerçekten V5 denkleminin bir

Lax çifti olduğunu gösterelim.

$$\frac{dM_n}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{u}_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

$$N_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1}+\alpha\left(u_{n+2}\text{-}u_n\right) & \lambda\left(u_{n+1}\text{-}u_n+\alpha\left(u_{n+2}\text{-}u_{n+1}+u_n\text{-}u_{n-1}\right)\right) \\ 0 & u_n+\alpha\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

olmak üzere,

$N_{n+1}M_n\text{-}M_nN_n$

$$= \begin{bmatrix} u_{n+1}+\alpha\left(u_{n+2}\text{-}u_n\right) & \lambda\left(u_{n+1}\text{-}u_n+\alpha\left(u_{n+2}\text{-}u_{n+1}+u_n\text{-}u_{n-1}\right)\right) \\ 0 & u_n+\alpha\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2+u_n \\ \text{-}1 & \text{-}\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2+u_n \\ \text{-}1 & \text{-}\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_n+\alpha\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) & \lambda\left(u_n\text{-}u_{n-1}+\alpha\left(u_{n+1}\text{-}u_n+u_{n-1}\text{-}u_{n-2}\right)\right) \\ 0 & u_{n-1}+\alpha\left(u_n+u_{n-2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda u_{n+1}+\alpha\lambda\left(u_{n+2}\text{-}u_n\right) & \alpha u_n\left(u_{n+2}\right)\text{-}\lambda^2\left(u_{n+1}\text{-}u_n+\alpha\left(u_{n+2}\text{-}u_{n+1}+u_n\text{-}u_{n-1}\right)\right) \\ \text{-}\alpha\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) & \text{-}\lambda\alpha\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \text{-}\lambda\left(u_{n+1}\text{-}u_n+\alpha\left(u_{n+2}\text{-}u_{n+1}+u_n\text{-}u_{n-1}\right)\right) & \lambda^2u_{n+1}+\alpha\lambda^2\left(u_{n+2}\text{-}u_n\right)+u_nu_{n+1}\text{-}\alpha u_n^2 \\ \text{-}u_n & \text{-}\lambda u_n \end{bmatrix}$$

$$\text{-} \begin{bmatrix} \alpha\lambda\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) & \alpha u_n\left(u_n+u_{n-2}\right)+\lambda^2u_{n-1}+\alpha\lambda^2\left(u_n+u_{n-2}\right) \\ \text{-}\alpha\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) & \text{-}\lambda\left(u_n\text{-}u_{n-1}+\alpha\left(u_{n+1}\text{-}u_n+u_{n-1}\text{-}u_{n-2}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{-} \begin{bmatrix} \lambda u_n & \lambda^2\left(u_n\text{-}u_{n-1}+\alpha\left(u_{n+1}\text{-}u_n+u_{n-1}\text{-}u_{n-2}\right)\right)+u_nu_{n-1} \\ \text{-}u_n & \text{-}\lambda u_{n-1}\text{-}\lambda\alpha\left(u_n+u_{n-2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & u_n(u_{n+1}\text{-}u_{n-1}+\alpha\,(u_{n+2}\text{-}u_{n-2})) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dot{u}_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{dM_n}{dt}$$

lunur. Dolayısıyla V5 denklemi ters saçınım dönüşümü metodu ile çözülebilir. Yani integrallenebilirdir (Chandre and Eilbeck, 2002).

Sırasıyla V3 ve V5 denklemleri için çözülen bu iki örneğin ışığında, N_n matrisini

$$A_n = u_n + \alpha\,(u_{n-1} + u_{n+1}) \tag{2.21}$$

olmak üzere, en genel olarak

$$N_n = \begin{bmatrix} A_n & \lambda\,(A_n - A_{n-1}) \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\alpha = 0$ alınmasıyla, V3 denklemi için

$$M_n = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 + u_n \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad , \quad N_n = \begin{bmatrix} u_n & \lambda\,(u_n - u_{n-1}) \\ 0 & u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Lax çifti elde edilir.

Genel olarak,

$$\dot{u}_n = u_n \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\,(u_{n+j} - u_{n-j}) \tag{2.23}$$

Vm denklemi için

$$A_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} u_{n+j+2i-1} \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabilir (Chandre and Eilbeck, 2002). Narita, duble D operatörünü kullanarak

$$\alpha_i = 1 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{2.25}$$

için Vm nin intgerallenebilir olduğunu, tekillik sınırlandırması metodunu kullanarak $\alpha_i = 1$ durumunda integrallenebilir olduğunu diğer durumlarda integrallenebilir olmadığını göstermiştir (Narita, 1982).

İntegrallenebilir olduğu bilinen bir başka fark oluşum denklemide mKdV denkleminin fark hali olan

$$\dot{u}_n = \left(1 + u_n^2\right)\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) \tag{2.26}$$

denklemidir. mKdV denkleminin fark halleri genel olarak

$$\dot{u}_n = \left(1 + u_n^2\right)\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(u_{n+j} - u_{n-j}\right) \tag{2.27}$$

şeklinde yazılabilir.

$$A_n = \sum_{j=1}^{m}\beta_j\sum_{i=0}^{j-1}u_{n-j+i}u_{n+i}\ ,\ B_n = \sum_{j=1}^{m}\left(u_{n-j} + u_{n+j-i}\right)\sum_{i=j}^{m}\beta_i \tag{2.28}$$

olmak üzere, (2.27) denklemi için bir Lax çifti

$$M_n = \begin{bmatrix} \lambda & u_n \\ -\lambda^2 u_n & \lambda \end{bmatrix}\quad ,\quad N_n = \begin{bmatrix} A_n & B_n/\lambda \\ -\lambda B_n & A_n \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

olarak bulunur (Chandre and Eilbeck, 2002). Yalnız bu denklem tekillik sınırlandırması metoduyla incelendiğinde görülür ki

$$m > 1 \quad , \quad \beta_i \neq 0 \tag{2.30}$$

özelliğindeki genel hali integrallenebilir değildir.

Aksine

$$m = 1 \tag{2.31}$$

durumundaki denklemin en genel hali olan

$$\dot{u}_n = \left(u_n - \alpha_1\right)\left(u_n - \alpha_2\right)\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) \tag{2.32}$$

denklemi integrallenebilirdir.

Örnek: Bir tip KdV fark denklemi olan

$$\dot{u}_n = \frac{1}{u_{n+1} - u_{n-1}} \tag{2.33}$$

denklemini inceleyelim. Bu denklemin Lax çifti

$$M_n = \begin{bmatrix} -u_{n+1} & 1 \\ \lambda - u_n u_{n+1} & u_n \end{bmatrix}\quad ,\quad N_n = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} u_{n+1}\dot{u}_n - 1 & \dot{u}_n \\ u_{n+1}^2\dot{u}_n - u_{n+1} & -u_{n+1}\dot{u}_n \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

olarak bulunur (Sahadevan, 2001).

2.3 Diskrit Denklemler İçin Özdeğer(Spektral) Problemi

$$u_n = u_n(t) \quad , \quad \dot{u}_n = \frac{du_n(t)}{dt}$$

olmak üzere,

$$\dot{u}_n = F(..., \; u_{n-1}, \; u_n, \; u_{n+1}, \; ...)$$

şeklindeki bir diferensiyel fark denkemi için spektral problem

$$L_n V_n = \lambda V_n \tag{2.35}$$

$$V_{n+1} = A_n V_n \tag{2.36}$$

çifti ile tanımlanır. Burada L_n ve A_n (2.35)-(2.36) denklemlerini sağlayan, sırasıyla verilen ve bulunması istenen matrislerdir. S, (2.5) ve (2.6) ile tanımlanan kaydırma operatörüdür. (2.35)-(2.36) ve (2.5)-(2.6) arasındaki ilişkiyi kuran ve integrallenebilme koşulunun bir başka ifadesi olan eşitlik

$$L_{n+1} A_n = A_n L_n \tag{2.37}$$

olarak verilir (Sahadevan, 2001)[4]. Şimdi bunun nasıl elde edildiğini gösterelim.

(2.5)-(2.6) ve (2.35)-(2.36) verildiğinde, (2.35) eşitliğinde bir kez iterasyon yapılırsa

$$L_{n+1} V_{n+1} = \lambda V_{n+1} \tag{2.38}$$

yazılabilir. Ayrıca (2.36) kullanılırsa (2.38) denklemi

$$\begin{aligned} L_{n+1} A_n V_n &= \lambda A_n V_n \\ L_{n+1} A_n V_n &= A_n \lambda V_n \\ L_{n+1} A_n V_n &= A_n L_n V_n \\ L_{n+1} A_n &= A_n L_n \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Örnek:

$$u_{n+1} + u_{n-1} = \frac{2au_n}{1 - u_n^2} \tag{2.39}$$

(McMillan, 1971) denkleminin spektral problemi için Lax çifti

$$L_n = \begin{bmatrix} a & l+u_{n+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l-u_n & 1 \\ \lambda & 0 & a & 1-u_{n+1} \\ \lambda(1+u_n) & \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_n = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} \frac{a}{1+u_{n+1}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{1-u_n} & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla bu denklemin çözümü eliptik fonksiyonlar cinsinden bulunabilir.

2.4 Diskrit Denklemlerin Hareket İntegralleri

N. mertebeden

$$u_{n+N} = f(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+N-1}) \tag{2.41}$$

fark denklemi için

$$I_{n+1} = I_n \tag{2.42}$$

eşitliğini sağlayan aşikar olmayan bir

$$I_n = I(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ..., u_{n+N-1}) \tag{2.43}$$

fonksiyonu varsa, (2.43) fonksiyonuna (2.41) denkleminin bir **integrali** veya **hareket integrali** adı verilir (Sahadevan, 2001).

Eğer N. mertebeden bir fark denkleminin $(N-1)$ tane fonksiyonel bağımsız hareket integrali varsa, bu denkleme **tam integrallenebilirdir** denir.

Örnek:

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} - u_n\left(1-u_{n+1}^2\right)}{1-u_{n+1}^2 + 2u_n u_{n+1}} \tag{2.44}$$

denkleminin hareket integrali

$$I_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1}u_n} \tag{2.45}$$

dir. Dolayısıyla (2.44) denklemi integrallenebilirdir (Sahadevan, 2001).

2.5 Miura Tipi Dönüşümler

Literatürde mKdV denkleminin

$$\frac{d\phi_n}{dt} = \left(\phi_{n+1} - \phi_{n-1}\right)\left(1 + \phi_n^2\right), \tag{2.46}$$

$$\frac{d\phi_n}{dt} = \left(\phi_{n+1} - \phi_{n-1}\right)\left(1 + \phi_n\right)^2 \tag{2.47}$$

şeklinde iki farklı fark formu verilir (Chandre, 1997). Bu denklemlerin sırasıyla

$$\phi_n = \pm\sinh(C)\sec h\left[C\left(n - n_0\right) - wt\right] \quad , \quad w = -2\sinh C \tag{2.48}$$

$$\phi_n = \sinh^2(C)\sec h^2\left[C\left(n - n_0\right) - wt\right] \quad , \quad w = -\sinh(2C) \tag{2.49}$$

soliter dalga çözümleri Takeno tarafından verilmiştir (Takeno, 1992). Ayrıca Xiao tarafından (2.47) denklemi için reel üstel yaklaşımı kullanarak

$$\phi_n = a_0 + (1 + a_0)\sinh^2(C)\sec h^2\left[C\left(n - n_0\right) - wt\right], w = -(1 + a_0)^2\sinh(2C) \tag{2.50}$$

$$\phi_n = a_0 - (1 + a_0)\sinh^2(C)\cos ech^2\left[C\left(n - n_0\right) - wt\right], w = -(1 + a_0)^2\sinh(2C) \tag{2.51}$$

soliter dalga çözümlerini bulmuştur (Xiao, 1994). (2.46) denklemi için Lax çifti

$$\begin{aligned} A_n &= \eta^2 + \phi_{n-1}\phi_n \quad , \quad B_n = \eta\phi_n + \tfrac{1}{\eta}\phi_{n-1}, \\ C_n &= -\eta\phi_{n-1} - \tfrac{1}{\eta}\phi_n \quad , \quad D_n = \tfrac{1}{\eta^2} + \phi_{n-1}\phi_n \end{aligned} \tag{2.52}$$

olmak üzere,

$$M_n = \begin{bmatrix} \eta & \phi_n \\ -\phi_n & 1/\eta \end{bmatrix} \quad , \quad N_n = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

şeklinde tanımlanır (Chandre, 1997). Burada η spektral parametredir. Benzer şekilde (2.47) denklemi için

$$\begin{aligned} A_n &= (1 + \phi_n)\left(1 + \phi_{n-1}\right) + \eta^2 \quad , \quad B_n = \eta(1 + \phi_n), \\ C_n &= -\eta\left(1 + \phi_{n-1}\right) \quad , \quad D_n = (1 + \phi_n)\left(1 + \phi_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

olmak üzere,

$$M_n = \begin{bmatrix} \eta & 1+\phi_n \\ -(1+\phi_n) & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N_n = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

olarak verilir (Chandre, 1997). Yani bu iki fark oluşum denklemi integrallenebilirdir.

Bilindiği gibi oluşum denklemlerinin sürekli hallerinde Miura adı verilen bir dönüşüm vardır ki bu dönüşüm ile KdV-mKdV-Gardner denklemleri arasında geçişe imkan verir. O halde akla gelen ilk soru benzer bir geçişin fark oluşum denklemlerinde de olup olmadığıdır. Cevap olarak var olduğunu söyleyebiliriz ama yine KdV-mKdV-Gardner denklemleri arasında değildir bu geçiş (Chandre, 1997). Şimdi bunu inceleyelim.

Eğer

$$u_n = (1+i\phi_n)\left(1-i\phi_{n+1}\right) \tag{2.56}$$

dönüşümü kullanılırsa (2.46) ile verilen ilk fark mKdV denklemi

$$\dot{u_n} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{2.57}$$

halini alır. Gerçektende

$$u_{n+1} = \left(1+i\phi_{n+1}\right)\left(1-i\phi_{n+2}\right) \tag{2.58}$$

$$u_{n-1} = \left(1+i\phi_{n-1}\right)(1-i\phi_n) \tag{2.59}$$

değerleri (2.56) ile birlikte (2.57) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left((1+i\phi_n)\left(1\text{-}i\phi_{n+1}\right)\right) &= (1+i\phi_n)\left(1\text{-}i\phi_{n+1}\right)\left(1+i\phi_{n+1}\right)\left(1\text{-}i\phi_{n+2}\right) \\ &\quad \text{-}\,(1+i\phi_n)\left(1\text{-}i\phi_{n+1}\right)\left(1+i\phi_{n-1}\right)(1\text{-}i\phi_n) \end{aligned} \tag{2.60}$$

bulunur. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}0 &= \phi_n^2\phi_{n-1}i+\frac{d\phi_n}{dt}\phi_{n+1}-\phi_n\phi_{n+1}^2i+\frac{d\phi_{n+1}}{dt}\phi_n+\phi_{n+2}i-\phi_n^2\phi_{n+1}i\\ &-\phi_{n+1}i-\phi_ni-\phi_{n+1}^2-\frac{d\phi_{n+1}}{dt}i+\phi_{n+1}\phi_{n-1}+\phi_{n-1}i-\phi_n\phi_{n+2}\\ &+\frac{d\phi_n}{dt}i+\phi_n^2+\phi_{n+1}^2\phi_{n+2}i-\phi_n\phi_{n+1}^2\phi_{n+2}+\phi_n^2\phi_{n+1}\phi_{n-1}\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin sanal ve reel kısımlarından sırasıyla

$$0=\phi_n^2\phi_{n-1}\text{-}\phi_n\phi_{n+1}^2+\phi_{n+2}\text{-}\phi_n^2\phi_{n+1}\text{-}\phi_{n+1}\text{-}\phi_n\text{-}\frac{d\phi_{n+1}}{dt}+\phi_{n-1}+\frac{d\phi_n}{dt}+\phi_{n+1}^2\phi_{n+2} \quad (2.61)$$

ve

$$0=\frac{d\phi_n}{dt}\phi_{n+1}+\frac{d\phi_{n+1}}{dt}\phi_n\text{-}\phi_{n+1}^2+\phi_{n+1}\phi_{n-1}\text{-}\phi_n\phi_{n+2}+\phi_n^2\text{-}\phi_n\phi_{n+1}^2\phi_{n+2}+\phi_n^2\phi_{n+1}\phi_{n-1} \quad (2.62)$$

denklemleri elde edilir. (2.61) denklemi ϕ_n ile çarpılıp (2.62) denklemi ile toplanırsa,

$$\begin{aligned}0 &= \phi_n^3\phi_{n-1}-\phi_n^2\phi_{n+1}^2+\phi_n\phi_{n+2}-\phi_n^3\phi_{n+1}-\phi_n\phi_{n+1}-\phi_n^2\\ &-\phi_n\frac{d\phi_{n+1}}{dt}+\phi_n\phi_{n-1}+\phi_n\frac{d\phi_n}{dt}+\phi_n\phi_{n+1}^2\phi_{n+2}+\frac{d\phi_n}{dt}\phi_{n+1}+\frac{d\phi_{n+1}}{dt}\phi_n\\ &-\phi_{n+1}^2+\phi_{n+1}\phi_{n-1}-\phi_n\phi_{n+2}+\phi_n^2-\phi_n\phi_{n+1}^2\phi_{n+2}+\phi_n^2\phi_{n+1}\phi_{n-1}\\ &= \phi_n^3\phi_{n-1}-\phi_n^2\phi_{n+1}^2-\phi_n^3\phi_{n+1}-\phi_n\phi_{n+1}+\phi_n\phi_{n-1}+\phi_n\frac{d\phi_n}{dt}\\ &+\frac{d\phi_n}{dt}\phi_{n+1}-\phi_{n+1}^2+\phi_{n+1}\phi_{n-1}+\phi_n^2\phi_{n+1}\phi_{n-1}\\ &= \frac{d\phi_n}{dt}\left(\phi_n+\phi_{n+1}\right)-\phi_n^2\phi_{n+1}\left(\phi_n+\phi_{n+1}\right)+\phi_{n-1}\left(\phi_n+\phi_{n+1}\right)\\ &+\phi_n^2\phi_{n-1}\left(\phi_n+\phi_{n+1}\right)-\phi_{n+1}\left(\phi_n+\phi_{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$= \quad \left(\phi_n + \phi_{n+1}\right)\left[\frac{d\phi_n}{dt} - \left(\phi_{n+1} - \phi_{n-1}\right)\left(1+\phi_n^2\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\phi_n}{dt} = \left(\phi_{n+1} - \phi_{n-1}\right)\left(1+\phi_n^2\right)$$

denklemi bulunur. Yani bir başka deyişle (2.15) Volterra denklemi ile (2.46) mKdV denklemi arasında bir Miura dönüşümü vardır. Bu Θ_1 Miura dönüşümü, (2.15) Volterra denkleminin bir çözümünü (2.46) mKdV denkleminin bir çözümüne götürür.

Diğer yandan

$$u_n = (1+\phi_n)\left(1+\phi_{n+1}\right) \tag{2.63}$$

dönüşümü kullanılırsa (2.47) ile verilen ikinci diskrit mKdV denklemi

$$\dot{u_n} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

halini alır. O halde (2.47) mKdV denklemi ile Volterra denklemi arasında bir Θ_2 Miura dönüşümü vardır. Benzer şekilde Θ_2 Miura dönüşümü, (2.13) Volterra denkleminin bir çözümünü (2.47) denkleminin bir çözümüne götüren bir dönüşümdür.

Sonuç olarak Θ_1, Θ_2 Miura dönüşümleri yardımıyla bahsedilen iki diskrit mKdV denklemi arasında bir Miura dönüşümü kurulabilir.

$$\Theta_2 \circ \Theta_1^{-1} \tag{2.64}$$

dönüşümü göz önüne alındığında, bu dönüşüm (2.46) mKdV denklemini (2.47) mKdV denklemine dönüştüren bir Miura dönüşümüdür.

2.6 Tekillik Sınırlandırması (Singularity Confinement) Metodu

Diskrit oluşum denklemlerinin integrallenebilirliğini incelemek için B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou tarafından geliştirilen bu metod bahsi geçen fark oluşum denklemlerinin sürekli hallerinin integrallenebilirliğini incelemek için kullanılan Painleve özelliği metodunun fark oluşum denklemlerindeki karşılığı olarak bilinir (Grammaticos, et al., 1991; Ramani, et al., 1992, 1993; Grammaticos and Ramani, 2000). Metodun özü, başlangıç şartlarına bağlı olarak bir adımda meydana gelen singülerliğin sonsuza kadar devam etmeyeceği ve birkaç iterasyon sonrasında ortadan kalkacağı gerçeğine dayanır. Painleve özelliğine geri dönecek olursak; lineer olmayan bir oluşum denklemi verildiğinde başlangıç şartlarına bağlı olarak meydana gelen kaldırılabilir süreksizlik bulunan nokta etrafında çözüm aranır. Eğer bu şekildeki her singülerlik için bulunan çözüm Laurent serisi tipinde ise Painleve özelliğini sağladığı söylenir ve integrallenebilirdir denir. Tekillik sınırlandırması metodunda başlangıç şartlarına bağlı olarak bir adımda meydana gelen singülerliğin birkaç iterasyon sonrasında ortadan kalktığı gösterilebilirse verilen fark oluşum denkleminin **integrallenebilir** olduğu söylenir. Şimdi metodu örneklerle daha açık hale getirelim.

Örnek:

$$\ddot{x_n} = e^{x_{n+1}-x_n} - e^{x_n - x_{n-1}} \tag{2.65}$$

Toda latisini ele alalım (Ramani, et al., 1992). Burada

$$a_n = e^{x_{n+1}-x_n} \quad , \quad b_n = \dot{x_n} \tag{2.66}$$

değişken değiştirmesi yapılarak (2.65) denklemi

$$\dot{a_n} = a_n(b_{n+1} - b_n) \tag{2.67}$$

$$\dot{b_n} = a_n - a_{n-1} \tag{2.68}$$

denklem sistemine dönüşür. Bu eşitliklerden a_n ve b_{n+1} değerleri çekilirse,

$$a_n = a_{n-1} + \dot{b_n} \tag{2.69}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\dot{a_n}}{a_n} \tag{2.70}$$

yazılabilir. Varsayalım ki; a_n ve b_n ifadelerinin her ikiside yakınsak olsun ve singülerlik $(n+1)$. adımda ortaya çıksın. Yani bir t_0 zamanında $a_n = 0$ sağlansın. En basit durumu ele alarak başlayalm. $\alpha = \alpha(t)$, $\tau = (t - t_0)$ ve $\alpha(t_0) \neq 0$ olmak üzere

$$a_n = \alpha\tau \tag{2.71}$$

olsun. (2.71) eşitliği (2.69)-(2.70) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$b_{n+1} = \frac{1}{\tau} + b_n + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \qquad (2.72)$$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{\tau^2} + \dot{b}_n + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + \alpha\tau \qquad (2.73)$$

elde edilir. (2.70) denkleminde bir kez iterasyon yapılırsa,

$$b_{n+2} = b_{n+1} + \frac{\dot{a}_{n+1}}{a_{n+1}} \qquad (2.74)$$

elde edilir. (2.72)-(2.73) den b_{n+1} ve a_{n+1} değerlerinin (2.74) te yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{-\alpha^3 + \dot{b}_n\tau^2\alpha^3 + \ddot{\alpha}\tau^2\alpha^2 - \alpha\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2 + \tau^3\alpha^4 - b_n\tau\alpha^3 + b_n\tau^3\alpha^3 b_n}{\tau\alpha\left(-\alpha^2 + \dot{b}_n\tau^2\alpha^2 + \ddot{\alpha}\tau^2\alpha - \left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2 + \tau^3\alpha^3\right)} \\ &+ \frac{\dot{b}_n\tau^3\alpha^2\ddot{\alpha} - b_n\tau^3\alpha\left(\dot{\alpha}\right)^2 + b_n\tau^4\alpha^4 - \dot{\alpha}\tau\alpha^2 + \dot{\alpha}\tau^3\dot{b}_n\alpha^2 + 2\alpha^3}{\tau\alpha\left(-\alpha^2 + \dot{b}_n\tau^2\alpha^2 + \ddot{\alpha}\tau^2\alpha - \left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2 + \tau^3\alpha^3\right)} \\ &+ \frac{-2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\alpha\tau^3 + \left(\dot{\alpha}\right)^3\tau^3 + 2\dot{\alpha}\tau^4\alpha^3 + \ddot{b}_n\tau^3\alpha^3 + \dddot{\alpha}\tau^3\alpha^2 + \alpha^4\tau^3}{\tau\alpha\left(-\alpha^2 + \dot{b}_n\tau^2\alpha^2 + \ddot{\alpha}\tau^2\alpha - \left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2 + \tau^3\alpha^3\right)} \end{aligned} \qquad (2.75)$$

bulunur. $\tau \longrightarrow 0$ iken b_{n+2} nin limit değeri hesaplanırsa

$$\lim_{\tau\to 0}(b_{n+2}) = -\frac{1}{\tau} + b_n + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - \tau\left[\dot{b}_n + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2\right] - A\tau^2 + O(\tau^3) \qquad (2.76)$$

bulunur. Burada

$$A = 2\alpha + b_n\dot{b}_n + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}b_n - \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 b_n + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{b}_n - 2\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha^2}\dot{\alpha} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^3 + \ddot{b}_n + \frac{\dddot{\alpha}}{\alpha} \qquad (2.77)$$

dır. (2.69) denkleminde iki kez iterasyon yapılırsa

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \dot{b}_{n+2} \qquad (2.78)$$

bulunur. (2.73) ve (2.75) den a_{n+1} ve b_{n+2} değerleri (2.78) de yazılırsa,

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \frac{-\alpha^2\tau^6\left(\ddot{\alpha}\right)^2+3\alpha^5\tau^3+\left(\dot{\alpha}\right)^4\tau^4-4\tau^6\alpha^6+\tau^9\alpha^7+\alpha^4-\alpha^4\tau^6\left(\ddot{b}_n\right)^2}{\tau^2\left(-\alpha^2+\alpha^2\tau^2\dot{b}_n+\ddot{\alpha}\tau^2\alpha-\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2+\tau^3\alpha^3\right)^2} \\
&+\frac{10\dot{b}_n\tau^4\alpha^2\left(\dot{\alpha}\right)^2-6\left(\dot{b}_n\right)^2\tau^6\alpha^2\left(\dot{\alpha}\right)^2-10\dot{b}_n\tau^7\alpha^3\left(\dot{\alpha}\right)^2-6\alpha^4\dot{b}_n\tau^2}{\tau^2\left(-\alpha^2+\alpha^2\tau^2\dot{b}_n+\ddot{\alpha}\tau^2\alpha-\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2+\tau^3\alpha^3\right)^2} \\
&+\frac{4\alpha^2\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2+2\alpha^4\dot{b}_n\tau^2-\alpha^4\tau^4\left(\dot{b}_n\right)^2-2\alpha^5\dot{b}_n\tau^5+2\alpha^3\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^5}{\tau^2\left(-\alpha^2+\alpha^2\tau^2\dot{b}_n+\ddot{\alpha}\tau^2\alpha-\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2+\tau^3\alpha^3\right)^2} \\
&+\frac{-6\alpha^2\tau^6\left(\dot{\alpha}\right)^3-8\left(\dot{\alpha}\right)^3\tau^3\alpha+4\alpha^4\tau^2\dot{b}_n-4\tau^2\alpha^2\left(\dot{\alpha}\right)^2-5\left(\dot{b}_n\right)^2\alpha^4\tau^4}{\tau^2\left(-\alpha^2+\alpha^2\tau^2\dot{b}_n+\ddot{\alpha}\tau^2\alpha-\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2+\tau^3\alpha^3\right)^2} \\
&+\frac{8\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^5\alpha^3-\alpha^4\tau^4\dddot{b}_n+\tau^7\alpha^5\dddot{b}_n-\tau^4\alpha^3\dddot{\alpha}+5\ddot{\alpha}\tau^8\alpha^5-5\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^8\alpha^4}{\tau^2\left(-\alpha^2+\alpha^2\tau^2\dot{b}_n+\ddot{\alpha}\tau^2\alpha-\left(\dot{\alpha}\right)^2\tau^2+\tau^3\alpha^3\right)^2} \\
&+\ldots
\end{aligned} \tag{2.79}$$

ve buradan

$$\lim_{\tau\to 0}(a_{n+2}) = B\tau + O(\tau^2) \tag{2.80}$$

elde edilir. Burada B, α ve b_n değerlerinin bir fonksiyonudur. Bir iterasyon daha yapılırsa b_{n+3} için sonlu bir değer bulunur. Böylece $(n+1)$. adımda meydana gelen süreksizliğin birkaç iterasyon sonrasında kalktığından denklemlerin integrallenebilirliği gösterilmiş olur.

Örnek: Şimdi a sabit olmak üzere

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{a}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} \tag{2.81}$$

denklemini ele alalım (Lafortune, et al., 1997). Farzedelim ki $x_{n-2} \neq 0$ olmak üzere, $x_{n-1} = 0$ olsun. (2.81) denkleminden

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= -x_{n-1} + \frac{a}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} \\
x_n &= -x_{n-2} + \frac{a}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1}^2}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

yazılabilir. $x_{n-1} = 0$ olduğundan,

$$x_n = \infty \tag{2.83}$$

bulunur. (2.83) eşitliği kullanılarak

$$x_{n+1} = 0 \tag{2.84}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle

$$x_{n+2} = \infty - \infty \tag{2.85}$$

belirsizliği elde edilir. Şimdi belirsizliği kaldırmak için küçük ϵ parametresini tanımlayalım ve

$$x_{n-1} = \epsilon \tag{2.86}$$

alalım. O halde (2.86) kullanılarak

$$x_n = \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{a}{\epsilon} - x_{n-2} + O(\epsilon) \tag{2.87}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.87) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= -x_{n-1} + \frac{a}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} \\
&= -\epsilon + \frac{a}{-x_{n-2} + \frac{a}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2}} + \frac{1}{\left(-x_{n-2} + \frac{a}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2}\right)^2} \\
&= -\epsilon + \frac{a}{\frac{-\epsilon^2 x_{n-2} + a\epsilon + 1}{\epsilon^2}} + O(\epsilon^3) \\
&= -\epsilon + \frac{a\epsilon^2}{-\epsilon^2 x_{n-2} + a\epsilon + 1} + O(\epsilon^3) \qquad (2.88)
\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\epsilon \to 0}(x_{n+1}) = -\epsilon + a\epsilon^2 - x_{n-2} + O(\epsilon^3) \tag{2.89}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.87) kullanılarak

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= -x_n + \frac{a}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+1}^2} \\
&= x_{n-2} - \frac{a}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{a}{-\epsilon + \frac{a}{-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}} + \frac{1}{\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^2}} \\
&\quad + \frac{1}{\left(-\epsilon + \frac{a}{-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}} + \frac{1}{\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^2}\right)^2} \\
&= x_{n-2} - \frac{a}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{a\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^2}{-\epsilon\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^2 + a\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)+1} \\
&\quad + \frac{\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^4}{\left(-\epsilon\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^2 + a\left(-x_{n-2}+\frac{a}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon^2}\right)+1\right)^2} \\
&= x_{n-2} + \frac{\epsilon\left(-6x_{n-2}^2\epsilon^2 a - 8x_{n-2}\epsilon^3 a + 2x_{n-2}^2\epsilon^4 - 4x_{n-2}\epsilon^2\right)}{\left(-x_{n-2}^2\epsilon^4 + x_{n-2}\epsilon^3 a + 2x_{n-2}\epsilon^2 - a\epsilon - 1 + \epsilon^3\right)^2} \\
&\quad + \frac{\epsilon\left(+5a\epsilon + 4a^2\epsilon^2 - a\epsilon^4 + a^3\epsilon^3 - 10x_{n-2}^2\epsilon^3 a^2 5x_{n-2}\epsilon a^2\right)}{\left(-x_{n-2}^2\epsilon^4 + x_{n-2}\epsilon^3 a + 2x_{n-2}\epsilon^2 - a\epsilon - 1 + \epsilon^3\right)^2} \\
&\quad + \frac{\epsilon\left(6x_{n-2}^3\epsilon^4 a + 2x_{n-2}a - 4x_{n-2}\epsilon^4 a^2 - 2a\epsilon^6 x_{n-2}^4 + 3x_{n-2}^2\epsilon^5 a\right)}{\left(-x_{n-2}^2\epsilon^4 + x_{n-2}\epsilon^3 a + 2x_{n-2}\epsilon^2 - a\epsilon - 1 + \epsilon^3\right)^2} \\
&\quad + \frac{\epsilon\left(4a^3\epsilon^2 x_{n-2} - 4a^3\epsilon^4 x_{n-2}^2 + 5a^2\epsilon^5 x_{n-2}^3 + a^4\epsilon^3 x_{n-2} + 2 - \epsilon^3\right)}{\left(-x_{n-2}^2\epsilon^4 + x_{n-2}\epsilon^3 a + 2x_{n-2}\epsilon^2 - a\epsilon - 1 + \epsilon^3\right)^2} \qquad (2.90)
\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\epsilon \to 0}(x_{n+2}) = x_{n-2} + 2(ax_{n-2}+1)\epsilon + O(\epsilon^2) \qquad (2.91)$$

bulunur.

Tüm bu eşitlikler göz önüne alındığında

$$x_n = \tfrac{1}{\epsilon^2} + \tfrac{a}{\epsilon} - x_{n-2} + O(\epsilon)$$

$$x_{n+1} = -\epsilon + a\epsilon^2 - x_{n-2} + O(\epsilon^3)$$

$$x_{n+2} = x_{n-2} + 2(ax_{n-2}+1)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

elde edilir ve

$$\lim_{\epsilon\to 0}(x_{n+2}) = \lim_{\epsilon\to 0}(x_{n-2} + 2(ax_{n-2}+1)\epsilon + O(\epsilon^2)) = x_{n-2} \qquad (2.91)$$

sonlu değeri bulunur. Daha sonraki x_n ler sonludur ve böylelikle singülerlik $\{0,\ \infty^2,\ 0\}$ şeklinde sınırlandırılmış olur. Bu dizideki ∞^2 ifadesi, (2.87) ifadesindeki $\frac{1}{\epsilon^2}$ teriminden kaynaklanmaktadır.

2.7 Cebirsel Entropi Metodu

Tekillik Sınırlandırması metodu her ne kadar fark denklemlerinin integrallenebilirliğini incelemek için iyi bir metod olsada daha önce bahsedildiği gibi hata verdiği durumlar vardır. Bunun üzerine Hietarinta ve Viallet, Arnold ve Veselov'un düşünceleri üzerine integrallenebilirliği incelemek için Cebirsel Entropi metodunu geliştirdiler.

Arnold'a göre derece artışı (complexity); belirli bir eğri ile denklemden elde edilen ikinci bir eğrinin kesiştiği noktaların sayısıdır (Arnold, 1990). Derece artışı, genelde denklemlerde üstel olarak artarken, polinomsal olarak arttığı sadece integrallenebilir denklemlerin büyük bir kısmında görülür. Veselov'a göre integrallenebilirlik ile derece artışı arasındaki zayıf(yavaş) artışlarda büyük bir ilişki vardır. Bu düşünceler üzerine Hietarinta ve Viallet , iterasyonlardaki derece artışını belirleyerek Cebirsel Entropi metodunu geliştirdiler (Hietarinta and Viallet, 1998). Daha sonraki uygulamalar Lafortune, Ramani, Grammaticos, Ohta ve Tamizhmani tarafından verilmiştir (Lafortune, et al., 1997; Ramani and Grammaticos, 2000; Ohta, et al., 1999; Tamizhmani et al., 1999).

Cebirsel Entropi,

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{\log d_n}{n} \qquad (2.92)$$

olarak tanımlanır. Burada d_n, n. iterasyondaki polinomun derecesidir. İntegrallenebilir olmayan denklemler genelde üstel bir derece artışına sahip olduklarından sıfırdan farklı bir cebirsel entropi bize integrallenebilir olmayan bir denklemi ifade eder. Yani integrallenebilir olmayan bir denklem için cebirsel entropi

$$E \neq 0 \qquad (2.93)$$

dır. İntegrallenebilir denklemler ise üstel bir derece artışından daha yavaş bir derece artışına sahiptir. Polinomsal olarak artarlar. Böylece integrallenebilir denklemlerin cebirsel entropilerinin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Yani eğer

$$E = 0 \tag{2.94}$$

ise verilen denklem integrallenebilirdir denir.

Cebirsel entropinin sıfır olması ile integrallenebilirlik arasındaki ilişkiyi açıklayalım.

Eğer verilen denklem integrallenebilir ise derece artışı polinomsaldır. P_m, n teriminin m. dereceden polinomu olmak üzere bu denklem için $d_n = P_m$ olsun. Cebirsel entropiyi hesaplarsak,

$$E = \lim_{n \to \infty} \frac{\log P_m}{n} = \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliğinden $L'hospital$ metodu gereğince

$$E = \lim_{n \to \infty} \frac{P_{m-1}}{P_m} = 0$$

buluruz.

Cebirsel entropi metodunu daha açık hale getirmek için örnekle açıklayalım.

Örnek: (2.81) denklemini ele alalım (Lafortune, et al., 1997). Şimdi homojen koordinatlar yardımıyla

$$x_0 = r \quad , \quad x_1 = p/q \tag{2.95}$$

olarak alalım. Burada r nin derecesi sıfır, p ve q nun dereceleri birdir. Bu aşamadan sonra her x_n iterasyonunda payın ve paydanın p, q cinsinden homojen derecesi incelenir. İlk denklemden

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} - x_{n-1}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{a}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} - x_0 \\ &= \frac{aq}{p} + \frac{q^2}{p^2} - r \\ &= \frac{q^2 + apq - rp^2}{p^2} \end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} - x_1 \\ &= \frac{ap^2}{q^2 + apq - rp^2} + \frac{p^4}{\left(q^2 + apq - rp^2\right)^2} - \frac{p}{q} \\ &= \frac{ap^2q^3 + a^2p^3q^2 - arqp^4}{q\left(q^2 + apq - rp^2\right)^2} + \frac{qp^4}{q\left(q^2 + apq - rp^2\right)^2} \\ &\quad - \frac{pq^4 + 2ap^2q^3 - 2rq^2p^3 + ap^2q^2 - 2ap^4qr + p^5r}{q\left(q^2 + apq - rp^2\right)^2} \\ &= \frac{qp^4 - pq^4 - ap^2q^3 + \left(2r + a^2\right)q^2p^3 - ap^2q^2 + ap^4qr - p^5r}{q\left(q^2 + apq - rp^2\right)^2} \\ &= \frac{pP_4}{q\left(q^2 + apq - rp^2\right)^2}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \frac{a}{x_3} + \frac{1}{x_3^2} - x_2 \\
&= \frac{-(q^2+apq-rp^2)(3ap^5q^2r + a^2p^3q^4r + 3ap^4q^3r - a^2p^5q^2r}{p(qp^3 - q^4 - apq^3 + 2q^2p^2r + q^2p^2a^2 - apq^2 + ap^3qr - p^4r)^2} \\
&+ \frac{3ap^4q^3r^2 - 3a^2p^3q^3r + 2a^2p^5q^2r^2 - 3ap^6qr^2 - 4q^4p^2ra}{p(qp^3 - q^4 - apq^3 + 2q^2p^2r + q^2p^2a^2 - apq^2 + ap^3qr - p^4r)^2} \\
&+ \frac{+2q^3p^4a^3r + 2ap^4q^2r - 3ap^2q^5r - 2q^5p^2 + p^7r^2 - 3q^5a^3p^2}{p(qp^3 - q^4 - apq^3 + 2q^2p^2r + q^2p^2a^2 - apq^2 + ap^3qr - p^4r)^2} \\
&+ \frac{+q^2r^3p^5 - a^3p^2q^4 - 2a^2pq^6 + q^4pa^2 + q^2p^5 - 4q^2p^5r^2 - 3ap^3q^4}{p(qp^3 - q^4 - apq^3 + 2q^2p^2r + q^2p^2a^2 - apq^2 + ap^3qr - p^4r)^2} \\
&+ \frac{a^2p^4q^3 - +q^6pr + q^4r^2p^3 + 3a^2pq^5 + 4q^3p^4r - 2q^3p^3a - 2qp^6r}{p(qp^3 - q^4 - apq^3 + 2q^2p^2r + q^2p^2a^2 - apq^2 + ap^3qr - p^4r)\hat{}2} \\
&+ \frac{+2q^6a + 2q^4p^3r)}{p(qp^3 - q^4 - apq^3 + 2q^2p^2r + q^2p^2a^2 - apq^2 + ap^3qr - p^4r)^2} \\
&= \frac{(q^2+apq-rp^2)P_6}{P_4^2},
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

$$
x_5 = \frac{P_4 P_9}{q P_6^2} \tag{2.99}
$$

olarak bulunur. P_k , $k = 1, 2, 3, ...$ p, q cinsinden $k.$ dereceden polinomu temsil etmektedir.

Buraya kadar hesaplanan x_n değerleri göz önüne alınırsa, bir ilişki dikkat çekmektedir:

Bir x_n değerinin payında bulunan polinomsal ifadenin karesi; x_{n+1} değerinin paydasında karşımıza çıkar, x_{n+2} değerinin payında çarpan olarak görülür ve bir daha karşımıza çıkmaz.

Bu ilişki bize bir bakıma Tekillik Sınırlandırması Metodunda sınırlandırılan tekilliğin $\{0, \infty^2, 0\}$ şeklinde olmasının bir açıklamasıdır. Bu şekildeki ilişkiler, Tekillik Sınırlandırması Metodunun özünü oluşturmaktadır, yapılacak sınırlandırmanın inşaasında, tipinin belirlenmesinde temel teşkil etmektedir.

Şimdi her bir adımdaki(iterasyondaki) homojenlik derecelerini incelersek; 0, 1, 2, 5, 8, 13, 18, 25, 32, 41, ... şeklinde bir dizi elde ederiz. Burada $m = 0, 1, 2, ...$ için dizinin kuralı

$$d_{2m} = 2m^2 \tag{2.100}$$

$$d_{2m+1} = 2m^2 + 2m + 1 \tag{2.101}$$

bulunur ve derece artışının polinomsal olduğu görülür. Bundan dolayı cebirsel entropi sıfırdır ve verilen denklem integrallenebilirdir.

Örnek:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \tag{2.102}$$

denklemini cebirsel entropi metodu ile inceleyelim (Lafortune, et al., 1997). (2.102) denkleminden

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} - x_{n-1}$$

yazılabilir. Şimdi homojen koordinatlar yardımıyla (2.95) kullanılarak,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{1}{x_1^2} - x_0 \\ &= \frac{p}{q} + \frac{q^2}{p^2} - r \\ &= \frac{p^3 + q^3 - qrp^2}{qp^2}, \end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_2 + \frac{1}{x_2^2} - x_1 \\
&= \frac{p^3+q^3-qrp^2}{qp^2} + \frac{q^2p^4}{\left(p^3+q^3-qrp^2\right)^2} - \frac{p}{q} \\
&= \frac{3p^6q^2 - 3rp^8 + 3p^3q^5 - 6rp^5q^3 + 3rp^7 + q^8 - 3rp^2q^5}{p^2\left(p^3+q^3-qrp^2\right)^2} \\
&\quad + \frac{3rp^4q^3 - rp^6 + p^6q^2 + 2rp^8 - p^3q^5 + 2rp^5q^3 - rp^7}{p^2\left(p^3+q^3-qrp^2\right)^2} \\
&= \frac{P_8}{p^2\left(p^3+q^3-qrp^2\right)^2}, \qquad (2.104)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
x_4 &= \frac{pP_{22}}{q\left(p^3+q^3-qrp^2\right)^2 P_8^2}, \\
x_5 &= \frac{\left(p^3+q^3-qrp^2\right)P_{58}}{qP_8^2P_{22}^2}, \qquad (2.105)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu örnek için complexity(derece artışı), 0, 1, 3, 8, 23, 61, 160, 421, ... dizisi ile temsil edilir. Dikkat edilirse buradaki derece artışı çok hızlı gerçekleşmektedir. Bu dizinin elemanları

$$d_{n+1} - 3d_n + d_{n-1} = \frac{2}{3}\left(1 + j^{n+1} + j^{2(n+1)}\right) \qquad (2.106)$$

eşitliğini sağlamaktadır. Burada j, 1 in kompleks küpköküdür. Buradan asimtotik oran

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad (2.107)$$

olarak bulunur ve cebirsel entropi

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n} = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad (2.108)$$

şeklindedir. Cebirsel entropi sıfırdan farklı olduğundan verilen denklem integrallenebilir değildir.

Ayrıca bu denklemin integrallenebilirliği tekillik sınırlandırması metoduyla araştırıldığında, sınırlandırma $\{0,\ \infty^2,\ \infty^2,\ 0\}$ şeklinde bulunur ki buda bize bu denklemin tekillik sınırlandırması metoduna göre integrallenebilir olduğunu söyler. Bu örnek tekillik sınırlandırması metodunun çalışmadığı duruma bir örnektir (Lafortune, et al., 1997).

BÖLÜM 3

ÇOK ÖLÇEKLİ AÇILIM METODUNUN LİNEER OLMAYAN FARK OLUŞUM DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

3.1 Giriş

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümlerini bulmak için geliştirilen metodlardan biride Çok Ölçekli Açılım Metodudur. Literatürde, sürekli oluşum denklemleri için uygulanan Çok Ölçekli Açılım Metodunun bir benzeri lineer olmayan fark oluşum denklemleri için uygulanmaktadır. Çeşitli kişilerin çalışmış olmasına rağmen, ilk örnekler (Agrotis, et al., 2005) tarafından verilmiştir.

3.2 Lineer Olmayan Fark Oluşum Denklemleri İçin Çok Ölçekli Açılım Metodu

Lineer olmayan bir

$$\frac{du_n}{dt} = K(...u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ...) \tag{3.1}$$

fark oluşum denklemi verildiğinde,

ϵ ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\xi_i = \xi_i(t, \epsilon), \tag{3.2}$$

$$\tau_i = \tau_i(t, \epsilon) \tag{3.3}$$

olmak üzere

$$u_n = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_{i,n}(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n, \tau_0, \tau_1, ..., \tau_n) \tag{3.4}$$

formunda çözüm arayalım. (3.4) çözümü (3.1) fark oluşum denkleminde yerine yazıldığında, ifadenin ϵ parametresinin kuvvetlaerine göre toplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözümlerinden (3.1) denkleminin çözümüne ulaşılır.

3.3 Schrödinger Fark Denkleminden KdV Fark Denkleminin Elde Edilmesi

Schrödinger fark denklemine çok ölçekli açılım metodunu uygulayarak fark KdV denkleminin elde edilmesini ilk olarak (Agrotis, et al., 2005) göstermiştir.

(1.29) Schrödinger denkleminin daha önce belirtilen sonlu fark metodu kullanılarak

$$u_{xx} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

olduğundan fark denklemi (1.30) ile verilmişti. Schrödinger denklemi bir kompleks fonksiyon cinsinden tanımlandığından

$$e^{i\phi_{n\pm1}} \approx e^{i\phi_n}(1 + i(\phi_{n\pm1} - \phi_n)) \tag{3.5}$$

kullanılarak

$$u_n = \rho_n^{1/2} e^{i\phi_n} \tag{3.6}$$

$$u_{n-1} = \rho_{n-1}^{1/2} e^{i\phi_{n-1}} \tag{3.7}$$

$$u_{n+1} = \rho_{n+1}^{1/2} e^{i\phi_{n+1}} \tag{3.8}$$

dönüşümleri yapılırsa;

$$\begin{aligned} &\tfrac{i}{2}\rho_n^{-1/2}\dot{\rho}_n e^{i\phi_n} - \rho_n^{1/2}\dot{\phi}_n e^{i\phi_n} - \tfrac{2}{h^2}\rho_n^{1/2}e^{i\phi_n} + \tfrac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2}e^{i\phi_n}(1 + i(\phi_{n-1} - \phi_n)) \\ &+\tfrac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2}e^{i\phi_n}(1 + i(\phi_{n+1} - \phi_n)) - \rho_n^{3/2}e^{i\phi_n} = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sanal ve reel kısmından sırasıyla

$$\frac{1}{2}\rho_n^{-1/2}\dot{\rho}_n = -\frac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2}(\phi_{n+1} - \phi_n) - \frac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2}(\phi_{n-1} - \phi_n) \tag{3.10}$$

$$-\rho_n^{1/2}\dot{\phi}_n = -\frac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2} - \frac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2} + \frac{2}{h^2}\rho_n^{1/2} + \rho_n^{3/2} \tag{3.11}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerle birlikte çok ölçekli açılım metoduna giriş yapıyoruz.

$$\rho_n = 1 + \epsilon\rho_{1,n} + \epsilon^2\rho_{2,n} + \epsilon^3\rho_{3,n} + ... \tag{3.12}$$

$$\phi_n = -t + \epsilon^{1/2}\phi_{1,n} + \epsilon^{3/2}\phi_{2,n} + \epsilon^{5/2}\phi_{3,n} + ... \tag{3.13}$$

$$t' = \epsilon^{3/2}t\ ,\ x' = -c\epsilon^{1/2}t\ ,\ h' = \epsilon^{1/2}h \tag{3.14}$$

seri açılımlarının (3.10) ve (3.11) denklemlerinde yerine yazılması ve ϵ nun kuvvetlerine göre düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}&... + [\phi_{2,n-1} - 2\phi_{2,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}(\phi_{1,n-1} - \phi_{1,n}) + \phi_{2,n+1}\\ &+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n}) + \tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})_{t'} - \tfrac{c}{4}(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1})\\ &+\tfrac{c}{8}\rho_{1,n}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1})]\epsilon^{5/2} + [-\tfrac{c}{4}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1})\\ &+\phi_{1,n-1} - 2\phi_{1,n} + \phi_{1,n+1}]\epsilon^{3/2} = 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}&... + [-(\phi_{1,n})_{t'} + \tfrac{c}{2}(\phi_{2,n+1} - \phi_{2,n-1}) + \tfrac{c}{4}\rho_{1,n}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1})\\ &-\rho_{2,n} - \tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})^2 - \rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}]\epsilon^2 + [-\rho_{1,n}\\ &+\tfrac{c}{2}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1})]\epsilon = 0\end{aligned}$$

elde edilir. ϵ nun kuvvetinden

$$\begin{gathered}-\rho_{1,n} + \tfrac{c}{2}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}) = 0\\ \rho_1 = c(\phi_1)_{x'}\end{gathered} \tag{3.16}$$

ve $\epsilon^{3/2}$ nin kuvvetinden

$$\begin{gathered}-\tfrac{c}{4}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) + \phi_{1,n-1} - 2\phi_{1,n} + \phi_{1,n+1} = 0\\ \tfrac{c}{4}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = (\phi_1)_{x'x'}\\ \tfrac{c}{2}(\rho_1)_{x'} = (\phi_1)_{x'x'}\\ (\rho_1)_{x'} = \tfrac{2}{c}(\phi_1)_{x'x'}\end{gathered} \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.16) denkleminde x' değişkenine göre türev alınırsa ve (3.17) denklemi ile karşılaştırılırsa

$$\frac{2}{c} = c \tag{3.18}$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$c = \sqrt{2} \quad , \quad \rho_1 = \sqrt{2}(\phi_1)_{x'} \tag{3.19}$$

bulunur. ϵ^2 nin kuvvetinden (3.19) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
&-(\phi_1)_{t'} + \tfrac{c}{2}(\phi_{2,n+1} - \phi_{2,n-1}) + \tfrac{c}{4}\rho_{1,n}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}) \\
&-\rho_{2,n} - \tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})^2 - \rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} = 0 \\
&-(\phi_1)_{t'} + \sqrt{2}(\phi_2)_{x'} + \tfrac{c}{4}\rho_{1,n}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}) \\
&-\rho_{2,n} - \tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})^2 - \rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} = 0 \\
&-(\phi_1)_{t'} + \sqrt{2}(\phi_2)_{x'} + ((\phi_1)_{x'})^2 \\
&-\rho_{2,n} - \tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})^2 - \rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} = 0 \\
&-(\phi_1)_{t'} + \sqrt{2}(\phi_2)_{x'} + ((\phi_1)_{x'})^2 \\
&-\rho_{2,n} - ((\phi_1)_{x'})^2 - \rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} = 0 \\
&-(\phi_1)_{t'} + \sqrt{2}(\phi_2)_{x'} - \rho_{2,n} + \tfrac{1}{2}(\rho_1)_{x'x'} = 0 \\
&-(\phi_1)_{t'} + \sqrt{2}(\phi_2)_{x'} - \rho_{2,n} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{x'x'x'} = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. $\epsilon^{5/2}$ nin kuvvetinden (3.19) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\phi_{2,n-1} - 2\phi_{2,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}(\phi_{1,n-1} - \phi_{1,n}) + \phi_{2,n+1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n})$$

$$+\tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})_{t'} - \tfrac{c}{4}(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}) + \tfrac{c}{8}\rho_{1,n}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = 0$$

$$\phi_{2,n-1} - 2\phi_{2,n} + \phi_{2,n+1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}(\phi_{1,n-1} - \phi_{1,n}) + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n})$$

$$+\tfrac{1}{2}(\rho_{1,n})_{t'} - \tfrac{c}{4}(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}) + \tfrac{c}{8}\rho_{1,n}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = 0$$

$$(\phi_2)_{x'x'} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}(\phi_{1,n-1} - \phi_{1,n}) + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n}) + \tfrac{1}{2}(\rho_1)_{t'}$$

$$-\tfrac{c}{4}(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}) + \tfrac{c}{8}\rho_{1,n}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = 0$$

$$(\phi_2)_{x'x'} + (\phi_1)_{x'}\left(\tfrac{\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}}{2}\right) + \tfrac{1}{2}(\rho_1)_{t'} \qquad (3.21)$$

$$-\tfrac{c}{4}(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}) + \tfrac{c}{8}\rho_{1,n}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = 0$$

$$(\phi_2)_{x'x'} + \sqrt{2}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{t'x'}$$

$$-\tfrac{c}{4}(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}) + \tfrac{c}{8}\rho_{1,n}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = 0$$

$$(\phi_2)_{x'x'} + \sqrt{2}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{t'x'}$$

$$-\tfrac{c}{2}(\rho_2)_{x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'} = 0$$

$$(\phi_2)_{x'x'} + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{t'x'} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\rho_2)_{x'} = 0$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinde x' değişkenine göre türev alınırsa,

$$-(\phi_1)_{t'x'} + \sqrt{2}(\phi_2)_{x'x'} - (\rho_2)_{x'} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{x'x'x'x'} = 0 \qquad (3.22)$$

ve (3.21) eşitliği $-\sqrt{2}$ ile çarpılırsa,

$$-\sqrt{2}(\phi_2)_{x'x'} - 3(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'} - (\phi_1)_{t'x'} + (\rho_2)_{x'} = 0 \qquad (3.23)$$

elde edilir. (3.22) ve (3.23) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$-2(\phi_1)_{t'x'} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1)_{x'x'x'x'} - 3(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'} = 0 \tag{3.24}$$

KdV tipi denklem elde edilir. Bulunan denklemin x' terimine göre birkez integrali alınırsa ve integral sabiti sıfır kabul edilirse,

$$(\phi_1)_{t'} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\phi_1)_{x'x'x'} - \frac{3}{4}\left((\phi_1)_{x'}\right)^2 \tag{3.25}$$

yazılabilir.

Burada elde edilen KdV denkleminin fark denklemi (3.25) denkleminden

$$\dot{\phi}_{1,n}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\phi_{1,n+2}\text{-}2\phi_{1,n+1}+2\phi_{1,n-1}\text{-}\phi_{1,n-2}\right)\text{-}\frac{3}{8}\left[\left(\phi_{1,n+1}\text{-}\phi_{1,n}\right)^2+\left(\phi_{1,n-1}\text{-}\phi_{1,n}\right)^2\right] \tag{3.26}$$

olarak yazılabilir.

3.4 ALNLS den KdV Fark Denkleminin Elde Edilmesi

Benzer şekilde (Agrotis, et al., 2005) tarafından yapılan çok ölçekli açılım metodu uygulaması ALNLS üzerinedir.

(1.29) Schrödinger denkleminin daha önce belirtilen sonlu fark metodu kullanılarak

$$u_{xx} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

olmak üzere fark denklemi (1.30) tipinde değilde

$$i\dot{u}_n + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = |u_n|^2 \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \tag{3.27}$$

olarak alınırsa Schrödinger denkleminin Ablowitz-Ladik fark denklemi (ALNLS) elde edilir (Ablowitz and Ladik, 1975).

Buradan (3.5)-(3-8) kullanılarak (3.27) denklemi

$$i\tfrac{1}{2}\rho_n^{-1/2}\dot{\rho_n} - \dot{\phi_n}\rho_n^{1/2} + \tfrac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2} + i\tfrac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2}\phi_{n+1} - i\tfrac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2}\phi_n$$

$$+\tfrac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2} - 2\tfrac{1}{h^2}\rho_n^{1/2} + i\tfrac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2}\phi_{n-1} - i\tfrac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2}\phi_n - \tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n+1}^{1/2} \tag{3.28}$$

$$-i\tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n+1}^{1/2}\phi_{n+1} + i\tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n+1}^{1/2}\phi_n - i\tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n-1}^{1/2}\phi_{n-1} - \tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n-1}^{1/2}$$

$$+i\tfrac{i}{2}\rho_n\rho_{n-1}^{1/2}\phi_n = 0$$

halini alır. Bu denklemin sanal ve reel kısmlarından sırasıyla

$$\tfrac{1}{2}\rho_n^{-1/2}\dot{\rho_n} + \tfrac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2}\phi_{n+1} - \tfrac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2}\phi_n + \tfrac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2}\phi_{n-1} - \tfrac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2}\phi_n \tag{3.29}$$

$$-\tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n+1}^{1/2}\phi_{n+1} + \tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n+1}^{1/2}\phi_n - \tfrac{1}{2}\rho_n\rho_{n-1}^{1/2}\phi_{n-1} + \tfrac{i}{2}\rho_n\rho_{n-1}^{1/2}\phi_n = 0$$

ve

$$-\dot{\phi_n}\rho_n^{1/2} + \frac{1}{h^2}\rho_{n+1}^{1/2} + \frac{1}{h^2}\rho_{n-1}^{1/2} - 2\frac{1}{h^2}\rho_n^{1/2} - \frac{1}{2}\rho_n\rho_{n+1}^{1/2} - \frac{1}{2}\rho_n\rho_{n-1}^{1/2} = 0 \tag{3.30}$$

denklemleri elde edilir.

(3.12)-(3.14) seri açılımlarının (3.29) ve (3.30) denklemlerinde yerine yazılması ve ϵ nun kuvvetlerine göre toplanmasıyla ve ϵ nun kuvvetlerinin katsayılarından elde edilen denklemlerde benzer işlemler yapılarak

$$(\rho_{1,n})_{x'} = (\phi_{1,n})_{x'x'} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho_{1,n}} &= \frac{1}{2}\left(\rho_{1,n+2} - 2\rho_{1,n+1} + 2\rho_{1,n-1} - \rho_{1,n-2}\right)\\ &\quad+\frac{3}{4}\left(\rho_{1,n+1}(\rho_{1,n} + \rho_{1,n+2}) - \rho_{1,n-1}(\rho_{1,n} + \rho_{1,n-2})\right)\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde KdV denkleminin fark formu bulunur. Aslında bu denklem bizi en çok bilinen KdV denklemine götürür:

$$(u_{1,n})_{t'} = \tfrac{1}{2}\left(u_{1,n+2} - 2u_{1,n+1} + 2u_{1,n-1} - u_{1,n-2}\right)$$

$$+\tfrac{3}{4}\left(u_{1,n+1}(u_{1,n} + u_{1,n+2}) - u_{1,n-1}(u_{1,n} + u_{1,n-2})\right)$$

$$(u_{1,n})_{t'} = \tfrac{1}{2}\left(u_{1,n+2} - 2u_{1,n+1} + 2u_{1,n-1} - u_{1,n-2}\right)$$

$$+\tfrac{3}{2}\left(u_{1,n+1}(\tfrac{u_{1,n}+u_{1,n+2}}{2}) - u_{1,n-1}(\tfrac{u_{1,n}+u_{1,n-2}}{2})\right)$$

$$(u_{1,n})_{t'} = \tfrac{1}{2}\left(u_{1,n+2} - 2u_{1,n+1} + 2u_{1,n-1} - u_{1,n-2}\right)$$

$$+\tfrac{3}{2}\left(u_{1,n+1}(u_{1,n+1}) - u_{1,n-1}(u_{1,n-1})\right)$$

$$(u_{1,n})_{t'} = (u_{1,n})_{x'x'x'} + \tfrac{3}{2}\left(u_{1,n+1}^2 - u_{1,n-1}^2\right)$$

$$(u_{1,n})_{t'} = (u_{1,n})_{x'x'x'} + \tfrac{3}{2}\left(u_{1,n+1} + u_{1,n-1}\right)\left(u_{1,n+1} - u_{1,n-1}\right)$$

$$(u_{1,n})_{t'} = (u_{1,n})_{x'x'x'} + 6\left(\tfrac{u_{1,n+1}+u_{1,n-1}}{2}\right)\left(\tfrac{u_{1,n+1}-u_{1,n-1}}{2}\right)$$

$$(u_{1,n})_{t'} = (u_{1,n})_{x'x'x'} + 6u_{1,n}(u_{1,n})_{x'}$$

şeklinde KdV denklemi elde edilir. ALNLS den elde edilen (3.32) fark KdV denkleminin integrallenebilirliğini inceleyelim.

Bir fark oluşum denkleminin korunum kanununun bulunmasının birden fazla önemi vardır. Bunlardan ilki; eğer bir fark oluşum denkleminin korunum kanunu varsa bu o denklemin integrallenebilirliği için önemli bir göstergedir. İkinci olarak fiziksel açıdan; eğer bir fark oluşum denkleminin korunum kanunları varsa, ilk birkaç korunum kanununun korunumlu momentum, korunumlu kütle, korunumlu enerji gibi fiziksel anlamları vardır. Üçüncü olarak da korunum kanunlarının bir denklemin nümerik analizi için çok önemli olduğu söylenebilir. Bir denklemin integrallenebilmesi, bir noktada o denklemin mevcut simetrileriyle ilişkilidir. Eğer bu simetriler elde edilebiliyorsa mutlaka o simetrinin gerektirdiği bir fiziksel korunum yasası mevcuttur. Ne var ki, bir denklem çoğu halde birden fazla simetri özelliği dolayısıyla birden fazla korunum yasasını içerebilir.

Korunum kanunlarına örnek verecek olursak, zamanda öteleme enerjinin korunumunu verir;

$$E = T + V \tag{3.33}$$

olmak üzere zamanın ötelenmesi, yani zamanın değişmesi, yani zamana göre değişim, yani zamana göre türev

$$\frac{dE}{dt} = 0 \implies E = sbt \tag{3.34}$$

olup korunumludur yani değişmez. Uzayda öteleme momentumun korunumunu verir.

Fark denklemlerine örnek vermek gerekirse,

$$\frac{du_n}{dt} + u_n \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = 0 \tag{3.35}$$

denklemi korunum kanunu şeklinde yazılmıştır. Eğer

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = 0 \tag{3.36}$$

olursa,

$$\frac{du_n}{dt} = 0 \tag{3.37}$$

elde edilir. Bu da

$$u_n = sbt \tag{3.38}$$

yani u_n nin temsil ettiği büyüklüğün korunması anlamına gelir. Şimdi ALNLS denkleminden elde ettiğimiz fark KdV (3.32) denklemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen statik(durgun, zamandan bağımsız) problem

$$H(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2h^3}(\alpha+\gamma-2\beta) + \frac{3\beta}{4h}(\alpha+\gamma) \tag{3.39}$$

olmak üzere

$$H(u_n,u_{n+1},u_{n+2}) = H(u_{n-2},u_{n-1},u_n) \tag{3.40}$$

olarak yazılabilir (Agrotis, et al., 2005). Durgun halden zamana göre H nın değişimi dolayısıyla farklı iki H arasındaki değişimin zamanla ilişkisini veren büyüklük(T_n), bize o denklemin integrallenebilirliğini, dolayısıyla simetrisinin var olup olmadığını, buradan da ilgili korunum yasalarını bulmamızı sağlar. Daha açık haliyle:

eğer bir fark denklemi

$$\begin{aligned}
&\dot{T}_n = H_{n+1} - H_{n-1}, \quad H_{n+1} - H_{n-1} = 0, \quad H_{n+1} = H_{n-1}\\
&\dot{T}_n = H_{n-1} - H_{n+1}, \quad H_{n-1} - H_{n+1} = 0, \quad H_{n-1} = H_{n+1}\\
&\dot{T}_n = H_n - H_{n-1}, \quad H_n - H_{n-1} = 0, \quad H_n = H_{n-1}\\
&\dot{T}_n = H_{n+2} - H_n, \quad H_{n+2} - H_n = 0, \quad H_{n+2} = H_n\\
&\dot{T}_n = H_{n+i} - H_{n+j}, \quad H_{n+i} - H_{n-j} = 0, \quad H_{n+i} = H_{n-j}\\
&i, j \epsilon \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde yazılabiliyorsa korunum kanunu vardır ve burada korunan T_n dir. (3.32) denklemi

$$T_n = u_n \tag{3.42}$$

olmak üzere,

$$\dot{T}_n = H_{n+1} - H_{n-1} \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabilir. Daha açık haliyle (3.39) denklemi kullanılarak, (3.40) denkleminin sol ve sağ tarafı sırasıyla H_{n+1}, H_{n-1} olmak üzere

$$\begin{aligned}
\dot{T_n} &= \dot{u_n} = \frac{1}{2h^3}\left(u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_{n-1} - u_{n-2}\right) \\
&+ \frac{3}{4h}\left(u_{n+1}(u_n + u_{n+2}) - u_{n-1}(u_n + u_{n-2})\right) \\
&= \left[\frac{1}{2h^3}\left(u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1}\right) + \frac{3}{4h}u_{n+1}(u_n + u_{n+2})\right] \\
&- \left[\frac{1}{2h^3}\left(u_{n-2} + u_n - 2u_{n-1}\right) + \frac{3}{4h}u_{n-1}(u_n + u_{n-2})\right] \\
&= H_{n+1} - H_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak yazılabildiğinden (3.32) denklemi integrallenebilirdir (Agrotis, et al., 2005). İntegrallenebilirdir çünkü u_n her bir n. düğümdeki kütle olmak üzere

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{3.44}$$

kütlenin korunumu olarak yazılabilir (Agrotis, et al., 2005). Genel durumda denklemlerde korunan kütle, momentum, enerji, vb. olabilir. Örneğin

$$T_n = E_n \tag{3.45}$$

olursa enerjinin korunduğu söylenebilir.

Fizikte çokça kullanılan (3+1) boyutlu

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla.\vec{V} = 0 \tag{3.46}$$

süreklilik denklemini ele alalım. burada ρ yoğunluk, $\vec{V} = \rho\vec{v}$ tek boyutta tanımlanan bir hız alanı ise

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{dV}{dx} = -\frac{dH}{dt} \tag{3.47}$$

olarak düşünüldüğünde

$$\frac{d\rho}{dt} = -(H_{n+1} - H_{n-1}) \tag{3.48}$$

yazılabilir (Ablowitz and Herbst, 1993). Bu da, neden korunum kanununa sahip bir denklemin (3.41) formunda yazılması gerektiğinin bir açıklamasıdır.

Benzer şekilde incelendiğinde, DNLS den elde edilen (3.26) dKdV denklemi (3.41) formülasyonlarından biri cinsinden yazılamadığından integrallenebilir değildir.

Ohta-Hirota denklemi (Ohta and Hirota, 1991), gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{2h^3\dot{u_n}}{\left(h^2u_{n+1}+1\right)\left(h^2u_n+1\right)}+\frac{u_{n+1}\left(2-h^2\left(u_n+u_{n+1}\right)\right)}{h^2u_{n+1}+1} \\ &\quad -\frac{u_{n-1}\left(2-h^2\left(u_n+u_{n-1}\right)\right)+u_{n-2}(1+h^2u_{n-1})}{h^2u_{n+1}+1} \end{aligned} \tag{3.49}$$

şeklinde yazılabilir. Varsayalım ki n. iterasyonda u_{n+1}, $t=t_0$ anında $-1/h^2$ değerini alsın. Yani bir $t=t_0$ anında u_{n+2} nin ıraksak olduğunu varsayalım. Burada $..., u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ değerlerinin yakınsak ve bağımsız olduğu kabul edilmektedir.

En basit olarak

$$\tau = t - t_0 \quad , \quad \alpha(t_0) \neq 0 \tag{3.50}$$

olmak üzere,

$$u_{n+1} = -1/h^2 + \alpha(t)\tau \tag{3.51}$$

tipindeki singülerliği ele alalım. $t=t_0$ noktasında sonraki iterasyonları hesaplayacak olursak,

$$u_{n+2} = \infty \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= \frac{2h^3\dot{u}_{n+1}}{\left(h^2u_{n+2}+1\right)\left(h^2u_{n+1}+1\right)}+\frac{u_{n+2}\left(2-h^2\left(u_{n+1}+u_{n+2}\right)\right)}{h^2u_{n+2}+1} \\ &\quad -\frac{u_n\left(2-h^2\left(u_{n+1}+u_n\right)\right)+u_{n-1}(1+h^2u_n)}{h^2u_{n+2}+1} \\ &= \infty \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$u_{n+4} = -1/h^2 + O(\tau) \tag{3.54}$$

olarak bulunur ve bundan sonraki üç iterasyondan gelen değerlerde sonludur. Böylece tekillik sınırlandırması yapılmış olur. Dolayısıyla bu denklem integrallenebilirdir.

Benzer şekilde (3.32) denkleminin de integrallenebilirliğine bu şekilde bakılabilir. (3.32) denkleminde gerekli işlemler yapıldığında

$$u_{n+2}=\frac{4\dot{u_n}h^3+4u_{n+1}\text{-}4u_{n-1}+2u_{n-2}\text{-}3h^2u_{n+1}u_n+3h^2u_{n-1}u_n+3h^2u_{n-1}u_{n-2}}{2+3h^2u_{n+1}} \tag{3.55}$$

elde edilir (Agrotis, et al., 2005). Varsayalım ki n. iterasyonda u_{n+1}, $t=t_0$ anında $-2/3h^2$ değerini alsın. Yani bir $t=t_0$ anında u_{n+2} nin ıraksak olduğunu varsayalım. Burada $..., u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ değerlerinin ıraksak olmadığı ve bağımsız olduğu kabul edilmektedir.

En basit olarak (3.50) şeklinde ve

$$u_{n+1} = -2/3h^2 + \alpha(t)\tau$$

tipindeki singülerliği ele alalım. $t = t_0$ noktasında sonraki iterasyonları hesaplayacak olursak, u_{n+2}, u_{n+4} değerlerinin ıraksak olduğu görülür. Bu değerlerin ıraksak olmasının nedeni sırasıyla paydaya gelen τ ve τ^2 değerleridir. İterasyonlar yapıldıkça görülür ki, u_{n+2k}, $k = 3, 4, 5, ...$ şeklindeki çift iterasyonlar ıraksak bulunur. Bu nedenle (3.32) denkleminin integrallenebilir olmadığı görülür (Agrotis, et al., 2005).

3.5 Modifiye Schrödinger Fark Denkleminden KdV Fark Denkleminin Çıkarılması

$$iu_t = -u_{xx} - i\left(|u|^2 u\right)_x - 2\beta |u|^2 u \tag{3.56}$$

yada

$$iu_t = -u_{xx} - iu_x |u|^2 - 2iu\,|u|\,(|u|)_x - 2\beta |u|^2 u \tag{3.57}$$

olarak yazılabilen Modifiye Schrödinger (Tascan, 2002) denkleminin daha önce belirtilen sonlu fark metodu kullanılarak

$$u_x = \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}$$

olmak üzere fark denklemi

$$i\dot{u}_n = \frac{2u_n\text{-}u_{n+1}\text{-}u_{n-1}}{h^2}\text{-}i\frac{u_{n+1}\text{-}u_{n-1}}{2h}|u_n|^2\text{-}2iu_n|u_n|\frac{|u_{n+1}|\text{-}|u_{n-1}|}{2h}\text{-}2\beta u_n|u_n|^2 \tag{3.58}$$

olarak elde edilir. Modifiye Schrödinger denklemi bir kompleks fonksiyon cinsinden tanımlandığından (3.5)-(3.8) den yararlanılarak, (3.58) denklemi

$$\begin{aligned}
&i\frac{\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2} - \frac{\rho_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}\phi_n}{2h} - i\frac{\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2} + \frac{\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2} \\
&-i\frac{3\rho_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{2h} + \frac{\rho_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}\phi_{n-1}}{2h} + i\frac{\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2} - \frac{2(\rho_n)^{1/2}}{h^2} \\
&-\dot{\phi}_n\left(\rho_n\right)^{1/2} + \frac{i}{2}\dot{\rho}_n\left(\rho_n\right)^{-1/2} + \frac{\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2} - \frac{\rho_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}\phi_{n+1}}{2h} \\
&+\frac{\rho_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}\phi_n}{2h} - i\frac{\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2} + 2\beta\left(\rho_n\right)^{3/2} + i\frac{3\rho_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{2h} = 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin sanal ve reel kısmından sırasıyla

$$\begin{aligned}&\frac{\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{3\rho_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{2h}+\frac{\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}\\&+\frac{1}{2}\dot{\rho}_n\left(\rho_n\right)^{-1/2}-\frac{\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}+\frac{3\rho_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{2h}=0\end{aligned} \tag{3.60}$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}\phi_{n-1}}{2h}-\frac{\rho_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}\phi_n}{2h}+\frac{\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{2(\rho_n)^{1/2}}{h^2}-\dot{\phi}_n\left(\rho_n\right)^{1/2}\\&+\frac{\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{\rho_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}\phi_{n+1}}{2h}+\frac{\rho_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}\phi_n}{2h}+2\beta\left(\rho_n\right)^{3/2}=0\end{aligned} \tag{3.61}$$

elde edilir. Bu denklemlere çok ölçekli açılım metodunu uygulayalım.

(3.12)-(3.14) seri açılımlarının (3.60) ve (3.61) denklemlerinde yerine yazılması ve ϵ nun kuvvetlerine göre düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}&...+[\phi_{2,n+1}-2\phi_{2,n}+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\rho_{1,n}\right)_{t'}\\&-\tfrac{c}{4}\left(\rho_{2,n+1}-\rho_{2,n-1}\right)+\tfrac{1}{8}c\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)+\tfrac{3}{4}\rho_{2,n+1}\\&+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)-\tfrac{3}{16}\left(\rho_{1,n+1}\right)^2+\tfrac{3}{16}\left(\rho_{1,n-1}\right)^2\\&-\tfrac{3}{4}\rho_{2,n-1}+\tfrac{3}{4}\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)+\phi_{2,n-1}]\epsilon^{5/2}+[\phi_{1,n+1}\\&+\phi_{1,n-1}+\tfrac{3}{4}\rho_{1,n+1}-\tfrac{3}{4}\rho_{1,n-1}-\tfrac{1}{4}c\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)\\&-2\phi_{1,n}]\epsilon^{3/2}+...=0\end{aligned}$$

$$... + [-\left(\phi_{1,n}\right)_{t'} + \tfrac{c}{2}\left(\phi_{2,n+1} - \phi_{2,n-1}\right) + \tfrac{c}{4}\rho_{1,n}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\rho_{2,n} - \tfrac{1}{8}\left(\rho_{1,n}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \rho_{1,n}\right)\left(\phi_{1,n} - \phi_{1,n-1}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} + \rho_{1,n}\right)\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n}\right) + 2\beta\left(\tfrac{3}{2}\rho_{2,n} + \tfrac{3}{8}\left(\rho_{1,n}\right)^2\right) \tag{3.62}$$

$$-\rho_{1,n} - \tfrac{1}{2}\phi_{2,n+1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\phi_{2,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}]\epsilon^2 + [\tfrac{1}{2}\rho_{1,n}$$

$$+\tfrac{c}{2}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}\phi_{1,n-1} - \tfrac{1}{2}\phi_{1,n+1} + 3\beta\rho_{1,n}]\epsilon = 0$$

elde edilir. ϵ^0 ın kuvvetinden

$$1 + 2\beta = 0 \implies \beta = -\frac{1}{2} \tag{3.63}$$

bulunur. (3.63) eşitliği göz önüne alınarak ϵ nun kuvvetinden

$$\tfrac{1}{2}\rho_{1,n} + \tfrac{c}{2}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}\phi_{1,n-1} - \tfrac{1}{2}\phi_{1,n+1} + 3\beta\rho_{1,n} = 0$$

$$\rho_1 = (c-1)(\phi_1)_{x'} \tag{3.64}$$

elde edilir. $\epsilon^{3/2}$ nin kuvvetinden

$$+\phi_{1,n+1} - 2\phi_{1,n} + \phi_{1,n-1} + \tfrac{3}{4}\rho_{1,n+1} - \tfrac{3}{4}\rho_{1,n-1} - \tfrac{1}{4}c\left(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}\right) = 0$$

$$\tfrac{c-3}{4}(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}) = (\phi_1)_{x'x'} \tag{3.65}$$

$$(\rho_1)_{x'} = \tfrac{2}{c-3}(\phi_1)_{x'x'}$$

elde edilir. (3.64) denkleminde x' ye göre türev alınırsa ve (3.65) denklemi ile karşılaştırılırsa

$$(c-1) = \frac{2}{c-3} \tag{3.66}$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$c = 2 + \sqrt{3} \quad , \quad \rho_1 = (1+\sqrt{3})(\phi_1)_{x'} = r(\phi_1)_{x'} \tag{3.67}$$

alınabilir. ϵ^2 nin kuvvetinden (3.67) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
&-\left(\phi_{1,n}\right)_{t'} + \tfrac{c-1}{2}\left(\phi_{2,n+1}-\phi_{2,n-1}\right) + \tfrac{c}{4}\rho_{1,n}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{6\beta-1}{8}\left(\rho_{1,n}\right)^2 \\
&-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}+\rho_{1,n}\right)\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}+\rho_{1,n}\right)\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n-1}\right) \\
&+(\tfrac{1}{2}+3\beta)\rho_{2,n} - \rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} = 0 \\
&-\left(\phi_1\right)_{t'} + (c-1)\left(\phi_2\right)_{x'} + \tfrac{cr}{2}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 - \tfrac{r^2}{2}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 \\
&-\tfrac{3}{2}\rho_{1,n}\left(\phi_1\right)_{x'} - \rho_{2,n} + \tfrac{1}{2}\left(\rho_1\right)_{x'x'} = 0 \\
&-\left(\phi_1\right)_{t'} + (c-1)\left(\phi_2\right)_{x'} + (\tfrac{cr-r^2-3r}{2})\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 - \rho_{2,n} + \tfrac{r}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'} = 0
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

elde edilir. $\epsilon^{5/2}$ nin kuvvetinden (3.67) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
&\phi_{2,n+1} - 2\phi_{2,n} + \phi_{2,n-1} + \tfrac{1}{2}\left(\rho_{1,n}\right)_{t'} + \tfrac{1}{8}c\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right) \\
&-\tfrac{c}{4}\left(\rho_{2,n+1}-\rho_{2,n-1}\right) + \tfrac{3}{4}\rho_{2,n+1} - \tfrac{3}{4}\rho_{2,n-1} - \tfrac{3}{16}\left(\rho_{1,n+1}\right)^2 \\
&+\tfrac{3}{16}\left(\rho_{1,n-1}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right) + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right) \\
&+\tfrac{3}{4}\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right) = 0 \\
&\left(\phi_2\right)_{x'x'} + \tfrac{r}{2}\left(\phi_1\right)_{x't'} + \tfrac{cr^2}{4}\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'} + \tfrac{3-c}{2}\left(\rho_2\right)_{x'} \\
&-\tfrac{3}{16}\left(\rho_{1,n+1}+\rho_{1,n-1}\right)\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right) + \left(\phi_1\right)_{x'}\left(\tfrac{\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}}{2}\right) \\
&+\tfrac{3r^2}{2}\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'} = 0
\end{aligned}
$$

$$(\phi_2)_{x'x'}+\tfrac{r}{2}(\phi_1)_{x't'}+\tfrac{cr^2}{4}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}+\tfrac{3-c}{2}(\rho_2)_{x'}$$

$$-\tfrac{3r^2}{4}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}+r(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}+\tfrac{3r^2}{2}(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}=0 \tag{3.69}$$

$$(\phi_2)_{x'x'}+\tfrac{r}{2}(\phi_1)_{x't'}+\left(\tfrac{(3+c)r^2}{4}+r\right)(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}+\tfrac{3-c}{2}(\rho_2)_{x'}=0$$

elde edilir. (3.68) eşitliğinde x' değişkenine göre türev alınırsa

$$-(\phi_1)_{x't'}+(1+\sqrt{3})(\phi_2)_{x'x'}-(2+2\sqrt{3})(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}-\left(\rho_{2,n}\right)_{x'}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\phi_1)_{x'x'x'x'}=0 \tag{3.70}$$

ve (3.69) eşitliği $\left(-1-\sqrt{3}\right)$ ile çarpılırsa

$$\left(-1-\sqrt{3}\right)(\phi_2)_{x'x'}-(2+2\sqrt{3})(\phi_1)_{x't'}+\left(13+13\sqrt{3}\right)(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}+(\rho_2)_{x'}=0 \tag{3.71}$$

elde edilir. (3.71) ve (3.72) denklemi taraf tarafa toplanırsa

$$-(3+2\sqrt{3})(\phi_1)_{t'x'}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\phi_1)_{x'x'x'x'}+\left(11+11\sqrt{3}\right)(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}=0 \tag{3.72}$$

KdV tipi denklem elde edilir. Bulunan denklemin x' terimine göre birkez integrali alınırsa ve integral sabiti sıfır kabul edilirse,

$$(\phi_1)_{t'}=\frac{1+\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}(\phi_1)_{x'x'x'}+\frac{11+11\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}\left((\phi_1)_{x'}\right)^2 \tag{3.73}$$

yazılabilir.

Burada elde edilen KdV denkleminin fark formu

$$\dot{\phi}_{1,n}=\frac{1+\sqrt{3}}{12+8\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n+2}-2\phi_{1,n+1}+2\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n-2}\right)+\frac{11+11\sqrt{3}}{12+8\sqrt{3}}\left[\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right)^2+\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)^2\right] \tag{3.74}$$

olarak yazılabilir.

3.6 Kuple Schrödinger Fark Denkleminden KdV Fark Denkleminin Elde Edilmesi

$$\begin{aligned} &iq_t+q_{xx}+2\mu\left(|q|^2+|r|^2\right)q=0\\ &ir_t+r_{xx}+2\mu\left(|q|^2+|r|^2\right)r=0 \end{aligned} \tag{3.75}$$

olarak yazılabilen Kuple Schrödinger (Tascan, 2002) denkleminin daha önce belirtilen sonlu fark metodu kullanılarak

$$u_x = \tfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$$

$$u_{xx} = \tfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

olmak üzere fark formu

$$i\dot{q_n} + \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} + 2\mu q_n \left(|q_n|^2 + |r_n|^2\right) = 0 \tag{3.76}$$

$$i\dot{r_n} + \frac{r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1}}{h^2} + 2\mu r_n \left(|q_n|^2 + |r_n|^2\right) = 0 \tag{3.77}$$

olarak verilir. Kuple Schrödinger denklemi bir kompleks fonksiyon cinsinden tanımlandığından, (3.5)-(3.8) den yararlanılırsa ve

$$\begin{aligned} q_n &= \rho_n^{1/2} e^{i\phi_n} \\ q_{n+1} &= \rho_{n+1}^{1/2} e^{i\phi_{n+1}} \\ q_{n-1} &= \rho_{n-1}^{1/2} e^{i\phi_{n-1}} \\ r_n &= d_n^{1/2} e^{i\phi_n} \\ r_{n+1} &= d_{n+1}^{1/2} e^{i\phi_{n+1}} \\ r_{n-1} &= d_{n-1}^{1/2} e^{i\phi_{n-1}} \end{aligned} \tag{3.78}$$

dönüşümleri yapılırsa, (3.76) denkleminden

$$\begin{aligned} &\tfrac{i}{2}\dot{\rho}_n (\rho_n)^{-1/2} + \tfrac{\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2} - \tfrac{2(\rho_n)^{1/2}}{h^2} + +i\tfrac{\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2} \\ &+i\tfrac{\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2} - \dot{\phi}_n (\rho_n)^{1/2} - i\tfrac{\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2} + \tfrac{\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2} \\ &+2\mu (\rho_n)^{3/2} - i\tfrac{\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2} + 2\mu (\rho_n)^{1/2} d_n = 0 \end{aligned} \tag{3.79}$$

elde edilir. (3.79) denkleminin sanal ve reel kısmından sırasıyla

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}_n(\rho_n)^{-1/2}+\frac{\phi_{n+1}(\rho_{n+1})^{1/2}}{h^2}-\frac{\phi_n(\rho_{n+1})^{1/2}}{h^2}+\frac{\phi_{n-1}(\rho_{n-1})^{1/2}}{h^2}-\frac{\phi_n(\rho_{n-1})^{1/2}}{h^2}=0 \quad (3.80)$$

ve

$$-\dot{\phi}_n(\rho_n)^{1/2}+\frac{(\rho_{n+1})^{1/2}}{h^2}+\frac{(\rho_{n-1})^{1/2}}{h^2}-\frac{2(\rho_n)^{1/2}}{h^2}+2\mu(\rho_n)^{3/2}+2\mu(\rho_n)^{1/2}d_n=0 \quad (3.81)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.77) denkleminden

$$\begin{aligned}&\tfrac{i}{2}\dot{d}_n(d_n)^{-1/2}+\tfrac{(d_{n-1})^{1/2}}{h^2}-\tfrac{2(d_n)^{1/2}}{h^2}++i\tfrac{\phi_{n+1}(d_{n+1})^{1/2}}{h^2}\\ &+i\tfrac{\phi_{n-1}(d_{n-1})^{1/2}}{h^2}-\dot{\phi}_n(d_n)^{1/2}-i\tfrac{\phi_n(d_{n-1})^{1/2}}{h^2}+\tfrac{(d_{n+1})^{1/2}}{h^2}\\ &+2\mu(d_n)^{3/2}-i\tfrac{\phi_n(d_{n+1})^{1/2}}{h^2}+2\mu(d_n)^{1/2}\rho_n=0\end{aligned} \quad (3.82)$$

elde edilir. (3.82) denkleminin sanal ve reel kısmından sırasıyla

$$\frac{1}{2}\dot{d}_n(d_n)^{-1/2}+\frac{\phi_{n+1}(d_{n+1})^{1/2}}{h^2}-\frac{\phi_n(d_{n+1})^{1/2}}{h^2}+\frac{\phi_{n-1}(d_{n-1})^{1/2}}{h^2}-\frac{\phi_n(d_{n-1})^{1/2}}{h^2}=0 \quad (3.83)$$

ve

$$-\dot{\phi}_n(d_n)^{1/2}+\frac{(d_{n+1})^{1/2}}{h^2}+\frac{(d_{n-1})^{1/2}}{h^2}-\frac{2(d_n)^{1/2}}{h^2}+2\mu(d_n)^{3/2}+2\mu(d_n)^{1/2}\rho_n=0 \quad (3.84)$$

elde edilir.

Bu denklemlere çok ölçekli açılım metodunu uygulayalım.

$$\begin{aligned}&\rho_n=1+\epsilon\rho_{1,n}+\epsilon^2\rho_{2,n}+\epsilon^3\rho_{3,n}+...\\ &d_n=1+\epsilon d_{1,n}+\epsilon^2 d_{2,n}+\epsilon^3 d_{3,n}+...\\ &\phi_n=-t+\epsilon^{1/2}\phi_{1,n}+\epsilon^{3/2}\phi_{2,n}+\epsilon^{5/2}\phi_{3,n}+...\\ &t'=\epsilon^{3/2}t\ \ ,\ \ x'=-c\epsilon^{1/2}t\ \ ,\ \ h'=\epsilon^{1/2}h\end{aligned} \quad (3.85)$$

seri açılımlarının yukarıdaki (3.80)-(3.81) ve (3.83)-(3.84) denklemlerinde yerine yazılması ve ϵ nun kuvvetlerine göre düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
&...+[\phi_{2,n-1}-2\phi_{2,n}+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)+\phi_{2,n+1} \\
&+\tfrac{1}{8}c\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right) \\
&-\tfrac{c}{4}\left(\rho_{2,n+1}-\rho_{2,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\rho_{1,n}\right)_{t'}]\epsilon^{5/2}+[\phi_{1,n+1}-2\phi_{1,n} \\
&+\phi_{1,n-1}-\tfrac{1}{4}c\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)]\epsilon^{3/2}=0
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
&...+[2\mu d_{2,n}+\mu\rho_{1,n}d_{1,n}+\mu\rho_{2,n}-\tfrac{\mu}{4}\left(\rho_{1,n}\right)^2-\rho_{1,n} \\
&-\left(\phi_{1,n}\right)_{t'}+\tfrac{c}{2}\left(\phi_{2,n+1}-\phi_{2,n-1}\right)+\tfrac{c}{4}\rho_{1,n}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1}\right) \\
&\tfrac{1}{2}\rho_{2,n}-\tfrac{1}{8}\left(\rho_{1,n}\right)^2+3\mu\rho_{2,n}+\tfrac{3\mu}{4}\left(\rho_{1,n}\right)^2+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} \\
&+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}]\epsilon^2+[\tfrac{c}{2}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n}+2\mu d_{1,n} \\
&+4\mu\rho_{1,n}]\epsilon+1+4\mu=0
\end{aligned} \tag{3.87}$$

ve

$$\begin{aligned}
&...+[\phi_{2,n-1}-2\phi_{2,n}+\tfrac{1}{2}d_{1,n-1}\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)+\phi_{2,n+1} \\
&+\tfrac{1}{8}cd_{1,n}\left(d_{1,n+1}-d_{1,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}d_{1,n+1}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right) \\
&-\tfrac{c}{4}\left(d_{2,n+1}-d_{2,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}\left(d_{1,n}\right)_{t'}]\epsilon^{5/2}+[\phi_{1,n+1}-2\phi_{1,n} \\
&+\phi_{1,n-1}-\tfrac{1}{4}c\left(d_{1,n+1}-d_{1,n-1}\right)]\epsilon^{3/2}=0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$... + [2\mu\rho_{2,n} + \mu\rho_{1,n}d_{1,n} + \mu d_{2,n} - \tfrac{\mu}{4}\left(d_{1,n}\right)^2 - d_{1,n}$$

$$- \left(\phi_{1,n}\right)_{t'} + \tfrac{c}{2}\left(\phi_{2,n+1} - \phi_{2,n-1}\right) + \tfrac{c}{4}d_{1,n}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}d_{2,n} - \tfrac{1}{8}\left(d_{1,n}\right)^2 + 3\mu d_{2,n} + \tfrac{3\mu}{4}\left(d_{1,n}\right)^2 + \tfrac{1}{2}d_{1,n+1} \tag{3.89}$$

$$+\tfrac{1}{2}d_{1,n-1}]\epsilon^2 + [\tfrac{c}{2}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}d_{1,n} + 2\mu\rho_{1,n}$$

$$+4\mu d_{1,n}]\epsilon + 1 + 4\mu = 0$$

elde edilir. ϵ^0 ın kuvvetinden

$$1 + 4\mu = 0 \implies \mu = -\frac{1}{4} \tag{3.90}$$

bulunur. (3.90) eşitliği göz önüne alınarak (3.86) denkleminde $\epsilon^{3/2}$ nun kuvvetinden

$$\begin{gathered} \phi_{1,n+1} - 2\phi_{1,n} + \phi_{1,n-1} - \tfrac{1}{4}c\left(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}\right) = 0 \\ \left(\rho_1\right)_{x'} = \tfrac{2}{c}(\phi_1)_{x'x'} \end{gathered} \tag{3.91}$$

elde edilir. (3.87) denkleminde ϵ nun kuvvetinden

$$\begin{gathered} \tfrac{c}{2}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n} + 2\mu d_{1,n} + 4\mu\rho_{1,n} = 0 \\ \rho_{1,n} = 2c(\phi_1)_{x'} - d_{1,n} \end{gathered} \tag{3.92}$$

elde edilir. (3.90) eşitliği göz önüne alınarak (3.88) denkleminde $\epsilon^{3/2}$ nun kuvvetinden

$$\begin{gathered} \phi_{1,n+1} - 2\phi_{1,n} + \phi_{1,n-1} - \tfrac{1}{4}c\left(d_{1,n+1} - d_{1,n-1}\right) = 0 \\ \left(d_1\right)_{x'} = \tfrac{2}{c}(\phi_1)_{x'x'} \end{gathered} \tag{3.93}$$

elde edilir. (3.89) denkleminde ϵ nun kuvvetinden

$$\begin{gathered} \tfrac{c}{2}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}d_{1,n} + 2\mu\rho_{1,n} + 4\mu d_{1,n} = 0 \\ d_{1,n} = 2c(\phi_1)_{x'} - \rho_{1,n} \end{gathered} \tag{3.94}$$

elde edilir.

(3.91) ile (3.93) denklemleri karşılaştırılırsa

$$(\rho_1)_{x'} = (d_1)_{x'} \tag{3.95}$$

bulunur. Buradan

$$\rho_1 = d_1 \tag{3.96}$$

alınabilir. Bu eşitlik kullanılarak (3.94) denkleminden

$$\rho_1 = c(\phi_1)_{x'} \tag{3.97}$$

$$d_1 = c(\phi_1)_{x'} \tag{3.98}$$

yazılabilir.

(3.92) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \left(\rho_{1,n}\right)_{x'} &= 2c(\phi_1)_{x'x'} - (d_{1,n})_{x'} \\ \left(\rho_{1,n}\right)_{x'} &= c(\phi_1)_{x'x'} \end{aligned} \tag{3.99}$$

elde edilir. (3.91) ile (3.99) denklemleri karşılaştırılırsa

$$c = \frac{c}{2} \Longrightarrow c = \sqrt{2} \tag{3.100}$$

dolayısıyla

$$\left(\rho_{1,n}\right)_{x'} = \sqrt{2}(\phi_1)_{x'x'} \tag{3.101}$$

$$(d_{1,n})_{x'} = \sqrt{2}(\phi_1)_{x'x'} \tag{3.102}$$

elde edilir.

(3.87) denkleminde ϵ^2 nin kuvvetinden

$$
\begin{aligned}
&2\mu d_{2,n} + \mu\rho_{1,n}d_{1,n} + \tfrac{c}{4}\rho_{1,n}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{3\mu}{4}\left(\rho_{1,n}\right)^2 \\
&-\tfrac{\mu}{4}\left(\rho_{1,n}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\rho_{1,n}\right)^2 + \tfrac{c}{2}\left(\phi_{2,n+1} - \phi_{2,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} \\
&-\rho_{1,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1} + \mu\rho_{2,n} + \tfrac{1}{2}\rho_{2,n} + 3\mu\rho_{2,n} - \left(\phi_{1,n}\right)_{t'} = 0 \\
&-\tfrac{1}{2}d_{2,n} - \tfrac{1}{2}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 + \left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 + -\tfrac{1}{2}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\phi_2\right)_{x'} \\
&+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'} - \tfrac{1}{2}\rho_{2,n} - \left(\phi_{1,n}\right)_{t'} = 0 \\
&-\tfrac{1}{2}d_{2,n} - \tfrac{1}{2}\rho_{2,n} + \sqrt{2}\left(\phi_2\right)_{x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'} - \left(\phi_{1,n}\right)_{t'} = 0
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

elde edilir. (3.86) denkleminden $\epsilon^{5/2}$ nin kuvvetinden

$$
\begin{aligned}
&\phi_{2,n-1} - 2\phi_{2,n} + \phi_{2,n+1} + \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}\left(\phi_{1,n-1} - \phi_{1,n}\right) \\
&+\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n}\right) + \tfrac{1}{8}c\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}\right) \\
&-\tfrac{c}{4}\left(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\rho_{1,n}\right)_{t'} = 0 \\
&\left(\phi_2\right)_{x'x'} + \left(\phi_1\right)_{x'}\left(\tfrac{1}{2}\rho_{1,n+1} - \tfrac{1}{2}\rho_{1,n-1}\right) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'} \\
&-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\rho_2\right)_{x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x't'} = 0 \\
&\left(\phi_2\right)_{x'x'} + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\rho_2\right)_{x'} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x't'} = 0
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

elde edilir.

(3.89) denkleminde ϵ^2 nin kuvvetinden

$$\begin{aligned}
&2\mu\rho_{2,n}+\mu\rho_{1,n}d_{1,n}+\tfrac{c}{4}d_{1,n}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1}\right)+\tfrac{3\mu}{4}\left(d_{1,n}\right)^2\\
&-\tfrac{\mu}{4}\left(d_{1,n}\right)^2-\tfrac{1}{8}\left(d_{1,n}\right)^2+\tfrac{c}{2}\left(\phi_{2,n+1}-\phi_{2,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}d_{1,n+1}\\
&-d_{1,n}+\tfrac{1}{2}d_{1,n-1}+\mu d_{2,n}+\tfrac{1}{2}d_{2,n}+3\mu d_{2,n}-\left(\phi_{1,n}\right)_{t'}=0\\
&-\tfrac{1}{2}\rho_{2,n}-\tfrac{1}{2}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2+\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2+-\tfrac{1}{2}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2+\sqrt{2}\left(\phi_2\right)_{x'}\\
&+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'}-\tfrac{1}{2}d_{2,n}-\left(\phi_{1,n}\right)_{t'}=0\\
&-\tfrac{1}{2}d_{2,n}-\tfrac{1}{2}\rho_{2,n}+\sqrt{2}\left(\phi_2\right)_{x'}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'}-\left(\phi_{1,n}\right)_{t'}=0
\end{aligned}\tag{3.105}$$

elde edilir. (3.88) denkleminden $\epsilon^{5/2}$ nin kuvvetinden

$$\begin{aligned}
&\phi_{2,n-1}-2\phi_{2,n}+\phi_{2,n+1}+\tfrac{1}{2}d_{1,n-1}\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}d_{1,n+1}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right)+\tfrac{1}{8}cd_{1,n}\left(d_{1,n+1}-d_{1,n-1}\right)\\
&-\tfrac{c}{4}\left(d_{2,n+1}-d_{2,n-1}\right)+\tfrac{1}{2}\left(d_{1,n}\right)_{t'}=0\\
&\left(\phi_2\right)_{x'x'}+\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\tfrac{1}{2}d_{1,n+1}-\tfrac{1}{2}d_{1,n-1}\right)+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'}\\
&-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(d_2\right)_{x'}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x't'}=0\\
&\left(\phi_2\right)_{x'x'}+\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(d_2\right)_{x'}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x't'}=0
\end{aligned}\tag{3.106}$$

elde edilir.

(3.103) denkleminden (3.105) denklemi çıkarılırsa

$$\left(d_2\right)_{x'}-\left(\rho_2\right)_{x'}=0\implies\left(d_2\right)_{x'}=\left(\rho_2\right)_{x'}\tag{3.107}$$

elde edilir. (3.105) denkleminin x' değişkenine göre türevi alınırsa

$$-\frac{1}{2}\left(d_{2,n}\right)_{x'}-\frac{1}{2}\left(\rho_{2,n}\right)_{x'}+\sqrt{2}\left(\phi_2\right)_{x'x'}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'x'}-\left(\phi_1\right)_{x't'}=0\tag{3.108}$$

bulunur. (3.104) denklemi $-\sqrt{2}$ ile çarpılırsa

$$-\sqrt{2}\left(\phi_2\right)_{x'x'}-3\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'}+\left(\rho_2\right)_{x'}-\left(\phi_1\right)_{x't'}=0 \tag{3.109}$$

bulunur. (3.108) ve (3.109) denklemleri toplanırsa

$$-2\left(\phi_1\right)_{x't'}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'x'}-3\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'}=0 \tag{3.110}$$

KdV tipi denklem elde edilir. Bulunan denklemin x' terimine göre birkez integrali alınırsa ve integral sabiti sıfır kabul edilirse,

$$\left(\phi_1\right)_{t'}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\phi_1)_{x'x'x'}-\frac{3}{4}\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 \tag{3.111}$$

yazılabilir.

Burada elde edilen KdV denklemine karşı gelen fark denklemi

$$\dot{\phi}_{1,n}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\phi_{1,n+2}\text{-}2\phi_{1,n+1}+2\phi_{1,n-1}\text{-}\phi_{1,n-2}\right)\text{-}\frac{3}{8}\left[\left(\phi_{1,n+1}\text{-}\phi_{1,n}\right)^2+\left(\phi_{1,n-1}\text{-}\phi_{1,n}\right)^2\right] \tag{3.112}$$

olarak yazılabilir. Bu işlemler çerçevesinde indirgemenin (3.78) formunda yapılması, aksi durumdaki işlemlerin çok ölçekli açılım metodunun işlem formlarına uygun ilerlememesi üzerine bir zorunluluk halini almıştır.

3.7 Üçüncü Mertebeden Schrödinger Fark Denkleminden KdV Fark Denkleminin Elde Edilmesi

$$iu_t=u_{xx}-2\left|u\right|^2u+i\beta u_{xxx} \tag{3.113}$$

3. mertebeden Schrödinger (Tascan, 2002) denkleminin daha önce belirtilen sonlu fark metodu kullanılarak

$$u_{xx}=\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}$$

$$u_{xxx}=\frac{u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_{n-1}-u_{n-2}}{2h^3}$$

olmak üzere, fark denklemi

$$i\dot{u}_n=\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}-2\left|u_n\right|^2u_n+i\beta\frac{u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_{n-1}-u_{n-2}}{2h^3} \tag{3.114}$$

olarak bulunur. 3. mertebeden Schrödinger denklemi bir kompleks fonksiyon cinsinden tanımlandığından (3.5)-(3.8) ve

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{n+2}} &\approx e^{i\phi_{n+1}}(1+i(\phi_{n+2}-\phi_{n+1})) \\ e^{i\phi_{n+2}} &\approx e^{i\phi_{n}}(1+i(\phi_{n+1}-\phi_{n}))(1+i(\phi_{n+2}-\phi_{n+1})) \end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{n-2}} &\approx e^{i\phi_{n-1}}(1+i(\phi_{n-2}-\phi_{n-1})) \\ e^{i\phi_{n-2}} &\approx e^{i\phi_{n}}(1+i(\phi_{n-1}-\phi_{n}))(1+i(\phi_{n-2}-\phi_{n-1})) \end{aligned} \tag{3.116}$$

göz önünde bulundurularak

$$\begin{gathered} u_n=\rho_n^{1/2}e^{i\phi_n} \\ u_{n+1}=\rho_{n+1}^{1/2}e^{i\phi_{n+1}} \\ u_{n-1}=\rho_{n-1}^{1/2}e^{i\phi_{n-1}} \\ u_{n+2}=\rho_{n+2}^{1/2}e^{i\phi_{n+2}} \\ u_{n-2}=\rho_{n-2}^{1/2}e^{i\phi_{n-2}} \end{gathered} \tag{3.117}$$

dönüşümleri yapılırsa;

$$i\tfrac{\beta\phi_n\phi_{n+1}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}-\tfrac{\beta\phi_n\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}+i\tfrac{\beta\phi_n\phi_{n-2}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}$$

$$-i\tfrac{\beta\phi_n\phi_{n+2}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}+\tfrac{\beta\phi_{n+2}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}+i\tfrac{\beta\phi_{n+2}\phi_{n+1}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}$$

$$-\tfrac{2\beta\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^3}+i\tfrac{\beta\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}-i\tfrac{2\beta\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^3}-\tfrac{2\beta\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^3}$$

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{\beta\phi_n\phi_{n-1}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{\beta\phi_n\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}-i\frac{\beta\phi_{n-2}\phi_{n-1}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&-i\frac{\beta\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}-\frac{\beta\phi_{n-2}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{2\beta\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^3}-i\frac{2\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}\\
&+\frac{2\beta\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^3}+i\frac{\beta\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}\left(\phi_{n-1}\right)^2}{h^3}+4\left(\rho_n\right)^{3/2}+i\frac{2\beta\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&+i\frac{2\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-i\frac{2\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-2\dot{\phi}_n\left(\rho_n\right)^{1/2}+\frac{4(\rho_n)^{1/2}}{h^2}\\
&-\frac{2\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{2\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}-i\frac{\beta\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}\left(\phi_{n+1}\right)^2}{h^3}+i\frac{2\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}\\
&+i\dot{\rho}_n\left(\rho_n\right)^{-1/2}=0
\end{aligned}
\tag{3.118}
$$

elde edilir. Bu denklemin sanal ve reel kısımlarından sırasıyla

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta\phi_n\phi_{n+1}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{\beta\phi_n\phi_{n-2}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{\beta\phi_{n+2}\phi_{n+1}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&-\frac{\beta\phi_n\phi_{n+2}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}-\frac{\beta\phi_{n-2}\phi_{n-1}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}-\frac{\beta\phi_n\phi_{n-1}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&-\frac{\beta\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{2\beta\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{\beta\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}\left(\phi_{n-1}\right)^2}{h^3}+\frac{\beta\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&+\frac{2\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{2\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{2\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{2\beta\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&-\frac{\beta\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}\left(\phi_{n+1}\right)^2}{h^3}+\frac{2\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}+\dot{\rho}_n\left(\rho_n\right)^{-1/2}=0
\end{aligned}
\tag{3.119}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\beta\phi_n\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{\beta\phi_{n+2}\left(\rho_{n+2}\right)^{1/2}}{h^3}-\frac{2\beta\phi_{n+1}\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^3}-\frac{2\beta\phi_n\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^3}\\
&+\frac{\beta\phi_n\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}-\frac{\beta\phi_{n-2}\left(\rho_{n-2}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{2\beta\phi_{n-1}\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^3}++4\left(\rho_n\right)^{3/2}\\
&\frac{2\beta\phi_n\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^3}+\frac{4(\rho_n)^{1/2}}{h^2}-\frac{2\left(\rho_{n-1}\right)^{1/2}}{h^2}-\frac{2\left(\rho_{n+1}\right)^{1/2}}{h^2}\\
&-2\dot{\phi}_n\left(\rho_n\right)^{1/2}=0
\end{aligned}
\tag{3.120}
$$

elde edilir. Bu denklemlerle birlikte çok ölçekli açılım metodunu uygulayalım.

(3.12)-(3.14) seri açılımlarının (3.119) ve (3.120) denklemlerinde yerine yazılması ve ϵ nun kuvvetlerine göre düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
&... + [(\beta\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n-1}\right)\left(\phi_{1,n-2}-\phi_{1,n-1}\right)+\beta\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right)\left(\phi_{1,n+2}-\phi_{1,n+1}\right)\\
&-\beta\rho_{1,n-1}+\tfrac{1}{2}\beta\rho_{1,n-2}+\beta\rho_{1,n+1}+\left(\rho_{1,n}\right)_{t'}+\tfrac{1}{4}c\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)+4\phi_{2,n}\\
&-\tfrac{1}{2}\beta\rho_{1,n+2}+\rho_{1,n+1}\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n+1}\right)+\rho_{1,n-1}\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n-1}\right)-2\phi_{2,n-1}-2\phi_{2,n+1}\\
&-\tfrac{c}{2}\left(\rho_{2,n+1}-\rho_{2,n-1}\right)]\epsilon^{5/2}+[4\phi_{1,n}-2\phi_{1,n+1}-2\phi_{1,n-1}-\tfrac{1}{2}c\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)]\epsilon^{3/2}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&... + [-\rho_{1,n+1}-2\left(\phi_{1,n}\right)_{t'}+\tfrac{1}{2}c\rho_{1,n}\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1}\right)+\tfrac{3}{2}\left(\rho_{1,n}\right)^2-\rho_{1,n-1}\\
&+2\beta\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)+\beta\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n-2}\right)+\beta\left(\phi_{1,n+2}-\phi_{1,n}\right)+2\beta\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n+1}\right)\\
&+2\rho_{1,n}+6\rho_{2,n}+c\left(\phi_{2,n+1}-\phi_{2,n-1}\right)]\epsilon^2+[6\rho_{1,n}+c\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1}\right)]\epsilon=0
\end{aligned} \tag{3.121}$$

elde edilir. ϵ nun kuvvetinden

$$\begin{gathered}
6\rho_{1,n}+c(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n-1})=0\\
\rho_1=-\tfrac{c}{3}(\phi_1)_{x'}
\end{gathered} \tag{3.122}$$

ve $\epsilon^{3/2}$ nin kuvvetinden

$$4\phi_{1,n}-2\phi_{1,n+1}-2\phi_{1,n-1}-\tfrac{1}{2}c\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)=0$$

$$\tfrac{c}{2}(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1})=-2(\phi_1)_{x'x'} \tag{3.123}$$

$$(\rho_1)_{x'}=-\tfrac{2}{c}(\phi_1)_{x'x'}$$

elde edilir. (3.122) denkleminde x' değişkenine göre türev alınırsa ve (3.123) denklemi ile karşılaştırılırsa

$$-\frac{2}{c} = -\frac{c}{3} \tag{3.124}$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$c = \sqrt{6} \quad , \quad \rho_1 = -\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\phi_1)_{x'} \tag{3.125}$$

bulunur. ϵ^2 nin kuvvetinden (3.125) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$-\rho_{1,n+1} + 2\rho_{1,n} - \rho_{1,n-1} - 2\left(\phi_1\right)_{t'} + \tfrac{1}{2}c\rho_{1,n}\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n-1}\right) + \tfrac{3}{2}\left(\rho_{1,n}\right)^2$$

$$+2\beta\left(\phi_{1,n-1} - \phi_{1,n}\right) + \beta\left(\phi_{1,n} - \phi_{1,n-2}\right) + \beta\left(\phi_{1,n+2} - \phi_{1,n}\right) + 2\beta\left(\phi_{1,n} - \phi_{1,n+1}\right)$$

$$+6\rho_{2,n} + c\left(\phi_{2,n+1} - \phi_{2,n-1}\right) = 0$$

$$-\left(\rho_1\right)_{x'x'} - 2\left(\phi_1\right)_{t'} + \sqrt{6}\rho_{1,n}\left(\phi_1\right)_{x'} + \left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2$$

$$+\beta\left(\phi_{1,n+2} - 2\phi_{1,n+1} + 2\phi_{1,n-1} + \phi_{1,n-2}\right) + 6\rho_{2,n} + 2\sqrt{6}\left(\phi_2\right)_{x'} = 0$$

$$\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_1\right)_{x'x'x'} - 2\left(\phi_1\right)_{t'} - 2\left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 + \left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2$$

$$2\beta\left(\phi_1\right)_{x'x'x'} + 6\rho_{2,n} + 2\sqrt{6}\left(\phi_2\right)_{x'} = 0$$

$$\left(2\beta + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\phi_1\right)_{x'x'x'} - 2\left(\phi_1\right)_{t'} - \left(\left(\phi_1\right)_{x'}\right)^2 + 6\rho_{2,n} + 2\sqrt{6}\left(\phi_2\right)_{x'} = 0 \tag{3.126}$$

elde edilir. $\epsilon^{5/2}$ nin kuvvetinden (3.125) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$-2\phi_{2,n+1} + 4\phi_{2,n} - 2\phi_{2,n-1} + \left(\rho_{1,n}\right)_{t'} + \tfrac{1}{4}c\rho_{1,n}\left(\rho_{1,n+1} - \rho_{1,n-1}\right)$$

$$+\beta\left(\phi_{1,n} - \phi_{1,n-1}\right)\left(\phi_{1,n-2} - \phi_{1,n-1}\right) + \beta\left(\phi_{1,n+1} - \phi_{1,n}\right)\left(\phi_{1,n+2} - \phi_{1,n+1}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\beta\rho_{1,n+2} + \beta\rho_{1,n+1} - \beta\rho_{1,n-1} + \tfrac{1}{2}\beta\rho_{1,n-2} - \tfrac{c}{2}\left(\rho_{2,n+1} - \rho_{2,n-1}\right)$$

$$+\rho_{1,n+1}\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n+1}\right)+\rho_{1,n-1}\left(\phi_{1,n}-\phi_{1,n-1}\right)=0$$

$$-2\left(\phi_2\right)_{x'x'}-\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x't'}+\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\rho_{1,n}\left(\rho_1\right)_{x'}+0$$

$$-\beta\left(\rho_1\right)_{x'x'x'}-\sqrt{6}\left(\rho_2\right)_{x'}-\left(\phi_{1,n}\right)_{x'}\left(\rho_{1,n+1}-\rho_{1,n-1}\right)=0$$

$$-2\left(\phi_2\right)_{x'x'}-\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x't'}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'x'}$$

$$+\beta\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'x'x'x'}-\sqrt{6}\left(\rho_2\right)_{x'}+\tfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'x'}=0$$

$$-2\left(\phi_2\right)_{x'x'}-\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x't'}+\beta\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'x'x'x'}-\sqrt{6}\left(\rho_2\right)_{x'}+\sqrt{6}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'}\left(\phi_{1,n}\right)_{x'x'}=0 \tag{3.127}$$

elde edilir. (3.126) eşitliğinde x' değişkenine göre türev alınırsa,

$$\left(2\beta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\phi_1\right)_{x'x'x'x'}-2\left(\phi_1\right)_{x't'}-2\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'}+6\left(\rho_2\right)_{x'}+2\sqrt{6}\left(\phi_2\right)_{x'x'}=0 \tag{3.128}$$

elde edilir. (3.127) eşitliği $\sqrt{6}$ ile çarpılırsa

$$-2\sqrt{6}\left(\phi_2\right)_{x'x'}-2\left(\phi_1\right)_{x't'}+2\beta\left(\phi_1\right)_{x'x'x'x'}-6\left(\rho_2\right)_{x'}+6\left(\phi_1\right)_{x'}\left(\phi_1\right)_{x'x'}=0 \tag{3.129}$$

elde edilir. (3.128) ve (3.129) denklemi taraf tarafa toplanırsa

$$-4(\phi_1)_{t'x'}+\left(4\beta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)(\phi_1)_{x'x'x'x'}+4(\phi_1)_{x'}(\phi_1)_{x'x'}=0 \tag{3.130}$$

KdV tipi denklem elde edilir. Bulunan denklemin x' terimine göre birkez integrali alınırsa ve integral sabiti sıfır kabul edilirse,

$$(\phi_1)_{t'}=\left(\beta+\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)(\phi_1)_{x'x'x'}+\frac{1}{2}\left((\phi_1)_{x'}\right)^2 \tag{3.131}$$

yazılabilir.

Burada elde edilen KdV fark denklemi (3.130) denkleminden

$$\dot{\phi}_{1,n}=\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4\sqrt{6}}\right)\left(\phi_{1,n+2}-2\phi_{1,n+1}+2\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n-2}\right)+\frac{1}{4}\left[\left(\phi_{1,n+1}-\phi_{1,n}\right)^2+\left(\phi_{1,n-1}-\phi_{1,n}\right)^2\right] \tag{3.132}$$

olarak yazılabilir.

BÖLÜM 4

FARK OLUŞUM DENKLEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

4.1 Giriş

Fark denklemleri fizikte kullanılan birçok yapının modellenmesinde çokça kullanılır. Örneğin; latislerdeki parçacık titreşimlerinde, bügün kullanılan elektriksel ağlarda, biyolojik zincirlerdeki nabız temsilinde kullanılmaktadır. Fark denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için geliştirilen sayılı metod vardır (Zhang, et al., 2009; Zhen, 2009; Baldwin, et al., 2004; Bekir, 2010). Bunlardan yaygınca kullanılan metodlardan biride üstel fonksiyon metodudur.

4.2 Üstel Fonksiyon Metodu ve Uygulamaları

Bu metod ilk olarak He ve Wu tarafından geliştirilmiştir (Wu and He, 2007). Daha sonra 2008 de "non-lineer dinamik" konusu altında düzenlenen uluslararası bir sempozyumda Wu tarafından fark oluşum denklemlerine de uygulanabilirliği gösterilmiştir (Wu, et al., 2008). Şimdi metodun fark denklemlerine nasıl uygulandığını adım adım açıklayalım.

Adım 1: Genel haliyle bir diferensiyel fark denklemi

$$F\left[u_{n+p_1}(x),...,u_{n+p_k}(x),u'_{n+p_1}(x),...,u'_{n+p_k}(x),...,u^{(r)}_{n+p_1}(x),...,u^{(r)}_{n+p_k}(x)\right]=0 \quad (4.1)$$

olsun. Bu denklemin bağımlı değişkeni olan u_n nin $u_{i,n}$ ve bunların iterasyonları olmak üzere N adet bileşeni, sürekli değişken olan x in x_i tipinde h tane bileşeni, fark değişkeni olan n nin n_j tipinde s tane bileşeni, p_i tipinde k tane itere terimi bulunmaktadır. Ayrıca burada $u^{(r)}(x)$ terimi r. mertebeden türevi göstermektedir.

d_i, c_i ler sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_n(x) = U(\xi_n) = U_n \quad &, \quad \xi_n = \sum_{i=1}^{s} d_i n_i + \sum_{j=1}^{h} c_i x_i + c_0 \\ u_{n+p}(x) = U(\xi_{n+p}) = U_{n+p} \quad &, \quad \xi_{n+p} = \sum_{i=1}^{s} d_i\,(n_i+p) + \sum_{j=1}^{h} c_i x_i + c_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

hareketli dalga dönüşümünü yaparak (4.1) denklemi

$$G\left[U_{n+p_1}, U_{n+p_2},...,U_{n+p_k},\ U'_{n+p_1},U'_{n+p_2},...,U'_{n+p_k},\ U^{(r)}_{n+p_1},U^{(r)}_{n+p_2},...,U^{(r)}_{n+p_k}\right]=0 \quad (4.3)$$

adi diferensiyel fark denklemine dönüşür.

Adım 2: p, q, e, f, a_l, b_m sabitler olmak üzere (4.3) denkleminin çözümü

$$U_n(\xi_n) = \frac{\sum\limits_{l=-p}^{q} a_l e^{l\xi_n}}{\sum\limits_{m=-e}^{f} b_m e^{m\xi_n}}$$

$$U_{n+i}(\xi_n) = \frac{\sum\limits_{l=-p}^{q} a_l e^{l(\xi_n+id_n)}}{\sum\limits_{m=-e}^{f} b_m e^{m(\xi_n+id_n)}} \tag{4.4}$$

$$U_{n-i}(\xi_n) = \frac{\sum\limits_{l=-p}^{q} a_l e^{l(\xi_n-id_n)}}{\sum\limits_{m=-e}^{f} b_m e^{m(\xi_n-id_n)}}$$

şeklinde aranır.

Adım 3:

Lineer olmayan en yüksek dereceden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesinden e ile p ve q ile f nin dengelendiği görülebilir. Örneğin

$$e = p = q = f = 1 \tag{4.5}$$

alınırsa çözüm

$$U_n(\xi_n) = \frac{a_{-1}e^{-\xi_n} + a_0 + a_1 e^{\xi_n}}{b_{-1}e^{-\xi_n} + b_0 + b_1 e^{\xi_n}}$$

şeklinde aranır.

Adım 4: (4.4) değerleri (4.3) te yerine yazılarak buradan elde edilen denklem e^{ξ_n} teriminin kuvvetlerine göre toplanır ve herbir kuvvetin katsayısını sıfıra eşitleyerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek çözümü oluşturacak sabitler elde edilmiş olur.

Örnek: İlk olarak

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} - w_1^2\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + w_0^2 u_n + ru_n^3 = 0 \tag{4.6}$$

Klein-Gordon denklemini ele alalım (Leon and Manna, 1999).

$$\xi_n = dn + ct + c_0 \tag{4.7}$$

hareketli dalga dönüşümü yapılırsa (4.6) denklemi

$$c^2\frac{d^2U_n}{d\xi_n^2} - w_1^2\left(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}\right) + w_0^2 U_n + rU_n^3 = 0 \tag{4.8}$$

denklemine dönüşür.

$$U_n(\xi_n) = \frac{a_2 e^{-\xi_n} + a_0 + a_1 e^{\xi_n}}{b_2 e^{-\xi_n} + b_0 + e^{\xi_n}}$$

$$U_{n+1}(\xi_n) = \frac{a_2 e^{-\xi_n - d} + a_0 + a_1 e^{\xi_n + d}}{b_2 e^{-\xi_n - d} + b_0 + e^{\xi_n + d}} \tag{4.9}$$

$$U_{n-1}(\xi_n) = \frac{a_2 e^{-\xi_n + d} + a_0 + a_1 e^{\xi_n - d}}{b_2 e^{-\xi_n + d} + b_0 + e^{\xi_n - d}}$$

şeklinde çözüm arayalım. (4.9) değerlerini (4.8) denkleminde yerine yazarak düzenleme yapıldığında e^{ξ_n} teriminin kuvvetlerinden aşağıdaki katsayılar elde edilir.

$$e^0 \;:\; 2w_0^2 a_1 e^{-2d} b_0 b_2^2 + 2w_0^2 a_2 e^{-2d} b_0 b_2 + 3w_1^2 a_2 e^d b_2 b_0 + 3c^2 a_2 e^{2d} b_0 b_2 \tag{4.10}$$

$$+w_0^2 a_2 e^d b_0^3 + 3w_0^2 a_2 e^d b_0 b_2 + 2w_1^2 a_0 e^d b_0^2 b_2 + 2w_0^2 a_0 b_2^2 + ...$$

$$e^{\xi_n} \;:\; +ra_0^3 b_0 e^d - c^2 a_0 b_0^3 + 2a_0 w_0^2 b_0^3 + 2w_1^2 a_1 b_0^4 - 2w_1^2 a_0 b_0^3 + 3ra_1 a_0^2 b_0^2 \tag{4.11}$$

$$-2w_1^2 a_1 b_2^2 + 4w_1^2 a_2 b_0^2 + 2w_0^2 a_1 b_2^2 - 4c^2 a_2 b_2 + 4c^2 a_1 b_2^2 + ...$$

$$e^{-\xi_n} \;:\; +2w_1^2 a_2 b_0^4 + 2w_0^2 a_0 b_2 b_0^3 + 2w_0^2 a_1 b_2^3 - 2w_1^2 a_2 b_2^2 + 2w_0^2 a_2 b_2^2 + ra_2^3 \tag{4.12}$$

$$+c^2 a_2 b_0^4 + 4c^2 a_1 b_2^3 e^{-2d} + w_0^2 a_1 b_2^3 e^{2d} - 4c^2 a_2 b_2^2 e^{-2d} + ...$$

$$e^{2\xi_n} \;:\; +c^2 a_1 b_0^3 e^d + w_1^2 a_2 b_0 e^d + c^2 a_0 b_2 e^{2d} - c^2 a_1 b_0^3 + c^2 a_1 b_0^3 e^{-d} + ra_0^3 \tag{4.13}$$

$$+3ra_1^2 a_2 b_0 e^d + w_0^2 a_0 b_2 e^{2d} + w_1^2 a_0 b_0^2 e^d + c^2 a_0 b_0^2 - ...$$

$$e^{-2\xi_n} \quad : \quad w_0^2 a_0 b_2^3 e^{-2d} + r a_2^3 b_0 e^{-d} - 4 w_1^2 a_0 e^d b_2^3 + c^2 a_0 b_2^2 b_0^2 + 2 w_0^2 a_0 b_2^2 b_0^2 \tag{4.14}$$

$$-c^2 a_2 b_0^3 b_2 + 3c^2 a_1 b_0 b_2^3 + w_0^2 a_1 e^d b_2^3 b_0 + c^2 a_2 b_0^3 b_2 e^{-d} + ...$$

$$e^{3\xi_n} \quad : \quad w_1^2 a_1 b_0^2 e^{-d} + c^2 a_0 b_0 e^{-d} - w_1^2 a_0 b_0 e^{-d} + w_1^2 a_1 b_0^2 e^d + w_0^2 a_0 b_0 e^{-d} \tag{4.15}$$

$$+2 w_0^2 a_1 b_2 - c^2 a_0 b_0 + 3 r a_1^2 a_2 + w_0^2 a_2 - 2 w_1^2 a_1 b_2 - ...$$

$$e^{-3\xi_n} \quad : \quad w_0^2 a_2 b_2^3 e^{2d} - w_1^2 a_1 b_2^4 e^{2d} + w_0^2 a_0 b_2^3 b_0 e^{-d} + w_1^2 a_2 b_2^3 e^{2d} + w_0^2 a_1 b_2^4 \tag{4.16}$$

$$-w_1^2 a_0 b_2^3 b_0 e^{-d} + c^2 a_0 b_2^3 b_0 e^{-d} + r a_2^3 b_0^2 + r a_2^3 b_2 e^{2d} + ...$$

$$e^{4\xi_n} \quad : \quad +2 w_1^2 a_0 + w_0^2 a_0 + r a_1^3 b_0 e^{-d} + w_0^2 a_1 b_0 e^{-d} + w_1^2 a_1 b_0 e^{-d} + 2 w_0^2 a_1 b_0 \tag{4.17}$$

$$+c^2 a_0 - 2 w_1^2 a_1 b_0 - c^2 a_1 b_0 - w_1^2 a_0 e^d - w_1^2 a_0 e^{-d} + 3 r a_1^2 a_0 - ...$$

$$e^{-4\xi_n} \quad : \quad 3 r a_0 a_2^2 b_2^2 + 2 w_1^2 a_0 b_2^4 + c^2 a_0 b_2^4 - c^2 a_2 b_0 b_2^3 + w_0^2 a_0 b_2^4 + r a_2^3 b_0 b_2 e^d \tag{4.18}$$

$$+w_1^2 a_2 b_0 b_2^3 e^d - 2 w_1^2 a_2 b_0 b_2^3 + w_0^2 a_2 b_0 b_2^3 e^d + w_1^2 a_2 b_2^3 b_0 e^{-d} + ...$$

$$e^{5\xi_n} \quad : \quad w_0^2 a_1 + r a_1^3 \tag{4.19}$$

$$e^{-5\xi_n} : r a_2^3 b_2^2 + w_0^2 a_2 b_2^4. \tag{4.20}$$

(4.10)-(4.20) denklemleri çözüldüğünde

$$a_0 = a_0 \quad , \quad a_1 = w_0\sqrt{-\tfrac{1}{r}} \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad b_0 = -\tfrac{a_0 r}{w_0}\sqrt{-\tfrac{1}{r}} \quad , \quad b_2 = 0 \tag{4.21}$$

bulunur ve bu değerler (4.9) da yerine yazılınca

$$\begin{aligned} U_n(\xi_n) &= -\frac{\left(\sqrt{-\frac{1}{r}}w_0 e^{\xi_n} + a_0\right)w_0}{-e^{\xi_n}w_0 + a_0 r\sqrt{-\frac{1}{r}}} \\ u_n &= -\frac{\left(\sqrt{-\frac{1}{r}}w_0 e^{dn+ct+c_0} + a_0\right)w_0}{-e^{dn+ct+c_0}w_0 + a_0 r\sqrt{-\frac{1}{r}}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklinde çözüm elde edilir.

Örnek:

$$i\frac{du_n(t)}{dt} = u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t) - |u_n(t)|^2\left(u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t)\right) \tag{4.23}$$

integrallenebilir diskrit Schrödinger denklemini ele alalım (Agrotis, et al., 2005).

$$\theta_n = d_1 n + c_1 t + \zeta_1 \quad , \quad \xi_n = d_2 n + c_2 t + \zeta_2 \tag{4.24}$$

$$u_n = e^{i\theta_n}U_n(\xi_n) \quad , \quad u_{n+1} = e^{i\theta_n}e^{id_1}U_{n+1}(\xi_n) \quad , \quad u_{n-1} = e^{i\theta_n}e^{-id_1}U_{n-1}(\xi_n) \tag{4.25}$$

hareketli dalga dönüşümü yapılıp elde edilen denklemin sanal ve reel kısımları ayrıştırıldığında,

$$e^{\pm id_1} = \cos(d_1) \pm i\sin(d_1) \tag{4.26}$$

eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} &c_1 U_n + \cos(d_1)\left(1 - U_n^2\right)\left(U_{n+1} + U_{n-1}\right) - 2U_n = 0 \\ &c_2\tfrac{dU_n}{d\xi_n} - \sin(d_1)\left(1 - U_n^2\right)\left(U_{n+1} - U_{n-1}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde (4.9) formunda çözüm arayalım.

(4.9) değerlerini (4.27) deki ilk denklemde yerine yazarak düzenleme yapıldığında e^{ξ_n} teriminin kuvvetlerinden aşağıdaki katsayılar elde edilir.

$$e^0 \quad : \quad -cos(d_1)a_0^2 a_1 e^{2d_2} b_2 - 2cos(d_1)a_1^2 e^{2d_2} a_2 b_2 + 2cos(d_1)e^{-d_2} b_0^2 a_2 \tag{4.28}$$

$$-2a_2 e^{2d_2} b_2 + 2cos(d_1)e^{d_2} b_0^2 a_2 - 2cos(d_1)a_0^2 a_2 e^{-d_2} + ...$$

$$e^{\xi_n} \quad : \quad -2a_1b_0b_2e^{2d_2} + c_1a_0b_0^2e^{-d_2} + c_1a_0b_0^2e^{d_2} + c_1a_2b_0e^{d_2} - 2a_2b_0 \tag{4.29}$$

$$-2a_0b_2e^{-2d_2} - 2a_2b_0e^{-d_2} - 2a_0b_0^2e^{-d} - 2a_2b_0e^{d_2} + ...$$

$$e^{-\xi_n} \quad : \quad -2cos(d_1)a_0a_2a_1b_2e^{2d_2} - 2cos(d_1)a_0a_2a_1b_2e^{-2d_2} - 2a_0b_2^2 \tag{4.30}$$

$$+cos(d_1)a_0b_0^2b_2e^{-d_2} - cos(d_1)a_0^2a_2b_0e^{d_2} - ...$$

$$e^{2\xi_n} \quad : \quad -2cos(d_1)a_1a_0^2e^{d_2} + 4cos(d_1)a_1b_2 - 4cos(d_1)a_1^2a_2 + c_1a_0b_0 \tag{4.31}$$

$$+2cos(d_1)a_0b_0 + c_1a_2 - 2a_1b_2 - 2a_0b_0 - 2a_2 - ...$$

$$e^{-2\xi_n} \quad : \quad -cos(d_1)a_2^2e^{2d_2}a_1b_2 + c_1a_2b_2^2 - 2a_2b_2^2 + 4cos(d_1)a_2b_2^2 \tag{4.32}$$

$$-2cos(d_1)a_0a_2^2b_0 - 2cos(d_1)a_0^2a_2b_2e^{-d_2} + ...$$

$$e^{3\xi_n} \quad : \quad c_1a_1b_0e^{-d_2} - cos(d_1)a_1^3b_0e^{-d_2} - cos(d_1)a_1^3b_0e^{d_2} + c_1a_1b_0 \tag{4.33}$$

$$+cos(d_1)a_0e^{-d_2} + cos(d_1)a_0e^{d_2} - cos(d_1)a_1^2a_0e^{-d_2} - ...$$

$$e^{-3\xi_n} \quad : \quad cos(d_1)b_2^3a_0e^{-d_2} - cos(d_1)a_2^3b_0e^{-d_2} - 4cos(d_1)a_0a_2^2b_2 \tag{4.34}$$

$$c_1a_2b_0b_2^2 + c_1a_2b_2^2b_0e^{-d_2} + cos(d_1)a_2b_2^2b_0e^{d_2} + ...$$

$$e^{4\xi_n} \quad : \quad c_1a_1 - 2a_1 + 2cos(d_1)a_1 - 2cos(d_1)a_1^3 \tag{4.35}$$

$$e^{-4\xi_n} : -2a_2b_2^3 + 2cos(d_1)a_2b_2^3 + c_1a_2b_2^3 - 2cos(d_1)a_2^3b_2 \tag{4.36}$$

(4.9) değerlerini (4.27) deki ikinci denklemde yerine yazarak düzenleme yapıldığında e^{ξ_n} teriminin kuvvetlerinden aşağıdaki katsayılar elde edilir.

$$e^0 \quad : \quad sin(d_1)a_0^2a_2e^{-2d_2} - 2c_2a_2b_0^2 - sin(d_1)a_0^2a_2e^{2d_2} + c_2a_1e^{d_2}b_0^2b_2 \tag{4.37}$$

$$-2c_2a_2e^{2d_2}b_2 + 2c_2a_1e^{2d_2}b_2^2 + 2c_2a_1e^{-2d_2}b_2^2 + ...$$

$$e^{\xi_n} \quad : \quad -2c_2a_2b_0e^{-d_2} - c_2a_0b_2e^{2d_2} - 2c_2a_2b_0e^{d_2} - c_2a_2b_0 + c_2a_1b_0^3 \tag{4.38}$$

$$+2sin(d_1)b_0a_2e^{2d_2} + sin(d_1)a_0b_2e^{d_2} + ...$$

$$e^{-\xi_n} \quad : \quad -2c_2a_2b_2b_0e^{-d_2} - 2c_2a_2b_0b_2e^{d_2} + c_2a_0b_2^2e^{2d_2} - sin(d_1)a_2^2a_0e^{d_2} \tag{4.39}$$

$$-sin(d_1)a_0^2a_2b_0e^{d_2} - sin(d_1)a_1a_2^2b_0e^{d_2} + ...$$

$$e^{2\xi_n} \quad : \quad +2sin(d_1)a_1^2a_0b_0e^{d_2}2c_2a_1b_2 + sin(d_1)a_2e^{2d_2} - sin(d_1)a_2e^{-2d_2} \tag{4.40}$$

$$+2sin(d_1)a_0b_0e^{d_2} - 2c_2a_2 - 2sin(d_1)a_1^2a_0b_0e^{-d_2} - ...$$

$$e^{-2\xi_n} \quad : \quad +2sin(d_1)a_0a_2^2b_0e^{-d_2} - 2sin(d_1)a_2b_0^2b_2e^{-d_2} + c_2a_0b_2^2e^{d_2}b_0 \tag{4.41}$$

$$-2sin(d_1)a_0^2a_2b_2e^{-d_2} + sin(d_1)b_2^3a_1e^{-2d_2} + ...$$

$$e^{3\xi_n} \quad : \quad c_2a_1b_0 - sin(d_1)a_0e^{-d_2} + sin(d_1)a_1^3b_0e^{d_2} - sin(d_1)a_1^3b_0e^{-d_2} \tag{4.42}$$

$$+sin(d_1)a_1b_0e^{-d_2} - sin(d_1)a_1b_0e^{d_2} + sin(d_1)a_0e^{d_2} + ...$$

$$e^{-3\xi_n} \quad : \quad -sin(d_1)b_2^2a_2b_0e^{-d_2} - sin(d_1)a_2^2a_0b_2e^{-d_2} - sin(d_1)b_2^3a_0e^{d_2} \tag{4.43}$$

$$-sin(d_1)a_2^3b_0e^{d_2} + sin(d_1)a_2^3b_0e^{-d_2} + c_2a_0b_2^3 - ...$$

(4.28)-(4.43) denklemleri çözüldüğünde

$$a_0 = b_0\sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{2\cos(d_1)}} \quad , \quad a_1 = \sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{2\cos(d_1)}} \quad , \quad b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{2\cos(d_1)}}} \tag{4.44}$$

bulunur ve bu değerler (4.9) da yerine yazılınca

$$U_n(\xi_n) = \frac{1}{2}\frac{\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cos(d_1)+c_1\sqrt{2}\right)\left(e^{\xi_n}+b_0\right)+2a_2\cos(d_1)\sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{\cos(d_1)}}e^{-\xi_n}}{\cos(d_1)\left(\sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{\cos(d_1)}}\left(e^{\xi_n}+b_0\right)+a_2\sqrt{2}e^{-\xi_n}\right)}$$

$$u_n = \frac{\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cos(d_1)+c_1\sqrt{2}\right)\left(e^{d_2n+c_2t+\zeta_2}+b_0\right)+2a_2\cos(d_1)\sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{\cos(d_1)}}e^{-(d_2n+c_2t+\zeta_2)}}{e^{-i(d_1n+c_1t+\zeta_1)}\cos(d_1)\left(\sqrt{\frac{c_1+2\cos(d_1)-2}{\cos(d_1)}}\left(e^{d_2n+c_2t+\zeta_2}+b_0\right)+a_2\sqrt{2}e^{-(d_2n+c_2t+\zeta_2)}\right)} \tag{4.45}$$

şeklinde çözüm elde edilir (Jie, 2008).

BÖLÜM 5

SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Bu tez kapsamında genel olarak fark oluşum denklemlerinin integrallenebilirliği incelenmiş ve çok ölçekli açılım metodunun fark oluşum denklemlerine uygulamaları NLS-KdV bazında incelenmiştir. Yapılan çok ölçekli açılım metodu işlemleri sonucunda görülmüştür ki; integrallenebilir fark oluşum denklemlerinden integrallenebilir fark oluşum denklemleri, integrallenebilir olmayan fark oluşum denklemlerinden de integrallenebilir olmayan fark oluşum denklemleri elde edilmiştir. Tez boyunca yapılan tüm hesaplamalar Maple paket programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir. KdV-NLS yönündeki çok ölçekli açılım metodu uygulamaları ise ileriki çalışmalara bırakılmıştır. Yalnızca NLS, KdV denklemleriyle sınırlı kalmayıp, çeşitli fark oluşum denklemlerinden diğer fark oluşum denklemlerinin elde edileblirliği de incelenebilir.

Fark oluşum denklemlerinin üstel fonksiyon, (G'/G), tanh metodu gibi fark oluşum denklemlerinin tam çözümlerini bulmakta kullanılan metodlarla çözümlerinin elde edilip, bu çözümler arasındaki farklar ve geçişler incelenebilir. Ayrıca çok ölçekli açılım metodu kullanılarak elde edilen fark oluşum denklemlerinin tam çözümlerinin incelenmesiyle, çok ölçekli açılım metodunun ve tam çözüm metodlarının birlikte bulunduğu yayınlar yapılabilir. Ek olarak, elde edilen tam çözümlerin dalga çözümleri sınıflandırması yapılarak bu çözümlerin davranışları üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ablowitz, M. J. and Ladik, J. F., 1975, Nonlinear differential-difference equations, J. Math. Phys., 16, 598-603.

Ablowitz, M. J. and Herbst, B. M., 1993, in Important developments in soliton theory, Fokas, A. S. and Zakharov, V. eds., Springer-Verlag, 562p.

Agrotis, M., Lafortune, S. and Kevrekidis, P. G., 2005, On a discrete version of the Korteweg-De Vries equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22-29.

Arnold, V. I., 1990, Dynamics of complexity of intersections, Bol. Soc. Bras. Mat., 21, 1-10.

Baldwin, D., Göktaş, Ü. and Hereman, W., 2004, Symbolic computation of hyperbolic tangent solutions for nonlinear differential–difference equations, Computer Physics Communications, 162, 203-217.

Bekir, A., 2010, Application of the Exp-function method for nonlinear differential-difference equations, Applied Mathematics and Computation, 215, 4049-4053.

Chandre, C., 1997, A comparison of two discrete mKdV equations, Physica Scripta, 55, 129-130.

Chandre, C. and Eilbeck, J. C., 2002, Does the existence of a Lax pair imply integrability?, Georgia Institute of Technology, 5p.

Elaydi, S., 2005, An introduction to difference equations, Springer, 546p.

Faddeev, L. D. and Takhtajan, L. A., 1987, Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, Berlin, 592p.

Grammaticos, B., Ramani, A. and Papageorgiou, V., 1991, Do integrable mappings have the Painleve property?, Physical Review Letters, 67, 14, 1825-1828.

Grammaticos, B. and Ramani, A., 2000, Integrability in a discrete world, Chaos, Solitons and Fractals, 11, 7-18.

Hietarinta, J. and Viallet, J., 1998, Singularity confinement and chaos in discrete systems, Physical Review Letters, 81, 325-328.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Jie, J., 2008, Application of exp-function method to discrete nonlinear Schrödinger lattice equation with symbolic computation, Communications in Theoretical Physics, 50, 1279-1282.

Lafortune, S., Ramani, A., Grammaticos, B., Ohta, Y. and Tamizhmani, K. M., 1997, Blending two integrability criteria: singularity confinement and algebraic entropy, Arxiv.

Leon, J. and Manna, M., 1999, Multiscale analysis of discrete nonlinear evolution equations, J. Phys. A: Math. Gen., 32, 2845-2869.

Leveque, R. J., 2007, Finite difference methods for ordinary and partial differential equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 356p.

McMillan, E. M., 1971, Aproblem in the stability of periodic systems, In topics in Modern Physics: A Tribute to EU Condon, 219-244.

Narita, K., 1982, Soliton solution to extended Volterra equation, Journal of the Physical Society of Japan, 51, 1682-1685.

Ohta, Y. and Hirota, R., 1991, A discrete KdV equation and its Casorati determinant solution, Journal of the Physical Society of Japan, 60, 2095-2095.

Ohta, Y., Tamizhmani, K. M., Grammaticos, B. and Ramani, A., 1999, Singularity confinement and algebraic entropy: the case of the discrete Painleve equations, Physics Letters A, 262, 152-157.

Ramani, A., Grammaticos. B. and Tamizhmani, K. M., 1992, An integrability test for differential-difference systems, Journal of Physics A, 25, L883-L886.

Ramani, A., Grammaticos. B. and Tamizhmani, K. M., 1993, Painleve analysis and singularity confinement: the ultimate conjecture, Journal of Physics A, 26, L53-L58.

Ramani, A. and Grammaticos B., 2000, What is the discrete analogue of the Painleve property?, Anziam Journal, 44, 21-32.

Sahadevan, R., 2001, Nonlinear differential-difference and difference equations: integrability and exact solvability, Computers and Mathematics with Applications, 42, 627-637.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Sloughter, D., 2000, Difference equations to differential equations, Furman University, 601p.

Takeno, S., 1992, Moving d-dimensional nonlinear localized modes and envelope solitons in nonlinear exciton transfer models in lattices, Journal of the Physical Society of Japan, 61, 1433-1436.

Tamizhmani, K. M., Ramani, A., Grammaticos, B. and Ohta, Y., 1999, Integrability criteria for differential-difference systems: a comparison of singularity confinement and low-growth requirements, Journal of Physics A, 32, 6679-6685.

Tascan, F., 2002, İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori, Doktora tezi, O.G.Ü, Fen Edebiyat Fakültesi, 62s.

Wu, G. C., Xia, T. C. and Chen, D. Y., 2008, Application of an extended Exp-function method to differential-difference equation, Journal of Physics: Conference Series, 96, 012191.

Wu, X. H. and He, J. H., 2007, Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method, Computers & Mathematics with Applications, 54, 966–986.

Xiao, Y., 1994, Bright and dark lattice solitary waves in a discrete nonlinear system, Physics Letters A, 169, 419-424.

Zhang, S., Dong, L., Ba, J. M. and Sun, Y. N., 2009, The (G'/G)-expansion method for nonlinear differential-difference equations, Physics Letters A, 373, 905-910.

Zhen, W., 2009, Discrete tanh method for nonlinear difference-differential equations, Computer Physics Communications, 180, 1104-1108.