

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzlem Geometrisi Üzerine

Selahattin Nazlı

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2020

On the $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Plane Geometry

Selahattin Nazlı

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

January 2020

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzlem Geometrisi Üzerine

Selahattin Nazlı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya Akça

Ocak 2020

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Selahattin Nazlı'nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “ $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzlem Geometrisi Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ziya Akça

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Mine Turan

Üye : Doç. Dr. Mustafa Saltan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum “ $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -**Düzlem Geometrisi Üzerine**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 30/01/2020

Selahattin Nazlı

ÖZET

Bu doktora tezi üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, ilk olarak \mathbb{R}^2 -düzleminde d_{π_n} -uzaklıkları cinsinden iso-taxicab fonksiyonları tanıtılmış. Iso-taxicab düzlemdeki bir noktanın $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki karşılıklarının nasıl bulunabileceği gösterilmiştir. Ayrıca \mathbb{R}^2 -düzleminde iso-taxicab uzaklıklar ve Öklidyen uzaklıklar arasındaki fonksiyonel ilişki verilmiştir. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki doğruların sınıflandırılması ve bir noktanın bir doğruya olan d_{π_3} uzaklığı elde edilmiştir. Son olarak, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde üçgenler için alan formülleri verilmiştir.

İkinci bölümde ise, genel olarak $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki trigonometriden bahsedilmiş olup, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde birim çember tanıtılmış ve buna bağlı olarak $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki trigonometrik fonksiyonlar, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Pisagor özdeşliği ve $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde trigonometrik indirgeme formülleri verilmiştir. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde açı ölçüsü ve referans açı tanımlanmış ve $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde uzunlukların dönmeler altındaki değişimleri elde edilmiştir. Son olarak $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iç-çarpım aracılığıyla açı ölçüsü tanımlanmıştır.

Son bölümde, Öklidyen geometride iyi bilinen Thales bağıntılarının, Menelaus teoreminin, Ceva teoreminin, iç açıortay teoreminin, dış açıortay teoreminin, Carnot teoreminin ve Öklid bağıntılarının $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonları sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Iso-taxicab geometri, Trigonometri, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemi, d_{π_3} -uzaklığı

SUMMARY

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, iso-taxicab functions were defined in terms of d_{π_n} —distances on \mathbb{R}^2 —plane. It was shown that how to obtain what a point on iso-taxicab plane correspond to a point on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$. The clasification of the lines of $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —plane and the shortest distance from a point to a line was obtain on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$. Finally the area formula of triangles were given on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$.

In the second chapter, generally it was mentioned about $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —plane trigonometry, then unit circle was defined on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ and correspondingly trigonometric functions, iso-taxicab Pythagoras identity and trigonometric reduction formulas were given $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$. The measures of angles and reference angle were defined on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$. It was obtain that change of the length of the line segment under rotations on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$.

Finally, the measures of angles were introduced by inner-product.

In the last chapter, the well-known theorems in Euclidean geometry which are Thales, Menelaus, Ceva, Carnot, inside and outside bisector, Euclidean theorems versions were shown on $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$.

Keywords: Iso-taxicab geometry, Trigonometry, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -plane, d_{π_3} -distance

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca tüm bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren çok değerli hocam **Prof. Dr. Ziya Akça**'ya, her zaman yanımda olan başta değerli annem **Hanife Nazlı**'ya, babam **Salih Nazlı**'ya ve tüm aileme teşekkürler.

Eskişehir, 2020
Selahattin Nazlı

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	2
3. ISO-TAXICAB VE $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$-DÜZLEM GEOMETRİ	6
3.1. \mathbb{R}^2 -Düzleminde d_{π_n} -Uzaklıkları Cinsinden Iso-taxicab Uzaklık Fonksiyonları	6
3.1.1. Iso-Taxicab Düzlemdeki Bir Noktanın $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzlemindeki Karşılığı	7
3.1.2. \mathbb{R}^2 -Düzleminde d_{π_3} Uzaklık ve Öklidyen Uzaklık Arasındaki Fonksiyonel İlişki	7
3.1.3. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Doğruların Sınıflandırılması	9
3.1.4. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı	9
3.1.5. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Üçgenler İçin Alan Formülleri	10
4. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$-DÜZLEMİNDE TRİGONOMETRİ	16
4.1. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminin Birim Çemberi	16
4.2. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Trigonometrik Fonksiyonlar	16
4.3. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Pisagor Özdeşiği	23
4.4. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Trigonometrik İndirgeme Formülleri	24
4.5. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Açılı Ölçüsü ve Referans Açılı	26
4.6. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Uzunlukların Dönemler Altındaki Değişimleri	40
4.7. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde İç Çarpım Aracılığıyla Açılı Ölçüsü Tanımlama	43
4.7.1. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Bir Vektörün Açısının Ölçüsünü İç Çarpım Aracılığıyla Tanımlama	46
5. ÜÇGENLERLE İLGİLİ BAZI TEOREMLERİN $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$-DÜZLEMİNDEKİ VERSİYONLARI	52
5.1. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Thales Bağlıları	52

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5.2. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Menelaus Teoremi	56
5.2.1. Yönlü $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Uzunluklar ve Bölme Noktası	57
5.3. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Ceva Teoremi	65
5.4. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde İç Açılırtay Teoremi	66
5.5. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Dış Açılırtay Teoremi	72
5.6. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Carnot Teoremi	78
5.7. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Öklid Bağlıntıları	85
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	104
KAYNAKLAR DİZİNİ	105
ÖZGEÇMİŞ	106

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Iso-taxicab düzlemde bölgeler	2
2.2 Iso-taxicab düzlemde birim çember	3
2.3 I-IV yönlendirmesi	3
2.4 II-V yönlendirmesi	4
2.5 III-VI yönlendirmesi	5
3.1 Bir noktanın iso-taxicab düzlem ve $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki koordinatları	7
3.2 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde doğrular	9
3.3 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde üçgenlerin taban eğimlerine bağlı sınıflandırma	11
3.4 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde üçgenlerin alanlarının sınıflandırması	15
4.1 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ birim çemberi	16
4.2 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iso-taxicab ve Öklidyen koordinatlar arasındaki ilişki	20
4.3 $y = \sin_I \theta$	23
4.4 $y = \cos_I \theta$	23
4.5 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir noktanın koordinatları	24
4.6 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde I. bölgede bir θ Öklidyen dar açısının ölçüsü	28
4.7 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde I. bölgede ψ Öklidyen referans açılı θ Öklidyen dar açısı	29
4.8 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde II. bölgede ψ Öklidyen referans açılı θ Öklidyen dar açısı	30
4.9 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde I. ve III. bölgede ψ Öklidyen referans açılı θ Öklidyen dar açısı	30
4.10 I. bölgede θ_I yay uzunluğu	31
4.11 II. bölgede θ_I yay uzunluğu	32
4.12 III. bölgede θ_I yay uzunluğu	33
4.13 IV. bölgede θ_I yay uzunluğu	34
4.14 V. bölgede θ_I yay uzunluğu	35
4.15 VI. bölgede θ_I yay uzunluğu	36
4.16 OA doğru parçasının θ açısı kadar döndürülmesi	40
4.17 ψ referans açılı OA doğru parçalarının Öklidyen trigonometrik fonksiyonlu gösterimi	41
4.18 ψ referans açılı OA doğru parçasının Öklidyen trigonometrik fonksiyonlu gösterimi	42
4.19 v, u, p vektörleri	46
4.20 Örnek 2	49
4.21 Örnek 3	50
4.22 Örnek 4	50
4.23 Örnek 5	51

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Sayfa

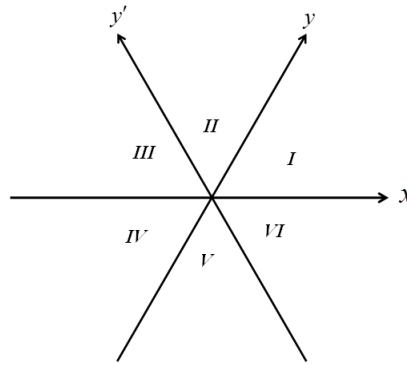
5.1	\mathbb{R}^2 de Thales bağıntıları	52
5.2	\mathbb{R}^2 de Thales bağıntılarında açı benzerlikleri	53
5.3	\mathbb{R}^2 de Menelaus teoremi	56
5.4	\mathbb{R}^2 de Menelaus teoremi için benzer üçgenler	57
5.5	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde Menelaus teoremi	63
5.6	\mathbb{R}^2 de Ceva teoremi gösterimi	65
5.7	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde Ceva teoremi gösterimi	66
5.8	\mathbb{R}^2 de iç açıortay	67
5.9	\mathbb{R}^2 de iç açıortayların kollarına indirilen dikmeler	68
5.10	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde iç açıortay	68
5.11	\mathbb{R}^2 de dış açıortay	73
5.12	\mathbb{R}^2 de dış açıortayın açıları	73
5.13	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ de dış açıortay	74
5.14	\mathbb{R}^2 de Carnot gösterimi	78
5.15	P noktasından üçgenin köşelerine çizilen doğru parçaları	79
5.16	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde P noktasından üçgenin köşelerine çizilen doğru parçaları	80
5.17	\mathbb{R}^2 —düzleminde bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikme	85
5.18	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ de bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikme	86
5.19	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde bir dik üçgenin hipotenüsüne bağlı sınıflandırma	87
5.20	$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde Öklid bağıntıları sınıflandırması	92

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Iso-taxicab geometri, K. O. Sowell (Sowel, 1989) tarafından 1989 yılında \mathbb{R}^2 -düzleminde alışık olduğumuz koordinat sisteminden farklı olarak, koordinat eksenlerinin x , y ve y' olarak isimlendirildiği ve ardışık eksenler arasında 60° lik açı oluşan bir koordinat sistemi ile ortaya atılmıştır. Sowell tarafından ortaya atılan bu geometride düzlemdeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık, noktaların düzlemdeki konumuna göre üç farklı uzaklık fonksiyonundan uygun olanı kullanılarak elde edilebiliyor. Iso-taxicab geometrinin Sowell tarafından ortaya atılan bu versiyonu gerek koordinat eksenlerinin ve gerekse uzaklık fonksiyonlarının fazlalığından dolayı üzerinde çalışılması bir nebze zor bir geometridir. A. Bayar ve R. Kaya'nın (Bayar ve Kaya, 2011) 2011 yılında sunduğu $\mathbb{R}_{\pi_n}^2$ -düzlemindeki uzaklıkların $n = 3$ hali olan iso-taxicab uzaklık fonksiyonu hem iso-taxicab düzlemdeki eksenleri \mathbb{R}^2 -düzleminde alışık olduğumuz koordinat sistemindeki x ve y eksenlerine indirgemiş hem de uzaklık fonksiyonu sayısını azaltmıştır. Bu özelliklerinden dolayı A. Bayar ve R. Kaya tarafından sunulan bu yeni versiyon iso-taxicab geometriyi daha anlaşılabilir ve üzerinde çalışılması daha kolay bir geometri haline getirmiştir. Çalışmanın amacı, iso-taxicab geometrinin bir takım problemlerine \mathbb{R}^2 -düzlemindeki alışık olduğumuz koordinat sistemi aracılığıyla yaklaşarak bu koordinat sisteminde çözümler üretmektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

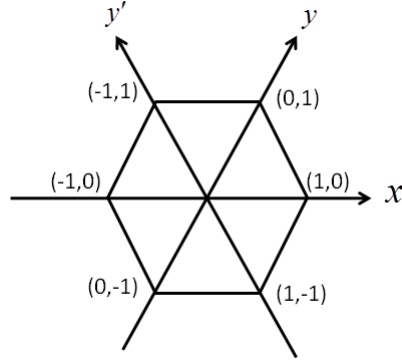
E. F. Krause (Krause, 1975) tarafından 1975 yılında, \mathbb{R}^2 -düzleminde $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ noktaları için $d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ uzaklık fonksiyonunu kullanarak taxicab geometri adını verdiği yeni bir geometri tanımlanmıştır. Taxicab geometri Öklidyen olmayan bir geometridir ve Öklid' in 13 aksiyomundan kenar-açı-kenar aksiyomunu sağlamaz. Gerçek şehir yaşamında geniş uygulama alanları olan bu geometri, Krause' nin ideal şehir adını verdiği bir şehirde yatay ve dikey yollarda yol alan bir taksinin hareketlerinden yola çıkarak ortaya atılmıştır. Taxicab geometrinin nokta ve doğruları Öklidyen geometrinin nokta ve doğruları ile aynıdır.



Şekil 2.1 Iso-taxicab düzlemde bölgeler

Taxicab geometriden hareketle K. O. Sowell (Sowell, 1989) tarafından 1989 yılında iso-taxicab geometri adını verdiği taxicab geometrinin yeni bir versiyonu sunuldu. Sowell tarafından sunulan iso-taxicab geometride A ve B noktalarının uygun pozisyonlarına bağlı olarak üç tane uzaklık fonksiyonu vardır. Ayrıca orjinden geçen ve x, y, y' olarak isimlendirilen üç eksen vardır. Burada ardışık eksenler arasında 60° lik açı oluşmaktadır. Bu üç eksen düzlemi hextant adı verilen altı adet bölgeye ayırır. Bu bölgeler saat yönünün tersi yönde ve nokta koordinatlarının ikisinde pozitiften başlamak üzere $I - VI$ ile numaralandırılır. Iso-taxicab düzlemde bir $A = (x_1, y_1)$ noktası x ve y -eksenleri ile sıralı bir şekilde gösterilir. Ayrıca Öklidyen, taxicab ve iso-taxicab geometrinin benzerlikleri ve farklılıkları Sowell tarafından belirtilmiştir. Örneğin, açı ölçümü uzaklık fonksiyonuna bağlı olmadığından açılar, hem taxicab hem de iso-taxicab geometride Öklidyen geometrideki gibi ölçülür. Özel olarak kenar-açı-kenar aksiyomu ne taxicab geometride ne de iso-taxicab geometride sağlanır. Taxicab çemberi karedir ve $\pi_T = 4$ tür. Iso-taxicab

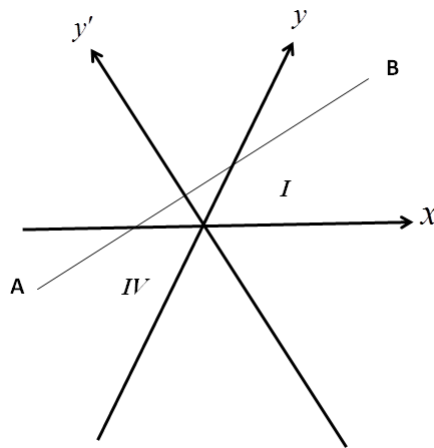
çemberi düzgün altıgendir ve iso-taxicab çemberinin çevresi yarıçapının 6 katı olduğundan $\pi_I = 3$ bulunur. (Şekil2.2) Iso-taxicab düzlemdeki herhangi bir noktadan eksenlere paralel



Şekil 2.2 Iso-taxicab düzlemde birim çember

üç doğru çizilebilir. Bu düzlemde alınan iki nokta ya $I - IV$ yönlendirmesine veya $II - V$ yönlendirmesine veya $III - VI$ yönlendirmesine sahiptir. Iso-taxicab geometri için üç uzaklık fonksiyonu şu şekilde verilir;

i) Düzlemdeki herhangi iki $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ noktası $I - IV$ yönlendirmesine sahip ise;

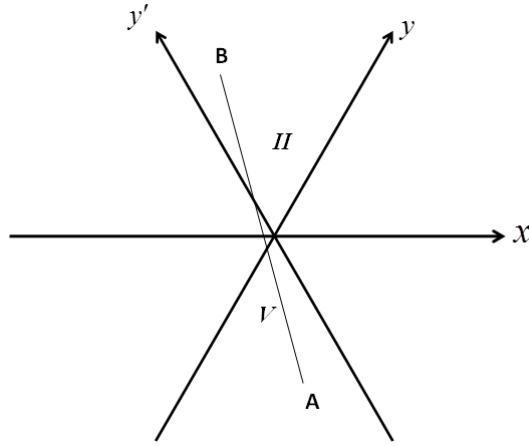


Şekil 2.3 I-IV yönlendirmesi

$$d_I(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

uzaklık fonksiyonu kullanılır.

ii) Düzlemdeki herhangi iki $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ noktası *II - V* yönlendirmesine sahip ise;



Şekil 2.4 II-V yönlendirmesi

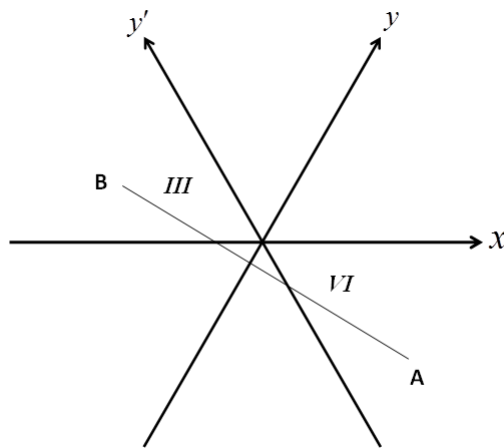
$$d_I(A, B) = |y_1 - y_2|$$

uzaklık fonksiyonu kullanılır.

iii) Düzlemdeki herhangi iki $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ noktası *III - VI* yönlendirmesine sahip ise;

$$d_I(A, B) = |y_1 - y_2|$$

uzaklık fonksiyonu kullanılır.



Şekil 2.5 III-VI yönlendirmesi

Ayrıca düzlemdeki herhangi iki nokta x -eksenine paralel bir doğru üzerinde bulunuyorsa (iii) ve düzlemdeki herhangi iki nokta y veya y' -eksenlerine paralel bir doğru üzerinde bulunuyorsa (ii) eşitlikleri kullanılır.

2000 yılında İ. Kocayusufoğlu (Kocayusufoğlu, 2002) tarafından iso-taxicab geometrinin trigonometrisi üzerine çalışmalar yapılmış ve iso-taxicab birim çemberi üzerindeki yay uzunlukları kullanılarak iso-taxicab sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant fonksiyonları ve iso-taxicab fark formülleri tanımlanmıştır. Sonraki yıllarda T. Ada (Ada, 2005) tarafından, *Iso – taxicab trigonometri üzerine* isimli doktora tezinde, iso-taxicab geometrinin indirgeme, toplam-fark, yarım açı formülleri gibi formüller yine birim çember üzerindeki yay uzunlukları cinsinden elde edilmiş, ayrıca Öklidyen düzlemde bilinen sinüs teoreminin, Pisagor teoreminin, paralelkenar kuralının, polarizasyon eşitliğinin iso-taxicab versiyonları ortaya konulmuş ve son olarak bir iso-taxicab trigonometri cetveli sunulmuştur (Ada, 2005).

Çalışmamızda, iso-taxicab geometriye yeni bir bakış açısı getirmek için iso-taxicab düzlemdeki noktaların \mathbb{R}^2 -düzlemindeki karşılıkları bulunmuş ve iso-taxicab düzlemdeki uzaklık fonksiyonlarının yerine, 2011 yılında A. Bayar ve R. Kaya (Bayar ve Kaya, 2011) tarafından verilen \mathbb{R}^2 -düzleminde d_{π_n} - uzaklıklarının ailesinin iso-taxicab metriği veren hali kullanılmıştır (Bayar ve Kaya, 2011). Böylelikle Sowell tarafından verilen iso-taxicab koordinat eksenleri ve iso-taxicab uzaklık fonksiyonları yerine nispeten üzerinde çalışılması daha kolay \mathbb{R}^2 -düzleminde iso-taxicab geometrik işlemlerin çalışılması amaçlanmıştır.

3. ISO-TAXICAB VE $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -DÜZLEM GEOMETRİ

3.1 \mathbb{R}^2 -Düzleminde d_{π_n} -Uzaklıkları Cinsinden Iso-taxicab Uzaklık Fonksiyonları

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ için bir metrik veren d_{π_n} -uzaklıklarının $n = 2$ hali taxicab uzaklığını, $n = 3$ hali iso-taxicab uzaklığını, $n = 4$ hali ise chinese-checker uzaklığını verir. d_{π_n} -uzaklıkları yardımıyla, örneğin $n = 3$ için iso-taxicab düzlemde verilen herhangi iki noktanın \mathbb{R}^2 -düzlemindeki karşılıkları bulunup, bu noktaların \mathbb{R}^2 -düzleminde iso-taxicab uzaklıklarının bulunması mümkün olmaktadır. \mathbb{R}^2 -düzleminde d_{π_n} -uzaklıklarının ailesinin genel tanımı şu şekildedir;

Tanım 1. $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$, \mathbb{R}^2 -düzleminde herhangi iki nokta olsun. d_{π_n} -uzaklıklarının bir ailesi;

$$d_{\pi_n}(A, B) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \left(\left| \sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right| |x_1 - x_2| + \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| |y_1 - y_2| \right) \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2} \right], k \in \mathbb{Z} & , \tan \frac{(k-1)\pi}{n} \leq \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \leq \tan \frac{k\pi}{n} \quad \text{ise} \\ k = \left[\frac{n+1}{2} \right] & , \tan \frac{\left[\frac{n-1}{2} \right]\pi}{n} \leq \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < \infty \text{ veya } x_1 = x_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilir (Bayar ve Kaya, 2011).

d_{π_n} -uzaklıklarının iso-taxicab uzaklığı halini bulmak için 3.1 numaralı denklemde $n = 3$ alınırsa;

$$d_{\pi_3}(A, B) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \left(\left| \sin \frac{k\pi}{3} - \sin \frac{(k-1)\pi}{3} \right| |x_1 - x_2| + \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{3} - \cos \frac{k\pi}{3} \right| |y_1 - y_2| \right)$$

$$\begin{cases} k = 1 & , 0 \leq \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \leq \tan \frac{\pi}{3} \quad \text{ise} \\ k = 2 & , \tan \frac{\pi}{3} \leq \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < \infty \text{ veya } x_1 = x_2 \text{ ise} \end{cases}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem verilen ifadeler eşliğinde yazılırsa;

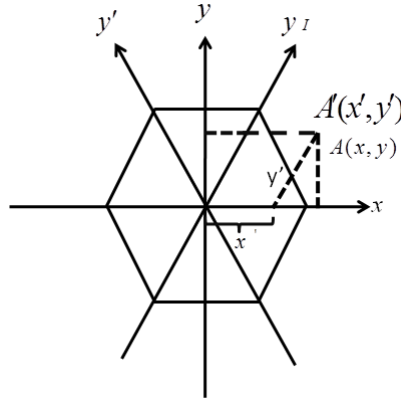
$$d_{\pi_3}(A, B) = \begin{cases} |x_1 - x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| & , 0 \leq \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \leq \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| & , \sqrt{3} \leq \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < \infty \text{ veya } x_1 = x_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

bulunur. Bu son elde edilen denklem \mathbb{R}^2 -düzleminde herhangi iki A ve B noktasının iso-taxicab uzaklığının eğim ile ilişkili denklemidir.

Not 1. Tezimizin bundan sonraki kısmında d_{π_3} -uzaklığı ile \mathbb{R}^2 -düzlemi, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemi olarak adlandırılacaktır.

3.1.1 Iso-Taxicab Düzlemdeki Bir Noktanın $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzlemindeki Karşılığı

Herhangi bir A' noktasının iso-taxicab düzlemdeki koordinatları $A' = (x', y')$ ve $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki koordinatları $A = (x, y)$ ile verilsin. Bu iki koordinat arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi verilebilir. Aşağıdaki şekil aracılığıyla;



Şekil 3.1 Bir noktanın iso-taxicab düzlem ve $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki koordinatları

$$\begin{aligned} x - x' &= \frac{y'}{2} \\ \sqrt{3}(x - x') &= y \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$x' = x - \frac{1}{\sqrt{3}}y \text{ ve } y' = \frac{2}{\sqrt{3}}y \quad (3.3)$$

bulunur ve tersine

$$x = x' + \frac{y'}{2} \text{ ve } y = \frac{\sqrt{3}}{2}y' \quad (3.4)$$

elde edilir. Son verilen 3.3 ve 3.4 eşitlikleri aracılığıyla, iso-taxicab düzlemdeki koordinatları verilen bir noktanın $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki karşılık geldiği noktanın koordinatları veya $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde koordinatları verilen bir noktanın iso-taxicab düzlemdeki karşılık geldiği noktanın koordinatları bulunabilir.

3.1.2 \mathbb{R}^2 -Düzleminde d_{π_3} Uzaklık ve Öklidyen Uzaklık Arasındaki Fonksiyonel İlişki

d_E , \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklidyen metriği temsil etmek üzere, aşağıdaki teorem ile \mathbb{R}^2 -düzleminde d_{π_n} -uzaklıklar ve d_E - uzaklıklar arasındaki genel fonksiyonel ilişki verilmektedir.

Teorem 1. l doğrusu \mathbb{R}^2 -düzleminde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru olsun. Eğer l doğrusunun eğimi m ise bu durumda

$$d_{\pi_n}(A, B) = \rho(m)d_E(A, B)$$

olacak şekilde

$$\rho(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1+m^2}} \left(\left| \sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right| + \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| |m| \right) & , y_1 \neq y_2 \\ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| & , |m| \rightarrow \infty \end{cases}$$

vardır. Burada

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2} \right], k \in \mathbb{Z} & , \tan \frac{(k-1)\pi}{n} \leq |m| < \tan \frac{k\pi}{n} \\ k = \left[\frac{n+1}{2} \right] & , \tan \frac{\left[\frac{n-1}{2} \right] \pi}{n} \leq |m| < \infty \text{ veya } |m| \rightarrow \infty \end{cases}$$

dir (Bayar ve Kaya, 2011).

İspat. Eğer l , x -eksenine paralel ise $d_{\pi_n}(A, B) = d_E(A, B)$ ve $\rho(m) = 1$ dir. Böylece $d_{\pi_n}(A, B) = \rho(m)d_E(A, B)$ dir. Eğer l , x -eksenine veya y -eksenine paralel değilse o zaman $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ dir. Ayrıca m , l doğrusunun eğimi olmak üzere;

$$\begin{aligned} d_{\pi_n}(A, B) &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \left(\left| \sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right| |x_1 - x_2| + \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| |y_1 - y_2| \right) \\ &= \frac{|x_1 - x_2|}{\sin \frac{\pi}{n}} \left(\left| \sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right| + \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| |m| \right) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde;

$$d_E(A, B) = |x_1 - x_2| \sqrt{1+m^2}, \forall m \in \mathbb{R} \text{ için}$$

dir ve sonuç olarak verilen eşitlik geçerlidir. Eğer $|m| \rightarrow \infty$ ise

$$\begin{aligned} d_{\pi_n}(A, B) &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| |y_1 - y_2| \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n} \right| d_E(A, B) \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 1. Yukarıdaki teoremin $n = 3$ hali ve bunun sonucu olan $k = 1$ ve $k = 2$ şartları için, \mathbb{R}^2 -düzleminde d_{π_3} -uzaklığı ve d_E -uzaklığı arasındaki ilişkiyi elde etmek için gerekli olan $\rho(m)$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\rho(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} & , 0 \leq |m| \leq \sqrt{3} \\ \frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} & , \sqrt{3} \leq |m| \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & , |m| \rightarrow \infty \end{cases}$$

Bunun sonucunda ise yine l doğrusu \mathbb{R}^2 -düzleminde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru olsun ve d_E Öklidyen metriği temsil etsin. Eğer l doğrusunun eğimi m ise bu durumda

$$d_{\pi_3}(A, B) = \rho(m)d_E(A, B) \quad (3.5)$$

eşitliği \mathbb{R}^2 -düzleminde iso-taxicab uzaklık ve Öklidyen uzaklık arasındaki fonksiyonel ilişkiyi verir.

Sonuç 2. Eğer A, B, X noktaları $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde doğrudan noktalar ise o zaman

$$d_E(X, A) = d_E(X, B) \Leftrightarrow d_{\pi_3}(X, A) = d_{\pi_3}(X, B) \quad (3.6)$$

dir (Bayar ve Kaya, 2011).

Sonuç 3. Eğer A, B, X noktaları $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde doğrudan noktalar ise o zaman

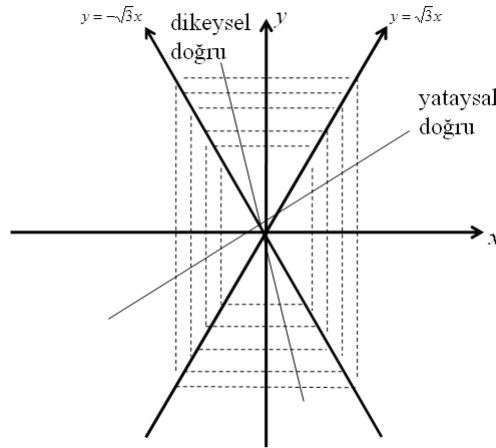
$$\frac{d_{\pi_3}(X, A)}{d_{\pi_3}(X, B)} = \frac{d_E(X, A)}{d_E(X, B)} \quad (3.7)$$

dir (Bayar ve Kaya, 2011).

Yani, bir doğru boyunca d_{π_3} -uzaklık ile Öklidyen uzaklığın oranları aynıdır.

3.1.3 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Doğruların Sınıflandırılması

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde l doğrusu $ax + by + c = 0$ denklemi ile verilsin. Eğer $|\frac{-a}{b}| > \sqrt{3}$ ise l doğrusuna dikeysel doğru, $|\frac{-a}{b}| < \sqrt{3}$ ise l doğrusuna yataysal doğru, $|\frac{-a}{b}| = \sqrt{3}$ ise l doğrusuna ayıraç doğru denir. (Şekil 3.2)



Şekil 3.2 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde doğrular

3.1.4 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığı, P noktasının l doğrusu üzerindeki noktalara olan uzaklıklarının en küçüğü olarak tanımlanır. Kısaca

$$d_{\pi_3}(P, l) = \min_{X \in l} d_{\pi_3}(X, P)$$

dir.

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığını bulmak için izlenebilecek bir başka yol ise merkezi P noktası olan $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki çemberin yarıçapını, çember doğruya değene kadar büyütmeektir. Çember doğruya değdiği anda çemberin yarıçapı, P noktasının l doğrusuna olan en kısa uzaklığı olur.

Burada $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını veren formül şu şekilde verilecektir;

$P'(x'_0, y'_0)$ iso-taxicab düzlemde bir nokta ve l' doğrusu $ax' + by' + c = 0$ denkleminde sahip iso-taxicab düzlemde bir doğru olsun. P' noktasının l' doğrusuna olan en kısa uzaklığını bulmak için verilen nokta ve doğrunun $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde karşılık geldiği nokta ve doğruya sırasıyla $P = (x_0, y_0)$ ve $l \dots dx + ey + f = 0$ diyelim. P noktasından l doğrusuna çizilen doğru parçasının l doğrusuna değdiği nokta X olsun. Burada $X \circ l$ dir. $[PX]$ doğru parçasının uzunluğu P noktasından l doğrusuna en kısa uzaklıktır. Ayrıca eğer l doğrusunun eğimine m denirse, $[PX]$ doğru parçasının eğimi $\frac{-1}{m}$ olarak bulunur. Sonuç olarak;

$$d_{\pi_3}(P, l) = \rho\left(\frac{-1}{m}\right)d_E(P, l)$$

eşitliği P noktasından l doğrusuna olan en kısa uzaklığı verir. Bu ifade formülize edilirse, $P = (x_0, y_0)$ noktası ve $l \dots dx + ey + f = 0$ doğrusu, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir nokta ve doğru olmak üzere l doğrusunun eğimi m ise;

$$d_{\pi_3}(P, l) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{-1}{m})^2}} + \frac{|\frac{-1}{m}|}{\sqrt{3}\sqrt{1+(\frac{-1}{m})^2}} \right) \frac{|dx_0+ey_0+f|}{\sqrt{d^2+e^2}} & , 0 \leq \left| \frac{-1}{m} \right| \leq \sqrt{3} \\ \frac{2|\frac{-1}{m}|}{\sqrt{3}\sqrt{1+(\frac{-1}{m})^2}} & , \sqrt{3} \leq \left| \frac{-1}{m} \right| \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & , \left| \frac{-1}{m} \right| \rightarrow \infty \end{cases}$$

eşitliği $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde P noktasından l doğrusuna olan en kısa uzaklığı verir.

3.1.5 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Üçgenler İçin Alan Formülleri

\mathbb{R}^2 -düzleminde üçgenlerin alanının, üçgenin taban uzunluğu c ve bu tabana ait yükseklik h olmak üzere;

$$S = \frac{c \cdot h}{2}$$

formülü ile verilir. Bu formül genel olarak iso-taxicab düzlemde geçerli değildir ve bunun sonucu olarak $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde de geçerli değildir. Sırasıyla $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanı ve bu tabana ait yüksekliği c_I ve h_I olarak alınırsa, aşağıdaki teorem $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ ölçümleri bakımından bir üçgenin Öklidyen alanını verir.

Teorem 2. c_I ve h_I , $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin taban ve bu tabana ait yüksekliği olsun. Aynı üçgenin \mathbb{R}^2 -düzlemindeki karşılığının taban uzunluğu c ve yüksekliği ise h ile verilsin. Eğer üçgenin tabanın \mathbb{R}^2 -düzlemindeki eğimi m ise bu durumda üçgenin alanı;

$$S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}c_I h_I & , m = 0 \\ \frac{3\sqrt{1+m^2}}{4(\sqrt{3}|m|+1)}c_I h_I & , m = \infty \\ \frac{3(1+m^2)}{4(\sqrt{3}+|m|)}c_I h_I & , 0 < |m| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3(1+m^2)}{2(\sqrt{3}+|m|)(\sqrt{3}|m|+1)}c_I h_I & , \frac{1}{\sqrt{3}} < |m| \leq \sqrt{3} \\ \frac{3(1+m^2)}{4|m|(\sqrt{3}|m|+1)}c_I h_I & , \sqrt{3} \leq |m|, m \neq \infty \end{cases}$$

eşitliği ile verilir.

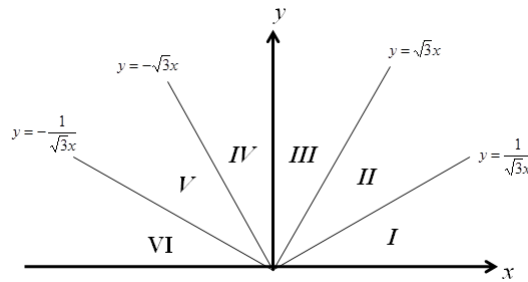
İspat. Iso-taxicab düzlemde köşe noktalarının koordinatları $A'(x'_1, y'_1)$, $B'(x'_2, y'_2)$, $C'(x'_3, y'_3)$ ile verilen $A'B'C'$ üçgeninde A' köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğu a_I , B' köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğu b_I , C' köşesinin karşısındaki kenarın uzunluğu c_I olsun. Bu durumda verilen üçgenin her bir köşe noktasının $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki karşılıkları sırasıyla $A(x'_1 + \frac{y'_1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y'_1)$, $B(x'_2 + \frac{y'_2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y'_2)$, $C(x'_3 + \frac{y'_3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y'_3)$ olur. Ayrıca yine bu üçgenin kenarlarının uzunlukları, karşısındaki köşe ile belli olacak şekilde sırasıyla a, b, c ile verilsin. Üçgenin tabanı c ve bu tabana ait yüksekliği h ile gösterildiğinde

$$c_I = \rho(m_c).c \text{ ve } h_I = \rho(m_h).h \quad (3.8)$$

eşitlikleri $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Öklidyen ve d_{π_3} -uzunluğu arasındaki fonksiyonel ilişkiyi verir. Eğer üçgenin Öklidyen düzlemde tabanının eğimi m ise yüksekliğin eğimi $(-\frac{1}{m})$ olur. Bu durumda 3.8 eşitliklerinin yerine

$$c_I = \rho(m_c).c \text{ ve } h_I = \rho(-\frac{1}{m_c}).h$$

yazılabilir. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanı ve buna bağlı olarak yükseklikleri aşağıdaki şekilde numaralandırılmış bölgelere göre sınıflandırılabilir.



Şekil 3.3 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde üçgenlerin taban eğimlerine bağlı sınıflandırma

Burada eğer üçgenin tabanı x -eksenine paralel ise yüksekliği y -eksenine paralel olur. Eğer üçgenin tabanı (I) numaralı bölgede ise yüksekliği (IV) numaralı bölgede olur. Eğer üçgenin tabanı (II) numaralı bölgede ise yüksekliği (V) numaralı bölgede olur. Eğer üçgenin tabanı (III) numaralı bölgede ise yüksekliği (VI) numaralı bölgede olur. Buradan;

i) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanı x -eksenine paralel ise yani $m = 0$ ise yüksekliğin eğimi ∞ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} c_I &= 1.c \quad , \quad h_I = \frac{2}{\sqrt{3}}h \\ \implies c &= c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}h_I \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}c.h \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}c_I h_I \end{aligned}$$

bulunur.

ii) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanı y -eksenine paralel ise yani $m = \infty$ ise yüksekliğin eğimi 0 olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} c_I &= \frac{2}{\sqrt{3}}c \quad , \quad h_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{-1}{m})^2}} + \frac{|\frac{-1}{m}|}{\sqrt{3}\sqrt{1+(\frac{-1}{m})^2}} \right) h \\ \implies c &= \frac{\sqrt{3}}{2}c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}|m|+1}h_I \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}c.h \\ &= \frac{3\sqrt{1+m^2}}{4(\sqrt{3}|m|+1)}c_I h_I \end{aligned}$$

bulunur.

iii) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanının eğimi $0 < m \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (yani tabanın x -ekseni ile arasındaki açı $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$) ise yüksekliğin eğimi $-\sqrt{3} < \frac{-1}{m} \leq \infty$ (yani yüksekliğin x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{2\pi}{3}$) olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} c_I &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) c \quad , \quad h_I = \left(\frac{2|\frac{-1}{m}|}{\sqrt{3}\sqrt{1+(\frac{-1}{m})^2}} \right) h \\ \implies c &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}+|m|}c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{2}h_I \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}c.h \\ &= \frac{3(1+m^2)}{4(\sqrt{3}+|m|)}c_I h_I \end{aligned}$$

bulunur.

iv) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanının eğimi $\frac{1}{\sqrt{3}} < m \leq \sqrt{3}$ (yani tabanın x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{3}$) ise yüksekliğinin eğimi $-\sqrt{3} < \frac{-1}{m} \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ (yani yüksekliğin x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{2\pi}{3} < \theta \leq \frac{5\pi}{6}$) olur. Bu durumda;

$$c_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) c \quad , \quad h_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} \right) h$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}+|m|} c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}|m|+1} h_I$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h$$

$$= \frac{3(1+m^2)}{2(\sqrt{3}+|m|)(\sqrt{3}|m|+1)} c_I h_I$$

bulunur.

v) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanının eğimi $\sqrt{3} < m < \infty$ (yani tabanın x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$) ise yüksekliğinin eğimi $\frac{-1}{\sqrt{3}} < \frac{-1}{m} < 0$ (yani yüksekliğin x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{5\pi}{6} < \theta < \pi$) olur. Bu durumda;

$$c_I = \left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) c \quad , \quad h_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} \right) h$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{2|m|} c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}|m|+1} h_I$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h$$

$$= \frac{3(1+m^2)}{4|m|(\sqrt{3}|m|+1)} c_I h_I$$

bulunur.

vi) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanının eğimi $\infty < m \leq -\sqrt{3}$ (yani tabanın x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{2\pi}{3}$) ise yüksekliğinin eğimi $0 < \frac{-1}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (yani yüksekliğin x -ekseni ile arasındaki açı $\pi < \theta \leq \frac{7\pi}{6}$) olur. Bu durumda;

$$c_I = \left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) c \quad , \quad h_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} \right) h$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{2|m|} c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}|m|+1} h_I$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h$$

$$= \frac{3(1+m^2)}{4|m|(\sqrt{3}|m|+1)} c_I h_I$$

bulunur.

vii) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanının eğimi $-\sqrt{3} < m \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ (yani tabanın x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{2\pi}{3} < \theta \leq \frac{5\pi}{6}$) ise yüksekliğin eğimi $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{-1}{m} \leq \sqrt{3}$ (yani yüksekliğin x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{7\pi}{6} < \theta \leq \frac{4\pi}{3}$) olur. Bu durumda;

$$c_I = \left(\frac{\sqrt{3}+|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) c \quad , \quad h_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} \right) h$$

$$\rightarrow c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}+|m|} c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}|m|+1} h_I$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$S = \frac{1}{2}c.h$$

$$= \frac{3(1+m^2)}{2(\sqrt{3}+|m|)(\sqrt{3}|m|+1)} c_I h_I$$

bulunur.

viii) Eğer $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgenin tabanının eğimi $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m < 0$ (yani tabanın x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{5\pi}{6} < \theta < \pi$) ise yüksekliğin eğimi $\sqrt{3} < \frac{-1}{m} < -\infty$ (yani yüksekliğin x -ekseni ile arasındaki açı $\frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2}$) olur. Bu durumda;

$$c_I = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) c \quad , \quad h_I = \left(\frac{2\left|\frac{-1}{m}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m}\right)^2}} \right) h$$

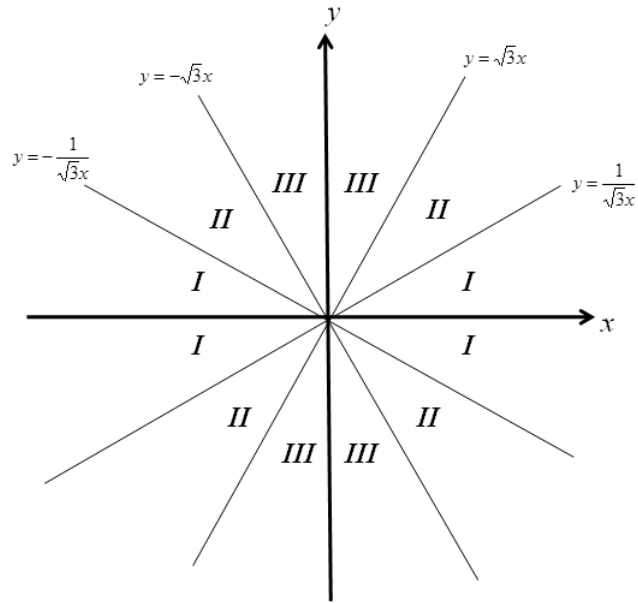
$$\rightarrow c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{3}+|m|} c_I \quad , \quad h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{2} h_I$$

olup, bulunan eşitlikler üçgenin genel alan formülünde yerine yazılırsa;

$$S = \frac{1}{2}c.h$$

$$= \frac{3(1+m^2)}{4(\sqrt{3}+|m|)} c_I h_I$$

bulunur. x -ekseninin altındaki bölgeler için bu durumların simetrikleri olduğu için benzer sonuçlar elde edilecektir. Elde edilen sonuçlar bir şekil yardımıyla özetlenebilir. Burada üçgenlerin alanları için aynı sonuç veren bölgeler aynı rakam ile gösterildiğinde $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde taban uzunlukları, verilen bölgeler içinde olan üçgenlerin alanları aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir.



Şekil 3.4 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde üçgenlerin alanlarının sınıflandırması

4. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –DÜZLEMİNDE TRİGONOMETRİ

4.1 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminin Birim Çemberi

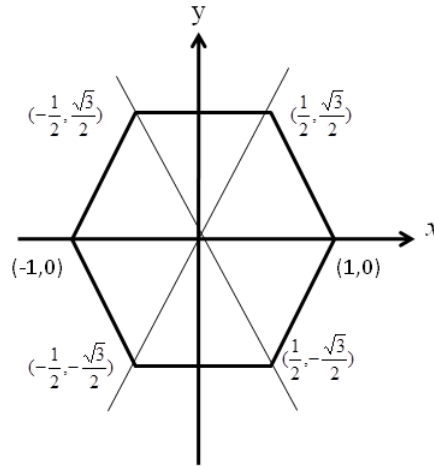
$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –düzleminde bir A noktasından r birim d_{π_3} –uzaklığındaki noktaların geometrik yerine $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –düzleminde A merkezli r yarıçaplı çember denir. Bu çember

$$C_I = \{X = (x, y) | d_{\pi_3}(A, X) = r\}$$

kümesidir. Özel olarak $A = O$ ve $r = 1$ iken $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –düzleminde birim çember elde edilir. Bu birim çemberin denklemi

$$C_I \dots \begin{cases} |x| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y| = 1 & , \quad 0 \leq \left| \frac{y}{x} \right| \leq \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} |y| = 1 & , \quad \sqrt{3} \leq \left| \frac{y}{x} \right| < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

dir. (Şekil 4.1)



Şekil 4.1 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ birim çemberi

4.2 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Trigonometrik Fonksiyonlar

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –düzleminde trigonometrik fonksiyonları elde etmek için öncelikle 4.1 eşitliği ile verilen birim çemberin denklemi mutlak değerlerin durumuna göre incelenirse, birim çemberi

bölgelere göre aşağıdaki denklemlere sahiptir.

<i>Bölgeler</i>	<i>Denklemleri</i>
<i>I</i>	$\rightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$
<i>II</i>	$\rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>III</i>	$\rightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$
<i>IV</i>	$\rightarrow y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$
<i>V</i>	$\rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>VI</i>	$\rightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

Şimdi \mathbb{R}^2 -düzleminde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının birim çember üzerindeki (x, y) noktasına bağlı tanımlanmasına benzer şekilde, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının birim çember üzerindeki (x, y) noktasına bağlı tanımların elde edilmesi için öncelikle $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki birim çember üzerinde alınan (x, y) noktasının koordinatları Öklidyen trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla şu şekilde belirtilir;

$$\begin{cases} |x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y| = 1 & , \quad 0 \leq \left|\frac{y}{x}\right| \leq \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}|y| = 1 & , \quad \sqrt{3} \leq \left|\frac{y}{x}\right| < \infty \\ y = (\tan \theta)x & , \end{cases}$$

Bu denklem sistemi çözüldürse ilk olarak;

$$\begin{cases} |x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y| = 1 & , \quad 0 \leq \left|\frac{y}{x}\right| \leq \sqrt{3} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

alındığında

$$\begin{aligned} |x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|\tan \theta||x| &= 1 \\ |x| &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}|\tan \theta|} \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$|x| = \frac{\sqrt{3}|\cos \theta|}{\sqrt{3}|\cos \theta| + |\sin \theta|} \quad (4.2)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}|y| = 1 & , \quad \sqrt{3} \leq \left|\frac{y}{x}\right| < \infty \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

alındığında

$$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.3)$$

bulunur. 4.2 ve 4.3 eşitliklerinde bulunan değerler $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde birim çemberi üzerindeki bir noktayı Öklidyen trigonometrik fonksiyonlar cinsinden veren genel denklemlerdir.

Şimdi θ açısının bulunduğu bölgelere göre mutlak değerleri incelendiğinde;

I. Bölge İçin: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ iken

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} (\tan \theta)x &= -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \rightarrow (\tan \theta)x + \sqrt{3}x = \sqrt{3} \\ &\rightarrow x(\tan \theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3} \\ &\rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \\ y &= \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \end{aligned}$$

bulunur ki, bu da *I.* bölgede birim çember üzerindeki bir noktanın Öklidyen trigonometrik ifadesidir.

II. Bölge İçin: $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ iken

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$(\tan \theta)x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \theta}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \\ y &= \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

bulunur ki, bu da *II.* bölgede birim çember üzerindeki bir noktanın Öklidyen trigonometrik ifadesidir.

III. Bölge İçin: $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ iken

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} (\tan \theta)x &= \sqrt{3}x + \sqrt{3} \rightarrow (\tan \theta)x - \sqrt{3}x = \sqrt{3} \\ &\rightarrow x(\tan \theta - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \\ &\rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta} \\ y &= \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta} \end{aligned}$$

bulunur ki, bu da *III.* bölgede birim çember üzerindeki bir noktanın Öklidyen trigonometrik ifadesidir.

IV. Bölge İçin: $\pi \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$ iken

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} (\tan \theta)x &= -\sqrt{3}x - \sqrt{3} \rightarrow (\tan \theta)x + \sqrt{3}x = -\sqrt{3} \\ &\rightarrow x(\tan \theta + \sqrt{3}) = -\sqrt{3} \\ &\rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{\tan \theta + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \\ y &= -\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \end{aligned}$$

bulunur ki, bu da *IV.* bölgede birim çember üzerindeki bir noktanın Öklidyen trigonometrik ifadesidir.

V. Bölge İçin: $\frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$ iken

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$(\tan \theta)x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2 \tan \theta}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \\ y &= -\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{2 \sin \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

bulunur ki, bu da *V.* bölgede birim çember üzerindeki bir noktanın Öklidyen trigonometrik ifadesidir.

VI. Bölge İçin: $\frac{5\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi$ iken

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \\ y = (\tan \theta)x \end{cases}$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} (\tan \theta)x &= \sqrt{3}x - \sqrt{3} \rightarrow (\tan \theta)x - \sqrt{3}x = -\sqrt{3} \\ &\rightarrow x(\tan \theta - \sqrt{3}) = -\sqrt{3} \\ &\rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{\tan \theta - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

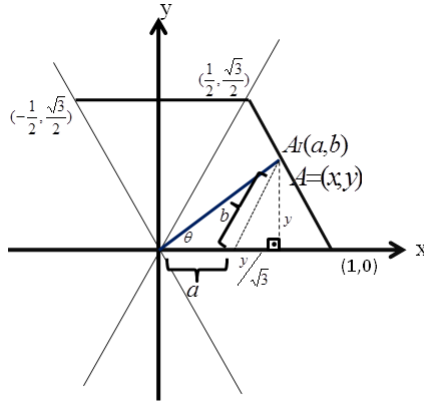
$$x = -\frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}$$

bulunur ki, bu da VI . bölgede birim çember üzerindeki bir noktanın Öklidyen trigonometrik ifadesidir.

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde sinüs fonksiyonu \sin_I , kosinüs fonksiyonu \cos_I ve tanjant fonksiyonu \tan_I ile gösterilsin. Buna göre $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde birim çember üzerinde $(\cos_I \theta, \sin_I \theta)$ noktası orjinden geçen x - *ekseni* ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun birim çemberi kestiği noktanın iso-taxicab koordinatları olsun. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde birim çember üzerindeki bu noktanın iso-taxicab koordinatları, Öklidyen koordinatlar yardımıyla elde edilebilir.

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde birim çember üzerindeki bir noktanın iso-taxicab koordinatları $A_I = (a, b)$ ve Öklidyen koordinatları $A = (x, y)$ ile gösterilirse bu koordinatlar arasındaki ilişki aşağıdaki şekil yardımıyla;



Şekil 4.2 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iso-taxicab ve Öklidyen koordinatlar arasındaki ilişki

$$a = x - \frac{y}{\sqrt{3}} \quad , \quad b = \frac{2y}{\sqrt{3}}$$

olarak bulunur. O halde birim çember üzerindeki $A_I = (a, b)$ koordinatlı noktadan ve orjinden geçen ayrıca x - *ekseni* ile pozitif yönde θ açısı yapan doğrunun tanjantı

$$\tan_I \theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{2y}{\sqrt{3}}}{x - \frac{y}{\sqrt{3}}} \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada 4.4 eşitliğinin sağ tarafının pay ve paydası x ' e bölüldüğünde

$$\tan_I \theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{2y}{\sqrt{3}x}}{\frac{x}{x} - \frac{y}{\sqrt{3}x}} = \frac{2m}{\sqrt{3} - m}$$

bulunur ki bu da tanjant fonksiyonunu $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde orjinden ve verilen noktadan geçen doğrunun eğimi cinsinden veren denklemdir.

Yine 4.4 eşitliğinden $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\sin_I \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}y \quad (4.5)$$

ve

$$\cos_I \theta = x - \frac{y}{\sqrt{3}} \quad (4.6)$$

şeklinde bulunur.

Daha önce altı bölge için elde edilen x ve y değerleri 4.4, 4.5, 4.6 eşitliklerinde yerine yazıldığında, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde trigonometrik fonksiyonları Öklidyen trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla veren denklemler elde edilir.

Bu denklemler herbir bölge için ayrı ayrı incelendiğinde $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde sinüs, kosinüs ve tanjant fonksiyonları;

I. Bölge İçin:

$$\begin{aligned} \sin_I \theta &= \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}, & \cos_I \theta &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \\ \tan_I \theta &= \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} \end{aligned}$$

II. Bölge İçin:

$$\begin{aligned} \sin_I \theta &= 1, & \cos_I \theta &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}{2 \sin \theta} \\ \tan_I \theta &= \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} \end{aligned}$$

III. Bölge İçin:

$$\begin{aligned} \sin_I \theta &= \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}, & \cos_I \theta &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta} = -1 \\ \tan_I \theta &= \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} \end{aligned}$$

IV. Bölge İçin:

$$\begin{aligned} \sin_I \theta &= -\frac{2 \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}, & \cos_I \theta &= \frac{-\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \\ \tan_I \theta &= -\frac{2 \sin \theta}{-\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \end{aligned}$$

V. Bölge İçin:

$$\begin{aligned}\sin_I \theta &= -1 & , & \quad \cos_I \theta = \frac{-\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}{2\sin\theta} \\ \tan_I \theta &= -\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}\end{aligned}$$

VI. Bölge İçin:

$$\begin{aligned}\sin_I \theta &= -\frac{2\sin\theta}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta} & , & \quad \cos_I \theta = \frac{-\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta} = 1 \\ \tan_I \theta &= -\frac{2\sin\theta}{-\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu bulunan $\sin_I \theta$, $\cos_I \theta$ değerleri bölgelere göre daha kısa şekilde ifade edilmek istenirse;

$$\sin_I \theta = \begin{cases} \frac{2\sin\theta}{|\sin\theta| + \sqrt{3}|\cos\theta|} & , \quad I - III - IV - VI \\ 1 & , \quad II \\ -1 & , \quad V \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\cos_I \theta = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta}{|\sin\theta| + \sqrt{3}|\cos\theta|} & , \quad I - III - IV - VI \\ \frac{\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta}{2|\sin\theta|} & , \quad II - V \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde verilir.

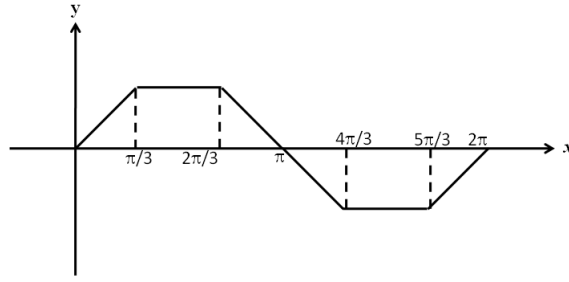
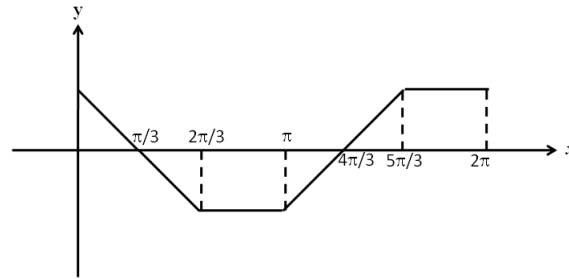
Bu verilen denklemler aracılığıyla $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzleminde verilen bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları bulunmuş olur. θ açısının bazı değerleri için tablo düzenlenirse;

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin_I \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$	1	1	1	0	-1	-1	-1	0
$\cos_I \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	1

olur. Benzer şekilde $\tan_I \theta$ ve $\cot_I \theta$ nın bazı değerleri;

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\tan_I \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$	∞	-2	-1	0	∞	-2	-1	0
$\cot_I \theta$	∞	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	∞	0	$-\frac{1}{2}$	-1	∞

olarak bulunur. Burada $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzleminde $\sin_I \theta$ ve $\cos_I \theta$ trigonometrik fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi verilir.

Şekil 4.3 $y = \sin_I \theta$ Şekil 4.4 $y = \cos_I \theta$

Ayrıca $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ de sekant ve kosekant trigonometrik fonksiyonları, Öklidyen sekant ve kosekant trigonometrik fonksiyonlara benzer olarak

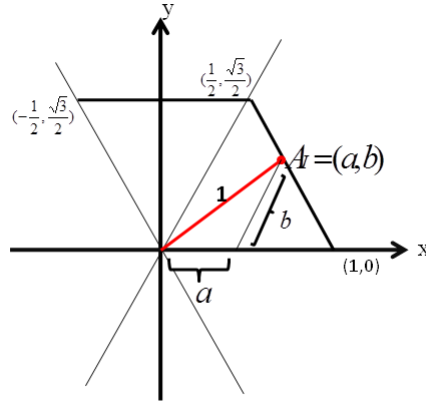
$$\sec_I \theta = \frac{1}{\cos_I \theta} \text{ ve } \operatorname{cosec}_I \theta = \frac{1}{\sin_I \theta}$$

şeklinde tanımlanabilir.

4.3 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —Düzleminde Pisagor Özdeşliği

Öklidyen geometride iyi bilinen Pisagor özdeşliği, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde aşağıdaki biçimde verilir.

Tanım 2. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde birim çember üzerindeki bir noktanın iso-taxicab koordinatları $A_I = (a, b)$ ve Öklidyen koordinatları $A = (x, y)$ ile gösterilsin . $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —düzleminde $(\cos_I \theta, \sin_I \theta)$ noktası birim çember üzerinde bir nokta belirtmek üzere, bu noktanın koordinatları 4.5 ve 4.6 eşitliklerinden



Şekil 4.5 $\mathbb{R}^2_{\pi/3}$ –düzleminde bir noktanın koordinatları

$$a = x - \frac{y}{\sqrt{3}} \text{ ve } b = \frac{2}{\sqrt{3}}y$$

olmak üzere $A_I = (x - \frac{y}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}y)$ ile verilebilir. Şekilden de görüleceği üzere

$$\begin{aligned} |a| + |b| = 1 &\rightarrow x - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 1 \\ &\rightarrow x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

ve

$$|\cos_I \theta| + |\sin_I \theta| = 1$$

olur. Bu son eşitlik $\mathbb{R}^2_{\pi/3}$ –düzleminde Pisagor özdeşliğinin ifadesidir. Pisagor özdeşliğinin her iki tarafı $|\cos_I \theta|$ ifadesine bölüldüğünde

$$1 + |\tan_I \theta| = |\sec_I \theta|$$

sekant özdeşliği elde edilir. Yine benzer şekilde Pisagor özdeşliğinin her iki tarafı $|\sin_I \theta|$ ifadesine bölüldüğünde

$$|\cot_I \theta| + 1 = |\csc_I \theta|$$

kosekant özdeşliği elde edilir.

4.4 $\mathbb{R}^2_{\pi/3}$ –Düzleminde Trigonometrik İndirgeme Formülleri

\mathbb{R}^2 –düzleminde trigonometrik fonksiyonlarda açılar daima I . bölgede verilmek zorunda değildir. Açılar bazen II ., III . veya IV . bölgede verilebilir. Bu açılar kısa yoldan I . bölge açısı gibi hesaplamak için x ve y eksenine bağlı olarak $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ radyan ölçüleri kullanılarak trigonometrik indirgeme formülleri verilir.

Benzer indirgeme formülleri düzlemdeki x, y, y' eksenleri ve bu eksenlerin ayırdığı altı bölge esas alınarak T. Ada tarafından doktora tezinde indirgeme formülleri olarak verilmiştir (Ada, 2005). Burada indirgeme formüllerinde x, y, y' eksenlerine bağlı olarak $0, \frac{\pi_I}{3}, \frac{2\pi_I}{3}, \pi_I, \frac{4\pi_I}{3}, \frac{5\pi_I}{3}, 2\pi_I$ radyan ölçüleri kullanılmıştır.

Burada amaç, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir θ açısının indirgeme formüllerini bulmaktır. Yine bunu yaparken $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminin altı bölgesi esas alınarak $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ radyan ölçüleri esas alınacaktır.

Burada indirgeme formüllerinin bazılarının elde ediliş yöntemi gösterilip diğerleri tablo halinde verilecektir.

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \cos_I\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) &= \frac{\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta) - (\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta)}{(\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta) + \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \theta)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \end{aligned}$$

elde edilen bu sonuç 4.7 eşitliğinde I . bölge için bulunan $\sin_I \theta$ değerine eşit olup buradan;

$$\cos_I\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin_I \theta$$

yazılabilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \cos_I\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) &= \frac{\sqrt{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \theta + \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \theta) - (\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \theta - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \theta)}{2(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \theta - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \theta)} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{-\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \end{aligned}$$

eşitliği II . bölgedeki $-1 + \sin_I \theta$ değerine eşit olup buradan

$$\cos_I\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = -1 + \sin_I \theta$$

yazılabilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \sin_I(\pi + \theta) &= \frac{-2 \sin(\pi + \theta)}{\sin(\pi + \theta) + \sqrt{3} \cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{-2(\sin \pi \cdot \cos \theta + \cos \pi \cdot \sin \theta)}{(\sin \pi \cdot \cos \theta + \cos \pi \cdot \sin \theta) + \sqrt{3}(\cos \pi \cdot \cos \theta - \sin \pi \cdot \sin \theta)} \\ &= \frac{-2(0 - \sin \theta)}{-\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{-\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta} \end{aligned}$$

eşitliği *IV.* bölgedeki $-\sin_I \theta$ değerine eşit olup buradan

$$\sin_I(\pi + \theta) = -\sin_I \theta$$

yazılabilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \sin_I\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right) &= \frac{-2 \sin\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right)} \\ &= \frac{-2\left(\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\theta + \cos\frac{5\pi}{3} \cdot \sin\theta\right)}{\left(\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\theta + \cos\frac{5\pi}{3} \cdot \sin\theta\right) - \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\theta - \sin\frac{5\pi}{3} \cdot \sin\theta\right)} \\ &= \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} \sin\theta\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} \sin\theta\right) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta\right)} \\ &= \frac{-\sqrt{3} \cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta + \sqrt{3} \cos\theta} \end{aligned}$$

eşitliği *VI.* bölgedeki $-1 + \sin_I \theta$ değerine eşit olup buradan

$$\sin_I\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right) = -1 + \sin_I \theta$$

yazılabilir.

Bu indirgeme formüllerini tablo şeklinde vermek gerekirse, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde indirgeme formülleri;

$\cos_I\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin_I \theta$	$\sin_I\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \cos_I \theta$
$\cos_I\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = -\sin_I \theta$	$\sin_I\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 1$
$\cos_I\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = -1 + \sin_I \theta$	$\sin_I\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = 1$
$\cos_I\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = -1$	$\sin_I\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = 1 - \sin_I \theta$
$\cos_I(\pi - \theta) = -1$	$\sin_I(\pi - \theta) = \sin_I \theta$
$\cos_I(\pi + \theta) = -1 + \sin_I \theta$	$\sin_I(\pi + \theta) = -\sin_I \theta$
$\cos_I\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) = -\sin_I \theta$	$\sin_I\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) = -1 + \sin_I \theta$
$\cos_I\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) = \cos_I \theta$	$\sin_I\left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) = -1$
$\cos_I\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right) = \sin_I \theta$	$\sin_I\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right) = -1$
$\cos_I\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right) = 1$	$\sin_I\left(\frac{5\pi}{3} + \theta\right) = -1 + \sin_I \theta$
$\cos_I(2\pi - \theta) = 1$	$\sin_I(2\pi - \theta) = -\sin_I \theta$
$\cos_I(2\pi + \theta) = \cos_I \theta$	$\sin_I(2\pi + \theta) = \sin_I \theta$

şeklinde verilir.

4.5 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Açı Ölçüsü ve Referans Açısı

Bir açının ölçüsünü tanımlamanın yollarından birisi de, açının birim çember üzerindeki karşılık geldiği yayın uzunluğunu hesaplamaktır. Bu bölümde bir açının ölçüsü $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde birim çember üzerindeki karşılık geldiği yayın uzunluğu (Özcan vd. 2002) tarafından 2002 yılında verilen yönteme benzer bir şekilde tanımlanacaktır. Ayrıca

Öklidyen geometride bir açı düzlemde nasıl konumlanırsa konumlansın açının gördüğü yayın uzunluğu aynıdır ancak bu durum $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlem geometrisinde geçerli olmadığından bu bölümde $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlem geometrisinde referans açı kavramına yer verilecektir.

Tanım 3. Bir I -radyan, başlangıç noktası $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -birim çemberinin merkezi ve 1 birimlik bir yayın kesişimi olan açıdır. Bir θ_I ölçüsü, birim çemberin başlangıç noktasından birim çember üzerindeki θ açısının kestiği noktaya kadar olan I -radyanın sayısıdır.

Buradan hemen bir $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -birim çemberinin $6I$ -radyan olduğu söylenebilir. Çünkü birim çemberin çevresi 6 birimdir. Standart pozisyondaki $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π Öklidyen açıları artık sırasıyla 1, $\frac{3}{2}$, 3 ölçüsüne sahiptir.

Aşağıdaki teorem diğer açıların ölçüsünü belirlemek için gerekli formülü verir;

Teorem 3. Standart pozisyondaki bir θ Öklidyen dar açısı

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ için;

$$\theta_I = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \theta} = \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \quad (4.9)$$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ için;

$$\theta_I = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \theta = \frac{3 \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \quad (4.10)$$

ölçüsüne sahiptir.

İspat. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ için (I . bölgede) θ Öklidyen açısının θ_I ölçüsü, $(1, 0)$ noktasından $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişimine olan uzaklığa eşittir. Bu kesişim noktası $P = (x_0, y_0)$ olsun O halde P noktasının x -koordinatı

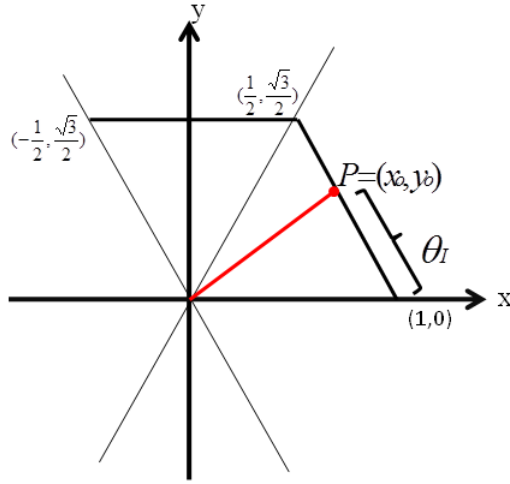
$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \theta}$$

ve y -koordinatı

$$y_0 = -\sqrt{3}x_0 + \sqrt{3}$$

olur. Böylece $(1, 0)$ noktasından P noktasına olan uzaklık;

$$\begin{aligned} \theta_I &= \frac{2}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3}x_0 + \sqrt{3}) = 2 - 2x_0 \\ &= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \end{aligned}$$



Şekil 4.6 $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzleminde I. bölgede bir θ Öklidyen dar açısının ölçüsü

olarak bulunur. Benzer şekilde $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ için (II. bölgede) θ Öklidyen açısının θ_I , $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ noktasından $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişimine olan uzaklık ile $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ noktası ile $(1, 0)$ noktası arasındaki 1 birimlik uzaklığın toplamına eşit olur. O halde $P(x_0, y_0)$ noktasının koordinatları

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } y = x \cdot \tan \theta \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = x \cdot \tan \theta$$

eşitliğinden

$$x_0 = \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \text{ ve } y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olarak bulunur. Böylece $(1, 0)$ noktasından $P(x_0, y_0)$ noktasına olan çember yayının uzunluğu;

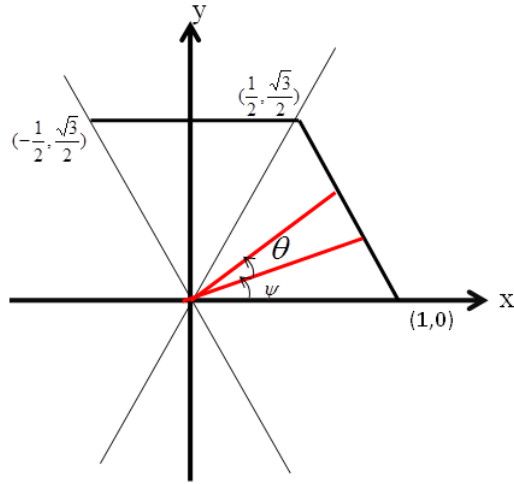
$$\begin{aligned} \theta_I &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \right) \\ &= 1 + \frac{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{3 \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \theta \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Tanım 4. Bir Öklidyen θ açısının referans açısı, θ ve x -ekseni arasında kalan en küçük açıdır. (Özcan vd. 2002)

Şimdi verilen referans açısı tanımının bir sonucu olarak herhangi bir Öklidyen dar açının bulunduğu pozisyonlara göre yeni ölçüleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Sonuç 4. 1. Durum : Eğer ψ Öklidyen referans açısı olacak şekilde bir θ Öklidyen dar açısı tümüyle I. bölgede bulunuyorsa o zaman bu açı



Şekil 4.7 $\mathbb{R}_{\pi/3}^2$ -düzleminde I. bölgede ψ Öklidyen referans açılı θ Öklidyen dar açısı

$$\begin{aligned}\theta_I &= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan(\theta + \psi)} - 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \psi} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \psi} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan(\theta + \psi)} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{[\sqrt{3} \cos(\theta + \psi) + \sin(\theta + \psi)][\sqrt{3} \cos \psi + \sin \psi]}\end{aligned}$$

ölçüsüne sahiptir. (Şekil 4.7)

2.Durum : Eğer ψ Öklidyen referans açısı olacak şekilde bir θ Öklidyen dar açısı tümüyle II. bölgede bulunuyorsa ozaman bu açı;

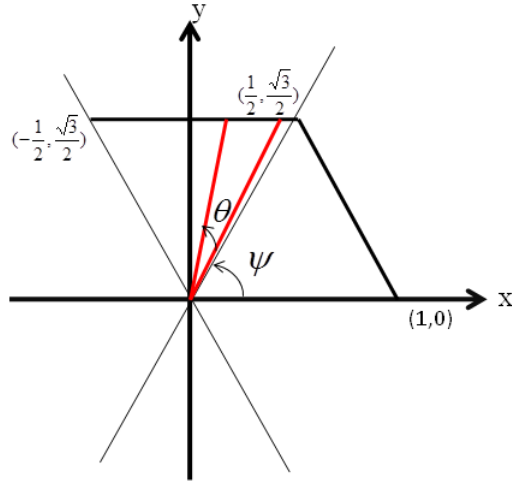
$$\begin{aligned}\theta_I &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot(\theta + \psi) - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \psi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\cot \psi - \cot(\theta + \psi)] \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{2 \sin \psi \cdot \sin(\theta + \psi)}\end{aligned}$$

ölçüsüne sahiptir. (Şekil 4.8)

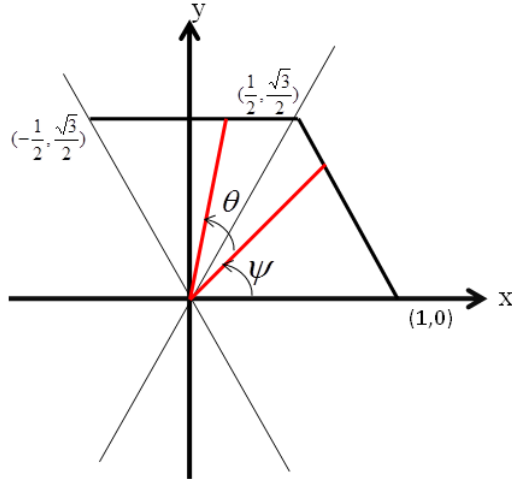
3.Durum : Eğer ψ Öklidyen referans açısı olacak şekilde bir θ Öklidyen dar açısı için, θ açısı II. bölgede, ψ açısı I. bölgede bulunuyorsa o zaman bu açı;

$$\begin{aligned}\theta_I &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot(\theta + \psi) - 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \psi} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \psi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot(\theta + \psi) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3} \cos \psi}{\sqrt{3} \cos \psi + \sin \psi} - \frac{\sqrt{3} \cos(\theta + \psi)}{2 \sin(\theta + \psi)}\end{aligned}$$

ölçüsüne sahiptir. (Şekil 4.9)



Şekil 4.8 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde II. bölgede ψ Öklidyen referans açılı θ Öklidyen dar açısı



Şekil 4.9 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde I. ve III. bölgede ψ Öklidyen referans açılı θ Öklidyen dar açısı

Bu sonuç, standart pozisyonda olmayan bir Öklidyen açının ölçüsünün, standart pozisyondaki aynı Öklidyen açının ölçüsüne eşit olmasının gerekli olmadığını söyler. Böylece açılarının dönmelerinin invaryant olmadığı söylenebilir. Bu son ifadeye bir örnek vermek gerekirse;

Örnek 1. Öklidyen referans açısı $\psi = \frac{\pi}{4}$ olacak şekilde bir $\theta = \frac{\pi}{6}$ açısını göz önüne alınsın. Buradan $\theta + \psi = \frac{5\pi}{12}$ olup 3. durum oluşur. O halde

$$\begin{aligned}\theta_I &= -\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{12}}{2 \sin \frac{5\pi}{12}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - \frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{2 \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)} - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}(3-4\sqrt{2})+4\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}\end{aligned}$$

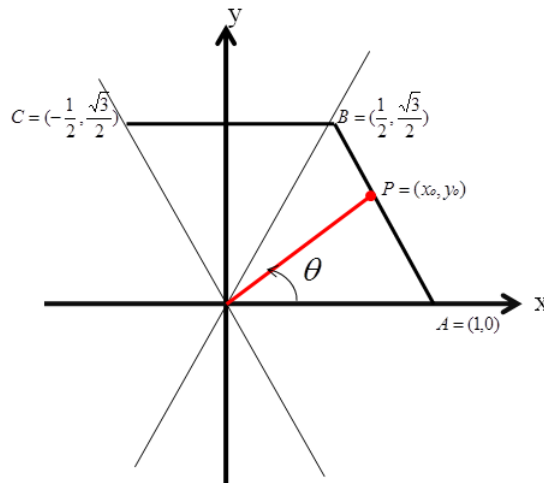
bulunur. Oysa standart pozisyonadaki bir $\theta = \frac{\pi}{6}$ açısının yeni ölçüsü

$$\begin{aligned}\theta_I &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olur ki burada standart pozisyonadaki bir $\theta = \frac{\pi}{6}$ açısının ölçüsü ile $\psi = \frac{\pi}{4}$ referans açılı $\theta = \frac{\pi}{6}$ açısının ölçüsü farklıdır.

Burada daha önce sadece dar açılar için bulunan, θ' yi ihtiva eden bölgelere göre standart pozisyonadaki θ açısının θ_I - ölçüsü altı bölge için ayrı ayrı hesaplanıp bu değerler aşağıdaki şekilde sunulur.

I. Bölgede: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ için;



Şekil 4.10 I. bölgede θ_I yay uzunluğu

θ Öklidyen açısının θ_I ölçüsü, $(1, 0)$ noktasından $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişimine olan $d_{\pi/3}$ -uzaklığına eşittir. Bu kesişim noktası $P = (x_0, y_0)$ olsun O halde P noktasının x -koordinatı

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \theta}$$

ve y -koordinatı

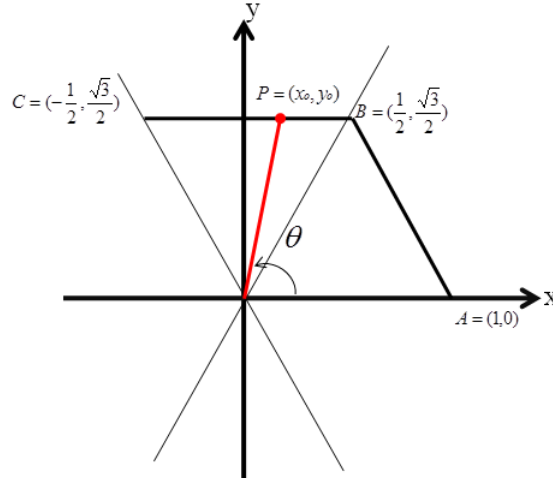
$$y_0 = -\sqrt{3}x_0 + \sqrt{3}$$

olur. Böylece $(1, 0)$ noktasından P noktasına olan çember yayının $d_{\pi/3}$ -uzunluğu;

$$\begin{aligned} \theta_I &= \frac{2}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3}x_0 + \sqrt{3}) = 2 - 2x_0 \\ &= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

II. Bölgede: $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ için;



Şekil 4.11 II. bölgede θ_I yay uzunluğu

$\theta_I = 1 + |PB|_I$ eşitliği ile $(1, 0)$ noktasından P noktasına olan çember yayının $d_{\pi/3}$ uzunluğu bulunur. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } y = x \cdot \tan \theta \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = x \cdot \tan \theta$$

eşitliğinden

$$x_0 = \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \text{ ve } y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şeklinde bulunur. Buradan

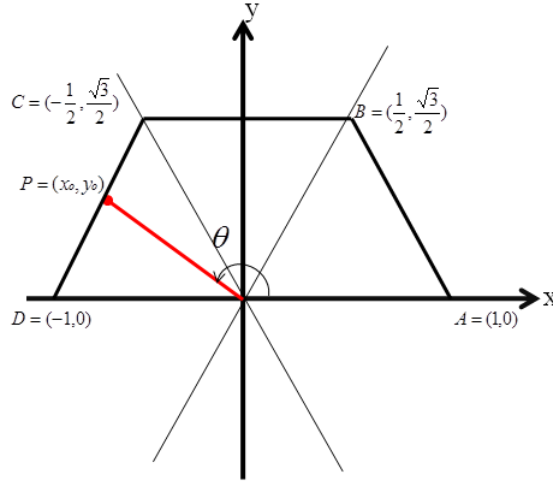
$$|PB|_I = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \right| = \frac{3 \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

ve bunun sonucu olarakta

$$\theta_I = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \theta$$

bulunur.

III. Bölgede: $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ için;



Şekil 4.12 III. bölgede θ_I yay uzunluğu

$\theta_I = 2 + |PC|_I$ eşitliği ile $(1, 0)$ noktasından P noktasına olan çember yayının $d_{\pi/3}$ -uzunluğu bulunur. $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x + \sqrt{3} &= x \cdot \tan \theta \rightarrow \sqrt{3} = x \cdot \tan \theta - \sqrt{3}x \\ &\rightarrow \sqrt{3} = x(\tan \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta - \sqrt{3}} \text{ ve } y_0 = \frac{\sqrt{3} \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}$$

şeklinde bulunur. Buradan

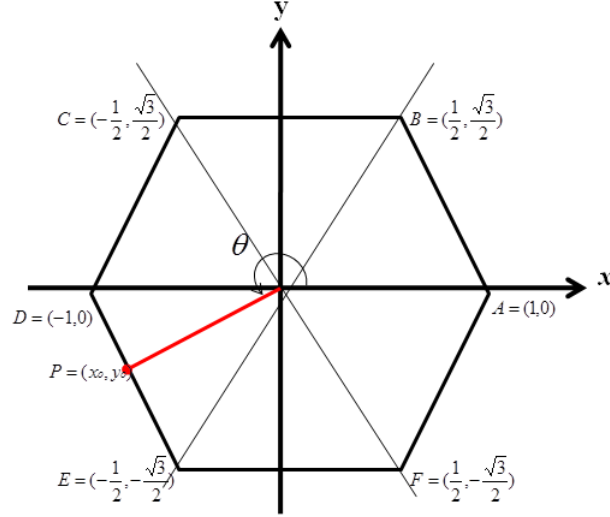
$$|PC|_I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}} \right| = 1 - \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}$$

ve bunun sonucu olarakta

$$\theta_I = 3 - \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}$$

bulunur.

IV. Bölgede: $\pi \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$ için;



Şekil 4.13 IV. bölgede θ_I yay uzunluğu

$\theta_I = 3 + |PD|_I$ eşitliği ile $(1,0)$ noktasından P noktasına olan çember yayının $d_{\pi/3}$ -uzunluğu bulunur. $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}x - \sqrt{3} &= x \cdot \tan \theta \rightarrow -\sqrt{3} = x \cdot \tan \theta + \sqrt{3}x \\ &\rightarrow -\sqrt{3} = x(\tan \theta + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{\tan \theta + \sqrt{3}} \text{ ve } y_0 = \frac{-\sqrt{3} \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}}$$

şeklinde bulunur. Buradan

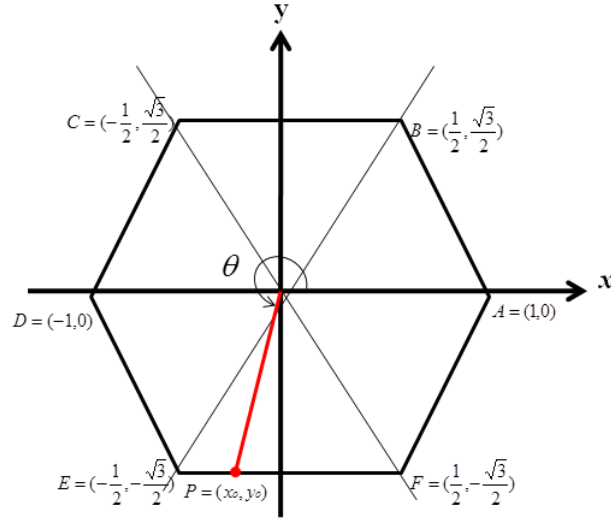
$$|PD|_I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{-\sqrt{3} \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}} \right| = \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}}$$

ve bunun sonucu olarakta

$$\theta_I = 3 + \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}}$$

bulunur.

V. Bölgede: $\frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$ için;



Şekil 4.14 V. bölgede θ_I yay uzunluğu

$\theta_I = 4 + |PE|_I$ eşitliği ile $(1,0)$ noktasından P noktasına olan çember yayının $d_{\pi/3}$ -uzunluğu bulunur. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = x \cdot \tan \theta \rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2 \tan \theta}$$

eşitliğinden

$$x_0 = \frac{-\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \text{ ve } y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

şeklinde bulunur. Buradan

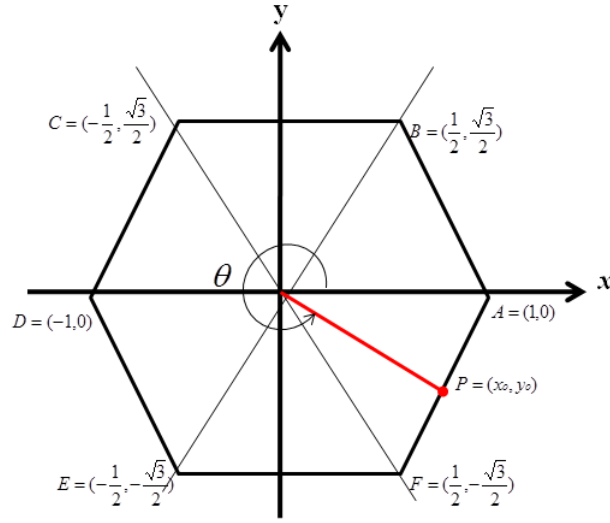
$$|PE|_I = \left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta} \right| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

ve bunun sonucu olarakta

$$\theta_I = \frac{9}{2} + \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}}$$

bulunur.

VI. Bölgede: $\frac{5\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi$ için;



Şekil 4.15 VI. bölgede θ_I yay uzunluğu

$\theta_I = 5 + |PF|_I$ eşitliği ile $(1,0)$ noktasından P noktasına olan çember yayının $d_{\pi/3}$ -uzunluğu bulunur. $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ ve $y = x \cdot \tan \theta$ doğrularının kesişim noktasının koordinatları

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x - \sqrt{3} &= x \cdot \tan \theta \rightarrow -\sqrt{3} = x \cdot \tan \theta - \sqrt{3}x \\ &\rightarrow -\sqrt{3} = x(\tan \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{\tan \theta - \sqrt{3}} \text{ ve } y_0 = -\frac{\sqrt{3} \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$|PF|_I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}} \right| = 1 - \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}$$

ve bunun sonucu olarak da

$$\theta_I = 6 - \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}$$

bulunur.

Bu bulunan θ_I değerleri;

$$\theta_I = \begin{cases} 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \tan \theta}, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \theta, & \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ 3 - \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}, & \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \\ 3 + \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}}, & \pi \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \\ \frac{9}{2} + \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta + \sqrt{3}}, & \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \\ 6 - \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - \sqrt{3}}, & \frac{5\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

şeklinde verilir.

Daha önce altı bölge için ayrı ayrı bulunan $\sin_I \theta$ ve $\cos_I \theta$ trigonometrik fonksiyonları gözönüne alındığında;

$$\sin_I \theta_I = \begin{cases} \theta_I & , 0 \leq \theta_I \leq 1 \\ 1 & , 1 \leq \theta_I \leq 2 \\ 3 - \theta_I & , 2 \leq \theta_I \leq 4 \\ -1 & , 4 \leq \theta_I \leq 5 \\ \theta_I - 6 & , 5 \leq \theta_I \leq 6 \end{cases}$$

$$\cos_I \theta_I = \begin{cases} 1 - \theta_I & , 0 \leq \theta_I \leq 2 \\ -1 & , 2 \leq \theta_I \leq 3 \\ \theta_I - 4 & , 3 \leq \theta_I \leq 5 \\ 1 & , 5 \leq \theta_I \leq 6 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

4.9 eşitliği kullanılarak I. bölge için

$$\begin{aligned} \sin_I \theta_I &= \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{[\sqrt{3} \cos(\theta+\psi) + \sin(\theta+\psi)][\sqrt{3} \cos \psi + \sin \psi]} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{[3 \cos(\theta+\psi) \cos \psi + \sqrt{3} \cos(\theta+\psi) \sin \psi + \sqrt{3} \sin(\theta+\psi) \cos \psi + \sin(\theta+\psi) \sin \psi]} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{[\cos(\theta+\psi-\psi) + \sqrt{3} \sin(\theta+2\psi) + 2 \cos(\theta+\psi) \cos \psi]} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{[\cos \theta + \sqrt{3} \sin(\theta+2\psi) + 2 \cos(\theta+\psi) \cos \psi]} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \cos_I \theta_I &= 1 - \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{[\cos \theta + \sqrt{3} \sin(\theta+2\psi) + 2 \cos(\theta+\psi) \cos \psi]} \\ &= \frac{\cos \theta + \sqrt{3} \sin(\theta+2\psi) + 2 \cos(\theta+\psi) \cos \psi - 2\sqrt{3} \sin \theta}{\cos \theta + \sqrt{3} \sin(\theta+2\psi) + 2 \cos(\theta+\psi) \cos \psi} \end{aligned} \quad (4.12)$$

bulunur. 4.11 ve 4.12 eşitliklerinde ψ yerine 0 ve θ yerinede ψ yazılırsa, bu durumda

$$\sin_I \psi_I = \frac{2\sqrt{3} \sin \psi}{3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi} \quad (4.13)$$

ve

$$\cos_I \psi_I = \frac{3 \cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi}{3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi} \quad (4.14)$$

elde edilir. Şimdi son bulunan 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 eşitlikleri kullanılarak \sin ve \cos Öklidyen trigonometrik fonksiyonları $\mathbb{R}_{\pi^2}^2$ -düzlemindeki trigonometrik fonksiyonlar

cinsinden bulunabilir. Burada

$$\begin{aligned}
 \sin_I \psi_I &= \frac{2\sqrt{3} \sin \psi}{3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi} \\
 \frac{1}{\sin_I \psi_I} &= \frac{3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi}{2\sqrt{3} \sin \psi} \\
 \frac{1}{\sin_I \psi_I} &= \frac{1}{2} + \frac{3 \cos \psi}{2\sqrt{3} \sin \psi} \\
 \frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} &= \frac{3 \cos \psi}{2\sqrt{3} \sin \psi} \\
 \frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} &= \frac{3\sqrt{1-\sin^2 \psi}}{2\sqrt{3} \sin \psi} \\
 \frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\sin^2 \psi}{\sin^2 \psi}}
 \end{aligned}$$

olur ve eşitliğin her tarafının karesi alınırsa

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} \right)^2 &= \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{1-\sin^2 \psi}{\sin^2 \psi}} \right)^2 \\
 \left(\frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} \right)^2 &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \psi} - 1 \right) \\
 \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} \right)^2 &= \frac{1}{\sin^2 \psi} - 1 \\
 \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sin_I \psi_I} - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 &= \frac{1}{\sin^2 \psi} \\
 \frac{4}{3} \left(\frac{2-\sin_I \psi_I}{2 \sin_I \psi_I} \right)^2 + 1 &= \frac{1}{\sin^2 \psi} \\
 \frac{4}{3} \left(\frac{4-4 \sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I}{4 \sin_I^2 \psi_I} \right) + 1 &= \frac{1}{\sin^2 \psi} \\
 \frac{16-16 \sin_I \psi_I + 4 \sin_I^2 \psi_I}{12 \sin_I^2 \psi_I} + \frac{12 \sin_I^2 \psi_I}{12 \sin_I^2 \psi_I} &= \frac{1}{\sin^2 \psi} \\
 \frac{4-4 \sin_I \psi_I + 4 \sin_I^2 \psi_I}{3 \sin_I^2 \psi_I} &= \frac{1}{\sin^2 \psi} \\
 \sin^2 \psi &= \frac{3 \sin_I^2 \psi_I}{4-4 \sin_I \psi_I + 4 \sin_I^2 \psi_I}
 \end{aligned}$$

bulunur ve sonuç olarak

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{3} \sin_I \psi_I}{2\sqrt{1 - \sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I}} \quad (4.15)$$

elde edilir. Ayrıca Öklidyen trigonometrik fonksiyonlar için $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ olduğundan, $\cos \psi$ trigonometrik fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \psi + \frac{3 \sin_I^2 \psi_I}{4-4 \sin_I \psi_I + 4 \sin_I^2 \psi_I} &= 1 \\
 \cos^2 \psi &= 1 - \frac{3 \sin_I^2 \psi_I}{4(1-\sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I)} \\
 \cos^2 \psi &= \frac{4-4 \sin_I \psi_I + 4 \sin_I^2 \psi_I - 3 \sin_I^2 \psi_I}{4(1-\sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I)} \\
 \cos^2 \psi &= \frac{4-4 \sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I}{4(1-\sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I)} \\
 \cos \psi &= \sqrt{\frac{4-4 \sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I}{4(1-\sin_I \psi_I + \sin_I^2 \psi_I)}}
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklinde bulunur. Buradan ψ referans açısı olacak şekilde verilen bir θ açısının \sin ve \cos Öklidyen trigonometrik fonksiyonları \sin_I ve \cos_I cinsinden elde edilebilir. Daha önce verilen

4.11 eşitliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin_I \theta_I} &= \frac{\cos \theta + \sqrt{3} \sin(\theta+2\psi) + 2 \cos(\theta+\psi) \cos \psi}{2\sqrt{3} \sin \theta} \\
\frac{1}{\sin_I \theta_I} &= \frac{\cos \theta}{2\sqrt{3} \sin \theta} + \frac{\sin(\theta+2\psi)}{2 \sin \theta} + \frac{\cos(\theta+\psi) \cos \psi}{\sqrt{3} \sin \theta} \\
\frac{1}{\sin_I \theta_I} &= \frac{\cos \theta}{2\sqrt{3} \sin \theta} + \frac{\sin \theta \cos 2\psi + \cos \theta \sin 2\psi}{2 \sin \theta} + \frac{(\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \cos \psi}{\sqrt{3} \sin \theta} \\
\frac{1}{\sin_I \theta_I} &= \frac{\cos \theta}{2\sqrt{3} \sin \theta} + \frac{\sin \theta \cos 2\psi + \cos \theta \sin 2\psi}{2 \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cos^2 \psi}{\sqrt{3} \sin \theta} - \frac{\sin \theta \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{3} \sin \theta} \\
\frac{1}{\sin_I \theta_I} + \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{3}} - \frac{\cos 2\psi}{2} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sin 2\psi}{2} + \frac{\cos^2 \psi}{\sqrt{3}} \right] \\
\frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{2\sqrt{3} \sin_I \theta_I} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left[\frac{1 + \sqrt{3} \sin 2\psi + 2 \cos^2 \psi}{2\sqrt{3}} \right] \\
\frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{\sin_I \theta_I + \sqrt{3} \sin 2\psi \sin_I \theta_I + 2 \cos^2 \psi \sin_I \theta_I} \\
\sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}} &= \frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{\sin_I \theta_I + \sqrt{3} \sin 2\psi \sin_I \theta_I + 2 \cos^2 \psi \sin_I \theta_I} \\
\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} &= \frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{\sin_I \theta_I + \sqrt{3} \sin 2\psi \sin_I \theta_I + 2 \cos^2 \psi \sin_I \theta_I} \\
\frac{1}{\sin^2 \theta} &= \frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{\sin_I \theta_I + \sqrt{3} \sin 2\psi \sin_I \theta_I + 2 \cos^2 \psi \sin_I \theta_I} + 1 \\
\sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{\sin_I \theta_I + \sqrt{3} \sin 2\psi \sin_I \theta_I + 2 \cos^2 \psi \sin_I \theta_I} \right]^2 + 1}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur ki 4.15 ve 4.16 eşitliklerinde bulunan $\sin \psi$ ve $\cos \psi$ değerleri hesaba katıldığında elde edilen denklem I. bölgede $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki ölçüsü bilinen bir açının Öklidyen sin değerinin bulunmasını sağlar. Benzer olarak

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

eşitliğini kullanarak

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left[\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2\sqrt{3} + 2 \sin_I \theta_I \sin \psi \cos \psi - \sqrt{3} \sin_I \theta_I \cos 2\psi}{\sin_I \theta_I + \sqrt{3} \sin 2\psi \sin_I \theta_I + 2 \cos^2 \psi \sin_I \theta_I} \right]^2 + 1}} \right]^2} \tag{4.18}$$

olarak bulunur. Burada 4.17 ve 4.18 eşitlikleri içerisindeki $\sin \psi$ ve $\cos \psi$ değerlerinin 4.15 ve 4.16 eşitliklerinde $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki trigonometrik fonksiyonlar cinsinden bulunduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Böylece son iki eşitlik ile I. bölgedeki Öklidyen bir açının sin ve cos değerlerinin trigonometrik fonksiyonlar cinsinden eşitini veren eşitlikler elde edildi. Bu bulunan değerler uzunlukların dönmeler altındaki değişimleri incelenirken verilen açının ölçüsünün yay uzunluğu cinsinden veya Öklidyen açı cinsinden verilmesine bakılmaksızın uzunluk değişimi ile ilgili bir eşitlik bulunmasına olanak sağlayacaktır. Bu eşitliklerdeki Öklidyen trigonometrik $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ değerleri I. bölgedeki açılar için geçerli değerlerdir. Benzer yol izlenerek, diğer bölgeler için $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin_I \theta_I$, $\cos_I \theta_I$ değerleri elde edilebilir.

4.6 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Uzunlukların Dönmeler Altındaki Değişimleri

Bu bölümde $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –düzlemindeki bir doğru parçasının uzunluğunun bir dönme altındaki değişimi bulunacaktır.

Teorem 4. OA , x -ekseni üzerinde olmayan ψ referans açılı ve $d_I(O, A) = k$ olacak şekilde bir doğru parçası olsun. Eğer OA' doğru parçası, OA doğru parçasının θ_I (veya θ) açılı, bir dönme altındaki resmi ise o zaman

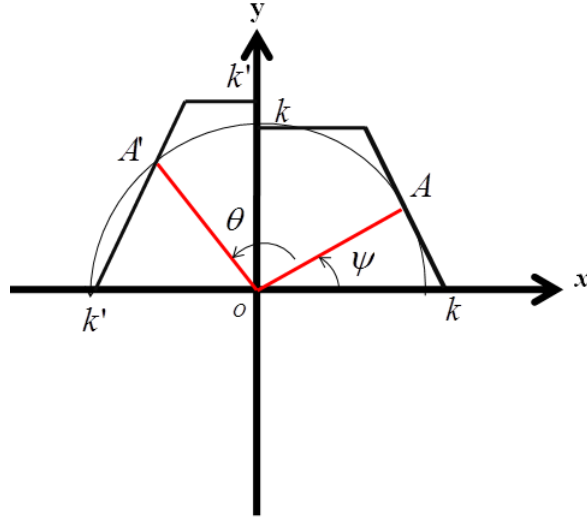
$$\begin{aligned} d_I(O, A') &= k \sqrt{\frac{\cos_I^2 \psi + \sin_I^2 \psi + \cos_I \psi \sin_I \psi}{\cos_I^2(\theta + \psi) + \sin_I^2(\theta + \psi) + \cos_I(\theta + \psi) \sin_I(\theta + \psi)}} \\ &= k \frac{3|\cos(\theta + \psi)| + \sqrt{3}|\sin(\theta + \psi)|}{|3 \cos \psi| + \sqrt{3}|\sin \psi|} \end{aligned}$$

olur.

İspat. OA doğru parçasının uzunluğu $d_I(O, A) = k$ olsun. OA doğru parçasının bir θ açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen doğru parçası OA' olsun. Eğer ψ açısı, θ açısının referans açısı ise o zaman

$$A = (k \cos_I \psi, k \sin_I \psi)$$

olur.

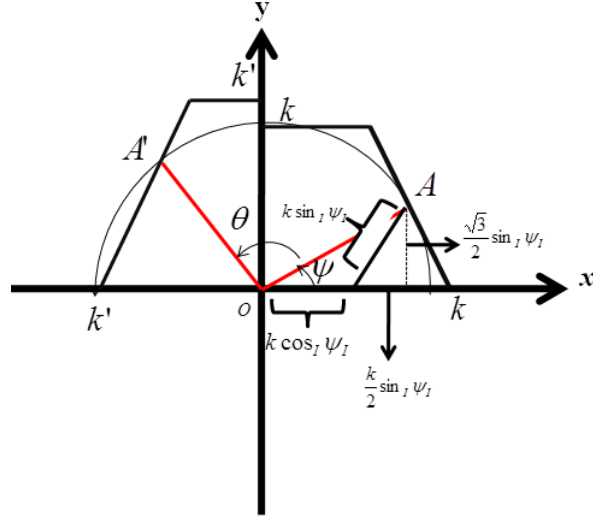


Şekil 4.16 OA doğru parçasının θ açısı kadar döndürülmesi

Burada $A' = (k' \cos_I(\theta + \psi)_I, k' \sin_I(\theta + \psi)_I)$ olacak şekilde $d_I(O, A') = k'$ uzunluğu hesaplanmak istenirse OA ve OA' doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının eşitliğinden

$$d_E(O, A) = d_E(O, A')$$

yazılabilir. Aşağıdaki şekilden görüleceği üzere



Şekil 4.17 ψ referans açılı OA doğru parçalarının Öklidyen trigonometrik fonksiyonlu gösterimi

$$(k \cos_I \psi_I + \frac{k}{2} \sin_I \psi_I)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} k \sin_I \psi_I)^2 =$$

$$(k' \cos_I(\theta + \psi)_I + \frac{k'}{2} \sin_I(\theta + \psi)_I)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} k' \sin_I(\theta + \psi)_I)^2$$

$$k^2 \cos_I^2 \psi_I + \frac{k^2}{4} \sin_I^2 \psi_I + k^2 \cos_I \psi_I \sin_I \psi + \frac{3}{4} k^2 \sin_I^2 \psi_I =$$

$$(k')^2 \cos_I^2(\theta + \psi)_I + (\frac{k'}{2})^2 \sin_I^2(\theta + \psi)_I + (k')^2 \cos_I(\theta + \psi)_I \sin_I(\theta + \psi)_I + \frac{3}{4} (k')^2 \sin_I^2(\theta + \psi)_I$$

$$k^2(\cos_I^2 \psi_I + \sin_I^2 \psi_I + \cos_I \psi_I \sin_I \psi) =$$

$$(k')^2(\cos_I^2(\theta + \psi)_I + \sin_I^2(\theta + \psi)_I + \cos_I(\theta + \psi)_I \sin_I(\theta + \psi)_I)$$

ve bunun sonucunda

$$k' = k \sqrt{\frac{\cos_I^2 \psi_I + \sin_I^2 \psi_I + \cos_I \psi_I \sin_I \psi}{\cos_I^2(\theta + \psi)_I + \sin_I^2(\theta + \psi)_I + \cos_I(\theta + \psi)_I \sin_I(\theta + \psi)_I}} \quad (4.19)$$

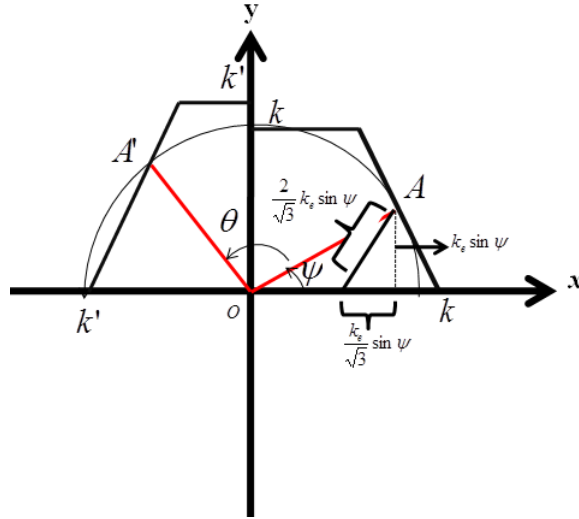
olur. 4.13 ve 4.14 eşitliğinde bulunan değerler 4.19 eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 k' &= k \sqrt{\frac{9 \cos^2 \psi + 3 \sin^2 \psi - 3\sqrt{3} \sin 2\psi}{(3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi)^2} + \frac{12 \sin^2 \psi}{(3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi)^2} + \frac{3\sqrt{3} \sin 2\psi - 6 \sin^2 \psi}{(3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi)^2}} \\
 &= k \sqrt{\frac{9 \cos^2(\theta + \psi) + 3 \sin^2(\theta + \psi) - 3\sqrt{3} \sin 2(\theta + \psi)}{(3 \cos(\theta + \psi) + \sqrt{3} \sin(\theta + \psi))^2} + \frac{12 \sin^2(\theta + \psi)}{(3 \cos(\theta + \psi) + \sqrt{3} \sin(\theta + \psi))^2} + \frac{3\sqrt{3} \sin 2(\theta + \psi) - 6 \sin^2(\theta + \psi)}{(3 \cos(\theta + \psi) + \sqrt{3} \sin(\theta + \psi))^2}} \\
 &= k \sqrt{\frac{1}{(3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi)^2}} \\
 &= k \sqrt{\frac{(3 \cos(\theta + \psi) + \sqrt{3} \sin(\theta + \psi))^2}{(3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi)^2}} \\
 &= k \frac{3|\cos(\theta + \psi)| + \sqrt{3}|\sin(\theta + \psi)|}{|3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi|}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde

$$d_E(O, A) = d_E(O, A')$$

eşitliğini kullanarak 4.17 ve 4.18 eşitliklerinde Öklidyen düzlemdeki bir Öklidyen açının $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ değerlerinin yay uzunluğu cinsinden eşitlikleri elde edilmişti. O halde tekrar Öklidyen uzunlukların eşitliğinden ve aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere



Şekil 4.18 ψ referans açılı OA doğru parçasının Öklidyen trigonometrik fonksiyonlu gösterimi

$$\begin{aligned}
 d_I(O, A) &= k = \left| k_e \cos \psi - \frac{1}{\sqrt{3}} k_e \sin \psi \right| + \left| \frac{2}{\sqrt{3}} k_e \sin \psi \right| \\
 &= \left| k_e \cos \psi \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{3}} k_e \sin \psi \right| \\
 &= k_e \left(|\cos \psi| + \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \psi \right| \right)
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada k_e ifadesi k nın Öklidyen uzunluğunu göstermek üzere

$$k_e = \frac{k}{|\cos \psi| + \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \psi \right|}$$

bulunur. Yine

$$\begin{aligned} d_I(O, A') &= k' = \left| k_e \cos(\theta + \psi) - \frac{1}{\sqrt{3}} k_e \sin(\theta + \psi) \right| + \left| \frac{2}{\sqrt{3}} k_e \sin(\theta + \psi) \right| \\ &= |k_e \cos(\theta + \psi)| + \frac{1}{\sqrt{3}} |k_e \sin(\theta + \psi)| \\ &= k_e \left(|\cos(\theta + \psi)| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\sin(\theta + \psi)| \right) \end{aligned}$$

ve

$$k_e = \frac{k'}{|\cos(\theta + \psi)| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\sin(\theta + \psi)|}$$

olur. Bu iki doğru parçasının Öklidyen uzunluklarının eşitliğinden

$$\frac{k}{|\cos \psi| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\sin \psi|} = \frac{k'}{|\cos(\theta + \psi)| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\sin(\theta + \psi)|}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} d_I(O, A') &= k' = k \frac{|\cos(\theta + \psi)| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\sin(\theta + \psi)|}{|\cos \psi| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\sin \psi|} \\ &= k \frac{3|\cos(\theta + \psi)| + \sqrt{3} |\sin(\theta + \psi)|}{3|\cos \psi| + \sqrt{3} |\sin \psi|} \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur ki, bu ise Öklidyen sin ve cos fonksiyonları cinsinden eşitliği verir.

Aşağıdaki sonuç, standart formdaki θ açılı bir dönmenin neticesinde uzunluğun değişiminin nasıl bulunacağını gösterir.

Sonuç 5. OA , x -ekseni üzerinde bir doğru parçası olsun. Eğer OA doğru parçasının θ_I açılı bir dönme altındaki (veya standart formdaki bir θ açısının) görüntüsü OA' ise o zaman 4.20 eşitliğinde $\psi = 0$ alarak

$$d_I(O, A') = k' = k \frac{3|\cos \theta| + \sqrt{3} |\sin \theta|}{3}$$

eşitliği elde edilir.

4.7 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —Düzleminde İç Çarpım Aracılığıyla Açılı Ölçüsü Tanımlama

Bu bölümde açıyı ölçmenin yaygın yollarından bir tanesi olan iç çarpım aracılığıyla bir vektörün x -ekseniyle pozitif yönde yaptığı açının θ_I ölçüsünü tanımlanacaktır. Bu tanımlamaya geçmeden önce bu tanımlı yapmada bize yardımcı olacak bir önermenin ispatı verilecektir. Bu önermenin ispatı içerisindeki bir vektörün normunu belirleme yöntemi, yeni bir bakış açısı sunacağından dolayı bu önermeye değinme gereksinimi doğmuştur. Daha önce her d_{π_n} -uzaklığının bir metrik belirttiği A. Bayar ve R. Kaya (Bayar ve Kaya, 2011) tarafından gösterilmiştir. Bu önermenin $n = 3$ hali olan d_{π_3} -uzaklıklarının bir metrik belirttiği özel durumu şu şekilde verilir.

Önerme 1. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde her d_{π_3} -uzaklığı bir metrik belirtir.

İspat. Bitiş noktası $A = (x, y)$ koordinatı ile verilen bir $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ (O , orjin) yer vektörü göz önüne alınsın. Bu vektörün normu başlangıç ve bitiş noktalarının koordinatları kullanılarak

$$\|\vec{u}\|_{\pi_3} = \begin{cases} |x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y| & , \quad 0 \leq \left|\frac{y}{x}\right| \leq \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}|y| & , \quad \sqrt{3} \leq \left|\frac{y}{x}\right| < \infty \end{cases}$$

ile bulunabilir. Ayrıca eğer \vec{u} vektörü \vec{v}_k ve \vec{v}_{k+1} vektörleri tarafından belirtilen bölge üzerinde ise $\|\vec{u}\|_{\pi_3}$ vektörünün normunu bir başka ifade ile

$$\|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_k \cdot \vec{u}$$

bulunabilir. Burada \vec{u}_k vektör değerlerini veren denklemler ile birim çemberinin herbir bölgesini ayıran köşe vektörleri

$$\begin{aligned} \vec{u}_k &= \left(\frac{\sin \frac{k\pi}{3} - \sin \frac{(k-1)\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}, \frac{\cos \frac{(k-1)\pi}{3} - \cos \frac{k\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right) , \\ \vec{v}_k &= \left(\cos \frac{(k-1)\pi}{3}, \sin \frac{(k-1)\pi}{3} \right) , \quad k = \{1, 2, 3, \dots, 6\} \end{aligned}$$

şeklinde belirlenebilir. Bu eşitlikleri k 'nın değerlerine göre yerine yazarak

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) , & \vec{u}_2 &= \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) , & \vec{u}_3 &= \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \vec{u}_4 &= \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) , & \vec{u}_5 &= \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right) , & \vec{u}_6 &= \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (1, 0) , & \vec{v}_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) , & \vec{v}_3 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \vec{v}_4 &= (-1, 0) , & \vec{v}_5 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) , & \vec{v}_6 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

değerleri elde edilir.

$\|\cdot\|_{\pi_3}$ 'ün norm özelliklerini sağladığı gösterilebilir. \vec{u} vektörünün eğimi m olmak üzere;

i) Eğer \vec{u} vektörünün eğimi $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ ise $|x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y| \geq 0$ dir.

$$|x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y| = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \text{ yani } \vec{u} = 0 \text{ dir.}$$

Eğer \vec{u} vektörünün eğimi $\sqrt{3} \leq |m| \leq \infty$ ise $\frac{2}{\sqrt{3}}|y| \geq 0$ dir.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}|y| = 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ yani } \vec{u} = 0 \text{ dir.}$$

ii) Eğer \vec{u} vektörünün eğimi $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$\|\alpha \vec{u}\|_{\pi_3} = |\alpha x| + \frac{1}{\sqrt{3}} |\alpha y| = \alpha |x| + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} |y| = \alpha \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y| \right) = |\alpha| \|\vec{u}\|_{\pi_3} \text{ dir.}$$

Eğer \vec{u} vektörünün eğimi $\sqrt{3} \leq |m| \leq \infty$ ise

$$\|\alpha \vec{u}\|_{\pi_3} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\alpha y| = |\alpha| \frac{2}{\sqrt{3}} |y| = |\alpha| \|\vec{u}\|_{\pi_3} \text{ dir.}$$

Üçgen eşitsizliğinin ispatı şu şekilde verilir;

$$\text{iii) } \|\vec{u} + \vec{v}\|_{\pi_3} \leq \|\vec{u}\|_{\pi_3} + \|\vec{v}\|_{\pi_3}, \vec{u} \text{ ve } \vec{v} \text{ vektörleri için;}$$

Bu eşitsizlik $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{u}\|_{\pi_3} \leq 1\}$ kapalı birim yuvarın konveksliğinin eşitliğinden ve $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ üzerindeki norm fonksiyonundan elde edilebilir. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde \vec{x} vektörlerinin kümesi olan birim çember $\vec{u}_k \cdot \vec{x} = 1$ eşitliğini sağlar. Ayrıca bu altıgen çemberin köşe noktalarının koordinatları

$$\vec{v}_k = \left(\cos \frac{(k-1)\pi}{3}, \sin \frac{(k-1)\pi}{3} \right), k = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$$

olarak biliniyor. Şimdi bir $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ (O , orjin) vektörü göz önüne alındığında \vec{v} vektörü yine \vec{v}_k ve \vec{v}_{k+1} vektörleri tarafından belirlenen bölge üzerinde bulunuyorsa o zaman benzer şekilde $\|\vec{v}\|_{\pi_3} = \vec{u}_k \cdot \vec{v}$ yazılabilir. Buna denk olarak, t_k ve t_{k+1} negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$\vec{v} = t_k \vec{v}_k + t_{k+1} \vec{v}_{k+1}$$

yazılabilir ve

$$\|\vec{v}\|_{\pi_3} = t_k + t_{k+1}$$

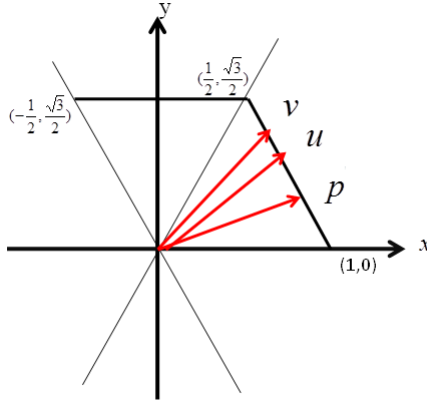
olur. Ayrıca bir birim çemberin içerisindeki yer vektörleri 1' den küçük ve birim çemberin dışındaki vektörler 1' den büyük norma sahiptir. Şimdi ispatın son kısmı için bitiş noktasının koordinatı $P = (x_3, y_3)$ olacak şekilde bir \overrightarrow{OP} yer vektörü göz önüne alınsın.

Buradan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VP} \\ &= \overrightarrow{OV} + t\overrightarrow{VU} \\ &= \overrightarrow{OV} + t(\overrightarrow{OU} - \overrightarrow{OV}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OV} + t\overrightarrow{OU} \\ &= t\vec{u} + (1-t)\vec{v} \end{aligned}$$

olur ki birim çember üzerindeki \vec{u} , \vec{v} , ve \vec{p} vektörleri ve $0 \leq t \leq 1$ için birim kürenin konveksliğinden $t\vec{u} + (1-t)\vec{v}$ vektörü ya birim çemberin üzerinde ya da içindedir. Böylece

$$\|t\vec{u} + (1-t)\vec{v}\|_{\pi_3} \leq 1$$

Şekil 4.19 v, u, p vektörleri

dir. $a, b > 0$ için $t = \frac{a}{a+b}$ kümesi üçgen eşitsizliğini elde etmek için

$$\frac{\|a\vec{u} + b\vec{v}\|_{\pi_3}}{a+b} = \left\| \frac{a}{a+b}\vec{u} + \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\vec{v} \right\|_{\pi_3} \leq 1$$

ve buradan

$$\|a\vec{u} + b\vec{v}\|_{\pi_3} \leq a+b = a\|\vec{u}\|_{\pi_3} + b\|\vec{v}\|_{\pi_3}$$

bulunur. Böylece üçgen eşitsizliği sıfırdan farklı keyfi $a\vec{u}$ ve $b\vec{v}$ vektörleri için sağlanır. Burada eğer \vec{u} ve \vec{v} vektörleri aynı bölgede ise o zaman $\|\vec{u} + \vec{v}\|_{\pi_3} = \|\vec{u}\|_{\pi_3} + \|\vec{v}\|_{\pi_3}$ olur ki, bu da ispatı tamamlar.

Şimdi bu önermeden elde edilen bilgilerden yola çıkarak bir vektörün x - eksenini ile yaptığı açığı iç çarpım aracılığıyla elde etmeyi sağlayacak eşitlikler bulunabilir.

4.7.1 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde Bir Vektörün Açısının Ölçüsünü İç Çarpım Aracılığıyla Tanımlama

Aşağıdaki tanımlar eşitliklerin gösteriminde yardımcı olacak tanımlardır.

Tanım 5. Bir V vektör uzayının $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektörleri verilsin. t_1, t_2, \dots, t_n gerçel sayılar olmak üzere bir $\vec{u} \in V$ vektörü

$$\vec{u} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \dots + t_n\vec{x}_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa, yani bu yazılışı sağlayacak şekilde t_1, t_2, \dots, t_n gerçel sayıları bulunabiliyorsa \vec{u} vektörü $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektörlerinin lineer birleşimidir denir.

Tanım 6. V vektör uzayı ve V nin t_1, t_2, \dots, t_n vektörlerinin kümesi S olsun. $L(S)$ alt uzayına S 'nin gerdiği alt uzay denir. Eğer V vektör uzayındaki her \vec{u} vektörü S deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabiliyorsa yani kısaca, $\vec{u} \in V$ için $\vec{u} \in L(S)$ ise S kümesi V vektör uzayını gerer denir.

Teorem 5. $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzleminde $\vec{u} = (x_1, y_1)$ koordinatlı vektör göz önüne alınsın. $\vec{w} = (x_2, 0)$ vektörü x -ekseni üzerinde bir vektör olmak üzere, \vec{u} vektörünün x -ekseni ile arasındaki açının ölçüsü iç çarpım aracılığıyla

$$\cos_I \theta = \begin{cases} \frac{x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_1}{|x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1|}, & I, III, IV, VI \text{ için} \\ \frac{x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_1}{\frac{2}{\sqrt{3}}|y_1|}, & II, V \text{ için} \end{cases}$$

eşitliği ile verilir.

İspat. Bu düzlemdeki $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{v}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ vektörlerinin düzlemi gerdiği ve bu düzlemdeki her vektörün bu iki vektörün bir lineer birleşimi olarak yazılabileceği şu şekilde gösterilir. $\vec{u} = (x_1, y_1)$ olacak şekilde bir

$$\vec{u} = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2$$

vektörü göz önüne alınsın. Burada t_1 ve t_2 değerleri katsayı değerleri olmak üzere, bu durumda

$$(x_1, y_1) = t_1(1, 0) + t_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

yazılabilir ve buradan t_1 ve t_2 değerleri hesaplanırsa

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = t_1 + \frac{t_2}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}t_2 \end{array} \right\} \rightarrow t_1 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_1, \quad t_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}y_1$$

elde edilir. Burada her bir \vec{u} vektörü için t_1 ve t_2 gerçel değerleri bulunabileceğinden, \vec{v}_1 ve \vec{v}_2 vektörleri düzlemi gerer ve bu düzlemdeki her vektör \vec{v}_1 ve \vec{v}_2 vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Benzer şekilde $\vec{w} = (x_2, y_2)$ ve

$$\vec{w} = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2$$

olacak şekilde bir vektör olsun. Bu iki vektörün skaler çarpımları

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= (t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2)(k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2) \\ &= t_1 k_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + t_1 k_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle + t_2 k_1 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle + t_2 k_2 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \\ &= t_1 k_1 + t_2 k_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\vec{w} = (x_2, y_2)$ vektörünü özel olarak $\vec{w} = (x_2, 0)$ olacak şekilde x -ekseni üzerinde bir vektör olarak seçilsin. Bu durumda

$$\vec{w} = k_1 \vec{v}_1$$

yazılabilir ve

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{w} &= (t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2)(k_1 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2) \\
 &= t_1 k_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + t_1 \cdot 0 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle + t_2 k_1 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle + t_2 \cdot 0 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \\
 &= t_1 k_1 \\
 &= (x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_1) x_2
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu iki vektör arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos_I \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|} \quad (4.21)$$

olduğu biliniyor. Bir önceki önermeden, \vec{u} vektörünün normu

$$\|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_k \cdot \vec{u}$$

olarak hesaplanabilir. Bu durumda \vec{u} vektörünün normu bulunduğu bölgelere göre aşağıdaki şekilde;

$$\begin{aligned}
 I. \text{ Bölge} &\rightarrow \|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_1 \cdot \vec{u} = (1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (x_1, y_1) = |x_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1| \\
 II. \text{ Bölge} &\rightarrow \|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_2 \cdot \vec{u} = (0, \frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot (x_1, y_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} |y_1| \\
 III. \text{ Bölge} &\rightarrow \|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_3 \cdot \vec{u} = (-1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (x_1, y_1) = |x_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1| \\
 IV. \text{ Bölge} &\rightarrow \|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_4 \cdot \vec{u} = (-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (x_1, y_1) = |x_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1| \\
 V. \text{ Bölge} &\rightarrow \|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_5 \cdot \vec{u} = (0, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot (x_1, y_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} |y_1| \\
 VI. \text{ Bölge} &\rightarrow \|\vec{u}\|_{\pi_3} = \vec{u}_6 \cdot \vec{u} = (1, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (x_1, y_1) = |x_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1|
 \end{aligned}$$

bulunabilir. Bu tabloyu biraz daha sade şekilde göstermek gerekirse, \vec{u} vektörünün normu

$$\|\vec{u}\|_{\pi_3} = \begin{cases} |x_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1|, & I, III, IV, VI \text{ için} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} |y_1|, & II, V \text{ için} \end{cases}$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde \vec{w} vektörünün normu

$$\|\vec{w}\|_{\pi_3} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w} \rightarrow \|\vec{w}\|_{\pi_3} = (1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot (x_2, 0) = x_2$$

olarak yazılabilir. Son olarak tüm bulunan değerler 4.21 eşitliğinde yerine yazılırsa \vec{u} ve \vec{w} vektörleri arasındaki açı

$$\cos_I \theta = \begin{cases} \frac{x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_1}{|x_1| + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1|}, & I, III, IV, VI \text{ için} \\ \frac{x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_1}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1|}, & II, V \text{ için} \end{cases} \quad (4.22)$$

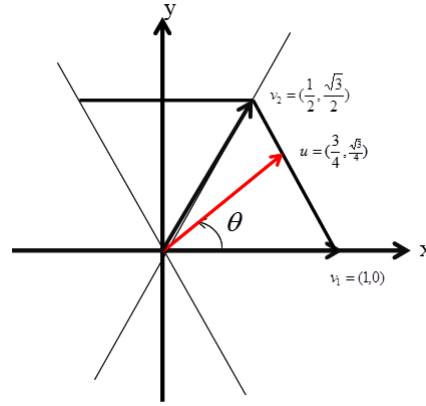
şeklinde bulunur.

Bu ifadeler aşağıdaki gibi örneklendirilebilir.

Örnek 2. $\vec{u} = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ olacak şekilde bitiş noktası birim çemberi üzerinde ve \vec{v}_1 ve \vec{v}_2 birim vektörleri tarafından belirlenen I. bölgede Öklidyen koordinatlı bir vektör olsun. Bu vektörün θ açısının $\cos_I \theta$ değeri 4.22 eşitliği aracılığıyla

$$\cos_I \theta = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Daha önce Öklidyen düzlemde verilen bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları bulunup, θ açısının bazı değerleri için tablo düzenlenmişti. Bu eşitlik $\theta = \frac{\pi}{6}$ için doğrudur ve buradan \vec{u} vektörünün x -ekseni ile arasındaki pozitif yönlü açının $\frac{\pi}{6}$ olduğu söylenebilir.



Şekil 4.20 Örnek 2

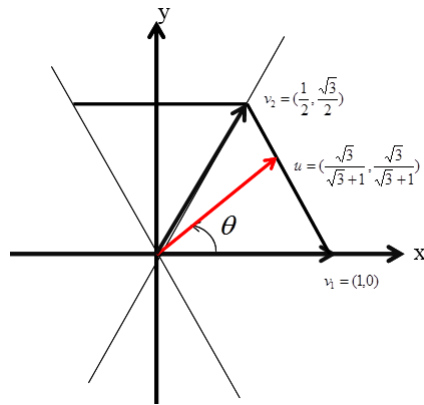
Örnek 3. $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1})$ olacak şekilde bitiş noktası birim çemberi üzerinde ve \vec{v}_1 ve \vec{v}_2 birim köşe vektörleri tarafından belirlenen I. bölgede Öklidyen koordinatlı bir vektör olsun. Bu vektörün θ açısının $\cos_I \theta$ değeri 4.22 eşitliği aracılığıyla

$$\cos_I \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

olarak bulunur. Daha önce Öklidyen düzlemde verilen bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları bulunup, θ açısının bazı değerleri için tablo düzenlenmişti. Bu eşitlik $\theta = \frac{\pi}{4}$ için doğrudur ve buradan \vec{u} vektörünün x -ekseni ile arasındaki pozitif yönlü açının $\frac{\pi}{4}$ olduğu söylenebilir.

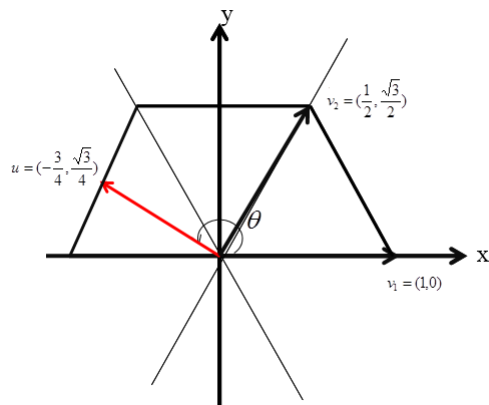
Örnek 4. $\vec{u} = (-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ olacak şekilde düzlemin III. bölgesinde bir vektör olsun. Bu vektörün θ açısının $\cos_I \theta$ değeri 4.22 denklemi aracılığıyla

$$\cos_I \theta = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = -1$$



Şekil 4.21 Örnek 3

olarak bulunur.



Şekil 4.22 Örnek 4

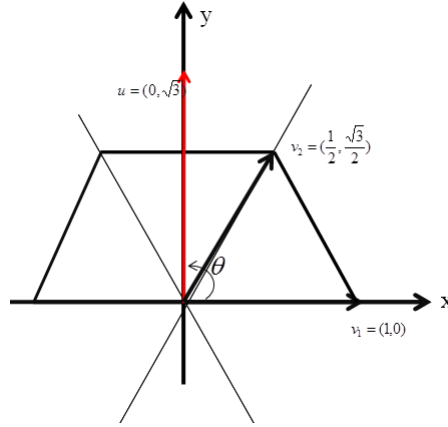
Daha önce Öklidyen düzlemde verilen bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları bulunup, θ açısının bazı değerleri için tablo düzenlenmişti.

Bu eşitlik III. bölgede $\theta = \frac{5\pi}{6}$ için doğrudur ve buradan \vec{u} vektörünün x -ekseni ile arasındaki pozitif yönlü açının $\frac{5\pi}{6}$ olduğu söylenebilir.

Örnek 5. $\vec{u} = (0, \sqrt{3})$ olacak şekilde düzlemin II. bölgesinde bir vektör olsun. Bu vektörün θ açısının $\cos_I \theta$ değeri 4.22 denklemi aracılığıyla

$$\cos_I \theta = \frac{0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Daha önce Öklidyen düzlemde verilen bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları bulunup, θ açısının bazı değerleri için tablo düzenlenmişti. Bu eşitlik II. bölgede $\theta = \frac{\pi}{2}$ için doğrudur ve buradan \vec{u} vektörünün x -ekseni ile arasındaki pozitif yönlü açının $\frac{\pi}{2}$ olduğu söylenebilir.



Şekil 4.23 Örnek 5

5. ÜÇGENLERLE İLGİLİ BAZI TEOREMLERİN $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -DÜZLEMİNDEKİ VERSİYONLARI

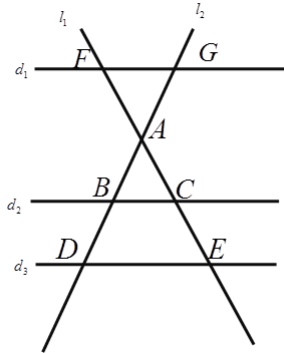
Bu bölümde, üçgenlerle ilgili bazı teoremlerin $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzlemindeki versiyonları elde edilecektir. Ancak $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzleminde kenar uzunlukları ile verilen bir üçgen genel olarak tek türlü belli olmadığı için, bu teoremlerin $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzlemindeki versiyonlarında kullanılacak parametreler, \mathbb{R}^2 -düzleminde kullanılan parametrelerle farklılık gösterebilecektir. İncelenecek teoremlerin $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -düzlemindeki versiyonları burada kullanılan parametreler dışında başka parametreler ile elde edilebilir. Fakat burada amaç, elde edilecek formülün \mathbb{R}^2 -düzlemindeki formuna biçimsel olarak benzemesi olacaktır.

5.1 $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ -Düzleminde Thales Bağlıları

M.Ö. 624 – 545 yılları arasında Anadolu’ da yaşamış olan Thales, felsefenin ve bilimin öncüsü olarak adlandırılır. Eski Yunan’ ın yedi bilgesinden ilkidir ve kendi adıyla anılan bilinen geometride önemli bir yer bulan Thales bağlantılarını da bulan kişidir. Bu bağlantılara göre Öklidyen düzlemde birbirleriyle kesişen iki doğru, paralel üç doğru tarafından kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani, Şekil 5.1 de $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ve $l_1 \nparallel l_2$ ise

$$i. \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} \quad ii. \frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

dir. (Şekil 5.1)

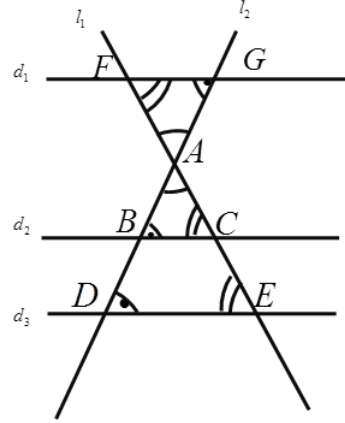


Şekil 5.1 \mathbb{R}^2 de Thales bağlantıları

Bu bağıntıların ispatı şu şekilde verilebilir.

İspat. ABC ve ADE üçgenlerinin (A.A.A) benzerliğinden $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$;

ABC ve AGF üçgenlerinin (A.A.A) benzerliğinden $\frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$ elde edilir.



Şekil 5.2 \mathbb{R}^2 de Thales bağıntılarında açı benzerlikleri

Teorem 6. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde kesişen iki doğru, paralel üç doğruyla kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani, Şekil 5.1 de bağlı kalarak $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ve $l_1 \nparallel l_2$ ise;

$$i. \frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, D)} = \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, E)} = \frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(D, E)} \quad ii. \frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, G)} = \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, F)} = \frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(F, G)}$$

olur.

İspat. A, B, D ve A, C, E noktaları doğruduş olduğundan 3.7 eşitliği gereğince;

$$\frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, D)} \text{ ve } \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, E)} = \frac{d_E(A, C)}{d_E(A, E)}$$

dir. Bu durumda \mathbb{R}^2 -düzleminde Thales bağıntısından

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, D)} = \frac{d_E(A, C)}{d_E(A, E)}$$

yazılabileceğinden

$$\frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, D)} = \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, E)}$$

olur. Şimdi d_1 doğrusunun eğimi m olsun. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olduğundan d_2 ve d_3 doğrularının eğimleri de m olur. 3.5 eşitliği gereğince;

i) $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ için;

$$d_{\pi_3}(B, C) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C)$$

$$d_{\pi_3}(D, E) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(D, E)$$

olduğundan

$$\frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(D, E)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(D, E)} = \frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)}$$

bulunur.

ii) $\sqrt{3} \leq |m|$ için;

$$d_{\pi_3}(B, C) = \left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C) \text{ ve } d_{\pi_3}(D, E) = \left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(D, E)$$

olduğundan

$$\frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(D, E)} = \frac{\left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C)}{\left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(D, E)} = \frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)}$$

bulunur.

iii) $|m| \rightarrow \infty$ için;

$$d_{\pi_3}(B, C) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(B, C) \text{ ve } d_{\pi_3}(D, E) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(D, E)$$

olduğundan

$$\frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(D, E)} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(B, C)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(D, E)} = \frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$\frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, D)} = \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, E)} = \frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(D, E)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde A, B, G noktaları ve A, C, F noktaları doğrudan olduğundan. 3.7 eşitliği gereğince;

$$\frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, G)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, G)} \text{ ve } \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, F)} = \frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)}$$

dir. Bu durumda \mathbb{R}^2 -düzleminde Thales bağıntısından

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, G)} = \frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)}$$

yazılabileceğinden

$$\frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, G)} = \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, F)}$$

olur. Şimdi d_1 doğrusunun eğimi m olsun. $d_1 \parallel d_2$ olduğundan d_2 doğrusunun eğimi de m olur. 3.5 eşitliği gereğince;

i) $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ için;

$$d_{\pi_3}(B, C) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C)$$

$$d_{\pi_3}(F, G) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(F, G)$$

olduğundan

$$\frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(F, G)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(F, G)} = \frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(F, G)}$$

bulunur.

ii) $\sqrt{3} \leq |m|$ için;

$$d_{\pi_3}(B, C) = \left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C) \text{ ve } d_{\pi_3}(F, G) = \left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(F, G)$$

olduğundan

$$\frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(F, G)} = \frac{\left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(B, C)}{\left(\frac{2|m|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}} \right) \cdot d_E(F, G)} = \frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)}$$

bulunur.

iii) $|m| \rightarrow \infty$ için;

$$d_{\pi_3}(B, C) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(B, C) \text{ ve } d_{\pi_3}(F, G) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(F, G)$$

olduğundan

$$\frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(F, G)} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(B, C)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot d_E(F, G)} = \frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$\frac{d_{\pi_3}(A, B)}{d_{\pi_3}(A, G)} = \frac{d_{\pi_3}(A, C)}{d_{\pi_3}(A, F)} = \frac{d_{\pi_3}(B, C)}{d_{\pi_3}(F, G)}$$

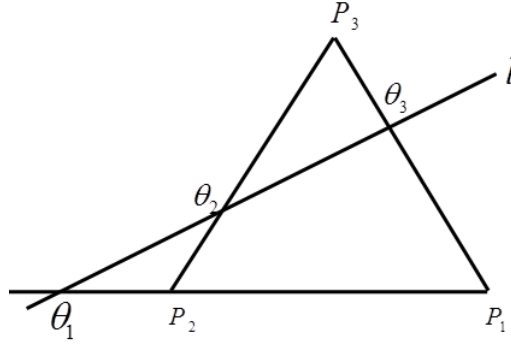
elde edilir.

5.2 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ —Düzleminde Menelaus Teoremi

M.S. 70 – 140 yaşamış olan Yunan matematikçi Menelaus hakkında çok az bilgi bulunur. İskenderiye’ de yaşamış olan Menelaus, yayların ölçümü ve küresel üçgenlere ilişkin altı ciltlik eserinde küresel üçgenlerin tanımını ve temel özelliklerini verdikten sonra, günümüzde Menelaus teoremi olarak bilinen düzlem ve küresel üçgenlere ilişkin teoremini tanıtır. Bu teorem şöyledir: $P_1P_2P_3$, \mathbb{R}^2 —düzleminde herhangi bir üçgen ve l doğrusu da bu üçgenin iki kenarını, örneğin P_1P_3 ve P_3P_2 kenarlarını sırasıyla üçgenin köşe noktalarından farklı θ_3 ve θ_2 noktalarında kesen bir doğru olsun. l doğrusunun P_1P_2 kenarının uzantısını kestiği nokta θ_1 ise

$$\frac{|\theta_1P_2|}{|\theta_1P_1|} \cdot \frac{|P_1\theta_3|}{|\theta_3P_3|} \cdot \frac{|P_3\theta_2|}{|\theta_2P_2|} = 1$$

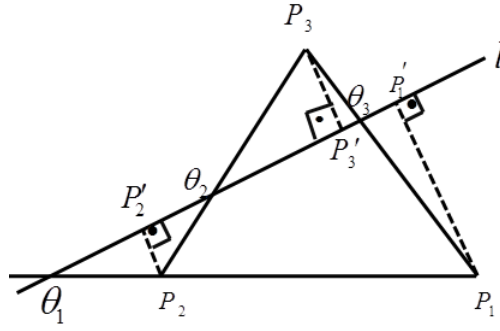
dir.



Şekil 5.3 \mathbb{R}^2 de Menelaus teoremi

Bu teoremin ispatı şu şekilde verilebilir.

İspat. P_1, P_2, P_3 köşelerinden l doğrusuna indirilen dikmelerin l doğrusunu kestiği noktalar sırasıyla P'_1, P'_2 ve P'_3 olsun. Bu durumda $P_1P'_1\theta_3 \sim P_3P'_3\theta_3$, $P_3P'_3\theta_2 \sim P_2P'_2\theta_2$ ve $\theta_1P_2P'_2 \sim \theta_1P_1\theta_3$ üçgenleri benzerdir. O halde



Şekil 5.4 \mathbb{R}^2 de Menelaus teoremi için benzer üçgenler

$$\frac{|P_1P_1'|}{|P_3P_3'|} = \frac{|P_1\theta_3|}{|\theta_3P_3|}, \quad \frac{|P_3P_3'|}{|P_2P_2'|} = \frac{|P_3\theta_2|}{|\theta_2P_2|}, \quad \frac{|P_2P_2'|}{|P_1P_1'|} = \frac{|\theta_1P_2|}{|\theta_1P_1|}$$

yazılabilir. Son denklemde, sol ve sağ taraftaki oranlar kendi aralarında çarpılırsa

$$\frac{|\theta_1P_2|}{|\theta_1P_1|} \cdot \frac{|P_1\theta_3|}{|\theta_3P_3|} \cdot \frac{|P_3\theta_2|}{|\theta_2P_2|} = 1$$

elde edilir.

Burada Menelaus teoreminin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonunu bulmak için M. Özcan ve R. Kaya'nın taxicab düzlemdeki Menelaus teoreminin ispatında kullandığı yönlü uzunluklar ve bölme noktası kavramları kullanılacaktır (Özcan ve Kaya, 2002). Bunun için Menelaus teoreminin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonu verilmeden önce $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki yönlü uzunluklar ve bölme noktası kavramları tanımlanacaktır.

5.2.1 Yönlü $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Uzunluklar ve Bölme Noktası

Tanım 7. X ve Y noktaları, yönlü l doğrusu üzerinde herhangi iki nokta olsun. XY doğru parçasının yönlü d_{π_3} -uzunluğu

$$d_{\pi_3}[XY] = \begin{cases} d_{\pi_3}(X, Y), & XY \text{ ve } l \text{ doğrusu aynı doğrultuya sahipse} \\ -d_{\pi_3}(X, Y), & XY \text{ ve } l \text{ doğrusu ters doğrultuya sahipse} \end{cases}$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla, $d_{\pi_3}[XY] = -d_{\pi_3}[YX]$ dir.

Eğer A, B, C noktaları aynı yönlü doğru üzerinde doğrular ve C noktası da A ve B noktaları arasında ise bu doğru ACB şeklinde gösterilir. Eğer ACB ise o zaman C noktası

AB doğru parçasını içten böler ve yönlü $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -uzunluğunun oranı bir pozitif reel sayıdır. Yani

$$\frac{d_{\pi_3}[AC]}{d_{\pi_3}[CB]} = \lambda > 0$$

dır. Eğer ABC veya CAB ise o zaman C noktası AB doğru parçasını dıştan böler ve yönlü $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -uzunluğunun oranı bir negatif reel sayıdır. Yani

$$\frac{d_{\pi_3}[AC]}{d_{\pi_3}[CB]} = \lambda < 0$$

dır. Her iki durumda da C noktası AB doğru parçasını λ oranında bölen *bölme noktası* olarak adlandırılır.

Açıkça, $C \neq B$ dir. $C = A \Leftrightarrow \lambda = 0$ ve (C sonsuzda $\Leftrightarrow \lambda = -1$).

C ve C' iki nokta olsun, öyleki; verilen AB doğru parçasını C noktası içten, C' noktası dıştan ve aynı oranda böler ise bu durumda, yönlü uzunlukların oranı

$$\frac{d_{\pi_3}[AC]}{d_{\pi_3}[CB]} = -\frac{d_{\pi_3}[AC']}{d_{\pi_3}[C'B]} = \lambda$$

olur.

Teorem 7. $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iki farklı nokta olsun. Eğer $\theta = (x, y)$ noktası P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru üzerinde ise o zaman

$$\frac{d_{\pi_3}[P_1\theta]}{d_{\pi_3}[\theta P_2]} = \frac{d_E[P_1\theta]}{d_E[\theta P_2]}$$

olur. Yani \mathbb{R}^2 ve \mathbb{R}_{π}^2 -düzlemindeki uzunlukların oranları aynıdır.

İspat. Teoremin ispatı $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimini göz önünde bulundurarak iki aşamada yapılacaktır. Bu doğrunun eğimine m dersek;

i) $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ için;

Eğer $\theta = P_1$ ise her iki tarafın oranı 0 olur. Eğer θ sonsuzda ise o zaman her iki tarafın oranı -1 ' e eşit olur. Genelliği kaybetmeksizin $P_1 \neq \theta \neq P_2$ olsun. Bu durumda

$$\frac{|x_1-x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1-y|}{|x-x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y-y_2|} = \frac{\sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} \quad (5.1)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

5.1 eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır;

$$\frac{|x_1-x|^2 + \frac{1}{3}|y_1-y|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}|x_1-x||y_1-y|}{|x-x_2|^2 + \frac{1}{3}|y-y_2|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}|x-x_2||y-y_2|} = \frac{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2] \left[|x_1-x|^2 + \frac{1}{3}|y_1-y|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}|x_1-x||y_1-y| \right]}{[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2] \left[|x-x_2|^2 + \frac{1}{3}|y-y_2|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}|x-x_2||y-y_2| \right]} = 1$$

olur. Son eşitlikte üst kısma $\frac{2}{3}|y_1-y|^2$ ifadesi ve alt kısma $\frac{2}{3}|y-y_2|^2$ eklenip çıkarılırsa eşitlik değişmeyeceğinden

$$\frac{[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2] \left[|x_1-x|^2 + \frac{1}{3}|y_1-y|^2 + \frac{2}{3}|y_1-y|^2 - \frac{2}{3}|y_1-y|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}|x_1-x||y_1-y| \right]}{[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2] \left[|x-x_2|^2 + \frac{1}{3}|y-y_2|^2 + \frac{2}{3}|y-y_2|^2 - \frac{2}{3}|y-y_2|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}|x-x_2||y-y_2| \right]} = 1$$

ve dolayısıyla

$$\frac{[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2] \left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2 \right] + \left[\frac{2}{\sqrt{3}}|x_1-x||y_1-y| - \frac{2}{3}|y_1-y|^2 \right] [(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]}{[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2] \left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \right] + \left[\frac{2}{\sqrt{3}}|x-x_2||y-y_2| - \frac{2}{3}|y-y_2|^2 \right] [(x_1-x)^2+(y_1-y)^2]} = 1$$

bulunur. Bu son eşitlik ise

$$\frac{\left[|x_1-x||y_1-y| - \frac{2}{3}|y_1-y|^2 \right] [(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]}{\left[|x-x_2||y-y_2| - \frac{2}{3}|y-y_2|^2 \right] [(x_1-x)^2+(y_1-y)^2]} = 1$$

veya daha basit olarak

$$\frac{|x_1-x||y_1-y| - \frac{2}{3}|y_1-y|^2}{|x-x_2||y-y_2| - \frac{2}{3}|y-y_2|^2} = \frac{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \quad (5.2)$$

olarak yazılır. 5.2 eşitliğinin sol tarafını incelersek P_1P_2 üzerindeki θ ' nın tüm pozisyonları için

$$\frac{|x_1-x||y_1-y| - \frac{2}{3}|y_1-y|^2}{|x-x_2||y-y_2| - \frac{2}{3}|y-y_2|^2} = \frac{(x_1-x)(y_1-y) - \frac{2}{3}(y_1-y)^2}{(x-x_2)(y-y_2) - \frac{2}{3}(y-y_2)^2} \quad (5.3)$$

olur. Şimdi 5.3 eşitliğinde bulunan ifade 5.2 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (x_1-x)(y_1-y) - \frac{2}{3}(y_1-y)^2(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \\ & = \left((x-x_2)(y-y_2) - \frac{2}{3}(y-y_2)^2 \right) \left((x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

bulunur ki; burada $x_1 = x_2$ ise o zaman $x = x_1 = x_2$ olur ve bu durumda 5.4 eşitliği açıktır. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise o zaman θ noktası P_1P_2 doğrusunun üzerinde olduğundan

$$y = \frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1}$$

alınabilir. Bu y değeri 5.4 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left((x_1-x) \left(y_1 - \frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1} \right) - \frac{2}{3} \left(y_1 - \frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1} \right)^2 \right) \\ & \left((x-x_2)^2 + \left(\frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1} - y_2 \right)^2 \right) \\ & = \left((x-x_2) \left(\frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1} - y_2 \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1} - y_2 \right)^2 \right) \\ & \left((x_1-x)^2 + \left(y_1 - \frac{(x_2-x)y_1 - (x_1-x)y_2}{x_2-x_1} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

ii) $\sqrt{3} \leq |m| \leq \infty$ ise

Eğer $\theta = P_1$ ise her iki tarafın oranı 0 olur. Eğer θ sonsuzda ise o zaman her iki tarafın oranı $-1'$ e eşit olur. Genelliği kaybetmeksizin $P_1 \neq \theta \neq P_2$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y - y_2|} = \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}} \quad (5.5)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

5.5 eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır;

$$\frac{|y_1 - y|^2}{|y - y_2|^2} = \frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{|y_1 - y|^2 [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2]}{|y - y_2|^2 [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]} = 1$$

buna eşit olarak

$$\frac{|y_1 - y|^2 (x - x_2)^2}{|y - y_2|^2 (x_1 - x)^2} = 1$$

veya basit şekilde

$$\frac{|y_1 - y|^2}{|y - y_2|^2} = \frac{(x_1 - x)^2}{(x - x_2)^2} \quad (5.6)$$

bulunur. 5.6 eşitliğinin sol tarafı incelendiğinde $P_1 P_2$ üzerindeki θ' nin tüm pozisyonları için

$$\frac{|y_1 - y|^2}{|y - y_2|^2} = \frac{(y_1 - y)^2}{(y - y_2)^2} \quad (5.7)$$

elde edilir. 5.7 eşitliğinde elde edilen değerler 5.6 eşitliğinde yerine yazıldığında

$$(y_1 - y)^2 (x - x_2)^2 = (y - y_2)^2 (x_1 - x)^2$$

ve her iki tarafın karekökü alınarak

$$(y_1 - y) (x - x_2) = (y - y_2) (x_1 - x) \quad (5.8)$$

elde edilir. Eğer $x_1 = x_2$ ise o zaman $x = x_1 = x_2$ olur ve 5.8 eşitliği açıktır. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise o zaman θ noktası $P_1 P_2$ doğrusu üzerinde olduğundan

$$y = \frac{[(x_2 - x)y_1 - (x_1 - x)y_2]}{(x_2 - x_1)}$$

olur. Şimdi bulunan y değeri 5.8 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(y_1 - \frac{[(x_2 - x)y_1 - (x_1 - x)y_2]}{(x_2 - x_1)} \right) (x - x_2) &= \left(\frac{[(x_2 - x)y_1 - (x_1 - x)y_2]}{(x_2 - x_1)} - y_2 \right) (x_1 - x) \\ \frac{(y_2 - y_1)(x - x_2)(x_1 - x)}{(x_2 - x_1)} &= \frac{(y_2 - y_1)(x - x_2)(x_1 - x)}{(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da 5.8 eşitliğini doğrular. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki sonuç, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iki noktası bilinen bir doğru parçasını, verilen bir oranda bölen bölme noktasının koordinatlarının nasıl bulunacağını gösterir.

Sonuç 6. $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iki farklı nokta olsun. Eğer $\theta = (x, y)$ noktası, P_1P_2 doğru parçasını λ oranında bölerse o zaman θ noktasının koordinatları $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1$$

şeklinde verilir.

İspat. Bu sonucun ispatı Teorem 7 aracılığıyla elde edilebilir ancak burada direk ispatı verme yolu tercih edilecektir. $\lambda = 0$ veya $\lambda = -1$ olduğunda verilen formül açıktır. Eğer $\lambda \neq 0, -1$ ve θ noktası da P_1P_2 doğru parçasını λ oranında bölerse

$$\left| \frac{d_{\pi_3}[P_1\theta]}{d_{\pi_3}[\theta P_2]} \right| = |\lambda|$$

yazılabilir. İspat yine $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi göz önünde bulundurularak iki aşamada yapılacaktır. Bu doğrunun eğimine m denirse;

i) $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ için;

$$\frac{|x_1 - x| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1 - y|}{|x - x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y - y_2|} = |\lambda| \quad (5.9)$$

$P_1 \neq P_2$ olduğundan

$$|\lambda| = |\lambda| \left(\frac{|x_1 - x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1 - y_2|}{|x_1 - x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1 - y_2|} \right) = \frac{|\lambda x_1 - \lambda x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|\lambda y_1 - \lambda y_2|}{|x_1 - x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1 - y_2|}$$

bulunur. Eşitliğin üst tarafındaki mutlak değer ifadelerine sırasıyla $x_1 - x_1$ ve $y_1 - y_1$, benzer şekilde eşitliğin alt tarafına ise $\lambda x_2 - \lambda x_2$ ve $\lambda y_2 - \lambda y_2$ ifadeleri eklendiğinde eşitlik bozulmayacağından

$$|\lambda| = \frac{|\lambda x_1 + x_1 - x_1 - \lambda x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|\lambda y_1 + y_1 - y_1 - \lambda y_2|}{|x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_2 - x_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}|y_1 + \lambda y_2 - \lambda y_2 - y_2|}$$

elde edilir. Şimdi bu son eşitliğin her tarafını $\frac{1}{1+\lambda}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \frac{\left| \frac{\lambda x_1 + x_1 - x_1 - \lambda x_2}{1 + \lambda} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{\lambda y_1 + y_1 - y_1 - \lambda y_2}{1 + \lambda} \right|}{\left| \frac{x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_2 - x_2}{1 + \lambda} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{y_1 + \lambda y_2 - \lambda y_2 - y_2}{1 + \lambda} \right|} \\ &= \frac{\left| \frac{(1 + \lambda)x_1 - x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{(1 + \lambda)y_1 - y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right|}{\left| \frac{x_1 + \lambda x_2 - (1 + \lambda)x_2}{1 + \lambda} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{y_1 + \lambda y_2 - (1 + \lambda)y_2}{1 + \lambda} \right|} \\ &= \frac{\left| x_1 - \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \right| + \left| y_1 - \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right|}{\left| \frac{x_1 + \lambda x_2 - x_2}{1 + \lambda} \right| + \left| \frac{y_1 + \lambda y_2 - y_2}{1 + \lambda} \right|} \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonucu 5.9 eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ ve } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

elde edilir.

ii) $\sqrt{3} \leq |m| \leq \infty$ için;

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y - y_2|} = |\lambda| \quad (5.10)$$

$P_1 \neq P_2$ olduğundan

$$|\lambda| = |\lambda| \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2|} \right) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |\lambda y_1 - \lambda y_2|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2|}$$

bulunur. Eşitliğin üst tarafındaki mutlak değerli ifadeye $y_1 - y_1$, benzer şekilde eşitliğin alt tarafına ise $\lambda y_2 - \lambda y_2$ ifadeleri eklenirse, eşitlik bozulmayacağından

$$|\lambda| = \frac{|\lambda y_1 + y_1 - y_1 - \lambda y_2|}{|y_1 + \lambda y_2 - \lambda y_2 - y_2|}$$

elde edilir. Şimdi bu son eşitliğin her tarafı $\frac{1}{1+\lambda}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \frac{\left| \frac{\lambda y_1 + y_1 - y_1 - \lambda y_2}{1 + \lambda} \right|}{\left| \frac{y_1 + \lambda y_2 - \lambda y_2 - y_2}{1 + \lambda} \right|} \\ &= \frac{\left| \frac{(1 + \lambda) y_1 - y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right|}{\left| \frac{y_1 + \lambda y_2 - (1 + \lambda) y_2}{1 + \lambda} \right|} \\ &= \frac{\left| \frac{y_1 - y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right|}{\left| \frac{y_1 + \lambda y_2 - y_2}{1 + \lambda} \right|} \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç 5.10 eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

elde edilir.

Teorem 8. (Menelaus Teoremi) $P_1 P_2 P_3$, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgen ve $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ noktaları da sırasıyla $P_1 P_2$ kenarının uzantısında ve $P_2 P_3$ ve $P_3 P_1$ kenarlarının üzerinde noktalar olsun. Eğer $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ doğruduş ise o zaman P_1, P_2, P_3 köşelerinin hiçbirisi $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ noktalarıyla çakışmamak üzere

$$\frac{d_{\pi_3} [P_1 \theta_1]}{d_{\pi_3} [\theta_1 P_2]} \cdot \frac{d_{\pi_3} [P_2 \theta_2]}{d_{\pi_3} [\theta_2 P_3]} \cdot \frac{d_{\pi_3} [P_3 \theta_3]}{d_{\pi_3} [\theta_3 P_1]} = -1$$

olur.

İspat. $P_1, P_2, P_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ noktalarının $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki pozisyonları şu şekilde belirlensin. $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ ve $x_i \neq x_{i+1}$ olsun. Ayrıca $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ noktaları da $y = mx + k$ eşitliğiyle verilen l doğrusu üzerinde, öyle ki $\theta_i = l \wedge P_i P_{i+1} \pmod{3}$ olsun. l

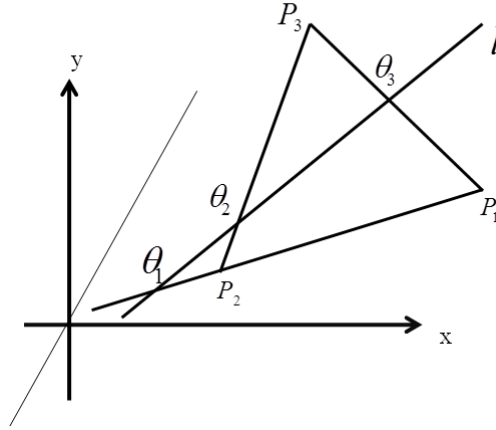
doğrusu $i = 1, 2, 3$ için $P_i P_{i+1}$ doğrusuna paralel olmasın. Açıkça $i, j = 1, 2, 3$ için $P_i \neq \theta_j$ olduğundan $m x_i - y_i + k \neq 0$ ve $m \neq (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)^{-1}$ dir. $P_i P_{i+1}$ doğrusunun denklemi

$$y = (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)^{-1}x - (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)(x_{i+1} - x_i)^{-1}$$

şeklinde verilir. Basit bir hesaplama ile

$$\theta_i = \left(\frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i - k x_i - k x_{i+1}}{m x_i - m x_{i+1} - y_i + y_{i+1}}, \frac{m x_i y_{i+1} - m x_{i+1} y_i - k y_i + k y_{i+1}}{m x_i - m x_{i+1} - y_i + y_{i+1}} \right)$$

bulunur. Burada genel ifadesi $\frac{d_{\pi_3}[P_i \theta_i]}{d_{\pi}[\theta_i P_{i+1}]}$ ile verilen oranlar aşağıdaki şekilde bulunabilir.



Şekil 5.5 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Menelaus teoremi

Doğru parçalarının $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki konumlarına göre ayrı ayrı ispat yapıldığında;

i) $0 \leq |m| \leq \sqrt{3}$ ise;

$$\begin{aligned} \frac{d_{\pi_3}[P_1 \theta_1]}{d_{\pi_3}[\theta_1 P_2]} &= - \frac{d_{\pi_3}(P_1, \theta_1)}{d_{\pi_3}(\theta_1, P_2)} \\ &= - \frac{\left| \frac{x_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - k x_1 + k x_2}{m x_1 - m x_2 - y_1 + y_2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| y_1 - \frac{m x_1 y_2 - m x_2 y_1 - k y_1 + k y_2}{m x_1 - m x_2 - y_1 + y_2} \right| \right|}{\left| \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 - k x_1 + k x_2}{m x_1 - m x_2 - y_1 + y_2} - x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{m x_1 y_2 - m x_2 y_1 - k y_1 + k y_2}{m x_1 - m x_2 - y_1 + y_2} - y_2 \right| \right|} \\ &= - \frac{\left| \frac{m x_1^2 - m x_1 x_2 - x_1 y_1 + x_2 y_1 - k x_2 + k x_1}{m x_1^2 - m x_1 x_2 - x_2 y_2 + x_1 y_2 - k x_1 + k x_2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{m x_1 y_1 - m x_1 y_2 + y_1 y_2 - y_1^2 + k y_1 - k y_2}{m x_2 y_2 - m x_2 y_1 + y_1 y_2 - y_2^2 + k y_2 - k y_1} \right| \right|}{\left| x_1 (m x_1 - y_1 + k) - x_2 (m x_1 - y_1 + k) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| y_1 (m x_1 - y_1 + k) - y_2 (m x_1 - y_1 + k) \right| \right|} \\ &= - \frac{\left| (x_1 - x_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| \right| |m x_1 - y_1 + k|}{\left| x_2 (m x_2 - y_2 + k) - x_1 (m x_2 - y_2 + k) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| y_2 (m x_2 - y_2 + k) - y_1 (m x_2 - y_2 + k) \right| \right|} \\ &= - \frac{\left| (x_1 - x_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| \right| |m x_1 - y_1 + k|}{\left| (x_1 - x_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| \right| |m x_2 - y_2 + k|} \\ &= - \frac{|m x_1 - y_1 + k|}{|m x_2 - y_2 + k|} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{d_{\pi_3} [P_2\theta_2]}{d_{\pi_3} [\theta_2P_3]} = \frac{d_{\pi_3}(P_2, \theta_2)}{d_{\pi_3}(\theta_2, P_3)} = \frac{|mx_2 - y_2 + k|}{|mx_3 - y_3 + k|}$$

ve

$$\frac{d_{\pi_3} [P_3\theta_3]}{d_{\pi_3} [\theta_3P_1]} = \frac{d_{\pi_3}(P_3, \theta_3)}{d_{\pi_3}(\theta_3, P_1)} = \frac{|mx_3 - y_3 + k|}{|mx_1 - y_1 + k|}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{d_{\pi_3} [P_i\theta_i]}{d_{\pi_3} [\theta_iP_{i+1}]} = s \frac{|mx_i - y_i + k|}{|mx_{i+1} - y_{i+1} + k|}, \quad s = \begin{cases} -1, & i = 1 \text{ ise} \\ 1, & i = 2, 3 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\prod_{i=1}^3 \left(\frac{d_{\pi_3} [P_i\theta_i]}{d_{\pi_3} [\theta_iP_{i+1}]} \right) = -1$$

ve dolayısıyla

$$\frac{d_{\pi_3} [P_1\theta_1]}{d_{\pi_3} [\theta_1P_2]} \cdot \frac{d_{\pi_3} [P_2\theta_2]}{d_{\pi_3} [\theta_2P_3]} \cdot \frac{d_{\pi_3} [P_3\theta_3]}{d_{\pi_3} [\theta_3P_1]} = -1$$

elde edilir.

ii) $\sqrt{3} \leq |m| \leq \infty$ ise;

$$\begin{aligned} \frac{d_{\pi_3}[P_1\theta_1]}{d_{\pi_3}[\theta_1P_2]} &= -\frac{d_{\pi_3}(P_1, \theta_1)}{d_{\pi_3}(\theta_1, P_2)} \\ &= -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - \frac{mx_1y_2 - mx_2y_1 - ky_1 + ky_2}{mx_1 - mx_2 - y_1 + y_2}|}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{mx_1y_2 - mx_2y_1 - ky_1 + ky_2 - y_2}{mx_1 - mx_2 - y_1 + y_2} \right|} \\ &= -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |mx_1y_1 - mx_1y_2 + y_1y_2 - y_1^2 + ky_1 - ky_2|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |mx_2y_2 - mx_2y_1 + y_1y_2 - y_2^2 + ky_2 - ky_1|} \\ &= -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1(mx_1 - y_1 + k) - y_2(mx_1 - y_1 + k)|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_2(mx_2 - y_2 + k) - y_1(mx_2 - y_2 + k)|} \\ &= -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| |mx_1 - y_1 + k|}{\frac{2}{\sqrt{3}} |y_1 - y_2| |mx_2 - y_2 + k|} \\ &= -\frac{|mx_1 - y_1 + k|}{|mx_2 - y_2 + k|} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{d_{\pi_3} [P_2\theta_2]}{d_{\pi_3} [\theta_2P_3]} = \frac{d_{\pi_3}(P_2, \theta_2)}{d_{\pi_3}(\theta_2, P_3)} = \frac{|mx_2 - y_2 + k|}{|mx_3 - y_3 + k|}$$

ve

$$\frac{d_{\pi_3} [P_3\theta_3]}{d_{\pi_3} [\theta_3P_1]} = \frac{d_{\pi_3}(P_3, \theta_3)}{d_{\pi_3}(\theta_3, P_1)} = \frac{|mx_3 - y_3 + k|}{|mx_1 - y_1 + k|}$$

ve sonuç olarak,

$$\frac{d_{\pi_3} [P_i\theta_i]}{d_{\pi_3} [\theta_iP_{i+1}]} = s \frac{|mx_i - y_i + k|}{|mx_{i+1} - y_{i+1} + k|}, \quad s = \begin{cases} -1, & i = 1 \text{ ise} \\ 1, & i = 2, 3 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\prod_{i=1}^3 \left(\frac{d_{\pi_3} [P_i\theta_i]}{d_{\pi_3} [\theta_iP_{i+1}]} \right) = -1$$

ve dolayısıyla

$$\frac{d_{\pi_3} [P_1\theta_1]}{d_{\pi_3} [\theta_1P_2]} \cdot \frac{d_{\pi_3} [P_2\theta_2]}{d_{\pi_3} [\theta_2P_3]} \cdot \frac{d_{\pi_3} [P_3\theta_3]}{d_{\pi_3} [\theta_3P_1]} = -1$$

elde edilir.

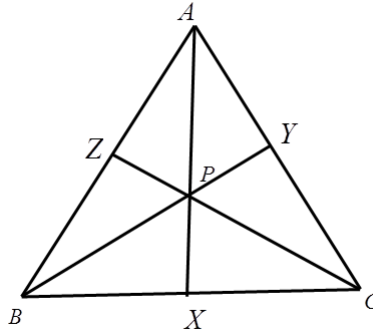
Her iki durum için teorem sağlandığından ispat tamamlanmış olur.

5.3 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ –Düzleminde Ceva Teoremi

ABC , \mathbb{R}^2 –düzleminde bir üçgen ve P de bu üçgen içerisinde bir nokta olsun. AP doğrusunun BC doğru parçasını kestiği nokta X , BP doğrusunun AC doğru parçasını kestiği nokta Y , CP doğrusunun AB doğru parçasını kestiği nokta Z ile verilsin. Bu durumda

$$\frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} = 1$$

olur.



Şekil 5.6 \mathbb{R}^2 de Ceva teoremi gösterimi

İspat. Şekilde ABX üçgeni ve ZPC keseni; AXC üçgeni ve BPY keseni göz önüne alınarak her iki durum için ayrı ayrı Menelaus teoremi uygulanırsa

$$\frac{|CX|}{|CB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} \cdot \frac{|AP|}{|PX|} = 1$$

ve

$$\frac{|BX|}{|BC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AP|}{|PX|} = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa bölündüğünde

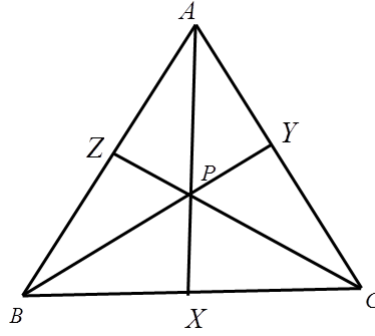
$$\frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} = 1$$

bulunur.

Teorem 9. ABC , $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir üçgen ve P de bu üçgen içerisinde bir nokta olsun. AP doğrusunun BC doğru parçasını kestiği nokta X , BP doğrusunun AC doğru parçasını kestiği nokta Y , CP doğrusunun AB doğru parçasını kestiği nokta Z ile verilsin. Bu durumda

$$\frac{d_{\pi_3}[AY]}{d_{\pi_3}[YC]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[CX]}{d_{\pi_3}[XB]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[BZ]}{d_{\pi_3}[ZA]} = 1$$

olur.



Şekil 5.7 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Ceva teoremi gösterimi

İspat. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde ABX üçgeni ve ZPC keseni; AXC üçgeni ve BPY keseni göz önüne alınarak her iki durum için ayrı ayrı Menelaus teoremi uygulanırsa

$$\frac{d_{\pi_3}[CX]}{d_{\pi_3}[CB]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[BZ]}{d_{\pi_3}[ZA]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[AP]}{d_{\pi_3}[PX]} = -1$$

ve

$$\frac{d_{\pi_3}[BX]}{d_{\pi_3}[BC]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[CY]}{d_{\pi_3}[YA]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[AP]}{d_{\pi_3}[PX]} = -1$$

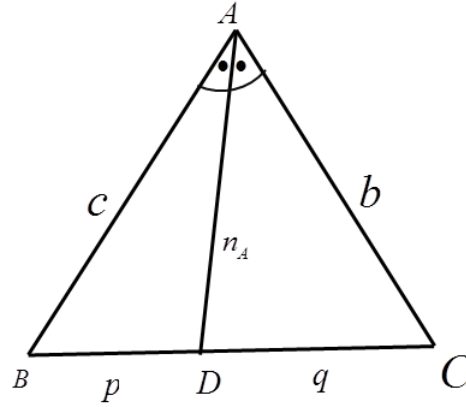
eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa bölündüğünde

$$\frac{d_{\pi_3}[AY]}{d_{\pi_3}[YC]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[CX]}{d_{\pi_3}[XB]} \cdot \frac{d_{\pi_3}[BZ]}{d_{\pi_3}[ZA]} = 1$$

bulunur.

5.4 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -Düzleminde İç Açığortay Teoremi

\mathbb{R}^2 -düzleminde iyi bilinen iç açığortay teoremine göre, bir üçgenin herhangi bir köşesine ait iç açığortay, bu köşenin karşısındaki kenarı diğer komşu kenarlarla orantılı bir şekilde böler.



Şekil 5.8 \mathbb{R}^2 de iç açıortay

Şekil 5.8 de ki verilene göre;

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

dir. Bu teoremin ispatı şu şekilde verilebilir.

İspat. Şekil 5.8 de ABC üçgeninin A köşesine ait n_A iç açıortayı aracılığıyla oluşan ABD ve ADC üçgenleri göz önüne alınsın. Bu iki üçgenin p ve q tabanlarına ait yükseklikler eşit olduğundan, iki üçgenin alanları oranı

$$\frac{S\{ABD\}}{S\{ADC\}} = \frac{p}{q}$$

olur. Yine ABC üçgeninde bir iç açıortaydan, iç açıortayın kollarına indirilen dikmelerin eşit olacağı biliniyor. Bu dikmeler h ile gösterilsin. Şekil 5.9 dan ABD ve ADC üçgenlerinin alanları oranı

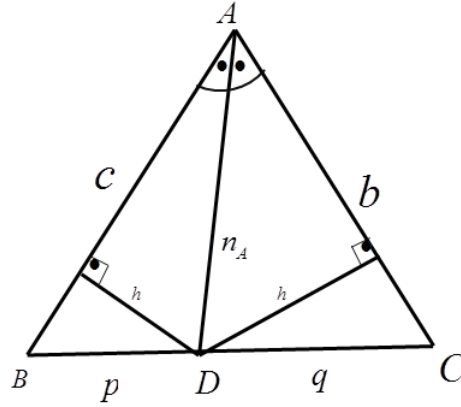
$$\frac{S\{ABD\}}{S\{ADC\}} = \frac{\frac{c \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{c}{b}$$

olarak bulunur. Bu durumda son iki eşitliğin sol tarafları eşit olduğundan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

elde edilir.

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iç açıortay teoremi verilirken, daha önce $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde üçgenlerin alanları bulunurken uygulanan yöntemle benzer bir yol izlenecektir. Yani teorem verilirken üçgenlerin kenarlarının eğiminden faydalanılacaktır. Ancak buradaki parametre üçgenin iç açıortayının kestiği kenar değil, diğer iki kenar olacaktır.



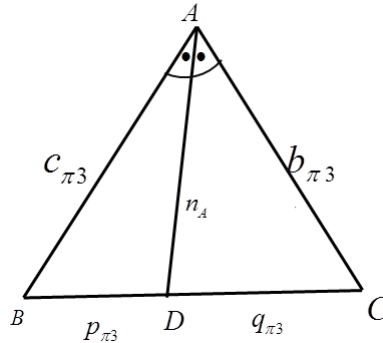
Şekil 5.9 \mathbb{R}^2 de iç açığortayların kollarına indirilen dikmeler

Teorem 10. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin A köşesine ait n_A iç açığortayının BC kenarı ile kesişimi D noktası, $a_{\pi_3} = d_{\pi_3}(B, C)$, $b_{\pi_3} = d_{\pi_3}(A, C)$, $c_{\pi_3} = d_{\pi_3}(A, B)$, $p_{\pi_3} = d_{\pi_3}(B, D)$, $q_{\pi_3} = d_{\pi_3}(C, D)$ ve BC kenarının eğimi m_a , AC kenarının eğimi m_b , AB kenarının eğimi m_c olmak üzere;

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi_3}}{\rho(m_b)q_{\pi_3}} = \frac{c_{\pi_3}}{b_{\pi_3}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde ABC üçgeninde BC kenarının eğimi m_a olduğundan p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının da eğimleri m_a olur. Bu durumda \mathbb{R}^2 -düzleminde iç açığortay teoreminin sol tarafında bulunan $\frac{p}{q}$ ifadesinin, $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde BC kenarının eğiminden bağımsız olarak her bir şartta aynı şekilde yazılabileceği aşikardır.



Şekil 5.10 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iç açığortay

Yani

$$\begin{aligned}
 a) \ 0 \leq |m_a| \leq \sqrt{3} &\rightarrow \frac{d_E(B,D)}{d_E(D,C)} = \frac{p}{q} = \frac{p\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right)}{q\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right)} = \frac{p\pi_3}{q\pi_3} \\
 b) \ \sqrt{3} \leq |m_a| &\rightarrow \frac{d_E(B,D)}{d_E(D,C)} = \frac{p}{q} = \frac{p\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right)}{q\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right)} = \frac{p\pi_3}{q\pi_3} \\
 c) \ |m_a| \rightarrow \infty &\rightarrow \frac{d_E(B,D)}{d_E(D,C)} = \frac{p}{q} = \frac{p\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{q\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{p\pi_3}{q\pi_3}
 \end{aligned}$$

dır. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde iç açıortay teoreminin iso-taxicab benzeri için, \mathbb{R}^2 -düzleminde iç açıortay teoremindeki eşitliğin sağ tarafındaki ifadede, ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki her bir farklı pozisyonu için ayrı ayrı $\frac{c}{b}$ ifadesi hesaplandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) $0 \leq |m_b|, |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p\pi_3}{q\pi_3} = \frac{c\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c\pi_3}{\frac{1}{\rho(m_b)} b\pi_3}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p\pi_3}{\rho(m_b)q\pi_3} = \frac{c\pi_3}{b\pi_3}$$

elde edilir.

ii) $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_c|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right)}{b\pi_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

iii) $\sqrt{3} \leq |m_b|$ ve $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

iv) $\sqrt{3} \leq |m_b|, |m_c|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

v) $|m_b| = \infty$ ve $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

vi) $|m_b| = \infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_c|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3}}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3}} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

vii) $|m_c| = \infty$ ve $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|}\right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

viii) $|m_c| = \infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_b|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|}\right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|}\right)} = \frac{c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

5.5 $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ —Düzleminde Dış Açortay Teoremi

\mathbb{R}^2 —düzleminde iyi bilinen dış açortay teoremine göre, bir üçgenin herhangi bir köşesine ait dış açortay, bu köşenin karşısındaki kenarın uzantısını bölerse, diğer komşu kenarlarla orantılı bir şekilde böler. Yani Şekil 5.11 deki verilene göre

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

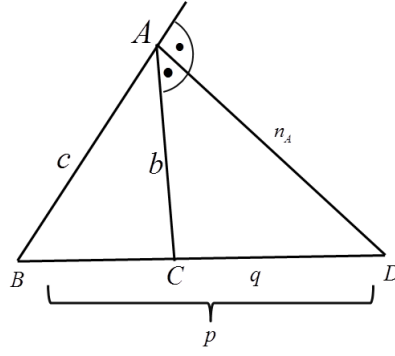
dir. Bu teoremin ispatı şu şekilde verilebilir.

İspat. Şekil 5.11 de ABC üçgeninin A köşesine ait n_A dış açortay aracılığıyla oluşan ABD ve ACD üçgenleri göz önüne alınsın. Bu iki üçgenin sırasıyla p ve q tabanlarına ait yükseklikler eşit olduğundan, iki üçgenin alanları oranı

$$\frac{S\{ABD\}}{S\{ACD\}} = \frac{p}{q}$$

olur. Yine ABD üçgeninde AD kenarının uzunluğuna n denirse. ABD ve ACD üçgenlerinin alanları oranı

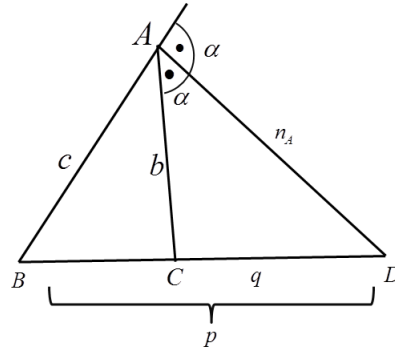
$$\frac{S\{ABD\}}{S\{ACD\}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot n \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot n \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot n \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot n \cdot \sin \alpha} = \frac{c}{b}$$

Şekil 5.11 \mathbb{R}^2 de dış açıortay

olarak bulunur. Bu durumda son iki eşitliğin sol tarafları eşit olduğundan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

elde edilir.

Şekil 5.12 \mathbb{R}^2 de dış açıortayın açıları

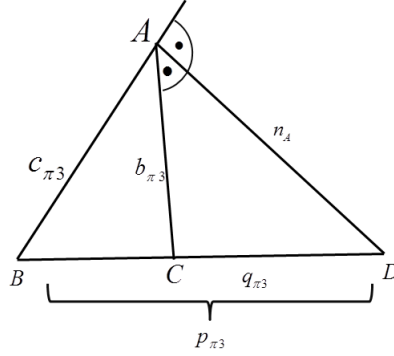
Dış açıortay teoreminin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonu verilirken daha önce iç açıortay teoreminin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonu ispatlanırken uygulanan yöntem uygulanacaktır. Yani burada da parametreler bir açının dış açıortayının kestiği kenarın uzantısının eğimi değil, diğer iki kenarın eğimleri olacaktır.

Teorem 11. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin A köşesine ait n_A dış açıortayının BC kenarı ile kesişimi D noktası, $b_{\pi_3} = d_{\pi_3}(A, C)$, $c_{\pi_3} = d_{\pi_3}(A, B)$, $p_{\pi_3} = d_{\pi_3}(B, D)$, $q_{\pi_3} = d_{\pi_3}(C, D)$, BC kenarının eğimi m_a , AC kenarının eğimi m_b , AB

kenarının eğimi m_c olmak üzere;

$$\frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

dir.



Şekil 5.13 $\mathbb{R}^2_{\pi 3}$ de dış açortay

İspat. $\mathbb{R}^2_{\pi 3}$ -düzleminde ABC üçgeninde BC kenarının eğimi m_a olduğundan $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının da eğimleri m_a olur. Bu durumda \mathbb{R}^2 -düzleminde iç açortay teoreminin sol tarafında bulunan $\frac{p}{q}$ ifadesinin, $\mathbb{R}^2_{\pi 3}$ -düzleminde BC kenarının eğiminden bağımsız olarak herbir şartta aynı şekilde yazılabileceği aşikardır. Yani

$$\begin{aligned} \text{a) } 0 \leq |m_a| \leq \sqrt{3} &\rightarrow \frac{d_E(B,D)}{d_E(D,C)} = \frac{p}{q} = \frac{p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right)}{q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right)} = \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} \\ \text{b) } \sqrt{3} \leq |m_a| &\rightarrow \frac{d_E(B,D)}{d_E(D,C)} = \frac{p}{q} = \frac{p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right)}{q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right)} = \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} \\ \text{c) } |m_a| \rightarrow \infty &\rightarrow \frac{d_E(B,D)}{d_E(D,C)} = \frac{p}{q} = \frac{p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{R}^2_{\pi 3}$ -düzleminde iç açortay teoreminin iso-taxicab benzeri için, \mathbb{R}^2 -düzleminde iç açortay teoremindeki eşitliğin sağ tarafındaki ifadede, ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının $\mathbb{R}^2_{\pi 3}$ -düzlemindeki herbir farklı pozisyonu için ayrı ayrı $\frac{c}{b}$ ifadesi hesaplandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) $0 \leq |m_b|, |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

ii) $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_c|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

iii) $\sqrt{3} \leq |m_b|$ ve $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

iv) $\sqrt{3} \leq |m_b|, |m_c|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

v) $|m_b| = \infty$ ve $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c)p_{\pi 3}}{\rho(m_b)q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

vi) $|m_b| = \infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_c|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3}}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{|m_c|} \right)}{b_{\pi 3}} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

vii) $|m_c| = \infty$ ve $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right)} = \frac{\frac{1}{\rho(m_c)} c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

elde edilir.

viii) $|m_c| = \infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_b|$ iken;

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{c}{b} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|} \right)}$$

olur. Buradan

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \implies \frac{p_{\pi 3}}{q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{|m_b|} \right)} = \frac{1 c_{\pi 3}}{\frac{1}{\rho(m_b)} b_{\pi 3}}$$

olup, buradan

$$\frac{\rho(m_c) p_{\pi 3}}{\rho(m_b) q_{\pi 3}} = \frac{c_{\pi 3}}{b_{\pi 3}}$$

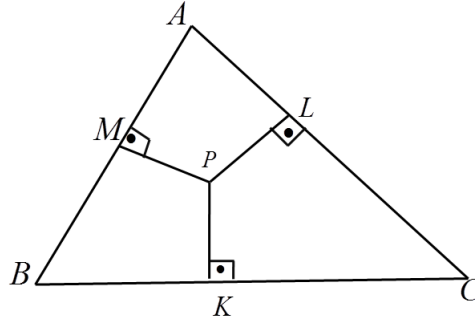
elde edilir.

5.6 $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ –Düzleminde Carnot Teoremi

1796 – 1832 yılları arasında yaşamış olan Fransız, Sadi Carnot fizikçi olarak tanınmasına rağmen geometri alanında kendi ismiyle ün salmış Carnot teoremini ortaya atan kişidir. Bu teoreme göre, ABC , \mathbb{R}^2 –düzleminde herhangi bir üçgen ve P noktası bu üçgen içerisinde sabit bir nokta olmak üzere, P noktasından ABC üçgeninin kenarlarına şekildeki gibi indirilen dikmelerin bu kenarlar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları arasında

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

şeklinde bir bağıntı vardır.



Şekil 5.14 \mathbb{R}^2 de Carnot gösterimi

Bu teoremin ispatı şu şekilde verilebilir.

İspat. ABC üçgeninde P noktasından üçgeninin BC , AC ve AB kenarlarına indirilen dikmelerin uzunlukları sırasıyla $|PK| = k$, $|PL| = l$, $|PM| = m$ ile gösterilsin. Yine $|BK| = a$, $|KC| = x$, $|CL| = b$, $|LA| = y$, $|MA| = c$, $|MB| = z$ ile verilsin. Ayrıca yine P noktasından üçgenin köşelerine çizilen doğru parçaları PA , PB ve PC şeklinde gösterilsin. Bu doğru parçaları aracılığıyla elde edilen dik üçgenlere Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$a^2 + k^2 = z^2 + m^2$$

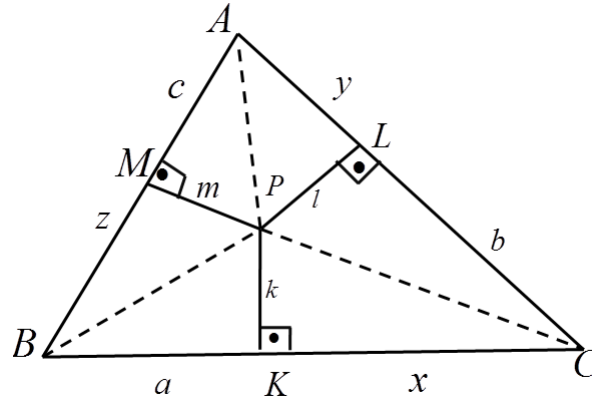
$$b^2 + l^2 = x^2 + k^2$$

$$c^2 + m^2 = y^2 + l^2$$

elde edilir. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanıp gerekli işlemler yapılırsa

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

bağıntısı elde edilir.



Şekil 5.15 P noktasından üçgenin köşelerine çizilen doğru parçaları

Carnot teoreminin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonunu bulmak için, \mathbb{R}^2 -düzlemindeki parametrelere ek olarak üçgenin kenarlarının eğimleri de parametre olarak eklenecek ve bu parametreler cinsinden teorem verilecektir.

Teorem 12. ABC , $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde herhangi bir üçgen, P noktası bu üçgen içerisinde sabit bir nokta, P noktasından üçgenin kenarlarına inilen dikmelerin ayakları K , L ve M noktaları, bu dikmelerin kenarlar üzerinde ayırdığı doğru parçaları $a_{\pi_3} = d_{\pi_3}(B, K)$, $x_{\pi_3} = d_{\pi_3}(K, C)$, $b_{\pi_3} = d_{\pi_3}(C, L)$, $y_{\pi_3} = d_{\pi_3}(L, A)$, $c_{\pi_3} = d_{\pi_3}(A, M)$, $z_{\pi_3} = d_{\pi_3}(M, B)$ şeklinde verilsin. Bunlardan, a_{π_3} ve x_{π_3} doğru parçalarının eğimi m_a , b_{π_3} ve y_{π_3} doğru parçalarının eğimi m_b , c_{π_3} ve z_{π_3} doğru parçalarının eğimi m_c olmak üzere, P noktasından üçgenin kenarlarına şekildeki gibi indirilen dikmelerin bu kenarlar üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları arasındaki ilişki;

$$\left(\frac{1}{\rho(m_a)}a_{\pi_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho(m_b)}b_{\pi_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho(m_c)}c_{\pi_3}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho(m_a)}x_{\pi_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho(m_b)}y_{\pi_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho(m_c)}z_{\pi_3}\right)^2$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki d_{π_3} -uzaklık uzaklıklar ve Öklidyen uzaklık arasındaki ilişki

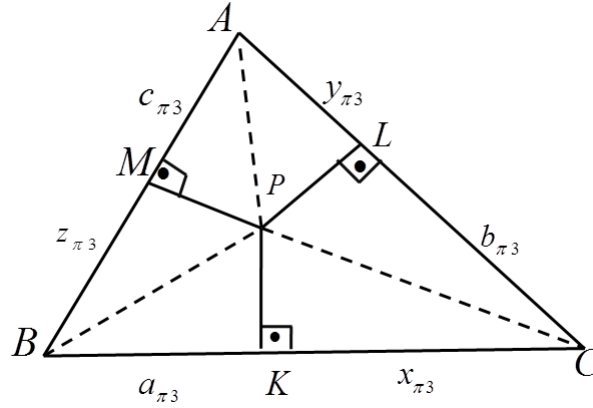
$$d_{\pi_3}(A, B) = \rho(m)d_E(A, B)$$

eşitliği ile verilir. Buradan

$$d_E(A, B) = \frac{1}{\rho(m)}d_{\pi_3}(A, B)$$

yazılabileceği açıktır. Daha önce bulunan $\rho(m)$ değerlerinden

$$\frac{1}{\rho(m)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m|} & , 0 \leq m \leq \sqrt{3} \text{ için} \\ \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{2|m|} & , \sqrt{3} \leq m \text{ için} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & , m \rightarrow \infty \text{ için} \end{cases}$$



Şekil 5.16 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde P noktasından üçgenin köşelerine çizilen doğru parçaları

yazılabilir. Teoremin ispatı için herhangi bir ABC üçgeninin her bir kenarının m_a, m_b ve m_c eğimlerinin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki alabileceği durumlar aşağıdaki gibidir.

i) $m_a, m_b, m_c \neq \infty$ ise

$$\begin{aligned}
 d_E(B, K) = a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \quad \text{veya} \quad d_E(B, K) = a = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\
 d_E(C, L) = b &= \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right) \cdot b_{\pi_3} \quad \text{veya} \quad d_E(C, L) = b = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|} \right) \cdot b_{\pi_3} \\
 d_E(A, M) = c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi_3} \quad \text{veya} \quad d_E(A, M) = c = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right) \cdot c_{\pi_3} \\
 d_E(K, C) = x &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot x_{\pi_3} \quad \text{veya} \quad d_E(K, C) = x = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot x_{\pi_3} \\
 d_E(L, A) = y &= \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|} \right) \cdot y_{\pi_3} \quad \text{veya} \quad d_E(L, A) = y = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|} \right) \cdot y_{\pi_3} \\
 d_E(M, B) = z &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot z_{\pi_3} \quad \text{veya} \quad d_E(M, B) = z = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right) \cdot z_{\pi_3}
 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki her bir durumu ayrı ayrı incelenirse;

I. durum : $0 \leq |m_a|, |m_b|, |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot a_{\pi_3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot b_{\pi_3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2} \right) \cdot c_{\pi_3}^2 \\
 = & \left(\frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot x_{\pi_3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot y_{\pi_3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2} \right) \cdot z_{\pi_3}^2
 \end{aligned}$$

elde edilir.

II. durum : $0 \leq |m_a|, |m_b| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_c|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2} \right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \left(\frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2} \right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

III. durum : $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a|, |m_c|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2} \right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2} \right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

IV. durum : $0 \leq |m_b|, |m_c| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2} \right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2} \right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2} \right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

V. durum : $\sqrt{3} \leq |m_a|, |m_b|, |m_c|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2} \right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2} \right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2} \right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2} \right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

VI. durum : $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a|, |m_b|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2} \right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2} \right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2} \right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2} \right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

VII. durum : $0 \leq |m_a|, |m_c| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_b|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

VIII. durum : $0 \leq |m_a| \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_b|, |m_c|$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

ii) $m_a \rightarrow \infty$ ise

$$\begin{aligned} d_E(B, K) = a &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ d_E(K, C) = x &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x_{\pi 3} \\ d_E(C, L) = b &= \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|}\right) \cdot b_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(C, L) = b = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|}\right) \cdot b_{\pi 3} \\ d_E(A, M) = c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|}\right) \cdot c_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(A, M) = c = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|}\right) \cdot c_{\pi 3} \\ d_E(L, A) = y &= \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|}\right) \cdot y_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(L, A) = y = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|}\right) \cdot y_{\pi 3} \\ d_E(M, B) = z &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|}\right) \cdot z_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(M, B) = z = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|}\right) \cdot z_{\pi 3} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki herbir durumu ayrı ayrı incelenirse (Bu durumda $m_b \rightarrow \infty$ ve $m_c \rightarrow \infty$ olamayacağı açıktır);

I. durum : $|m_a| = \infty$, $\sqrt{3} \leq |m_b|$ ve $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

II. durum : $|m_a| = \infty$, $\sqrt{3} \leq |m_c|$ ve $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $m_b \rightarrow \infty$ ise

$$\begin{aligned} d_E(C, L) &= b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot b_{\pi 3} \\ d_E(L, A) &= y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot y_{\pi 3} \\ d_E(B, K) &= a = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(B, K) = a = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ d_E(K, C) &= x = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot x_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(K, C) = x = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot x_{\pi 3} \\ d_E(A, M) &= c = \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|}\right) \cdot c_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(A, M) = c = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|}\right) \cdot c_{\pi 3} \\ d_E(M, B) &= z = \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|}\right) \cdot z_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(M, B) = z = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|}\right) \cdot z_{\pi 3} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki herbir durumu ayrı ayrı incelenirse. (Bu durumda $m_a \rightarrow \infty$ ve $m_c \rightarrow \infty$ olamayacağı açıktır);

I. durum : $|m_b| = \infty$, $\sqrt{3} \leq |m_a|$ ve $0 \leq |m_c| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2}\right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2}\right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_c^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

II. durum : $|m_b| = \infty$, $\sqrt{3} \leq |m_c|$ ve $0 \leq |m_a| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_c^2)}{4 \cdot |m_c|^2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

iv) $m_c \rightarrow \infty$ ise

$$\begin{aligned} d_E(A, M) = c &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot c_{\pi 3} \\ d_E(M, B) = z &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z_{\pi 3} \\ d_E(B, K) = a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(B, K) = a = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ d_E(K, C) = x &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot x_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(K, C) = x = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot x_{\pi 3} \\ d_E(C, L) = b &= \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|}\right) \cdot b_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(C, L) = b = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|}\right) \cdot b_{\pi 3} \\ d_E(L, A) = y &= \left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|}\right) \cdot y_{\pi 3} \quad \text{veya} \quad d_E(L, A) = y = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}{2|m_b|}\right) \cdot y_{\pi 3} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki her bir durumu ayrı ayrı incelenirse (Bu durumda $m_a \rightarrow \infty$ ve $m_b \rightarrow \infty$ olamayacağı açıktır);

I. durum : $|m_c| = \infty$, $\sqrt{3} \leq |m_b|$ ve $0 \leq |m_a| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \frac{1+m_a^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{3 \cdot (1+m_b^2)}{4 \cdot |m_b|^2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

II. durum : $|m_c| = \infty$, $\sqrt{3} \leq |m_a|$ ve $0 \leq |m_b| \leq \sqrt{3}$ iken \mathbb{R}^2 -düzlemindeki Carnot teoreminden

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2}\right) \cdot a_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2}\right) \cdot b_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot c_{\pi 3}^2 \\ \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2}\right) \cdot x_{\pi 3}^2 + \left(\frac{1+m_b^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_b|\right)^2}\right) \cdot y_{\pi 3}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z_{\pi 3}^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

5.7 $\mathbb{R}_{\pi^3}^2$ –Düzleminde Öklid Bağlıları

M.Ö. 330 – 275 yılları arasında yaşamış İskenderiyeli matematikçi Öklid, ismi geometri ile en çok özdeşleşen kişiler arasında. Kendi adıyla anılan Öklid bağlantılarına göre;

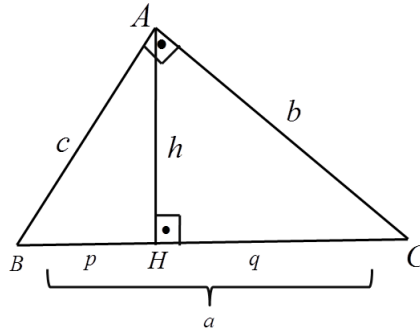
i) \mathbb{R}^2 –düzleminde bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun karesi, bu yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

$$h^2 = p.q$$

ii) \mathbb{R}^2 –düzleminde bir dik üçgende bir dik kenarın uzunluğunun karesi, hipotenüs uzunluğuyla hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüsü ayırdığı parçalardan bu kenar tarafında kalan parçanın uzunluğunun çarpımına eşittir.

$$b^2 = q.a \text{ ve } c^2 = p.a$$

dır.



Şekil 5.17 \mathbb{R}^2 –düzleminde bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikme

Bu bağlantıların ispatları şu şekilde verilir.

İspat. i) Şekilden ABH ve CAH dik üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ elde edilir. Buradan da

$$h^2 = p.q$$

bulunur.

ii) Şekilden CAH ve CBA üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{b}{q} = \frac{a}{b}$;

ABH ve CBA dik üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{c}{p} = \frac{a}{c}$ elde edilir. Son iki eşitlikten

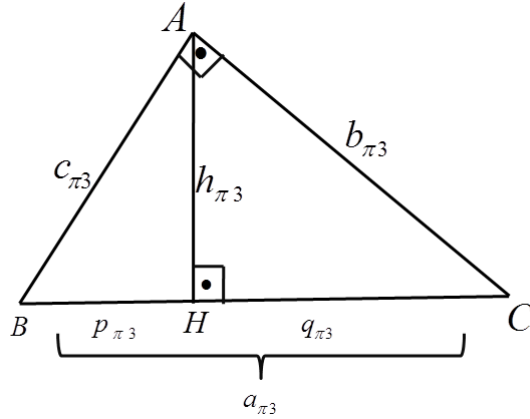
$$b^2 = q \cdot a \text{ ve } c^2 = p \cdot a$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 13. 1) $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde ABC herhangi bir dik üçgen, $a_{\pi 3} = d_{\pi 3}(B, C)$ ve $h_{\pi 3} = d_{\pi 3}(A, H)$ sırasıyla üçgenin hipotenüsüne ve bu hipotenüse ait yüksekliğin $d_{\pi 3}$ -uzunluklarını gösterebilir. $p_{\pi 3} = d_{\pi 3}(B, H)$ ve $q_{\pi 3} = d_{\pi 3}(H, C)$ ile verilsin. ABC üçgeninde BC kenarının eğimi m_a ve AH kenarının eğimi $m_h = (-\frac{1}{m_a})$ ile gösterilsin. O halde \mathbb{R}^2 -düzleminde bilinen Öklid bağıntısının, $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde ki iso-taxicab benzeri

$$h_{\pi 3}^2 = \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} & , m_a = 0 \\ \left(\frac{3}{4}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} & , m_a = \infty \\ \left(\frac{4 \cdot \left|\frac{-1}{m_a}\right|^2 \cdot (1+m_a^2)}{3 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} & , 0 < |m_a| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left(\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\frac{1}{m_a}\right|\right)^2 \cdot (1+m_a^2)}{\left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} & , \frac{1}{\sqrt{3}} < |m_a| \leq \sqrt{3} \\ \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|\right)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right)}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} & , \sqrt{3} \leq |m_a|, m_a \neq \infty \end{cases}$$

şeklinde verilir.



Şekil 5.18 $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ de bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikme

2) $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde ABC herhangi bir dik üçgen, AB ve AC kenarları verilen üçgenin dik kenarları olsun. $a_{\pi 3} = d_{\pi 3}(B, C)$, $b_{\pi 3} = d_{\pi 3}(A, C)$, $c_{\pi 3} = d_{\pi 3}(A, B)$, $p_{\pi 3} = d_{\pi 3}(B, H)$ ve $q_{\pi 3} = d_{\pi 3}(H, C)$ sırasıyla BC , AC , AB , BH ve HC kenarlarının $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzlemindeki uzunluklarını gösterebilir. ABC üçgeninde AB kenarının eğimi m_c ise; AC kenarının eğimi $m_b = (-\frac{1}{m_c})$ olur. O halde \mathbb{R}^2 -düzleminde bilinen Öklid bağıntısının

$\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzlemindeki versiyonu;

$$b_{\pi_3}^2 = \left(\frac{1}{\rho(m_a)} \right)^2 q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3}$$

ve

$$c_{\pi_3}^2 = \left(\frac{1}{\rho(m_a)} \right)^2 p_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3}$$

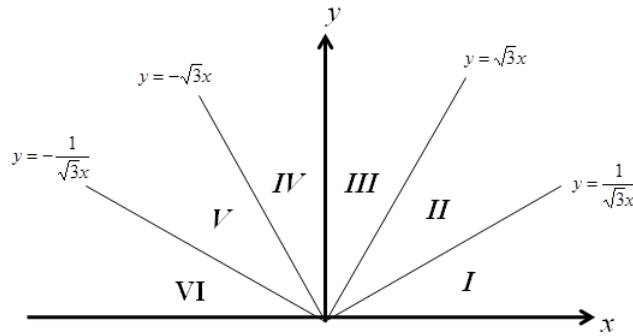
şeklinde verilir.

İspat. Teoremin ikinci kısmında ispatta kolaylık sağlaması amacıyla, verilen ABC üçgeninin dik kenarlarından herhangi bir tanesi parametre olarak alınabilir burada keyfi olarak AB kenarı parametre olarak alınacaktır. Benzer şekilde üçgenin bir diğer dik kenarı olan AC kenarı da parametre olarak alınabilir.

1) $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde herhangi bir ABC dik üçgeninin hipotenüs uzunluğu a_{π_3} ve hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğu h_{π_3} olsun. Eğer bu üçgende hipotenüsün eğimi m ile gösterilirse, hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $(-\frac{1}{m})$ olur. Bu durumda a ve h sırasıyla verilen üçgende hipotenüsün ve hipotenüse ait yüksekliğin \mathbb{R}^2 -düzlemindeki uzunluklarını göstermek üzere;

$$a_{\pi_3} = \rho(m_a) \cdot a \text{ ve } h_{\pi_3} = \rho\left(-\frac{1}{m_a}\right) \cdot h$$

dır. $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde verilen bir üçgenin hipotenüs ve hipotenüse ait yüksekliklerinin durumları aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir;



Şekil 5.19 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde bir dik üçgenin hipotenüsüne bağlı sınıflandırma

Eğer verilen bir üçgenin hipotenüsü x -eksenine paralel ise hipotenüse ait yüksekliği y -eksenine paralel olur. Eğer üçgenin hipotenüsü (I) numaralı bölgede ise hipotenüse ait yüksekliği (IV) numaralı bölgede, eğer üçgenin hipotenüsü (II) numaralı

bölgede ise hipotenüse ait yüksekliği (V) numaralı bölgede, eğer üçgenin hipotenüsü (III) numaralı bölgede ise hipotenüse ait yüksekliği (VI) numaralı bölgede olur. Şimdi yukarıdaki verilen bölgeler esas alınarak, herbir durum için ayrı ayrı hesap yapılırsa;

i) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsü $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde x -eksenine paralel ise yani $m_a = 0$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $m_h = -\frac{1}{m_a} = \infty$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} a_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a, & h_{\pi_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot h \\ \implies a_{\pi_3} &= 1 \cdot a, & h_{\pi_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot h \\ \implies a &= a_{\pi_3}, & h &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot h_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p, & q_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q \\ \implies p_{\pi_3} &= 1 \cdot p, & q_{\pi_3} &= 1 \cdot q \\ \implies p &= p_{\pi_3}, & q &= q_{\pi_3} \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ \implies \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h_{\pi_3} \right)^2 &= p_{\pi_3} \cdot q_{\pi_3} \\ \implies h_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{4}{3} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

ii) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsü \mathbb{R}_{π}^2 -düzleminde y -eksenine paralel ise yani $m_a = \infty$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $m_h = -\frac{1}{m_a} = 0$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} a_{\pi_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot a, & h_{\pi_3} &= 1 \cdot h \\ \implies a &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot a_{\pi_3}, & h &= 1 \cdot h_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_{\pi_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot p, & q_{\pi_3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot q \\ \implies p &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot p_{\pi_3}, & q &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ \implies h_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot q_{\pi_3} \\ \implies h_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{3}{4} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

iii) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi \mathbb{R}^2 -düzleminde $0 < m_a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $-\sqrt{3} < m_h \leq \infty$ olur. Bu durumda;

$$a_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \quad , \quad h_{\pi 3} = \left(\frac{2 \left| \frac{-1}{m_a} \right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} \right) \cdot h$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \quad , \quad h = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{2 \left| \frac{-1}{m_a} \right|} \right) \cdot h_{\pi 3}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$p_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p \quad , \quad q_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q$$

$$\Rightarrow p = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \quad , \quad q = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$h^2 = p \cdot q$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{2 \left| \frac{-1}{m_a} \right|} \cdot h_{\pi 3} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3}$$

$$h_{\pi}^2 = \left(\frac{4 \cdot \left| \frac{-1}{m_a} \right|^2 \cdot (1+m_a^2)}{3 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3}$$

eşitliği elde edilir.

iv) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi \mathbb{R}^2 -düzleminde $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_a \leq \sqrt{3}$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $-\sqrt{3} < m_h \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu durumda;

$$a_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \quad , \quad h_{\pi} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} + \frac{\left| \frac{-1}{m_a} \right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} \right) \cdot h$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \quad , \quad h = \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{-1}{m_a} \right|} \right) \cdot h_{\pi 3}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$p_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p \quad , \quad q_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q$$

$$\Rightarrow p = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \quad , \quad q = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$h^2 = p \cdot q$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{-1}{m_a} \right|} \cdot h_{\pi 3} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3}$$

$$h_{\pi 3}^2 = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{-1}{m_a} \right| \right)^2 \cdot (1+m_a^2)}{\left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3}$$

eşitliği elde edilir.

v) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\sqrt{3} < m_a < \infty$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_h < 0$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} a_{\pi} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \quad , \quad h_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_a}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} \right) \cdot h \\ \implies a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \quad , \quad h = \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \right) \cdot h_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p \quad , \quad q_{\pi 3} = \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q \\ \implies p &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \quad , \quad q = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \cdot h_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \\ h_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|\right)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

vi) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\infty < m_a \leq -\sqrt{3}$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $0 < m_h \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \quad , \quad h_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_a}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} \right) \cdot h \\ \implies a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \quad , \quad h = \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \right) \cdot h_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_{\pi} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p \quad , \quad q_{\pi 3} = \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q \\ \implies p &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \quad , \quad q = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \cdot h_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \\ h_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|\right)}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot q_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

vii) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi üçgenin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde $-\sqrt{3} < m_a \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_h \leq \sqrt{3}$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} a_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a, & h_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_a}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} \right) \cdot h \\ \Rightarrow a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3}, & h &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \right) \cdot h_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p, & q_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q \\ \Rightarrow p &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3}, & q &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \cdot h_{\pi_3} \right) &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \\ h_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_a}\right|\right)^2 \cdot (1+m_a^2)}{\left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

viii) Eğer verilen bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_a < 0$ ise hipotenüse ait yüksekliğin eğimi $\sqrt{3} < m_h < -\infty$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} a_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a, & h_{\pi_3} &= \left(\frac{2\left|\frac{-1}{m_a}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}} \right) \cdot h \\ \Rightarrow a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3}, & h &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \right) \cdot h_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup bunlar da m_a ile gösterilsin. Bu durumda;

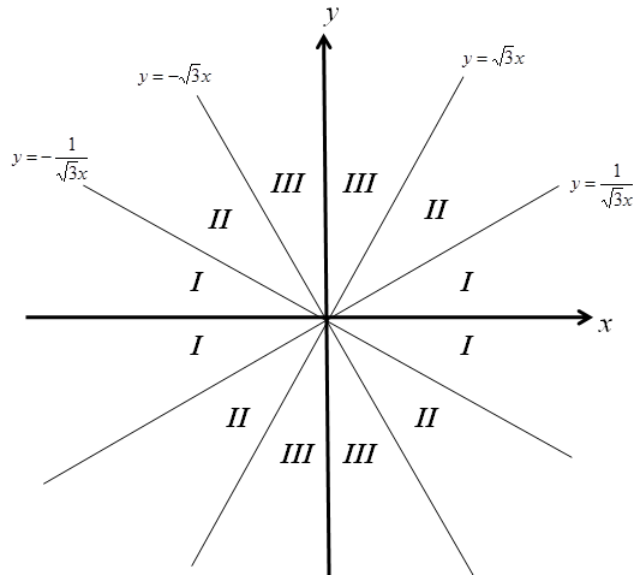
$$\begin{aligned} p_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot p, & q_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot q \\ \Rightarrow p &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3}, & q &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

olup, bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_a}\right|} \cdot h_{\pi_3} \right) &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \\ h_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{4\left|\frac{-1}{m_a}\right|^2 \cdot (1+m_a^2)}{3 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_a}\right)^2\right) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot q_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

x -ekseninin altında kalan bölgeler için bu durumların simetrikleri olduğu için benzer sonuçlar elde edilecektir. Bulunan sonuçlar bir şekil ile özetlenmek istenirse; $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Öklid bağıntısının benzeri için aynı sonucu veren bölgeler aynı rakam ile gösterilsin. Bu durumda bir dik üçgenin hipotenüsünün eğimi, verilen bölgeler içinde olan üçgenlerin $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Öklid bağıntısı benzer şekilde hesaplanır ve aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.



Şekil 5.20 $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde Öklid bağıntılarını sınıflandırması

2) İspat yapılırken daha önce (1) numaralı ispatta kullanılan sınıflandırma kullanılacaktır. Yani eğer verilen bir dik üçgenin dik kenarlarından birisi x -eksenine paralel ise diğer dik kenarı y -eksenine paralel olur. Eğer dik üçgenin dik kenarlarından birisi (I) numaralı bölgede ise diğer dik kenarı (IV) numaralı bölgede, eğer dik kenarlarından birisi (II) numaralı bölgede ise diğer dik kenarı (V) numaralı bölgede, eğer dik kenarlardan birisi (III) numaralı bölgede ise diğer dik kenarı (VI) numaralı bölgede olur. Şimdi yukarıdaki bölgeler esas alınarak, herbir durum için ayrı ayrı hesap yapılırsa;

i) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarı $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde x -eksenine paralel ise $m_c = 0$ ve AC kenarının eğimi $m_b = -\frac{1}{m_c} = \infty$ olur. Bu durumda $m_c = 0$, $m_b = \infty$ ve

$0 < m_a \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot b, & a_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ \implies c_{\pi 3} &= 1 \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot b, & a_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ \implies c &= c_{\pi 3}, & b &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) b_{\pi 3}, & a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \implies \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{4 \cdot (1+m_a^2)}{3 \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ \implies c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{1+m_a^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

ii) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarı $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde x - eksenine paralel ise $m_c = 0$ ve AC kenarının eğimi $m_b = -\frac{1}{m_c} = \infty$ olur. Bu durumda $m_c = 0$, $m_b = \infty$ ve $\sqrt{3} < |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot b, & a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ \implies c_{\pi 3} &= 1 \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot b, & a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ \implies c &= c_{\pi 3}, & b &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot b_{\pi 3}, & a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \implies \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{1+m_a^2}{|m_a|^2} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

iii) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarı $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde y - eksenine paralel ise $m_c = \infty$ ve AC kenarının eğimi $m_b = -\frac{1}{m_c} = 0$ olur. Bu durumda $m_c = \infty$, $m_b = 0$ ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot c \quad , \quad b_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_b^2}} + \frac{|m_b|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}\right) \cdot b \quad , \quad a_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}\right) \cdot a \\ \implies c_{\pi} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot c \quad , \quad b_{\pi 3} = 1 \cdot b \quad , \quad a_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}\right) \cdot a \\ \implies c &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot c_{\pi 3} \quad , \quad b = 1 \cdot b_{\pi 3} \quad , \quad a = \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \implies (b_{\pi 3})^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{1+m_a^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2}\right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ \implies \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_{\pi 3}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{4 \cdot (1+m_a^2)}{3 \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

iv) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarı $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde y - eksenine paralel ise $m_c = \infty$ ve AC kenarının eğimi $m_b = -\frac{1}{m_c} = 0$ olur. Bu durumda $m_c = 0$, $m_b = \infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot c \quad , \quad b_{\pi 3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_b^2}} + \frac{|m_b|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_b^2}}\right) \cdot b \quad , \quad a_{\pi 3} = \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}\right) \cdot a \\ \implies c_{\pi 3} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot c \quad , \quad b_{\pi 3} = 1 \cdot b \quad , \quad a_{\pi 3} = \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}\right) \cdot a \\ \implies c &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot c_{\pi 3} \quad , \quad b = 1 \cdot b_{\pi 3} \quad , \quad a = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \implies (b_{\pi 3})^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2)}{4 \cdot |m_a|^2}\right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p.a \\ \implies \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c_{\pi 3}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{1+m_a^2}{|m_a|^2}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

v) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $0 < m_c \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ise AC kenarının eğimi $-\sqrt{3} < m_b \leq \infty$ olur. Bu durumda $0 < m_c \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\sqrt{3} < m_b \leq \infty$ ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}\right) \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}\right) \cdot b, \\ c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|}\right) \cdot c_{\pi 3}, & b &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|}\right) \cdot b_{\pi 3}, \\ a_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}\right) \cdot a, \\ a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q.a \\ \implies \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi 3}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{4 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left|\frac{-1}{m_c}\right|^2}{3 \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2 \cdot (1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2)}\right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p.a \\ \implies \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi 3}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \\ \implies c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2 \cdot (1+m_c^2)}\right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

vi) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $0 < m_c \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ise AC kenarının eğimi $-\sqrt{3} < m_b \leq \infty$ olur. Bu durumda $0 < m_c \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\sqrt{3} < m_b \leq \infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}\right) \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}\right) \cdot b, & a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}\right) \cdot a \\ \implies c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|}\right) \cdot c_{\pi 3}, & b &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|}\right) \cdot b_{\pi 3}, & a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|}\right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow b_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot \left|\frac{-1}{m_c}\right|^2}{|m_a|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow c_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|\right)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

vii) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_c \leq \sqrt{3}$ ise AC kenarının eğimi $-\sqrt{3} < m_b \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu durumda; $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_c \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < m_b \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \\ c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi_3} \\ b_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \\ b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi_3} \\ a_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow b_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|\right)^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 c^2 &= p.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

viii) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_c \leq \sqrt{3}$ ise AC kenarının eğimi $-\sqrt{3} < m_b \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu durumda; $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_c \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < m_b \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned}
 c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \\
 c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3} \\
 b_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \\
 b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi 3} \\
 a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\
 a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 b^2 &= q.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot (1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2)} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 c^2 &= p.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

ix) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\sqrt{3} < m_c < \infty$ ise AC kenarının eğimi $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_b < 0$ olur. Bu durumda; $\sqrt{3} < m_c \leq \infty$, $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_b \leq 0$

ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi_3} &= \left(\frac{2|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \\ c &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right) \cdot c_{\pi_3} \\ b_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \\ b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi_3} \\ a_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow b_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|\right)^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \cdot c_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow c_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{4 \cdot (1+m_a^2) \cdot |m_c|^2}{3 \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

x) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi_3}^2$ -düzleminde $\sqrt{3} < m_c \leq \infty$ ise AC kenarının eğimi $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_b \leq 0$ olur. Bu durumda; $\sqrt{3} < m_c \leq \infty$, $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_b \leq 0$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi_3} &= \left(\frac{2|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \quad , \quad b_{\pi_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \quad , \quad a_{\pi_3} = \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ \Rightarrow c &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right) \cdot c_{\pi_3} \quad , \quad b = \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi_3} \quad , \quad a = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow b_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|\right)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
c^2 &= p \cdot a \\
\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
\Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot |m_c|^2}{|m_a|^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

xi) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\infty < m_c \leq -\sqrt{3}$ ise AC kenarının eğimi $0 < m_b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu durumda; $\infty < m_c \leq -\sqrt{3}$, $0 < m_b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned}
c_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b, \\
c &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3}, & b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi 3}, \\
a_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a, \\
a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3}
\end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
b^2 &= q \cdot a \\
\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
\Rightarrow b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|\right)^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
c^2 &= p \cdot a \\
\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
\Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{4 \cdot (1+m_a^2) \cdot |m_c|^2}{3 \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

xii) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\infty < m_c \leq -\sqrt{3}$ ise AC kenarının eğimi $0 < m_b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu durumda; $\infty < m_c \leq -\sqrt{3}$, $0 < m_b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned}
c_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c, & b_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b, & a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\
\Rightarrow c &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3}, & b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi 3}, & a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3}
\end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow b_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|\right)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}}{2|m_c|} \cdot c_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow c_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot |m_c|^2}{|m_a|^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

xiii) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}^2_{\pi_3}$ -düzleminde $-\sqrt{3} < m_c \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ise AC kenarının eğimi $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_b \leq \sqrt{3}$ olur. Bu durumda; $-\sqrt{3} < m_c \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_b \leq \sqrt{3}$ ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \\ c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi_3} \\ b_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \\ b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi_3} \\ a_{\pi_3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

olur. Burada p_{π_3} ve q_{π_3} uzunluklarının eğimleri a_{π_3} uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi_3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi_3} \\ \Rightarrow b_{\pi_3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|\right)^2}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|\right)^2 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2\right)} \right) \cdot q_{\pi_3} \cdot a_{\pi_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 c^2 &= p.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

xiv) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $-\sqrt{3} < m_c \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ise AC kenarının eğimi $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_b \leq \sqrt{3}$ olur. Bu durumda; $-\sqrt{3} < m_c \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < m_b \leq \sqrt{3}$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned}
 c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \\
 c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3} \\
 b_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} + \frac{\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \\
 b &= \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi 3} \\
 a_{\pi 3} &= \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\
 a &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 b^2 &= q.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{-1}{m_c}\right|)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot (1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2)} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 c^2 &= p.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

xv) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_c \leq 0$ ise AC kenarının eğimi $\sqrt{3} < m_b \leq -\infty$ olur. Bu durumda; $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_c \leq 0$, $\sqrt{3} < m_b \leq -\infty$

ve $0 < |m_a| \leq \sqrt{3}$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \\ c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3} \\ b_{\pi 3} &= \left(\frac{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \\ b &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi 3} \\ a_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_a^2}} + \frac{|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ a &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ \Rightarrow b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{4 \cdot (1+m_a^2) \cdot \left|\frac{-1}{m_c}\right|^2}{3 \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2 \cdot (1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2)} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c^2 &= p \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ \Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_a|)^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

xvi) Eğer verilen bir dik üçgenin AB kenarının eğimi $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_c \leq 0$ ise AC kenarının eğimi $\sqrt{3} < m_b \leq -\infty$ olur. Bu durumda; $\frac{-1}{\sqrt{3}} < m_c \leq 0$, $\sqrt{3} < m_b \leq -\infty$ ve $\sqrt{3} \leq |m_a| < \infty$ için

$$\begin{aligned} c_{\pi 3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+m_c^2}} + \frac{|m_c|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_c^2}} \right) \cdot c \quad , \quad b_{\pi 3} = \left(\frac{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}} \right) \cdot b \quad , \quad a_{\pi 3} = \left(\frac{2|m_a|}{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}} \right) \cdot a \\ \Rightarrow c &= \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \right) \cdot c_{\pi 3} \quad , \quad b = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \right) \cdot b_{\pi 3} \quad , \quad a = \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

olur. Burada $p_{\pi 3}$ ve $q_{\pi 3}$ uzunluklarının eğimleri $a_{\pi 3}$ uzunluğunun eğimi ile aynı olup m_a ile gösterilsin. Şimdi bulunan eşitlikler \mathbb{R}^2 -düzleminde Öklid bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b^2 &= q \cdot a \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2}}{2\left|\frac{-1}{m_c}\right|} \cdot b_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\ \Rightarrow b_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{(1+m_a^2) \cdot \left|\frac{-1}{m_c}\right|^2}{|m_a|^2 \cdot (1+\left(\frac{-1}{m_c}\right)^2)} \right) \cdot q_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 c^2 &= p.a \\
 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|} \cdot c_{\pi 3} \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1+m_a^2}}{2|m_a|} \right) \cdot a_{\pi 3} \\
 \Rightarrow c_{\pi 3}^2 &= \left(\frac{3 \cdot (1+m_a^2) \cdot (1+\frac{1}{\sqrt{3}}|m_c|)^2}{4 \cdot |m_a|^2 \cdot (1+m_c^2)} \right) \cdot p_{\pi 3} \cdot a_{\pi 3}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada x -ekseninin altında kalan bölgeler için bu durumların simetrikleri olduğu için benzer sonuçlar elde edilecektir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, A. Bayar ve R. Kaya tarafından 2011 yılında tanımlanan $d_{\pi n}$ -uzaklık ailesinin $n = 3$ durumu için elde edilen $d_{\pi 3}$ -uzaklığı ile donatılmış \mathbb{R}^2 düzlemi olan $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı üçgenlerin alan formülleri, trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik indirgeme formülleri, açı ölçüsü, referans açı kavramına buna bağlı olarak uzunlukların dönmeler altındaki değişimleri ve bazı klasik teoremler verilmiştir.

Elde edilen sonuçlar öklidyen olmayan geometriler için önemli bir katkı sağlayacaktır. Benzer bakış açısı ile $\mathbb{R}_{\pi 3}^2$ -düzleminde izoperimetrik eşitsizlikler, inversiyonlar gibi geometrik kavramlar incelenebilir. Ayrıca bu uzaklık fonksiyonu 3-boyutlu uzaya genişletilerek yeni teoriler kurulabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ada, T. (2005). “Iso-taxicab gerometri üzerine”. Doktora. ESOGÜ FBE, p. 84.

Bayar, A. ve R. Kaya (2011). “On isometries of $\mathbb{R}_{\pi n}^2$ ”. İn: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 40(5), pp. 673–679.

Kocayusufoğlu, I. (2002). “Trigonometry on iso-taxicab geometry”. İn: *Mathematical and Computational Applications* 5.3, pp. 201–212.

Krause, E.F. (1975). *Taxicab Geometry*. Menlo Park, CA: Wesley Publishing Company, p. 88.

Sowel, K.O. (1989). “Taxicab geometry-a new slant”. İn: *Mathematics Magazine* 62, pp. 238–248.

Özcan, M. ve R. Kaya (2002). “On the ratio of directed lengths in the taxicab plane and related properties”. İn: *Missouri Journal of Mathematical Sciences* 14.2, pp. 107–117.

Özcan, M., S. Ekmekçi ve S. Bayar (2002). “A note on the variation of the taxicab lengths under rotations”. İn: *TME journal* 11.7, pp. 381–384.

ÖZGEÇMİŞ

08.08.1984 tarihinde Adana'nın Yüreğir ilçesinde doğdu. İlköğrenimine Adana Mimar Sinan İlköğretim Okulunda başladı ve Adana Anadolu İmam-Hatip Lisesinde tamamladı. Ortaöğrenimine İçel 75. Yıl Anadolu Öğretmen Lisesinde başladı ve Adana Abdülkadir Paksoy Lisesinde tamamladı. 2003 yılında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimi 2008 yılında tamamladı. 2010-2012 yılları arasında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2016 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Bölümünde doktora öğrenimine başladı. Halen Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Bölümünde öğrenimine devam etmektedir.