Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Kompleksiton Çözümleri

Zeynep Sakartepe

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2020

Complexiton Solutions of Nonlinear Partial Diferential Equations

Zeynep Sakartepe

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

January 2020

Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Kompleksiton Çözümleri

Zeynep Sakartepe

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik – Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ömer Ünsal

Ocak 2020

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Zeynep Sakartepe'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Kompleksiton Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ömer ÜNSAL

İkinci Danışman :––

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Ömer ÜNSAL

Üye : Doç. Dr. Sait SAN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Murat KOPARAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç Dr. Ömer Ünsal danışmalığında hazırlamış olduğum "Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Kompleksiton Çözümleri " başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 23/01/2020

Zeynep Sakartepe

ÖZET

Bu tezde, matematik başta olmak üzere fizik, kimya, mühendislik gibi birçok uygulamalı bilimdeki problemlerin modellenmesinde kullanılan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözüm metotları üzerine çalışılmıştır. Kompleksiton çözümler son yıllarda üzerine yoğun çalışılan, elde etmesi kolay olmayan dalga çözümlerindendir ve her denklem kompleksiton çözüme sahip olmayabilir. Bu dalgalar alışılagelen dalga hızlarından farklı hızlara sahiptirler. Bu özelliklerinden ötürü diğer dalgalardan daha farklı bir görünüme sahiptirler.

Tez kapsamında ilk olarak lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin ve özel olarak kompleksiton çözümlerinin bulunmasında kullanılan metotların anlaşılmasında yardımcı olacak temel kavramlar alt başlıklar halinde kısaca bahsedilmiştir. İzleyen bölümde değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu verilmiş ve (3+1) boyutlu genişletilmiş birinci tip Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu genişletilmiş ikinci tip Jimbo-Miwa ve (2+1) boyutlu yeni tip BKP denklemlerine uygulanarak kompleksiton çözümler elde edilmiştir. Ayrıca bu kompleksiton çözümlerin karşılık geldiği dalgaların belirli parametre seçimlerine bağlı grafikleri görsel olarak verilmiştir.

Sonraki bölümde, genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu verilerek bir önceki bölümde kullanılan kısmi diferensiyel denklemlere uygulamaları yapılmıştır ve karşılık gelen dalga grafikleri resmedilmiştir. Genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu ile elde edilen kompleksiton çözümler değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu ile elde edilen kompleksiton çözümlerden farklıdır.

Son bölümde ise tezde yapılan çalışmalar ile ilgili sonuçlar verilmiş ve gelecek çalışmalar için öneriler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi Diferensiyel Denklemler, Değiştirilmiş Dönüştürülmüş Rasyonel Fonksiyon Metodu, Değiştirilmiş Çiftli Alt Denklem Metodu, Kompleksiton Çözümler.

SUMMARY

In this thesis, complexiton solution methods of nonlinear partial differential equations used in modelling of problems in many applied sciences such as mathematics, physics, chemistry and economics are studied. Complexiton solutions are one of the wave solutions that have been studied intensively in recent years and are not easy to obtain. These waves have different type speeds than conventional wave speeds. Because of these properties, they have a different appearance than other waves.

In the beginning part of thesis, the basic concepts that will help in understanding the applications of the exact solutions of nonlinear partial differential equations and especially the methods used in finding complexiton solutions are briefly mentioned under subheadings. In the following section, modified double sub-equation method is given and complexiton solutions of first type extended (3 + 1) dimentioanal Jimbo-Miwa, second type extended (3 + 1) dimentioanal Jimbo-Miwa and (2 + 1) dimentioanal new type of BKP equations are obtained by applying this method. In addition, the graphs of the waves corresponding to obtained complexiton solutions are given visually depending on the specific parameter choices.

In the next section, the extended transformed rational function method is given and its applications to the partial differential equations used in the previous section are made and the corresponding wave graphs are illustrated. The complexiton solutions obtained by the extended transformed rational function method are different from the complexiton solutions obtained by the modified double sub-equation method.

In the last chapter, the results of this study are given and recommendations are made for future studies.

Keywords: Partial Differential Equations, Extended Transformed Rational Function Method, Modified Double Sub-Equation Method, Complexiton Solutions.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın tüm aşamalarında bilgi birikimlerini, destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Ömer Ünsal' a teşekkürlerimi sunarım.

Her ne kadar uzakta dahi olsa sevgisiyle hiçbir zaman eksikliğini hissettirmeyen ve her sıkıldığımda hoş sohbetiyle içimi rahatlatan ablam Fatma Yiğit' e, tezimi yazarken tüm nazımı çeken ve nefis tatlılarıyla zihnimi açan canım kardeşim Merve Sakartepe' ye ve benden yaşça küçük olmasına rağmen bu süreçte düşünceleriyle bana destek olan, sevgisiyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan düşünceli erkek kardeşim Aydın Sakartepe' ye çok teşekkür ediyorum ve onları çok seviyorum iyi ki benim kardeşlerimsiniz.

Ne kadar teşekkür etsem hakkını ödeyemeyeceğim annem Sefa Sakartepe' ye ve babam Enver Sakartepe' ye çok teşekkür ediyorum. Verdiğiniz emekleri hiçbir zaman unutmayacağım ve boşa çıkarmayacağım. Bu süreçte beni her anlamda desteklediğiniz ve varlığınızı esirgemediğiniz için çok teşekkür ediyorum. Sadece maddi olarak değil manevi olarak beni güçlü kıldığınız ve arkamda durduğunuz için çok teşekkür ederim. İyi ki varsınız, sizi çok seviyorum.

Eskişehir, 2020
Zeynep Sakartepe

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
Δ	$\hat{\imath}\frac{\delta}{\delta x}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\delta}{\delta y}+\widehat{\boldsymbol{k}}\frac{\delta}{\delta z}$

Kısaltmalar	**Açıklama**
KP	Kadomtsev- Petviashvili
KdV	Korteweg de Vries
BKP	B-Type Kadomtsev-Petviashvili

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Kısmi diferensiyel denklemler, uygulamalı bilimlerin çoğundaki problemlerin belirli zaman ve konum parametrelerine bağlı olarak modellenerek çözülmesinde kullanılan önemli bir çalışma alanıdır. Buna bağlı olarak literatürde kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi için oldukça fazla çalışma yapılmış ve birçok metot geliştirilmiştir. Çözümlerin katkısı, çözümü bulunan denklemin modellediği yapının zamana bağlı olarak konum değişimi, madde miktarı değişimi gibi modellemeye bağlı parametrelerin değişimini sunmasıdır. Tez kapsamında kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması için geliştirilen metotlardan bazılarına yer verilecektir.

Dalga çözümleri kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Tam çözüm metotları kullanılarak kısmi diferensiyel denklemlerin farklı şekillerde dalga çözümleri elde edilebilmektedir. Literatürde bu zamana kadar soliton, soliter, periyodik, hareketli ve kompleksiton gibi birçok dalga tipi için metotlar geliştirilmiştir. Bu dalgalardan biri olan kompleksiton, trigonometrik ve hiperbolik cinsten fonksiyonları aynı anda barındıran dalga çözümüdür. Bu özelliklerinden ötürü kompleksiton dalgalar diğer dalgalardan daha farklı bir görünüme sahiptirler.

Tezin amacı doğrultusunda, genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu ve geliştirilmiş çiftli alt denklem metodu lineer olmayan genişletilmiş (3+1) boyutlu birinci tip Jimbo-Miwa denklemi, genişletilmiş (3+1) boyutlu ikinci tip Jimbo-Miwa denklemi ve (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formuna uygulanarak kompleksiton dalga çözümleri elde edilecektir. Elde edilen çözümlerin uygun parametreler için dalga grafikleri verilecektir.

Aynı zamanda genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodunun uygulanabilmesi için çözümü aranan kısmi diferensiyel denklemin bilineer formda yazılabilmesi gerekir. Hirota bilineer türev operatörleri tam çözüm metotlarının bazı kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilmesi için onları bilineer formlarına indirgemede kullanılan önemli bir araçtır ve tez dahilinde hirota türev operatörünün uygulamaları aşamalarıyla birlikte verilecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğinin araştırılması literatürde hep önemli bir yer tutmuştur ve integrallenebilirliğin en yalın tanımı: “ilgili denklemin gerekli sayıda integrasyon sabiti ile integrali alınabilir “şeklinde olmuştur. Zaman içinde bunu test etmek için bazı ölçütler geliştirilmiştir. Bunlar integrallenebilirliği incelenen denklemin N-soliton çözümlerinin bulunması, gizli ve yerel simetri hiyerarşilerinin varlığı neticesinde korunum kanunlarının elde edilebilmesi, Lax çiftinin bulunması, Backlund dönüşümünün varlığı ve Painlevé testinin geçerliliği gibi ölçütlerdir. Tam çözüm kavramı ise tek başına bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin integrallenebilirliğini kesin olarak gösteren bir ölçüt olmamakla birlikte onun integrallenebilirliğini kuvvetli kılar. Bir kısmi diferensiyel denklemin tam çözümünün sahip olabileceği birden fazla dalga çeşidi vardır. Bunlardan biride kompleksiton çözümdür.

Kompleksiton dalgalar diğer dalga tiplerine göre daha yeni ve revaçta olduğundan günümüzde birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur ve çalışmalar neticesinde bazı kompleksiton çözüm metotları geliştirilmiştir. Kompleksiton çözümler literatürde ilk olarak Ma (2002) tarafından isimlendirilmiştir ve KdV denkleminin kompleksiton çözümleri bilineer formu yardımıyla elde edilmiştir. Daha sonra farklı türden bir KdV denkleminin kompleksiton çözümleri elde edilmiştir (Ma, 2005 a). Başka bir çalışma da ise Wronskian ve Casoratian teknikleri Hirota bilineer denklemlere uygulanarak integrallebilen diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözümleri elde edilmiştir (Ma, 2005 b). Buna ek olarak Ma ve Maruno (2004) Casorati determinantlarını kullanarak ve diferensiyel fark denklemlerinin bazı özelliklerinden yararlanarak Toda lattice denkleminin kompleksiton çözümlerini literatüre kazandırmışlardır. Hu vd. (2005) ise KdV denklem sistemini ele alarak analitik ve tekil olmayan kompleksiton çözümler elde etmişlerdir. Chen vd. (2005) çoklu Riccati denklemi rasyonel genişletme (expansion) metodunu kullanarak Whitham-Broer-Kaup denkleminin çeşitli trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel foksiyon tipinde çözümleri gibi birçok fonksiyonun birleşimi şeklinde kompleksiton çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Ünsal vd. (2016) Sawada–Kotera denklemi ve 9. Mertebeden KdV denklemine Hirota bilineer metodunun basitleştirilmiş hali olan ve Wazwaz ve Zhaqilao (2013) tarafından geliştirilen metodu uygulayarak kompleksiton çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca Ünsal

(2018) tarafından (3+1) boyutlu lineer olmayan KdV tipi denkleme reel parametreler yerine kompleks parametreler kullanılarak kompleksiton çözümler elde edilmiştir.

Bu tez kapsamında kompleksiton çözüm metotlarından olan değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu ve genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu üzerine çalışılacaktır. Değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu Hossen vd. (2017) tarafından, genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu ise Zhang ve Ma (2014) tarafından tanıtılarak çeşitli kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmıştır.

3.TEMEL KAVRAMLAR

Birçok bilimsel olayın modellenmesinde kullanılan diferensiyel denklemler uygulamalı matematik, fizik, mühendislik ve diğer bilim dallarındaki kullanımıyla bilim dünyası için önemli bir yere sahiptir. Diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar tarihte ilk olarak 17. yüzyılda İngiliz matematikçi Newton ve Alman matematikçi Leibniz tarafından yapılmıştır. 18. yüzyılda Euler, Clairaut, Langrance, Monge ve Laplace gibi bilim adamları diferensiyel denklemler üzerine çalışmalar yaparak önemli gelişmeler sağlamışlardır (Sevimli,2016). Örneğin Euler, diferensiyel denklemler ile fizik biliminde önemli bir yere sahip olan akışkanlar mekaniği arasındaki ilişkiyi kurmuştur.

Günümüze daha yakın dönemlerde ise kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması üzerine yoğunlaşılmıştır. Bu amaçla tan-cot fonksiyon metodu (Wazwaz, 2007), homojen denge metodu (Wang,1965), F-açılım metodu (Zhou ve Wang, 2003), tanh fonksiyon metodu (Duffy ve Parker, 1996), sech-fonksiyon metodu (Ma, 1993) ve birinci integral metodu (Bekir ve Ünsal, 2012) gibi birçok araç geliştirilmiştir. Bu metotlar neticesinde kısmi diferensiyel denklemlerin farklı tipten dalga çözümleri elde edilmiştir. Bulunan dalga tiplerinin en yeni olanlarından biri ve bizim tez konumuzu oluşturan kompleksiton tip dalgalardır. Nasıl soliton ve periyodik dalga çeşitleri içerdikleri fonksiyonlar sebebiyle kendilerine has birer görünüme sahip iseler, kompleksiton çözümler de muhteva ettikleri fonksiyonlar itibarıyla özgün bir görünüme sahiptirler ve tez dahilinde bazı kısmi diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözümleri üzerinde durulacaktır. Bu amaçla bu bölümün devamında diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde ederken kullanılan, sürecin anlaşılmasında yardımcı olan temel ve gerekli kavramlar hatırlatılacaktır.

3.1. Diferensiyel Denklemler

Bilim dünyasında gerçekleşen çoğu olayın modellemesi, gelişimi ve sonucu bir ya da birden fazla parametreye bağlı olarak değişkenlik gösterir. Sadece bilimsel olarak değil günlük yaşamda da bunun örneklerine rastlanılabilir. Sabit sıcaklıkta bir kaba konulan belirli miktardaki suyun zamana bağlı olarak buharlaşması, bir bardak çayın içine atılan şekerin çayın sıcaklığına bağlı olarak çözünme hızı gözlemlediğimiz günlük birkaç örnektir.

Daha bilimsel olarak ise tezin ilerleyen kısımlarında bahsedilecek olan belirli dalgaların zamana bağlı olarak yayılma hareketleri, herhangi bir radyoaktif maddenin herhangi bir andaki kütlesinin değişim hızının o andaki kütlesi ile orantılı olması diferensiyel denklemlerle ifade edilebilecek birer örnektir. Verilen örnekte eğer radyoaktif maddenin x anındaki kütle $y(x)$ ise, kütlenin değişim miktarı $y'(x)$ türevidir. Radyoaktif maddenin kütle miktarındaki değişim, mevcut kütle miktarı ile orantılı olduğundan $y'(x) = k \cdot y(x)$ olarak ifade edilir. Matematik de bu şekilde bir değişkenin başka bir değişkene göre değişimi türev ile ifade edilir. Örneklerde bahsedilen değişime uğrayan değişkene bağımlı değişken, kendisine göre değişim hesaplanan değişkene bağımsız değişken denilmektedir. Diferensiyel denklemler kendi içinde bağımsız değişken sayısına bağlı olarak adi ve kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Bunlar alt başlıklar halinde anlatılacaktır.

3.1.1. Adi Diferensiyel Denklemler

Bir bağımlı değişken ve bir de bağımsız değişken içeren denklemlere adi diferensiyel denklem ya da sadece diferensiyel denklem denir. Diferensiyel denklem denildiğinde genel olarak adi diferensiyel denklem anlaşılır. Genel olarak adi diferensiyel denklemler y bağımlı ve x bağımsız değişken olmak üzere

$$F(x, y, y', y'' \dots y^n) = 0$$

ya da (3.1)

$$a_1 y^n + \cdots + a_n y = 0$$

şeklinde ifade edilir. Adi diferensiyel denklem de en yüksek mertebeden türevli terimin mertebesi diferensiyel denklemin mertebesidir. Diferensiyel denklemin mertebesi bir ise birinci mertebeden diferensiyel denklem, iki ya da daha fazla ise yüksek mertebeden diferensiyel denklem olarak adlandırılır (Aksoy ve Özkan, 2017). Adi diferensiyel denklemi oluşturan katsayıların hepsi sabit sayı ise sabit katsayılı, katsayılardan en az bir tanesi ya da tamamı denklemin değişkeni olan x' i içeriyorsa değişken katsayılı diferensiyel denklem denir. Buna ek olarak bir adi diferensiyel denklem bağımlı değişken ve bunun türevlerine göre bir polinom şeklinde yazılabiliyorsa, en yüksek mertebeden türevli terimin kuvvetine diferensiyel denklemin derecesi denir. Diferensiyel denklemdeki bağımlı değişken ile tüm türevlerinin derecesi bir ve aynı zamanda bağımlı değişken ile türevlerinin çarpımı bulunmuyorsa denkleme lineer diferensiyel denklem denir.

Örnek 3.1.1.1

$y''' + xy' - e^y = 0$ (3. mertebeden lineer adi diferensiyel denklem)

$(y')^3 + 3xy^2 = 0$ (1. Mertebeden 3. Derece lineer olmayan adi diferensiyel)

3.1.2 Kısmi Diferensiyel Denklemler

Bağımlı bir değişkenin, birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerinin yazıldığı ve genel olarak

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilen diferansiyel denklemlere ise kısmi diferensiyel denklemler denir. Kısmi diferensiyel denklemler lineer, yarı lineer, hemen hemen lineer ve lineer olmayan olmak üzere 4 kısma ayrılır. Eğer bir kısmi diferensiyel denklem denklemdeki bağımlı değişken ve türevlerine göre lineer ve katsayılar bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem adını alır (Koca, 2013). Adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi en yüksek mertebeden türevli terimin mertebesine kısmi diferensiyel denklemin mertebesi denir.

Örnek 3.1.1.2 u ve f bağımlı x, y, z, s, t, r birer bağımsız değişken olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 \tag{3.3}$$

kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

Örnek 3.1.1.3 Isı denkleminde k bir sabit sayı, x konum ve t zaman değişkeni olmak üzere,

$$\frac{\delta^2 w}{\delta t} - k\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = 0 \tag{3.4}$$

2. mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemdir.

Örnek 3.1.1.4 Burgers Denklemi

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u\frac{\delta u}{\delta x} - a\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0 \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanan önemli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerden biridir.

3.1.3. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerden birinin zaman (t) olduğu kısmi diferensiyel denklemler lineer olmayan oluşum denklemleri olarak adlandırılır. Oluşum denklemleri sadece matematik alanında değil diğer birçok bilim dalında kendisine yer bulmaktadır. Akışkanlar mekaniğinden Navier Stokes, Euler denklemi ile Quantum mekaniğinden Schrödinger ve Sine-Gordon denklemleri lineer olmayan oluşum denklemlerine örnek olarak verilebilir (Cariello ve Tabor, 1989).

Örnek 3.1.3.1 Birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemine örnek olarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.6}$$

verilebilir.

Örnek 3.1.1.3.2 Kuantum mekaniğinde $Sine -$ Gordon Denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{3.7}$$

ve Klein- Gordon denklemi

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0 \tag{3.8}$$

gibi birçok lineer olmayan oluşum denklemlerinden faydalanılmaktadır.

3.2. Dalga Çözümleri

Dalga denildiğinde günlük hayatta genelde su yüzeyinde oluşan şekiller dizini gelsede, dalganın kendisine yer bulduğu birçok alan bulunmaktadır. Doğada meydana gelen ses dalgaları, deprem olduğunda yer altında meydana gelen hareketler ve radyo, televizyon gibi elektronik birçok cihazın çıkardığı elektromanyetik dalgalar dalga kavramına örnek olarak verilebilir. Oluşan bu dalgaların çözümleri uygulamalı matematik dışında fizik, mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi birçok alanda kullanılan diferensiyel denklemlerin önemli bir çözüm grubunu oluşturmaktadır (Kuzu, 2018). Lineer bir dalgayı ele aldığımızda, birden fazla lineer dalganın toplamı lineerdir. Aynı zamanda lineer bir dalganın şekli ve hızı genliğinden bağımsızdır. Doğrusal olmayan dalgalar ise dispersif dalga denklemleri, akışkanlar mekaniği, elastisite teorisi, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği gibi fiziğin birçok alanında dalga yayılımını karakterize eden kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır (Borluk, 2009).

3.2.1. Soliter ve Soliton Dalgalar

Tarikte ilk olarak 1834 yılında Russel tarafından su yüzeyinde yapılan deneyler de gözlemlenen soliter dalgalar doğrusal olmayan dalgalara örnek olarak verilebilir (Kuzu, 2018). Soliter dalgalar tek dalga anlamına gelmektedir. Konumları sınırlı olup, dalgalar sürekli haldedir. Soliton dalgalar ise hareketleri sırasında diğer soliton dalgalar ile herhangi bir etkileşime girdiğinde sahip oldukları şekli ve hızı koruyabilen, değiştirmeden hareketine devam edebilen dalgalardır. Aynı zamanda soliter dalgalar gibi konumları sınırlı olan, sürekli ve doğrusal olmayan tek yükseltilerdir.

1895'de Diederik Johannes Korteweg ve Gustav de Vries, Russell'ın gözlemlediği soliter dalgaların soliton teorisi üzerine kurulu olan Korteweg de Vries (KdV) denklemini ortaya çıkarmıştır ve bu denklem sayesinde belirli dönüşümler kullanılarak birçok dalga çözümü elde edilmiştir.

Örnek 3.2.1.1 $\eta(x,t)$ dalga yüzeyinin yüksekliği, x uzaklık koordinatı ve t ise zaman değişkeni olmak üzere ρ yoğunluğuna sahip tek yöndeki akışkanın dalga denklemi

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilir. Gerekli dönüşümler uygulandığında

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.10}$$

(3.11) şeklindeki KDV denklemi elde edilir (Koç, 2009).

3.2.2. Periyodik Dalga Çözümü

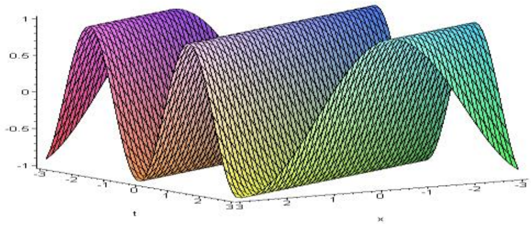
$$f\colon R \to R \tag{3.11}$$

fonksiyonu her $\xi \in R$ için $f^n(\xi)$ bulunacak şekilde periyodu L olan bir fonksiyon ve $[0, L]$ aralığında $f^n(0) = f^n(L)$ olacak şekilde sınır koşullarını sağladığında, hareketli dalga çözümüne periyodik dalga çözümü denir. Periyodik dalgalar eşit zaman aralıklarında eşit dalgalar üretirler. Periyodik dalga çözümleri genelde $\cos(x-t)$ ve $\sin(x-t)$ formundadır (Khouzanı,2019).

Örnek 3.2.2.1

$$u_{xx} = u_{tt} \tag{3.12}$$

şeklindeki dalga denklemi $\cos(x-t)$ periyodik dalga çözümüne sahiptir. Çözümün grafiği şekil 3.1. de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.1. $u = cos(x - t), \quad 0 \leq x, t \leq 2\pi$ (3.13)

3.2.3. Hareketli Dalga

Kısmi diferesiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri c sabit bir sayı olmak üzere genellikle

$$u(x,t) = \phi(x - ct) \tag{3.14}$$

şeklinde verilir.

$$u_t = cu_{xx} \tag{3.15}$$

şeklinde verilen transport denkleminin tüm çözümleri hareketli dalgalardan oluşur.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{3.16}$$

şeklinde verilen kısmi diferensiyel denkleminde bir çözümü

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \Psi(x + ct) \tag{3.17}$$

şeklinde zıt yönlü iki hareketli dalgalanın birleşiminden oluşmaktadır (Ramadan, 2016).

3.2.4. Kompleksiton Dalga Çözümü

Kompleksiton dalga çözümü, içerisinde hem trigonometrik hem de hiperbolik cinsten dalga fonksiyonu içeren çözümlerdir. Farklı tipten dalga hızlarına sahip oldukları için çözüm aşamaları biraz zorlaşsa da, literatürde bulunan dalga şekillerinden farklı bir görünüm kazanırlar. Diğer dalga çeşitlerine göre daha yeni olduklarından uygulamalı bilimler alanında önemli bir rol oynamaktadır. Tezin ilerleyen kısımlarında bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözümlerinin elde edilişi verilecektir.

3.3. Tam Çözüm Metotları

$$G\left(x, y, z, z_x, z_y\right) = 0 \tag{3.18}$$

birinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemini

$$G(x, y, z, a, b) \tag{3.19}$$

şeklinde verilen iki parametreli bir yüzey ailesi sağlarsa bu yüzey ailesine (3.18) kısmi diferensiyel denkleminin tam çözümü(tam integral) denir (Koca, 2013).

Kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümleri uygulamalı ve doğa bilimlerindeki birçok problemin anlaşılmasında önemli rol oynamaktadır. Örneğin fizik, kimya ve biyoloji alanında kullanılan denklemlerin çoğunda deneysel fonksiyonlar ve parametreler bulunmaktadır. Bulunan tam çözümler sayesinde belirli başlangıç ve değer koşulları altında fonksiyonlara uygun değişkenler verilerek deneyler daha kolay organize edilebilir ve neticelendirilebilir. Buna ek olarak problem hakkında daha fazla fiziksel bilgi sağlayabilir ve böylece daha sonraki çalışmalara katkı sağlayabilirler.

Tam çözümlerin sağladığı bu kolaylıklardan dolayı birçok tam çözüm bulma yöntemi geliştirilmiştir. Tezin devamında, kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulabilmek için kullanılan tan-cot fonksiyon metodu, üstel fonksiyon metodu, homojen denge metodu ve birinci integral metodu anlatılacaktır.

3.3.1. Tan-Cot Fonksiyon Metodu

Tan-Cot fonksiyon metodu lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümünü bulabilmek için kullanılan etkili metotlardan bir tanesidir.

$$F\left(u, u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, \ldots\right) = 0 \tag{3.20}$$

şeklinde lineer olmayan kısmi bir diferensiyel denklem alınır.

$$u(x, y, t) = f(\xi)\,, \quad \xi = x + y - \lambda t \tag{3.21}$$

şeklinde bir dönüşüm uygulanır. (3.21) dönüşümü bize aşağıdaki eşitlikleri kullanmamızı sağlar.

$$\frac{\partial}{\partial t}(.) = -\lambda \frac{d}{d\xi}(.),\ \frac{\partial}{\partial x}(.) = \frac{d}{d\xi}(.),\ \frac{\partial}{\partial y}(.) = \frac{d}{d\xi}(.) \tag{3.22}$$

(3.22) eşitlikleri kullanılarak (3.20) lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi

$$Q(f, f', f'', f''' \ldots \ldots \ldots) = 0 \tag{3.23}$$

şeklinde bir lineer olmayan adi diferensiyel denklemine dönüşütürülür.

$$f(\xi) = \alpha \tan^{\beta}(\mu\xi)\ , \ \ |\xi| < \frac{\pi}{2\mu} \tag{3.24}$$

ya da

$$f(\xi) = \alpha \cot^{\beta}(\mu\xi)\,, |\xi| < \frac{\pi}{2\mu} \tag{3.25}$$

şeklinde aranır.

Fonksiyonun kendisi ve türevleri (3.23) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen polinomsal ifadenin katsayılarından cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek aranan tipte dalga çözümleri elde edilir (Jawad, 2012).

3.3.2. Üstel Fonksiyon Metodu

Üstel fonksiyon metodu uygulanırken bir önceki metotta olduğu gibi lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem önce adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Yani

$$P(u, u_x, u_t, u_{xt}, \dots \dots \dots) = 0 \tag{3.26}$$

şeklinde bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem verildiğinde

$$\xi = kx + wt \tag{3.27}$$

dalga dönüşümü uygulanarak

$$Q(u, u', u'', u''' \dots \dots \dots) = 0 \tag{3.28}$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denklemi elde edilir. Denklemin çözülebilmesi için en yüksek mertebeden türevli lineer terim ile, en yüksek dereceden lineer olmayan terim dengelendiğinde $c = p$ ve $d = q$ bulunur. Bu durumda

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^{q} b_m e^{(m\xi)}} \tag{3.29}$$

şeklinde çözüm aranır. c, p, d ve q nun farklı değerlerine göre farklı çözümler elde edilebilir (Öztürk, 2018).

3.3.3. Homojen Denge Metodu

$$Q(u, u_x, u_t, u_{xt}, \dots \dots \dots) = 0 \tag{3.30}$$

olarak verilen lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi

$$u(\mu) = u(x, t), \mu = rx + lt + d \tag{3.31}$$

olacak şekilde bir dönüşüm uygulandığında

$$F(u, u', u'', u''', \dots \dots \dots .) = 0 \tag{3.32}$$

şeklinde kapalı formda bir adi diferensiyel denkleme dönüşür.

$$u(\mu) = \sum_{i=0}^{M} \alpha_i \, \varphi^i(\mu) \tag{3.33}$$

şeklinde çözüm aranır ve

$$\varphi' = \alpha\varphi^2 + b\varphi + c$$

ya da

$$\varphi' = k(1 - \varphi^2) \tag{3.34}$$

olarak kabul edilir. Metodun temeli dengelenme prensibine dayanır ve (3.33) formunda yazabilmek için denklemin dengelenme terimi olan M bulunur. Bunun için en yüksek mertebeden türevli lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan türevli terim dengelenir. M bulunduktan sonra

$$u(\varphi) = \alpha_M\varphi^M + \alpha_{M-1}\varphi^{M-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{3.35}$$

kabul edilerek u ve türevleri (3.32) eşitliğinde yerine yazıldığında elde edilen ifadedeki φ lerin katsayıları sıfıra eşitlenir ve cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözülerek (3.33) eşitliğinde yerine yazılır ve (3.30) denkleminin tam çözümü bulunur (Türkmen, 2019).

3.3.4. Birinci İntegral Metodu

$$P(u, u_x, u_t, u_{xt}, \dots \dots \dots) = 0 \tag{3.36}$$

şeklinde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem alınır.

$$u = U(\xi), \xi = kx + wt + \xi_0 \tag{3.37}$$

dönüşümü uygulandığında, (3.36) denklemi

$$P(U, U', U'', U''' \dots \dots \dots) = 0 \tag{3.38}$$

şeklinde adi diferensiyel denkleme dönüşür.

$$x(\xi) = u(\xi), \qquad y = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} = y(\xi), \quad \frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi} = F_1(x(\xi), y(\xi)) \tag{3.40}$$

şeklinde yeni bağımlı değişkenler tanımlanır. Eğer (3.40) denkleminin birinci integrali bulunabilirse, denklemin analitik çözümleri kolayca bulunabilir. Ancak genelde bunu tek bir integral için bile bulmak oldukça zordur. Metotta verilen yüzey (plane) bağımsız bir sistem olduğu için denklemin sistematik bir şekilde çözülebilmesi için genel bir teori verilmemiştir. Bu nedenle (3.40) eşitliğini birinci integralini bulmak ve (3.38) eşitliğini birinci dereceden integrallenebilir adi diferensiyel denklem haline getirebilmek için Division Teoremi uygulanır. Daha sonra lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin tam çözümü kolayca bulunur. (Zhang vd., 2013).

3.4. Bilineer Diferensiyel Denklemler

Lineer olmayan diferensiyel denklemler bağımlı değişken dönüşümü yardımıyla Hirota bilineer türevler kullanılarak bilineer denklem formuna dönüştürülebilir. Bilineer forma indirgenmiş denklemin çözülmesi için bazı tam çözüm metotları geliştirilmiştir. Hirota bilineer metodu 1971 yılında Ryogo Hirota tarafından lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin soliton çözümlerini elde etmek için geliştirilmiştir. Bilineer metot KdV denklemi, Boussinesq denklemi, doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ve KP denklemine başarılı bir şekilde uygulanarak bu denklemlerin soliton çözümleri elde edilmiştir (Ma ve Wen-Xiu, 2011) .

Örnek 3.4.1

Kdv denklemi

$$u_t + 6uu_x + 3u_{xxx} = 0, \tag{3.41}$$

Boussinesq denklem

$$u_{tt} + {u_{xx}}^2 + u_{xxxx} = 0 \tag{3.42}$$

ve KP denklemi

$$(u_t + 6uu_x + 3u_{xxx})_x + u_{yy} = 0 \tag{3.43}$$

şeklinde olmak üzere verilen bu denklemlerin bilineer formları sırasıyla

$u = 2\ln(f)_{xx}$ dönüşümüyle

$$\left(D_x D_t + {D_x}^4\right)f.f = 0, \tag{3.44}$$

$u = 6\ln(f)_{xx}$ dönüşümüyle

$$(D_t{}^2 + D_x{}^4)f.f = 0 \tag{3.45}$$

ve $u = 2\ln(f)_{xx}$ dönüşümüyle

$$\left(D_x D_t + D_x{}^4 + D_t{}^2\right)f.f = 0 \tag{3.46}$$

şeklinde elde edilir (Ünsal, 2016). Bu, uygun bir dönüşüm yapılarak sağlanır. Daha sonra Hirota türev operatörü yardımıyla denklem Hirota bilineer forma dönüşmüş olur (Ma ve Wen-Xiu, 2011) **.**

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemleri bilineer hale getirebilmek için

$$D^n{}_x(f.g) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}f}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k g}{\partial x^k} \tag{3.47}$$

$$D^m{}_x D^n{}_y(fg) = (\partial x - \partial x')^m(\partial y - \partial y')^n\left(f(x,y)g(x',y')\right)\big|_{x=x',y=y'} \tag{3.48}$$

şeklinde Hirota türev operatörü kullanılır. Hirota türev operatörünün işlevi

$$D_x(f.g) = (\partial x - \partial x')\left(f(x,y)g(x',y')\right)\big|_{x=x',y=y'} = f_x g - f g_x$$

$$D^2{}_x(f.g) = (\partial x - \partial x')^2\left(f(x,y)g(x',y')\right)\big|_{x=x',y=y'} = f_{xx}g - 2f_x g_x + f g_{xx}$$

$$D^4{}_x(f.g) = (\partial x - \partial x')^4\left(f(x,y)g(x',y')\right)\big|_{x=x',y=y'} = f_{xxxx}g - 4f_{xxx}g_x + 6f_{xx}g_{xx} - 4f_x g_{xxx} + f g_{xxxx}$$

$$D^2{}_x D_y(f.g)(\partial x-\partial x')^2(\partial y-\partial y')(f(x,y)g(x',y'))|_{x=x',y=y'}=f_{xxy}g-f_{xx}g_y-2f_{xy}g_x+f_y g_{xx}+2f_x g_{yx}+fg_{xx}$$

$$D^2{}_x D_y{}^2(f.g)(\partial x-\partial x')^2(\partial y-\partial y')^2(f(x,y)g(x',y'))|_{x=x',y=y'}=f_{xxxx}g-2f_{xxy}g_y-2f_{xyy}g_x+f_{xx}g_{yy}+4f_{xy}g_{xy}+f_{yy}g_{xx}-2f_x g_{xyy}-2f_y g_{xxy}+fg_{xxyy}$$

şeklinde verilen örneklerle daha açık bir şekilde anlaşılabilir (Griffiths, 2012).

3.5. Homojen Denge Prensibi

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümleri bulunurken genelde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünün varlığı, büyük oranda kısmi diferensiyel denklemin en yüksek mertebeden türevli lineer terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan teriminin uyumlu olması ile alakalıdır. Bu nedenle homojen denge prensibinde en yüksek mertebeden türevli lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim dengelenir (Liang vd., 2013).

Örnek 3.5.1

$$u_{yt}+u_{xxxy}-3u_{xx}u_y-3u_x u_{xy}=0$$

denkleminde ikinci ve üçüncü terimler dengelenirse

$$m+4=(m+1)+(m+2)$$
$$m=1$$

dengelenme sayısı bulunur.

Örnek 3.5.2

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha^2 u + \beta^2 u^3 = 0$$

denkleminde ikinci ve dördüncü terimler dengelenirse

$$m + 2 = 3m$$

$$m = 1$$

dengelenme sayısı bulunur.

3.6. Genel Riccati Denklemi

Genel Riccati denklemi birinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemdir. $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ x e bağlı birer sürekli fonksiyon olmak üzere

$$y' = a(x)y + by^2 + c(x) \tag{3.49}$$

şeklinde tanımlanır. Riccati denklemi matematik ve fiziğin birçok farklı alanında kullanılır ve aşağıdaki gibi çözülür.

Eğer (3.49) riccati denkleminin y_1 gibi özel bir çözümü biliniyorsa, denklemde

$$y = y_1 + u \tag{3.50}$$

dönüşümü yapılır. Daha sonra (3.50) alınarak (3.49) de yerine yazılarak Riccati denklemi

$$(y_1 + u)' = a(x)(y_1 + u) + b(x)(y_1 + u)^2 + c(x)$$

ve (3.51)

$$y_1{}' + u' = a(x)(y_1) + a(x)u + b(x)y_1{}^2 + 2b(x)y_1u + b(x)u^2 + c(x)$$

haline dönüşür. y_1 riccati denklemini sağlayan özel bir çözümü olduğu için $y_1{}'$, $a(x)(y_1)$, $b(x)y_1{}^2$ ve $c(x)$ terimleri iptal edilebilir. Sonuç olarak $u(x)$ e bağlı

$$u' = b(x)u^2 + \left(2b(x)y_1 + a(x)\right)u \tag{3.52}$$

Bernoulli denklemi elde edilir. (3.52) denklemine $z = \frac{1}{u}$ yerleştirilirse, Bernoulli denklemi integrallenebilen lineer diferensiyel denkleme dönüşür.

Genel Riccati denkleminin yanı sıra $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ katsayılarına bağlı olarak sonsuz sayıda özel durumlu Riccati denklemi bulunmaktadır. Ancak $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ türünden fonksiyonlara bağlı özel çözüm bulmak için geçerli bir algoritma bulunmamaktadır. Aşağıda iyi bilinen iki farklı Riccati denklemi verilmiştir (Svirin,2019).

Durum3.6.1

Eğer a, b ve c birer sabit sayı ise Riccati denklemi değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denkleme dönüştürülebilir.

$$y' = ay + by^2 + c$$

ve (3.53)

$$\frac{dy}{dx} = ay + by^2 + c$$

her iki tarafın integrali alınır.

$$\int \frac{dy}{ay+by^2+c} = \int dx \tag{3.54}$$

(3.54) integrali a, b ve c nin herhangi bir değeri için kolayca hesaplanabilir.

Durum3.6.2

$a(x) = 0$, $c(x)$ güç fonksiyonu ve b sabit sayı olmak üzere Riccati denklemi

$$y' = by^2 + cx^n \tag{3.55}$$

şekline dönüşür.

İlk olarak eğer $n = 0$ olursa denklem özel durum 1 denkleminde olduğu gibi değişkenlerine ayrılabilen ve integrallenebilen diferensiyel denkleme dönüşür. Eğer $n = -2$ olursa $y = \frac{1}{z}$ (3.55) denklemine yerleştirilerek denklem integrallenebilen, homojen diferensiyel denkleme dönüştürülür. Denklem aynı zamanda $n = \frac{4k}{1-2k}$ ve $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ alınarak çözülebilir (Svirin,2019).

4. METERYAL, YÖNTEM, BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Değiştirilmiş Çiftli-Alt Denklem Metodunu Yardımıyla Kompleksiton Çözümleri

Değiştirilmiş çiftli-alt denklem metodunu uygulayarak elde edilen kompleksiton çözüm hem trigonometrik hem de hiperbolik türden fonksiyon içerdiği için lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözümlerini bulmak önemlidir. Ancak kompleksiton dalgalar farklı tipten dalga hızlarına sahip olduğu için lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözümlerini bulmak kolay değildir. Her ne kadar çözüm aşamaları zorlaşsa da bulunan çözüm dalgaya, literatürde bulunan çözümlerden farklı bir yapı kazandırdığı için uygulamalı bilimlere önemli bir katkı sağlayacağı umulmaktadır. Bunların yanı sıra bu zamana kadar lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için homojen denge metodu (Wang,1965), F-açılım metodu (Zhou ve Wang, 2003), tanh fonksiyon metodu (Duffy ve Parker, 1996), sech-fonksiyon metodu (Ma, 1993), genişletilmiş tanh fonksiyon metodu (Fuchssteine ve Carillo, 1992), tanh-coth metodu (Wazwaz, 2007), birinci integral metodu (Bekir ve Ünsal, 2012) , (G'/G,1/G) açılım metodu (Demiray ve Ünsal, 2012) gibi birçok metot ortaya konulmuştur.

Genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemlerinin kompleksiton çözümleri daha önce yapılan çalışmalarda çiftli alt denklem metodu kullanılarak elde edilmiştir. Bu bölümde, elde edilen bu çözümlerden farklı çözümlerin elde edilmesini sağlayan değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu kullanılacaktır ve çözüm aşamaları gösterilecektir. Değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu uygulanırken beklenilen sonuca ulaşmak için iki dalga dönüşümü uygulanır. Literatürde bu yöntem çiftli alt denklem metodundan farklı verilir ve bu metodun genelleştirilmiş hali olarak kabul edilir.

Literatürde ilk olarak kompleksiton çözümler Ma (2002) tarafından bulunmuştur ve isimlendirilmiştir. KdV denklemlerinin kompleksiton çözümleri onun bilineer formu aracılığıyla verilmiştir. Daha sonra lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu (Zhang ve Ma, 2014), çoklu Riccati denklemleri rasyonel açılım metodu (Chen ve Wang, 2005) genişletilmiş birleşik Riccati denklemleri rasyonel açılım metodu (Zhang ve Li, 2009), genişletilmiş alt denklemler rasyonel açılım metodu (Zhang ve Li, 2010), çiftli alt denklem metodu (Chen ve Thang,2013), Wazwaz and Zhaqilao (2013, 2015, 2017, 2018) tarafından sunulan metotlar gibi birçok metot kullanılmıştır.

4.1.1. Değiştirilmiş Çiftli Alt Denklem Metodu

Değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu Hossen vd. (2017) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

1.Adım:

$$R(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \ldots) = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için, x, t birer bağımsız değişken, u ise bağımlı değişkendir. Diğer tam çözüm metotlarında olduğu gibi değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu uygulanırken de denklem içindeki en yüksek dereceden lineer olmayan terim ve en yüksek mertebeden türevli lineer terim arasındaki homojen dengenin sağlanması gerekir.

2.Adım: (4.1) denkleminin çözümü

$$u(x\,,t\,) = a_0 + \frac{a_1\varphi(\xi)+a_2\psi(\eta)}{\lambda_0+\lambda_1\varphi(\xi)\psi(\eta)} \tag{4.2}$$

formunda aranır. Burada λ_0 ve λ_1 keyfi sabitler iken $a_0 = a_0(x,t), a_1 = a_1(x,t), a_2 = a_2(x,t), \xi = \xi(x,t), \eta = \eta(x,t)$ ise x , t değişkenlerine bağlı birer fonksiyondur. $\varphi(\xi)$ ve $\psi(\eta)$ fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır.

$$\varphi'(\xi) = q_1 + p_1\varphi^2(\xi) \tag{4.3}$$

$$\psi'(\eta) = q_2 + p_2\psi^2(\eta) \tag{4.4}$$

(4.3) ve (4.4) denklemlerindeki dalga dönüşümleri $\xi = k_1x + w_1t \; ve \; \eta = k_2x + w_2t$ olarak tanımlanmıştır.

3. Adım: (4.3) ve (4.4) Riccati denklemlerinin çözümleri q_1 ve p_1 e bağlı olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\varphi'(\xi) = \; q_1 + p_1\varphi^2(\xi)$$

olmak üzere

(i) q_1 =1 ve $p_1 = -1$ olarak alındığında

$$\varphi(\xi) = tanh(\xi) \;\; , \;\; \varphi(\xi) = coth(\xi) \tag{4.5}$$

(ii) $q_1 = p_1 = \pm\frac{1}{2}$ olarak alındığında

$$\varphi(\xi) = sec(\xi) \; \pm \; tan(\xi), \tag{4.6}$$

(iii) $q_1 = p_1 = 1$ olarak alındığında

$$\varphi(\xi) = tan(\xi) \tag{4.7}$$

(iv) $q_1 = p_1 = -1$ olarak alındığında

$$\varphi(\xi) = \cot(\xi) \tag{4.8}$$

(v) $q_1 = \frac{1}{2},\ p_1 = -\frac{1}{2}$ olarak alındığında

$$\varphi(\xi) = tanh(\xi) \pm i\, sech(\xi)\,,\ \varphi(\xi) = coth(\xi) \pm csch(\xi) \tag{4.9}$$

(vi) $q_1 = 0,\ \ p_1 = 1$ olarak alındığında

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\xi + w} \tag{4.10}$$

(4.3), (4.4) eşitlikleri kabul edilip, (4.2) denklemi alınarak (4.1) denkleminde yerine yazıldığında, φ ve ψ terimlerine bağlı yeni bir polinom elde edilir. Bu polinomun $\varphi^m\psi^n$ terimlerinin $(\, m = 0,1,2\,, \ldots ; n = 0,1,2, \ldots)$ katsayıları sıfıra eşitlendiğinde $a_0\,, a_1\,, a_2\,, k_1\,, k_2\,, w_1\,, w_2\,, \lambda_0\ \ ve\ \lambda_1$ terimlerine bağlı denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde (4.1) denkleminin çözümleri bulunur.

4.1.2. Değiştirilmiş Çiftli Alt Denklem Metodunun Birinci Tip Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemine Uygulanması

Literatürde birinci tip genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemi

$$u_{xxxy}+3u_y u_{xx}+3u_x u_{xy}+2u_{yt}-3(u_{xz}+u_{yz}+u_{zz})=0 \tag{4.11}$$

Şeklinde verilir(Wazwaz,2017). Bu kısımda, yukarıdaki şekilde verilen birinci tip genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemine değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu uygulanacaktır.

Daha önceki bölümde verildiği gibi denklemin çözümü aşağıdaki formda aranır.

$$u(x,y,z,t) = b_0+\frac{b_1\varphi(\xi)+b_2\psi(\eta)}{b_3+b_4\varphi(\xi)\psi(\eta)} \tag{4.12}$$

(4.12) denkleminde b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 birer keyfi sabit, $\xi = k_1x+l_1y+m_1z+w_1t$ ve $\eta = k_2x+l_2y+m_2z+w_2t$ şeklinde tanımlanan birer fonksiyondur. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri kabul edilerek (4.12) denklemini (4.11) denklemine yerleştirilip $\varphi^m\psi^n$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

1.durum:

$$b_1 = 2b_4k_2q_2\ ,\ b_2 = 2b_4k_1q_1\ ,\ b_3 = 0,\ l_2=-\frac{k_2l_1}{k_1}$$

$$w_1 = \frac{4l_1{k_1}^3p_1q_1+3{m_1}^2+3m_1k_1+3m_1l_1}{2l_1},\ w_2 = -\frac{-4{k_2}^4l_1p_2q_2+3{m_2}^2k_1+3k_2m_1k_1-3k_2l_1m_2}{2k_2l_1} \tag{4.13}$$

2.Durum:

$$b_1 = -2b_3k_1p_1 + 2b_4k_2q_2,\ \ b_2 = 2b_4k_1q_1 - 2b_3k_2p_2$$

$$l_1 = -\frac{b_3({p_2}^2m_2k_2{b_3}^2 - k_2p_2m_1q_1b_3b_4 - 2m_2p_2m_1q_1b_3b_4 - b_4m_2p_2k_1q_1k_1 + {b_4}^2{q_1}^2m_1k_1 + {p_2}^2{m_2}^2{b_3}^2 + {b_4}^2{m_1}^2{q_1}^2)}{2k_1q_1k_2(p_1p_2{b_3}^2 - {b_4}^2q_1q_2)(-b_4k_1q_1 + b_3k_2p_2)}$$

$$l_2 = -\frac{b_4({p_2}^2m_2k_2{b_3}^2 - k_2p_2m_1q_1b_3b_4 - 2m_2p_2m_1q_1b_3b_4 - b_4m_2p_2k_1q_1k_1 + {b_4}^2{q_1}^2m_1k_1 + {p_2}^2{m_2}^2{b_3}^2 + {b_4}^2{m_1}^2{q_1}^2)}{2k_1p_2k_2(p_1p_2{b_3}^2 - {b_4}^2q_1q_2)(-b_4k_1q_1 + b_3k_2p_2)}$$

$$w_1 = (4{b_3}^3p_1{p_2}^2{k_1}^3q_1m_2k_2 - 6{b_3}^3p_1{p_2}^2{k_1}^2q_1m_1{k_2}^2 + 4{b_3}^3p_1{p_2}^2{k_1}^3q_1{m_2}^2 -$$
$$6{b_3}^3p_1{p_2}^2{m_1}^2q_1k_1{k_2}^2 + 3{b_3}^2{p_2}^2m_1m_2k_2 + 3{b_3}^3{m_2}^2m_1{p_2}^2 -$$
$$8{b_3}^2p_1p_2b_4{k_1}^3{q_1}^2m_2m_1 - 4{b_3}^2p_1p_2b_4{k_1}^4{q_1}^2m_2 + 6{b_3}^2p_1p_2b_4{m_1}^2{q_1}^2{k_1}^2k_2 +$$
$$2{b_3}^2p_1p_2b_4{k_1}^3{q_1}^2k_2m_1 - 3{b_3}^2p_2q_1b_4{m_1}^2k_2 - 6{b_3}^2p_2q_1b_4{m_1}^2m_2 -$$
$$3{b_3}^2p_2k_1m_2m_1q_1b_4 + 4b_3p_1{b_4}^2{k_1}^4{q_1}^3m_1 + 4b_3p_1{b_4}^2{k_1}^3{q_1}^3{m_1}^2 +$$
$$6b_3p_2{b_4}^2{k_2}^2q_2m_1{q_1}^2{k_1}^2 + 6b_3p_2{b_4}^2k_1{q_1}^2{k_2}^2q_2{m_1}^2 + 3b_3{q_1}^2{b_4}^2{m_1}^3 +$$
$$3b_3{q_1}^2{b_4}^2{m_1}^2k_1 - 6{b_4}^3{k_1}^2{q_1}^3k_2q_2{m_1}^2 - 6{b_4}^3{k_1}^3{q_1}^3k_2q_2m_1)/\ \Big(2b_3\big({p_2}^2m_2k_2{b_3}^2 -$$
$$k_2p_2m_1q_1b_3b_4 - 2m_2p_2m_1q_1b_3b_4 - b_4m_2p_2k_1q_1b_3 + {b_4}^2{q_1}^2m_1k_1 + {p_2}^2{m_2}^2{b_3}^2 +$$
$${b_4}^2{m_1}^2{q_1}^2\big)\Big)$$

$$w_2 = -(6{b_3}^3p_1{p_2}^3{m_2}^2{k_2}^2k_1 + 6{b_3}^3p_1{p_2}^3m_2k_1{k_2}^3 - 6{b_3}^2p_1{p_2}^2{m_2}^2b_4{k_1}^2q_1k_2 -$$
$$6{b_3}^2p_1{p_2}^2m_2b_4{k_1}^2q_1{k_2}^2 - 4{b_3}^2{p_2}^3m_2{k_2}^4q_2b_4 - 4{b_3}^2{p_2}^3{m_2}^2{k_2}^3q_2b_4 -$$
$$3{b_3}^2{p_2}^2b_4{m_2}^2k_2 - 3{b_3}^2{p_2}^2{m_2}^3b_4 + 8b_3{p_2}^2{b_4}^2m_1q_1{k_2}^3q_2 -$$
$$6b_3{p_2}^2{m_2}^2{k_2}^2q_2k_1q_1{b_4}^2 - 2b_3{p_2}^2m_2{b_4}^2k_1q_1{k_2}^3q_2 + 4b_3{p_2}^2{b_4}^2q_1q_2{k_2}^4m_1 +$$
$$3b_3p_2q_1{b_4}^2{m_2}^2k_1 + 6b_3p_2{m_2}^2{b_4}^2m_1q_1 + 3b_3p_2q_1{b_4}^2m_2k_2m_1 -$$
$$4p_2{b_4}^3{q_1}^2q_2{k_2}^3m_1k_1 - 4p_2{b_4}^3{q_1}^2q_2{k_2}^3{m_1}^2 + 6p_2m_2{b_4}^3{k_1}^2{q_1}^2{k_2}^2q_2 +$$
$$6p_2{m_2}^2{b_4}^3{k_1}^2{q_1}^2k_2q_2 - 3{q_1}^2{b_4}^3m_2m_1k_1 - 3{q_1}^2{b_4}^3m_2{m_1}^2)/\big(2b_4({p_2}^2m_2k_2{b_3}^2 -$$
$$k_2p_2m_1q_1b_3b_4 - 2m_2p_2m_1q_1b_3b_4 - b_4m_2p_2k_1q_1b_3 + {b_4}^2{q_1}^2m_1k_1 + {p_2}^2{m_2}^2{b_3}^2 +$$
$${b_4}^2{m_1}^2{q_1}^2)\big) \tag{4.14}$$

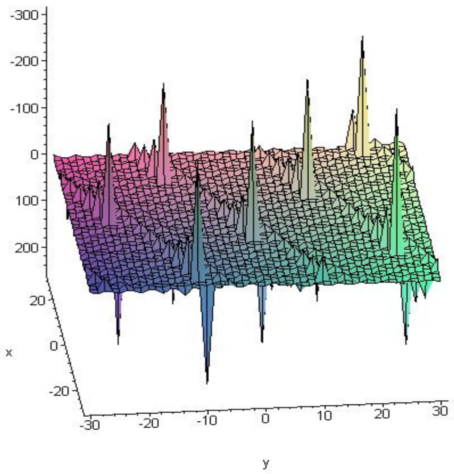
(4.11) denkleminin çözümleri, $(4.5) - (4.10)$ eşitliklerinin (4.13) ve (4.14) ile birlikte kullanılmasıyla elde edilir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Eğer (4.13) ile $q_1 = \frac{1}{2}$, $p_1 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ yani $\varphi(\xi) = \coth(\xi) + \operatorname{csch}(\xi)$ ve $\psi(\eta) = \sec(\eta) + \tan(\eta)$ olarak alınırsa,

$$u(x,y,z,t) = b_0 + \Bigg(b_4 k_2 \Bigg(\coth\left(-k_1 x - l_1 y - m_1 z - \frac{(-l_1 k_1^3 + 3m_1^2 + 3m_1 k_1 + 3m_1 l_1)t}{2l_1}\right) + \operatorname{csch}\left(-k_1 x - l_1 y - m_1 z - \frac{(-l_1 k_1^3 + 3m_1^2 + 3m_1 k_1 + 3m_1 l_1)t}{2l_1}\right)\Bigg) - b_4 k_1 \Bigg(\sec\left(-k_2 x + \frac{k_2 l_1 y}{k_1} - m_2 z + \frac{(-k_2^4 l_1 + 3m_2^2 k_1 + 3k_2 m_2 k_1 - 3k_2 l_1 m_2)t}{2k_2 l_1}\right) - \tan\left(-k_2 x + \frac{k_2 l_1 y}{k_1} - m_2 z + \frac{(-k_2^4 l_1 + 3m_2^2 k_1 + 3k_2 m_2 k_1 - 3k_2 l_1 m_2)t}{2k_2 l_1}\right)\Bigg)\Bigg) \Big/ \Bigg(b_4 \Bigg(coth\left(-k_1 x - l_1 - m_1 z - \frac{(-l_1 k_1^3 + 3m_1^2 + 3m_1 k_1 + 3m_1 l_1)t}{2l_1}\right) + \operatorname{csch}\left(-k_1 x - l_1 y - m_1 z - \frac{(-l_1 k_1^3 + 3m_1^2 + 3m_1 k_1 + 3m_1 l_1)t}{2l_1}\right)\Bigg)\Bigg(\sec\left(-k_2 x + \frac{k_2 l_1 y}{k_1} - m_2 z + \frac{(-k_2^4 l_1 + 3m_2^2 k_1 + 3k_2 m_2 k_1 - 3k_2 l_1 m_2)t}{2k_2 l_1}\right) - \tan\left(-k_2 x + \frac{k_2 l_1 y}{k_1} - m_2 z + \frac{-k_2^4 l_1 + 3m_2^2 k_1 + 3k_2 m_2 k_1 - 3k_2 l_1 m_2)t}{2k_2 l_1}\right)\Bigg)\Bigg) \tag{4.15}$$

şeklinde çözüm bulunmuş olur.

Elde edilen (4.15) çözümünün grafiği aşağıdaki gibidir.

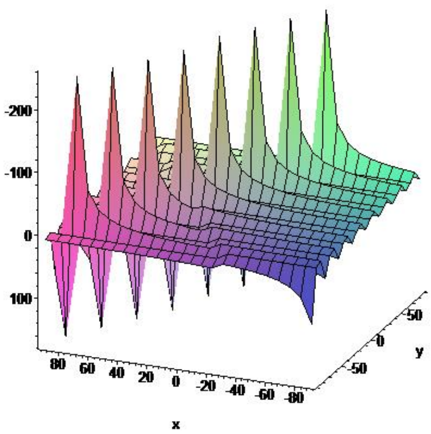


Şekil 4.1. $l_1 = 2.8,\ k_2 = 1.1,\ k_1 = 1.8,\ m_2 = 3.6,\ m_1 = 3.8,\ z = 2.6, b_0 = 1.8, b_4 = 1.8, t = 2.3$

Eğer (4.13) denklemi ile birlikte $q_1 = -1,\ p_1 = -1,\ q_2 = 1,\ p_2 = -1$ yani $\varphi(\xi) = \cot(\xi)$ ve $\psi(\eta) = \tanh(\eta)$ olarak alınırsa

$$u(x,y,z,t) = b_0 - \Big(2b_4k_2\cot(k_1x + l_1y + m_1z + \frac{t(4k_1^3l_1+3k_1m_1+3l_1m_1+3m_1^2)}{2l_1}) + 2b_4k_1\,tanh(-k_2x + \frac{l_1k_2y}{k_1} - m_2z + \frac{t(4k_2^4l_1+3k_1m_2k_2+3k_1m_2^2-3k_2l_1m_2)}{2k_2l_1})\Big) / \Big(b_4\,cot(k_1x + l_1y + m_1z + \frac{t(4k_1^3l_1+3k_1m_1+3l_1m_1+3m_1^2)}{2l_1})\,tanh(-k_2x + \frac{l_1k_2y}{k_1} - m_2z + \frac{t(4k_2^4l_1+3k_1m_2k_2+3k_1m_2^2-3k_2l_1m_2)}{2k_2l_1})\Big) \tag{4.16}$$

(4.16) çözümünün grafiği aşağıdaki gibidir.



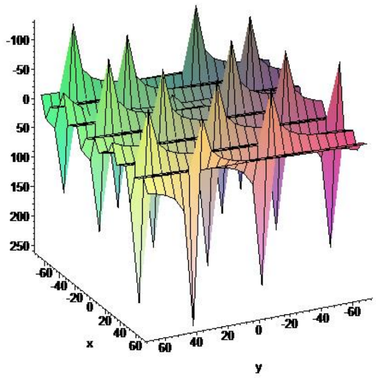
Şekil 4.2. $l_1 = 1.4$, $k_1 = 2.1$, $m_1 = 1.6$, $k_2 = 2.4$, $m_2 = -3$, $z = 2.8$, $b_0 = 1.4$, $b_4 = -3.2$, $t = 2$

Eğer (4.14) denklemi ile birlikte $q_1 = -1,\ p_1 = -1,\ q_2 = 1\ ,\ p_2 = -1$ yani $\varphi(\xi) = \cot(\xi)$ ve $\psi(\eta) = \tanh(\eta)$ olarak alındığında.

$$u(x,y,z,t) = b_0 + [(2b_3k_1 + 2b_4k_2)\cot\,[k_1x + \frac{b_3(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 - b_4m_2k_1b_3 + b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2)y}{2k_1k_2(b_3{}^2 + b_4{}^2)(b_4k_1 - b_3k_2)} + m_1z +$$
$$\big(4b_3{}^3k_1{}^3m_2k_2 - 6b_3{}^3k_1{}^3m_2k_2{}^2 + 4b_3{}^3k_1{}^3m_2{}^2 - 6b_3{}^3m_1{}^2k_1k_2{}^2 + 3b_3{}^3m_1m_2k_2 +$$
$$3b_3{}^3m_2{}^2m_1 - 8b_3{}^2b_4k_1{}^3m_2m_1 - 4b_3{}^2b_4k_1{}^4m_2 + 6b_3{}^2b_4m_1{}^2k_1{}^2k_2 +$$
$$2b_3{}^2b_4k_1{}^3k_2m_1 - 3b_3{}^2b_4m_1{}^2k_2 - 6b_3{}^2b_4m_1{}^2m_2 - 3b_3{}^2k_1m_2m_1b_4 + 4b_3b_4{}^2k_1{}^4m_1 +$$
$$4b_3b_4{}^2k_1{}^3m_1{}^2 - 6b_3b_4{}^2k_2{}^2m_1k_1{}^2 - 6b_3b_4{}^2k_1k_2{}^2m_1{}^2 + 3b_3b_4{}^2m_1{}^3 + 3b_3b_4{}^2m_1{}^2k_1 +$$
$$6b_4{}^3k_1{}^2k_2m_1{}^2 + 6b_4{}^3k_1{}^3k_2m_1\big)t/2b_3(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 -$$
$$b_4m_2k_1b_3 + b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2]) - (-2b_4k_1 + 2b_3k_2)\,tanh[-k_2x -$$
$$\frac{b_3(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 - b_4m_2k_1b_3 + b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2)y}{2k_1k_2(b_3{}^2 + b_4{}^2)(b_4k_1 - b_3k_2)} - m_2z +$$
$$(6b_3{}^3m_2{}^2k_2{}^2k_1 + 6b_3{}^3m_2{}^2k_1k_2{}^2 - 6b_3{}^2m_2{}^2b_4k_1{}^2k_2 - 6b_3{}^2m_2b_4k_1{}^2k_2{}^2 +$$
$$4b_3{}^2m_2k_2{}^4b_4 + 4b_3{}^2m_2{}^2k_2{}^3b_4 - 3b_3{}^2b_4m_2{}^2k_2 - 3b_3{}^2m_2{}^3b_4 - 8b_3b_4{}^2m_2m_1k_2{}^3 +$$
$$6b_3m_2{}^2k_2{}^2k_1b_4{}^2 + 2b_3m_2b_4{}^2k_1k_2{}^3 - 4b_3b_4{}^2k_2{}^4m_1 + 3b_3b_4{}^2m_2{}^2k_1 +$$
$$6b_3m_2{}^2b_4{}^2m_1 + 3b_3b_4{}^2m_2k_2m_1 + 4b_4{}^3k_2{}^3m_1k_1 + 4b_4{}^3k_2{}^3m_1{}^2 - 6m_2b_4{}^3k_1{}^2k_2{}^2 -$$
$$6m_2{}^2b_4{}^3k_1{}^2k_2 - 3b_4{}^3m_2m_1k_1 - 3b_4{}^3m_2m_1{}^2)t/2b_4(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 -$$
$$2m_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 - b_4m_2k_1b_3 + b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2)]]/[b_3 -$$
$$b_4\,cot[k_1x + \frac{b_3(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 - b_4m_2k_1b_3 - b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2)y}{2k_1k_2(b_3{}^2 + b_4{}^2)(b_4k_1 - b_3k_2)} + m_1z +$$
$$(4b_3{}^3k_1{}^3m_2k_2 - 6b_3{}^3k_1{}^2m_1k_2{}^2 + 4b_3{}^3k_1{}^3m_2{}^2 - 6b_3{}^3m_1{}^2k_1k_2{}^2 + 3b_3{}^3m_1m_2k_2 +$$
$$3b_3{}^3m_2{}^2m_1 - 8b_3{}^2b_4k_1{}^3m_2m_1 - 4b_3{}^2b_4k_1{}^4m_2 + 6b_3{}^2b_4m_1{}^2k_1{}^2k_2 +$$
$$2b_3{}^2b_4k_1{}^3k_2m_1 - 3b_3{}^2b_4m_1{}^2k_2 - 6b_3{}^2b_4m_1{}^2m_2 - 3b_3{}^2k_1m_2m_1b_4 + 4b_3b_4{}^2k_1{}^4m_1 +$$
$$4b_3b_4{}^2k_1{}^3m_1{}^2 - 6b_3b_4{}^2k_2{}^2m_1k_1{}^2 - 6b_3b_4{}^2k_1k_2{}^2m_1{}^2 + 3b_3b_4{}^2m_1{}^3 + 3b_3b_4{}^2m_1{}^2k_1 +$$
$$6b_4{}^3k_1{}^2k_2m_1{}^2 + 6b_4{}^3k_1{}^3k_2m_1)t/2b_3(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 -$$
$$b_4m_2k_1b_3 + b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2)]\,tanh[-k_2x -$$
$$\frac{b_4(m_2k_2b_3{}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 - b_4m_2k_1b_3 + b_4{}^2m_1k_1 + m_2{}^2b_3{}^2 + b_4{}^2m_1{}^2)y}{2k_1k_2(b_3{}^2 + b_4{}^2)(b_4k_1 - b_3k_2)} - m_2z +$$
$$(6b_3{}^3m_2{}^2k_2{}^2k_1 + 6b_3{}^3m_2k_1k_2{}^3 - 6b_3{}^2m_2{}^2b_4k_1{}^2k_2 - 6b_3{}^2m_2b_4k_1{}^2k_2{}^2 +$$
$$4b_3{}^2m_2k_2{}^4b_4 + 4b_3{}^2m_2{}^2k_2{}^3b_4 - 3b_3{}^2b_4m_2{}^2k_2 - 3b_3{}^2m_2{}^3b_4 - 8b_3b_4{}^2m_2m_1k_2{}^3 +$$

$6{m_2}^2{k_2}^2k_1{b_4}^2 + 2b_3m_2{b_4}^2k_1{k_2}^3 - 4b_3{b_4}^2{k^4}_2m_1 + 3b_3{b_4}^2{m_2}^2k_1 + 6b_3{m_2}^2{b_4}^2m_1 + 3b_3{b_4}^2m_2k_2m_1 + 4{b_4}^3{k_2}^3m_1k_1 + 4{b_4}^3{k_2}^3{m_1}^2 - 6m_2{b_4}^3{k_1}^2{k_2}^2 - 6m_2{b_4}^2{k_1}^3{k_2}^2 - 3{b_4}^3m_2m_1k_1 - 3{b_4}^3m_2{m_1}^2)t/2b_4(m_2k_2{b_3}^2 - k_2m_1b_3b_4 - 2m_2m_1b_3b_4 - b_4m_2k_1b_3 + {b_4}^2m_1k_1 + {m_2}^2{b_3}^2 + {b_4}^2{m_1}^2)]]$ (4.17)

şeklinde çözüm elde edilir. (4.17) denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.3. $k_2 = 1.2$, $k_1 = 2.3$, $m_1 = 1.1$, $m_2 = 2.3$, $b_3 = 0.8$, $z = -4$, $b_0 = 0.7$, $b_4 = 3$, $t = 1$

4.1.3. Değiştirilmiş Çiftli Alt Denklem Metodunun İkinci Tip Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemine Uygulanması

Literatürde ikinci tip genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemi Manafian (2018) tarafından

$$u_{xxxy} + 3u_yu_{xx} + 3u_xu_{xy} + 2(u_{yt} + u_{xt} + u_{zt}) - 3u_{xz} = 0 \quad (4.18)$$

şeklinde verilir.

Bu kısımda yukarıdaki şekilde verilen ikinci tip genişletilmiş (3+1) boyutlu ikinci tip Jimbo-Miwa denklemine değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu uygulanacaktır. Daha önceki bölümde verildiği gibi denklemin çözümü aşağıdaki formda aranır.

$$u(x,y,z,t) = b_0 + \frac{b_1\varphi(\xi)+b_2\psi(\eta)}{b_3+b_4\varphi(\xi)\psi(\eta)} \tag{4.19}$$

(4.19) denkleminde b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 birer keyfi sabit, $\xi = k_1x+l_1y + m_1z+w_1t$ ve $\eta = k_2x+l_2y + m_2z + w_2t$ şeklinde tanımlanan birer fonksiyondur. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri kabul edilerek (4.19) denklemini (4.18) denklemine yerleştirilip $\varphi^m\psi^n$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

1.durum:

$$b_1 = -2b_3k_1p_1,\ b_2 = -2p_2k_2b_3,\quad b_4 = 0,\ \ l_2 = -\frac{k_2l_1}{k_1}$$

$$m_1 = -\frac{2\left(2l_1{k_1}^3p_1q_1-w_1k_1-w_1l_1\right)}{3k_1-2w_1},\qquad m_2 = \frac{2k_2(2{k_2}^3l_1p_2q_2+w_2k_1-l_1w_2}{k_1(3k_2-2w_2)} \tag{4.20}$$

2.durum:

$$b_1 = -2b_3k_1p_1 + 2b_4k_2q_2,\ \ b_2 = 2b_4k_1q_1 - 2b_3k_2p_2$$

$$l_1 = -\Big(-4{k_1}^5{p_1}^3{q_1}^3b_3{b_4}^3m_1 + 6{k_2}^3{p_2}^3{k_1}^3{p_1}^2{b_3}^4m_1 + 3{p_1}^2m_1{k_1}^3b_3{b_4}^3{q_1}^2 +$$
$$18k_2p_2{k_1}^5{p_1}^3{b_3}^2{b_4}^2{q_1}^2 + 6{p_1}^2m_1k_1{b_3}^3b_4{p_2}^2{k_2}^2 - 26{k_1}^4q_1{p_1}^3{k_2}^2{p_2}^2{b_3}^3b_4 -$$
$$38{k_1}^2{p_1}^2{p_2}^3{k_2}^4{b_3}^3b_4q_2 + 24k_1p_1{p_2}^3{k_2}^5{b_3}^2{b_4}^2{q_2}^2 - 18{k_1}^2q_1p_1{k_2}^3{p_2}^2b_3{b_4}^3m_2{q_2}^2 -$$
$$22{k_1}^2q_1p_1{k_2}^4{p_2}^2b_3{b_4}^3{q_2}^2 + 6m_1{p_1}^2{k_1}^4k_2{b_4}^4{q_1}^3q_2 + 6m_2{k_1}^3{k_2}^2p_2{b_4}^4p_1{q_1}^2{q_2}^2 +$$

$14k_1{}^4p_1{}^3q_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_1p_2k_2 - 16k_2{}^2p_2{}^2k_1{}^3p_1{}^3b_3{}^3m_1b_4q_1 - 9p_1{}^2m_1k_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_1p_2k_2 -$
$34k_2{}^2q_2p_1{}^2k_1{}^4p_2b_3b_4{}^3q_1{}^2 - 16k_2{}^4q_2p_1{}^2k_1p_2{}^3b_3{}^3b_4m_1 +$
$34k_2{}^3q_2p_1{}^2k_1{}^2p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_1q_1 - 24k_2{}^2q_2p_1{}^2k_1{}^3p_2b_3b_4{}^3m_1q_1{}^2 +$
$4k_1{}^5p_1{}^3q_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2p_2m_2 + 4k_2{}^5q_2{}^2p_2{}^3b_3{}^2b_4{}^2m_1p_1 - 3k_2{}^3k_2{}^2p_2m_2p_1{}^2b_3{}^2b_4q_2 +$
$6m_2p_2{}^2k_1{}^2p_1{}^2b_3{}^3b_4k_2 - 3m_2p_2k_1{}^3p_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_1 + 6b_4{}^4k_1{}^3q_1{}^2k_2{}^3p_1q_2{}^2p_2 -$
$4k_2{}^6q_2{}^3p_2{}^3b_3b_4{}^3 + 12k_1{}^3p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^3b_3{}^4 - 4k_2{}^5q_2{}^3p_2{}^3b_3b_4{}^3m_2 + 6p_1{}^2k_1{}^5k_2b_4{}^4q_1{}^3q_2 +$
$6k_1{}^3p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^2b_3{}^4m_2 + 62k_1{}^3q_1p_1{}^2k_2{}^3p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_2 - 22k_1{}^2p_1{}^2p_2{}^3k_2{}^3b_3{}^3m_2b_4q_2 +$
$20k_2{}^4q_2{}^2p_2{}^3b_3{}^2b_4{}^2m_2k_1p_1 - 10k_1{}^4q_1p_1{}^3k_2p_2{}^2b_3{}^3b_4m_2 +$
$28k_1{}^3q_1p_1{}^2k_2{}^2p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_2q_2 - 4k_1{}^6p_1{}^3q_1{}^3b_3b_4{}^3 + 3k_2{}^3q_2{}^2b_4{}^3p_2{}^2m_2b_3 -$
$4k_2{}^4q_2{}^2p_2{}^2b_3b_4{}^3m_1p_1k_1q_1 + 3k_2{}^2p_2m_1p_1b_3b_4{}^3q_2k_1q_1 -$
$10k_1{}^4p_1{}^2q_1{}^2b_3b_4{}^3p_2m_2k_2q_2 - 9p_2{}^2m_2k_2{}^2q_2b_3{}^2b_4{}^2p_1k_1 + 3p_2m_2k_2q_2b_3b_4{}^3p_1k_1{}^2q_1\Big)/$
$\Big(p_1b_4k_1k_2\left(p_1p_2b_3{}^2 - b_4{}^2q_1q_2\right)\left(-b_4k_1q_1 + b_3k_2p_2\right)\Big)$

$l_2 = (-4k_1{}^5p_1{}^3q_1{}^3b_3{}^3b_4{}^3m_1 + 6k_2{}^3p_2{}^3k_1{}^2p_1{}^3b_3{}^4m_1 + 3p_1{}^2m_1k_1{}^3b_3b_4{}^3q_1{}^2 +$
$24k_2p_2k_1{}^5p_1{}^3b_3{}^2b_4{}^2q_1{}^2 + 6p_1{}^2m_1k_1b_3{}^3b_4p_2{}^2k_2{}^2 - 38k_1{}^4q_1p_1{}^3k_2{}^2p_2{}^2b_3{}^3b_4 -$
$26k_1{}^2p_1{}^23p_2{}^3k_2{}^4b_3{}^3b_4q_2 + 18k_1p_1p_2{}^3k_2{}^5b_3{}^2b_4{}^2q_2{}^2 - 24k_1{}^2q_1p_1k_2{}^3p_2{}^2b_3b_4{}^3m_2q_2{}^2 -$
$34k_1{}^2q_1p_1k_2{}^4p_2{}^2b_3b_4{}^3q_2{}^2 + 20k_1{}^4p_1{}^3q_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_1p_2k_2 -$
$22k_2{}^2p_2{}^2k_1{}^3p_1{}^3b_3{}^3m_1b_4q_1 - 9p_1{}^2m_1k_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_1p_2k_2 - 22k_2{}^2q_2p_1{}^2k_1{}^4p_2b_3b_4{}^3q_1{}^2 -$
$10k_2{}^4q_2p_1{}^2k_1p_2{}^3b_3{}^3b_4m_1 + 28k_2{}^3q_2p_1{}^2k_1{}^2p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_1q_1 -$
$18k_2{}^2q_2p_1{}^2k_1{}^3p_2b_3b_4{}^3m_1q_1{}^2 + 4k_1{}^5p_1{}^3q_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2p_2m_2 + 4k_2{}^5q_2{}^2p_2{}^3b_3{}^2b_4{}^2m_1p_1 -$
$3k_2{}^3p_2{}^2m_1p_1b_3{}^2b_4{}^2q_2 + 6m_2p_2{}^2k_1{}^2p_1{}^2b_3{}^3b_4k_2 - 3m_2p_2k_1{}^3p_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_1 +$
$6b_4{}^4k_1{}^3q_1{}^2k_2{}^3p_1q_2{}^2p_2 + 6b_4{}^4k_2{}^4p_2{}^2q_2{}^3m_2k_1q_1 - 4k_2{}^6q_2{}^3p_2{}^3b_3b_4{}^3 +$
$12k_1{}^3p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^3b_3{}^4 - 4k_2{}^5q_2{}^3p_2{}^3b_3b_4{}^3m_2 + 6k_1{}^3p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^2b_3{}^4m_2 +$
$62k_1{}^3q_1p_1{}^2k_2{}^3p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_2 - 16k_1{}^2p_1{}^2p_2{}^3k_2{}^3b_3{}^3m_2b_4q_2 +$
$14k_2{}^4q_2{}^2p_2{}^3b_3{}^2b_4{}^2m_2k_1p_1 - 16k_1{}^4q_1p_1{}^3k_2p_2{}^2b_3{}^3b_4m_2 +$
$34k_1{}^3q_1p_1{}^2k_2{}^2p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_2q_2 - 4k_1{}^6p_1{}^3q_1{}^3b_3b_4{}^3 + 6b_4{}^4k_2{}^5p_2{}^2q_2{}^3k_1q_1 +$
$3k_2{}^3q_2{}^2b_4{}^3p_2{}^2m_2b_3 - 10k_2{}^4q_2{}^2p_2{}^2b_3{}^3m_1p_1k_1q_1 + 3k_2{}^2p_2m_1p_1b_3b_4{}^3q_2k_1q_1 +$

$6{k_2}^3 p_2 {q_2}^2 {b_4}^4 m_1 p_1 {k_1}^2 {q_1}^2 - 4{k_1}^4 {p_1}^2 {q_1}^2 b_3 {b_4}^3 p_2 m_2 k_2 q_2 - 9{p_2}^2 m_2 {k_2}^2 q_2 {b_3}^2 {b_4}^2 p_1 k_1 +$
$3p_2 m_2 k_2 q_2 b_3 {b_4}^3 p_1 {k_1}^2 q_1)/\left(6k_1 p_2 k_2 b_4 (p_1 p_2 {b_3}^2 - {b_4}^2 q_1 q_2)(-b_4 k_2 q_2 +\right.$
$\left.b_3 k_1 p_1)(-{k_2}^2 q_2 p_2 + p_1 {k_1}^2 q_1)\right)$

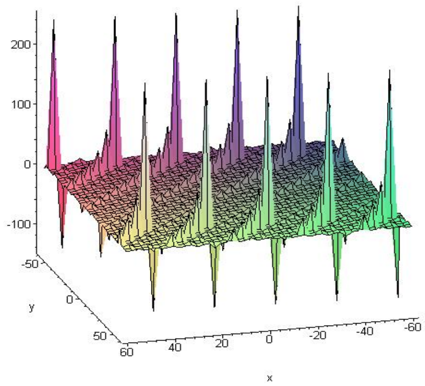
$w_1 = p_1 {k_1}^2 (12 p_1 p_2 {k_1}^4 {q_1}^3 {q_2}^2 {b_4}^4 {k_2}^2 m_2 - 20{b_3}^3 {p_1}^3 {p_2}^2 {k_1}^5 {q_1}^2 k_2 b_4 m_2 -$
$32{b_3}^3 {p_1}^3 {p_2}^2 {k_1}^4 {q_1}^2 {k_2}^2 m_1 b_4 - 32{b_3}^3 {p_1}^2 {p_2}^3 {k_1}^2 q_1 {k_2}^4 q_2 b_4 m_1 -$
$44{b_3}^3 {p_1}^2 {p_2}^3 {k_1}^3 q_1 {k_2}^3 m_2 b_4 q_2 - 76{b_3}^3 {p_1}^2 {p_2}^3 {k_1}^2 q_1 {k_2}^4 b_4 q_2 +$
$3{b_3}^3 {p_1}^2 {p_2}^2 {k_1}^2 q_1 m_1 b_4 {k_2}^2 + 12{b_3}^3 {p_1}^2 {p_2}^2 {k_1}^3 q_1 m_2 b_4 k_2 - 8 b_3 {p_1}^3 {k_1}^6 {q_1}^4 {b_4}^3 m_1 +$
$9 k_1 {q_1}^2 {q_2}^2 {b_4}^4 {k_2}^3 m_1 p_2 + 12{p_1}^2 {k_1}^5 {q_1}^4 q_2 {b_4}^4 m_1 k_2 + 12 p_1 p_2 {k_1}^4 {q_1}^3 {q_2}^2 {b_4}^4 {k_2}^3 -$
$9 p_1 q_2 {q_1}^3 {b_4}^4 {k_1}^3 m_1 k_2 + 12{b_3}^4 {p_1}^3 {p_2}^3 {k_1}^4 q_1 {k_2}^2 m_2 + 12{b_3}^4 {p_1}^3 {p_2}^3 {k_1}^3 q_1 {k_2}^3 m_1 -$
$52{b_3}^3 {p_1}^3 {p_2}^2 {k_1}^5 {q_1}^2 {k_2}^2 b_4 + 9{b_3}^3 {k_2}^4 q_2 m_1 b_4 {p_2}^3 p_1 + 36{b_3}^2 {p_1}^3 p_2 {k_1}^6 {q_1}^3 k_2 {b_4}^2 +$
$8{b_3}^2 {p_1}^3 p_2 {k_1}^6 {q_1}^3 {b_4}^2 m_2 - 6{b_3}^2 {p_1}^2 p_2 {b_4}^2 {k_1}^4 {q_1}^2 m_2 - 8 b_3 {p_2}^3 k_1 q_1 {k_2}^6 {q_2}^3 {b_4}^3 -$
$9 b_3 {p_2}^2 {k_2}^4 {q_2}^2 m_1 {b_4}^3 q_1 + 28{b_3}^2 {p_1}^3 p_2 {k_1}^5 {q_1}^3 {b_4}^2 m_1 k_2 +$
$68{b_3}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 {k_1}^3 {q_1}^2 q_2 {b_4}^2 {k_2}^3 m_1 + 56{b_3}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 {k_1}^4 {q_1}^2 q_2 {b_4}^2 {k_2}^2 m_2 +$
$124{b_3}^2 {p_1}^2 {p_2}^2 {k_1}^4 {q_1}^2 q_2 {b_4}^2 {k_2}^3 - 9{b_3}^2 {p_1}^2 p_2 {k_1}^3 {q_1}^2 m_1 {b_4}^2 k_2 +$
$40{b_3}^2 p_1 {p_2}^3 {k_1}^2 q_1 {k_2}^4 {q_2}^2 {b_4}^2 m_2 + 8{b_3}^2 p_1 {p_2}^3 k_1 q_1 {k_2}^5 {q_2}^2 {b_4}^2 m_1 +$
$48{b_3}^2 p_1 {p_2}^3 {k_1}^2 {q_1}^5 {k_2}^2 {b_4}^2 {q_2}^2 - 18{b_3}^2 p_1 {p_2}^2 {k_1}^2 q_1 m_2 {k_2}^2 q_2 {b_4}^2 -$
$15{b_3}^2 p_1 {p_2}^2 k_1 q_1 {k_2}^3 m_1 {b_4}^2 q_2 - 20 b_3 {p_1}^2 p_2 q_2 {q_1}^3 {b_4}^3 {k_1}^5 k_2 m_2 -$
$48 b_3 {p_1}^4 p_2 {k_1}^3 {q_1}^3 q_2 {b_4}^3 {k_2}^2 m_1 - 68 b_3 {p_1}^2 p_2 {k_1}^5 {q_1}^3 q_2 {b_4}^3 {k_2}^2 -$
$36 b_3 p_1 {p_2}^2 {k_1}^3 {q_1}^2 {q_2}^2 {b_4}^{33} {k_2}^3 m_2 - 44 b_3 p_1 {p_2}^2 {k_1}^3 {q_1}^2 {q_2}^2 {b_4}^3 {k_2}^4 -$
$8 b_3 p_1 {p_2}^2 {k_1}^2 {q_1}^2 {q_2}^2 {b_4}^3 {k_2}^4 m_1 + 6 b_3 {b_4}^3 {k_1}^3 {q_1}^2 p_1 p_2 m_2 k_2 q_2 +$
$15 b_3 {b_4}^3 p_2 {k_2}^2 q_2 {k_1}^2 {q_1}^2 m_1 p_1 - 8 b_3 {p_2}^3 k_1 q_1 {k_2}^5 {q_2}^3 {b_4}^3 m_2 + 6 b_3 {b_4}^3 k_1 q_1 {k_2}^3 {p_2}^2 m_2 {q_2}^2 -$
$8 b_3 {p_1}^2 {k_1}^7 {q_1}^4 {b_4}^3 + 12{p_1}^6 {k_1}^4 {q_1}^4 q_2 {b_4}^4 k_2 + 24{b_3}^4 {p_1}^3 {p_2}^3 {k_1}^4 q_1 {k_2}^3 +$
$6 b_3 {b_4}^3 {k_1}^4 {q_1}^3 {p_1}^2 m_1)/(-4{k_1}^5 {q_1}^3 {p_1}^3 + 6{k_2}^3 {p_2}^3 {k_1}^2 {p_1}^3 {b_3}^4 m_1 + 3{p_1}^2 m_1 {k_1}^3 b_3 {b_4}^3 q_1 +$
$24 k_2 p_2 {k_1}^5 {p_1}^3 {b_3}^2 {b_4}^2 {q_1}^2 + 6{p_1}^2 m_1 k_1 {b_3}^3 b_4 {p_2}^2 {k_2}^2 - 32{k_1}^4 q_1 {p_1}^3 {k_2}^2 {p_2}^2 {b_3}^3 b_4 -$
$32{k_1}^2 {p_1}^2 {p_2}^3 {k_2}^4 {b_3}^3 b_4 q_2 + 24 k_1 p_1 {p_2}^3 {k_2}^5 {b_3}^2 {b_4}^2 {q_2}^2 - 18{k_1}^2 q_1 p_1 {k_2}^3 {p_2}^2 b_3 {b_4}^3 m_2 {q_2}^2 -$
$28{k_1}^2 q_1 p_1 {k_2}^4 {p_2}^2 b_3 {b_4}^3 {q_2}^2 + 6 m_2 {k_1}^3 {k_2}^2 p_2 {b_4}^4 p_1 {q_1}^2 {q_2}^2 +$
$20{k_1}^4 {p_1}^3 {q_1}^2 {b_3}^2 {b_4}^2 m_1 p_2 k_2 - 22{k_2}^2 {p_2}^2 {k_1}^3 {p_1}^3 {b_3}^3 m_1 b_4 q_1 - 9{p_1}^2 m_1 {k_1}^2 {b_3}^2 {b_4}^2 q_1 p_2 k_2 -$
$28{k_2}^2 q_2 {p_1}^2 {k_1}^4 p_2 b_3 {b_4}^3 {q_1}^2 - 10{k_2}^4 q_2 {p_1}^2 k_1 {p_2}^3 {b_3}^3 b_4 m_1 +$
$28{k_2}^3 q_2 {p_1}^2 {k_1}^2 {p_1}^2 {b_3}^2 {b_4}^2 m_1 q_1 - 18{k_2}^2 q_2 {p_1}^2 {k_1}^3 p_2 b_3 {b_4}^3 m_1 {q_1}^2 +$

$4k_1{}^5q_1{}^3p_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2p_2m_1 + 4k_2{}^5q_2{}^2p_2{}^3b_3{}^2b_4{}^2m_1p_1 - 3k_2{}^3p_2{}^2m_1p_1b_3{}^2q_2 +$
$6m_2p_2{}^2k_1{}^2p_1{}^2b_3b_4k_2 - 3m_2p_2k_1{}^3p_1{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_1 + 12b_4{}^4k_1{}^3q_1{}^2k_2{}^3p_1q_2{}^2p_2 -$
$4k_2{}^6q_2{}^3p_2{}^3b_3{}^3b_4{}^3 + 12k_1{}^3p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^3b_3{}^4 - 4k_2{}^5q_2{}^3p_2{}^3b_3b_4{}^3m_2 +$
$6k_1{}^3p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^2b_3{}^4m_2 + 56k_1{}^3q_1p_1{}^2k_2{}^3p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2q_2 - 22k_1{}^2p_1{}^2p_2{}^3k_2{}^3b_3{}^3m_2b_4q_2 +$
$20k_2{}^4q_2{}^2p_2{}^3b_3{}^2b_4{}^2m_2k_1p_1 - 10k_1{}^4q_1p_1{}^3k_2p_2{}^2b_3{}^3b_4m_2 +$
$28k_1{}^3q_1p_1{}^2k_2{}^2p_2{}^2b_3{}^2b_4{}^2m_2q_2 - 4k_1{}^6p_1{}^3q_1{}^3b_3b_4{}^{33} + 3k_2{}^3q_2{}^2b_4{}^3p_2{}^2m_2b_3 -$
$10k_2{}^4q_2{}^2p_2{}^2b_3b_4{}^3m_1p_1k_1q_1 + 3k_2{}^2p_2m_1p_1b_3b_4{}^3q_2k_1q_1 +$
$6k_2{}^3p_2q_2{}^2b_4{}^4m_1p_1k_1{}^2q_1{}^2 - 10k_1{}^4p_1{}^2q_1{}^2b_3b_4{}^3m_2k_2q_2 - 9p_2{}^2m_2k_2{}^2q_2b_3{}^2b_4{}^2p_1k_1 +$
$3p_2m_2k_2q_2b_3b_4{}^3p_1k_1{}^2q_1)$

$w_2 = p_2k_2{}^2(-8b_3p_2{}^3k_2{}^7q_2{}^4b_4{}^3 + 48b_3{}^2p_1{}^3p_2k_2{}^2k_1{}^5b_4{}^2q_1{}^2q_2 +$
$124b_3{}^2p_1{}^2p_2{}^2k_2{}^4q_2{}^2b_4{}^2k_1{}^3q_1 + 68b_3{}^2p_1{}^2p_2{}^2k_1{}^3q_1k_2{}^3b_4{}^2m_2q_2{}^2 +$
$56b_3{}^2p_1{}^2p_2{}^2k_2{}^4k_1{}^2m_1q_2{}^2q_1b_4{}^2 + 28b_3{}^2p_1p_2{}^3k_2{}^5q_2{}^3b_4{}^2m_2k_1 -$
$8b_3p_1{}^3k_1{}^5q_1{}^3b_4{}^3m_1k_2q_2 - 8b_3p_1{}^2p_2k_1{}^4q_1{}^2k_2{}^2b_4{}^2m_2q_2{}^2 -$
$36b_3p_1{}^2p_2k_2{}^3k_1{}^3m_1b_4{}^3q_1{}^2q_2{}^2 - 44b_3p_1{}^2p_2k_1{}^4q_1{}^2k_2{}^3b_4{}^3q_2{}^2 -$
$20b_3p_1p_2{}^2q_2{}^3q_1b_4{}^3k_2{}^5k_1m_1 - 68b_3p_1p_2{}^2k_2{}^5q_2{}^3b_4{}^3k_1{}^2q_1 -$
$48b_3p_1p_2{}^2k_1{}^2q_1k_2{}^4b_4{}^3m_2q_2{}^3 - 9q_2{}^3q_1b_4{}^4k_2{}^3m_2k_1p_2 + 12p_2{}^2b_4{}^4k_2{}^5q_2{}^4m_2k_1q_1 +$
$12p_1p_2k_2{}^4q_2{}^3b_4{}^4k_1{}^3q_1{}^2 + 12b_3{}^4p_1{}^3p_2{}^3k_2{}^4k_1{}^2m_1q_2 + 12b_3{}^4p_1{}^3p_2{}^3k_1k_2{}^3m_2q_2 -$
$52b_3{}^3p_1{}^2p_2{}^3k_1{}^2k_2{}^5b_4q_2{}^2 + 8b_3{}^2p_1p_2{}^3k_2{}^6q_2{}^3b_4{}^2m_1 + 36b_3{}^2p_1p_2{}^3k_2{}^6q_2{}^3b_4{}^2k_1 -$
$8b_3p_1{}^3k_2k_1{}^6b_4{}^3q_1{}^3q_2 + 9b_3{}^3b_4k_1{}^4q_1p_1{}^3p_2m_2 - 15b_3{}^2b_4{}^2k_1{}^3q_1p_1{}^2p_2m_2k_2q_2 +$
$15b_3{}^4k_1{}^2q_1k_2{}^2p_1q_2{}^2b_3p_2m_2 + 3b_3{}^2q_2b_4k_1{}^2p_1{}^2k_2{}^2p_2{}^2m_2 -$
$9q_2{}^2b_3{}^2q_2{}^2b_4{}^2k_1p_1k_2{}^3p_2{}^2m_2 + 6b_4{}^3k_2{}^4p_2{}^2b_3m_2 - 6b_4{}^2k_2{}^4p_2{}^2q_2{}^2b_3{}^2m_1p_1 +$
$12p_2{}^2k_2{}^6q_2{}^4b_4{}^4q_1k_1 + 24b_3{}^4p_1{}^3p_2{}^3k_1{}^3k_2{}^4q_2 - 8b_3p_2{}^3k_2{}^6q_2{}^4b_4{}^3m_2 -$
$18b_4{}^2k_1{}^2q_1k_2{}^2p_1{}^2q_2b_3{}^2m_1p_2 + 9b_4{}^4k_1{}^3q_1{}^2p_1q_2{}^2m_2k_2 - 9b_3k_1{}^4p_1{}^2q_1{}^2b_4{}^3m_2q_2 +$
$12p_1p_2k_2{}^4q_2{}^3k_1{}^2b_4{}^4m_1q_1{}^2 - 44b_3{}^2p_1{}^3p_2{}^2k_2{}^3k_1{}^3m_1q_2q_1b_4 -$
$76b_3{}^3p_1{}^3p_2{}^2k_1{}^4q_1k_2{}^3b_4q_2 - 32b_3{}^3p_1{}^3p_2{}^2k_1{}^4k_2{}^2m_2q_2q_1b_4 -$
$32b_3{}^3p_1{}^2p_2{}^3k_1{}^2k_2{}^4m_2b_4q_2{}^2 - 20b_3{}^3p_1{}^2p_2{}^3k_2{}^5q_2{}^2k_1b_4m_1 +$
$40b_3{}^2p_1{}^3p_2k_2{}^2k_1{}^4m_1q_1{}^2q_2b_4{}^2 + 8b_3{}^2p_1{}^3p_2k_1{}^5q_1{}^2k_2b_4{}^2m_2q_2 +$
$6b_4{}^3k_1{}^3q_1{}^2k_2p_1{}^2q_2b_3m_1 + 12b_3{}^3q_2b_4k_1p_1{}^2k_2{}^3p_2{}^2m_1 + 6b_4{}^3k_2{}^3q_2{}^2m_1p_1q_1p_2b_3)/$
$(-4k_1{}^5p_1{}^3q_1{}^3b_3b_4{}^3m_1 + 6k_2{}^3p_2{}^3k_1{}^2p_1{}^3b_3{}^4m_1 + 3p_1{}^2m_1k_1{}^3b_3b_4{}^3q_1{}^2 +$

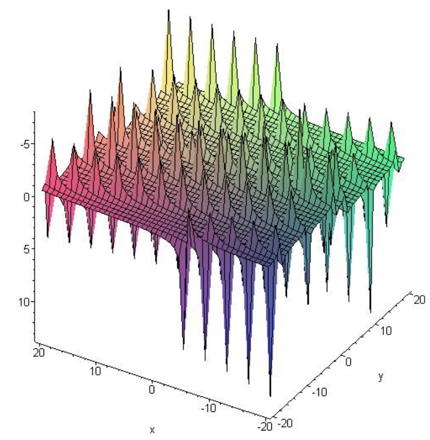
$24k_2p_2{k_1}^5{p_1}^3{b_3}^2{b_4}^2{q_1}^2 + 6{p_1}^2m_1k_1{b_3}^3b_4{p_2}^2{k_2}^2 - 32{k_1}^4q_1{p_1}^3{k_2}^2{p_2}^2{b_3}^3b_4 -$
$32{k_1}^2{p_1}^2{p_2}^3{k_2}^4{b_3}^3b_4q_2 + 24k_1p_1{p_2}^3{k_2}^5{b_3}^2{b_4}^2{q_2}^2 - 18{k_1}^2q_1p_1{k_2}^3{p_2}^2b_3{b_4}^3m_2{q_2}^2 -$
$28{k_1}^2q_1p_1{k_2}^4{p_2}^2b_3{b_4}^3{q_2}^2 + 6m_2{k_1}^3{k_2}^2p_2{b_4}^4p_1{q_1}^2{q_2}^2 +$
$20{k_1}^4{p_1}^3{q_1}^2{b_3}^2{b_4}^2m_1p_2k_2 - 22{k_2}^2{p_2}^2{k_1}^3{p_1}^3{b_3}^3m_1b_4q_1 - 9{p_1}^2m_1{k_1}^2{b_3}^2{b_4}^2q_1p_2k_2 -$
$28{k_2}^2q_2{p_1}^2{k_1}^4p_2b_3{b_4}^3{q_1}^2 - 10{k_2}^4q_2{p_1}^2k_1{p_2}^3{b_3}^3b_4m_1 +$
$28{k_2}^3q_2{p_1}^2{k_1}^2{p_2}^2{b_3}^2{b_4}^2m_1q_1 - 18{k_2}^2q_2{p_1}^2{k_1}^3p_2b_3{b_4}^3m_1{q_1}^2 +$
$4{k_1}^5{p_1}^3{q_1}^2{b_3}^2{b_4}^2p_2m_2 + 4{k_2}^5{q_1}^2{p_2}^3{b_3}^2{b_4}^2p_1m_1 - 3{k_2}^3{p_2}^2m_1p_1{b_3}^2{b_4}^2q_2 +$
$6m_2{p_2}^2{k_1}^2{p_1}^2{b_3}^3b_4k_2 - 3m_2p_2{k_1}^3{p_1}^2{b_3}^2{b_4}^2q_1 + 12{b_4}^4{k_1}^3{q_1}^2{k_2}^3p_1{q_2}^2p_2 -$
$4{k_2}^6{q_1}^3{p_2}^3b_3{b_4}^3 + 12{k_1}^3{p_1}^3{p_2}^3{k_2}^3{b_3}^4 - 4{k_2}^5{q_2}^3{p_2}^3b_3{b_4}^3m_2 +$
$6{k_1}^3{p_1}^3{p_2}^3{k_2}^2{b_3}^4m_2 + 56{k_1}^3q_1{p_1}^2{k_2}^3{p_2}^2{b_3}^2{b_4}^2q_2 - 22{k_1}^2{p_1}^2{p_2}^3{k_2}^3{b_3}^3m_2b_4q_2 +$
$20{k_2}^4{q_2}^2{p_2}^3{b_3}^2{b_4}^2m_2k_1p_1 - 10{k_1}^4q_1{p_1}^3k_2{p_2}^2{b_3}^3b_4m_2 +$
$28{k_1}^3q_1{p_1}^2{k_2}^2{p_2}^2{b_3}^2{b_4}^2m_2q_1 - 4{k_1}^6{p_1}^3{q_1}^3b_3{b_4}^3 + 3{k_2}^3{q_2}^2{b_4}^3{p_1}^2m_2b_3 -$
$10{k_2}^4{q_2}^2{p_2}^2b_3{b_4}^3m_1p_1k_1q_1 + 3{k_2}^2p_2m_1p_1b_3{b_4}^3q_2k_1q_1 +$
$6{k_2}^3p_2{q_2}^2{b_4}^4m_1p_1{k_1}^2{q_1}^2 - 10{k_1}^4{p_1}^2{q_1}^2b_3{b_4}^3p_2m_2k_2q_2 -$
$9{p_2}^2m_2{k_2}^2q_2{b_3}^2{b_4}^2p_1k_1 + 3p_2m_2k_2q_2b_3{b_4}^3p_1{k_1}^2q_1) \qquad (4.21)$

(4.20) eşitlikleri ve $p_1 = -\frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{1}{2}$ yani $\varphi(\xi) = \coth(\xi) + \operatorname{csch}(\xi)$ ve $\psi(\eta) = \sec(\eta) + \tan(\eta)$ olmak üzere elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.4. $l_1 = 1, k_2 = 0.8,\ k_1 = -0.1,\ w_1 = -1.7,\ w_2 = -1.4,\ b_3 = 1.4,\ z = 0.3, b_0 = -0.2,\ t = 0.2$

(4.21) eşitlikleri ve $p_1 = -1,\ q_1 = -1,\ p_2 = -1,\ q_2 = 1$ yani $\varphi(\xi) = \cot(\xi)$ ve $\psi(\eta) = tanh(\eta)$ olmak üzere elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.5. $k_2 = 0.3,\ k_1 = 0.1,\ m_2 = 0.2, m_1 = 0.4,\ b_3 = 0.4,\ z = 0.3, b_0 = 0.4,\ b_4 = 0.7, t = 0.1$

4.1.4. Değiştirilmiş Çiftli Alt Denklem Metodunun (2+1) Boyutlu BKP Denkleminin Yeni Formuna Uygulanması

Wazwaz ve Kaur (2019) tarafından

$$u_{xxxy} + \alpha(u_{xx}u_y + u_{yx}u_x) + 2u_{xt} + u_{yt} - (2u_{xx} + u_{yy}) = 0 \tag{4.22}$$

şekilde verilen (2+1) boyutlu BKP denkleminin formuna değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu kullanarak çözümü aranacaktır .

Daha önceki bölümlerde verildiği gibi denklemin çözümü

$$u(x,y,t) \;=\; b_0+\frac{b_1\varphi(\xi)+\,b_2\psi(\eta)}{b_3+b_4\varphi(\xi)\psi(\eta)} \tag{4.23}$$

şeklinde aranır. (4.23) denkleminde b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 birer keyfi sabit, $\xi = k_1x+l_1y + w_1t$ ve $\eta = k_2x+l_2y + w_2t$ şeklinde tanımlanan birer fonksiyondur. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri kabul edilerek (4.23) denklemini (4.22) denklemine yerleştirilip $\varphi^m\psi^n$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$b_1=\frac{6k_1p_1p_2{b_3}^2-6{b_4}^2k_1q_1q_2+\alpha b_4b_2q_2}{p_2b_3\alpha}\,,\quad k_2=-\frac{-6b_4k_1q_1+\alpha b_2}{6p_2b_3}$$

$l_1 = (\alpha^3q_2{b_2}^3 - 27{b_3}^2p_2\alpha b_2 + 108{b_4}^3{k_1}^3{q_1}^3q_2 - 108b_4{k_1}^3{q_1}^2p_2p_1{b_3}^2 - 54{k_1}^2{b_4}^2{q_1}^2q_2\alpha b_2 + 54{k_1}^2p_2{b_3}^2p_1q_1\alpha b_2)/27k_1(p_1p_2{b_3}^2 - {b_4}^2q_1q_2)(-6b_4k_1q_1 + \alpha b_2)q_1$

$l_2 = (\alpha^3{b_2}^3b_4q_2 - 9{b_2}^2{b_4}^2q_2\alpha^2k_1q_1 + 9{b_3}^2p_1p_2{b_2}^2k_1\alpha^2 - 27b_2{b_3}^2p_2\alpha b_4 + 108{q_1}^3{b_4}^4{k_1}^3q_2 - 108{k_1}^3{b_3}^2{q_1}^2p_1p_2{b_4}^2)/27b_3k_1p_2\big(p_1p_2{b_3}^2 - {b_4}^2q_1q_2\big)(-6b_4k_1q_1 + \alpha b_2)$

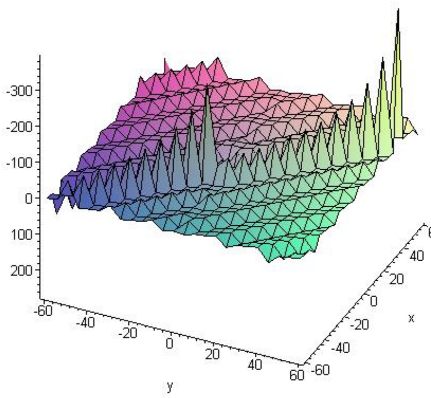
$w_1 = (\alpha^6{b_2}^6{q_2}^2 + 648{b_4}^3{k_1}^5p_1{q_1}^4{q_2}^2\alpha^3{b_2}^3 - 108{b_4}^2{k_1}^4p_1{q_1}^3\alpha^4{b_2}^4{q_2}^2 + 5832{b_4}^4{k_1}^6p_1{q_1}^5{q_2}^2{b_2}^2\alpha^2 - 139968{b_4}^4{k_1}^8{p_1}^2{q_1}^6q_2{b_3}^2p_2 - 46656{b_4}^5{k_1}^7p_1{q_1}^6{q_2}^2\alpha b_2 - 54{b_3}^2p_2\alpha^4{b_2}^4q_2 + 4374{b_4}^4{b_2}^2{k_1}^4{q_1}^4{q_2}^2\alpha^2 - 69984{b_4}^2{k_1}^8{p_1}^3{q_1}^5{b_3}^4{p_2}^2 + 64152{k_1}^6{b_3}^4{q_1}^4{p_1}^2{p_2}^2{b_4}^4 - 648b_4{k_1}^5{p_1}^2{q_1}^3p_2{b_3}^2\alpha^3{b_2}^3q_2 - 108{k_1}^4{p_1}^2{q_1}^2{b_3}^2p_2{b_2}^4q_2\alpha^4 - 5832{k_1}^6{p_1}^3{q_1}^3{b_3}^4{p_2}^2{b_2}^2\alpha^2 - 11664{b_4}^2{k_1}^6{p_1}^2{q_1}^4{b_3}^2p_2{b_2}^2\alpha^2q_2 + 93312{b_4}^3{k_1}^7{p_1}^2{q_1}^5q_2{b_3}^2p_2\alpha b_2 - 46656b_4{k_1}^7{p_1}^3{q_1}^4{b_3}^4{p_2}^2b_2\alpha + 2916{b_3}^2p_2{q_1}^2{b_4}^2{k_1}^2q_2\alpha^2{b_2}^2 - 5832{b_3}^2p_2b_2{b_4}^3q_2\alpha{k_1}^3{q_1}^3 +$

$5832b_3{}^4p_1p_2{}^2b_2k_1{}^3q_1{}^2b_4\alpha - 2916b_3{}^4p_1p_2{}^2b_2{}^2k_1{}^2\alpha^2q_1 + 108b_3{}^2p_1p_2b_2{}^4k_1{}^2\alpha^4q_2q_1 +$
$1458b_3{}^4p_1{}^2p_2{}^2b_2{}^2k_1{}^4\alpha^2q_1{}^2 - 5832b_3{}^2p_1p_2q_2b_4{}^2q_1{}^3\alpha^2b_2{}^2k_1{}^4 -$
$216b_3{}^2p_1p_2\alpha^3b_4b_2{}^3q_2k_1{}^3q_1{}^2 - 11664b_3{}^4p_1{}^2p_2{}^2k_1{}^5q_1{}^3b_4\alpha b_2 +$
$40824b_3{}^2p_1p_2q_2b_4{}^3q_1{}^4k_1{}^4\alpha b_2 + 64152b_4{}^6k_1{}^6q_1{}^6q_2{}^2 - 29160b_4{}^5b_2k_1{}^5q_1{}^5q_2{}^2\alpha -$
$108b_2{}^4k_1{}^2\alpha^4b_4{}^2q_1{}^2q_2{}^2 + 216q_2{}^2b_2{}^3\alpha^3k_1{}^3b_4{}^3q_1{}^3 - 128304b_4{}^4k_1{}^6q_1{}^5p_2p_1b_3{}^2q_2 +$
$69984b_4{}^6k_1{}^8p_1q_1{}^7q_2{}^2 + 729b_2{}^2b_3{}^4p_2{}^2\alpha^2)/\Big(27k_1q_1\left(\alpha^3q_2b_2{}^3 - 27b_3{}^2p_2\alpha b_2 +\right.$
$432b_4{}^3k_1{}^3q_1{}^3q_2 - 432b_4k_1{}^3q_1{}^2p_2p_1b_3{}^2 - 108k_1{}^2p_2{}^2b_3{}^2p_1q_1\alpha b_2 +$
$\left.108k_1{}^2p_2b_3{}^2q_1{}^2q_2\alpha b_2\right)(-6b_4k_1q_1 + \alpha b_2)\left(p_1p_2b_3{}^2 - b_4{}^2q_1q_2\right)\Big)$

$w_2 = (139968k_1{}^8q_1{}^8b_4{}^{10}q_2{}^3 - 11664b_2b_4{}^5q_2\alpha b_3{}^4p_2{}^2k_1{}^3q_1{}^3 +$
$11664b_4{}^3b_4\alpha b_3{}^6p_1p_2{}^3k_1{}^3q_1{}^2 - 256608b_4{}^6q_2b_3{}^4p_1p_2{}^2k_1{}^6q_1{}^5 +$
$128304b_3{}^6p_1{}^2p_2{}^3k_1{}^6q_1{}^4b_4{}^4 + 128304b_4{}^8q_2{}^2b_3{}^2p_2q_1{}^6k_1{}^6 - 9p_2{}^2b_3{}^4b_2{}^6k_1{}^2p_1{}^2\alpha^6q_2 -$
$972b_3{}^6p_2{}^3p_1k_1b_2{}^3b_4\alpha^3 - 279936p_2k_1{}^8q_1{}^7b_3{}^2b_4{}^8q_2{}^2p_1 +$
$139968p_2{}^2k_1{}^8q_1{}^6b_3{}^4b_4{}^6q_2p_1{}^2 - 7344b_3{}^2p_2q_1{}^3b_4{}^5k_1{}^3q_2{}^2\alpha^3b_2{}^3 +$
$891b_3{}^2p_2q_1{}^2b_4{}^4k_1{}^2q_2{}^2\alpha^4b_2{}^4 - 104976b_3{}^2p_2{}^7\alpha b_4{}^5b_2k_1{}^5q_1{}^2q_2{}^2 +$
$36936b_3{}^2p_2\alpha^2b_4{}^6b_2{}^2k_1{}^4q_1{}^4q_2{}^2 - 50544b_3{}^4p_1p_2{}^2b_2{}^2k_1{}^4b_4{}^4q_2\alpha^2q_1{}^3 +$
$1458b_2{}^2b_4{}^2\alpha^2b_3{}^6p_2{}^3 + 9288b_3{}^4p_1p_2{}^2b_2{}^3k_1{}^3b_4{}^3q_2\alpha^3q_1{}^2 +$
$174960b_3{}^4p_1p_2{}^2\alpha b_4{}^5b_2k_1{}^5q_1{}^4q_2 + 972b_2{}^3\alpha^3q_2b_2{}^4b_4{}^3p_2{}^2k_1q_1 +$
$42b_3{}^2p_1p_2\alpha^6b_4{}^2b_2{}^6q_2{}^2k_1{}^2q_1 - b_3{}^2p_1p_2\alpha^7b_4b_2{}^7q_2{}^2k_1 - 63b_3{}^2p_2b_2{}^5q_2{}^2b_4{}^3\alpha^5k_1q_1 +$
$186624b_3{}^2p_1p_2q_2{}^2b_4{}^7q_1{}^6k_1{}^7\alpha b_2 - 23328b_3{}^2p_1p_2q_2{}^2b_4{}^6q_1{}^5k_1{}^6\alpha^2b_2{}^2 +$
$4536b_3{}^2p_1p_2b_4{}^4q_1{}^3q_2{}^2b_2{}^4\alpha^4k_1{}^4 - 648b_3{}^2p_1p_2b_4{}^3q_1{}^2q_2{}^2b_2{}^5\alpha^5k_1{}^3 -$
$93312k_1{}^7q_1{}^7b_4{}^9q_2{}^3\alpha b_2 + 11664k_1{}^6q_1{}^6b_4{}^8q_2{}^3\alpha^2b_2{}^2 - 108b_2{}^4\alpha^4q_2{}^4b_3{}^2p_2{}^2 -$
$2700b_4{}^6q_1{}^4q_2{}^3b_2{}^4\alpha^4k_1{}^4 + 432b_4{}^5q_1{}^3q_2{}^3b_2{}^5\alpha^5k_1{}^3 - 33\alpha^6b_4{}^4b_2{}^6q_2{}^3k_1{}^2q_1{}^2 -$
$\alpha^7b_4{}^3b_2{}^7q_2{}^3k_1q_1 + 2b_3{}^2p_2\alpha^6b_2{}^6b_4{}^2q_2{}^2 + 243b_3{}^6p_2{}^3b_2{}^4k_1{}^2p_1{}^2\alpha^4 +$
$6480k_1{}^5\alpha^3b_4{}^7b_2{}^3q_2{}^3q_1{}^5 - 11664b_3{}^2p_1p_2q_2{}^2b_4{}^5q_1{}^4\alpha^3k_1{}^5b_2{}^5 -$
$1836b_3{}^4p_1{}^2p_2{}^2q_2{}^4b_2{}^4\alpha^4k_1{}^4b_4{}^2q_1{}^2 + 216b_3{}^4p_1{}^2p_2{}^2q_2b_2{}^5\alpha^5k_1{}^3b_4q_1 +$
$5184b_4{}^3p_1{}^2p_2{}^2\alpha^3b_4{}^3b_2{}^3k_1{}^5q_1{}^3q_2 + 11664b_3{}^4p_1{}^2p_2{}^2b_4{}^4b_2{}^2k_1{}^6q_1{}^4q_2\alpha^2 +$

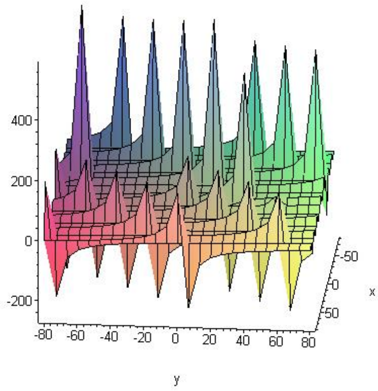
$$93312{b_3}^4{p_1}^2{p_2}^2q_2{b_4}^5{q_1}^5{k_1}^7\alpha b_2 + 13608{b_3}^6{p_2}^3{b_2}^2{p_1}^2{k_1}^4{q_1}^2{b_4}^2\alpha^2 - 1944{b_3}^6{p_2}^3{b_2}^3{p_1}^2{k_1}^3q_1b_4\alpha^3 - 1134{b_3}^4p_1{p_2}^2\alpha^4{b_2}^4{b_4}^2q_2{k_1}^2q_1 + 63{b_3}^4p_1{p_2}^2\alpha^5{b_2}^5b_4q_2k_1 - 69984{b_3}^6{p_1}^2{p_2}^3{k_1}^5{q_1}^3{b_4}^3\alpha b_2)/ \Big(54{b_3}^3{p_2}^2k_1b_4(p_1p_2{b_3}^2\alpha^3q_2{b_2}^3 + 27b_2p_1{b_3}^4{p_2}^2\alpha + 864{b_3}^2p_1p_2{k_1}^3{b_4}^3{q_1}^3q_2 - 432{b_3}^4{p_1}^2{p_2}^2{k_1}^3b_4{q_1}^2 - 216{b_3}^2p_1p_2b_2{q_1}^2{b_4}^2{k_1}^2q_2 + 108{p_1}^2{p_2}^2{b_3}^4{k_1}^2q_1\alpha b_2 - {b_2}^3{b_4}^2{q_2}^2\alpha^3q_1 - 27{b_4}^2q_1q_2b_2{b_3}^2p_2\alpha - 432{k_1}^3{b_4}^5{q_1}^4{q_2}^2 + 108{k_1}^2b_2{b_4}^4{q_2}^2\alpha{q_1}^3)(-6b_4k_1q_1 + \alpha b_2)\Big) \qquad (4.24)$$

(4.24) eşitliklerini kullanarak elde edilen çözüm ile birlikte $p_1 = \frac{1}{2},\ q_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = -\frac{1}{2},\ q_2 = \frac{1}{2}$ yani $\varphi(\xi) = \sec(\xi) + \tan(\xi)$ ve $\psi(\eta) = \coth\eta - csch\,\eta$ olarak alındığında, aşağıdaki grafik elde edilir.



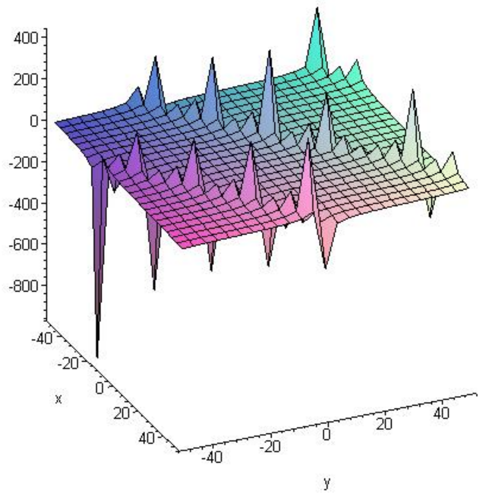
Şekil 4.6. $k_1 = -0.3, \alpha = -0.2,\ b_0 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = -1.3,\ b_4 = 1.3, t = 1$

(4.24) eşitliklerini kullanarak elde edilen çözüm ile birlikte $p_1 = -1\ \ q_1 = -1,\ p_2 = -1,\ q_2 = 1$ yani $\varphi(\xi) = \cot(\xi)$ ve $\psi(\eta) = \coth\eta$ olarak alındığında, aşağıdaki grafik elde edilir.



Şekil 4.7. $k_1 = -0.3,\ \alpha = -0.2,\ b_0 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = -1.3,\ b_4 = 1.3,\ t = 1$

(4.24) eşitliklerini kullanarak elde edilen çözüm ile birlikte $p_1 = 1\ \ q_1 = 1,\ p_2 = -1,\ q_2 = 1$ yani $\varphi(\xi) = \tan(\xi)$ ve$\psi(\eta) = \tanh \eta$ olarak alındığında, aşağıdaki grafik elde edilir.



Şekil 4.8. $k_1 = 2.3,\ \alpha = 1.7,\ b_4 = -1.2,\ b_3 = -2.1,\ b_0 = 1.4,\ b_2 = 0.2,\ t = 2.3$

Genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo - Miva ve BKP denklemleri çok yeni bir alan olduğu için yaygın olarak bilinen diğer kısmi diferansiyel denklemlerden daha fazla araştırılmaya ve çözülmeye ihtiyaç duyar. Yukarıda yapılan çalışmalarda trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon çözümlerini birlikte bulunmasını sağlayan ve genişletilmiş (3+1) boyutlu Jimbo – Miwa denklemleri ile BKP denkleminin yeni formuna uygulanan değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu ile kompleksiton çözümleri elde edildi. Elde edilen çözüm kümeleri çok geniştir ancak değişkenlerin özel seçimleriyle birlikte daha kısa çözümler elde edilebilir.

4.2. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Genişletilmiş Dönüştürülmüş Rasyonel Fonksiyon Metodu Yardımıyla Kompleksiton Çözümleri

Matematiksel fizik alanında önemli bir rol oynayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasına son yıllarda araştırmacılar tarafından büyük ilgi gösterilmektedir. Bu zamana kadar lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunabilmesi için homojen denge metodu (Wang, 1995), F–açılım metodu (Zhou ve Wang, 2013), tanh fonksiyon metodu (Parkers ve Duffy, 1996), sech fonksiyon metodu (Ma, 1993), genişletilmiş tanh fonksiyon metodu (Fuchssteiner ve Carillo, 1992) ve tanh-coth metodu (Fuchssteiner ve Ma,1996) gibi birçok metot kullanılmıştır. Bu metotların yanı sıra daha önce yapılan çalışmalarda bilineer denklemlerin kompleksiton çözümlerini bulmak için genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu kullanılmıştır. Genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu tanh metodu, homojen denge metodu, resmetme metodu, üstel-fonksiyon metodu ve F-açılım metotlarının birleşimi olarak verilen dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodunun genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Bu bölümde bu metot kullanarak bilineer denklemlerin kompleksiton çözümlerinin elde edilecektir.

Bir sonraki kısımda tam çözüm metotlarını birleştiren dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu anlatılmaktadır (Ma ve Lee, 2009). Bu metot rasyonel fonksiyon dönüşümlerinin kullanılması fikrine dayanmaktadır. Dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodunun lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam dalga çözümlerini elde etmek için kullanılabilecek etkili bir yol olduğu gösterilmektedir. İlerleyen yıllarda dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu kompleksiton çözümler elde edilecek şekilde geliştirildi ve geliştirilen bu şekli genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu olarak adlandırıldı. Bu metot (3+1) boyutlu genişletilmiş KP denklemi, the Boiti-Leon Mana–Pempinelli denklemi, (3+1) boyutlu BKP denklemi, (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa gibi birçok denklemlerin bilineer formlarına kompleksiton çözümlerini bulabilmek için uygulanmıştır (Zhang ve Ma, 2014).

Aşağıdaki kısımda dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu ve genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu tanıtılmış, devamında ise genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanarak kompleksiton çözümleri elde edilerek bazı parametrelere bağlı olarak resmedilmiştir.

4.2.1. Genişletilmiş Dönüştürülmüş Rasyonel Fonksiyon Metodu

Dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerinin bulunmasında kullanılır. Bu metot Zhang ve Ma (2014) tarafından

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{4.25}$$

şeklindeki bir kısmi diferensiyel denklemi çözmek için verilmiştir.

1. adım: (4.25) denkleminin hareketli dalga çözümü,

$$u = u(\xi)\ ,\ \xi = k(x - ct) \tag{4.26}$$

şeklinde aranır. (4.26) eşitliğindeki k ve c birer reel sabit sayı olarak tanımlanır. (4.26) dönüşümü yardımıyla (4.25) denklemi

$$P(u, ku', -kcu', k^2u'', \dots) = 0\ ,\ \ u' = \frac{du}{d\xi} \tag{4.27}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklemine dönüştürülür.

2. Adım: (4.27) denkleminin

$$u^{(r)}(\xi) = v\ (\eta) = \frac{p(\eta)}{q(\eta)} = \frac{p_m\eta^m + p_{m-1}\eta^{(m-1)} + \dots + p_0}{q_n\eta^n + q_{n-1}\eta^{(n-1)} + \cdots + q_0} \tag{4.28}$$

ile belirlenen hareketli dalga çözümleri aranır. (4.28) denklemindeki $p(\eta)$ ve $q\ (\eta)$ birer polinom ve $r\ >\ 0$ olmak üzere minimal diferensiyel sayıyı gösterir gösterir.

Metodun önemli bir noktası, çözümü bilinen birinci mertebeden

$$\eta' = T = T(\xi, \eta) \tag{4.29}$$

şeklinde bir adi diferensiyel denklemin yardımıyla yeni bir değişkenin sürece dahil edilmesidir.

(4.29) denklemindeki T, ξ ve η ya bağlı bir fonksiyondur. Bunlarla birlikte aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{du^{(r)}(\xi)}{d\xi} = T\frac{dv}{d\eta}, \quad \frac{du^{(r+1)}(\xi)}{d\xi} = T^2\frac{d^2v}{d\eta^2} + T'\frac{dv}{d\eta} \ldots \tag{4.30}$$

Bununla birlikte dönüştürülmüş denklemdeki elde edilen rasyonel fonksiyonun payı sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi oluşturulur.

3.adım: 2. adımda elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle (4.25) denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilebilir. Eğer $\eta = \eta'$ ve $\eta = e^{\xi}$ olarak seçilirse dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu üstel-fonksiyon metoduna dönüşürken; $\eta' = \alpha + \eta^2$ ve α sabit sayı olarak kabul edilirse genişletilmiş tanh-fonksiyon metoduna dönüşeceği görülür (Ma ve Lee, 2009). Buradan da dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodunun tanh-fonksiyon, tan-fonksiyon ve üstel fonksiyon tipindeki fonksiyonların kullanımını içeren metotların birleşimi olduğu anlaşılır.

Ama kompleksiton çözümler yeni tipte hareketli dalga hızlarına sahip oldukları için lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin kompleksiton çözümlerini bulmak kolay değildir. Bu amaçla kompleksiton çözümlerin bulunabilmesi için dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu aşağıdaki şekilde geliştirilmiştir.

1.adım: (4.25) deki kısmi diferensiyel denklemin

$$H(D_x, D_t, \ldots)f.f = 0 \tag{4.31}$$

şeklinde Hirota bilineer forma sahip olduğu kabul edilir. (4.31) deki D_x, D_t, ... , aşağıdaki şekilde tanımlanan birer Hirota türev operatörüdür.

$$D_y{}^p f(y).g(y) = \left(\partial y - \partial y'\right)^p f(y)g(y') \,|_{y'=y} = \partial^p{}_{y'} f(y+y')g(y-y')\big|_{y'=0}, \qquad p \geq 1$$

2.adım:

$$f = \frac{p(\eta_1,\eta_2)}{q(\eta_1,\eta_2)} \tag{4.32}$$

şeklinde bir fonksiyon; $p(\eta_1,\eta_2)$ ve $q(\eta_1,\eta_2)$ da birer polinom olup aşağıdaki eşitlikleri sağladıkları kabul edilir.

$$\eta_1{}'' = \frac{d^2\eta_1}{d\xi_1{}^2} = -\eta_1 \tag{4.33}$$

$$\eta_2{}'' = \frac{d^2\eta_2}{d\xi_2{}^2} = \eta_2 \tag{4.34}$$

(4.33) ve (4.34) eşitliklerindeki $\xi_1 = k_1x + w_1t + c_1$, $\xi_2 = k_2x + w_2t + c_2$, k_1, k_2, w_1 ve w_2 elde edilecektir. c_1 ve c_2 birer sabittir.

3.adım: Uygun $p(\eta_1,\eta_2)$ ve $q(\eta_1,\eta_2)$ seçildiğinde (4.31) denklemi k_i ve w_i leri içeren cebirsel denkleme dönüşür. Bu denklem çözülerek (4.25) denkleminin kompleksiton çözümleri elde edilir (Ma ve Lee, 2009).

4.2.2. Genişletilmiş Dönüştürülmüş Rasyonel Fonksiyon Metodunun Genişletilmiş (3+1) Boyutlu Birinci Tip Jimbo-Miwa Denklemine Uygulanması

Bilineer formu aşağıdaki gibi olan genişletilmiş (3+1) boyutlu birinci tip Jimbo-Miwa denklemi için (Wazwaz, 2017)

$$\begin{aligned} {D_x}^3 D_y + 2D_y D_t - 3\left(D_x D_z + D_y D_t + {D_z}^2\right)(f.f) = {} & 2f_{xxxy}f - 2f_{xxx}f_y - 6f_{xxy}f_x + \\ & 6f_{xy}f_{xx} + 4f_{yt}f - 4f_y f_t - \\ & 6f_{xz}f + 6f_x f_z - 6f_{yz}f + \\ & 6f_y f_z - 6f_{zz}f + 6{f_z}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.35) eşitliğinde

$$f(x,y,z,t) = A\eta_1 + B\eta_2 \quad (4.36)$$

şeklinde alınır. Aynı zamanda yukarıdaki denklem (3+1) boyutlu bir denklem olduğu için

$$\begin{aligned} \xi_1 &= k_1 x + l_1 y + w_1 z + m_1 t + c_1 \\ \xi_2 &= k_2 x + l_2 y + w_2 z + m_2 t + c_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

olarak seçilir. (4.33), (4.34) ve

$$\eta_1'^2 = 1 - {\eta_1}^2, \eta_2'^2 = 1 + {\eta_2}^2, \quad (4.38)$$

Eşitlikleri kabul edilerek (4.36) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen denklem ${\eta_1}^2, {\eta_2}^2, \eta_1\eta_2, {\eta_1}'{\eta_2}'$terimlerinin bir polinom formu olarak ifade edilebilir. Bu polinomda ${\eta_1}^2, {\eta_2}^2, \eta_1\eta_2, {\eta_1}'{\eta_2}'$ terimlerinin katsayıları ve sabit terim sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$2ABl_1{k_1}^3 - 6ABk_2l_2{k_1}^2 - 6ABk_1{k_2}^2l_1 + 2ABl_2{k_2}^3 + 6ABk_1w_1 - 6ABk_2w_2 - 4ABl_1m_1 + 6ABl_1w_1 + 4ABl_2m_2 - 6ABl_2w_2 + 6AB{w_1}^2 - 6AB{w_2}^2 = 0$$

$$2AB{k_1}^3l_2 - 6ABl_1k_2{k_1}^2 - 6ABl_2k_1{k_2}^2 - 2AB{k_2}^3l_1 + 6ABbk_1w_2 + 6ABbk_2w_1 - 4ABl_1m_2 + 6ABl_1w_2 - 4ABl_1m_1 + 6ABl_2w_1 + 12ABw_1w_2 = 0$$

$$8A^2{k_1}^3l_1 - 8B^2l_2{k_2}^3 + 6A^2k_1w_1 - 4A^2l_1m_1 + 6A^2l_1w_1 + 6A^2{w_1}^2 + 6B^2k_2w_2 - 4B^2l_2m_2 + 6B^2l_2w_2 + 6B^2{w_2}^2 = 0 \qquad (4.39)$$

(4.39) cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$l_1 = -\frac{{k_1}^3w_1 + {k_1}^2k_2w_2 + {k_1}^2{w_1}^2 + k_1{k_2}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + {k_2}^3w_2 + {k_2}^2{w_2}^2}{({k_1}^4 + 2{k_1}^2{k_2}^2 + {k_2}^4)k_1}$$

$$l_2 = \frac{{k_1}^3w_1 + {k_1}^2k_2w_2 + {k_1}^2{w_1}^2 + k_1{k_2}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + {k_2}^3w_2 + {k_2}^2{w_2}^2}{({k_1}^4 + 2{k_1}^2{k_2}^2 + {k_2}^4)k_2}$$

$$m_1 = \big({k_1}^6w_1 + 4{k_1}^5w_2k_2 + {k_1}^5{w_1}^2 - 2{k_1}^4{k_2}^2w_1 + 8{k_1}^4k_2w_1w_2 + 4{k_1}^3{k_2}^3w_2 - 6{k_1}^3{k_2}^2{w_1}^2 + 4{k_1}^3{k_2}^2{w_2}^2 - 3{k_1}^2{k_2}^4w_1 - 3k_1{k_2}^4{w_1}^2 + 3{k_2}^3{w_1}^2 + 3{k_1}^2k_2w_1w_2 + 3{k_1}^2{w_1}^3 + 3k_1{k_2}^2{w_1}^2 + 6k_1k_2{w_1}^2w_2 + 3{k_2}^3w_1w_2 + 3{k_2}^2w_1{w_2}^2\big)/\big(2({k_1}^3w_1 +$$

$k_1{}^2k_2w_2 + k_1{}^2w_1{}^2 + k_1k_2{}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + k_2{}^3w_2 + k_2{}^2w_2{}^2)\Big)$

$$m_2 = \big(3k_1{}^4k_2{}^2w_2 + 3k_1{}^4k_2w_2{}^2 - 4k_1{}^3k_2{}^3w_1 + 2k_1k_2{}^4w_2 - 4k_1{}^2k_2{}^3w_1{}^2 + 6k_1{}^2k_2{}^3w_1{}^2 - 4k_1k_2{}^5w_1 - 8k_1k_2{}^4w_1w_2 - k_2{}^6w_2 - k_2{}^5w_2{}^2 + 3k_1{}^3w_1w_2 + 3k_1{}^2k_2w_2{}^2 + 3k_1{}^2w_2w_1{}^2 + 3k_1k_2{}^2w_1w_2 + 6k_1k_2w_1w_2{}^2 + 3k_2{}^3w_2{}^2 + 3k_2{}^2w_2{}^3\big)/ \Big(2\big(k_1{}^3w_1 + k_1{}^2k_2w_2 + k_1{}^2w_1{}^2 + k_1k_2{}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + k_2{}^3w_2 + k_2{}^2w_2{}^2\big)\Big) \quad (4.40)$$

(4.40) daki eşitlikler alınarak (4.36) denkleminde yerine yazıldığında (4.35) denkleminin aşağıdaki gibi iki farklı çözümü elde edilir.

1.durum: $\eta_1 = \sin(\xi_1)\,, \eta_2 = \sinh(\xi_2)$ olarak seçilirse

$$f(x,y,z,t) = \mathrm{A}\sin\Bigg(k_1x - \frac{(k_1{}^3w_1+k_1{}^2k_2w_2+k_1{}^2w_1{}^2+k_1k_2{}^2w_1+2k_1k_2{}^2w_1w_2+k_2{}^3w_2+k_2{}^2w_2{}^2)y}{(k_1{}^4+2k_1{}^2k_2{}^2+k_2{}^4)k_1} + \big(k_1{}^6w_1 + 4k_1{}^5w_2k_2 + k_1{}^5w_1{}^2 - 2k_1{}^4k_2{}^2w_1 + 8k_1{}^4k_2w_1w_2 + 4k_1{}^3k_2{}^3w_2 - 6k_1{}^3k_2{}^2w_1{}^2 + 4k_1{}^3k_2{}^2w_2{}^2 - 3k_1{}^2k_2{}^4w_1 - 3k_1k_2{}^4w_1{}^2 + 3k_2{}^3w_1{}^2 + 3k_1{}^2k_2w_1w_2 + 3k_1{}^2w_1{}^3 + 3k_1k_2{}^2w_1{}^2 + 6k_1k_2w_1{}^2w_2 + 3k_2{}^3w_1w_2 + 3k_2{}^2w_1w_2{}^2\big)t/2\big(k_1{}^3w_1 + k_1{}^2k_2w_2 + k_1{}^2w_1{}^2 + k_1k_2{}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + k_2{}^3w_2 + k_2{}^2w_2{}^2\big) + w_1z + c_1\Bigg) + Bsinh\Bigg(k_2x + \frac{(k_1{}^3w_1+k_1{}^2k_2w_2+k_1{}^2w_1{}^2+k_1k_2{}^2w_1+2k_1k_2w_1w_2+k_2{}^3w_2+k_2{}^2w_2{}^2)y}{(k_1{}^4+2k_1{}^2k_2{}^2+k_2{}^4)k_2} + \big(3k_1{}^4k_2{}^2w_2 + 3k_1{}^4k_2w_2{}^2 - 4k_1{}^3k_2{}^3w_1 + 2k_1k_2{}^4w_2 - 4k_1{}^2k_2{}^3w_1{}^2 + 6k_1{}^2k_2{}^3w_1{}^2 - 4k_1k_2{}^5w_1 - 8k_1k_2{}^4w_1w_2 - k_2{}^6w_2 - k_2{}^5w_2{}^2 + 3k_1{}^3w_1w_2 + 3k_1{}^2k_2w_2{}^2 + 3k_1{}^2w_2w_1{}^2 + 3k_1k_2{}^2w_1w_2 + 6k_1k_2w_1w_2{}^2 + 3k_2{}^3w_2{}^2 + 3k_2{}^2w_2{}^3\big)t/2\big(k_1{}^3w_1 + k_1{}^2k_2w_2 + k_1{}^2w_1{}^2 + k_1k_2{}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + k_2{}^3w_2 + k_2{}^2w_2{}^2\big) + w_2z + c_2\Bigg)$$

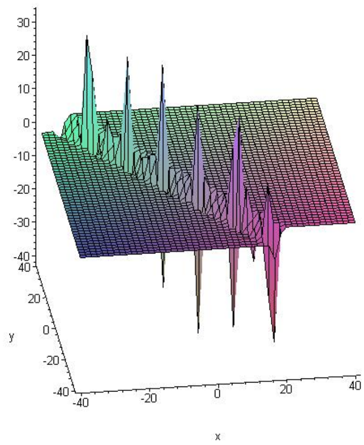
(4.41)

2.durum: $\eta_1 = \cos(\xi_1)\,, \eta_2 = \sinh(\xi_2)$ olarak seçilirse

$$f(x,y,z,t) = \mathrm{A}\cos\Bigg(k_1x - \frac{(k_1{}^3w_1+k_1{}^2k_2w_2+k_1{}^2w_1{}^2+k_1k_2{}^2w_1+2k_1k_2{}^2w_1w_2+k_2{}^3w_2+k_2{}^2w_2{}^2)y}{(k_1{}^4+2k_1{}^2k_2{}^2+k_2{}^4)k_1} +$$
$$\big(k_1{}^6w_1 + 4k_1{}^5w_2k_2 + k_1{}^5w_1{}^2 - 2k_1{}^4k_2{}^2w_1 + 8k_1{}^4k_2w_1w_2 + 4k_1{}^3k_2{}^3w_2 -$$
$$6k_1{}^3k_2{}^2w_1{}^2 + 4k_1{}^3k_2{}^2w_2{}^2 - 3k_1{}^2k_2{}^4w_1 - 3k_1k_2{}^4w_1{}^2 + 3k_2{}^3w_1{}^2 + 3k_1{}^2k_2w_1w_2 +$$
$$3k_1{}^2w_1{}^3 + 3k_1k_2{}^2w_1{}^2 + 6k_1k_2w_1{}^2w_2 + 3k_2{}^3w_1w_2 + 3k_2{}^2w_1w_2{}^2\big)t/2\big(k_1{}^3w_1 +$$
$$k_1{}^2k_2w_2 + k_1{}^2w_1{}^2 + k_1k_2{}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + k_2{}^3w_2 + k_2{}^2w_2{}^2\big) + w_1z + c_1\Bigg) +$$
$$B\sinh\Bigg(k_2x + \frac{(k_1{}^3w_1+k_1{}^2k_2w_2+k_1{}^2w_1{}^2+k_1k_2{}^2w_1+2k_1k_2w_1w_2+k_2{}^3w_2+k_2{}^2w_2{}^2)y}{(k_1{}^4+2k_1{}^2k_2{}^2+k_2{}^4)k_2} +$$
$$\big(3k_1{}^4k_2{}^2w_2 + 3k_1{}^4k_2w_2{}^2 - 4k_1{}^3k_2{}^3w_1 + 2k_1k_2{}^4w_2 - 4k_1{}^2k_2{}^3w_1{}^2 + 6k_1{}^2k_2{}^3w_1{}^2 -$$
$$4k_1k_2{}^5w_1 - 8k_1k_2{}^4w_1w_2 - k_2{}^6w_2 - k_2{}^5w_2{}^2 + 3k_1{}^3w_1w_2 + 3k_1{}^2k_2w_2{}^2 +$$
$$3k_1{}^2w_2w_1{}^2 + 3k_1k_2{}^2w_1w_2 + 6k_1k_2w_1w_2{}^2 + 3k_2{}^3w_2{}^2 + 3k_2{}^2w_2{}^3\big)t/2\big(k_1{}^3w_1 +$$
$$k_1{}^2k_2w_2 + k_1{}^2w_1{}^2 + k_1k_2{}^2w_1 + 2k_1k_2w_1w_2 + k_2{}^3w_2 + k_2{}^2w_2{}^2\big) + w_2z + c_2\Bigg)$$

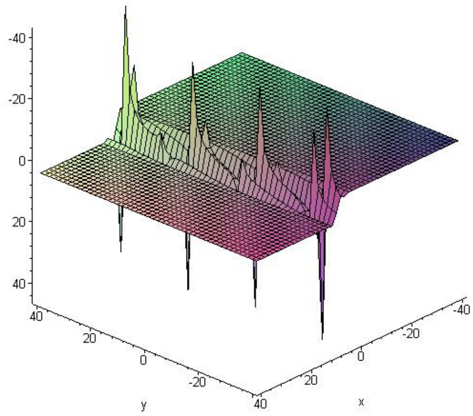
(4.42)

(4.41) çözümüne $u = 2\,(ln\,f)_x$ dönüşümü yapılarak elde edilen $u(x,y,z,t)$ çözümünün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.9. $w_1 = 1.3,\ w_2 = 1.2,\ k_1 = 2.3,\ k_2 = 1.3,\ c_1 = 3.2,\ c_2 = 1.4, A = 2.7, B = 2.1,\ z = 1.4, t = 2.8$

(4.42) çözümüne $u = 2\,(ln\, f)_x$ dönüşümü uygulanarak elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.10. $w_1 = -2,\ w_2 = -0.2,\ k_1 = 1.8,\ k_2 = 2.1,\ c_1 = -0.4,\ c_2 = 1.2, A = 1.6, B = -0.1,\ z = 2.3, t = 1.4$

4.2.3. Genişletilmiş Dönüştürülmüş Rasyonel Fonksiyon Metodunun Genişletilmiş $(3 + 1)$ Boyutlu İkinci Tip Jimbo-Miwa Denklemine Uygulanması

Genişletilmiş (3+1) boyutlu ikinci tip Jimbo Miwa denkleminin bilineer formu

$$({D_x}^3 D_y + 2({D_x} D_t + D_t D_y + D_z D_t) - 3 D_x D_z)(f.f) = 2f_{xxxy}f - 2f_{xxx}f_y - 6f_{xxy}f_x + 6f_{xy}f_{xx} + 4f_{xt}f - 4f_x f_t + 4f_{yt}f - 4f_y f_t + 4f_{zt}f - 4f_z f_t - 6f_{xz}f + 6f_x f_z = 0 \tag{4.43}$$

şeklinde verilir.(Wazwaz, 2017).

(4.43) eşitliğinde

$$f(x,y,z,t) = A\eta_1 + B\eta_2 \tag{4.44}$$

olarak seçilir. (4.33), (4.34) ve

$$\xi_1 = k_1x + l_1y + w_1z + m_1t + c_1$$

$$\xi_2 = k_2x + l_2y + w_2z + m_2t + c_2 \tag{4.45}$$

eşitlikleri kabul edilerek, (4.44) denklemi (4.43) denklemine yerleştirilir. Daha sonra elde edilen denklemde

$$\eta_1'^2 = 1 - \eta_1^2, \quad \eta_2'^2 = 1 + \eta_2^2 \tag{4.46}$$

olarak kabul edilerek $\eta_1^2, \eta_2^2, \eta_1\eta_2, \eta_1'\eta_2'$ terimlerinin bir polinom formu olarak yazılabilir. $\eta_1^2, \eta_2^2, \eta_1\eta_2, \eta_1'\eta_2'$ terimlerinin katsayıları ve sabit terim sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$2ABk_1^3l_1 - 6ABk_1^2k_2l_2 - 6ABk_1k_2^2l_1 + 2ABk_2^3l_2 - 4ABk_1m_1 + 6ABk_1m_1 +$$
$$4ABk_2m_2 - 6ABk_2w_2 - 4ABm_1l_1 + 4ABl_2m_2 - 4ABm_1w_1 + 4ABm_2w_2 = 0$$

$$2ABk_1^3l_2 + 6ABbk_2k_1^2l_1 - 6ABk_1k_2^2l_2 - 2ABk_2^3l_1 - 4ABk_1m_2 + 6ABk_1w_2 -$$
$$4ABk_2m_1 + 6ABk_2w_1 - 4ABl_1m_2 - 4ABl_2m_1 - 4ABm_1w_2 - 4ABm_2w_1 = 0$$

$$8A^2 l_1 {k_1}^3 - 8B^2 l_2 {k_2}^3 - 4A^2 k_1 m_1 + 6A^2 k_1 w_1 - 4A^2 l_1 m_1 - 4A^2 m_1 w_1 \quad 4B^2 k_2 m_2 + 6B^2 k_2 w_2 - 4B^2 l_2 m_2 - 4B^2 m_2 w_2 = 0 \tag{4.47}$$

(4.47)' deki cebirsel denklemler sistemi çözüldüğünde, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$m_2 = 3\frac{k_2}{2}$$

$$w_1 = -(12A^2 {k_1}^5 l_1 - 4A^2 {k_1}^3 {k_2}^2 l_1 - 4B^2 {k_1}^3 {k_2}^2 l_1 + 12B^2 k_1 {k_2}^4 l_1 - 12A^2 {k_1}^3 l_1 - 6A^2 {k_1}^3 m_1 - 6A^2 {k_1}^2 l_1 m_1 + 2A^2 k_1 {k_2}^2 m_1 + 2A^2 {k_2}^2 l_1 m_1 - 3B^2 {k_1}^3 l_1 - 9B^2 {k_1}^2 {k_2}^2 + 9B^2 k_1 {k_2}^2 l_1 + 8B^2 k_1 {k_2}^2 m_1 - 9B^2 {k_2}^4 + 8B^2 {k_2}^2 l_1 m_1 + 6A^2 k_1 m_1 + 6A^2 l_1 m_1 + 6B^2 k_1 m_1 + 6B^2 l_1 m_1)/((3A^2 {k_1}^2 - A^2 {k_2}^2 - 4B^2 {k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)(3k_1 - 2m_1)$$

$$w_2 = (3A^2 {k_1}^6 l_1 - 15A^2 {k_1}^4 {k_2}^2 l_1 - 3A^2 {k_1}^2 {k_2}^4 l_1 - A^2 {k_2}^6 l_1 + 12B^2 {k_1}^2 {k_2}^4 l_1 - 4B^2 {k_2}^6 l_1 + 6A^2 {k_1}^3 {k_2}^2 - 6A^2 {k_1}^3 l_1 m_1 + 18A^2 {k_1}^2 {k_2}^2 l_1 + 6A^2 {k_1}^2 {k_2}^2 m_1 + 6A^2 k_1 {k_2}^4 - 6A^2 k_1 {k_2}^2 l_1 m_1 - 6A^2 {k_2}^4 l_1 - 2A^2 {k_2}^4 m_1 - 3B^2 {k_1}^3 {k_2}^2 + 9B^2 {k_1}^2 {k_2}^2 l_1 - 3B^2 k_1 {k_2}^4 - 15B^2 {k_2}^4 l_1 - 8B^2 {k_2}^4 m_1 - 9A^2 k_1 {k_2}^2 - 9A^2 {k_2}^2 l_1 - 9B^2 k_1 {k_2}^2 - 9B^2 {k_2}^2 l_1)/\left(k_2(3A^2 {k_1}^2 - A^2 {k_2}^2 - 4B^2 {k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)(3k_1 - 2m_1)\right)$$

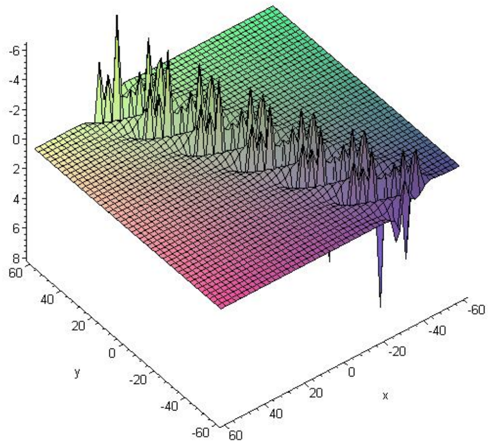
$$l_2 = 3(A^2 {k_1}^3 l_1 + A^2 k_1 {k_2}^2 l_1 - A^2 {k_2}^2 - B^2 {k_2}^2)/k_2(3A^2 {k_1}^2 - A^2 {k_2}^2 - 4B^2 {k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2) \tag{4.48}$$

(4.48) daki eşitlikler alınarak (4.44) denkleminde yerine yazıldığında ve uygun η_1, η_2 seçildiğinde (4.43) denkleminin aşağıdaki çözümü elde edilir.

1.durum: $\eta_1 = \sin(\xi_1)\,, \eta_2 = \sinh(\xi_2)$ olarak seçilirse

$$f(x,y,z,t) = -A sin\Big(-k_1 x + l_1 y - m_1 t + \big(12A^2 {k_1}^5 l_1 - 4A^2 {k_1}^3 {k_2}^2 l_1 - 4B^2 {k_1}^3 {k_2}^2 l_1 + 12B^2 k_1 {k_2}^4 l_1 - 12A^2 {k_1}^3 l_1 - 6A^2 {k_1}^3 m_1 - 6A^2 {k_1}^2 l_1 m_1 + 2A^2 k_1 {k_2}^2 m_1 + 2A^2 {k_2}^2 l_1 m_1 - 3B^2 {k_1}^3 l_1 - 9B^2 {k_1}^2 {k_2}^2 + 9B^2 k_1 {k_2}^2 l_1 + 8B^2 k_1 {k_2}^2 m_1 - 9B^2 {k_2}^4 + 8B^2 {k_2}^2 l_1 m_1 + 6A^2 k_1 m_1 + 6A^2 l_1 m_1 + 6B^2 k_1 m_1 + 6B^2 l_1 m_1\big) z / \big((3A^2 {k_1}^2 - A^2 {k_2}^2 - 4B^2 {k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)(3k_1 - 2m_1)\big) - c_1\Big) + B\, sinh\Bigg(k_2 x - \frac{3\big(A^2 {k_1}^3 l_1 + A^2 k_1 {k_2}^2 l_1 - A^2 {k_2}^2 - B^2 {k_2}^2\big) y}{k_2\big(3A^2 {k_1}^2 - A^2 {k_2}^2 - 4B^2 {k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2\big)} + 3\frac{k_2 t}{2} + (3A^2 {k_1}^6 l_1 - 15A^2 {k_1}^4 {k_2}^2 l_1 - 3A^2 {k_1}^2 {k_2}^4 l_1 - A^2 {k_2}^6 l_1 + 12B^2 {k_1}^2 {k_2}^4 l_1 - 4B^2 {k_2}^6 l_1 + 6A^2 {k_1}^3 {k_2}^2 - 6A^2 {k_1}^3 l_1 m_1 + 18A^2 {k_1}^2 {k_2}^2 l_1 + 6A^2 {k_1}^2 {k_2}^2 m_1 + 6A^2 k_1 {k_2}^4 - 6A^2 k_1 {k_2}^2 l_1 m_1 - 6A^2 {k_2}^4 l_1 - 2A^2 {k_2}^4 m_1 - 3B^2 {k_1}^3 {k_2}^2 + 9B^2 {k_1}^2 {k_2}^2 l_1 - 3B^2 k_1 {k_2}^4 - 15B^2 {k_2}^4 l_1 - 8B^2 {k_2}^4 m_1 - 9A^2 k_1 {k_2}^2 - 9A^2 {k_2}^2 l_1 - 9B^2 k_1 {k_2}^2 - 9B^2 {k_2}^2 l_1) z / (k_2(3A^2 {k_1}^2 - A^2 {k_2}^2 - 4B^2 {k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)(3k_1 - 2m_1)) + c_2\Bigg) \tag{4.49}$$

(4.49) eşitliğine $u = 2\,(\ln f)_x$ dönüşümü yapılarak elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.

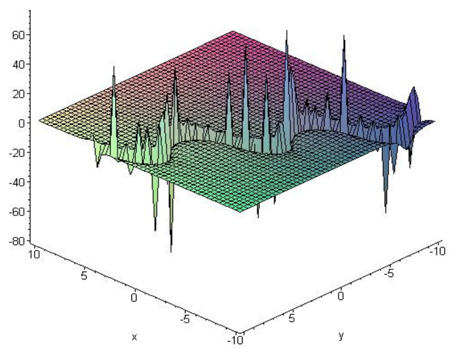


Şekil 4.11. $k_1 = 0.2,\ k_2 = 0.3,\ c_1 = 1.8,\ c_2 = 0.9,\ A = 1.7,\ B = 0.8,\ z = 0.2,\ m_1 = 1.4,\ l_1 = 2.1,\ t = 2.9$

2.durum: $\eta_1 = \cos(\xi_1)\,,\eta_2 = \sinh(\xi_2)$ olarak seçilirse

$$f(x,y,z,t) = -A\,cos(-k_1x - l_1y - m_1t + (12A^2{k_1}^5l_1 - 4A^2{k_1}^3{k_2}^2l_1 - 4B^2{k_1}^3{k_2}^2l_1 + 12B^2k_1{k_2}^4l_1 - 12A^2{k_1}^3l_1 - 6A^2{k_1}^3m_1 - 6A^2{k_1}^2l_1m_1 + 2A^2k_1{k_2}^2m_1 + 2A^2{k_2}^2l_1m_1 - 3B^2{k_1}^3l_1 - 9B^2{k_1}^2{k_2}^2 + 9B^2k_1{k_2}^2l_1 + 8B^2k_1{k_2}^2m_1 - 9B^2{k_2}^4 + 8B^2{k_2}^2l_1m_1 + 6A^2k_1m_1 + 6A^2l_1m_1 + 6B^2k_1m_1 + 6B^2l_1m_1)z/((3A^2{k_1}^2 - A^2{k_2}^2 - 4B^2{k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)(3k_1 - 2m_1)) - c_1) + B\,sinh\Big(k_2x - \frac{3(A^2{k_1}^3l_1 + A^2k_1{k_2}^2l_1 - A^2{k_2}^2 - B^2{k_2}^2)y}{k_2(3A^2{k_1}^2 - A^2{k_2}^2 - 4B^2{k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)} + 3\frac{k_2t}{2} + (3A^2{k_1}^6l_1 - 15A^2{k_1}^4{k_2}^2l_1 - 3A^2{k_1}^2{k_2}^4l_1 - A^2{k_2}^6l_1 + 12B^2{k_1}^2{k_2}^4l_1 - 4B^2{k_2}^6l_1 + 6A^2{k_1}^3{k_2}^2 - 6A^2{k_1}^3l_1m_1 + 18A^2{k_1}^2{k_2}^2l_1 + 6A^2{k_1}^2{k_2}^2m_1 + 6A^2k_1{k_2}^4 - 6A^2k_1{k_2}^2l_1m_1 - 6A^2{k_2}^4l_1 - 2A^2{k_2}^4m_1 - 3B^2{k_1}^3{k_2}^2 + 9B^2{k_1}^2{k_2}^2l_1 - 3B^2k_1{k_2}^4 - 15B^2{k_2}^4l_1 - 8B^2{k_2}^4m_1 - 9A^2k_1{k_2}^2 - 9A^2{k_2}^2l_1 - 9B^2k_1{k_2}^2 - 9B^2{k_2}^2l_1)z/(k_2(3A^2{k_1}^2 - A^2{k_2}^2 - 4B^2{k_2}^2 - 3A^2 - 3B^2)(3k_1 - 2m_1)) + c_2\Big) \tag{4.50}$$

(4.50) eşitliğine $u = 2\,(\ln f)_x$ dönüşümü yapılarak elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.12. $k_1 = 0.1,\ k_2 = 0.8,\ c_1 = 0.7,\ c_2 = 0.5,\ A = 0.8,\ B = 0.4,\ z = 1.2,\ l_1 = 0.8,\ m_1 = -0.5,\ t = 0.1$

4.2.4. Genişletilmiş Dönüştürülmüş Rasyonel Fonksiyon Metodunun (2+1) Boyutlu BKP Denkleminin Yeni Formuna Uygulanması

(2+1) boyutlu yeni tip BKP denklemin bilineer formu

$$(D_x{}^3 D_y + 2D_x D_t + D_t D_y - 2D_x D_x - D_y D_y)(f.f) = 2f_{xxxy}f - 2f_{xxx}f_y - 6f_{xxy}f_x + 6f_{xy}f_{xx} + 4f_{xt}f - 4f_x f_t + 2f_{yt}f - 2f_y f_t - 4f_{xx}f + 4f_x{}^2 - 2f_{yy}f + 2f_y{}^2 \tag{4.51}$$

şeklinde verilir (Kaur ve Wazwaz, 2019). (4.51) eşitliğinde

$$f(x,y,t) = A\eta_1 + B\eta_2 \tag{4.52}$$

şeklinde bir fonksiyon olarak kabul edilir. Aynı zamanda yukarıdaki denklem (2+1) boyutlu bir denklem olduğu için

$$\begin{aligned} \xi_1 &= k_1 x + l_1 y + m_1 t + c_1 \\ \xi_2 &= k_2 x + l_2 y + m_2 t + c_2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

olarak seçilir. (4.33), (4.34) eşitlikleri kabul edilerek, (4.52) denklemi (4.51)’ e yerleştirilir. Daha sonra bulunan denklemde,

$$\eta_1{}'^2 = 1 - \eta_1{}^2, \quad \eta_2{}'^2 = 1 + \eta_2{}^2, \tag{4.54}$$

olarak kabul edilerek elde edilen son denklem $\eta_1{}^2, \eta_2{}^2, \eta_1\eta_2, \eta_1{}'\eta_2{}'$ terimlerinin bir polinom formu olarak yazılabilir. $\eta_1{}^2, \eta_2{}^2, \eta_1\eta_2, \eta_1{}'\eta_2{}'$ terimlerinin katsayıları ve sabit terim sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$2ABk_1{}^3l_1 - 6ABk_1{}^2k_2l_2 - 6ABk_1k_2{}^2l_1 + 2ABk_2{}^3l_2 + 4ABk_1{}^2 - 4ABk_1m_1 - 4ABk_2{}^2 + 4ABk_2m_2 + 2ABl_1{}^2 + 2ABl_1m_1 - 2ABl_2{}^2 - 2ABl_2m_2 = 0$$

$$2ABk_1{}^3l_2 + 6ABk_1{}^2k_2l_1 - 6ABk_1k_2{}^2l_2 - 2ABk_2{}^3l_1 + 8ABk_1k_2 - 4ABk_1m_2 - 4ABk_2m_1 + 4ABl_1l_2 + 2ABl_1m_2 + 2ABl_2m_1 = 0$$

$$8A^2k_1{}^3l_1 - 8B^2k_2{}^2l_2 + 4A^2k_1{}^2 - 4A^2k_1m_1 + 2A^2l_1{}^2 + 2A^2l_1m_1 - 4B^2k_2{}^2 - 4B^2k_2m_2 + 2B^2k_2m_2 + 2B^2l_2{}^2 + 2B^2l_2m_2 = 0 \qquad (4.55)$$

(4.55)' deki cebirsel denklemler sistemi çözüldüğünde, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$l_1 = \frac{2k_2{}^2\left(3A^2k_1{}^2 - A^2k_2{}^2 - 4B^2k_2{}^2 - 3A^2 - 3B^2\right)}{3A^2k_1\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)}$$

$$l_2 = -2k_2$$

$$m_1 = \left(36A^4k_1{}^8k_2{}^2 + 24A^2k_1{}^6k_2{}^4 - 12A^2k_1{}^4k_2{}^6 - 12A^2B^2k_1{}^6k_2{}^4 + 24A^2B^2k_1{}^4k_2{}^6 + 36A^2B^2k_1{}^2k_2{}^8 + 9A^4k_1{}^8 - 18A^4k_2{}^2k_1{}^6 - 9A^4k_1{}^4k_2{}^4 - 12A^4k_1{}^2k_2{}^6 + 2A^4k_2{}^8 - 9A^2B^2k_1{}^6k_2{}^2 + 18A^2B^2k_1{}^4k_2{}^4 - 21k_1{}^4k_2{}^6 + 16A^2B^2k_2{}^8 + 32B^4k_2{}^8 - 36A^4k_1{}^2k_2{}^4 + 12A^4k_2{}^6 - 36A^2B^2k_1{}^2k_2{}^4 + 60A^2B^2k_2{}^6 + 48B^4k_2{}^6 + 18A^4k_2{}^4 + 36A^2B^2k_2{}^4 +\right.$$

$18B^4{k_2}^4\Big)/\Big(3k_1A^2\Big(3A^2{k_1}^4+6A^2{k_1}^2{k_2}^2-A^2{k_2}^4-4B^2{k_2}^4-3A^2{k_2}^2+$
$3B^2{k_2}^2\Big)\big({k_1}^2+{k_2}^2\big)\Big)$

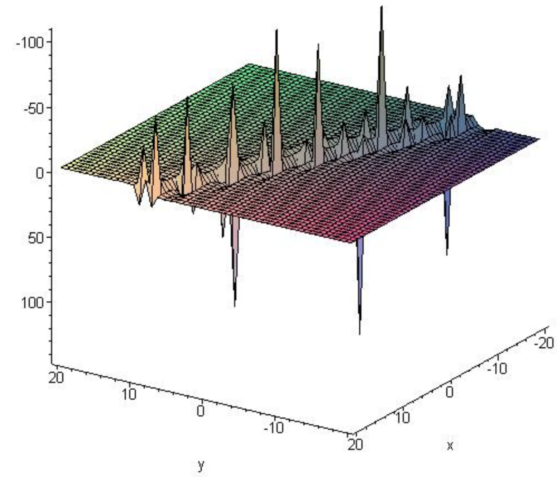
$$m_2=-k_2\Big(3A^2{k_1}^6-15A^2{k_1}^4{k_2}^2-3A^2k_1{k_2}^4-A^2{k_2}^6+12B^2{k_1}^2{k_2}^4-4B^2{k_2}^6-6A^2{k_1}^4+15A^2{k_1}^2{k_2}^2-7A^2{k_2}^4+9B^2{k_1}^2{k_2}^2-19B^2{k_2}^4-12A^2{k_2}^2-12B^2{k_2}^2\Big)/\Big(3A^2{k_1}^4+6A^2{k_1}^2{k_2}^2-A^2{k_2}^4-4B^2{k_2}^4-3A^2{k_2}^2+3B^2{k_2}^2\Big) \tag{4.56}$$

(4.56)' daki eşitlikler alınarak (4.52) denkleminde yerine yazıldığında ve uygun η_1,η_2 seçildiğinde (4.51) denkleminin iki farklı çözümü elde edilir.

1.durum: $\eta_1=\sin(\xi_1),\eta_2=\sinh(\xi_2)$ olarak seçilirse

$$f(x,y,t)=Asin\Big(k_1x\sin(+\frac{2{k_2}^2(3A^2{k_1}^2-A^2{k_2}^2-4B^2{k_2}^2-3A^2-3B^2)y}{3A^2k_1({k_1}^2+{k_2}^2)}+(36A^4{k_1}^8{k_2}^2+24A^2{k_1}^6{k_2}^4-12A^2{k_1}^4{k_2}^6-12A^2B^2{k_1}^6{k_2}^4+24A^2B^2{k_1}^4{k_2}^6+36A^2B^2{k_1}^2{k_2}^8+9A^4{k_1}^8-18A^4{k_2}^2{k_1}^6-9A^4{k_1}^4{k_2}^4-12A^4{k_1}^2{k_2}^6+2A^4{k_2}^8-9A^2B^2{k_1}^6{k_2}^2+18A^2B^2{k_1}^4{k_2}^4-21{k_1}^4{k_2}^6+16A^2B^2{k_2}^8+32B^4{k_2}^8-36A^4{k_1}^2{k_2}^4+12A^4{k_2}^6-36A^2B^2{k_1}^2{k_2}^4+60A^2B^2{k_2}^6+48B^4{k_2}^6+18A^4{k_2}^4+36A^2B^2{k_2}^4+18B^4{k_2}^4)t/(3k_1A^2(3A^2{k_1}^4+6A^2{k_1}^2{k_2}^2-A^2{k_2}^4-4B^2{k_2}^4-3A^2{k_2}^2+3B^2{k_2}^2)({k_1}^2+{k_2}^2)+c_1\Big)-B\sinh(-k_2x+2k_2y+k_2(3A^2{k_1}^6-15A^2{k_1}^4{k_2}^2-3A^2k_1{k_2}^4-A^2{k_2}^6+12B^2{k_1}^2{k_2}^4-4B^2{k_2}^6-6A^2{k_1}^4+15A^2{k_1}^2{k_2}^2-7A^2{k_2}^4+9B^2{k_1}^2{k_2}^2-19B^2{k_2}^4-12A^2{k_2}^2-12B^2{k_2}^2)/(\big(3A^2{k_1}^4+6A^2{k_1}^2{k_2}^2-A^2{k_2}^4-4B^2{k_2}^4-3A^2{k_2}^2+3B^2{k_2}^2\big)-c_2) \tag{4.57}$$

(4.57) denklemine $u = \frac{6}{\alpha}(\ln f(x,y,t))_x$ dönüşümü uygulanarak elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.

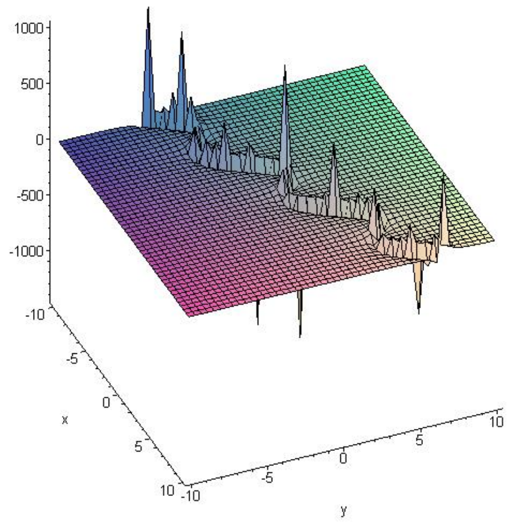


Şekil 4.13. $k_1 = 0.1,\ k_2 = 0.4,\ c_1 = 0.7,\ c_2 = 0.6,\ A = 0.9,\ B = 1,\ \alpha = 0.8,\ t = 1.1$

2.durum: $\eta_1 = \cos(\xi_1)\,, \eta_2 = \sinh(\xi_2)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
f(x,y,t) &= A\cos\Big(k_1x + \frac{2k_2^2(3A^2k_1^2 - A^2k_2^2 - 4B^2k_2^2 - 3A^2 - 3B^2)y}{3A^2k_1(k_1^2+k_2^2)} + (36A^4k_1^8k_2^2 + \\
&24A^2k_1^6k_2^4 - 12A^2k_1^4k_2^6 - 12A^2B^2k_1^6k_2^4 + 24A^2B^2k_1^4k_2^6 + 36A^2B^2k_1^2k_2^8 + \\
&9A^4k_1^8 - 18A^4k_2^2k_1^6 - 9A^4k_1^4k_2^4 - 12A^4k_1^2k_2^6 + 2A^4k_2^8 - 9A^2B^2k_1^6k_2^2 + \\
&18A^2B^2k_1^4k_2^4 - 21k_1^4k_2^6 + 16A^2B^2k_2^8 + 32B^4k_2^8 - 36A^4k_1^2k_2^4 + 12A^4k_2^6 - \\
&36A^2B^2k_1^2k_2^4 + 60A^2B^2k_2^6 + 48B^4k_2^6 + 18A^4k_2^4 + 36A^2B^2k_2^4 + 18B^4k_2^4)t/ \\
&\Big(3k_1A^2\big(3A^2k_1^4 + 6A^2k_1^2k_2^2 - A^2k_2^4 - 4B^2k_2^4 - 3A^2k_2^2 + 3B^2k_2^2\big)\Big) + c_1\Big) - \\
&-B\sinh\big(-k_2x + 2k_2y + k_2\big(3A^2k_1^6 - 15A^2k_1^4k_2^2 - 3A^2k_1k_2^4 - A^2k_2^6 + \\
&12B^2k_1^2k_2^4 - 4B^2k_2^6 - 6A^2k_1^4 + 15A^2k_1^2k_2^2 - 7A^2k_2^4 + 9B^2k_1^2k_2^2 - 19B^2k_2^4 - \\
&12A^2k_2^2 - 12B^2k_2^2\big)t/(3A^2k_1^4 + 6A^2k_1^2k_2^2 - A^2k_2^4 - 4B^2k_2^4 - 3A^2k_2^2 + \\
&3B^2k_2^2) - c_2\big) \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

(4.58) denklemine $u = \frac{6}{\alpha}(\ln f(x, y, t))_x$ dönüşümü uygulanarak elde edilen çözümün grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.14. $k_1 = 1.1,\ k_2 = -0.4,\ c_1 = 1.7,\ c_2 = -0.6,\ A = 1,\ B = -1,\ \alpha = -0.3,\ t = 0$

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, literatürde yeni dalga çözümlerinden olan ve içerisinde hem trigonometrik hem de hiperbolik cinsten fonksiyon içeren kompleksiton çözümler elde edilmiştir. (3+1) boyutlu genişletilmiş birinci tip Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu genişletilmiş ikinci tip Jimbo-Miwa ve (2+1) boyutlu BKP denkleminin yeni formuna değiştirilmiş çiftli alt denklem metodu ve genişletilmiş dönüştürülmüş rasyonel fonksiyon metodu uygulanarak denklemlerin kompleksiton dalga çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen dalga çözümleri farklı zaman ve konum parametreleri için resmedilmiştir.

Tez kapsamında yapılan çalışmalar neticesinde toplamda 2 adet çalışma yapılmış, çeşitli bilimsel dergilere incelenmek üzere sunulmuştur. Şu anda yazım aşamasında olan bir diğer çalışma ise tamamlandığında ilgili bilimsel dergilere incelemek üzere gönderilecektir. Ayrıca iki adet bildiri uluslararası sempozyum ve konferanslarda sunulmak üzere hazırlanmıştır.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda, diğer kısmi diferensiyel denklemlerinde benzer metotlarla kompleksiton çözümleri bulunabileceği ve hali hazırda mevcut olan kompleksiton çözüm metotları genelleştirilmiş bilineer türevler ile yazılabilen denklemlere uygulanabileceği tavsiye edilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aksoy, Y., Özkan, M., 2017, Diferensiyel Denklemler, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi, s.2.

Bekir, A., Ünsal, Ö., 2012, Periodic and solitary wave solutions of coupled nonlinear wave equations using the first integral method, Physica Scripta, 85, 065003.

Bekir, A., Ünsal, Ö., 2015, The first integral method for exact solutions of nonlinear fractional differential equations, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 10, 021020-1.

Bekir, A., Taşcan, F., Özer, M.N., 2017, Complexiton solutions for two nonlinear partial differential equations via modification of simplified Hirota Method, Waves in Random and Complex Media, 27,1, 117-128.

Borluk, H., 2009, Uzun Dalga-Kısa Dalga Etkileşim Denklemleri: Yalnız Dalga Çözümlerinin Varlığı ve Yörüngesel Kararlılık, Doktora Tezi, İstanbul Üniverstesi Matematik Mühendisliği, 1 s.

Cariello, F., Tabor, M., 1989, Painleve expansions for nonintegrable evolution equations, Phys. D. 39, p.77-94.

Chen, Y., Wang, Q., 2005, Multiple Riccati equations rational expansion method and complexitons of the Whitham-Broer-Kaup Equation, Physics Letters A, 347, 215-227.

Chen, H.T.,. Yang, S.H., 2013, W.X. Ma, Double sub-equation method for complexiton solutions of nonlinear partial differential equations, Applied Mathematics and Computation, 219, 4775-4781

Demiray, S., Ünsal, Ö., Bekir, A., 2014, New exact solutions for boussinesq type equations by using (G'/G; 1/G) and (1/G')-expansion methods, Acta Physica Polonica A, 125, 1093-1098.

Fan, E.G., 2000, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, Physics Letters A, 277, 212-218.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Fuchssteiner, B., Carillo, S., 1992, A New class of Nonlinear Partial Differential Equations Solvable by Quadratures, B.Fuchssteiner W.A.J. Luxemburg (Eds.) Analysis and Geometry BJ Wissenschaftsverlag Mannheim, p.73-85.

Griffiths, G., W., 2012, Hirota Direct Method, City University UK, p.3.

Hossen, M.B., Roshid, H.O., Ali, M.Z., 2017, Modifed double sub-equation method for Finding complexiton solutions to the (1+1) dimensional nonlinear evolution equations, Int. J. Appl. Comput. Math., 3, 679-697

Hu, Hengchun & Tong, Sen-Yue, 2005, Nonsingular positon and complexiton solutions for the coupled KdV system, Physics Letters A, 351, 403-412.

Jawad, A., 2012, New Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations using Tan- Cot Function Method, Computer Engineering Technique Department Al - Rafidain University College, 5,2, 12-24.

Jing-Lİang, Z., Yue-Ming, W., Ming-Liang, W., Zong-De, F., 2003, New applications of the homogeneous balance principle, Department of Mathematics and Physics Henan University of Science and Technology, 12,3, 245-250.

J. Manafian, Novel solitary wave solutions for the (3+1)-dimensional extended Jimbo-Miwa equations, Computersand Mathematics with Applications, 76 (2018), 1246-1260.

J., 2018, Novel solitary wave solutions for the (3+1)-dimensional extended Jimbo-Miwa equations, Computers and Mathematics with Applications, 76 ,1246-1260.

Kaur, L., Wazwaz, A.M., 2019, Bright-Dark lump wave solutions for a new form of the (3+1) dimensional BKP-Boussinesq equation, Romanian Reports in Physics,71,p.102.

Koca, K., 2013, Kısmi Türevli Denklemler, Gazi Kitabevi, s.55.

Koç, A., 2009, Soliton Dalga Çözümlerinin İndirgenmiş Diferensiyel Dönüşüm MetoduylaAraştırılması ve Diğer Nümerik Çözümlerle Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniverstesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 4 s.

Kuzu, B., 2018, Zakharov-Kuznetsov Denkleminin $(G'/G,1/G)$ Açılım Metodunu Kullanarak Yürüyen Dalga Çözümlerinin Elde Edilmesi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniverstesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Li, W., Zhang, H., 2009, A New generalized compound Riccati equations rational expansion method to construct many new Eexact complexiton solutions of nonlinear evolution equations with symbolic computation, Chaos Solitonsand Fractals, 39, 2 2369-2377.

Li, W., Zhang, H., 2010, A Generalized sub-equatons rational expansion method for nonlinear evolution equations, Com-mun. Nonlinear Science Numer. Simulat., 15, 1454-1461.

Ma, W.X., 1993, Travelling wave solutions to a seventh order generalized KdV equation Phys. Lett. A,180, 221-224.

Ma, W.X., Fuchssteiner, B., 1996, Explicit and Exact solutions to a Kolmogorov-Petrovshii-Piskunov equation, Int. J.Non-linear Mech, 31, 329-338.

Ma, W.X., 2002, Complexiton solutions to the Kortweg-de Vries equation, Physics Letter A, 301, 35-44.

Ma, W.X., Maruno K.İ., 2004, Complexiton solutions of the Toda Lattice Equation, Physica A: Statistical mechanics and its applications, 343, 219-237

Ma, W.X., 2005, Complexiton solutions of the Korteweg–de Vries equation with self-consistent Sources, Chaos Solitons & Fractals, 26,5, 1453-1458.

Ma, W.X., 2005, Complexiton solutions to integrable equations, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 63,5-7, e2461-e2471.

Ma, W.X. , Lee, J.H., 2009, A transformed rational function method and exact solutions to the 3+1 dimensional Jimbo-Miwa equation, Chaos Solitons Fract. , 41, 1356-1363.

Ma, W.X., 2011, Generalized bilinear diferential equations, Studies in Nonlineer Sciences, 2, 140-144.

Parkes, E.J., Duffy, B.R., 1996, An Automated tanh-function method for finding solitary w wave solutions to Non-linear evolution equations, Comput. Phys. Commun, 98, 288-300.

Ramadan, A., 2016, Existence of Traveling Waves Solutions for Certain Nonlocal Wave Equations, Master of Science, Sabancı University, 1 p

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sevimli, E., 2016, Diferansiyel Denklemlerin öğreniminde yaşanan zorluklar ve alternatif öğretim yaklaşımları, Sakarya University Journal of Education, 6,2, 154-171.

Türkmen, Ç., 2019, Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlere Kudryashov Metodu ve Homojen Denge Metodunun Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 9 s.

Ünsal, Ö., 2016, Lineer Olmayan Denklemlerin İntegrallenebilirliği, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 33 s.

Ünsal, Ö., 2018, Complexiton solutions for (3+1) dimensional KdV-type equation, Computers and Mathematics withApplications, 75, 2466-2472.

Wang, M.L., 1995, Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, Phys. Lett. A, 199, 169-172.

Wazwaz, A.M., 2006, New solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara equations, Applied Mathematic Computer, 182, 1642-1650.

Wazwaz, A.M., 2007, The tanh-coth Method for Solitons and Kink solutions for nonlinear parabolic equations, Applied Mathematic Computer , 188, 1467-1475.

Wazwaz, A.M., Zhaqilao, 2013, Nonsingular complexiton solutions for two higher-dimensional fifth-order nonlinear integrable equations, The Royal Swedish Academy of Sciences, 88,2, 025001

Wazwaz, A.M., 2017, Multiple-soliton solutions for extended (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equations, Applied Mathematics Letters, 64 , 21-26.

Yhang, S.,H., Chen, H.T., 2013, Applications of the modified double sub-equation method to nonlinear partial differential equations, Physical Review & Research International, 3, 623-633.

Yıldırım, Y., Adem, A.,Yaşar, E., 2019, Extended transformed rational function method to nonlinear evolution equations, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 20,6.

Zhou, Y., Wang, M.L., Wang, Y.M., 2003, Periodic Wave Solutions to a Coupled KdV Equations with Variable Coefficients, Phys. Lett. A, 308, 31-36.

Zhang, S., Zhang, Q.,H., 2010, A transformed rational function method for (3+1)-dimensional potential Yu–Toda–Sasa–Fukuyama equation, 76,4, 561-571.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zhang, Z.Y., Zhong, J., Dou, S.S., Liu, J., Peng, D., vd., 2013, First Integral Method and Exact Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, Romanian Reports in Physics, 65,4, 1155-1169.

Zhang, H., Ma, W.X., 2014, Extended transformed rational function method and applications to complexiton solutions, Applied Mathematics and Computation, 230, 509-515.