Sabit Noktaların Bazı Geometrik Özellikleri

Gaye Zaim Erçınar

DOKTORA TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Ağustos 2020

Some Geometric Properties of Fixed Points

Gaye Zaim Erçınar

DOCTORAL DISSERTATION

Deparment of Mathematics - Computer

August 2020

Sabit Noktaların Bazı Geometrik Özellikleri

Gaye Zaim Erçınar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Ağustos 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özcan GELİŞGEN danışmanlığında hazırlamış olduğum “Sabit Çember Teoremleri ve Bazı Uygulamaları” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 27/08/2020

Gaye ZAİM ERÇINAR

ÖZET

On bölümden oluşan bu çalışmada, alışılmış metrik uzay ve genelleştirilmiş metrik uzaylar olan $S-$metrik uzay, $A-$metrik uzay ve A_b-metrik uzayda klasik sabit nokta teorisinin dışında sabit çember, sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini eğrisi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanıtılmış ve bu geometrik nesnelerin ilgili uzaylarda varlık ve teklik koşulları verilmiştir.

Birinci bölümde, tezde ele alıncak konunun genel anlamda kullanımı ve gelişiminden kısaca bahsedilerek konunun girişi ve amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, tez boyunca ele alınacak konunun tarihsel gelişimi hakkında literatür özeti verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tez boyunca kullanılacak temel kavram, tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, $A-$metrik uzaylarda ve A_b-metrik uzaylarda sabit çember kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca bu uzaylarda sabit çemberin varlık ve teklik koşulları üzerinde durulmuştur.

Beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci bölümde, alışılmış, $S-$, $A-$ ve A_b-metrik uzaylarda sırasıyla sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini eğrisi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanıtılarak, bu uzaylarda sabit elipsin, sabit hiperbolün, sabit Cassini eğrisinin ve sabit Apollonius çemberinin varlık ve teklik koşulları ifade edilmiştir.

Dokuzuncu ve onuncu bölümlerde tezde elde edilen bulgular, sonuçlar özetlenerek ilerideki çalışmalara dair öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, $S-$Metrik Uzay, $A-$Metrik Uzay, A_b-Metrik Uzay, Sabit Çember, Sabit Elips, Sabit Hiperbol, Sabit Cassini Eğrisi, Sabit Apollonius Çemberi

SUMMARY

In this study which is consist of ten parts, the concepts of a fixed circle, a fixed ellipse, a fixed hyperbola, a fixed Cassini curve and a fixed Apollonius circle which is apart from the classical fixed point theory are introduced in the ordinary metric space and the generalized metric spaces that $S-$metric space, $A-$metric space and A_b-metric space. Also, their the existence and uniqueness conditions of these geometric objects in related spaces are given.

In the first chapter, the general sense use and development of the topic to be handled in the thesis is briefly mentioned and the introduction and purpose of the subject is given.

In the second chapter, a summary of the literature is given by considering the historical development of the subject to be handled throughout the thesis.

In the third chapter, the basic concepts, definitions and theorems to be used throughout the thesis are expressed.

In the fourth chapter, the concept of fixed circles in $A-$metric spaces and A_b-metric spaces is introduced. In addition, the existence and uniqueness conditions of the fixed circle in these spaces are emphasized.

In the fifth, sixth, seventh and eighth chapters, the concepts of fixed ellipse, fixed hyperbola, fixed Cassini curve and fixed Apollonius circle in the ordinary, $S-$, $A-$ and A_b-metric spaces are introduced, respectively. Also the existence and uniqueness conditions of the fixed ellipse, fixed hyperbola, fixed Cassini curve and fixed Apollonius circle are given, respectively.

In the ninth and tenth chapters, the results obtained in the thesis are summarized and suggestions for future studies are given.

Key Words: Metric Space, $S-$Metric Space, $A-$Metric Space, A_b-Metric Space, Fixed Circle, Fixed Ellipse, Fixed Hyperbola, Fixed Cassini Curve, Fixed Apollonius Circle

TEŞEKKÜR

[redacted]

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Sabit nokta teorisi, lineer olmayan analizde ve modern matematiğin diğer bir çok alanında temel bir araçtır. Özellikle diferensiyel denklem, kesirli diferensiyel denklem, integral denklem, matris denklemi gibi belirli bir fonksiyonel denklemin çözülebilirliği ile uğraşırken, bazı dönüşümlerin sabit noktasının bulunması problemi formülize edilmektedir. Bunun yanında pratik sonuçlarının ve uygulamalarının oldukça iyi bilinmesinden dolayı tıp (tomografi, yeniden görüntü oluşturma), haberleşme (telekominikasyon, interpolasyon, ekstrapolasyon, sinyal sentezleri, filtre sentezleri) ve ekonomi başta olmak üzere, daha bir çok alanda yoğun olarak uygulanmıştır.

Sabit nokta teorinin temelinde yer alan sabit nokta problemi şu şekilde ifade edilebilir: ”X bir küme, $A, B \subseteq X$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere bir $f : A \longrightarrow B$ dönüşümü ele alınsın. Bu takdirde ne zaman ya da hangi koşullar altında $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır?” Sonrasında ilk akla gelen soru ise ”Sabit nokta var ise kaç tanedir?” veya ”Sabit nokta ne zaman tek olur?” şeklindedir.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları üç temel alana bölünmüştür. Doğal olarak bu üç büyük alan için bir sınıflandırma yapılabilir. Bu alanlar;
1. Topolojik sabit nokta teori
2. Metrik sabit nokta teori
3. Ayrık sabit nokta teori
şeklindedir. Bu büyük alanlar arasındaki sınırlar aşağıda listelenen üç büyük ve önemli teoremin keşfiyle tanımlanmıştır. Bu önemli teoremler sırasıyla;
1. Brouwer Sabit Nokta Teoremi (1912) (Topolojik sabit nokta teori)
2. Banach Sabit Nokta Teoremi (1922) (Metrik sabit nokta teori)
3. Tarski Sabit Nokta Teoremi (1955) (Ayrık sabit nokta teori)
şeklindedir.

Bu tez çalışmasında Banach Sabit Nokta Teoremi ile sınırları belirlenen Metrik sabit nokta teori alanında çalışılacaktır. Bu alanda sabit nokta probleminin gelişimi temel olarak iki farklı yönde olmuştur. İlki Banach teoreminde ifade edilen büzülme dönüşümü yerine başka ne gibi koşullar ya da dönüşümler üzerine ne gibi şartlar konulabileceği şeklindedir. İkincisi ise sabit noktanın var ve tek olması için çalışılan uzay üzerinde ne gibi koşullar ve kısıtlar olmalı yönündedir. Biraz daha açıklayacak olursak Stefan Banach zamanından beri sabit nokta teorisi farklı bakış açılarıyla çalışılmaya devam etmektedir. İlk olarak bu teori

1922 yılında büzülme dönüşümü kavramı kullanılarak tam metrik uzaylar üzerinde elde edilen ”Banach Büzülme Prensibi” ile başlamış ve sonrasında farklı metodlar kullanılarak bu prensip genelleştirilmiştir. Örneğin bu metodlardan birisi kullanılan büzülme koşulunun değiştirilmesi şeklindedir. 1977 yılında Rhoades çeşitli büzülme dönüşümlerinin tanımlarını vererek aralarındaki ilişkiyi incelemiş ve bu büzülme dönüşümleri yardımıyla bazı sabit nokta teoremleri elde etmiştir. Bu amaç doğrultusunda başvurulan bir diğer metod ise çalışılan metrik uzayın genelleştirilmesidir. Bu sebeple çeşitli genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde yapılan sabit nokta çalışmaları literatürde mevcuttur. Örneğin 2012 yılında Sedghi vd. tarafından üç boyutlu tanım kümesi üzerinde S-metrik uzay kavramı metrik uzayların bir genellemesi olarak tanıtılmıştır. Daha sonra Abbas vd. 2015 yılında n boyutlu tanım kümesi üzerinde A-metrik uzay kavramını ortaya attı. Son olarak 2016 yılında Ughade, Türkoğlu ve Singh A-metrik kavramını genelleyerek A_b-metrik uzay kavramını tanıttı.

Son zamanlarda bilinen sabit nokta teoremlerine farklı bir bakış açısı kazandırılarak sabit çember teoremleri elde edilmiş ve bir fonksiyonun sabit çemberinin varlık ve teklik koşulları araştırılmıştır. Örneğin, Özgür ve Taş herhangi bir metrik uzay üzerinde sabit çember kavramını tanıtıp, Caristi tarafından verilen sabit nokta teoremindeki

$$d(x,Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

eşitsizliğini kullanarak sabit çember teoremleri elde etmişler ve yaptıkları çalışmalar ile $S-$metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisi farklı bir yorumla sabit çember teorisine genelleştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında amaç ortaya atılan sabit çember teoremlerini farklı uzaylarda geliştirmek ve yeni teoremler ortaya koymaktır. Bunun yanı sıra geometrik temel eğrilerden olan elips, hiperbol, Cassini eğrisi ve Apollonius çemberi kavramları ele alınacak ve çeşitli metrik uzaylarda bu eğrilerin sabit kalma koşulları incelenecektir. Sonrasında bu sabit eğrilerin tekliği ile ilgili koşullar sunulacaktır. Çember, çalışılan uzayda sabit bir noktadan sabit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak tanımlanır. Bu bağlamda sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü sabit olacak şekilde oluşturulan geometrik yerlerin yani elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius çemberi kavramlarının çeşitli uzaylarda varlık ve teklik koşulları incelenecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Matematiğin evrensel gelişimi analizin çalışma yöntemlerinden etkilenmiştir. Diğer taraftan kümelerin cebirsel özellikleri analizin gelişimi için yetersiz kaldığından metrik uzaylara ihtiyaç duyulmuştur. Metrik uzay kavramını ilk olarak 1906 yılında Maurice Fréchet vermiştir (Fréchet, 1906). Böylece klasik analizden modern analize geçiş sağlanmıştır. Nitekim metrik ve metrik uzay kavramı reel ve kompleks teorilerde bilinen bir çok önemli özelliklerin herhangi bir uzaya nasıl aktarılacağını bize gösterir. Ayrıca topoloji teorisinde soyut olan bir takım kavramlar, metrik uzay teorisinde daha somut kavramlarla açıklanma imkanı bulur. Maurice Fréchet 1926 yılındaki bir çalışmasında da lineer metrik uzayları tanımlamıştır (Fréchet, 1926). Bunun ardından metrik uzaylarla ilgili detaylı çalışmalar yapılmış ve uygulama alanları incelenmiştir (Copson, 1968; Giles, 1987; Rolewicz, 1985; Searcoid, 2007; Shirali, 2006). Fréchet 1906 da yayınladığı çalışmasında uzaklık fonksiyonu kavramının formal tanımını vermiştir.

Tanım 2.1 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu*
$1)$*$x = y$ ise $d(x, y) = 0$ dır. (Özdeşlik)*
$2)$*$x \neq y$ ise $d(x, y) > 0$ dır. (Negatif olmama)*
$3)$*Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ dir. (Simetri)*
$4)$*Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dir. (Üçgen eşitsizliği)*
koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu adı verilir. Ayrıca $(X,\ d)$ ikilisine metrik uzay adı verilir.

Hausdorff, bu d fonksiyonuna metrik ifadesini ilk kullanan matematikçidir. Sonralarda 1963 yılında Gähler yaptığı çalışmasında alışılmış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olduğunu iddia ettiği 2-metrik uzay kavramını tanıttı.

Tanım 2.2 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu*
$1)$*Farklı $x, y \in X$ için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.*
$2)$*x, y, z üçlüsünün herhangi ikisi birbirine eşit ise $d(x, y, z) = 0$ dır.*
$3)$*$d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, x, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y) = d(z, y, x)$ dir.*
$4)$*Her $x, y, z, a \in X$ için $d(x, y, z) \leq d(x, y, a) + d(x, a, z) + d(a, y, z)$ dir.*
koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir 2-metrik denir ve $(X,\ d)$ ikilisine 2-metrik uzay adı verilir.

Her ne kadar Gähler yaptığı çalışmada 2-metrik uzayın alışılmış metrik uzayın bir genelleştirilmesi olduğunu iddia etmiş olsa da Ha vd. 1988 yılında yayınladıkları bir çalışmada 2-metrik fonksiyonun değişkenleri üzerinde sürekli bir fonksiyon olmasının gerekli olmadığını gösterdi. Bu bağlamda ayrıca; metrik uzaylardaki büzülme dönüşümü teoremi ile 2-metrik uzaylardaki büzülme dönüşümü teoremi birbiri ile ilgisiz olduğu ortaya çıkmıştır. Bunun üzerine 1992 de Dhage, $D-$metrik uzay adını verdiği genelleştirilmiş metrik uzayların yeni bir yapısını tanıttı.

Tanım 2.3 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $D : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu*
$1)$*$D(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ dir.*
$2)$*$D(x,y,z) = D(x,z,y) = D(y,x,z) = D(y,z,x) = D(z,x,y) = D(z,y,x)$ dir.*
$3)$*Her $x,y,z,a \in X$ için $D(x,y,z) \leq D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)$ dir.*
$4)$*Her $x,y,z,a \in X$ için $D(x,y,y) \leq D(x,z,z) + D(z,y,y)$ dir.*
koşullarını sağlıyorsa D ye X üzerinde bir D-metrik denir ve (X, D) ikilisine D-metrik uzay adı verilir.
Eğer her $x, y \in X$ için $D(x, x, y) = D(x, y, y)$ ise D ye simetrik $D-$metrik denir.

$D-$metrik uzayda yakınsaklık tanımlarının farklı kullanılması ile iki farklı topolojiden bahsedilebilmektedir. Dhage bu topolojilerin aynı olduğunu iddia etmiş olsada bu topolojilerin birbirinden farklı olduğunu ve Dhage'nin yayınladığı makalede ortaya attığı iddialarında bir takım hataların ve problemlerin olduğunu Mustafa ve Sims tarafından 2003 yılında yayınladıkları bir makale ile göstermişlerdir. Dolayısıyla $D-$metrik uzay kavramı metrik uzayların bir genelleştirilmesi değildir. Daha sonra 2006 yılında yaptıkları bir çalışma ile Mustafa ve Sims metrik uzayların bir genelleştirilmesini genelleştirilmiş metrik uzay adı altında vermişlerdir.

Tanım 2.4 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu*
$1)$*$x = y = z$ ise $G(x,y,z) = 0$ dır.*
$2)$*$x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $G(x,x,y) > 0$ dır.*
$3)$*$y \neq z$ olacak şekildeki her $x,y,z \in X$ için $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ dır.*
$4)$*$G(x,y,z) = G(x,z,y) = G(y,x,z) = G(y,z,x) = G(z,x,y) = G(z,y,x)$ dir.*
$5)$*Her $x,y,z,w \in X$ için $G(x,y,z) \leq G(x,w,w) + G(w,y,z)$ dir.*
koşullarını sağlıyorsa G ye X üzerinde bir G-metrik denir ve (X, G) ikilisine G-metrik uzay adı verilir.
Eğer her $x, y \in X$ için $G(x, x, y) = G(x, y, y)$ ise G ye simetrik $G-$metrik denir.

Sonrasında 2012 de Sedghi vd. yayınladıkları çalışma ile metrik uzayların bir diğer genellemesi olan S-metrik kavramını vermişlerdir.

Tanım 2.5 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x,\ y,\ z,\ a \in X$ için*
$1) S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ *dir.*
$2) S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$
şartlarını sağlıyorsa S fonksiyonuna X üzerinde bir S-metrik denir. $(X,\ S)$ ikilisine de S-metrik uzay denir.

Daha sonra 2015 yılında Abbas vd. S-metrik uzayın bir genellemesi olan A-metrik uzay kavramını tanıttılar. Buna göre $S-$metrik uzay kavramı herhangi bir boştan farklı X kümesinin üçlü kartezyen çarpımı üzerinde tanımlı iken $A-$metrik uzay kavramı X kümesinin n tanesinin kartezyen çarpımı üzerinde tanımlıdır.

Tanım 2.6 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $A : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere her $x_i,\ a \in X$ için*
$A1) A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$ *dir.*
$A2) A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., x_i, a)$ *dır.*
şartlarını sağlıyorsa A fonksiyonuna X üzerinde bir A-metrik denir. $(X,\ A)$ ikilisine de A-metrik uzay denir.

Son olarak 2016 yılında Ughade, Türkoğlu ve Singh tarafından $A-$metrik uzay kavramını kapsayan A_b-metrik uzay kavramını tanıtmışlardır.

Tanım 2.7 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $A_b : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere her $x_i,\ a \in X$ için*
$A_b1)\ A_b(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$ *dir.*
$A_b2)$ *$b \geq 1$ olmak üzere $A_b(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \leq b \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., x_i, a)$ dır.*
şartlarını sağlıyorsa A_b fonksiyonuna X üzerinde bir A_b-metrik denir. $(X,\ A_b)$ ikilisine de A_b-metrik uzay denir. Her $A-$metrik uzayın aslında $b = 1$ olacak şekilde bir A_b-metrik olduğuna dikkat ediniz. Ancak bu durumun tersi her zaman doğru değildir.

Metrik uzayın genelleştirilmesi çalışmaları kısaca yukarıda bahsedildiği gibi ilerler iken diğer yandan Banach büzülme ilkesinin genelleştirilmesi çalışmalarıda devam etmekte idi. Bu bağlamda farklı metotlar ve teknikler kullanılarak büzülme koşulu değiştirilerek genelleştirilmiştir. Bu tarz bir çok çalışma örnekleri literatürde mevcuttur. Örneğin, 1977 yılında Rhoades çeşitli büzülme fonksiyonlarının tanımlarını vermiş sonrasında büzülme fonksiyonlarının aralarındaki ilişkiyi incelemiş ve bu büzülme fonksiyonları yardımıyla çeşitli sabit nokta teoremleri elde etmiştir. Metrik uzayların ve büzülme fonksiyonlarının genelleştirilmesi çalışmalarının devam etmesinin yanında 2017 yılında Nihal Özgür ve Nihal Taş bilinen sabit nokta teoremlerine yeni bir bakış açısı kazandırarak alışılmış metrik uzaylarda ve S-metrik uzayda sabit çember kavramını tanıtmış ve bu uzayda sabit çemberlerin varlık ve teklik koşullarını incelemiştir. Böylelikle bilinen klasik sabit nokta çalışmaları farklı bir yönde derinlik kazanmış, sabit nokta teorisi ve genelleştirilmiş metrik uzaylar alanlarında geometri çalışmaları yapılmasına öncülük etmişleridir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve kavramlar, tezi diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak adına ilgili kaynaklar esas alınarak özetlenerek verilecektir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerin ispatlarına kısalığın hatırına yer verilmeyecek olup ilgili ispatlara teoremlerde ifade edilen kaynaklardan ulaşılabilir.

3.1 Alışılmış (Klasik) Metrik Uzaylar

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylara dair temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.1 *X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x,\ y \in X$ için*
$1)d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$2)d(x, y) = d(y, x)$
$3)d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde alışılmış (standart) metrik ve (X, d) ikilisine de alışılmış metrik uzay denir. (Fréchet, 1906)

Tanım 3.2 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için $d(x_n,\ x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir. (Kreyszig, 1978)*

Tanım 3.3 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n,\ m \geq n_0$ için $d(x_n,\ x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. (Kreyszig, E., 1978)*

Tanım 3.4 *(X, d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir. (Kreyszig, 1978)*

Tanım 3.5 *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir. (Agarwal vd., 2015)*

Tanım 3.6 (X, d) *bir metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir fonksiyon olsun. Eğer her* $x,\ y \in X$ *için* $d(T(x),\ T(y)) \leq \alpha d(x,\ y)$ *olacak şekilde* $0 \leq \alpha < 1$ *sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. (Banach, 1922)*

Teorem 3.1 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Yani* $T(x) = x$ *olacak şekilde bir tek* $x \in X$ *noktası vardır. Özellikle* x_0, X *te keyfi bir nokta ve* $x_n = T^n(x_0)$ *şeklinde tanımlanan* X *de bir dizi olarak alınır ise* (x_n) *dizisi bu sabit noktaya yakınsar. (Banach, 1922)*

Teorem 3.2 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü her* $x, y \in X$ *ve* $x \neq y$ *için*

$$d(T(x), T(y)) < \max \left\{ \begin{array}{r} d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), \\ d(x, T(y)), d(y, T(x)) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Rhoades, 1977)*

Teorem 3.3 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \left[d(x, T(x)) + d(y, T(y))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Kannan, 1969)*

Teorem 3.4 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \left[d(x, T(y)) + d(y, T(x))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Chatterjea, 1972)*

Teorem 3.5 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* α, β, γ *negatif olmayan sayılar ve* $\alpha + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(x)) + \beta d(y, T(y) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Reich, 1971)*

Teorem 3.6 (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* α, β, γ *negatif olmayan sayılar ve* $\alpha + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, T(y)) + \beta d(y, T(x) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Rhoades, 1977)*

3.2 $S-$Metrik Uzaylar

Bu kısımda $S-$metrik uzaylara dair temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.7 X *boştan farklı bir küme olmak üzere* $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x, y, z, a \in X$ *için*
1)$S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ *dir.*
2)$S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$
şartlarını sağlıyorsa S *fonksiyonuna* X *üzerinde bir* S*-metrik denir.* (X, S) *ikilisine de* S*-metrik uzay denir. (Sedghi vd., 2012)*

Yardımcı Teorem 3.1 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay olsun. O halde her* $x, y \in X$ *için* $S(x, x, y) = S(y, y, x)$ *eşitliği sağlanır. (Sedghi vd., 2012)*

Örnek 3.1 $X = \mathbb{R}$ *olsun. Her* $x, y, z \in X$ *için*

$$S(x, y, z) = |x - z| + |y - z| \quad \textit{ve} \quad S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$$

şeklinde tanımlı $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonları* $\mathbb{R}$ *üzerinde birer* $S-$*metriktir. (Taş, 2017)*

Bu noktada oldukça önemli bir noktaya dikkat çekmek gerekmektedir. $X \neq \emptyset$ herhangibir küme ve d de X üzerinde tanımlı alışılmış bir metrik olsun. Buna göre her $x, y, z \in X$ için

$$S(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$$

olacak şekilde tanımlanan $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir $S-$metriktir. Yani her alışılmış metrik bir $S-$metrik belirler. Ancak bunun tersi doğru değildir. Daha açıkça her $S-$metrik bir alışılmış metrik tarafından üretilemez. Zaten bu ifadenin terside doğru olmuş olsaydı, $S-$metrikler alışılmış metriklerden türetilmiş olacağından dolayı $S-$metrik uzayların alışılmış metrik uzaylardan çok farklı yapılar olmayacaktı. Doğal olarak $S-$metrik uzay kavramı önemini yitirecekti. Özgür vd. 2017 yılındaki çalışmalarında her $S-$metriğin bir alışılmış metrikden üretilemeyeceğini gösterdiler. Buna göre $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$S(x, y, z) = \left|x^2 - y^2\right| + \left|x^2 + y^2 - 2z^2\right|$$

şeklide tanımlanan $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu ele alınsın. Açıkca burada tanımlanan S fonksiyonu bir $S-$metriktir. Bu tanımlanan $S-$metriğin bir alışılmış metrik tarafından türetildiği varsayılsın. Yani

$$S(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$$

olacak şekilde bir d alışılmış metriğinin olduğu varsayılsın. Bu taktirde açıkca

$$S(x, x, z) = 2d(x, z) \quad \text{ve} \quad S(x, x, z) = 2\left|x^2 - z^2\right|$$

olduğundan

$$d(x, z) = \left|x^2 - z^2\right|$$

bulunur. Benzer şekilde

$$S(y, y, z) = 2d(y, z) \quad \text{ve} \quad S(y, y, z) = 2\left|y^2 - z^2\right|$$

eşitliklerinden dolayı

$$d(y, z) = \left|y^2 - z^2\right|$$

şeklinde elde edilir. O halde $S-$metriği alışılmış metrikden türetildiğinden dolayı

$$\left|x^2 - y^2\right| + \left|x^2 + y^2 - 2z^2\right| = \left|x^2 - z^2\right| + \left|y^2 - z^2\right|$$

olmalıdır. Ancak son eşitlik açıkca bir çelişkidir.Dolayısıyla verilmiş olan $S-$metrik alışılmış metrik tarafından üretilemez. (Özgür vd., 2017) Örnek 3.1 de verilen iki $S-$metrikden ilki alışılmış metrikten türetilirken, ikinci $S-$metrik alışılmış bir metrikden türetilemediği kolaylıkla görülebilir.

Tanım 3.8 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için $S(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine $S-$yakınsaktır denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir. (Sedghi vd., 2012)*

Tanım 3.9 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n,\ m \geq n_0$ için $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine $S-$Cauchy dizisi denir. (Sedghi vd., 2012)*

Tanım 3.10 *(X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X, S) metrik uzayına tam $S-$metrik uzay denir. (Sedghi vd., 2012)*

Tanım 3.11 *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir. (Sedghi vd., 2012)*

Tanım 3.12 *(X, S) bir $S-$metrik uzay ve T:$X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,\ y \in X$ için $S(T(x), T(x), T(y)) \leq \alpha S(x, x, y)$ olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. (Sedghi vd., 2012)*

Teorem 3.7 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Yani $T(x) = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır. Özellikle x_0, X te keyfi bir nokta ve $x_n = T^n(x_0)$ şeklinde tanımlanan X de bir dizi olarak alınır ise (x_n) dizisi bu sabit noktaya yakınsar. (Sedghi vd., 2012)*

Teorem 3.8 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için*

$$S(T(x), T(x), T(y)) < \max \left\{ \begin{array}{r} S(x, x, y), S(x, x, T(x)), S(y, y, T(y)), \\ S(x, x, T(y)), S(y, y, T(x)) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Taş, 2017)

Teorem 3.9 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$S(T(x), T(x), T(y)) \leq \lambda \left[S(x, x, T(x)) + S(y, y, T(y))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)

Teorem 3.10 *(X, S) bir tam $S-$metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\lambda \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$S(T(x), T(x), T(y)) \leq \lambda \left[S(x, x, T(y)) + S(y, y, T(x))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)

Teorem 3.11 (X, S) *bir tam* $S-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* α, β, γ *negatif olmayan sayılar ve* $\alpha + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$S(T(x), T(x), T(y)) \leq \alpha S(x, x, T(x)) + \beta S(y, y, T(y)) + \gamma S(x, x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)*

Teorem 3.12 (X, S) *bir* $S-$*tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* α, β, γ *negatif olmayan sayılar ve* $\alpha + \beta + \gamma < 1$ *ile* $\gamma + 3\alpha$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$S(T(x), T(x), T(y)) \leq \alpha S(x, x, T(y)) + \beta S(y, y, T(x)) + \gamma S(x, x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Sedghi ve Dung, 2014)*

3.3 $A-$Metrik Uzaylar

Bu kısımda $A-$metrik uzaylara dair temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.13 X *boştan farklı bir küme olmak üzere* $A : X^n \to [0, \infty)$ *fonksiyonu* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *olmak üzere her* $x_i,\ a \in X$ *için*
$A1) A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$ *dir.*
$A2) A(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., x_i, a)$ *dır.*
şartlarını sağlıyorsa A *fonksiyonuna* X *üzerinde bir A-metrik denir.* $(X,\ A)$ *ikilisine de A-metrik uzay denir. (Abbas vd., 2015)*

Yardımcı Teorem 3.2 $(X,\ A)$ *bir* $A-$*metrik uzay olsun. Bu durumda her* $x,\ y \in X.$ *için* $A(x, ...,\ x, y) = A(y, ..., y, x)$ *eşitliği sağlanır. (Abbas vd., 2015)*

Örnek 3.2 $X = \mathbb{R}$ *olsun. Her* $x, y, z \in X$ *için* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ *olmak üzere*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$$

ve

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $A : \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n \text{ adet}} \to [0, \infty)$ *fonksiyonları* $\mathbb{R}$ *üzerinde birer* $A-$*metriktir. (Abbas vd., 2015)*

Burada $S-$metrik kısmında da ifade edildiği gibi oldukça mühim olan bir noktaya dikkat çekilecektir. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve d de X üzerinde tanımlı bir alışılmış metrik olsun. Buna göre $n \geq 3$ olmak üzere her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d(x_1, x_n) + d(x_2, x_n) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n) \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan $A : X \times \cdots \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir $A-$metriktir.

Açıkca her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x_i, x_n) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{aligned}$$

olur. Üstelik $x_1, x_2, \ldots, x_n, a \in X$ için

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d(x_1, x_n) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq d(x_1, a) + d(a, x_n) + \cdots + d(x_{n-1}, a) + d(a, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, a) + (n-1)\, d(x_n, a) \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n} d(x_i, a) \\ &= A(x_1, \ldots, x_1, a) + \cdots + A(x_n, \ldots, x_n, a) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu ifadelerden anlaşılacağı üzere her alışılmış metrikden bir $A-$metrik türetilebilir. Bu noktada ifadenin tersinin doğru olup olmadığı sorusu doğal olarak ilgi çekici olmuştur. Buna göre $X = \mathbb{R}$ olmak üzere her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_n| \right) + |x_1 + \cdots + x_{n-1} - (n-1)\, x_n|$$

şekliden tanımlanan $A : X \times \cdots \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu ele alınsın. Açıkca burada tanımlanan A fonksiyonu bir $A-$metriktir. Bu $A-$metriğin alışılmış metrik yardımıyla türetildiği varsayılsın. Yani

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n)$$

olacak şekilde bir d alışılmış metriğinin olduğu varsayılsın. Bu taktirde açıkca her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$A(x_i, \ldots, x_i, x_n) = (n-1)\, d(x_i, x_n) \quad \text{ve} \quad A(x_i, \ldots, x_i, x_n) = 2(n-1)\, |x_i - x_n|$$

olduğundan

$$d(x_i, x_n) = 2\, |x_i - x_n|$$

bulunur. O halde $A-$metriği alışılmış metrikden türetildiğinden dolayı

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_n| \right) + |x_1 + \cdots + x_{n-1} - (n-1)\, x_n| &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_n| \\ \Rightarrow |x_1 + \cdots + x_{n-1} - (n-1)\, x_n| &= \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_n| \end{aligned}$$

olmalıdır. Ancak son eşitlik açıkca bir çelişkidir. Dolayısıyla verilmiş olan $A-$metrik, alışılmış metrik tarafından üretilemez. Bu nedenle ilgi çeken sorunun yanıtı ifadenin tersinin doğru olmadığı şeklinde verilmiş olur. Daha açıkça her $A-$metrik bir alışılmış metrik tarafından üretilemez. Zaten bu ifadenin terside doğru olmuş olsaydı, $A-$metrikler alışılmış metriklerden türetilmiş olacağından dolayı $A-$metrik uzayların alışılmış metrik uzaylardan çok farklı yapılar olmayacaktı. Doğal olarak $A-$metrik uzay kavramı önemini yitirecekti.

Tanım 3.14 *(X, A) bir $A-$metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için $A(x_n, ..., x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine $A-$yakınsaktır denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir. (Abbas vd., 2015)*

Tanım 3.15 *(X, A) bir $A-$metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n,\ m \geq n_0$ için $A(x_n, ..., x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine $A-$Cauchy dizisi denir. (Abbas vd., 2015)*

Tanım 3.16 *(X, A) bir $A-$metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X, A) $A-$metrik uzayına tam $A-$metrik uzay denir. (Abbas vd., 2015)*

Tanım 3.17 *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir. (Abbas vd., 2015)*

Tanım 3.18 *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,\ y \in X$ için $A(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \alpha A(x, ..., x, y)$ olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. (Abbas vd., 2015)*

Teorem 3.13 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Yani* $T(x) = x$ *olacak şekilde bir tek* $x \in X$ *noktası vardır. Özellikle* x_0*,* X *te keyfi bir nokta ve* $x_n = T^n(x_0)$ *şeklinde tanımlanan* X *de bir dizi olarak alınır ise* (x_n) *dizisi bu sabit noktaya yakınsar. (Abbas vd., 2015)*

Teorem 3.14 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü her* $x, y \in X$ *ve* $x \neq y$ *için*

$$A(T(x), ..., T(x), T(y)) < \max \left\{ \begin{array}{r} A(x, ..., x, y), A(x, ..., x, T(x)), A(y, ..., y, T(y)), \\ A(x, ..., x, T(y)), A(y, ..., y, T(x)) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)*

Teorem 3.15 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$A(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \lambda \left[AS(x, ..., x, T(x)) + A(y, ..., y, T(y))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)*

Teorem 3.16 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$A(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \lambda \left[A(x, ..., x, T(y)) + A(y, ..., y, T(x))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)*

Teorem 3.17 (X, A) *bir tam* $A-$*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* α, β, γ *negatif olmayan sayılar ve* $\alpha + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$A(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \alpha A(x, ..., x, T(x)) + \beta A(y, ..., y, T(y)) + \gamma A(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)*

Teorem 3.18 *(X, A) bir $A-$tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü α, β, γ negatif olmayan sayılar ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ ile $\gamma + n\alpha$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$A(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \alpha A(x, ..., x, T(y)) + \beta A(y, ..., y, T(x)) + \gamma A(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T nin X uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Gelişgen ve Ermiş, 2019)

3.4 A_b-Metrik Uzaylar

Bu kısımda A_b-metrik uzaylara dair temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.19 *X boştan farklı bir küme olmak üzere $A_b : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere her $x_i, \ a \in X$ için*
$A_b1)$ $A_b(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$ dir.
$A_b2)$ $b \geq 1$ olmak üzere $A_b(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \leq b\sum\limits_{i=1}^{n} A(x_i, x_i, ..., x_i, a)$ dır.
şartlarını sağlıyorsa A_b fonksiyonuna X üzerinde bir A_b-metrik denir. $(X, \ A_b)$ ikilisine de A_b-metrik uzay denir. (Ughade vd. 2016)

Her $A-$metrik uzayın aslında $b = 1$ olacak şekilde bir A_b-metrik olduğuna dikkat ediniz. Ancak bu durumun tersi her zaman doğru değildir.

Yardımcı Teorem 3.3 *$(X, \ A_b)$, $b \geq 1$ olacak şekilde bir A_b-metrik uzay olsun. Bu durumda her $x, \ y \in X.$ için*

$$\begin{aligned} A_b(x, ..., x, y) &\leq b.A_b(y, .., y, x) \\ A_b(y, ..., y, x) &\leq b.A_b(x, ..., x, y) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (Ughade vd. 2016)

Örnek 3.3 *$X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

ve

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|^2$$

şeklinde tanımlı $A_b : \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n\ adet} \to [0, \infty)$ *fonksiyonları* $\mathbb{R}$ *üzerinde birer* A_b-*metriktir. (Ughade vd. 2016)*

Burada $S-$metrik ve $A-$metrik kısmında da ifade edildiği gibi oldukça mühim olan bir noktaya dikkat çekilecektir. $X \neq \emptyset$ herhangibir küme ve d de X üzerinde tanımlı bir alışılmış metrik olsun. Buna göre $n \geq 3$ olmak üzere her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d(x_1, x_n) + d(x_2, x_n) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n) \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan $A_b : X \times \cdots \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir A_b-metriktir.

Açıkca her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x_i, x_n) = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n \end{aligned}$$

olur. Üstelik $x_1, x_2, \ldots, x_n, a \in X$ için

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d(x_1, x_n) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq d(x_1, a) + d(a, x_n) + \cdots + d(x_{n-1}, a) + d(a, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, a) + (n-1) d(x_n, a) \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n} d(x_i, a) \\ &\leq b\left[(n-1) \sum_{i=1}^{n} d(x_i, a)\right] \\ &= b\left(A(x_1, \ldots, x_1, a) + \cdots + A(x_n, \ldots, x_n, a)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu ifadelerden açıkca anlaşılacağı üzere her alışılmış metrikden bir A_b-metrik türetilebilir. Bu noktada ifadenin tersinin doğru olup olmadığı sorusu doğal olarak ilgi çekici olmuştur. Buna göre $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ için

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left|x_i^2 - x_n^2\right|\right) + \left|x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - (n-1) x_n^2\right|$$

şekliden tanımlanan $A_b : X \times \cdots \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu ele alınsın. Açıkca burada tanımlanan A_b fonksiyonu bir A_b-metriktir. Bu A_b-metriğin alışılmış metrik yardımıyla türetildiği varsayılsın. Yani

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_n)$$

olacak şekilde bir d alışılmış metriğinin olduğu varsayılsın. Bu taktirde açıkca her $i \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$A_b\left(x_i, \ldots, x_i, x_n\right) = (n-1)\, d\left(x_i, x_n\right) \quad \text{ve} \quad A_b\left(x_i, \ldots, x_i, x_n\right) = 2\,(n-1)\left|x_i^2 - x_n^2\right|$$

olduğundan

$$d\left(x_i, x_n\right) = 2\left|x_i^2 - x_n^2\right|$$

bulunur. O halde A_b-metriği alışılmış metrikden türetildiğinden dolayı

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_i^2 - x_n^2\right|\right) + \left|x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - (n-1)\, x_n^2\right| = 2\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_i^2 - x_n^2\right|$$
$$\Rightarrow \left|x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - (n-1)\, x_n^2\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|x_i^2 - x_n^2\right|$$

olmalıdır. Ancak son eşitlik açıkca bir çelişkidir. Dolayısıyla verilmiş olan A_b-metrik, alışılmış metrik tarafından üretilemez. Bu nedenle ilgi çeken sorunun yanıtı ifadenin tersinin doğru olmadığı şeklinde verilmiş olur. Daha açıkça her A_b-metrik bir alışılmış metrik tarafından üretilemez. Zaten bu ifadenin terside doğru olmuş olsaydı, A_b-metrikler alışılmış metriklerden türetilmiş olacağından dolayı A_b-metrik uzayların alışılmış metrik uzaylardan çok farklı yapılar olmayacaktı. Doğal olarak A_b-metrik uzay kavramı önemini yitirecekti.

Tanım 3.20 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için $A_b(x_n, ..., x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine A_b-yakınsaktır denir ve x noktasına da bu dizinin limiti denir. (Ughade vd. 2016)*

Tanım 3.21 *(X, A) bir A_b-metrik uzay, $x \in X$ ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n,\ m \geq n_0$ için $A_b(x_n, ..., x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine A_b-Cauchy dizisi denir. (Ughade vd. 2016)*

Tanım 3.22 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X, A_b) A_b-metrik uzayına tam A_b-metrik uzay denir. (Ughade vd. 2016)*

Tanım 3.23 *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir. (Ughade vd. 2016)*

Tanım 3.24 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,\ y \in X$ için $b \geq 1$ olmak üzere $A_b(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \alpha A_b(x, ..., x, y)$ olacak şekilde $0 \leq \alpha < \frac{1}{b^2}$ sabiti var ise T fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir. (Ughade vd. 2016)*

Teorem 3.19 (X, A_b) *bir tam* A_b-*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde T nin bir tek sabit noktası vardır. Yani* $T(x) = x$ *olacak şekilde bir tek* $x \in X$ *noktası vardır. Özellikle* x_0*,* X *te keyfi bir nokta ve* $x_n = T^n(x_0)$ *şeklinde tanımlanan* X *de bir dizi olarak alınır ise* (x_n) *dizisi bu sabit noktaya yakınsar. (Ughade vd. 2016)*

Teorem 3.20 (X, A_b) *bir tam* A_b-*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü her* $x, y \in X$ *ve* $x \neq y$ *için*

$$A_b(T(x), ..., T(x), T(y)) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(x, ..., x, T(x)), A_b(y, ..., y, T(y)), \\ A_b(x, ..., x, T(y)), A_b(y, ..., y, T(x)) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Priyobarta vd. 2020)*

Teorem 3.21 (X, A_b) *bir tam* A_b-*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *ve* $\lambda \neq \frac{1}{nb}$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$A_b(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \lambda \left[A_b S(x, ..., x, T(x)) + A_b(y, ..., y, T(y))\right]$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Priyobarta vd. 2020)*

Teorem 3.22 (X, A_b) *bir tam* A_b-*metrik uzay ve* $T : X \to X$ *bir dönüşüm olsun.* T *dönüşümü* α, β, γ *negatif olmayan sayılar ve* $\alpha + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$A_b(T(x), ..., T(x), T(y)) \leq \alpha A_b(x, ..., x, T(x)) + \beta A_b(y, ..., y, T(y)) + \gamma A_b(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise T *nin* X *uzayı içinde bir tek sabit noktası vardır. (Priyobarta vd. 2020)*

4. ÇEŞİTLİ METRİK UZAYLARDA SABİT ÇEMBER TEOREMLERİ

Daha öncesinde de bahsedildiği gibi alışılmış metrik uzay ve $S-$metrik uzayda sabit çember kavramı Özgür ve Taş 2018-2019 çalışmalarında incelenmiştir. Bu nedenle bu kısımda ilgili çalışmaların paralelinde A-metrik uzayda ve A_b-metrik uzayda bir çemberin sabit kalma koşulları, yani sabit çemberin varlığı ortaya konulacak ve ardından sabit çemberin tekliği ile ilgili koşullar verilecektir.

4.1 A-Metrik Uzayda Sabit Çember Teoremleri

Bu kısımda A-metrik uzayda çemberler için bir dönüşümün bir çemberi sabit bırakması ve sabit çemberin teklik koşulları ele alınacaktır. Buna göre ilk olarak bu uzayda çember ve sabit çember kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 4.1 *(X, A) bir A-metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu taktirde,*

$$C_A[x_0, r] = \{x \in X : A(x, ..., x, x_0) = r\}$$

ifadesine x_0 merkezli r yarıçaplı çember denir.

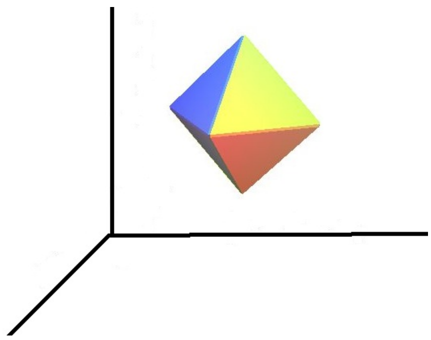
Örnek 4.1 *$X = \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ olmak üzere $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_{ik} - x_{jk}|$ şeklinde tanımlı $A-$metrik ele alınsın. Buna göre (X, A) $A-$metrik uzayında $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ merkezli r yarıçaplı çember*

$$C_A[x_0, r] = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A(x, \ldots, x, x_0) = r\right\}$$

kümesidir. Başka bir deyişle $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ merkezli r yarıçaplı çember $x = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

$$A(x, \ldots, x, x_0) = r \Rightarrow (n-1)\left[|x_1 - x_{01}| + |x_2 - x_{02}| + |x_3 - x_{03}|\right] = r$$

denklemini sağlayan $\mathbb{R}^3$ ün noktalar kümesidir. Bu küme ise şekil 4.1 de görüleceği üzere 3-boyutlu analitik uzayda bir düzgün sekizyüzlü belirtir.



Şekil 4.1 (X, A) $A-$metrik uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı çember

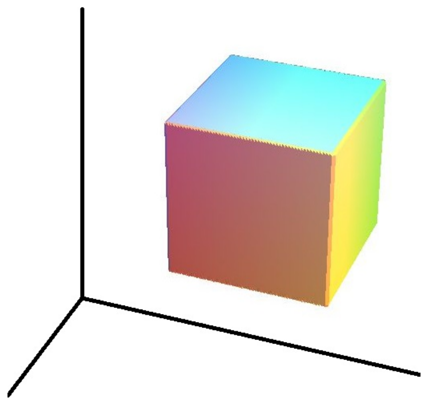
Aynı uzayda $A-$metriği

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\{|x_{ik} - x_{jk}| \mid i, j \in \{1, 2, ..., n\}, \; i < j \text{ ve } k \in \{1, 2, 3\}\}$$

şeklinde tanımlanan $A-$metrik olarak alınırsa $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ merkezli r yarıçaplı çember $x = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

$$A(x, \ldots, x, x_0) = r \Rightarrow \max\{|x_1 - x_{01}|, |x_2 - x_{02}|, |x_3 - x_{03}|\} = r$$

denklemini sağlayan $\mathbb{R}^3$ ün noktalar kümesidir. Bu küme ise şekil 4.2 de görüleceği üzere 3-boyutlu analitik uzayda bir düzgün altıyüzlü (küp) belirtir.



Şekil 4.2 (X, A) $A-$metrik uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı çember

Ayrıca burada bir alışılmış metrik tarafından üretilen $A-$metrikler için ilgili $A-$metrik uzaydaki x_0 merkezli ve r yarıçaplı çember ile alışımış metrik uzaydaki x_0 merkezli ve r yarıçaplı çember arasındaki ilgi aşağıdaki önermelerde verilmiştir.

Önerme 4.1 *A, bir d alışılmış metriği tarafından üretilen bir $A-$metrik olmak üzere (X, A) $A-$metrik uzayı verilsin. Buna göre (X, A) $A-$metrik uzaydaki x_0 merkezli r yarıçaplı çember $C_A[x_0, r]$, aynı zamanda (X, d) alışılmış metrik uzaydaki x_0 merkezli $\frac{r}{n-1}$ yarıçaplı çember $C_d\left[x_0, \frac{r}{n-1}\right]$ dir.*

İspat *$X \neq \emptyset$ bir küme ve A da bir d alışılmış metriği tarafından üretilen bir $A-$metrik olsun. Buna göre $A-$metrik uzaydaki x_0 merkezli r yarıçaplı çember tanımı ve $A-$metriğin d tarafından türetildiği kullanılırsa*

$$A(x, \ldots, x, x_0) = r \Rightarrow \underbrace{d(x, x_0) + \cdots + d(x, x_0)}_{n-1 \text{ adet}} = r \Rightarrow d(x, x_0) = \frac{r}{n-1}$$

sonucu bulunur. Buna göre açıkca (X, A) $A-$metrik uzaydaki her $C_A[x_0, r]$, (X, d) alışılmış metrik uzaydaki $C_d\left[x_0, \frac{r}{n-1}\right]$ dir.

Sonuç 4.1 *(X, d) bir alışılmış metrik uzay olmak üzere bu metrik uzaydaki her x_0 merkezli r yarıçaplı çember $C_d[x_0, r]$, d metriği tarafından üretilen $A-$metrik uzayda x_0 merkezli $(n-1)r$ yarıçaplı çember $C_A[x_0, (n-1)r]$ dir.*

İspat *$C_d[x_0, r]$, (X, d) alışılmış metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı çember olduğundan açıkca $d(x, x_0) = r$ dir. Ayrıca $A-$metrik d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden dolayı*

$$A(x, \ldots, x, x_0) = \underbrace{d(x, x_0) + \cdots + d(x, x_0)}_{n-1 \text{ adet}} = (n-1)\, d(x, x_0) = (n-1)\, r$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 4.2 *(X, A) bir A-metrik uzay olsun. $C_A[x_0, r]$ bu uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı bir çember olsun. $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in C_A[x_0, r]$ için $Tx = x$ ise $C_A[x_0, r]$ çemberine T dönüşümünün bir sabit çemberi denir.*

Bu kısımda buradan itibaren verilecek Teorem 4.1-4.4 de, $A-$metrik uzayda bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü için sabit çemberin varlığını garanti eden koşullar verilmiştir.

Teorem 4.1 *(X, A) bir A-metrik uzay, $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_A[x_0, r]$ için

$(C_1^A 1) \quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(C_1^A 2) \quad A(Tx, ..., Tx, x_0) \geq r$

koşullarını sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A, X üzerinde bir $A-$metrik olsun. $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_A[x_0, r]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(C_1^A 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A(x, ..., x, x_0) - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &= r - A(Tx, ..., Tx, x_0) \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. T dönüşümü $(C_1^A 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $C_A[x_0, r]$ çemberinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $A(Tx,..., Tx, x_0) > r$ ise yani Tx noktası çemberin dışında ise (4.1) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Bu nedenle $A(Tx,..., Tx, x_0) = r$ olmalıdır. Aksi taktirde (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası çemberin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $A(x,..., x, Tx) \leq r - A(Tx,..., Tx, x_0) = r - r = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in C_A[x_0, r]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_A[x_0, r]$ çemberini sabit bırakır.

Örnek 4.2 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$ biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ $A-$metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A[2, 3(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada $C_A[2, 3(n-1)] = \{-1,\ 5\}$ dir ve her $x \in C_A[2, 3(n-1)]$ için $(C_1^A 1)$ ve $(C_1^A 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_A[2, 3(n-1)]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 4.3 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$ biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A[2, 3(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_A[2, 3(n-1)] = \{-1,\ 5\}$ için $(C_1^A 1)$ koşulu*

$x = -1$ için $(n-1)\left|\frac{1}{6} + 1\right| \leq 3(n-1) - (n-1)\left|\frac{1}{6} - 2\right| \Rightarrow \frac{7}{6} \leq 3 - \frac{11}{6} = \frac{7}{6}$

$x = 5$ *için* $(n-1)\left|\frac{13}{6} - 5\right| \leq 3(n-1) - (n-1)\left|\frac{13}{6} - 2\right| \Rightarrow \frac{17}{6} \leq 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$
olup sağlanır iken apaçık şekilde $(C_1^A 2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\left|\frac{1}{6} - 2\right| \geq 3(n-1) \Rightarrow \frac{11}{6} \geq 3$
$x = 5$ *için* $(n-1)\left|\frac{13}{6} - 2\right| \geq 3(n-1) \Rightarrow \frac{1}{6} \geq 3$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_A\left[2, 3(n-1)\right]$, T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 4.4 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|$ *biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A)$, $A-$*metrik uzayında* $C_A\left[2, 3(n-1)\right]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 3x - 3$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_A\left[2, 3(n-1)\right] = \{-1,\ 5\}$ *için* $(C_1^A 1)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\left|-6 + 1\right| \leq 3(n-1) - (n-1)\left|-6 - 2\right| \Rightarrow 5 \leq 3 - 8 = -5$
$x = 5$ *için* $(n-1)\left|12 - 5\right| \leq 3(n-1) - (n-1)\left|12 - 2\right| \Rightarrow 7 \leq 3 - 10 = -7$
olup sağlanmaz iken açıkça $(C_1^A 2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\left|-6 - 2\right| \geq 3(n-1) \Rightarrow 8 \geq 3$
$x = 5$ *için* $(n-1)\left|12 - 2\right| \leq 3(n-1) \Rightarrow 10 \geq 3$
olacağından sağlanır. Ayrıca $C_A\left[2, 3(n-1)\right]$, T *nin sabit çemberi değildir.*

Teorem 4.2 (X, A) *bir A-metrik uzay,* $C_A\left[x_0, r\right]$, (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_A\left[x_0, r\right]$ *için*
$(C_2^A 1)$ $\quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$
$(C_2^A 2)$ $\quad A(Tx, ..., Tx, x_0) \leq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_A\left[x_0, r\right]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* A, X *üzerinde bir* $A-$*metrik olsun.* $C_A\left[x_0, r\right]$, (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = A(x,\ ...,\ x,\ x_0)$ *şeklinde tanımlanmış olsun Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_A\left[x_0, r\right]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* $(C_2^A 1)$ *koşulu ve* φ *fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r \\ &= A(x, ..., x, x_0) + A(Tx, ..., Tx, x_0) - 2r \\ &= A(Tx, ..., Tx, x_0) - r \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. $(C_2^A 2)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $C_A\left[x_0, r\right]$ *çemberinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre* Tx *noktası çemberin içinde* *ise yani* $A(Tx,...,Tx,x_0) < r$ *ise* (4.2) *eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Çünkü bu durumda* (4.2) *eşitsizliği* $A(x,...,x,Tx) < 0$ *formuna dönüşür. Ancak uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana getirir. O halde* $A(Tx,...,Tx,x_0) = r$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası çemberin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,* $A(x,...,x,Tx) \leq A(Tx,...,Tx,x_0) - r = r - r = 0$ *elde edilir. Bu durumda* $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in C_A[x_0,r]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $C_A[x_0,r]$ *çemberini sabit bırakır.*

Örnek 4.5 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},A)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},A)$, $A-$*metrik uzayında* $C_A[2,2(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^2 - 3x$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada* $C_A[2,2(n-1)] = \{0,\ 4\}$ *dir ve her* $x \in C_A[2,2(n-1)]$ *için* (C_2^A1) *ve* (C_2^A2) *koşulları açıkça sağlanır. Dolayısıyla* $C_A[2,3(n-1)]$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 4.6 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},A)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},A)$, $A-$*metrik uzayında* $C_A[2,2(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 3x - 5$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_A[2,2(n-1)] = \{0,\ 4\}$ *için* (C_2^A1) *koşulu*
$x = 0$ *için* $(n-1)|0-(-5)| \leq 2(n-1) + (n-1)|-5-2| - 4(n-1) \Rightarrow 5 \leq 5$
$x = 4$ *için* $(n-1)|4-7| \leq 2(n-1) + (n-1)|7-2| - 4(n-1) \Rightarrow 3 \leq 3$
olup sağlanıyor iken açıkça (C_2^A2) *koşulu*
$x = 0$ *için* $(n-1)|-5-2| \leq 2(n-1) \Rightarrow 7 \leq 2$
$x = 4$ *için* $(n-1)|7-2| \leq 2(n-1) \Rightarrow 5 \leq 2$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_A[2,2(n-1)]$, T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 4.7 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},A)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},A)$, $A-$*metrik uzayında* $C_A[2,2(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{-3x+14}{4}$ *dönüşümü ele alınsın.*

Bu noktada her $x \in C_A[2, 2(n-1)] = \{0,\ 4\}$ *için* $(C_2^A 1)$ *koşulu*
$x = 0$ *için*
$(n-1)\left|0 - \frac{14}{4}\right| \leq 2(n-1) + (n-1)\left|\frac{14}{4} - 2\right| - 4(n-1) \Rightarrow \frac{14}{4} \leq 2 + \frac{6}{4} - 4 \Rightarrow \frac{14}{4} \leq -\frac{2}{4}$
$x = 4$ *için*
$(n-1)\left|4 - \frac{1}{2}\right| \leq 2(n-1) + (n-1)\left|\frac{1}{2} - 2\right| - 4(n-1) \Rightarrow \frac{7}{2} \leq 2 + \frac{3}{2} - 4 \Rightarrow \frac{7}{2} \leq -\frac{1}{2}$
olup sağlanmaz iken apaçık bir şekilde $(C_2^A 2)$ *koşulu*
$x = 0$ *için* $(n-1)\left|\frac{14}{4} - 2\right| \leq 2(n-1) \Rightarrow \frac{6}{4} \leq 2$
$x = 0$ *için* $(n-1)\left|\frac{14}{4} - 2\right| \leq 2(n-1) \Rightarrow \frac{6}{4} \leq 2$
olacağından sağlanır. Fakat $C_A[2, 2(n-1)]$*,* T *nin sabit çemberi değildir.*

Teorem 4.3 (X, A) *bir A-metrik uzay,* $C_A[x_0, r]$*,* (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için*
$(C_3^A 1)\quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_3^A 2)\quad h.A(x, ..., x, Tx) + A(Tx, ..., Tx, x_0) \geq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* A*,* X *üzerinde bir* $A-$*metrik olsun.* $C_A[x_0, r]$*,* (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = A(x,\ ...,\ x,\ x_0)$ *şeklinde tanımlanmış olsun Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_A[x_0, r]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* T *dönüşümü* $(C_3^A 1)$ *koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak,* φ *fonksiyonunun tanımı ve* $(C_3^A 2)$ *koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A(x, ..., x, x_0) - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &= r - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &\leq h.A(x, ..., x, Tx) + A(Tx, ..., Tx, x_0) - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &= h.A(x, ..., x, Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)A(x,...,x,Tx) \leq 0$ *bulunur. Bu durumda* $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan dolayı* $A(x,...,x,Tx) = 0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx = x$ *olur. Yani her* $x \in C_A[x_0, r]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $C_A[x_0, r]$ *çemberini sabit bırakır.*

Örnek 4.8 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$ biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A [0, n-1]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 + x - 1$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada $C_A [0, n-1] = \{-1,\ 1\}$ dir ve her $x \in C_A [0, n-1]$ için $(C_3^A 1)$ ve $(C_3^A 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_A [0, n-1]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 4.9 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$ biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A [0, n-1]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{2x-1}{3}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_A [0, n-1] = \{-1,\ 1\}$ için $(C_3^A 1)$ koşulu*
$x = -1$ için $(n-1) |-1-(-1)| \leq (n-1) - (n-1) |-1-0| \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 1$ için $(n-1) \left|\frac{1}{3} - 1\right| \leq (n-1) - (n-1) \left|\frac{1}{3} - 0\right| \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}$
olup sağlanıyor iken açıkça $(C_3^A 2)$ koşulu $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere
$x = -1$ için $h.\ (n-1) |-1-(-1)| + (n-1) |-1-0| \geq n-1 \Rightarrow h.\ 0 + 1 \geq 1$
$x = 1$ için $h.\ (n-1) \left|\frac{1}{3} - 1\right| + (n-1) \left|\frac{1}{3} - 0\right| \geq n-1 \Rightarrow h.\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \geq 1$
olacağından sağlanmaz. Üstelik $C_A [0, n-1]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.

Örnek 4.10 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|$ biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A [0, n-1]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x-9}{10}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_A [0, n-1] = \{-1,\ 1\}$ için $(C_3^A 1)$ koşulu*
$x = -1$ için $(n-1) |-1-(-1)| \leq (n-1) - (n-1) |-1-0| \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 1$ için $(n-1) \left|-\frac{8}{10} - 1\right| \leq (n-1) - (n-1) \left|-\frac{8}{10} - 0\right| \Rightarrow \frac{9}{5} \leq \frac{1}{5}$
olacağından sağlanmıyor iken apaçık olarak $(C_3^A 2)$ koşulu $h \in [0,\ 1)$ için
$x = -1$ için $h.\ (n-1) |-1-(-1)| + (n-1) |-1-0| \geq n-1 \Rightarrow h.\ 0 + 1 \geq 1$
$x = 1$ için $h.\ (n-1) \left|-\frac{8}{10} - 1\right| + (n-1) \left|-\frac{8}{10} - 0\right| \geq n-1 \Rightarrow h.\ \frac{9}{5} + \frac{4}{5} \geq 1$
olup sağlanır. Ancak $C_A [0, n-1]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberi değildir.

Teorem 4.4 *(X, A) bir A-metrik uzay, $C_A [x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_A [x_0, r]$ için
$(C_4^A 1)\quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$
$(C_4^A 2)\quad A(x, ..., x, Tx) + A(Tx, ..., Tx, x_0) \leq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_A [x_0, r]$ T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A, X üzerinde bir $A-$metrik olsun. $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$ şeklinde tanımlanmış olsun Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_A[x_0, r]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(C_4^A 1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(C_4^A 2)$ koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned}
A(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r \\
&= A(x, ..., x, x_0) + A(Tx, ..., Tx, x_0) - 2r \\
&\leq A(Tx, ..., Tx, x_0) - r \\
&\leq A(Tx, ..., Tx, x_0) - A(x, ..., x, Tx) - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\
&\leq -A(x, ..., x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $2A(x, ..., x, Tx) \leq 0$ ve $A(x, ..., x, Tx) = 0$ olmalıdır. Bu durumda açıkça $Tx = x$ olur. Bu takdirde sonuç olarak her $x \in C_A[x_0, r]$ için T dönüşümü $C_A[x_0, r]$ çemberini sabit bırakır.

Örnek 4.11 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned}
A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\
&\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}|
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A[-1, 3(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 2x^2 + 5x - 16$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada $C_A[-1, 3(n-1)] = \{-4,\ 2\}$ dir ve her $x \in C_A[-1, 3(n-1)]$ için $(C_4^A 1)$ ve $(C_4^A 2)$ koşulları açıkça sağlanır. Dolayısıyla $C_A[-1, 3(n-1)]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

Örnek 4.12 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned}
A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\
&\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}|
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A[-1, 3(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 3x + 6$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_A[-1, 3(n-1)] = \{-4,\ 2\}$ için $(C_4^A 1)$ koşulu

$x = -4$ *için* $(n-1)\,|-6-(-4)| \leq 3(n-1) + (n-1)\,|-6-(-1)| - 6(n-1) \Rightarrow 2 \leq 2$

$x = 2$ *için* $(n-1)\,|12-2| \leq 3(n-1) + (n-1)\,|12-(-1)| - 6(n-1) \Rightarrow 10 \leq 10$

olup sağlanıyor iken açıkça $(C_4^A 2)$ koşulu

$x = -4$ *için* $(n-1)\,|-6-(-4)| \leq (n-1)\,|-6-(-1)| \leq 3(n-1) \Rightarrow 7 \leq 3$

$x = 2$ *için* $(n-1)\,|12-2| \leq (n-1)\,|12-(-1)| \leq 3(n-1) \Rightarrow 23 \leq 3$

olacağından sağlanmaz. Üstelik $C_A[-1, 3(n-1)]$ çemberi, T dönüşümü altında invaryant değildir.

Örnek 4.13 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1| + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2| \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A)$, $A-$metrik uzayında $C_A[-1, 3(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{3}{4}x - 1$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_A[-1, 3(n-1)] = \{-4,\ 2\}$ için $(C_4^A 1)$ koşulu
$x = -4$ için $(n-1)\,|-4-(-4)| \leq 3(n-1) + (n-1)\,|-4-(-1)| - 6(n-1) \Rightarrow 0 \leq 0$
$x = 2$ için $(n-1)\left|\frac{1}{2} - 2\right| \leq 3(n-1) + (n-1)\left|\frac{1}{2} - (-1)\right| - 6(n-1) \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{-3}{2}$
olup sağlanmıyor iken apaçık olarak $(C_4^A 2)$ koşulu
$x = -4$ için $(n-1)\,|-4-(-4)| \leq (n-1)\,|-4-(-1)| \leq 3(n-1) \Rightarrow 3 \leq 3$
$x = 2$ için $(n-1)\left|\frac{1}{2} - 2\right| \leq (n-1)\left|\frac{1}{2} - (-1)\right| \leq 3(n-1) \Rightarrow 3 \leq 3$
olacağından sağlanır. Ayrıca $C_A[-1, 3(n-1)]$ çemberi, T dönüşümü altında invaryant değildir.

$X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere X kümesi üzerinde her $x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde tanımlanan $I : X \longrightarrow X$ dönüşümüne birim dönüşüm denir ve hangi kümeyle çalışıldığı rahat anlaşılması için I_X biçiminde gösterilir. Birim dönüşüm açıkça Teorem 4.1-4.4 de verilen koşulları sağlar. Buna göre birim dönüşüm açık bir şekilde ilgili çemberleri sabit bırakır. Ancak birim dönüşüm tüm noktaları sabit bıraktığı için çok da anlamlı değildir. Bu nedenle birim dönüşüm dışındaki dönüşümleri incelemek gereklidir. Aşağıda ifade edilen teorem bir çemberi sabit bırakan bir dönüşümün ne zaman birim dönüşüm olduğunu açıklamaktadır.

Teorem 4.5 *(X, A) bir A-metrik uzay, $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T{:}X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > n-1$ için,

$$(I_A) : A(x, ..., x, Tx) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_X$ ve $C_A[x_0, r]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *(X, A) bir A-metrik uzay, $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca her $x \in X$ için*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ele alınsın. Üstelik T dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > n - 1$ değerleri için (I_A) koşulunu sağlasın. O halde $x \in X$ ve $x \neq Tx$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, T dönüşümü (I_A) koşulunu sağladığından dolayı bu koşuldan yola çıkarak φ fonksiyonunun tanımı ve $A-$metriğinin ikinci aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned} h.A(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A(x, ..., x, x_0) - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &\leq (n-1)\,A(x, ..., x, Tx) + A(x_0, ...x_0, Tx) - A(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &= (n-1)A(x, ..., x, Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan düzenleme ile $(h - (n-1))A(x,..., x, Tx) \leq 0$ elde edilir. Hipotez gereğince $h > n - 1$ olduğundan açıkça $Tx = x$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $x \in X$ için $Tx = x$ olduğundan $T = I_X$ olur. Tersine $T = I_X$ birim dönüşüm olduğundan sonuç olarak $C_A[x_0, r]$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 4. 1-4. 4 ile $A-$metrik uzayda x_0 merkezli, r yarıçaplı $C_A[x_0, r]$ çemberini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Ayrıca Teorem 4. 5 de de $C_A[x_0, r]$ çemberini nokta nokta sabit bırakan T dönüşümünün ne zaman birim dönüşüm olacağı ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit çemberlerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler alışılmış metrik uzayda birden fazla sabit çembere sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 4.2 *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $C_A[x_0, r]$ ile $C_A[x_1, \rho]$ (X, A) metrik uzayında iki çember olsun. Bu takdirde $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, A) metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme ve A, X üzerinde bir $A-$metrik olmak üzere (X, A) bir metrik uzay olsun. $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ de x_0 merkezli, r yarıçaplı ve x_1 merkezli, ρ yarıçaplı olacak şekilde verilen iki çember olsun. Ayrıca P noktası $A(P,..., P, x_0) \neq r$ ve $A(P,..., P, x_1) \neq \rho$ olacak şekilde (X, A) metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T : X \longrightarrow X$*

dönüşümü her $x \in X$ için

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_A[x_0, r] \cup C_A[x_1, \rho] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\varphi_1(x) = A(x,\ ...,\ x,\ x_0)$ ve $\varphi_2(x) = A(x,\ ...,\ x,\ x_1)$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberleri için $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_d^j1)ve (C_d^j2) koşullarını sağlar. O halde Teorem 4. 1-. 4. 4 gereğince açıkça $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberleri T dönüşümünün sabit çemberleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberlerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili çemberler tamamiyle keyfidir.

Önerme 4.3 *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $C_A[x_1, r_1],\ ...,\ C_A[x_n, r_n]$ (X, A) metrik uzayında n tane çember olsun. Bu takdirde $C_A[x_1, r_1],\ ...,\ C_A[x_n, r_n]$ çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, A) $A-$metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 4.2 nin ispatına benzer olarak $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup_{i=1}^{n} C_A[x_n, r_n] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = A(x,\ ...,\ x,\ x_i)$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $A(P,\ ...,\ P,\ x_i) \neq r_i$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $C_A[x_n, r_n]$ çemberlerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, A) $A-$metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit çembere sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 4.6-4.11 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 4.6 *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü (C_1^A1) ve (C_1^A2) koşullarını sağlasın.*

Bu takdirde, her $x \in C_A[x_0, r]$, $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,

$$A(Tx, ..., Tx, Ty) \leq h.A(x, ..., x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.

İspat *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in C_A[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere $A(Tx,..., Tx, Ty) \leq h.\ A(x,..., x, y)$ koşulunu sağlasın. Buna göre $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_A[x_0, r]$ ve $v \in C_A[x_1, \rho]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$A(u, ..., u, v) = A(Tu, ..., Tu, Tv) \leq h.A(u, ..., u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $C_A[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün tek sabit çemberidir.

Yukarıdaki teoremin ifadesindeki $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^A 1)$ve $(C_1^A 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^A 1)$ve $(C_i^A 2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 4.7 *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^A 1)$ve $(C_i^A 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_A[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ noktaları için*

$$A(Tx, ..., Tx, Ty) < \max\left\{ \begin{array}{r} A(x, ..., x, y), A(Tx, ..., Tx, x), A(Ty, ..., Ty, y), \\ A(Ty, ..., Ty, x), A(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ çemberi T fonksiyonunun bir tek sabit çemberidir.

İspat *(X, A) bir $A-$metrik uzay ve $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in C_A[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ noktaları için*

$$A(Tx, ..., Tx, Ty) < \max\left\{ \begin{array}{r} A(x, ..., x, y), A(Tx, ..., Tx, x), A(Ty, ..., Ty, y), \\ A(Ty, ..., Ty, x), A(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın. $x \neq y$ olmak üzere $x \in C_A[x_0, r]$ ve $y \in C_A[x_1, \rho]$

noktaları alınsın. $x \neq y$ *olmak üzere* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve* $y \in C_A[x_1, \rho]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümü*

$$A(Tx,...,Tx,Ty) < \max\left\{\begin{array}{r} A(x,...,x,y), A(Tx,...,Tx,x), A(Ty,...,Ty,y), \\ A(Ty,...,Ty,x), A(Tx,...,Tx,y) \end{array}\right\}$$

koşulunu sağladığından dolayı

$$\begin{aligned} A(x,...,x,y) &= A(Tx,...,Tx,Ty) \\ &< \max\left\{\begin{array}{r} A(x,...,x,y), A(Tx,...,Tx,x), A(Ty,...,Ty,y), \\ A(Ty,...,Ty,x), A(Tx,...,Tx,y) \end{array}\right\} \\ &= A(x,...,x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $x = y$ *olmalıdır. Bu takdirde* $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün tek sabit çemberidir.*

Teorem 4.8 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $C_A[x_0, r]$*,* (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^A 1)$*ve* $(C_i^A 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve* $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ *noktaları ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$A(Tx,...,Tx,Ty) \leq \lambda\left[A(x,...,x,Tx) + A(y,...,y,Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat $C_A[x_0, r]$ *ve* $C_A[x_1, \rho]$ *çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_A[x_0, r]$ *ve* $v \in C_A[x_1, \rho]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A(u,...,u,v) &= A(Tu,...,Tu,Tv) \\ &\leq \lambda.\left[A(u,...,u,Tu) + A(v,...,v,Tv)\right] \\ &= \lambda.\left[A(u,...,u) + A(v,...,v)\right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $A(u,...,u,v) = 0$ *olup* $u = v$ *bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde* $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün tek sabit çemberidir.*

Teorem 4.9 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $C_A[x_0, r]$*,* (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^A 1)$*ve* $(C_i^A 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve* $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ *noktaları ve* $\lambda \in [0,\ 1/n)$ *için*

$$A(Tx,...,Tx,Ty) \leq \lambda\left[A(x,...,x,Ty) + A(y,...,y,Tx)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat *Teorem 4. 8 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_A[x_0, r]$ *ve* $C_A[x_1, \rho]$ *çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_A[x_0, r]$ *ve* $v \in C_A[x_1, \rho]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A(u, ..., u, v) &= A(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \lambda. [A(u, ..., u, Tv) + A(v, ..., v, Tu)] \\ &= \lambda. [A(u, ..., u, v) + A(v, ..., v, u)] \\ &= 2\lambda A(u, ..., v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün tek sabit çemberidir.*

Teorem 4.10 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. .* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^A 1)$*ve* $(C_i^A 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve* $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$A(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \alpha A(x, ..., x, Tx) + \beta A(y, ..., y, Ty) + \gamma A(x, ..., y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat *Teorem 4. 8 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_A[x_0, r]$ *ve* $C_A[x_1, \rho]$ *çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_A[x_0, r]$ *ve* $v \in C_A[x_1, \rho]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A(u, ..., u, v) &= A(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A(u, ..., , u, Tu) + \beta A(v, ..., v, Tv) + \gamma A(u, ..., u, v) = \gamma A(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün tek sabit çemberidir.*

Teorem 4.11 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ve* $C_A[x_0, r]$, (X, A) $A-$*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. .* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^A 1)$*ve* $(C_i^A 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve* $y \in X \setminus C_A[x_0, r]$ *ve de* $\lambda + \beta + \gamma < 1$, $\gamma + n\beta < 1$ *olmak üzere,*

$$A(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \alpha A(x, ..., x, Ty) + \beta A(y, ..., y, Tx) + \gamma A(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat *Teorem 4. 8 deki ispat yöntemine benzer şekilde $C_A[x_0, r]$ ve $C_A[x_1, \rho]$ çemberlerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_A[x_0, r]$ ve $v \in C_A[x_1, \rho]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A(u, ..., u, v) &= A(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A(u, ..., , u, Tv) + \beta A(v, ..., v, Tu) + \gamma A(u, ..., u, v) \\ &= (\lambda + \beta + \gamma) A(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $C_A[x_0, r]$ çemberi T fonksiyonunun tek sabit çemberidir.

4.2 A$_b$-Metrik Uzayda Sabit Çember Teoremleri

Bu kısımda A_b-metrik uzayda çemberler için bir dönüşümün bir çemberi sabit bırakması yani sabit çemberin varolma koşulları ve sabit çemberin teklik koşulları ele alınacaktır. Buna göre ilk olarak bu uzayda çember ve sabit çember kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 4.3 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu taktirde,*

$$C_A[x_0, r] = \{x \in X : A_b(x, ..., x, x_0) = r\}$$

ifadesine x_0 merkezli r yarıçaplı çember denir.

Örnek 4.14 *$X = \mathbb{R}^2,\ n \geq 3$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ olmak üzere*

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2} \left[\begin{array}{r} |x_{2i} + \cdots + x_{ni} - (n\text{-}1)\, x_{1i}|^2 + |x_{3i} + \cdots + x_{ni} - (n\text{-}2)\, x_{2i}|^2 \\ + \cdots + |x_{ni} - x_{n-1i}|^2 \end{array} \right]$$

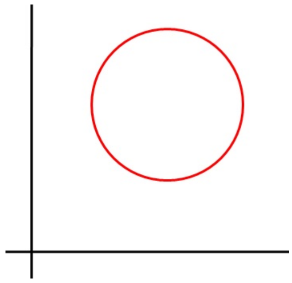
şeklinde tanımlı A_b-metrik ele alınsın. Buna göre (X, A_b) A_b-metrik uzayında $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ merkezli r yarıçaplı çember

$$C_A[x_0, r] = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A_b(x, \ldots, x, x_0) = r\right\}$$

kümesidir. Başka bir deyişle $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ merkezli r yarıçaplı çember $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere

$$A_b(x, \ldots, x, x_0) = r \Rightarrow (n-1)\left[|x_1 - x_{01}|^2 + |x_2 - x_{02}|^2\right] = r$$

denklemini sağlayan $\mathbb{R}^2$ nin noktalar kümesidir. Bu küme ise şekil 4.3 de görüleceği üzere analitik düzlemde x_0 merkezli $\frac{r}{n-1}$ yarıçaplı Öklidyen çember belirtir.

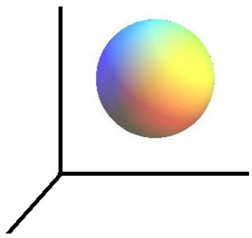


Şekil 4.3 (X, A_b) A_b-metrik uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı çember

Aynı A_b-metriği $X = \mathbb{R}^3$ için genişletilirse $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ merkezli r yarıçaplı çember $x = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

$$A(x, \ldots, x, x_0) = r \Rightarrow (n-1)\left[|x_1 - x_{01}|^2 + |x_2 - x_{02}|^2 + |x_3 - x_{03}|^2\right] = r$$

denklemini sağlayan $\mathbb{R}^3$ ün noktalar kümesidir. Bu küme ise şekil 4.4 de görüleceği üzere 3-boyutlu analitik uzayda x_0 merkezli $\frac{r}{n-1}$ yarıçaplı Öklidyen küre belirtir.



Şekil 4.4 (X, A_b) A_b-metrik uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı çember

Ayrıca burada bir alışılmış metrik tarafından üretilen A_b-metrikler için ilgili A_b-metrik uzaydaki x_0 merkezli ve r yarıçaplı çember ile alışımış metrik uzaydaki x_0 merkezli ve r yarıçaplı çember arasındaki ilgi aşağıdaki önermelerde verilmiştir.

Önerme 4.4 *A_b, bir d alışılmış metriği tarafından üretilen bir A_b-metrik olmak üzere (X, A_b) A_b-metrik uzayı verilsin. Buna göre (X, A_b) A_b-metrik uzaydaki x_0 merkezli r yarıçaplı çember $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, d) alışılmış metrik uzaydaki x_0 merkezli $\frac{r}{n-1}$ yarıçaplı çember $C_d\left[x_0, \frac{r}{n-1}\right]$ dir.*

İspat *$X \neq \emptyset$ bir küme ve A_b da bir d alışılmış metriği tarafından üretilen bir A_b-metrik olsun. Buna göre A_b-metrik uzaydaki x_0 merkezli r yarıçaplı çember tanımı ve A_b-metriğin d tarfından türetildiği kullanılırsa*

$$A_b\left(x,\ldots,x,x_0\right)=r\Rightarrow\underbrace{d\left(x,x_0\right)+\cdots+d\left(x,x_0\right)}_{n-1\ adet}=r\Rightarrow d\left(x,x_0\right)=\frac{r}{n-1}$$

sonucu bulunur. Buna göre açıkca (X,A_b) A_b-metrik uzaydaki her $C_{A_b}\left[x_0,r\right]$, (X,d) alışılmış metrik uzaydaki $C_d\left[x_0,\frac{r}{n-1}\right]$ dir.

Sonuç 4.2 *(X,d) bir alışılmış metrik uzay olmak üzere bu metrik uzaydaki her x_0 merkezli r yarıçaplı çember $C_d\left[x_0,r\right]$, d metriği tarafından üretilen A_b-metrik uzayda x_0 merkezli $(n-1)\,r$ yarıçaplı çember $C_{A_b}\left[x_0,(n-1)\,r\right]$ dir.*

İspat *$C_d\left[x_0,r\right]$, (X,d) alışılmış metrik uzayında x_0 merkezli r yarıçaplı çember olduğundan açıkca $d\left(x,x_0\right)=r$ dir. Ayrıca A_b-metrik d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden dolayı*

$$A_b\left(x,\ldots,x,x_0\right)=\underbrace{d\left(x,x_0\right)+\cdots+d\left(x,x_0\right)}_{n-1\ adet}=(n-1)\,d\left(x,x_0\right)=(n-1)\,r$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 4.15 *$X=\mathbb{R}^2,\ n\geq 3$ ve $i\in\{1,2,...,n\}$ için $x_i=\left(x_{i1},x_{i2}\right)$ olmak üzere*

$$A_b\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2-x_{ij}^2\right|\right)+\left|x_{1j}^2+\cdots+x_{(n-1)j}^2-(n-1)\,x_{nj}^2\right|\right]$$

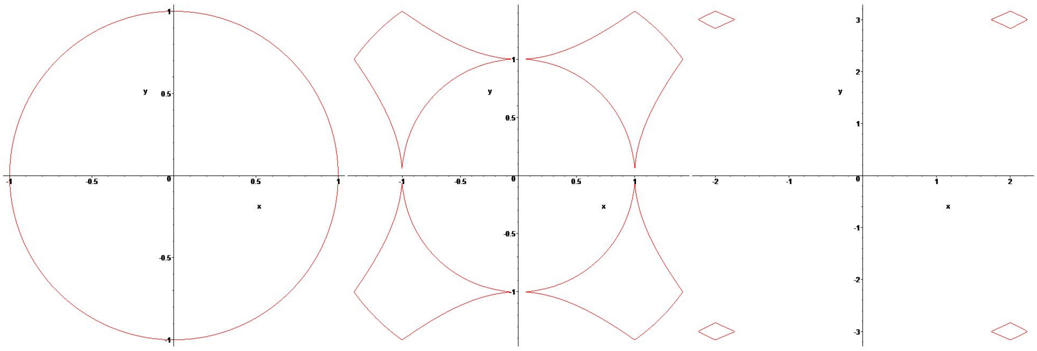
şeklinde tanımlı A_b-metrik ele alınsın. Hatırlanacağı üzere yukarıda verilen A_b-metrik bir alışılmış metrik tarafından üretilemiyordu. Buna göre (X,A_b) A_b-metrik uzayında $x_0=\left(x_{01},x_{02}\right)$ merkezli r yarıçaplı çember

$$C_{A_b}\left[x_0,r\right]=\left\{x\in\mathbb{R}^2\mid A_b\left(x,\ldots,x,x_0\right)=r\right\}$$

kümesidir. Başka bir deyişle $x_0=\left(x_{01},x_{02}\right)$ merkezli r yarıçaplı çember $x=\left(x_1,x_2\right)$ olmak üzere

$$A_b\left(x,\ldots,x,x_0\right)=r\Rightarrow 2\,(n-1)\left[\left|x_1^2-x_{01}^2\right|+\left|x_2^2-x_{02}^2\right|\right]=r$$

denklemini sağlayan $\mathbb{R}^2$ nin noktalar kümesidir. Bu taktirde $n=10$ olmak üzere şekil 4.5 de sırasıyla $r=18$ yarıçaplı ve $x_0=(0,0)$, $x_0=(1,1)$ ve $x_0=(-2,-3)$ merkezli A_b-çemberleri görülmektedir.

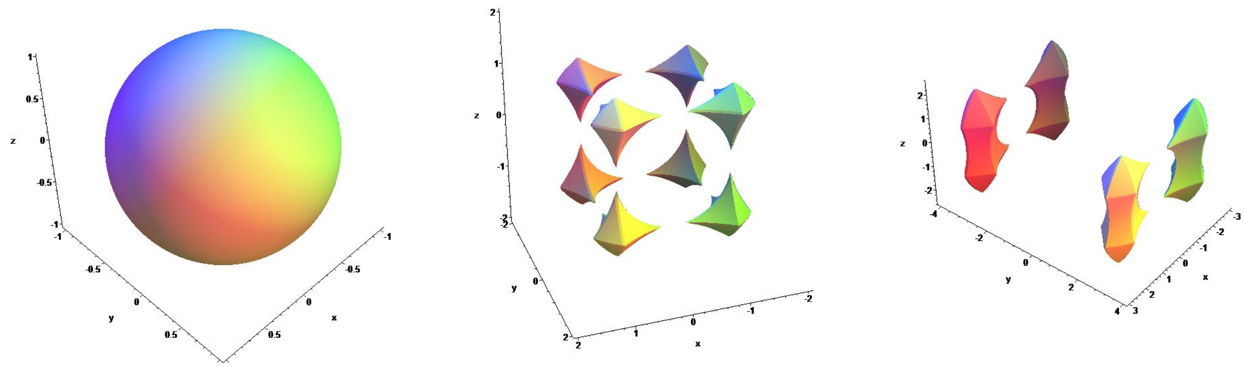


Şekil 4.5 $C_{A_b}\left[(0,0),18\right]$, $C_{A_b}\left[(1,1),18\right]$, $C_{A_b}\left[(-2,-3),18\right]$

Aynı A_b-metriği $X=\mathbb{R}^3$ için genişletilirse $x_0=(x_{01},x_{02},x_{03})$ merkezli r yarıçaplı çember $x=(x_1,x_2,x_3)$ olmak üzere

$$A_b\left(x,\ldots,x,x_0\right)=r \Rightarrow 2\left(n-1\right)\left[\left|x_1^2-x_{01}^2\right|+\left|x_2^2-x_{02}^2\right|+\left|x_3^2-x_{03}^2\right|\right]=r$$

denklemini sağlayan $\mathbb{R}^3$ ün noktalar kümesidir. Bu taktirde $n=10$ için şekil 4.6 da 3-boyutlu analitik uzayda sırasıyla $x_0=(0,0,0)$ merkezli $r=18$ yarıçaplı, $x_0=(1,1,1)$ merkezli ve $r=18$ yarıçaplı ve de $x_0=(-2,-3,1)$ merkezli ve $r=72$ yarıçaplı A_b-çemberleri görülmektedir.



Şekil 4.6 $C_{A_b}\left[(0,0,0),18\right]$, $C_{A_b}\left[(1,1,1),18\right]$, $C_{A_b}\left[(-2,-3,1),72\right]$

Tanım 4.4 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. $C_A\left[x_0,r\right]$ bu uzayda x_0 merkezli r yarıçaplı bir çember olsun. $T:X\to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x\in C_A\left[x_0,r\right]$ için $Tx=x$ ise $C_A\left[x_0,r\right]$ çemberine T dönüşümünün bir sabit çemberi denir.*

Bu kısımda buradan itibaren verilecek Teorem 4.12 - 4.15 de A_b-metrik uzayında bir $T: X \longrightarrow X$ dönüşümü için sabit çemberin varlığını garanti eden koşullar verilmiştir.

Teorem 4.12 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T: X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ için
$(C_1^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_1^{A_b}2)$ $\quad A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \geq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b-metrik olsun. $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T: X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(C_1^{A_b}1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A_b(x, ..., x, x_0) - A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \\ &= r - A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \qquad (4.3) \end{aligned}$$

elde edilir. T dönüşümü $(C_1^{A_b}2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $A_b(Tx, ..., Tx, x_0) > r$ ise yani Tx noktası çemberin dışında ise (4.3) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Bu nedenle $A_b(Tx, ..., Tx, x_0) = r$ olmalıdır. Aksi taktirde (4.3) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası çemberin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $A_b(x, ..., x, Tx) \leq r - A_b(Tx, ..., Tx, x_0) = r - r = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberini sabit bırakır.

Örnek 4.16 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[2, 9(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - 3x - 5$ dönüşümü ele alınsın.

Bu noktada $C_{A_b}[2, 9(n-1)] = \{-1,\ 5\}$ *dir ve her* $x \in C_{A_b}[0, (n-1)^2]$ *için* $(C_1^{A_b}1)$ *ve* $(C_1^{A_b}2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $C_{A_b}[2, 9(n-1)]$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 4.17 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[2, 9(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{x+1}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[2, 9(n-1)] = \{-1,\ 5\}$ *için* $(C_1^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\,|0+1|^2 \leq (n-1)\,|2+1|^2 - (n-1)\,|2-0|^2 \Rightarrow 1 \leq 5$
$x = 5$ *için* $(n-1)\,|5-3|^2 \leq (n-1)\,|2-5|^2 - (n-1)\,|2-3|^2 \Rightarrow 4 \leq 8$
olup sağlanır iken apaçık şekilde $(C_1^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\,|2-0|^2 \geq 9(n-1) \Rightarrow 4 \geq 9$
$x = 5$ *için* $(n-1)\,|2-3|^2 \leq 9(n-1) \Rightarrow 1 \geq 9$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}[2, 9(n-1)]$*,* T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 4.18 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[2, 9(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x + 7$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[2, 9(n-1)] = \{-1,\ 5\}$ *için* $(C_1^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\,|6+1|^2 \leq (n-1)\,|2+1|^2 - (n-1)\,|2-6|^2 \Rightarrow 49 \leq -7$
$x = 5$ *için* $(n-1)\,|2-5|^2 \leq (n-1)\,|2-5|^2 - (n-1)\,|2-12|^2 \Rightarrow 49 \leq -91$
olup sağlanmaz iken açıkça $(C_1^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)\,|2-6|^2 \geq 9(n-1) \Rightarrow 16 \geq 9$
$x = 5$ *için* $(n-1)\,|2-12|^2 \leq 9(n-1) \Rightarrow 100 \geq 9$
olacağından sağlanır. Ayrıca $C_{A_b}[2, 9(n-1)]$*,* T *nin sabit çemberi değildir.*

Teorem 4.13 (X, A_b) *bir* A_b*-metrik uzay,* $C_{A_b}[x_0, r]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_A[x_0, r]$ *için*
$(C_2^{A_b}1)$ $A_b(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r$
$(C_2^{A_b}2)$ $A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \leq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* A_b*,* X *üzerinde bir* A_b-*metrik olsun.* $C_{A_b}[x_0, r]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* $(C_2^{A_b}1)$ *koşulu ve* φ *fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2r \\ &= A_b(x, ..., x, x_0) + A_b(Tx, ..., Tx, x_0) - 2r \\ &= A_b(Tx, ..., Tx, x_0) - r \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. $(C_2^{A_b}2)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $C_{A_b}[x_0, r]$ *çemberinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre* Tx *noktası çemberin içinde ise yani* $A_b(Tx, ..., Tx, x_0) < r$ *ise* (4.4) *eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Çünkü bu durumda* (4.4) *eşitsizliği* $A_b(x, ..., x, Tx) < 0$ *formuna dönüşür. Ancak uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana getirir. O halde* $A_b(Tx, ..., Tx, x_0) = r$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası çemberin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,* $A_b(x, ..., x, Tx) \leq A_b(Tx, ..., Tx, x_0) - r = r - r = 0$ *elde edilir. Bu durumda* $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $C_{A_b}[x_0, r]$ *çemberini sabit bırakır.*

Örnek 4.19 X*=*$\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* A_b*:*$X^n \longrightarrow [0, \infty)$*,* $A_b(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[0, (n-1)^2]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^2 + x - 1$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada* $C_{A_b}[0, (n-1)^2] = \{-1,\ 1\}$ *dir ve her* $x \in C_{A_b}C_{A_b}[0, (n-1)^2]$ *için* $(C_2^{A_b}1)$ *ve* $(C_2^{A_b}2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $C_{A_b}[0, (n-1)^2]$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 4.20 X*=*$\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* A_b*:*$X^n \longrightarrow [0, \infty)$*,* $A_b(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[0, (n-1)^2]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 2x$ *dönüşümü ele alınsın. Bu*

noktada her $x \in C_{A_b}[0,(n-1)^2] = \{-1,\ 1\}$ *için* $(C_2^{A_b}1)$ *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= -1 \text{ için } (n-1)^2 \left|-2+1\right|^2 \leq (n-1)^2 \left|0+1\right|^2 + (n-1)^2 \left|0+2\right|^2 - 2(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 3 \\ x &= 1 \text{ için } (n-1)^2 \left|2-1\right|^2 \leq (n-1)^2 \left|0-1\right|^2 + (n-1)^2 \left|0-2\right|^2 - 2(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 3 \end{aligned}$$

olup sağlanır iken apaçık şekilde $(C_2^{A_b}2)$ *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= -1 \text{ için } (n-1)^2 \left|0+2\right|^2 \leq (n-1)^2 \Rightarrow 4 \leq 1 \\ x &= 1 \text{ için } (n-1)^2 \left|0-2\right|^2 \leq (n-1)^2 \Rightarrow 4 \leq 1 \end{aligned}$$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}[0,(n-1)^2]$, T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 4.21 X=$\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* A_b:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j} |x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[0,(n-1)^2]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{-x-1}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[0,(n-1)^2] = \{-1,\ 1\}$ *için* $(C_2^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)^2 \left|0+1\right|^2 \leq (n-1)^2 \left|0+1\right|^2 + (n-1)^2 \left|0-0\right|^2 - 2(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -1$
$x = 1$ *için* $(n-1)^2 \left|-1-1\right|^2 \leq (n-1)^2 \left|0-1\right|^2 + (n-1)^2 \left|0+1\right|^2 - 2(n-1)^2 \Rightarrow 4 \leq 0$
olup sağlanmaz iken açıkça $(C_2^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)^2 \left|0-0\right|^2 \leq (n-1)^2 \Rightarrow 0 \leq 1$
$x = 1$ *için* $(n-1)^2 \left|0+1\right|^2 \leq (n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 1$
olacağından sağlanır. Ayrıca $C_{A_b}[0,(n-1)^2]$, T *nin sabit çemberi değildir.*

Teorem 4.14 (X, A_b) *bir* A_b*-metrik uzay,* $C_{A_b}[x_0, r]$, (X_b, A_b) A_b-*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_A[x_0, r]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için*
$(C_3^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_3^{A_b}2)$ $\quad h.A_b(x, ..., x, Tx) + A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \geq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* A_b, X *üzerinde bir* A_b-*metrik olsun.* $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember ve* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = A_b(x,\ ...,\ x,\ x_0)$ *şeklinde tanımlanmış olsun Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* T *dönüşümü*

$(C_3^{A_b}1)$ *koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak,* φ *fonksiyonunun tanımı ve* $(C_3^{A_b}2)$ *koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x,...,x,Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A_b(x,...,x,x_0) - A_b(Tx,...,Tx,x_0) \\ &= r - A_b(Tx,...,Tx,x_0) \\ &\leq h.A_b(x,...,x,Tx) + A_b(Tx,...,Tx,x_0) - A_b(Tx,...,Tx,x_0) \\ &= h.A_b(x,...,x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)A_b(x,...,x,Tx) \leq 0$ *bulunur. Bu durumda* $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan dolayı* $A_b(x,...,x,Tx) = 0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx = x$ *olur. Yani her* $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $C_{A_b}[x_0, r]$ *çemberini sabit bırakır.*

Örnek 4.22 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[1, 4(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^2 - x - 3$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada* $C_{A_b}[1, 4(n-1)] = \{-1,\ 3\}$ *dir ve her* $x \in C_{A_b}[1, 4(n-1)]$ *için* $(C_3^{A_b}1)$ *ve* $(C_3^{A_b}2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $C_{A_b}[1, 4(n-1)]$ *çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit çemberidir.*

Örnek 4.23 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R}, A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[1, 4(n-1)]$ *çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{x+5}{4}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[1, 4(n-1)] = \{-1,\ 3\}$ *için* $(C_3^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $(n-1)|1+1|^2 \leq (n-1)|1+1|^2 - (n-1)|1-1|^2 \Rightarrow 4 \leq 4$
$x = 3$ *için* $(n-1)|2-3|^2 \leq (n-1)|1-3|^2 - (n-1)|1-2|^2 \Rightarrow 1 \leq 3$
olup sağlanır iken apaçık şekilde $(C_3^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $h(n-1)|1+1|^2 + (n-1)|1-1|^2 \geq 4(n-1) \Rightarrow h \geq 1$
$x = 3$ *için* $h(n-1)|2-3|^2 + (n-1)|1-2|^2 \geq 4(n-1) \Rightarrow h \geq 3$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}[1, 4(n-1)]$*,* T *nin sabit çemberi değildir.*

Örnek 4.24 *$X=\mathbb{R}$ ve $n\geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[1,4(n-1)]$ çemberi ve her $x\in\mathbb{R}$ için $Tx=\frac{-x+3}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x\in C_{A_b}[1,4(n-1)]=\{-1,\ 3\}$ için $(C_3^{A_b}1)$ koşulu
$x=-1$ için $(n-1)\,|2+1|^2\leq(n-1)\,|1+1|^2-(n-1)\,|1-2|^2\Rightarrow 9\leq 3$
$x=3$ için $(n-1)\,|0-3|^2\leq(n-1)\,|1-3|^2-(n-1)\,|1-0|^2\Rightarrow 9\leq 3$
olup sağlanmaz iken açıkça $(C_3^{A_b}2)$ koşulu
$x=-1$ için $h(n-1)\,|2+1|^2+(n-1)\,|1-2|^2\geq 4(n-1)\Rightarrow h\geq\frac{1}{3}$
$x=3$ için $h(n-1)\,|0-3|^2+(n-1)\,|1-0|^2\geq 4(n-1)\Rightarrow h\geq\frac{1}{3}$
olacağından sağlanır. Ayrıca $C_{A_b}[1,4(n-1)]$, T nin sabit çemberi değildir.

Teorem 4.15 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[x_0,r]$, (X_b,A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=A_b(x,...,x,x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in C_A[x_0,r]$ için
$(C_4^{A_b}1)$ $\quad A_b(x,...,x,Tx)\leq\varphi(x)+\varphi(Tx)-2r$
$(C_4^{A_b}2)$ $\quad A(x,...,x,Tx)+A(Tx,...,Tx,x_0)\leq r$
koşullarını sağlıyorsa $C_{A_b}[x_0,r]$ T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b-metrik olsun. $C_{A_b}[x_0,r]$, (X,A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $\varphi : X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için $\varphi(x)=A_b(x,\ ...,\ x,\ x_0)$ şeklinde tanımlanmış olsun Ayrıca $T : X\longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x\in C_{A_b}[x_0,r]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(C_4^{A_b}1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(C_4^{A_b}2)$ koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x,...,x,Tx) &\leq \varphi(x)+\varphi(Tx)-2r \\ &= A_b(x,...,x,x_0)+A_b(Tx,...,Tx,x_0)-2r \\ &= A_b(Tx,...,Tx,x_0)-r \\ &\leq A_b(Tx,...,Tx,x_0)-A_b(x,...,x,Tx)-A_b(Tx,...,Tx,x_0) \\ &= -A_b(x,...,x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $2A_b(x,...,x,Tx)\leq 0$ ve buradan da $A_b(x,...,x,Tx)=0$ olmalıdır. Bu durumda açıkça $Tx=x$ olur. Bu takdirde sonuç olarak her $x\in C_{A_b}[x_0,r]$ için $Tx=x$ olduğundan T dönüşümü $C_{A_b}[x_0,r]$ çemberini sabit bırakır.

Örnek 4.25 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[-1, 4(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 + 3x - 3$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada $C_{A_b}[-1, 4(n-1)] = \{-3,\ 1\}$ dir ve her $x \in C_{A_b}[-1, 4(n-1)]$ için $(C_4^{A_b}1)$ ve $(C_4^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_{A_b}[-1, 4(n-1)]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

Örnek 4.26 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[-1, 4(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{7x+1}{4}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}[-1, 4(n-1)] = \{-3,\ 1\}$ için $(C_4^{A_b}1)$ koşulu
$x = -3$ için $(n-1)\,|-5+3|^2 \leq (n-1)\,|-1+3|^2 + (n-1)\,|-1+5|^2 - 8(n-1) \Rightarrow 4 \leq 12$
$x = 1$ için $(n-1)\,|2-1|^2 \leq (n-1)\,|-1-1|^2 + (n-1)\,|-1-2|^2 - 8(n-1) \Rightarrow 1 \leq 5$
olup sağlanır iken apaçık şekilde $(C_4^{A_b}2)$ koşulu
$x = -3$ için $(n-1)\,|-5+3|^2 + (n-1)\,|-1+5|^2 \leq 4(n-1) \Rightarrow 20 \leq 4$
$x = 1$ için $(n-1)\,|2-1|^2 + (n-1)\,|-1-2|^2 \leq 4(n-1) \Rightarrow 10 \leq 4$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}[1, 4(n-1)]$, T nin sabit çemberi değildir.

Örnek 4.27 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[-1, 4(n-1)]$ çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x-5}{4}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}[-1, 4(n-1)] = \{-3,\ 1\}$ için $(C_4^{A_b}1)$ koşulu
$x = -3$ için $(n-1)\,|-2+3|^2 \leq (n-1)\,|-1+3|^2 + (n-1)\,|-1+2|^2 - 8(n-1) \Rightarrow 1 \leq -3$
$x = 1$ için $(n-1)\,|-1-1|^2 \leq (n-1)\,|-1-1|^2 + (n-1)\,|-1+1|^2 - 8(n-1) \Rightarrow 4 \leq -4$
olup sağlanmaz iken apaçık şekilde $(C_4^{A_b}2)$ koşulu
$x = -3$ için $(n-1)\,|-2+3|^2 + (n-1)\,|-1+2|^2 \leq 4(n-1) \Rightarrow 2 \leq 4$
$x = 1$ için $(n-1)\,|-1-1|^2 + (n-1)\,|-1+1|^2 \leq 4(n-1) \Rightarrow 4 \leq 4$
olacağından sağlanır. Ancak $C_{A_b}[1, 4(n-1)]$, T nin sabit çemberi değildir.

Teorem 4.16 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > b(n-1)$ için,

$$(I_{A_b}) : A_b(x, ..., x, Tx) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_X$ ve $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi, T dönüşümünün bir sabit çemberidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. Ayrıca her $x \in X$ için*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ele alınsın. Üstelik T dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > b(n-1)$ değerleri için (I_{A_b}) koşulunu sağlasın. O halde $x \in X$ ve $x \neq Tx$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, T dönüşümü (I_{A_b}) koşulunu sağladığından dolayı bu koşuldan yola çıkarak φ fonksiyonunun tanımı ve A_b-metriğinin ikinci aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned}
h.A_b(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= A_b(x, ..., x, x_0) - A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \\
&\leq b\,(n-1)\,A_b(x, ..., x, Tx) + b.A_b(x_0, ...x_0, Tx) - A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \\
&\leq b.(n-1)A_b(x, ..., x, Tx) + b.\frac{1}{b}A_b(Tx, ..., Tx, x_0) - A_b(Tx, ..., Tx, x_0) \\
&= b.(n-1)A_b(x, ..., x, Tx)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan düzenleme ile $(h - b(n-1))A_b(x,..., x, Tx) \leq 0$ elde edilir. Hipotez gereğince $h > b(n-1)$ olduğundan açıkça $Tx = x$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $x \in X$ için $Tx = x$ olduğundan $T = I_X$ olur. Tersine $T = I_X$ birim dönüşüm olduğundan sonuç olarak $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 4.12 - 4.15 ile A_b-metrik uzayda x_0 merkezli, r yarıçaplı $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Ayrıca Teorem 4. 16 da da $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberini nokta nokta sabit bırakan T dönüşümünün ne zaman birim dönüşüm olacağı ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit çemberlerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler A_b-metrik uzayda birden fazla sabit çembere sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 4.5 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[x_0, r]$ ile $C_{A_b}[x_1, \rho]$ (X, A_b) metrik uzayında iki çember olsun. Bu takdirde $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, A_b) metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme ve A_b, X üzerinde bir A_b-metrik olmak üzere (X, A_b) bir metrik uzay olsun. $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ de x_0 merkezli, r yarıçaplı ve x_1 merkezli, ρ yarıçaplı olacak şekilde verilen iki çember olsun. Ayrıca P noktası $A_b(P, ..., P, x_0) \neq r$ ve $A_b(P, ..., P, x_1) \neq \rho$ olacak şekilde (X, A_b) metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_{A_b}[x_0, r] \cup C_{A_b}[x_1, \rho] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1, \varphi_2 : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\varphi_1(x) = A_b(x, ..., x, x_0)$ ve $\varphi_2(x) = A_b(x, ..., x, x_1)$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberleri için $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $(C^j_{A_b}1)$ve $(C^j_{A_b}2)$ koşullarını sağlar. O halde Teorem 4.12 - 4.15 gereğince açıkça $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberleri T dönüşümünün sabit çemberleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberlerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili çemberler tamamiyle keyfidir.

Önerme 4.6 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[x_1, r_1], ..., C_{A_b}[x_n, r_n]$ (X, A_b) metrik uzayında n tane çember olsun. Bu takdirde $C_{A_b}[x_1, r_1], ..., C_{A_b}[x_n, r_n]$ çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, A_b) A_b-metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 4.5 in ispatına benzer olarak $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup_{i=1}^{n} C_{A_b}[x_n, r_n] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = A_b(x, ..., x, x_i)$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $A_b(P, ..., P, x_i) \neq r$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $C_{A_b}[x_n, r_n]$ çemberlerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, A_b) A_b-metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit çembere sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 4.17 - 4.20 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 4.17 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. . $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^{A_b}1)$ ve $(C_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$, $y \in X \setminus C_{A_b}[x_0, r]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq h.A_b(x, ..., x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.

İspat *(X, A_b) bir $A-$metrik uzay ve $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[x_0, r]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq h.A_b(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $v \in C_{A_b}[x_1, \rho]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$A_b(u, ..., u, v) = A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \leq h.A_b(u, ..., u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün tek sabit çemberidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^{A_b}1)$ve $(C_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^{A_b}1)$ve $(C_i^{A_b}2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 4.18 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^{A_b}1)$ve $(C_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[x_0, r]$ noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlıyorsa $C_A[x_0, r]$ çemberi T fonksiyonunun bir tek sabit çemberidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[x_0, r]$ noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit çemberi olduğu varsayılsın. $x \neq y$ olmak üzere $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $y \in C_{A_b}[x_1, \rho]$ noktaları alınsın. $x \neq y$ olmak üzere $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $y \in C_{A_b}[x_1, \rho]$ noktaları alınsın. T dönüşümü

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağladığından dolayı

$$\begin{aligned} A_b(x, ..., x, y) &= A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \\ &< \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\} \\ &= A_b(x, ..., x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $x = y$ olmalıdır. Bu takdirde $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün tek sabit çemberidir.

Teorem 4.19 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[x_0, r]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında x_0 merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $(C_i^{A_b}1)$ve $(C_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[x_0, r]$ noktaları ve $\lambda \in [0, 1/2)$ için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \lambda [A_b(x, ..., x, Tx) + A_b(y, ..., y, Ty)]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.

İspat *$C_{A_b}[x_0, r]$ ve $C_{A_b}[x_1, \rho]$ çemberlerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_{A_b}[x_0, r]$ ve $v \in C_{A_b}[x_1, \rho]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \lambda . [A_b(u, ..., u, Tu) + A_b(v, ..., v, Tv)] \\ &= \lambda . [A_b(u, ..., u) + A_b(v, ..., v)] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $A_b(u, ..., u, v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $C_{A_b}[x_0, r]$ çemberi T dönüşümünün tek sabit çemberidir.

Teorem 4.20 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $C_{A_b}[x_0, r]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* x_0 *merkezli,* r *yarıçaplı bir çember olsun. .* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^{A_b}1)$*ve* $(C_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_{A_b}[x_0, r]$ *ve* $y \in X \setminus C_{A_b}[x_0, r]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \alpha A_b(x, ..., xTx) + \beta A_b(y, ..., y, Ty) + \gamma A_b(x, ..., y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[x_0, r]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit çemberidir.*

İspat *Teorem 4.18 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_{A_b}[x_0, r]$ *ve* $C_{A_b}[x_1, \rho]$ *çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_{A_b}[x_0, r]$ *ve* $v \in C_{A_b}[x_1, \rho]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A_b(u, ..., , u, Tu) + \beta A_b(v, ..., v, Tv) + \gamma A_b(u, ..., u, v) \\ &= \gamma A_b(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $C_{A_b}[x_0, r]$ *çemberi* T *dönüşümünün tek sabit çemberidir.*

5. ALIŞILMIŞ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT EĞRİ TEOREMLERİ

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylarda geometrik en temel eğrilerden olan elips, hiperbol, Cassini eğrisi ve Apollonius çemberi kavramları ele alınacaktır. Alışılmış metrik uzaylarda bu eğrilerin sabit kalma koşulları ortaya konulacak sonrasında bu sabit eğrilerin tekliği ile ilgili koşullar sunulacaktır.

5.1 Alışılmış Metrik Uzayda Sabit Elips Teoremleri

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylarda iki odaklı elipsler için bir dönüşümün bir elipsi sabit bırakması yani sabit elipslerin varolma koşulları ve sabit elipsin teklik koşulları ele alınacaktır. Buna göre ilk olarak iki odaklı elips ve sabit elips kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 5.1 (X, d) *bir metrik uzay,* $F_1,\ F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Bu taktirde*

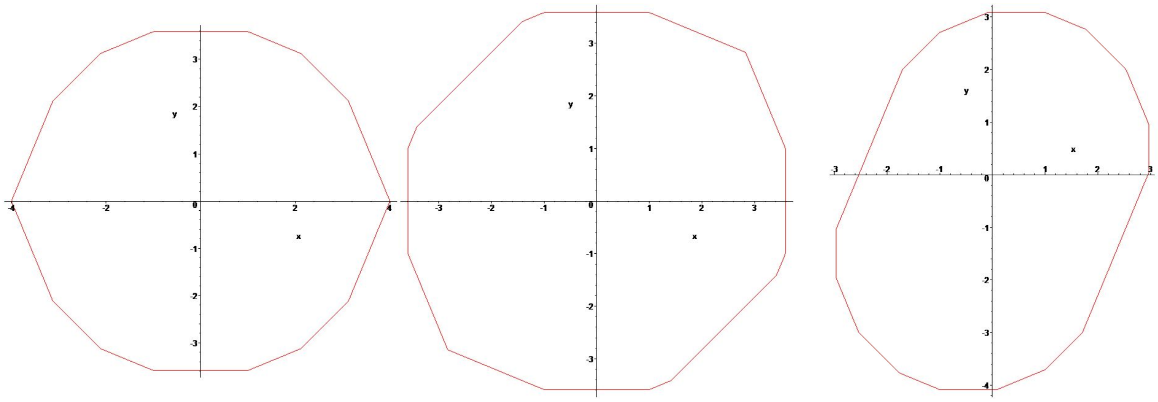
$$E_d\left[F_1, F_2, 2a\right] = \{x \in X : d(x, F_1) + d(x, F_2) = 2a\}$$

ifadesine odakları $F_1,\ F_2$ *asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan elips denir.*

Örnek 5.1 *Alışılmış metrik uzaylarda metrik olarak aşina olduğumuz Öklidyen metriği kullanıldığında karşılılacak olan elips kavramı oldukça iyi bilinen bir kavramdır. Ancak burada metrik yapısı Öklidyen metriğin dışına çıktığında karşılaşılacak olan elips kavramı Öklidyen hale göre büyük farklılıklar daha doğrusu çeşitlik göstermektedir. Bu ise açıkca metrik uzayların zenginliğini ifade etmek için güzel bir veri oluşturmaktadır. Bu bağlamda,* $X = \mathbb{R}^2$ *olmak üzere* $X_1 = (x_1, y_1)\,,\ X_2 = (x_2, y_2) \in X$ *olsun. Buna göre her* $X_1,\ X_2 \in X$ *için*

$$d_{CC}\left(X_1, X_2\right) = \max\left\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\right\}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu literatürde Çin Dama (CC) metriği olarak bilinir. (Detaylı bilgiler için Chen(1992), Tian(2005) kaynaklarına bakılabilir.) O halde CC-metriğine göre şekil 5.1 de sırasıyla odakları* $F_1 = (1, 0)\,,\ F_2 = (-1, 0)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 8$ *olan CC-elipsi, odakları* $F_1 = (1, 1)\,,\ F_2 = (-1, -1)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 8$ *olan CC-elipsi ve odakları* $F_1 = (1, 2)\,,\ F_2 = (-1, -3)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 8$ *olan CC-elipsi görülmektedir. Şekilden de dikkat edileceği üzere birinci ve ikinci elips birer 14-gen iken üçüncü elips bir 16-gendir.*



Şekil 5.1 $E_d\left[(1,0),(-1,0),8\right]$, $E_d\left[(1,1),(-1,-1),8\right]$, $E_d\left[(1,2),(-1,-3),8\right]$

Tanım 5.2 *(X,d) bir metrik uzay, $E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips olsun. $T:X\longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x\in E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ için $Tx=x$ ise $E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsine T dönüşümün ün bir sabit elipsi denir.*

Bu kısımda buradan itibaren verilecek Teorem 5.1-5.4 ile (X,d) alışılmış metrik uzayında bir $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü için sabit elipsin varlığını garanti eden koşullar verilmiştir. Bu tezde ele alınan konular son zamanların popüler olan konularından biri olması sebebiyle bir çok bilim insanının bağımsız olarak bu konular üzerine çalışmalar yaptıkları görülmektedir. Bu sebeble ilgili konu ile alakalı yayınların üretimi hızlanmıştır. Dolayısıyla bu tezin bu kısımında verilen Teorem 5.1, Teorem 5.3 ve Teorem 5.6 ifadelerinin bağımsız olarak Joshi vd. 2020 yılında yaptıkları çalışmada da yer aldığı görülmüştür.

Teorem 5.1 *(X,d) bir metrik uzay, $E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$, (X,d) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi{:}X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=d(x,F_1)+d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T{:}X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ için

$(E_1^d1)\quad d(Tx,x)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$

$(E_1^d2)\quad \varphi(Tx)\geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$, (X,d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$*

fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = d(x, F_1) + d(x, F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_d [F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(E_1^d 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= d(x, F_1) + d(x, F_2) - d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2) \\ &= 2a - (d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

elde edilir. T dönüşümü $(E_1^d 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $E_d [F_1, F_2, 2a]$ elipsinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2) > 2a$ ise yani Tx noktası elipsin dışında ise (5.1) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Bu nedenle $d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2) = 2a$ olmalıdır. Çünkü (5.1) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bir çelişkidir. Yani Tx noktası elipsin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $d(Tx, x) \leq 2a - (d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2)) = 2a - 2a = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in E_d [F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_d [F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 5.2 *$X = \mathbb{R}$ ve d, $\mathbb{R}$ de alışılmış metrik olsun. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $E_d [1, 3, 4]$ elipsi göz önüne alınsın ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü de her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in E_d [1, 3, 4] \text{ ise} \\ 6, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde öncelikle $E_d [1, 3, 4] = \{0, 4\}$ kümesidir ve açıkça her $x \in E_d [1, 3, 4]$ için $(E_1^d 1)$ ve $(E_1^d 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla kolaylıkla gösterilebilir ki $E_d [1, 3, 4]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Bu noktada dikkat edilirse $E_d [2, 4, 6]$, $E_d \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 6\right]$ ve $E_d \left[\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 2\right]$ elipsleri de T dönüşümü altında invaryanttırlar. Yani T nin sabit elipsleridir. Burada sabit kalan elipslerin sayıları daha da çoğaltılabilir. Ancak burada ele alınan her elips de T altında invaryant kalmaz. Örneğin $E_d [2, 4, 8]$ elipsi T nin sabit elipsi değildir.

Örnek 5.3 *X=$\mathbb{R}$ ve d, $\mathbb{R}$ de alışılmış metrik olsun. Ayrıca $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $F_1 < F_2$ ve $|F_2 - F_1| < 2a$ olmak üzere $E_d [F_1, F_2, 2a]$ elipsi gözönüne alınsın. $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü de her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} F_1, & x < F_1 \text{ ise} \\ x, & F_1 \leq x \leq F_2 \text{ ise} \\ F_2, & x > F_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde T dönüşümü açıkça $(E_1^d 1)$ koşulunu sağlar. Ancak T dönüşümü $(E_1^d 2)$ koşulunu sağlamaz. Açıkça ifade edilirse,

$x < F_1$ *ise,*
$|x - F_1| \leq |x - F_1| + |x - F_2| - |F_1 - F_1| - |F_1 - F_2|$
$\Rightarrow |x - F_1| \leq |x - F_1| + (|x - F_2| - |F_1 - F_2|)$
$F_1 \leq x \leq F_2$ *ise,* $|x - x| \leq |x - F_1| + |x - F_2| - |x - F_1| - |x - F_2| \Rightarrow 0 \leq 0$
$x > F_2$ *ise,*
$|x - F_2| \leq |x - F_1| + |x - F_2| - |F_2 - F_1| - |F_2 - F_2|$
$\Rightarrow |x - F_2| \leq |x - F_2| + (|x - F_1| - |F_2 - F_1|)$
olacağından $d(Tx,\ x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ *koşulu sağlanır. Benzer şekilde,*
$x < F_1$ *ise,* $|F_1 - F_1| + |F_1 - F_2| = |F_1 - F_2| = d(F_1, F_2) < 2a$
$F_1 \leq x \leq F_2$ *ise,* $|x - F_1| + |x - F_2| = |F_1 - F_2| = d(F_1, F_2) < 2a$
$x > F_2$ *ise,* $|F_2 - F_1| + |F_2 - F_2| = |F_1 - F_2| = d(F_1, F_2) < 2a$
olduğundan $d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2) \geq 2a$ *koşulu sağlanmaz. Üstelik* T *dönüşümü* $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsini sabit bırakmaz.*

Örnek 5.4 $X = \mathbb{R}$ *ve* d, $\mathbb{R}$ *de alışılmış metrik olmak üzere* $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzayı ele alınsın. Bu metrik uzayda* $0 < F_1 < F_2$ *ve* $|F_1 - F_2| < 2a < |F_1| + |F_2|$ *olmak üzere* $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi ve de her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = F_1 + F_2$ *olacak şekilde tanımlanan* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre,*

$$d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) = |F_1 + F_2 - F_1| + |F_1 + F_2 - F_2| = |F_1| + |F_2| \geq 2a$$

olduğundan T *dönüşümü* $(E_1^d 2)$ *koşulunu sağlar. Ancak* $x = t \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow \\ |t - F_1 - F_2| &\leq |t - F_1| + |t - F_2| - |F_1 + F_2 - F_1| - |F_1 + F_2 - F_2| \\ &= 2a - (|F_1| + |F_2|) \leq 0 \end{aligned}$$

olacağından $(E_1^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Üstelik* T *dönüşümü* $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsini sabit bırakmaz.*

Teorem 5.2 (X, d) *bir metrik uzay,* $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = d(x, F_1) + d(x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dö nüşümü, her* $x \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için,*

$(E_2^d 1)$ $\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(E_2^d 1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir sabit elipsidir.*

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = d(x,\ F_1) + d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(E_2^d 1)$ koşulundan ve φ fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= d(x, F_1) + d(x, F_2) + d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) - 4a \\ &= 2a + d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) - 4a \\ &= d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) - 2a \end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. $(E_2^d 1)$ koşulu sağlandığından dolayı Tx noktası $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ elipsinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre Tx noktası elipsin içinde ise yani $d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2) < 2a$ ise Çünkü bu durumda (5.2) eşitsizliği $d(Tx,\ x) < 0$ formuna dönüşür. Ancak uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde $d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2) = 2a$ olmalıdır. Yani Tx noktası elipsin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $d(Tx,\ x) \leq 2a + d(Tx,\ F_1) + d(Tx,\ F_2) - 4a = 2a + 2a - 4a = 0$ elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ dir. Yani her $x \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 5.5 *d, $\mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $E_d\,[-1, 3, 8]$ elipsi göz önüne alınsın. Ayrıca $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in E_d\,[-1, 3, 8] \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Buna göre $E_d\,[-1, 3, 8] = \{-3,\ 5\}$ olup açıkça bu elips üzerindeki her nokta için $(E_2^d 1)$ ve $(E_2^d 2)$ koşulları sağlanır. Bu nedenle $E_d\,[-1, 3, 8]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Ayrıca dikkat edilirse $E_d\,[-2, 0, 4]$ ve $E_d\,[2, 4, 4]$ elipsleri de T dönüşümünün birer sabit elipsleridir. Bu noktada bu T dönüşümünün sabit bıraktığı elips örnekleri daha da arttırılabilir. Fakat bu ele alınan tüm elipslerin de T altında invaryant kalmayacağı belirtilmelidir. Örneğin $E_d\,[0, 2, 4]$ ve $E_d\,[3, 4, 5]$ elipsleri T altında invaryant kalmazlar.

Örnek 5.6 *$(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzay ve $E_d\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right]$ elipsi verilmiş olsun. Ayrıca $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in E_d\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right] \text{ ise} \\ 3, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanmış olsun. Bu takdirde açıkça T dönüşümü (E_2^d1) ve (E_2^d2) koşullarını sağlar. O halde $E_d\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2},2\right]=\{-1,\ 1\}$ elipsi T dönüşümü altında invaryant kalır. Üstelik $E_d[0,2,4]$, $E_d\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2},4\right]$, $E_d\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2},2\right]$ ve $E_d\left[\frac{7}{4},\frac{9}{4},2\right]$ elipsleri için de (E_2^d1) ve (E_2^d2) koşulları sağlanır. Yani bu elipsler de Tnin bire sabit elipsleridir. Ancak $E_d[-3,5,10]$ elipsi T nin bir sabit elipsi değildir.

Örnek 5.7 (X,d) *bir metrik uzay ve $E_d[F_1,F_2,2a]$ bu metrik uzayda bir elips olsun. Ayrıca $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in E_d[F_1,F_2,2a] \text{ ise} \\ \frac{F_1+F_2}{2}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde her $x\in E_d[F_1,F_2,2a]$ için (E_2^d1) ve (E_2^d2) koşulları sağlanır. Açıkça $E_d[F_1,F_2,2a]$ T nin bir sabit elipsidir.

Örnek 5.8 (X,d) *bir metrik uzay ve $E_d[F_1,F_2,2a]$ bu metrik uzayda bir elips olsun. $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü her $x\in X$ için $Tx=\frac{F_1+F_2}{2}$ olacak şekilde tanımlansın. Buna göre açıkça T dönüşümü (E_2^d2) koşulunu sağlarken (E_2^d1) koşulunu sağlamaz. Üstelik $E_d[F_1,F_2,2a]$ elipsi T nin sabit elipsi değildir.*

Örnek 5.9 $(\mathbb{R},d)$ *alışılmış metrik uzay ve $E_d[-1,1,4]$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir elips olsun. $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dönüşümü her $x\in\mathbb{R}$ için*

$$Tx=\begin{cases} -10, & x=-2 \text{ ise} \\ 10, & x=2 \text{ ise} \\ 15, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde T dönüşümü (E_2^d1) koşulunu sağlarken (E_2^d2) koşulunu sağlamaz ve açıkça $E_d[-1,1,4]$ elipsi T nin sabit elipsi değildir.

Teorem 5.3 (X,d) *bir metrik uzay , $E_d[F_1,F_2,2a]$, (X,d) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=d(x,F_1)+d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in E_d[F_1,F_2,2a]$ ve bazı $h\in[0,\ 1)$ için

(E_3^d1) $\quad d(Tx,x)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$

(E_3^d2) $\quad h.d(Tx,x)+\varphi(Tx)\geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_d[F_1,F_2,2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $E_d[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = d(x,\ F_1) + d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ d önüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_d[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(E_3^d 1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(E_3^d 2)$ koşulu gereğince*

$$
\begin{aligned}
d(Tx, x) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= d(x, F_1) + d(x, F_2) - d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2) \\
&= 2a - d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2) \\
&\leq h.d(Tx, x) + d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) - d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2) \\
&= h.d(Tx, x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(1 - h)d(Tx,\ x) \geq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $d(Tx,\ x) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in E_d[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 5.10 *$X = \mathbb{R}$ ve d, $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı verilsin. Bu metrik uzayda $E_d[1, 3, 6]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$
Tx = \begin{cases} x, & x \in E_d[1, 3, 6] \text{ ise} \\ 7, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
$$

şeklinde tanımlanan $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. Kolaylıkla görülebilir ki her $x \in E_d[1, 3, 6]$ için $(E_3^d 1)$ ve $(E_3^d 2)$ koşulları sağlanır. Doğal olarak $E_d[1, 3, 6]$, T nin bir sabit elipsidir. Ancak $E_d[2, 4, 8]$, $E_d[0, 6, 8]$, $E_d\left[\frac{11}{2}, \frac{13}{2}, 2\right]$ ve $E_d\left[\frac{23}{4}, \frac{25}{4}, 2\right]$ elipsleri de T nin birer sabit elipsidir. T dönüşümü için bu sabit elipslerin örnekleri arttırılabilir. Ancak bu noktada $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında ele alınan her elipsinde T altında invaryant kalmadığı da belirtilmelidir. Örneğin, $E_d[3, 6, 7]$ ve $E_d[-2, 4, 10]$ elipsleri T nin sabit elipsleri değildir.

Örnek 5.11 *$(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayında $E_d[-1, 1, 6]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$
Tx = \begin{cases} 5, & x \in E_d[-1, 1, 6] \text{ ise} \\ 3, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
$$

olacak şekilde tanımlanan $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Buna göre açıkça T dönüşümü $(E_3^d 2)$ koşulunu sağlarken $(E_3^d 1)$ koşulunu sağlamaz. Üstelik $E_d[-1, 1, 6]$ elipsi T nin sabit elipsi değildir.

Örnek 5.12 *$(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayı verilsin. Bu metrik uzayda $F_1 < F_2$ ve $|F_2 - F_1| < 2a$ olmak üzere $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsi göz önüne alınsın. $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} F_1, & x < F_1 \text{ ise} \\ x, & F_1 \le x \le F_2 \text{ ise} \\ F_2, & x > F_2 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı olsun. Buna göre T dönüşümü açıkça $(E_3^d 1)$ koşulunu sağlar. Ayrıntılar için Örnek 5.2 ye bakılabilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olacak şekilde bir sayı olmak üzere,

$x < F_1$ ise,

$hd(Tx, x)+d(Tx, F_1)+d(Tx, F_2)=h|x - F_1|+|F_1 - F_1|+|F_1 - F_2|=h|x - F_1|+|F_1 - F_2|<2a$

$F_1 \le x \le F_2$ ise,

$hd(Tx, x) + d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) = h|x - x| + |x - F_1| + |x - F_2| = |F_1 - F_2| < 2a$

$x > F_2$ ise,

$hd(Tx, x)+d(Tx, F_1)+d(Tx, F_2)=h|F_2 - x|+|F_1 - F_2|+|F_2 - F_2|=h|x - F_2|+|F_1 - F_2|<2a$

olduğundan $(E_3^d 2)$ koşulu sağlanmaz. Çünkü $x < F_1$ için,

$d(x,\ F_1) + d(x,\ F_2) = 2a \Rightarrow |x - F_1| + |x - F_2| = 2|x - F_1| + |F_1 - F_2| = 2a$

ve benzer şekilde $x > F_2$ iken

$d(x,\ F_1) + d(x,\ F_2) = 2a \Rightarrow |x - F_1| + |x - F_2| = 2|x - F_2| + |F_1 - F_2| = 2a$ *dır.*

Teorem 5.4 *(X, d) bir metrik uzay, $E_d[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = d(x, F_1) + d(x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in E_d[F_1, F_2, 2a]$ için,

$(E_4^d 1)$ $\quad d(Tx, x) \le \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$

$(E_4^d 2)$ $\quad d(Tx, x) + \varphi(Tx) \le 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \ne \varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $E_d[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = d(x,\ F_1) + d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_d[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(E_4^d 1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak φ fonksiyonunun* *tanımı ve d metriğ inin üçgen eşitsizliği aksiyomu gereğince*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\le \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= d(x, F_1) + d(x, F_2) + d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) - 4a \\ &\le d(x, Tx) + d(Tx, F_1) + d(x, Tx) + d(Tx, F_2) + d(Tx, F_1) + d(Tx, F_2) - 4a \\ &= 2d(Tx, x) + 2d(Tx, F_1) + 2d(Tx, F_2) - 4a \\ &\le 4a - 4a = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda açıkça $Tx = x$ *olur. Bu takdirde sonuç olarak her* $x \in E_d[F_1, F_2, 2a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan* T *dönüşümü* $E_d[F_1, F_2, 2a]$ *elipsini sabit bırakır.*

Örnek 5.13 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $E_d[2, 5, 7]$ *elipsi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in E_d[2,5,7] \text{ ise} \\ -3 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Buna göre* $E_d[2, 5, 7]$ *elipsi üzerindeki her bir nokta için kolaylıkla* (E_4^d1) *ve* (E_4^d2) *koşullarının sağlandığı g österilir. Bundan dolayı açıkça* $E_d[2, 5, 7]$ *elipsi* T *nin bir sabit elipsidir. Bunun yanı sıra biraz dikkat ile* T *nin tek sabit elipsinin* $E_d[2, 5, 7]$ *olmadığı görülür. Örneğin* $E_d[-2, -1, 3]$, $E_d\left[\frac{-5}{2}, \frac{-1}{2}, 3\right]$, $E_d[0, 4, 10]$ *ve* $E_d[1, 3, 10]$ *elipsleri de* T *altında invaryanttır. Fakat bu dönüşüm tüm elipsleri de sabit bırakmaz. Açıkça* $E_d[1, 3, 6]$ *ve* $E_d[-5, -2, 5]$ *elipsleri* T *için sabit elips değillerdir.*

Örnek 5.14 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik olmak üzere* $E_d[-2, 2, 6]$ *elipsi ve*

$$Tx = \begin{cases} -10, & x = -3 \text{ ise} \\ 10, & x = 3 \text{ ise} \\ 15 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Bu takdirde* T *dönüşümü* (E_4^d1) *koşulunu sağlarken* (E_4^d2) *koşulunu sağlamaz ve* $E_d[-2, 2, 6]$ *elipsi* T *nin bir sabit elipsi değildir.*

Örnek 5.15 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik olmak üzere* $E_d[-1, 1, 6]$ *elipsi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in E_d[-1,1,6] \text{ ise} \\ 3, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Bu takdirde* T *dönüşümü* (E_4^d2) *koşulunu sağlarken* (E_4^d1) *koşulunu sağlamaz ve* $E_d[-1, 1, 6]$ *elipsi* T *nin bir sabit elipsi değildir.*

Teorem 5.5 *(X, d) bir metrik uzay, $E_d[F_1, F_2, 2a]$ (X, d) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = d(x, F_1) + d(x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > 2$ için,

$$(I_d) : d(Tx, x) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_X$ ve $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *(X, d) bir metrik uzay, $E_d[F_1, F_2, 2a]$ bu metrik uzayda F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips olsun. Ayrıca her $x \in X$ için*

$$\varphi(x) = d(x, F_1) + d(x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşümüele alınsın. Üstelik T dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > 2$ değerleri için (I_d) koşulunu sağlasın. O halde $x \in X$ ve $x \neq Tx$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, T dönüşümü (I_d) koşulunu sağladığından dolayı bu koşuldan yola çıkarak φ fonksiyonunun tanımı ve d metriğinin üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
h.d(Tx, x) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= d(x, F_1) + d(x, F_2) - d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2) \\
&\leq d(x, Tx) + d(Tx, F_1) + d(x, Tx) + d(Tx, F_2) - d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2) \\
&\leq 2.d(x, Tx)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan düzenleme ile $(h-2)d(Tx,\ x) \leq 0$ elde edilir. Hipotez gereğince $h > 2$ olduğundan açıkça $Tx = x$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $x \in X$ için $Tx = x$ olduğundan $T = I_X$ olur. Tersine $T = I_X$ birim dönüşüm olduğundan sonuç olarak $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T nin bir sabit elipsidir.

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 5.1-.5.4 ile alışılmış metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve $2a$ asal eksen uzunluklu $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Ayrıca Teorem 5.5 de de $E_d[F_1, F_2, 2a]$ elipsinin nokta nokta sabit bırakan T dönüşümünün ne zaman birim dönüşüm olacağı ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit elipslerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler alışılmış metrik uzayda birden fazla sabit elipse sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 5.1 *(X,d) bir metrik uzay ve $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ile $E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ (X,d) metrik uzayında iki elips olsun. Bu takdirde $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ elipslerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X,d) metrik uzayında en az bir $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme ve d, X üzerinde bir metrik olmak üzere (X,d) bir metrik uzay olsun. $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ de $F_{11},\ F_{12}$ odaklı, $2a_1$ asal eksen uzunluklu ve $F_{21},\ F_{22}$ odaklı, $2a_2$ asal eksen uzunluklu olacak şekilde verilen iki elips olsun. Ayrıca P noktası $d(F_{11},\ P)+d(F_{12},\ P)\neq 2a_1$ ve $d(F_{21},\ P)+d(F_{22},\ P)\neq 2a_2$ olacak şekilde (X,d) metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]\cup E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right] \text{ ise}\\ P, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2:X\longrightarrow[0,\infty)$ dönüşümleri her $x\in X$ için $\varphi_1(x)=d(x,\ F_{11})+d(x,\ F_{12})$ ve $\varphi_2(x)=d(x,\ F_{21})+d(x,\ F_{22})$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ elipsleri için $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (E_d^j1)ve (E_d^j2) koşullarını sağlar. O halde Teorem 5.1-5.4 gere ğince açıkça $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ elipsleri T dönüşümünün sabit elipsleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $E_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ elipslerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili elipsler tamamiyle keyfidir.

Önerme 5.2 *(X,d) bir metrik uzay ve $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right],...,E_d\left[F_{n1},F_{n2},2a_n\right]$ (X,d) metrik uzayında n tane elips olsun. Bu takdirde $E_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right],\ ...,\ E_d\left[F_{n1},F_{n2},2a_n\right]$ elipslerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X,d) metrik uzayında en az bir $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 5.1 in ispatına benzer olarak $i=1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_d\left[F_{i1},F_{i2},2a_i\right] \text{ ise}\\ P, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan T:$X\longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x\in X$ için $\varphi_i(x)$=$d(x,\ F_{i1})$+$d(x,\ F_{i2})$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i:X\longrightarrow[0,\infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i=1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $d(x,\ F_{i1})+d(x,\ F_{i2})\neq 2a_i$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i\in\{1,...,n\}$ için $E_d\left[F_{i1},F_{i2},2a_i\right]$ elipslerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, d) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit elipse sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 5.6-5.11 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 5.6 *(X, d) bir metrik uzay , $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) bir metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğ u $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(E_1^d 1)$ve $(E_1^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, $y \in X \setminus E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,*

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *(X, d) bir metrik uzay, $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve $y \in X \setminus E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere*

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve $E_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ elipslerinin T dönüşümünün iki farklı sabit elipsi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve $v \in E_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq h.d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(E_1^d 1)$ve $(E_1^d 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^d 1)$ve $(E_i^d 2)$ olarak değiştirilebilir.

Örnek 5.16 *$X = \mathbb{R}^2$ ve d_E, $\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklidyen metrik olsun. Ayrıca $(\mathbb{R}^2, d_E)$ metrik uzayında (Öklidyen düzlemde) $a > b$ olmak üzere $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kartezyen denklemiyle verilen elipsi yani $F_1 = (-c,\ 0),\ F_2 = (c,\ 0)$ olmak üzere $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi göz önüne alınsın. Ayrıca $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü her $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ için*

$$T(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + a^2 y^2}, \frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \text{ ise} \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Buna göre T dönüşüm ü $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsini nokta nokta sabit bırakır. Yani $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, T nin bir sabit elipsidir. Açıkça $(x,\ y) \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ise $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ olup $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ veya $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ elde edilir. Buna göre elde edilen bu değerlerden herhangi biri $b^2x^2 + a^2y^2$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + a^2b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2b^2$$

sonucuna ulaşılır. Bu takdirde $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ ve $(x,\ y) \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ için $T(x,\ y) = (x,\ y)$ formuna dönüşür. Dolayısıyla buradaki T dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^d 1)$ ve $(E_i^d 2)$ koşullarını sağlar. Yukarıdaki tanımlanan dönüşüm Öklidyen düzlemde $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsine göre inversiyon dönüşümüdür (Ramîrez ve Rubiano, 2014). Bu dönüşüm elipsin içini dışına, dışını da içine çevirir. Elipsin kendisi dönüşüm altında invaryant kalır.

Teorem 5.7 *(X, d) bir metrik uzay , $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) bir metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm ü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^d 1)$ve $(E_i^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, $y \in X \setminus E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ noktaları için*

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y), d(Ty, x), d(Tx, y)\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *(X, d) bir metrik uzay, $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve $y \in X \setminus E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ noktaları için*

$$d(Tx,\ Ty) < \max\{d(x,\ y),\ d(Tx,\ x),\ d(Ty,\ y),\ d(Ty,\ x),\ d(Tx,\ y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve $E_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ elipslerinin T dönüşümünün iki farklı sabit elipsi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ ve $v \in E_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Tu, Tv) < \max\{d(u, v), d(Tu, u), d(Tv, v), d(Tv, u), d(Tu, v)\} \\ &= d(u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $E_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Teorem 5.8 *(X, d) bir metrik uzay , $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) bir metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^d 1)$ve $(E_i^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşüm ü her $x \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\,[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

koşulunu sağlıyorsa $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *Teorem 5.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $E_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ elipslerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in E_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda.\,[d(u, Tu) + d(v, Tv)] = \lambda.\,[d(u, u) + d(v, v)] = 0$$

elde edilir. Buna göre $d(u,\ v)\ =\ 0$ olup $u\ =\ v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Teorem 5.9 *(X, d) bir metrik uzay , $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) bir metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğ u $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^d 1)$ve $(E_i^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\,[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

koşulunu sağlıyorsa $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *Teorem 5.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $E_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ elipslerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in E_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda.\,[d(u, Tv) + d(v, Tu)] = \lambda.\,[d(u, v) + d(v, u)] = 2\lambda d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Teorem 5.10 *(X, d) bir metrik uzay , $E_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) bir metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğ u $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm ü $i =$*

$1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E_i^d 1)$*ve* $(E_i^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \beta d(y, Ty) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $E_d [F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.*

İspat *Teorem 5.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tu) + \beta d(v, Tv) + \gamma d(u, v) = \gamma d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $E_d [F_1, F_2, 2a]$ *elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

Teorem 5.11 (X, d) *bir metrik uzay ,* $E_d [F_1, F_2, 2a]$*,* (X, d) *bir metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E_i^d 1)$*ve* $(E_i^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Ty) + \beta d(y, Tx) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $E_d [F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.*

İspat *Teorem 5.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tv) + \beta d(v, Tu) + \gamma d(u, v) = (\lambda + \beta + \gamma) d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $E_d [F_1, F_2, 2a]$ *elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

5.2 Alışılmış Metrik Uzayda Sabit Hiperbol Teoremleri

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylarda iki odaklı hiperboller için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir hiperbolü sabit bırakması yani sabit hiperbolün varolma koşulları ve sabit hiperbolün teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak alışılmış metrik uzayda iki odaklı hiperbol ve sabit hiperbol kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 5.3 (X,d) *bir metrik uzay,* $F_1,\ F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Buna göre*

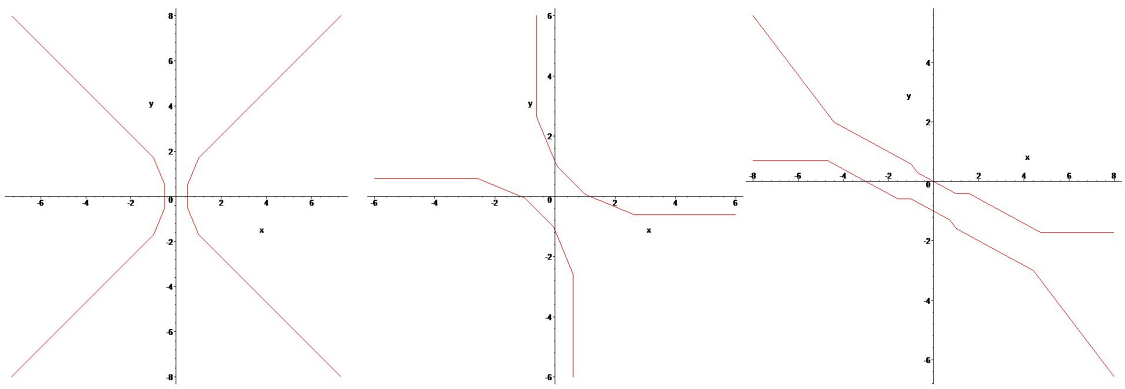
$$H_d\left[F_1, F_2, 2a\right] = \{x \in X : |d(x, F_1) - d(x, F_2)| = 2a\}$$

ifadesine odakları $F_1,\ F_2$ *asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan hiperbol denir.*

Örnek 5.17 *Alışılmış metrik uzaylarda metrik olarak aşina olduğumuz Öklidyen metriği kullanıldığında karşılılacak olan hiperbol kavramı oldukça iyi bilinen kavramlardır. Ancak burada metrik yapısı Öklidyen metriğin dışına çıktığında karşılaşılacak olan hiperbol kavramı Öklidyen hale göre büyük farklılıklar daha doğrusu çeşitlik göstermektedir. Bu ise metrik uzayların zenginliğini ifade etmek için bir veri oluşturmaktadır. Bu taktirde,* $X = \mathbb{R}^2$ *olsun.* $X_1 = (x_1, y_1)\,,\ X_2 = (x_2, y_2) \in X$ *olmak üzere*

$$d\left(X_1, X_2\right) = \max\left\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\left\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\right\}$$

CC-metriği ele alınsın. Buna göre CC-metriğine göre şekil 5.2 de sırasıyla odakları F_1=$(1,0)\,,\ F_2$=$(-1,0)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a$=1 *olan CC-hiperbolü, odakları* $F_1 = (1,1)\,,\ F_2 = (-1,-1)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 3/2$ *olan CC-hiperbolü ve odakları* $F_1 = (1,2)\,,\ F_2 = (-1,-3)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 1$ *olan CC-hiperbolü görülmektedir.*



Şekil 5.2 $H_d\left[(1,0)\,,(-1,0)\,,1\right]$, $H_d\left[(1,1)\,,(-1,-1)\,,3/2\right]$, $H_d\left[(1,2)\,,(-1,-3)\,,1\right]$

Tanım 5.4 (X,d) *bir metrik uzay,* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right],\ (X,d)$ *metrik uzayında* $F_1,\ F_2$ *odaklı* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *bir dönüşüm olmak üzere her* $x \in H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *için* $Tx = x$ *ise* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolüne* T *dönüşümünün sabit hiperbolü denir.*

Teorem 5.12 *(X, d) bir metrik uzay, $H_d[F_1, F_2, 2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |d(x, F_1) - d(x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ dönüşümü , her $x \in H_d[F_1, F_2, 2a]$ için

$(H_1^d 1)$ $\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(H_1^d 2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $H_d[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $H_d[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi{:}X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |d(x, F_1) - d(x, F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_d[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(H_1^d 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= |d(x, F_1) - d(x, F_2)| - |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| \\ &= 2a - |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| \end{aligned} \tag{5.3}$$

elde edilir. T dönüşümü $(H_1^d 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası için iki durum vardır. Buna göre $|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| > 2a$ ise (5.3) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Çünkü (5.3) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Bu nedenle $|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = 2a$ olmalıdır. Bu durumda, $d(Tx,\ x) \leq 2a - |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = 2a - 2a = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in H_d[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $H_d[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 5.18 *$X = \mathbb{R}$ ve d, $\mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olsun. Ayrıca $(\mathbb{R},\ d)$ metrik uzayında $H_d[2, 4, 1]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\} \text{ ise} \\ 3, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. Buna göre $H_d[2, 4, 1] = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ dir. Dolayısıyla dikkat edilirse her $x \in H_d[2, 4, 1]$ için $(H_1^d 1)$ ve $(H_1^d 2)$ koşulları açıkça sağlanır. Ayrıca $H_d[2, 4, 1]$ hiperbolünün T nin bir sabit hiperbolü olduğu kolayca görülür. Fakat küçük bir dikkat ile $H_d\left[\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, 1\right]$, $H_d\left[\frac{1}{4}, \frac{23}{4}, 1\right]$, $H_d\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 1\right]$ hiperbolleri de T dönüşümü altında invaryanttırlar. T altında invaryant kalan hiperbollerin örneklerini daha da çoğaltmak mümkün olsa da bu ifadeden ilgili yapıdaki tüm hiperbollerin T altında sabit kaldığı anlamı çıkarılmamalıdır. Örneğin $H_d[0, 3, 1]$ hiperbolü T nin bir sabit hiperbolü değildir.

Örnek 5.19 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayı ele alınsın. Bu metrik uzayda* $F_1 < F_2$ *ve* $|F_2 - F_1| > 2a$ *olmak üzere* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü verilsin. Ayrıca* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü de her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} F_1, & x < F_1 \text{ ise} \\ x, & F_1 \leq x \leq F_2 \text{ ise} \\ F_2, & x > F_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Buna göre $|F_2 - F_1| > 2a$ *olduğundan dolayı* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolünün noktalarının hiçbiri* $(F_1,\ F_2)$ *aralığı dışında olamazlar. Çünkü bu aralık dışında bir nokta olmuş olsa idi* $|d(x, F_1) - d(x, F_2)| > 2a$ *olmak zorunda olurdu. O halde* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolünün noktalarının tümü* $(F_1,\ F_2)$ *aralığındadır. Bu takdirde her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için*

$$d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow |x - x| \leq ||x - F_1| - |x - F_2|| - ||x - F_1| - |x - F_2|| \Rightarrow 0 \leq 0$$

olduğundan $(H_1^d 1)$ *koşulu sağlanırken,*

$$|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = ||x - F_1| - |x - F_2|| = 2a \geq 2a$$

olduğundan $(H_1^d 2)$ *koşulu da sağlanır. Yani* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*,* T *nin bir sabit hiperbolüdür. Hiperbol ün* T *altında invaryant kalacağı açıkça görülmektedir.*

Örnek 5.20 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayında* $F_1 < F_2$ *ve* $|F_2 - F_1| = 2a$ *olacak şekilde* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü ve örnek 5.19 da verilen* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Bu takdirde* $H_d\,[F_1, F_2, 2a] = (-\infty,\ F_1) \cup (F_2,\ \infty) = \mathbb{R} \setminus (F_1,\ F_2)$ *olur. O halde her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için*
$x \leq F_1$ *ise*
$|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = ||F_1 - F_1| - |F_1 - F_2|| = |F_1 - F_2| = 2a \geq 2a$
$x \geq F_2$ *ise*
$|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = ||F_2 - F_1| - |F_2 - F_2|| = |F_1 - F_2| = 2a \geq 2a$
olacağından $(H_1^d 2)$ *koşulu sağlanırken,*
$x < F_1$ *ise*
$d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow |x - F_1| \leq ||x - F_1| - |x - F_2|| - ||F_1 - F_1| - |F_1 - F_2|| = |F_1 - F_2| - |F_1 - F_2| = 0$
$x > F_2$ *ise*
$d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow |x - F_2| \leq ||x - F_1| - |x - F_2|| - ||F_2 - F_1| - |F_2 - F_2|| = |F_1 - F_2| - |F_1 - F_2| = 0$
olduğundan $(H_1^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Açıkça* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*,* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Örnek 5.21 $X = \mathbb{R}$, *d,* $\mathbb{R}$ *üzerinde standart metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ d)$ *metrik uzayı ele alınsın.* $F_1 < 0 < F_2$ *ve* $|F_2 - F_1| = 2a$ *olacak şekilde* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü ile her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 2x$ *biçiminde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Buna göre açıkça* $H_d\,[F_1, F_2, 2a] = \mathbb{R} \setminus (F_1,\ F_2)$ *dir. O halde her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için*
$x < F_1$ *ise* $|2x - x| \leq ||x - F_1| - |x - F_2|| - ||2x - F_1| - |2x - F_2|| \Rightarrow |x| \leq 0$
$x > F_2$ *ise* $|2x - x| \leq ||x - F_1| - |x - F_2|| - ||2x - F_1| - |2x - F_2|| \Rightarrow |x| \leq 0$
olacağından $d(Tx,\ x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ *koşulu sağlanmaz. Ancak dikkat edilirse*
$x < F_1$ *ise* $||2x - F_1| - |2x - F_2|| = |F_1 - F_2| = 2a \geq 2a$
$x > F_2$ *ise* $||2x - F_1| - |2x - F_2|| = |F_1 - F_2| = 2a \geq 2a$
olduğundan dolayı $|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| \geq 2a$ *koşulu sağlanır. Bunların yanı sıra* T *dönüşümü* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolünü invaryant bırakmaz.*

Örnek 5.22 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayında,* $H_d\,[3, 7, 1]$ *hiperbolü ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} 5, & x \in H_d\,[3,7,1] \text{ ise} \\ 4, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Burada açıkça* $H_d\,[3, 7, 1] = \{\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\}$ *dir. Buna göre her* $x \in H_d\,[3, 7, 1]$ *için*

$$d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1$$

olduğundan $(H_1^d 1)$ *koşulu sağlanırken, dikkat edilirse*

$$|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = 0 \geq 1$$

olup $(H_1^d 2)$ *koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla* $H_d\,[3, 7, 1]$ *hiperbolü* T *altında invaryant değildir.*

Teorem 5.13 (X, d) *bir metrik uzay,* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*, odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = |d(x, F_1) - d(x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü , her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için*
$(H_2^d 1)\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(H_2^d 2)\quad \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme, d,* X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol ve* $\varphi{:}X \longrightarrow [0, \infty)$

fonksiyonu her $x \in X$ *için* $\varphi(x) = |d(x, F_1) - d(x, F_2)|$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in H_d[F_1, F_2, 2a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* $(H_2^d 1)$ *koşulu ve* φ *fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= |d(x, F_1) - d(x, F_2)| + |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| - 4a \\ &= |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| - 2a \end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir. T *dönüşümü* $(H_1^d 2)$ *koşulunu sa ğladığından* Tx *noktası için iki durum vardır. Buna g öre* $|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| < 2a$ *ise* (5.4) *eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Çünkü (5.4) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bir çelişkidir. Bu nedenle* $|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = 2a$ *olmalıdır. Bu durumda,* $d(Tx,\ x) \leq |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| - 2a = 2a - 2a = 0$ *elde edilir. O halde* $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in H_d[F_1, F_2, 2a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $H_d[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolünü sabit bırakır.*

Örnek 5.23 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzay olmak üzere bu metrik uzayda* $H_d[-2, 2, 2]$ *hiperbolünü ve*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in H_d[-2, 2, 2] \text{ ise} \\ 0, & x \notin H_d[-2, 2, 2] \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü verilsin. Kolaylıkla görülebilir ki* $H_d[-2, 2, 2] = \{-1,\ 1\}$ *dir. Dolayısıyla her* $x \in H_d[-2, 2, 2]$ *için*

$$d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \Rightarrow |x - x| \leq 2 + 2 - 4 \Rightarrow 0 \leq 0$$

olacağından $(H_2^d 1)$ *sağlanır. Benzer şekilde*

$$|d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| = ||x - (-2)| - |x - 2|| = 2 \leq 2$$

olacağından $(H_2^d 2)$ *koşulu sağlanır. O halde* $H_d[-2, 2, 2]$*,* T *nin bir sabit hiperbolüdür. Üstelik* $H_d[-2, 1, 1]$ *ve* $H_d[-1, 2, 1]$ *de* T *nin sabit hiperbollerinden bazılarıdır. Ancak* $(\mathbb{R},\ d)$ *uzayındaki tüm hiperboller de* T *altında invaryant kalmaz. Örneğin,* $H_d[3, 5, 1]$ *hiperbolü* T *nin bir sabit hiperbolü değildir.*

Örnek 5.24 $(\mathbb{R},\ d)$ *metrik uzayında* $H_d[3, 5, 1]$ *hiperbolü ve* $T : X \longrightarrow X$,

$$Tx = \begin{cases} \frac{13}{4}, & x = \frac{7}{2} \text{ ise} \\ \frac{19}{4}, & x = \frac{9}{2} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. Buna göre $H_d\left[3,5,1\right]=\left\{\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right\}$ *olup her* $x\in H_d\left[3,5,1\right]$ *için*

$$d(Tx,x)\leq\varphi(x)+\varphi(Tx)-4a\Rightarrow\frac{1}{4}\leq1+\frac{3}{2}-2\Rightarrow\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2}$$

olacağından (H_2^d1) *koşulu sağlanır. Ancak açıkça görülür ki her* $x\in H_d\left[3,5,1\right]$ *için*

$$|d(Tx,F_1)-d(Tx,F_2)|\leq2a\Rightarrow\left|\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\right|\leq1\Rightarrow\frac{3}{2}\leq1$$

olacağından (H_2^d2) *koşulu sağlanmaz. Bu durumda* $H_d\left[3,5,1\right]$*,* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Teorem 5.14 (X,d) *bir metrik uzay,* $H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$*, odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun. Ayrıca* $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için,*

$$\varphi(x)=|d(x,F_1)-d(x,F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x\in H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ *ve bazı* $h\in[0,\ 1)$ *için*
$(H_3^d1)\quad d(Tx,x)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$
$(H_3^d2)\quad h.d(Tx,x)+\varphi(Tx)\geq2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.*

İspat $X\neq\varnothing$ *bir küme,* d*,* X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$*,* (X,d) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol ve* $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için* $\varphi(x)=|d(x,F_1)-d(x,F_2)|$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x\in H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ *herhangi bir nokta olmak üzere.* T *dönüşümü* (H_3^d1) *koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak,* φ *fonksiyonunun tanımı ve* (H_3^d2) *koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
d(Tx,x) &\leq \varphi(x)-\varphi(Tx)\\
&= |d(x,F_1)-d(x,F_2)|-|d(Tx,F_1)-d(Tx,F_2)|\\
&= 2a-|d(Tx,F_1)-d(Tx,F_2)|\\
&\leq h.d(Tx,x)+|d(Tx,F_1)-d(Tx,F_2)|-|d(Tx,F_1)-d(Tx,F_2)|\\
&= h.d(Tx,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(1-h).\ d(Tx,\ x)\geq0$ *bulunur. Bu durumda* $h\in[0,\ 1)$ *olduğundan dolayı* $d(Tx,\ x)=0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx=x$ *olur. Yani her* $x\in H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ *için* $Tx=x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $H_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ *hiperbolünü sabit bırakır.*

Örnek 5.25 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzay olmak üzere bu uzayda* $H_d\,[2,6,2]$ *hiperbolü ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in H_d\,[2,6,2] \text{ ise} \\ 10, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Her* $x \in H_d\,[2,6,2]$ *için* $(H_3^d 1)$ *ve* $(H_3^d 2)$ *koşullarının sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla* $H_d\,[2,6,2]$*,* T *nin bir sabit hiperbolüdür. Fakat biraz dikkatli inceleme yapılırsa* $H_d\,[2,11,7]$ *,* $H_d\,[0,13,7]$ *,* $H_d\,[4,11,5]$ *ve* $H_d\,[0,15,5]$ *hiperbolleri de* T *altında invaryanttır. Yani* T *nin sabit hiperbollerinin sayısı birden fazladır. Elbetteki tüm hiperboller de* T *altında invaryant kalmaz. Örneğin,* $H_d\,[-2,2,2]$ *hiperbolü* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Örnek 5.26 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayında* $F_1 < 0 < F_2$ *ve* $|F_1 - F_2| = 2a$ *olacak şekilde* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü ele alınsın. Ayrıca* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 3x$ *olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde* $H_d\,[F_1, F_2, 2a] = \mathbb{R} \setminus (F_1,\ F_2)$ *dir. Bu durumda açıkça* $x \leq F_1$ *i çin* $3x < x$ *ve* $x \geq F_2$ *için* $x < 3x$ *dir. O halde açıkça her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için*

$$d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow |3x - x| \leq 2a - 2a \Rightarrow |2x| \leq 0$$

olacağından $(H_3^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Fakat her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $h \in [0,\ 1)$ *için*

$$h.d(Tx, x) + |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| \geq 2a \Rightarrow h.\,|3x - x| + 2a \geq 2a$$

olup $(H_3^d 2)$ *koşulu sağlanır. Buna göre,* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*,* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Örnek 5.27 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzay,* $H_d\,[-1,5,4]$ *hiperbol ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü her* $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$Tx = \begin{cases} 2, & x \in H_d\,[-1,5,4] \\ 7, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Buna göre $H_d\,[-1,5,4] = \{0,\ 4\}$ *dir. Buna göre her* $x \in H_d\,[-1,5,4]$ *için*

$$d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow 2 \leq 4 - 0 \Rightarrow 2 \leq 4$$

olduğundan $(H_3^d 1)$ *koşulu sağlanırken dikkat edilirse* $h \in [0,\ 1)$ *için*

$$h.d(Tx, x) + |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| \geq 2a \Rightarrow h.2 + 0 \geq 4$$

olup $(H_3^d 2)$ *koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla açıkça* $H_d\,[-1,5,4]$ *hiperbolü* T *nin bir sabit hiperbolü değildir.*

Teorem 5.15 (X, d) *bir metrik uzay,* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*, odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = |d(x, F_1) - d(x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için,*
$(H_4^d 1)$ $\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(H_4^d 2)$ $\quad d(Tx, x) + \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme, d,* X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = |d(x, F_1) - d(x, F_2)|$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere,* T *dönüşümü* $(H_4^d 1)$ *koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak* φ *fonksiyonunun tanımı ve d metriğinin üçgen eşitsizliği aksiyomu gereğince,*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= |d(x, F_1) - d(x, F_2)| + |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| - 4a \\ &= |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| - 2a \\ &\leq |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)| - [d(Tx, x) + |d(Tx, F_1) - d(Tx, F_2)|] \\ &\leq -d(Tx, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2d(Tx,\ x) \leq 0$ *bulunur. Bu durumda* d *bir metrik olduğundan dolayı* $d(Tx,\ x) = 0$ *olmalıdır. Bu nedenle* $Tx = x$ *olur. Yani her* $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan* T *dönüşümü* $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolünü sabit bırakır.*

Örnek 5.28 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayında* $H_d\,[3, 9, 2]$ *hiperbolü ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in H_d\,[3, 9, 2] \ \textit{ise} \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre açıkça her* $x \in H_d\,[3, 9, 2]$ *için* $(H_4^d 1)$ *ve* $(H_4^d 2)$ *koşulları sağlanır. Bunun bir sonucu olarak* $H_d\,[3, 9, 2]$*,* T *nin bir sabit hiperbolüdür. Ancak biraz dikkatli bir inceleme ile* $H_d\,[-1, 6, 5]$, $H_d\,[-2, 7, 5]$, $H_d\,[-1, 8, 7]$ *ve* $H_d\,[-2, 9, 7]$ *hiperbolleri de* T *nin birer sabit hiperbolüdür. Dolayısıyla* T *için sabit hiperbol tek değildir. Ancak uzaydaki tüm hiperbollerde* T *altında invaryant değildir. Örneğin* $H_d\,[1, 4, 1]$*,* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Örnek 5.29 $X = \mathbb{R}$, *d,* $\mathbb{R}$ *üzerinde standart metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ d)$ *metrik uzayı alınsın. Bu uzayda* $H_d\,[-2,2,2]$ *hiperbolü ile*

$$Tx = \begin{cases} -3, & x = -1 \textit{ ise} \\ 3, & x = 1 \textit{ ise} \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Bu takdirde kolaylıla görülebilir ki her* $x \in H_d\,[-2,2,2] = \{-1,\ 1\}$ *için*

$$d(Tx,x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \Rightarrow 2 \leq 2 + 4 - 4 \Rightarrow 2 \leq 2$$

olacağından $(H_4^d 1)$ *koşulu sağlanırken,*

$$d(Tx,x) + |d(Tx,F_1) - d(Tx,F_2)| \leq 2a \Rightarrow 2 + 4 \leq 2 \Rightarrow 6 \leq 2$$

olduğundan $(H_4^d 2)$ *koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla* $H_d\,[-2,2,2]$*,* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Örnek 5.30 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayında* $H_d\,[-2,2,2]$ *hiperbolü ve*

$$Tx = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & x = -1 \textit{ ise} \\ \frac{2}{3}, & x = 1 \textit{ ise} \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. O halde her* $x \in H_d\,[-2,2,2]$ *için*

$$d(Tx,x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \Rightarrow \frac{1}{3} \leq 2 + \frac{4}{3} - 4 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq -\frac{2}{3}$$

olacağından $(H_4^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Ancak her* $x \in H_d\,[-2,2,2]$ *için*

$$d(Tx,x) + |d(Tx,F_1) - d(Tx,F_2)| \leq 2a \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \leq 2 \Rightarrow \frac{5}{3} \leq 2$$

olacağından $(H_4^d 1)$ *koşulu sağlanır. Bu nedenle açıkça* $H_d\,[-2,2,2]$*,* T *nin sabit hiperbolü değildir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 5.12-5.15 ile alışılmış metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve $2a$ asal eksen uzunluklu $H_d\,[F_1,F_2,2a]$ hiperbolünü nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit hiperbollerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler alışılmış metrik uzayda birden fazla sabit hiperbole sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 5.3 *(X,d) bir metrik uzay ve $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ile $H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ (X,d) metrik uzayında iki hiperbol olsun. Bu takdirde $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbollerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X,d) metrik uzayında en az bir $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme ve d, X üzerinde bir metrik olmak üzere (X,d) bir metrik uzay olsun. $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ de $F_{11},\ F_{12}$ odaklı, $2a_1$ asal eksen uzunluklu ve $F_{21},\ F_{22}$ odaklı, $2a_2$ asal eksen uzunluklu olacak şekilde verilen iki hiperbol olsun. Ayrıca P noktası $|d(F_{11},P)-d(F_{12},P)|\neq 2a_1$ ve $|d(F_{21},P)-d(F_{22},P)|\neq 2a_2$ olacak şekilde (X,d) metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]\cup H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]\ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer hallerde}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2:X\longrightarrow[0,\infty)$ dönüşümleri her $x\in X$ için $\varphi_1(x)=|d(x,F_{11})-d(x,F_{12})|$ ve $\varphi_2(x)=|d(x,F_{21})-d(x,F_{22})|$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbolleri için $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (H_d^j1)ve (H_d^j2) koşullarını sağlar. O halde Teorem 6.1-6.4 gereğince açıkça $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbolleri T dönüşümünün sabit hiperbolleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_d\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbollerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili hiperboller tamamiyle keyfidir.

Önerme 5.4 *(X,d) bir metrik uzay ve $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$, ..., $H_d\left[F_{n1},F_{n2},2a_n\right]$ (X,d) metrik uzayında n tane hiperbol olsun. Bu takdirde $H_d\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$, ..., $H_d\left[F_{n1},F_{n2},2a_n\right]$ hiperbollerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X,d) metrik uzayında en az bir $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 5.3 ün ispatına benzer olarak $i=1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_d\left[F_{i1},F_{i2},2a_i\right]\ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x\in X$ için $\varphi_i(x)=|d(x,F_{i1})-d(x,F_{i2})|$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i:X\longrightarrow[0,\infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i=1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $|d(x,F_{i1})-d(x,F_{i2})|\neq 2a_i$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i\in\{1,...,n\}$ için $H_d\left[F_{i1},F_{i2},2a_i\right]$

hiperbollerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, d) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit hiperbole sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 5.16-5.21 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 5.16 (X, d) *bir metrik uzay ,* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $(H_1^d 1)$ *ve* $(H_1^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her* $x \in H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, $y \in X \setminus H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için* T *dönüşümü,*

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat (X, d) *bir metrik uzay,* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) *metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir hiperbol ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $y \in X \setminus H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *noktaları için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $d(Tx,\ Ty) \leq hd(x,\ y)$ *koşulunu sağlasın. Buna göre* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $H_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit hiperbolü olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $v \in H_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq h.d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolü* T *fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(H_1^d 1)$ve $(H_1^d 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^d 1)$ve $(H_i^d 2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 5.17 (X, d) *bir metrik uzay,* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, d) *bir metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğ u* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşü mü*

$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^d 1)$ve $(H_i^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y), d(Ty, x), d(Tx, y)\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.

İspat *(X, d) bir metrik uzay, $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir hiperbol ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için*

$$d(Tx,\ Ty) < \max\{d(x,\ y),\ d(Tx,\ x),\ d(Ty,\ y),\ d(Ty,\ x),\ d(Tx,\ y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $H_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ hiperbollerinin T dönüşümünün iki farklı sabit hiperbolü olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in H_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Tu, Tv) < \max\{d(u, v), d(Tu, u), d(Tv, v), d(Tv, u), d(Tu, v)\} \\ &= d(u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.

Teorem 5.18 *(X, d) bir metrik uzay, $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, d) bir metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğ u $2a$ olan bir hiperbol olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşü mü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^d 1)$ve $(H_i^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\,[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

koşulunu sağlıyorsa $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ hiperbol ü T dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.

İspat *Teorem 6.5 deki ispat yöntemine benzer şekilde $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $H_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ hiperbollerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in H_d\,[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda.\,[d(u, Tu) + d(v, Tv)] = \lambda.\,[d(u, u) + d(v, v)] = 0$$

elde edilir. Buna göre $d(u,\ v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $H_d\,[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.

Teorem 5.19 (X, d) *bir metrik uzay ,* $H_d [F_1, F_2, 2a]$, (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^d 1)$*ve* $(H_i^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

koşulunu sağlıyorsa $H_d [F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat *Teorem 6.5 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda. [d(u, Tv) + d(v, Tu)] = \lambda. [d(u, v) + d(v, u)] = 2\lambda d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $H_d [F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Teorem 5.20 (X, d) *bir metrik uzay,* $H_d [F_1, F_2, 2a]$, (X, d) *bir metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^d 1)$*ve* $(H_i^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \beta d(y, Ty) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $H_d [F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat *Teorem 6.5 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_d [F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_d [F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tu) + \beta d(v, Tv) + \gamma d(u, v) = \gamma d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $H_d [F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Teorem 5.21 (X, d) *bir metrik uzay ,* $H_d [F_1, F_2, 2a]$, (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü*

$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^d 1)$*ve* $(H_i^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $y \in X \setminus H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Ty) + \beta d(y, Tx) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbol ü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat *Teorem 6.5 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $H_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $v \in H_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tv) + \beta d(v, Tu) + \gamma d(u, v) = (\lambda + \beta + \gamma) d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolü* T *fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

5.3 Alışılmış Metrik Uzayda Sabit Cassini Eğrisi Teoremleri

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylarda Cassini eğrileri için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir Cassini eğrisini sabit bırakması yani sabit Cassini eğrisinin varolma koşulları ve sabit Cassini eğrisinin teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak alışılmış metrik uzayda Cassini eğrisi ve sabit Cassini eğrisi kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 5.5 (X, d) *bir metrik uzay,* $F_1,\ F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Buna göre*

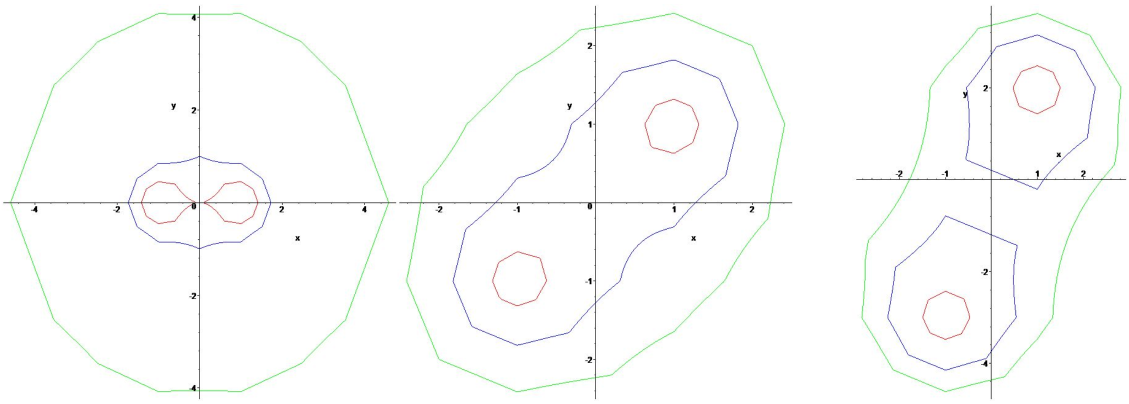
$$C_d\left[F_1, F_2, a^2\right] = \left\{x \in X : d(x, F_1).d(x, F_2) = a^2\right\}$$

ifadesine odakları $F_1,\ F_2$ *olan Cassini eğrisi denir.*

Örnek 5.31 *Alışılmış metrik uzaylarda metrik olarak aşina olduğumuz Öklidyen metriği kullanıldığında karşılılacak olan Cassini eğrisi kavramı oldukça iyi bilinen bir kavramdır. Ancak burada metrik yapısı Öklidyen metriğin dışına çıktığında karşılaşılacak olan Cassini eğrisi kavramı Öklidyen hale göre büyük farklılıklar daha doğrusu çeşitlik göstermektedir. Bu ise açıkca metrik uzayların zenginliğini ifade etmek için güzel bir veri oluşturmaktadır. Bu bağlamda,* $X = \mathbb{R}^2$ *olsun.* $X_1 = (x_1, y_1)\,,\ X_2 = (x_2, y_2) \in X$ *olmak üzere*

$$d\left(X_1, X_2\right) = \max\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\}$$

CC-metriği ele alınsın. Buna göre şekil 5.3 de yer alan grafiklerin herbirinde a parametresinin farklı değerleri için sırasıyla odakları $F_1 = (1,0)$, $F_2 = (-1,0)$ ve $a^2 = 1,2,20$ olan CC-Cassini eğrileri, odakları $F_1 = (1,1)$, $F_2 = (-1,-1)$ ve $a^2 = 1,3,6$ olan CC-Cassini eğrileri ve odakları $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (-1,-3)$ ve $a^2 = 3,8,12$ olan CC-Cassini eğrileri görülmektedir.



Şekil 5.3 $C_d\left[(1,0),(-1,0),a_1^2\right]$, $C_d\left[(1,1),(-1,-1),a_2^2\right]$, $C_d\left[(1,2),(-1,-3),a_3^2\right]$, $a_1^2 = 1,2,20$, $a_2^2 = 1,3,6$, $a_3^2 = 3,8,12$

Tanım 5.6 *(X,d) bir metrik uzay, $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ için $Tx = x$ ise $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ Cassini eğrisine T dönüşümünün sabit Cassini eğrisi denir.*

Teorem 5.22 *(X,d) bir metrik uzay, $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$, odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = d(x,F_1).d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ için
$(C_1^d 1)$ $\quad d(Tx,x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_1^d 2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$, (X,d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her*

$x \in X$ için $\varphi(x) = d(x,\ F_1).\ d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(C_1^d 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= d(x, F_1).d(x, F_2) - d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \\ &= a^2 - d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. T dönüşümü $(C_1^d 2)$ koşulunu sa ğladığından Tx noktası $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) > a^2$ ise yani Tx noktası Cassini eğrisinin dış ında ise (5.5) eşitsizliğinden dolayı çeli şki elde edilir. Dolayısıyla $d(Tx, F_1).\ d(Tx, F_2) = a^2$ olmalıdır. Aksi taktirde (5.5) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası Cassini eğrisinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $d(Tx,\ x) \leq a^2 - d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) = a^2 - a^2 = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşüm ü $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 5.32 *$X = \mathbb{R}$, d, $\mathbb{R}$ üzerinde standart metrik olsun. Ayrıca $(\mathbb{R},\ d)$ uzayında $C_d\left[-2, 2, 5\right]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_d\left[-2, 2, 5\right] \text{ ise} \\ 4, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. Bu durumda açıkça $C_d\left[-2, 2, 5\right]$=$\{-3, 3\}$ olduğu görülebilir. Üstelik her $x \in C_d\left[-2, 2, 5\right]$ için $(C_1^d 1)$ ve $(C_1^d 2)$ koşullarının sağlandığı kolaylıkla tespit edilir. Buna göre $C_d\left[-2, 2, 5\right]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Burada dikkat edilirse $C_d\left[-1, 2, 10\right]$ ve $C_d\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{33}{4}\right]$ Cassini eğrileri de T nin birer sabit Cassini eğrisidir. Ancak elbette ki tüm Cassini eğrileri T altında sabit kalmazlar. Örneğin $C_d\left[1, 3, 5\right]$ Cassini eğrisi T nin sabit Cassini eğrisi değildir.

Örnek 5.33 *$(\mathbb{R},\ d)$ alışılmış metrik uzayında $C_d\left[1, 4, 4\right]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$Tx = \begin{cases} 1, & x \in C_d\left[1, 4, 4\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Buna göre her $x \in C_d\left[1, 4, 4\right] = \{0,\ 5\}$ için açıkça $(C_1^d 1)$ koşulu sağlanırken

$$d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) = \left|1 - 1\right|.\left|1 - 4\right| = 0 \geq 4$$

olacağından dolayı $(C_1^d 2)$ *koşulu sağlanmaz. Bu takdirde* $C_d\,[1,4,4]$*,* T *nin bir sabit Cassini eğrisi değildir.*

Örnek 5.34 *Örnek 7.2 de ele alınan alışılmış metrik uzaydaki Cassini eğrisi ve*

$$Tx = \begin{cases} 6, & x \in C_d\,[1,4,4] \text{ ise} \\ 10, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu durumda her* $x \in C_d\,[1,4,4]$ *için açıkça*

$$d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) = |6-1|\,.\,|6-4| = 10 \geq 4$$

olacağından $(C_1^d 2)$ *koşulu sağlanır. Fakat her* $x \in C_d\,[1,4,4]$ *için*
$x = 0$ *ise* $d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow 6 \leq 4 - 10 = -6$
$x = 5$ *ise* $d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow 1 \leq 4 - 10 = -6$
olup $(C_1^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Doğal olarak* $C_d\,[1,4,4]$*,* T *altında invaryant değildir.*

Teorem 5.23 (X, d) *bir metrik uzay,* $C_d\,[F_1, F_2, a^2]$*,* (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = d(x, F_1).d(x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın.Bu takdirde T*:*$X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_d\,[F_1, F_2, a^2]$ *için,*
$(C_2^d 1)\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$
$(C_2^d 1)\quad \varphi(Tx) \leq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_d\,[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* d*,* X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $C_d\,[F_1, F_2, a^2]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = d(x,\ F_1).\ d(x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_d\,[F_1, F_2, a^2]$ *herhangi bir nokta olmak üzere.* $(C_2^d 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \\ &= d(x, F_1).d(x, F_2) + d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - 2a^2 \\ &= a^2 + d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - 2a^2 \\ &= d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - a^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir. $(C_2^d 1)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $C_d\,[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre* Tx *noktası Cassini* *eğrisinin içinde ise yani* $d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) < a^2$ *ise* (5.6) *eşitsizliği* $d(Tx,\ x) < 0$ *formuna dönüşür. Buna göre uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde* $d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) = a^2$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası Cassini eğrisinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,*

$$d(Tx,\ x) \leq d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) - a^2 = a^2 - a^2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı T dönüşümü* $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ *Cassini eğrisini sabit bırakır.*

Örnek 5.35 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzay olmak üzere bu uzayda* $C_d\left[-3, 3, 4\right]$ *Cassini eğrisi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_d\left[-3,3,4\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre basit işlemler ile* $C_d\left[-3, 3, 4\right] = \{-\sqrt{13},\ -\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ \sqrt{13}\}$ *olduğu bulunabilir. O halde açıkça her* $x \in C_d\left[-3, 3, 4\right]$ *için* $(C_2^d 1)$ *ve* $(C_2^d 2)$ *koşullarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla* $C_d\left[-3, 3, 4\right]$*,* T *nin bir sabit Cassini eğrisidir. Ancak biraz dikkat edilirse bu Cassini eğrisinin* T *nin tek sabit Cassini eğrisi olmadığı görülebilir. Örneğin* $C_d\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ *ve* $C_d\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right]$ *Cassini eğrileri de* T *altında invaryanttır. Bu noktada uzaydaki tüm Cassini eğrilerinin* T *altında invaryant kalmadığı da belirtilmelidir. Açıkça* $C_d\left[-2, 2, 5\right]$ *Cassini eğrisi,* T *nin sabit Cassini eğrisi değildir.*

Örnek 5.36 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzay olmak üzere bu uzayda* $C_d\left[-2, 3, 6\right]$ *Cassini eğrisi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 5x$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Basit hesaplamalarla* $C_d\left[-2, 3, 6\right] = \{-3, 0, 1, 4\}$ *olduğu tespit edilir. Buna göre her* $x \in C_d\left[-2, 3, 6\right]$ *için* $(C_2^d 1)$ *koşulunun sağlandığı kolaylıkla görülürken, her* $x \in C_d\left[-2, 3, 6\right]$ *için*

$$d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \leq a^2 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ ise} & 13.18 \leq 6 \\ x = 0 \text{ ise} & 6 \leq 6 \\ x = 1 \text{ ise} & 14 \leq 6 \\ x = 4 \text{ ise} & 22.17 \leq 6 \end{cases}$$

olup açıkça $(C_2^d 2)$ *koşulu sağlanmaz. Doğal olarak* $C_d\left[-2, 3, 6\right]$*,* T *nin sabit Cassini eğrisi değildir.*

Örnek 5.37 *Alışılmış metrik uzayda* $C_d\left[-2, 3, 6\right]$ *Cassini eğrisi ve* $Tx = -\frac{x}{2}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Bu durumda her* $x \in C_d\left[-2, 3, 6\right] = \{-3, 0, 1, 4\}$ *için* $(C_2^d 2)$

koşulu sağlanırken, $x = -3$ *için*

$$d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \Rightarrow \frac{9}{2} \leq 6 + \frac{21}{4} - 12 \Rightarrow \frac{9}{2} \leq -\frac{3}{4}$$

olduğundan $(C_2^d 1)$ *koşulu açıkça sağlanmaz. Nihayetinde* $C_d[-2, 3, 6]$, T *nin sabit Cassini eğrisi değildir.*

Teorem 5.24 (X, d) *bir metrik uzay ,* $C_d[F_1, F_2, a^2]$, (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = d(x, F_1).d(x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_d[F_1, F_2, a^2]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için*

$(C_3^d 1)$ $\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(C_3^d 2)$ $\quad h.d(Tx, x) + \varphi(Tx) \geq a^2$

koşullarını sağlıyorsa $C_d[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* d, X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $C_d[F_1, F_2, a^2]$, (X, d) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = d(x,\ F_1).\ d(x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_d[F_1, F_2, a^2]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* T *dönüşümü* $(C_3^d 1)$ *koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak,* φ *fonksiyonunun tanımı ve* $(C_3^d 2)$ *koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
d(Tx, x) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= d(x, F_1).d(x, F_2) - d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \\
&= a^2 - d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \\
&\leq h.d(Tx, x) + d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \\
&= h.d(Tx, x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h - 1)d(Tx,\ x) \geq 0$ *bulunur. Bu durumda* $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan dolayı* $d(Tx,\ x) = 0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx = x$ *olur. Yani her* $x \in C_d[F_1, F_2, a^2]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $C_d[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi sabit bırakır.*

Örnek 5.38 $\mathbb{R}$ *üzerinde alışılmış metrik* d *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ d)$ *metrik uzayında* $C_d[-1, 1, 1]$ *Cassini eğrisi ve*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_d[-1, 1, 1] \text{ ise} \\ 5, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Buna göre kolaylıkla hesaplanabilir ki* $C_d\,[-1,1,1] = \{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\}$ *dir. Ayrıca her* $x \in C_d\,[-1,1,1]$ *için* $(C_3^d 1)$ *ve* $(C_3^d 2)$ *koşulları açıkça sağlanır. Yani* $C_d\,[-1,1,1]$ *Cassini eğrisi* T *altında invaryanttır. Bunun yanı sıra* $C_d\left[-\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{23}{2}\right]$, $C_d\left[\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}, \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}, 2\right]$ *ve* $\left[\frac{5+\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$ *Cassini eğrileri de* T *altında invaryanttır. Ancak tüm Cassini eğrilerinin* T *altında invaryant olmadığı da belirtilmelidir. Örneğin* $C_d\,[1,4,3]$, T *nin sabit Cassini eğrisi değildir.*

Örnek 5.39 $(\mathbb{R},\ d)$ *metrik uzayında* $C_d\,[1,4,4]$ *Cassini eğrisi ve* $Tx = -\frac{x}{5}$ *olacak şekilde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. O halde açıkça her* $x \in C_d\,[1,4,4] = \{0,\ 5\}$ *için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*

$$h.d(x,Tx) + d(Tx,F_1).d(Tx,F_2) \geq a^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow h.0 + 4 \geq 4 \\ x = 5 \Rightarrow h.6 + 10 \geq 4 \end{cases}$$

elde edildiğinden $(C_3^d 2)$ *koşulu sağlanırken,* $x = 5$ *için*

$$d(Tx,x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow 6 \leq 4 - 10 \Rightarrow 6 \leq -6$$

olduğundan $(C_3^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Doğal olarak,* $C_d\,[1,4,4]$, T *nin sabit Cassini eğrisi değildir.*

Örnek 5.40 $(\mathbb{R},\ d)$ *metrik uzayında* $C_d\,[1,4,4]$ *Cassini eğrisi ve* $Tx = \frac{4}{5}x$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü verilsin. Bu takdirde her* $x \in C_d\,[1,4,4] = \{0,\ 5\}$ *için*

$$d(Tx,x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0 \leq 4 - 4 \Rightarrow 0 \leq 0 \\ x = 5 \Rightarrow 1 \leq 4 - 0 \Rightarrow 1 \leq 0 \end{cases}$$

olacağından $(C_3^d 1)$ *koşulu sağlanır. Fakat* $x = 5$ *i çin* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*

$$h.d(x,Tx) + d(Tx,F_1).d(Tx,F_2) \geq a^2 \Rightarrow h.1 + 0 \geq 4$$

elde edileceğinden dolayı açıkça $(C_3^d 2)$ *koşulu sağlanmaz. Elbette bunun sonucu olarak* $C_d\,[1,4,4]$, T *nin sabit Cassini eğrisi değildir.*

Teorem 5.25 (X,d) *bir metrik uzay,* $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$, (X,d) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = d(x,F_1).d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ *için,*

$(C_4^d 1)$ $\quad d(Tx,x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$

$(C_4^d 2)$ $\quad d(Tx,x) + \varphi(Tx) \leq a^2$

koşullarını sağlıyorsa $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.*

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, d) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = d(x,\ F_1).\ d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(C_4^d 1)$ koşulundan ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince*

$$
\begin{aligned}
d(Tx, x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \\
&= d(x, F_1).d(x, F_2) + d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - 2a^2 \\
&= d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - a^2 \\
&\leq a^2 - d(Tx, x) - a^2 \\
&= -d(Tx, x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2d(Tx,\ x) \leq 0$ bulunur. Bu durumda d bir metrik olduğundan dolayı $d(Tx,\ x) = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için $Tx = x$ olduğundan T dönüşümü $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 5.41 *$(\mathbb{R},\ d)$ alışılmış metrik uzayında $C_d\left[2, 5, 2\right]$ Cassini eğrisi ve*

$$
Tx = \begin{cases} x, & x \in C_d\left[2, 5, 2\right] \text{ ise} \\ \frac{7}{2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
$$

olacak şekilde tanımlanmış $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda açıkça her $x \in C_d\left[2, 5, 2\right] = \left\{\frac{7-\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}, 3, 4\right\}$ için $(C_4^d 1)$ ve $(C_4^d 2)$ koşulları sağlanır. Doğal olarak $C_d\left[2, 5, 2\right]$, T nin bir sabit Cassini eğrisidir. Bunun yanı sıra biraz dikkatli bir hesaplama ile $C_d\left[\frac{14-\sqrt{2}}{4}, \frac{14+\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{8}\right]$ ve $C_d\left[\frac{14-\sqrt{34}}{4}, \frac{14+\sqrt{34}}{4}, \frac{17}{8}\right]$ Cassini eğrileri de T dönüşümü altında invaryanttırlar. Yani dönüşümün sabit bıraktığı Cassini eğrisi tek değildir. Fakat uzaydaki tüm Cassini eğrileri de T altında invaryant kalmaz. Örneğin $C_d\left[-3, 3, 4\right]$ Cassini eğrisi T nin sabit Cassini eğrisi değildir.

Örnek 5.42 *$(\mathbb{R},\ d)$ alışılmış metrik uzayında $C_d\left[1, 4, 4\right]$ Cassini eğrisi ve*

$$
Tx = \begin{cases} -x, & x \in C_d\left[1, 4, 4\right] \text{ ise} \\ 7, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}
$$

şeklinde tanımlanmış $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. Buna göre $C_d\left[1, 4, 4\right] = \{0,\ 5\}$ olup her $x \in C_d\left[1, 4, 4\right]$ için $(C_4^d 1)$ koşulu sağlanır. Ancak $5 \in C_d\left[1, 4, 4\right]$ olup $x = 5$ için

$$
d(x, Tx) + d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) \leq a^2 \Rightarrow 10 + 6.9 = 64 \leq 4
$$

bulunacağından $(C_4^d 2)$ koşulu sağlanmaz. Doğal olarak T dönüşümü $C_d\left[1, 4, 4\right]$ Cassini eğrisini sabit bırakmaz.

Örnek 5.43 $(\mathbb{R},\ d)$ *alışılmış metrik uzayında* $C_d\,[1,4,4]$ *Cassini eğrisi ve*

$$Tx = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ ise} \\ 4, & x = 5 \text{ ise} \\ 7, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Bu takdirde kolaylıkla her* $x \in C_d\,[1,4,4] = \{0,\ 5\}$ *için* $d(x,\ Tx) = 1$ *ve* $d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) = 0$ *olacağından*

$$d(x,Tx) + d(Tx,F_1).d(Tx,F_2) \leq a^2 \Rightarrow 1 + 0 \leq 4$$

bulunur. Yani $(C_4^d 2)$ *koşulu sağlanır. Ancak her* $x \in C_d\,[1,4,4]$ *için*

$$d(x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \Rightarrow 1 \leq 4 + 0 - 8 \Rightarrow 1 \leq -4$$

olacağından açıkça $(C_4^d 1)$ *koşulu sağlanmaz. Üstelik doğal olarak* $C_d\,[1,4,4]$*,* T *nin bir sabit Cassini eğrisi değildir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 5.22-5.25 ile alışılmış metrik uzayda F_1, F_2 odaklı $C_d\,[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit Cassini eğrilerinin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler alışılmış metrik uzayda birden fazla sabit Cassini eğrisine sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 5.5 (X,d) *bir metrik uzay ve* $C_d\,[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ *ile* $C_d\,[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ (X,d) *metrik uzayında iki Cassini eğrisi olsun. Bu takdirde* $C_d\,[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ *ile* $C_d\,[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ *Cassini eğrilerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X,d) *metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme ve* d*,* X *üzerinde bir metrik olmak üzere* (X,d) *bir metrik uzay olsun.* $C_d\,[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ *ve* $C_d\,[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ *de* $F_{11},\ F_{12}$ *odaklı ve* $F_{21},\ F_{22}$ *odaklı iki Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* P *noktası* $d(F_{11},\ P)d(F_{12},\ P) \neq a_1^2$ *ve* $d(F_{21},\ P)d(F_{22},\ P) \neq a_2^2$ *olacak şekilde* (X,d) *metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_d\,[F_{11}, F_{12}, a_1^2] \cup C_d\,[F_{21}, F_{22}, a_2^2] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüşümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_1(x) = d(x,\ F_{11}).\ d(x,\ F_{12})$ *ve* $\varphi_2(x) = d(x,\ F_{21}).\ d(x,\ F_{22})$ *olacak şekilde alınsın.*

Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $C_d\left[F_{11}, F_{12}, a_1^2\right]$ ve $C_d\left[F_{21}, F_{22}, a_2^2\right]$ Cassini eğrileri için $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_d^j 1)$ve $(C_d^j 2)$ koşullarını sağlar. O halde Teorem 5.22-5.25 gereğince açıkça $C_d\left[F_{11}, F_{12}, a_1^2\right]$ ve $C_d\left[F_{21}, F_{22}, a_2^2\right]$ Cassini eğrileri T dönüşümünün sabit Cassini eğrileridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $C_d\left[F_{11}, F_{12}, a_1^2\right]$ ve $C_d\left[F_{21}, F_{22}, a_2^2\right]$ Cassini eğrilerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili Cassini eğrileri tamamiyle keyfidir.

Önerme 5.6 *(X, d) bir metrik uzay ve $C_d\left[F_{11}, F_{12}, a_1^2\right],\ ...,\ C_d\left[F_{n1}, F_{n2}, a_n^2\right]$ (X, d) metrik uzayında n tane Cassini eğrisi olsun. Bu takdirde $C_d\left[F_{11}, F_{12}, a_1^2\right],\ ...,\ C_d\left[F_{n1}, F_{n2}, a_n^2\right]$ Cassini eğrilerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, d) metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 5.5 in ispatına benzer olarak $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_d\left[F_{i1}, F_{i2}, a_i^2\right] \ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = d(x,\ F_{i1}).\ d(x,\ F_{i2})$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $d(x,\ F_{i1}).\ d(x,\ F_{i2}) \neq a_i^2$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $C_d\left[F_{i1}, F_{i2}, a_i^2\right]$ Cassini eğrilerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, d) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit Cassini eğrisine sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 5.26-5.31 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 5.26 *(X, d) bir metrik uzay , $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, d) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^d 1)$ ve $(C_1^d 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$, $y \in X \setminus C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,*

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *(X,d) bir metrik uzay, $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $T:X\longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x\in C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ ve $y\in X\setminus C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ noktaları için $h\in[0,\ 1)$ olmak üzere $d(Tx,\ Ty)\le hd(x,\ y)$ koşulunu sağlasın. Buna göre $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ ve $C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümünün iki farklı sabit Cassini eğrisi olduğu varsayılsın. $u\neq v$ olmak üzere $u\in C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ ve $v\in C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$d(u,v)=d(Tu,Tv)\le h.d(u,v)$$

elde edilir. Ancak $h\in[0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u=v$ olmalıdır. Bu takdirde $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü (C_1^d1)ve (C_1^d2) koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_i^d1)ve (C_i^d2) olarak değiştirilebilir.

Teorem 5.27 *(X,d) bir metrik uzay , $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$, (X,d) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_i^d1)ve (C_i^d2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x\in C_d\,[F_1,F_2,a^2]$, $y\in X\setminus C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ noktaları için*

$$d(Tx,Ty)<\max\{d(x,y),d(Tx,x),d(Ty,y),d(Ty,x),d(Tx,y)\}$$

koşulunu sağlıyorsa $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *(X,d) bir metrik uzay, $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $T:X\longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x\in C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ ve $y\in X\setminus C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ noktaları için*

$$d(Tx,\ Ty)<\max\{d(x,\ y),\ d(Tx,\ x),\ d(Ty,\ y),\ d(Ty,\ x),\ d(Tx,\ y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ ve $C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümünün iki farklı sabit Cassini eğrisi olduğu varsayılsın. $u\neq v$ olmak üzere $u\in C_d\,[F_1,F_2,a^2]$ ve $v\in C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Tv) \\ &< \max\{d(u,v),d(Tu,u),d(Tv,v),d(Tv,u),d(Tu,v)\} \\ &= d(u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 5.28 *(X, d) bir metrik uzay, $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_i^d1)ve (C_i^d2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $y \in X\backslash C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 5.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $C_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $v \in C_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda.\left[d(u, Tu) + d(v, Tv)\right] = \lambda.\left[d(u, u) + d(v, v)\right] = 0$$

elde edilir. Buna göre $d(u,\ v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 5.29 *(X, d) bir metrik uzay, $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_i^d1)ve (C_i^d2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $y \in X\backslash C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 5.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $C_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $v \in C_d\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda.\left[d(u, Tv) + d(v, Tu)\right] = \lambda.\left[d(u, v) + d(v, u)\right] = 2\lambda d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 5.30 (X,d) *bir metrik uzay,* $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$*,* (X,d) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* (C_i^d1)*ve* (C_i^d2) *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $y \in X\backslash C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $\lambda+\beta+\gamma<1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,Tx) + \beta d(y,Ty) + \gamma d(x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

İspat *Teorem 5.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $v \in C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \le \alpha d(u,Tu) + \beta d(v,Tv) + \gamma d(u,v) = \gamma d(u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda+\beta+\gamma<1$ *olduğundan açıkça* $\gamma<1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

Teorem 5.31 (X,d) *bir metrik uzay,* $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$*,* (X,d) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* (C_i^d1)*ve* (C_i^d2) *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $y \in X \setminus C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $\lambda+\beta+\gamma<1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,Ty) + \beta d(y,Tx) + \gamma d(x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

İspat *Teorem 5.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *ve* $v \in C_d\left[F_{1^*},F_{2^*},a^{*^2}\right]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \le \alpha d(u,Tv) + \beta d(v,Tu) + \gamma d(u,v) = (\lambda+\beta+\gamma)d(u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda+\beta+\gamma<1$ *olduğundan bu bir çeli şkidir. O halde* $C_d\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

5.4 Alışılmış Metrik Uzayda Sabit Apollonius Çemberi Teoremleri

Bu kısımda alışılmış metrik uzaylarda iki odaklı Apollonius çemberleri için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir Apollonius çemberini sabit bırakması yani sabit Apollonius çemberin varolma koşulları ve sabit Apollonius çemberinin teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak alışılmış metrik uzaylarda iki odaklı Apollonius çemberi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 5.7 (X, d) *bir metrik uzay olsun. Bu takdirde* F_1, $F_2 \in X$ *ve* $a \in (0, \infty)$ *olmak üzere,*

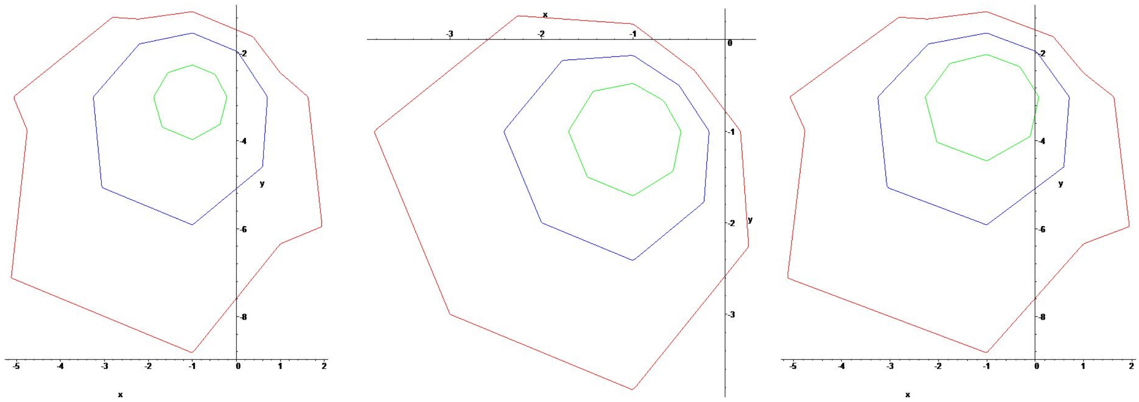
$$\{x \in X : d(x, F_1)/d(x, F_2) = a\}$$

ifadesine F_1, F_2 *odaklı,* a *oranlı Apollonius çemberi adı verilir ve* $A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ *ile gösterilir.*

Örnek 5.44 *Alışılmış metrik uzaylarda metrik olarak aşina olduğumuz Öklidyen metriği kullanıldığında karşılılacak olan Apollonius çemberi kavramı oldukça iyi bilinen bir kavramdır. Ancak burada metrik yapısı Öklidyen metriğin dışına çıktığında karşılaşılacak olan Apollonius çemberi kavramı Öklidyen hale göre büyük farklılıklar daha doğrusu çeşitlik göstermektedir. Bu ise açıkca metrik uzayların zenginliğini ifade etmek için güzel bir veri oluşturmaktadır. Bu taktirde,* $X = \mathbb{R}^2$ *olsun.* $X_1 = (x_1, y_1)\,,\ X_2 = (x_2, y_2) \in X$ *olmak üzere*

$$d\left(X_1, X_2\right) = \max\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\}$$

CC-metriği ele alınsın. Buna göre şekil 5.4 deki grafiklerin herbirinde a *oranın farklı değerleri için sırasıyla odakları* $F_1 = (1, 0)\,,\ F_2 = (-1, 0)$ *ve* $a = 2, 3, 7$ *olan CC-Apollonius çemberleri, odakları* $F_1 = (1, 1)\,,\ F_2 = (-1, -1)$ *ve* $a = 2, 3, 5$ *olan CC-Apollonius çemberleri ve odakları* $F_1 = (1, 2)\,,\ F_2 = (-1, -3)$ *ve* $a = 2, 3, 5$ *olan CC-Apollonius çemberleri görülmektedir.*



Şekil 5.4 $A_d\left[(1,0),(-1,0),a_1\right]$, $A_d\left[(1,1),(-1,-1),a_2\right]$, $A_d\left[(1,2),(-1,-3),a_3\right]$,
$a_1=2,3,7$, $a_2=2,3,5$, $a_3=2,3,5$

Tanım 5.8 *(X,d) bir metrik uzay, $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T:X\longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x\in A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ için $Tx=x$ ise $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberine T dönüşümünün sabit Apollonius çemberi denir.*

Teorem 5.32 *(X,d) bir metrik uzay, $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$, odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=d(x,F_1)/d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ için
(A_1^d1) $\quad d(Tx,x)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$
(A_1^d2) $\quad \varphi(Tx)\geq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için $\varphi(x)=d(x,\ F_1)/d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x\in A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere (A_1^d1) koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} d(Tx,x) &\leq \varphi(x)-\varphi(Tx) \\ &= d(x,F_1)/d(x,F_2)-d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) \\ &= a-d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. T dönüşümü $(A_1^d 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $d(Tx,\ F_1)/d(Tx,\ F_2) > a$ ise yani Tx noktası Apollonius çemberinin dışında ise (5.7) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Dolayısıyla $d(Tx,\ F_1)/d(Tx,\ F_2) = a$ olmalıdır. Aksi taktirde (5.7) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası Apollonius çemberinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $d(Tx,\ x) \leq a - d(Tx,\ F_1).\ d(Tx,\ F_2) = a - a = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 5.45 *(R, d) alışılmış metrik uzayında $A_d\left[1, 3, 5\right]$ Apollonius çemberi ve*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_d\left[1, 3, 5\right] \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. Bu takdirde açıkça her $x \in A_d\left[1, 3, 5\right] = \left\{\frac{16}{6}, \frac{14}{4}\right\}$ için $(A_1^d 1)$ ve $(A_1^d 2)$ koşulları sağ landığından $A_d\left[1, 3, 5\right]$, T nin bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak bu noktada $A_d\left[6, \frac{22}{7}, 7\right]$, $A_d\left[3, 5, 3\right]$, $A_d\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3\right]$, $A_d\left[\frac{19}{8}, 5, 8\right]$ ve $A_d\left[1, \frac{9}{4}, 4\right]$ Apollonius çemberleri de T altında invaryanttır. Ayrıca bu örneklerin sayısı daha da çoğaltılabilir. Fakat bu ifadeden her Apollonius çemberinin T için sabit olacağı anlaşılmamalıdır. Örneğin $A_d\left[0, 2, 4\right]$, $A_d\left[-2, 3, 7\right]$ ve $A_d\left[3, 6, 2\right]$ Apollonius çemberleri de T nin altında invaryant değillerdir.

Örnek 5.46 *$(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzayında $A_d\left[-8, 4, 3\right]$ Apollonius çemberi ve $Tx = \frac{x+5}{2}$ şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. Bu durumda her $x \in A_d\left[-8, 4, 3\right] = \{1, 10\}$ için açıkça*

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow 2 \leq 3 - 11 \\ x &= 10 \Rightarrow d(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \Rightarrow \frac{5}{2} \leq 3 - \frac{31}{7} \end{aligned}$$

olduğundan $(A_1^d 1)$ koşulu sağlanmaz iken

$$\begin{aligned} x &= 1 \text{ iken } \frac{d(Tx, F_1)}{d(Tx, F_2)} = \frac{3+8}{1} = 11 \geq 3 \\ x &= 10 \text{ iken } \frac{d(Tx, F_1)}{d(Tx, F_2)} = \frac{\frac{15}{2} + 8}{4 - \frac{15}{2}} = \frac{31}{7} \geq 3 \end{aligned}$$

olduğundan $(A_1^d 2)$ koşulu sağlanır. Ancak $A_d\left[-8, 4, 3\right]$, T nin bir sabit Apollonius çemberi değildir.

Örnek 5.47 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\,[-8, 4, 3]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = \frac{118x-10}{117}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu durumda her* $x \in A_d\,[-8, 4, 3] = \{1, 10\}$ *için açıkça* $(A_1^d 1)$ *koşulu*

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \text{ iken } \frac{1}{13} \leq 3 - \frac{29}{10} \Rightarrow \frac{1}{13} \leq \frac{1}{10} \\
x &= 10 \text{ iken } 0 \leq 3 - 3 \Rightarrow 0 \leq 0
\end{aligned}
$$

olup sağlanır. Fakat her $x \in A_d\,[-8, 4, 3]$ *için* $(A_1^d 2)$ *koşulu*

$$x = 1 \text{ iken } \frac{\left|\frac{12}{13} + 8\right|}{\left|\frac{12}{13} - 4\right|} = \frac{29}{10} < 3$$

olduğundan sağlanmaz. Dolayısıyla $A_d\,[-8, 4, 3]$*,* T *nin bir sabit Apollonius çemberi değildir.*

Teorem 5.33 (X, d) *bir metrik uzay,* $A_d\,[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = d(x, F_1)/d(x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_d\,[F_1, F_2, a]$ *için,*

$(A_2^d 1)$ $\quad d(Tx, x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$

$(A_2^d 2)$ $\quad \varphi(Tx) \leq a$

koşullarını sağlıyorsa $A_d\,[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme, d,* X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $A_d\,[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = d(x,\ F_1).\ d(x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *d önüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in A_d\,[F_1, F_2, a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere.* $(A_2^d 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$
\begin{aligned}
d(Tx, x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a \\
&= d(x, F_1)/d(x, F_2) + d(Tx, F_1)/d(Tx, F_2) - 2a \\
&= a + d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - 2a \\
&= d(Tx, F_1).d(Tx, F_2) - a \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(A_2^d 1)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $A_d\,[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre* Tx *noktası Apollonius çemberinin içinde ise yani* $d(Tx,\ F_1)/d(Tx,\ F_2) < a$ *ise* (5.8) *eşitsizliği* $d(Tx,\ x) < 0$ *formuna dönüşür. Ancak bu durumda uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde* $d(Tx,\ F_1)/d(Tx,\ F_2) = a$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası Apollonius çemberinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,* $d(Tx,\ x) \leq d(Tx,\ F_1)/d(Tx,\ F_2) - a = a - a = 0$ *elde edilir. Bu durumda* $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ *iç in* $Tx = x$ *olduğundan dolayı T dönüşümü* $A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ *Apollonius çemberini sabit bırakır.*

Örnek 5.48 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\left[-1, 1, 2\right]$ *Apollonius çemberi ve*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_d\left[-1, 1, 2\right] \text{ ise} \\ 5, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x \in A_d\left[-1, 1, 2\right] = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$ *için* (A_2^d1) *ve* (A_2^d2) *koşulları sağlanır. Bu durumda* $A_d\left[-1, 1, 2\right]$*, T nin bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak biraz dikkatle bakıldığında* $A_d\left[-\frac{13}{3}, \frac{17}{9}, 3\right]$, $A_d\left[-\frac{20}{3}, \frac{25}{12}, 4\right]$, $A_d\left[2, \frac{7}{2}, 2\right]$ *ve* $A_d\left[-1, \frac{19}{5}, 5\right]$ *Apollonius çemberlerinin de* T *altında invaryant kaldığı görülebilir. Ancak bu durum tüm Apollonius çemberlerinin* T *altında sabit kalacağı anlamına gelmez. Örneğin* $A_d\left[1, 3, \frac{1}{3}\right]$ *ve* $A_d\left[-2, 2, 1\right]$*,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 5.49 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\left[1, 4, 2\right]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = \frac{x+5}{4}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\left[1, 4, 2\right] = \{3,\ 7\}$ *için açıkça* (A_2^d1) *koşulu*

$$x = 3 \text{ için } 1 \leq 2 + \frac{1}{2} - 4 \Rightarrow 1 \leq -\frac{3}{2}$$

olacağından sağlanmaz iken (A_2^d2) *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ için } \frac{|2-1|}{|2-4|} = \frac{1}{2} \leq 2 \\ x &= 7 \text{ için } \frac{|3-1|}{|3-4|} = 2 \leq 2 \end{aligned}$$

olacağından sağlanır. Doğal olarak $A_d\left[1, 4, 2\right]$*,* T *nin bir sabit Apollonius çemberi değildir.*

Örnek 5.50 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\left[1, 4, 2\right]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = \frac{7x+59}{24}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\left[1, 4, 2\right] = \{3,\ 7\}$ *için kolaylıkla* (A_2^d1) *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ için } \left|\frac{10}{3} - 3\right| \leq 2 + \frac{7}{2} - 4 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3}{2} \\ x &= 7 \text{ için } \left|\frac{9}{2} - 7\right| \leq 2 + 7 - 4 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq 5 \end{aligned}$$

olup sağlanırken $(A_2^d 2)$ *koşulu açıkça*

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ için } \frac{\left|\frac{10}{3}-1\right|}{\left|4-\frac{10}{3}\right|}=\frac{7}{2}\leq 2 \\ x &= 7 \text{ için } \frac{\left|\frac{9}{2}-1\right|}{\left|\frac{9}{2}-4\right|}=7\leq 2 \end{aligned}$$

bulunacağından sağlanmaz. Dolayısıyla $A_d\,[1,4,2]$*,* T *nin bir sabit Apollonius çember değildir.*

Teorem 5.34 *(X,d) bir metrik uzay , $A_d\,[F_1,F_2,a]$, (X,d) metrik uzayında odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=d(x,F_1)/d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in A_d\,[F_1,F_2,a]$ ve bazı $h\in[0,\ 1)$ için

$(A_3^d 1)$ $\quad d(Tx,x)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$

$(A_3^d 2)$ $\quad h.d(Tx,x)+\varphi(Tx)\geq a$

koşullarını sağlıyorsa $A_d\,[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme, d, X üzerinde bir alışılmış metrik olsun. $A_d\,[F_1,F_2,a]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için $\varphi(x)=d(x,\ F_1)/d(x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x\in A_d\,[F_1,F_2,a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. T dönüşümü $(A_3^d 1)$ koşulu sağlandığından bu ko şuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(A_3^d 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} d(Tx,x) &\leq \varphi(x)-\varphi(Tx) \\ &= d(x,F_1)/d(x,F_2)-d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) \\ &= a-d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) \\ &\leq h.d(Tx,x)+d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2)-d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) \\ &= h.d(Tx,x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)d(Tx,\ x)\geq 0$ bulunur. Bu durumda $h\in[0,\ 1)$ olduğundan dolayı $d(Tx,\ x)=0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx=x$ olur. Yani her $x\in A_d\,[F_1,F_2,a]$ için $Tx=x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_d\,[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 5.51 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\,[0,4,3]$ *Apollonius çemberi ve*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_d\,[0,4,3] \text{ ise} \\ 9, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\,[0,4,3] = \{3,\ 6\}$ *için* $(A_3^d 1)$ *ve* $(A_3^d 2)$ *koş ulları sağlanır. Bu durumda* $A_d\,[0,4,3]$, T *nin bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak biraz dikkatle bakıldığında* $A_d\left[0, \frac{9}{2}, 2\right]$, $A_d\,[-3,5,3]$, $A_d\left[\frac{3}{2}, \frac{57}{8}, 4\right]$ *ve* $A_d\left[\frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 2\right]$ *Apollonius çemberlerinin de* T *altında invaryant kaldığı görülebilir. Ancak bu durum tüm Apollonius çemberlerinin* T *altında sabit kalacağı anlamına gelmez. Örneğin* $A_d\,[-1,1,2]$ *ve* $A_d\,[1,4,2]$, T *altında invaryant değildir.*

Örnek 5.52 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\,[0,4,3]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = x + \frac{1}{2}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\,[0,4,3] = \{3,\ 6\}$ *için* $(A_3^d 1)$ *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ için } \frac{1}{2} \leq 3 - 7 = -4 \\ x &= 6 \text{ için } \frac{1}{2} \leq 3 - \frac{13}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

olup sağlanmaz iken $(A_3^d 2)$ *koşulu* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} x &= 3 \text{ için } h.\frac{1}{2} + 7 \geq 2 \\ x &= 6 \text{ için } h.\frac{1}{2} + \frac{13}{5} \geq 2 \end{aligned}$$

olacağından sağlanır. Doğal olarak $A_d\,[0,4,3]$, T *nin sabit Apollonius çemberi değildir.*

Örnek 5.53 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\,[1,5,3]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = \frac{8}{7}x - 1$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\,[1,5,3] = \{4,\ 7\}$ *için* $(A_3^d 1)$ *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= 4 \text{ için } 4 - \frac{25}{7} \leq 3 - \frac{18}{10} \Rightarrow \frac{3}{7} \leq \frac{12}{10} \\ x &= 6 \text{ için } 7 - 7 \leq 3 - 3 \Rightarrow 0 \leq 0 \end{aligned}$$

olup sağlanırken $(A_3^d 2)$ *koşulu* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*

$$x = 4 \text{ için } h.\frac{3}{7} + \frac{18}{10} \geq 3$$

olacağından açıkça sağlanmaz. Doğal olarak $A_d\,[1,5,3]$, T *nin sabit Apollonius çemberi değildir.*

Teorem 5.35 (X,d) *bir metrik uzay ,* $A_d\,[F_1,F_2,a]$*,* F_1 *ve* F_2 *odaklı,* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = d(x,F_1)/d(x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_d\,[F_1,F_2,a]$ *için*
$(A_4^d 1)$ $\quad d(Tx,x) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$
$(A_4^d 2)$ $\quad d(Tx,x) + \varphi(Tx) \leq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_d\,[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* d*,* X *üzerinde bir alışılmış metrik olsun.* $A_d\,[F_1,F_2,a]$*,* (X,d) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı,* a *oranlı bir Apollonius çemberi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = d(x,\ F_1)/d(x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in A_d\,[F_1,F_2,a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* $(A_4^d 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımı ve*$(A_4^d 2)$ *koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
d(Tx,x) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a \\
&= d(x,F_1)/d(x,F_2) + d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) - 2a \\
&= d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) - a \\
&\leq d(Tx,F_1)/d(Tx,F_2) - (d(Tx,x) + \varphi(Tx)) \\
&= \varphi(Tx) - d(Tx,x) - \varphi(Tx) \\
&= -d(Tx,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2d(Tx,\ x) \leq 0$ *bulunur. Bu durumda* d *bir metrik olduğundan dolayı* $d(Tx,\ x) = 0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx = x$ *olur. Yani her* $x \in A_d\,[F_1,F_2,a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $A_d\,[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberini sabit bırakır.*

Örnek 5.54 $(\mathbb{R},d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\,[-2,3,2]$ *Apollonius çemberi ve*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_d\,[-2,3,2] \text{ ise} \\ 4, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\,[-2,3,2] = \left\{\frac{4}{3}, 8\right\}$ *için* $(A_4^d 1)$ *ve* $(A_4^d 2)$ *koşulları sağlanır. O halde* $A_d\,[-2,3,2]$*,* T *nin bir sabit Apollonius çemberidir. Biraz dikkatli hesaplamalar yardımıyla* $A_d\left[\frac{20}{3},\frac{28}{9},3\right]$, $A_d\left[-\frac{4}{3},\frac{20}{9},3\right]$, $A_d\left[-4,\frac{12}{5},5\right]$, $A_d\,[10,7,2]$ *ve* $A_d\,[2,5,2]$ *Apollonius çemberlerinin de* T *dönüşümü altında invaryant kaldığı görülür. Ancak bu tüm Apollonius çemberlerinin* T *altında sabit olduğu anlamına gelmez. Örneğin* $A_d\,[-1,1,2]$ *ve* $A_d\,[3,5,6]$*,* T *altında invaryant değillerdir.*

Örnek 5.55 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d[-1, 3, 2]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = \frac{x+16}{7}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d[-1, 3, 2] = \left\{\frac{5}{3}, 7\right\}$ *için* $(A_4^d 1)$ *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{3} \text{ için } \frac{6}{7} \leq 3 + \frac{74}{10} - 4 = \frac{64}{10} \\ x &= 7 \text{ için } \frac{26}{7} \leq 3 + 15 - 4 = 14 \end{aligned}$$

olup sağlanırken $(A_4^d 2)$ *koşulu basitçe*

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{3} \text{ için } \frac{6}{7} + \frac{74}{10} \leq 2 \\ x &= 7 \text{ için } \frac{26}{7} + 15 \leq 2 \end{aligned}$$

olacağından sağlanmaz. Bu nedenle $A_d[-1, 3, 2]$*,* T *nin sabit Apollonius çemberi değildir.*

Örnek 5.56 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında* $A_d\left[0, 4, \frac{1}{3}\right]$ *Apollonius çemberi ve* $Tx = \frac{2x+2}{3}$ *şeklinde tanımlı* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x \in A_d\left[0, 4, \frac{1}{3}\right] = \{-2, 1\}$ *için* $(A_4^d 1)$ *koşulu*

$$\begin{aligned} x &= -2 \text{ için } \frac{4}{3} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{14} - 4 = -\frac{74}{21} \\ x &= 1 \text{ için } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{8} - 4 = -\frac{19}{6} \end{aligned}$$

olup sağlanmaz iken $(A_4^d 2)$ *koşulu basitçe*

$$\begin{aligned} x &= -2 \text{ için } \frac{4}{3} + \frac{2}{14} \leq 2 \Rightarrow \frac{31}{21} \leq 2 \\ x &= 1 \text{ için } \frac{1}{3} + \frac{4}{8} \leq 2 \Rightarrow \frac{5}{6} \leq 2 \end{aligned}$$

olacağından sağlanır. Bu nedenle $A_d\left[0, 4, \frac{1}{3}\right]$*,* T *nin sabit Apollonius çemberi değildir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 5.32-5.35 ile alışılmış metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve a oranlı $A_d[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit Apollonius çemberinin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler alışılmış metrik uzayda birden fazla sabit Apollonius çemberine sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 5.7 (X, d) *bir metrik uzay ve* $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ile* $A_d[F_{21}, F_{22}, a_2]$ (X, d) *metrik uzayında iki Apollonius çemberi olsun. Bu takdirde* $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ile* $A_d[F_{21}, F_{22}, a_2]$ *Apollonius çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X, d) *metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme ve d, X üzerinde bir metrik olmak üzere (X, d) bir metrik uzay olsun. $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$ ve $A_d[F_{21}, F_{22}, a_2]$ de $F_{11},\ F_{12}$ odaklı, a_1 oranlı ve $F_{21},\ F_{22}$ odaklı, a_2 oranlı iki Apollonius çemberi olsun. Ayrıca P noktası $d(F_{11},\ P)/d(F_{12},\ P) \neq a_1$ ve $d(F_{21},\ P)/d(F_{22},\ P) \neq a_2$ olacak şekilde (X, d) metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_d[F_{11}, F_{12}, a_1] \cup A_d[F_{21}, F_{22}, a_2] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\varphi_1(x) = d(x,\ F_{11})/d(x,\ F_{12})$ ve $\varphi_2(x) = d(x,\ F_{21})/d(x,\ F_{22})$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$ ve $A_d[F_{21}, F_{22}, a_2]$ Apollonius çemberleri için $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_d^j 1)$ve $(C_d^j 2)$ koşullarını sağlar. O halde Teorem 7.35-7.35 gereğince açıkça $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$ ve $A_d[F_{21}, F_{22}, a_2]$ Apollonius çemberleri T dönüşümünün sabit Apollonius çemberleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$ ve $A_d[F_{21}, F_{22}, a_2]$ Apollonius çemberlerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili Apollonius çemberleri tamamiyle keyfidir.

Önerme 5.8 *(X, d) bir metrik uzay ve $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$, ..., $A_d[F_{n1}, F_{n2}, a_n]$ (X, d) metrik uzayında n tane Apollonius çemberi olsun. Bu takdirde $A_d[F_{11}, F_{12}, a_1]$, ..., $A_d[F_{n1}, F_{n2}, a_n]$ Apollonius çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, d) metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 5.7 nin ispatına benzer olarak $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_d[F_{i1}, F_{i2}, a_i] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşü mü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = d(x,\ F_{i1})/d(x,\ F_{i2})$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $d(x,\ F_{i1})/d(x,\ F_{i2}) \neq a_i$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $A_d[F_{i1}, F_{i2}, a_i]$ Apollonius çemberlerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, d) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit Apollonius çemberine sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 7.36-7.41 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 5.36 (X, d) *bir metrik uzay ,* $A_d[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $(A_1^d 1)$ *ve* $(A_1^d 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her* $x \in A_d[F_1, F_2, a]$*,* $y \in X \setminus A_d[F_1, F_2, a]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için* T *dönüşümü,*

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat (X, d) *bir metrik uzay,* $A_d[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı bir Apollonius çemberi ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_d[F_1, F_2, a]$ *noktaları için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $d(Tx,\ Ty) \leq hd(x,\ y)$ *koşulunu sağlasın. Buna göre* $A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit Apollonius çemberi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq h.d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(A_1^d 1)$ve $(A_1^d 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(A_i^d 1)$ve $(A_i^d 2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 5.37 (X, d) *bir metrik uzay,* $A_d[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^d 1)$*ve* $(A_i^d 2)$ *koş ullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_d[F_1, F_2, a]$ *noktaları için*

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y), d(Ty, x), d(Tx, y)\}$$

koşulunu sağlıyorsa $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *(X,d) bir metrik uzay, $A_d[F_1,F_2,a]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in A_d[F_1,F_2,a]$ ve $y \in X \setminus A_d[F_1,F_2,a]$ noktaları için*

$$d(Tx,\ Ty) < \max\{d(x,\ y),\ d(Tx,\ x),\ d(Ty,\ y),\ d(Ty,\ x),\ d(Tx,\ y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $A_d[F_1,F_2,a]$ ve $A_d[F_{1^*},F_{2^*},a^*]$ Apollonius çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit Apollonius çemberi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in A_d[F_1,F_2,a]$ ve $v \in A_d[F_{1^*},F_{2^*},a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Tv) \\ &< \max\{d(u,v),d(Tu,u),d(Tv,v),d(Tv,u),d(Tu,v)\} \\ &= d(u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $A_d[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

Teorem 5.38 *(X,d) bir metrik uzay, $A_d[F_1,F_2,a]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(A_i^d 1)$ve $(A_i^d 2)$ koş ullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in A_d[F_1,F_2,a]$ ve $y \in X \setminus A_d[F_1,F_2,a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $A_d[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

İspat *Teorem 5.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde $A_d[F_1,F_2,a]$ ve $A_d[F_{1^*},F_{2^*},a^*]$ Apollonius çemberlerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in A_d[F_1,F_2,a]$ ve $v \in A_d[F_{1^*},F_{2^*},a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \leq \lambda.\left[d(u,Tu) + d(v,Tv)\right] = \lambda.\left[d(u,u) + d(v,v)\right] = 0$$

elde edilir. Buna göre $d(u,\ v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $A_d[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

Teorem 5.39 *(X,d) bir metrik uzay, $A_d[F_1,F_2,a]$, (X,d) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak* *üzere* $(A_i^d 1)$*ve* $(A_i^d 2)$ *koş ulların sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 5.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \lambda.\left[d(u, Tv) + d(v, Tu)\right] = \lambda.\left[d(u, v) + d(v, u)\right] = 2\lambda d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 5.40 (X, d) *bir metrik uzay,* $A_d[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^d 1)$*ve* $(A_i^d 2)$ *koş ulların sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \beta d(y, Ty) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 5.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tu) + \beta d(v, Tv) + \gamma d(u, v) = \gamma d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 5.41 (X, d) *bir metrik uzay,* $A_d[F_1, F_2, a]$*,* (X, d) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak* *üzere* $(A_i^d 1)$*ve* $(A_i^d 2)$ *koş ullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Ty) + \beta d(y, Tx) + \gamma d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 5.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_d[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_d[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tv) + \beta d(v, Tu) + \gamma d(u, v) = (\lambda + \beta + \gamma)d(u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan bu bir çeli şkidir. O halde* $A_d[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

6. S-METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT EĞRİ TEOREMLERİ

Bu kısımda S-metrik uzaylarda en temel geometrik eğrilerden olan elips, hiperbol, Cassini eğrisi ve Apollonius çemberi kavramları ele alınacaktır. S-metrik uzaylarda bu eğrilerin sabit kalma koşulları ortaya konulacak sonrasında bu sabit eğrlerin tekliği ile ilgili koşullar sunulacaktır.

6.1 S-Metrik Uzayda Sabit Elips Teoremleri

Bu kısımda $S-$metrik uzaylarda iki odaklı elipsler için bir dönüşümün bir elipsi sabit bırakması yani sabit elipsin varolma koşulları ve sabit elipsin teklik koşulları ele alınacaktır. Buna göre ilk olarak bir $S-$metrik uzayda iki odaklı elips ve sabit elips kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 6.1 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, F_1, $F_2 \in X$ ve $a \in (0,\ \infty)$ olsun. Bu taktirde*

$$E_S\left[F_1,F_2,2a\right] = \{x \in X : S(x,x,F_1) + S(x,x,F_2) = 2a\}$$

ifadesine odakları F_1, F_2 asal eksen uzunluğu $2a$ olan elips denir.

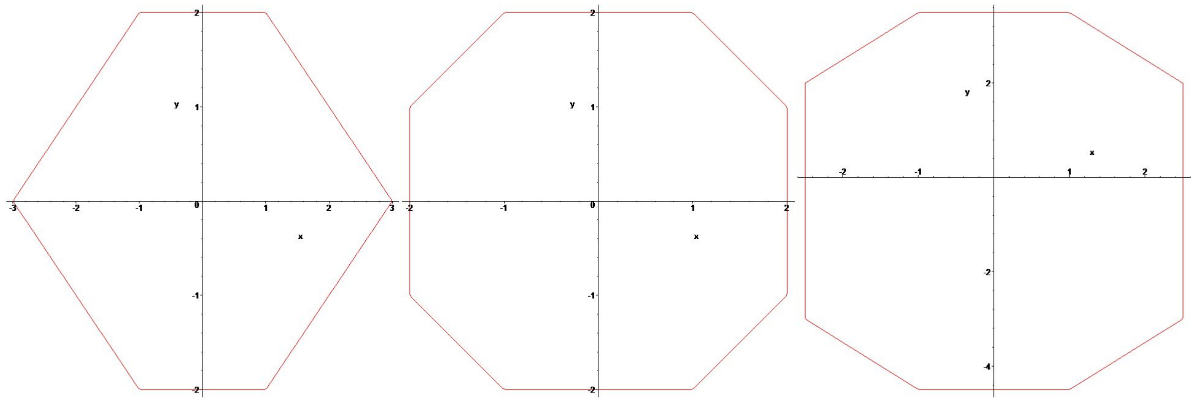
Örnek 6.1 *Temel kavramlar kısımda belirtildiği gibi $S-$metrik bir alışılmış metrikden üretilebileceği gibi alışılmış metrikden üretilemeyen $S-$metriklerde vardır. Burada Örnek 3.1 de verilen iki $S-$metrik örneği ele alınacaktır. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x = (x_1,x_2)\,, y = (y_1,y_2)\,, z = (z_1,z_2) \in X$ için*

$$S_1\left(x,y,z\right) = |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |y_2 - z_2|$$

ve

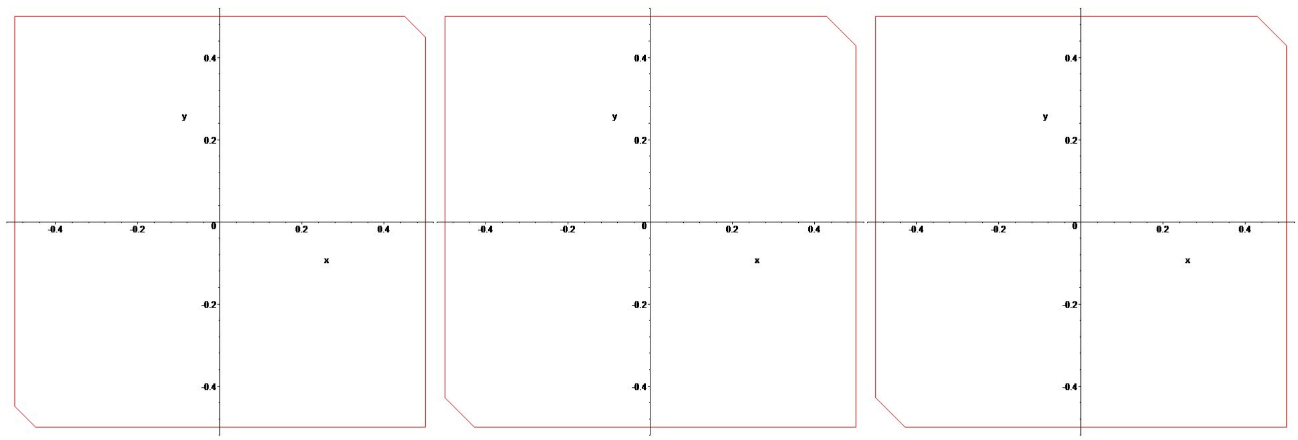
$$S_2\left(x,y,z\right) = |x_1 - z_1| + |x_1 + z_1 - 2y_1| + |x_2 - z_2| + |x_2 + z_2 - 2y_2|$$

şeklinde tanımlı $S-$metrikleri ele alınsın. Buna göre şekil 6.1 de S_1 olarak adlandırılan $S-$metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1,0)\,, F_2 = (-1,0)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 6$ olan elips, odakları $F_1 = (1,1)\,, F_2 = (-1,-1)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 6$ olan elips ve odakları $F_1 = (1,2)\,,\ F_2 = (-1,-3)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 10$ olan elips görülmektedir.



Şekil 6.1 $E_S\left[(1,0),(-1,0),6\right]$, $E_S\left[(1,1),(-1,-1),6\right]$, $E_S\left[(1,2),(-1,-3),10\right]$

Benzer biçimde şekil 6.2 de S_2, S*-metriği için sırasıyla odakları* F_1=$(1,0)$, F_2=$(-1,0)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 10$ *olan elips, odakları* $F_1 = (1,1)$, $F_2 = (-1,-1)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 6$ *olan elips ve odakları* $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (-1,-3)$ *ve asal eksen uzunluğu* $2a = 30$ *olan elips görülmektedir.*

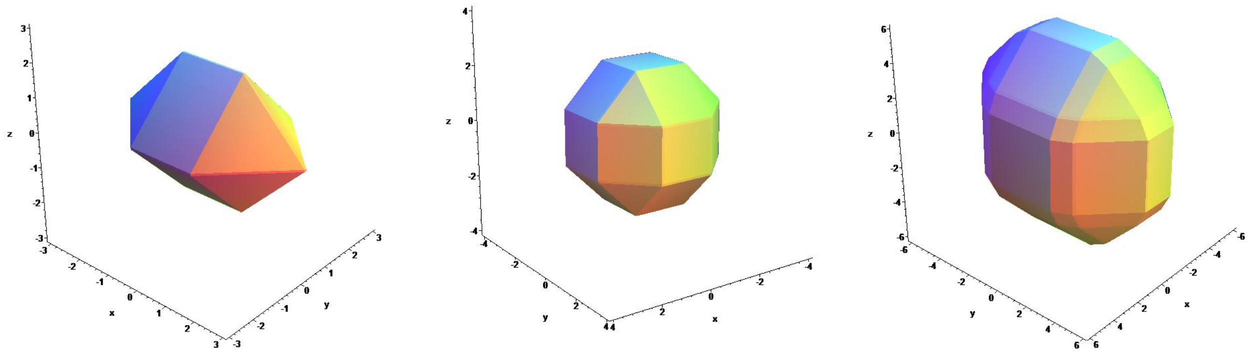


Şekil 6.2 $E_S\left[(1,0),(-1,0),10\right]$, $E_S\left[(1,1),(-1,-1),6\right]$, $E_S\left[(1,2),(-1,-3),10\right]$

$X = \mathbb{R}^3$ *olmak üzere her* $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3)$, $z = (z_1,z_2,z_3) \in X$ *için*

$$S_3(x,y,z) = \sum_{i=1}^{3}\left[|x_i - z_i| + |x_i + z_i - 2y_i|\right]$$

şeklinde tanımlı S_3, $S-$metriği verilmiş olsun. Şekil 6.3 de bu $S-$metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1,0,0)$, $F_2 = (-1,0,0)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 12$ olan elips, odakları $F_1 = (1,1,1)$, $F_2 = (-1,-1,-1)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 18$ olan elips ve odakları $F_1 = (1,2,3)$, $F_2 = (-1,-3,-2)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 36$ olan elips görülmektedir.



Şekil 6.3 $E_S[(1,0,0),(-1,0,0),12]$, $E_S[(1,1,1),(-1,-1,-1),18]$, $E_S[(1,2,3),(-1,-3,-2),36]$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen $S-$metrik ile oluşturulan $S-$metrik uzaydaki elipsler arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 6.1 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde $S-$metrik uzayındaki $E_S[F_1,F_2,2a]$ elipsi, (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $E_d[F_1,F_2,a]$ elipsidir.*

İspat *$S-$metriği, d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$S(x,y,z) = d(x,z) + d(y,z)$$

olacağından açıkca

$$S(x,x,y) = d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$$

olur. O halde $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi için*

$$\begin{aligned} S(x,x,F_1) + S(x,x,F_2) = 2a \quad &\Rightarrow 2d(x,F_1) + 2d(x,F_2) = 2a \\ &\Rightarrow d(x,F_1) + d(x,F_2) = a \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $E_d[F_1, F_2, a]$ *demektir. Bu ise ispatı tamamlar.*

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1 $X \neq \emptyset$ *bir küme,* (X, d) *cir alışılmış metrik uzay ve* S*, bir alışılmış* d *metriği tarafından üretilen* $S-$*metrik olmak üzere* (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay olsun. Bu taktirde* (X, d) *alışılmış metrik uzayındaki* $E_d[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* $S-$*metrik uzayındaki* $E_S[F_1, F_2, 4a]$ *elipsidir.*

Tanım 6.2 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, S) *metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *bir dönüşüm olmak üzere her* $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *için* $Tx = x$ *ise* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsine* T *dönüşümünün bir sabit elipsi denir.*

Bu kısımda buradan itibaren verilecek Teorem 6.1-6.4 ile (X, S) $S-$metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü için sabit elipsin varlığını garanti eden koşullar verilmiştir.

Teorem 6.1 (X, S) *bir* $S-$*metrik ,* $E_S[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, S) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *için*

(E_1^S1) $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

(E_1^S2) $\quad \varphi(Tx) \geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_d[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir sabit elipsidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* S*,* X *üzerinde bir* $S-$*metrik olsun.* $E_S[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, S) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1) + S(x,\ x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *herhangi bir nokta* *olmak üzere* $(E_1^S 1)$ *koşulu ve* φ *fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= S(x,x,F_1) + S(x,x,F_2) - S(Tx,Tx,F_1) - S(Tx,Tx,F_2) \\ &= 2a - (S(Tx,Tx,F_1) + S(Tx,Tx,F_2)) \end{aligned} \tag{6.1}$$

elde edilir. T *dönüşümü* $(E_1^S 2)$ *koşulunu sağladığından* Tx *noktası* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre* $S(Tx,\ Tx,\ F_1) + S(Tx,\ Tx,\ F_2) > 2a$ *ise yani* Tx *noktası elipsin dışında ise* (*6.1*) *eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Bu nedenle*

$$S(Tx,\ Tx,\ F_1) + S(Tx,\ Tx,\ F_2) = 2a$$

olmalıdır. Aksi taktirde (*6.1*) *eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani* Tx *noktası elipsin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,*

$$S(x,\ x,\ Tx) \leq 2a - 2a - (S(Tx,\ Tx,\ F_1) + S(Tx,\ Tx,\ F_2)) = 2a - 2a = 0$$

elde edilir. O halde $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsini sabit bırakır.*

Örnek 6.2 $X = \mathbb{R}$ *ve* $S : X \times X \times X \longrightarrow [0, \infty)$, $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ *biçiminde tanımlı* $S-$*metrik olmak üzere* (X, S) $S-$*metrik uzayı verilsin.* (X, S) $S-$*metrik uzayında* $E_S[1, 4, 10]$ *elipsi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^2 - 4x$ *biçiminde* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada açıkça* $E_S[1, 4, 10] = \{0,\ 5\}$ *dir ve her* $x \in E_S[1, 4, 10]$ *için* $(E_1^S 1)$ *ve* $(E_1^S 2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $E_S[1, 4, 10]$ *elipsi,* T *dönüşümünün bir sabit elipsidir. Ancak bu noktada dikkat edilirse* $E_S[2, 3, 10]$, $E_S\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 10\right]$, $E_S\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 10\right]$ *elipsleri de* T *dönüşümü altında invaryanttır. Doğal olarak* T *nin sabit elipslerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm elipslerin de* T *altında invaryant kaldığı gibi bir yanılsama da oluşmamalıdır. Örneğin* $E_S[0, 5, 10]$ *elipsi* T *nin sabit elipsi değildir.*

Örnek 6.3 $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ *biçiminde tanımlı* $S-$*metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ *metrik uzayında* $E_S[1, 6, 18]$ *elipsi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{8}{9}(x + 1)$ *dönüşümü verilsin. O halde her* $x \in E_S[1, 6, 18] = \{-1,\ 8\}$ *için* $(E_1^S 1)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $2 \leq 18 - 14 = 4$

$x = 8$ *için* $0 \leq 18 - 18 = 0$

olup sağlanırken açıkça $(E_1^S 2)$ *koşulu*

$x = -1$ *için* $14 \geq 18$

$x = 8$ *için* $18 \geq 18$

olacağından sağlanmaz. Üstelik T *dönüşümü* $E_S[1, 6, 18]$ *elipsini invaryant bırakmaz.*

Örnek 6.4 $S(x,\ y,\ z) = |x-z| + |y-z|$ *biçiminde tanımlı* $S-$*metrik ve* $X = \mathbb{R}$ *olmak üzere* (X, S) $S-$*metrik uzayı alınsın. Bu* $(\mathbb{R},\ S)$ *metrik uzayında* $E_S\,[1,6,18]$ *elipsi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $Tx = 2x - 5$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre her* $x \in E_S\,[1,6,18] = \{-1,\ 8\}$ *için* $(E_1^S 1)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $12 \leq 18 - 42 = -24$
$x = 8$ *için* $3 \leq 18 - 30 = -12$
olup açıkça sağlanmazken $(E_1^S 2)$ *koşulu*
$x = -1$ *için* $42 \geq 18$
$x = 8$ *için* $30 \geq 18$
olduğundan sağlanmaktadır. Ayrıca T *dönüşümü* $E_S\,[1,6,18]$ *elipsini invaryant bırakmaz.*

Teorem 6.2 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, A) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1) + S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *için,*
$(E_2^S 1)$ $\quad S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(E_2^S 1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir sabit elipsidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* S*,* X *üzerinde bir* $S-$*metrik olsun.* $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, S) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips ve* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1) + S(x,\ x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere.* $(E_2^S 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= S(x,x,F_1) + S(x,x,F_2) + S(Tx,Tx,F_1) + S(Tx,Tx,F_2) - 4a \\ &= 2a + S(Tx,Tx,F_1) + S(Tx,Tx,F_2) - 4a \\ &= S(Tx,Tx,F_1) + S(Tx,Tx,F_2) - 2a \end{aligned} \tag{6.2}$$

elde edilir. $(E_2^S 1)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna g öre* Tx *noktası elipsin içinde ise yani* $S(Tx,\ Tx,\ F_1) + S(Tx,\ Tx,\ F_2) < 2a$ *ise Çünkü bu durumda* (6.2) *eşitsizliği* $S(x,\ x,\ Tx) < 0$ *formuna dönüşür. Ancak uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde* $S(Tx,\ Tx,\ F_1) + S(Tx,\ Tx,\ F_2) = 2a$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası elipsin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,*

$$S(x,\ x,\ Tx) \leq 2a + S(Tx,\ Tx,\ F_1) + S(Tx,\ Tx,\ F_2) - 4a = 2a + 2a - 4a = 0$$

elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ dir. Yani her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 6.5 $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |x + z - 2y|$ *bi çiminde tanımlı $S-$metrik, $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $E_S[-2, 4, 16]$ elipsi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 2x^2 - 3x - 30$ dönüşümü göz önüne alınsın. Buna göre her $x \in E_S[-2, 4, 16] = \{-3,\ 5\}$ i çin $(E_2^S 1)$ ve $(E_2^S 1)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $E_S[-2, 4, 16]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $E_S[0, 2, 16]$, $E_S[-1, 3, 16]$, $E_S\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 16\right]$ elipslerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin sabit elipslerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm elipslerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $E_S[0, 8, 16]$, $E_S[1, 2, 10]$, $E_S[1, 6, 18]$ elipsleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.6 $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |x + z - 2y|$ *olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $E_S[-2, 4, 16]$ elipsi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = -x + 11$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in E_S[-2, 4, 16] = \{-3,\ 5\}$ için $(E_2^S 1)$ koşulu*

$x = -3$ *için* $34 \leq 16 + 52 - 32 = 36$

$x = 5$ *için* $2 \leq 16 + 20 - 32 = 4$

olup sağlanırken açıkça $(E_2^S 2)$ koşulu

$x = -3$ *için* $52 \leq 16$

$x = 5$ *için* $20 \leq 16$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $E_S[-2, 4, 16]$ elipsi T nin sabit elipsi değildir.

Örnek 6.7 $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |x + z - 2y|$ *olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $E_S[-2, 4, 16]$ elipsi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{13x+3}{16}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in E_S[-2, 4, 16] = \{-3,\ 5\}$ için $(E_2^S 1)$ koşulu*

$x = -3$ *için* $\frac{3}{2} \leq 16 + 13 - 32 = -3$

$x = 5$ *için* $\frac{3}{2} \leq 16 + 13 - 32 = -3$

olup açıkça sağlanmaz iken $(E_2^S 2)$ koşulu

$x = -3$ *için* $13 \leq 16$

$x = 5$ *için* $13 \leq 16$

olacağından sağlanır. Ancak $E_S[-2, 4, 16]$ elipsi T dönüşümü altında invaryant değildir.

Teorem 6.3 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $E_S[F_1, F_2, 2a]$, (X, A) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için

$(E_3^S 1)$ $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(E_3^S 2)$ $\quad h.S(x, x, Tx) + \varphi(Tx) \geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $E_S[F_1, F_2, 2a]$, (X, S) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1) + S(x,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm ü alınsın. Bu takdirde $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(E_3^S 1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(E_3^S 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} S(x, x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2) - S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2) \\ &= 2a - S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2) \\ &\leq h.S(x, x, Tx) + S(Tx, Tx, F_1) + S(Tx, Tx, F_2) - S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2) \\ &\leq h.S(x, x, Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(1 - h)S(x, x, Tx) \geq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $S(x, x, Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 6.8 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $E_S[-1, 3, 12]$ elipsi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = -x^2 + 3x + 8$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in E_S[-1, 3, 12] = \{-2,\ 4\}$ için $(E_3^S 1)$ ve $(E_3^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $E_S[-1, 3, 12]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $E_S[0, 2, 12]$, $E_S\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 12\right]$, $E_S\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 12\right]$ ve $E_S\left[\frac{9}{5}, \frac{1}{5}, 12\right]$ elipslerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin sabit elipslerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm elipslerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $E_S[-2, 4, 16]$, $E_S[-1, 1, 12]$ ve $E_S[1, 6, 18]$ elipsleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.9 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $E_S[-1, 3, 12]$ elipsi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{2x+7}{6}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in E_S[-1, 3, 12] = \{-2,\ 4\}$ için $(E_3^S 1)$ koşulu*

$x = -2$ için $5 \leq 16 - 8 = 8$

$x = 4$ *için* $3 \leq 16 - 8 = 8$
olacağından sağlanırken açıkça $(E_3^S 2)$ *koşulu* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*
$x = -2$ *için* $h.5 + 8 \geq 12$
$x = 4$ *için* $h.3 + 8 \geq 12$
olacağından sağlanmaz. Üstelik T *dönüşümü* $E_S\,[-1, 3, 12]$ *elipsini invaryant bırakmaz.*

Örnek 6.10 $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $E_S\,[-1, 3, 12]$ *elipsi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 2x - 2$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x \in E_S\,[-1, 3, 12] = \{-2,\ 4\}$ *için* $(E_3^S 1)$ *koşulu*
$x = -2$ *için* $8 \leq 12 - 28 = -16$
$x = 4$ *için* $4 \leq 12 - 20 = -8$
olacağından sağlanmaz iken $(E_3^S 2)$ *koşulu* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*
$x = -2$ *için* $h.8 + 28 \geq 12$
$x = 4$ *için* $h.4 + 20 \geq 12$
olup sağlanır. Ancak $E_S\,[-1, 3, 12]$ *elipsi* T *altında invaryant kalmaz.*

Teorem 6.4 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ A)$ *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *için,*
$(E_4^S 1)$ $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 8a$
$(E_4^S 2)$ $\quad S(Tx, Tx, x) + \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *döüşümünün bir sabit elipsidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* S*,* X *üzerinde bir* $S-$*metrik olsun.* $E_S\,[F_1, F_2, 2a]$, (X, S) *metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1) + S(x,\ x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in E_S\,[F_1, F_2, 2a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* T *dönüşümü* $(E_4^S 1)$ *koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak* φ

fonksiyonunun tanımı ve $S-$metriğinin ikinci aksiyomu gereğince

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x)+\varphi(Tx)-8a \\ &= S(x,x,F_1)+S(x,x,F_2)+S(Tx,Tx,F_1)+S(Tx,Tx,F_2)-8a \\ &\leq 2S(x,x,Tx)+S(F_1,F_1,Tx)+2S(x,x,Tx)+S(F_2,F_2,Tx) \\ &\qquad\qquad +S(Tx,Tx,F_1)+S(Tx,Tx,F_2)-8a \\ &\leq 4S(x,x,Tx)+4\left[S(Tx,Tx,F_1)+S(Tx,Tx,F_2)\right])-8a \\ &\leq 8a-8a=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda açıkça $Tx=x$ olur. Bu takdirde sonuç olarak her $x\in E_S\left[F_1,F_2,2a\right]$ için T dönüşümü $E_S\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 6.11 $S(x,\ y,\ z)=|x-z|+|x+z-2y|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $E_S\left[1,-1,12\right]$ *elipsi ve* $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=2x^2+x-18$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x\in E_S\left[1,-1,12\right]=\{-3,\ 3\}$ *için* (E_4^S1) *ve* (E_4^S2) *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $E_S\left[1,-1,12\right]$ *elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile* $E_S\left[2,-2,12\right]$, $E_S\left[\frac{1}{2},\frac{-1}{2},12\right]$, $E_S\left[\frac{-5}{2},\frac{5}{2},12\right]$ *ve* $E_S\left[\frac{-3}{2},\frac{3}{2},12\right]$ *elipslerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin sabit elipslerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm elipslerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin* $E_S\left[-2,4,16\right]$, $E_S\left[0,8,16\right]$ *ve* $E_S\left[-1,3,12\right]$ *elipsleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.12 $S(x,\ y,\ z)=|x-z|+|x+z-2y|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $E_S\left[1,-1,12\right]$ *elipsi ve* $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=\frac{11}{3}x$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x\in E_S\left[1,-1,12\right]=\{-3,\ 3\}$ *için* (E_4^S1) *koşulu*

$x=-3$ *için* $26\leq 12+64-48=28$

$x=3$ *için* $26\leq 12+64-48=28$

olup sağlanırken (E_4^S2) *koşulu açıkça*

$x=-3$ *için* $26+64\leq 12$

$x=3$ *için* $26+64\leq 12$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $E_S\left[1,-1,12\right]$ *elipsi T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.13 $S(x,\ y,\ z)=|x-z|+|x+z-2y|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $E_S\left[1,-1,12\right]$ *elipsi ve* $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=\frac{5x-3}{6}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x\in E_S\left[1,-1,12\right]=\{-3,\ 3\}$ *için* (E_4^S1) *koşulu*

$x=-3$ *için* $0\leq 12+12-48$

$x=3$ *için* $2\leq 12+4-48$

olacağından açıkça sağlanmaz iken $(E_4^S 2)$ *koşulu açıkça*
$x = -3$ *için* $0 + 12 \leq 12 \Rightarrow 12 \leq 12$
$x = 3$ *için* $2 + 8 \leq 12 \Rightarrow 12 \leq 12$
olup sağlanır. Üstelik $E_S\left[1, -1, 12\right]$ *elipsi* T *altında invaryant değildir.*

Teorem 6.5 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ (X, S) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *ve bazı* $h > 4$ *için,*

$$(I_S) : S(x, x, Tx) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_X$ *ve* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *elipsi,* T *dönüşümünün bir sabit elipsidir.*

İspat (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *bu uzayda* F_1*,* F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir elips olsun. Ayrıca her* $x \in X$ *için*

$$\varphi(x) = S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü ele alınsın. Üstelik* T *dönüşümü her* $x \in X$ *ve bazı* $h > 4$ *değerleri için* (I_S) *koşulunu sağlasın. O halde* $x \in X$ *ve* $x \neq Tx$ *olduğunu varsayalım. Bu durumda,* T *dönüşümü* (I_S) *koşulunu sağladığından dolayı bu koşuldan yola çıkarak* φ *fonksiyonunun tanımı ve* S*-metriğinin ikinci aksiyomunu kullanarak*

$$\begin{aligned}
h.S(x, x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= S(x, x, F_1) + S(x, x, F_2) - S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2) \\
&\leq 2S(x, x, Tx) + S(F_1, F_1, Tx) + 2S(x, x, Tx) + S(F_2, F_2, Tx) \\
&\qquad - S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2) \\
&\leq 4S(x, x, Tx)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan düzenleme ile $(h - 4)S(x,\ x,\ Tx) \leq 0$ *elde edilir. Hipotez gereğince* $h > 4$ *olduğundan açıkça* $Tx = x$ *elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her* $x \in X$ *için* $Tx = x$ *olduğundan* $T = I_X$ *olur. Tersine* $T = I_X$ *birim dönüşüm olduğundan sonuç olarak* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *elipsi* T *nin bir sabit elipsidir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 6.1-6.4 ile $S-$metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve $2a$ asal eksen uzunluklu $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsini nokta-nokta sabit bırakacak T

üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Ayrıca Teorem 6.5 de de $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsinin nokta nokta sabit bırakan T dönüşümünün ne zaman birim dönüşüm olacağı ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit elipslerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler $S-$metrik uzayda birden fazla sabit elipse sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 6.2 *(X, S) bir $S-$metrik uzay ve $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ ile $E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ (X, S) metrik uzayında iki elips olsun. Bu takdirde $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ ve $E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ elipslerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, S) metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme ve S, X üzerinde bir $S-$metrik olmak üzere (X, S) bir metrik uzay olsun. $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ ve $E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ de F_{11}, F_{12} odaklı, $2a_1$ asal eksen uzunluklu ve F_{21}, F_{22} odaklı, $2a_2$ asal eksen uzunluklu olacak şekilde verilen iki elips olsun. Ayrıca P noktası $S(F_{11}, F_{11}, P)+S(F_{12}, F_{12}, P) \neq 2a_1$ ve $S(F_{21}, F_{21}, P)+S(F_{22}, F_{22}, P) \neq 2a_2$ olacak şekilde (X, S) metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1] \cup E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra φ_1, $\varphi_2 : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\varphi_1(x) = S(x,\ x,\ F_{11}) + S(x,\ x,\ F_{12})$ ve $\varphi_2(x) = S(x,\ x,\ F_{21}) + S(x,\ x,\ F_{22})$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ ve $E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ elipsleri için $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (E_S^j1)ve (E_S^j2) koşullarını sağlar. O halde Teorem 6.1-6.4 gereğince açıkça $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ ve $E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ elipsleri T dönüşümünün sabit elipsleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ ve $E_S[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ elipslerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili elipsler tamamiyle keyfidir.

Önerme 6.3 *(X, S) bir $S-$metrik uzay ve $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$, ..., $E_S[F_{n1}, F_{n2}, 2a_n]$ (X, S) metrik uzayında n tane elips olsun. Bu takdirde $E_S[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$, ..., $E_S[F_{n1}, F_{n2}, 2a_n]$ elipslerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, S) metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 6.2 nin ispatına benzer olarak $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup_{i=1}^{n} E_S[F_{i1}, F_{i2}, 2a_i] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü ve her* $x \in X$ *için* $\varphi_i(x) = S(x,\ x,\ F_{i1}) + S(x,\ x,\ F_{i2})$ *olacak şekilde tanımlanan* $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ *dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada* T *dönüşümündeki* P *noktası* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere* $S(x,\ x,\ F_{i1}) + S(x,\ x,\ F_{i2}) \neq 2a_i$ *koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan* $i \in \{1, ..., n\}$ *için* $E_S\left[F_{i1}, F_{i2}, 2a_i\right]$ *elipslerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.*

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, S) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit elipse sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 6.6-6.11 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 6.6 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay ,* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$*,* $(X,\ S)$ *bir* $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $(E_1^S 1)$ *ve* $(E_1^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her* $x \in E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$*,* $y \in X \setminus E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için* T *dönüşümü,*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq hS(x, x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.*

İspat (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$*,* (X, S) $S-$*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir elips ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $y \in X \setminus E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *noktaları için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $S(Tx,\ Tx,\ Ty) \leq hS(x,\ x,\ y)$ *ko şulunu sağlasın. Buna göre* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $E_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *elipslerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit elipsi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $v \in E_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$S(u, u, v) = S(Tu, Tu, Tv) \leq h.S(u, u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $E_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *elipsi* T *fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ *dönüşü mü* $(E_1^S 1)$*ve* $(E_1^S 2)$ *koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E_i^S 1)$*ve* $(E_i^S 2)$ *olarak değiştirilebilir.*

Teorem 6.7 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $E_S[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ S)$ bir $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (E_i^S1)ve (E_i^S2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_S[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için*

$$S(Tx, Tx, Ty) < \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *(X, S) bir metrik uzay, $E_S[F_1, F_2, 2a]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T d önüşümü her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_S[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için*

$$S(Tx, Tx, Ty) < \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ elipslerinin T dönüşümünün iki farklı sabit elipsi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$\begin{aligned} S(u, u, v) &= S(Tu, Tu, Tv) \\ &< \max\{S(u, u, v), S(Tu, Tu, u), S(Tv, Tv, v), S(Tv, Tv, u), S(Tu, Tu, v)\} \\ &= S(u, u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Teorem 6.8 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $E_S[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ S)$ bir $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (E_i^S1)ve (E_i^S2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda\,[S(x, x, Tx) + S(y, y, Ty)]$$

koşulunu sağlıyorsa $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *Teorem 6.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde $E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ elipslerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq$*

v olmak üzere $u \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \lambda\left[S(u,u,Tu) + S(v,v,Tv)\right] = \lambda\left[S(u,u,u) + S(v,v,v)\right] = 0$$

elde edilir. Buna göre $S(u,\ u,\ v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Teorem 6.9 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $E_S[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ S)$ bir $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^S 1)$ve $(E_i^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq \lambda\left[S(x,x,Ty) + S(y,y,Tx)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *Teorem 6.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde $E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ elipslerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} S(u,u,v) &= S(Tu,Tu,Tv) \\ &\leq \lambda.\left[S(u,u,Tv) + S(v,v,Tu)\right] \\ &= \lambda.\left[S(u,u,v) + S(v,v,u)\right] \\ &= 2\lambda S(u,u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Teorem 6.10 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $E_S[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ S)$ bir $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^S 1)$ve $(E_i^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere,*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq \alpha S(x,x,Tx) + \beta S(y,y,Ty) + \gamma S(x,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $E_S[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *Teorem 6.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \alpha S(u,u,Tu) + \beta S(v,v,Tv) + \gamma S(u,u,v) = \gamma S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

Teorem 6.11 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $E_S[F_1, F_2, 2a]$*,* $(X,\ S)$ *bir* $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E_i^S 1)$*ve* $(E_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus E_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq \alpha S(x,x,Ty) + \beta S(y,y,Tx) + \gamma S(x,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.*

İspat *Teorem 6.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \alpha S(u,u,Tv) + \beta d(v,v,Tu) + \gamma S(u,u,v) = (\lambda+\beta+\gamma) S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $E_S[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

6.2 S-Metrik Uzayda Sabit Hiperbol Teoremleri

Bu kısımda $S-$metrik uzaylarda iki odaklı hiperboller için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir hiperbolü sabit bırakması yani sabit hiperbolün varlık koşulları ve sabit hiperbolün teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak $S-$metrik uzayada iki odaklı hiperbol ve sabit hiperbol kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 6.3 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $F_1,\ F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Buna göre*

$$H_S[F_1, F_2, 2a] = \{x \in X : |S(x,x,F_1) - S(x,x,F_2)| = 2a\}$$

ifadesine odakları $F_1,\ F_2$ *asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan hiperbol denir.*

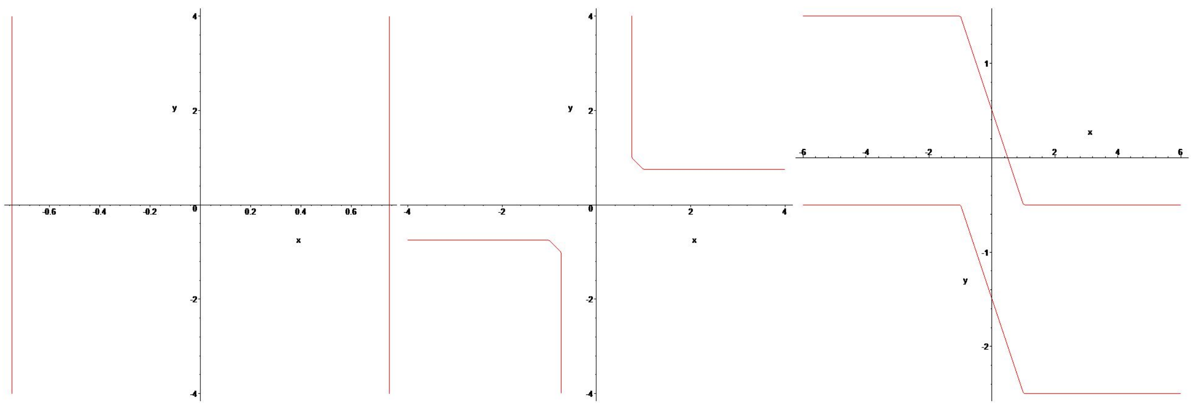
Örnek 6.14 *Elips kısımında ele alındığı biçimiyle $S-$metrik bir alışılmış metrikden üretilebileceği gibi alışılmış metrikden üretilemeyen $S-$metriklerde vardır. Bunun için burada Örnek 3.1 de verilen iki $S-$metrik örneği ele alınacaktır. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X$ için*

$$S_1(x, y, z) = |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |y_2 - z_2|$$

ve

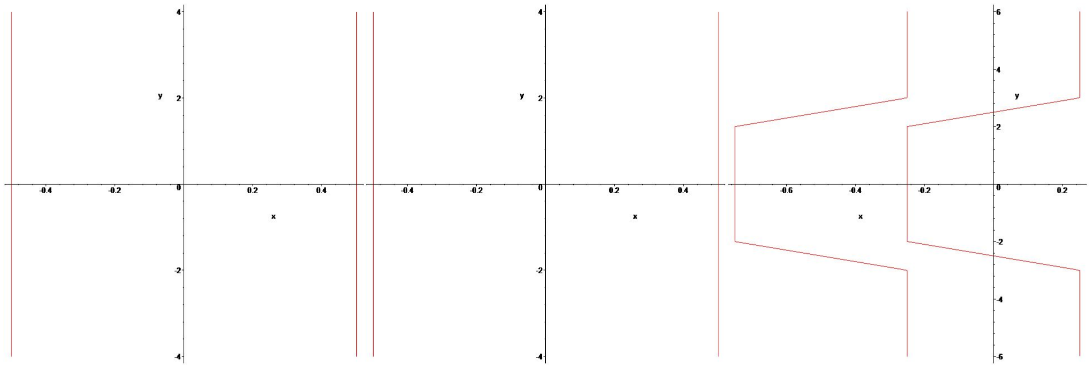
$$S_2(x, y, z) = |x_1 - z_1| + |x_1 + z_1 - 2y_1| + |x_2 - z_2| + |x_2 + z_2 - 2y_2|$$

şeklinde tanımlı $S-$metrikleri ele alınsın. Buna göre şekil 6.4 de S_1 olarak adlandırılan $S-$metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1, 0)$, $F_2 = (-1, 0)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 3/2$ olan hiperbol, odakları $F_1 = (1, 1)$, $F_2 = (-1, -1)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 7/2$ olan hiperbol ve odakları $F_1 = (1, 2)$, $F_2 = (-1, -3)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 2$ olan hiperbol görülmektedir.



Şekil 6.4 $H_S[(1,0),(-1,0),3/2]$, $H_S[(1,1),(-1,-1),7/2]$, $H_S[(1,2),(-1,-3),2]$

Bu yolla şekil 6.5 de S_2, $S-$metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1, 0)$, $F_2 = (-1, 0)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 2$ olan hiperbol, odakları $F_1 = (1, 1)$, $F_2 = (-1, -1)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 2$ olan hiperbol ve odakları $F_1 = (1, 2)$, $F_2 = (-1, -3)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 1$ olan hiperbol görülmektedir.

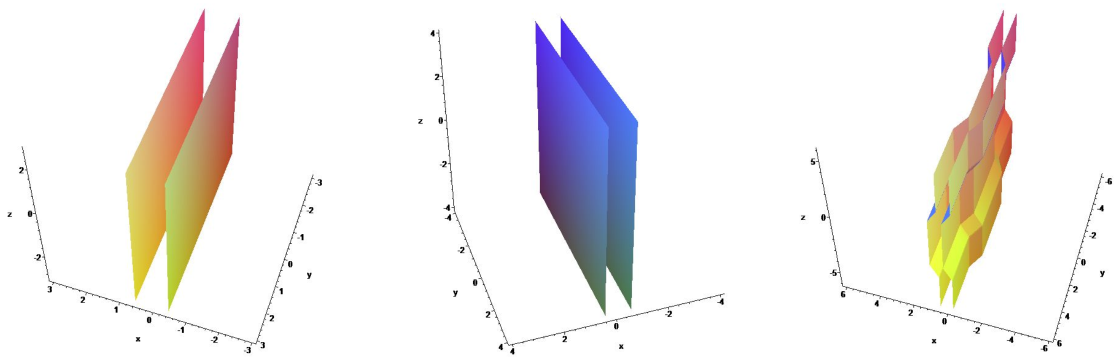


Şekil 6.5 $H_S\left[(1,0),(-1,0),2\right]$, $H_S\left[(1,1),(-1,-1),2\right]$, $H_S\left[(1,2),(-1,-3),1\right]$

$X=\mathbb{R}^3$ olmak üzere her $x=(x_1,x_2,x_3)\,, y=(y_1,y_2,y_3)\,, z=(z_1,z_2,z_3)\in X$ için

$$S_3\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{3}\left[|x_i-z_i|+|x_i+z_i-2y_i|\right]$$

şeklinde tanımlı $S-$metriği verilsin. Şekil 6.6 da bu $S-$metriği için sırasıyla odakları $F_1=(1,0,0)$, $F_2=(-1,0,0)$ ve asal eksen uzunluğu $2a=2$ olan hiperbol, odakları $F_1=(1,1,1)$, $F_2=(-1,-1,-1)$ ve asal eksen uzunluğu $2a=2$ olan hiperbol ve odakları $F_1=(1,2,3)$, $F_2=(-1,3,-2)$ ve asal eksen uzunluğu $2a=3/2$ olan hiperbol görülmektedir.



Şekil 6.6 $H_S\left[(1,0,0),(-1,0,0),2\right]$, $H_S\left[(1,1,1),(-1,-1,-1),2\right]$, $H_S\left[(1,2,3),(-1,3,-2),3/2\right]$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen $S-$metrik ile oluşturulan $S-$metrik uzaydaki hiperboller arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 6.4 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde $S-$metrik uzayındaki $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü, (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $H_d[F_1, F_2, a]$ hiperbolüdür.*

İspat *$S-$metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$S(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$$

olacağından açıkca

$$S(x, x, y) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

olur. O halde $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü için

$$\begin{aligned} |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)| = 2a \quad &\Rightarrow |2d(x, F_1) - 2d(x, F_2)| = 2a \\ &\Rightarrow |d(x, F_1) - d(x, F_2)| = a \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $H_d[F_1, F_2, a]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2 *$X \neq \emptyset$ bir küme, (X, d) bir alışılmış metrik uzay ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $H_d[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü $S-$metrik uzayındaki $H_S[F_1, F_2, 4a]$ hiperbolüdür.*

Tanım 6.4 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $H_S[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı $2a$ asal eksen uzunluklu bir hiperbol olsun. $T : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ ise $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolüne T dönüşümünün sabit hiperbolü denir.*

Teorem 6.12 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $H_S[F_1, F_2, 2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ için
$(H_1^S 1)$ $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(H_1^S 2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $H_S[F_1, F_2, 2a]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(H_1^S 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} S(x, x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)| - |S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| \\ &= 2a - |S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| \end{aligned} \tag{6.3}$$

elde edilir. T dönüşümü $(H_1^S 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası için iki durum vardır. Buna göre $|S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| > 2a$ ise (6.3) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Çünkü (6.3) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Bu nedenle $|S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| = 2a$ olmalıdır. Bu durumda,

$$S(x,\ x,\ Tx) \leq 2a - |S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| = 2a - 2a = 0$$

elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 6.15 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ olmak üzere $(\mathbb{R}, S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[1, 5, 4]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = -2x^2 + 13x - 16$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S[1, 5, 4] = \{2,\ 4\}$ için $(H_1^S 1)$ ve $(H_1^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_S[1, 5, 4]$ hiperbolü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Ancak bu noktada birkaç basit işlem ile $H_S\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 4\right]$, $H_S\left[\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, 4\right]$, $H_S[-1, 7, 4]$ ve $H_S\left[\frac{-3}{4}, \frac{27}{4}, 4\right]$ hiperbollerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin sabit hiperbollerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm hiperbollerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $H_S[-1, 3, 6]$, $H_S[2, 6, 2]$ ve $H_S[4, 3, 1]$ hiperbolleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.16 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[1, 5, 4]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{x+9}{4}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her*

$x \in H_S\,[1,5,4] = \{2,\ 4\}$ için $(H_1^S 1)$ koşulu
$x = 2$ için $\frac{6}{4} \le 4 - 1 = 3$
$x = 4$ için $\frac{6}{4} \le 4 - 1 = 3$
olup sağlanırken açıkça $(H_1^S 2)$ koşulu
$x = 2$ için $1 \ge 4$
$x = 4$ için $1 \ge 4$
olacağından sağlanmaz. Bu durumda, $H_S\,[1,5,4]$, T altında invaryant değildir.

Örnek 6.17 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |y - z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S\,[1,5,4]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{-x+28}{5}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S\,[1,5,4] = \{2,\ 4\}$ için $(H_1^S 1)$ koşulu*
$x = 2$ için $\frac{32}{5} \le 4 - 8 = -4$
$x = 4$ için $\frac{8}{5} \le 4 - \frac{36}{5} = -\frac{16}{5}$
olup açıkça sağlanmaz iken $(H_1^S 2)$ koşulu
$x = 2$ için $8 \ge 4$
$x = 4$ için $\frac{36}{5} \ge 4$
olacağından sağlanır. Ancak $H_S\,[1,5,4]$, T altında invaryant değildir.

Teorem 6.13 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $H_S\,[F_1,F_2,2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |S(x,x,F_1) - S(x,x,F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_S\,[F_1,F_2,2a]$ için
$(H_2^S 1)\quad S(x,x,Tx) \le \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(H_2^S 2)\quad \varphi(Tx) \le 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_S\,[F_1,F_2,2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $H_S\,[F_1,F_2,2a]$, (X,S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |S(x,x,F_1) - S(x,x,F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_S\,[F_1,F_2,2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(H_2^S 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\le \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= |S(x,x,F_1) - S(x,x,F_2)| + |S(Tx,Tx,F_1) - S(Tx,Tx,F_2)| - 4a \\ &= |S(Tx,Tx,F_1) - S(Tx,Tx,F_2)| - 2a \end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilir. T dönüşümü $(H_1^S 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası için iki durum vardır. Buna göre $|S(Tx,Tx,F_1) - S(Tx,Tx,F_2)| < 2a$ ise (6.4) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Aksi takdirde (6.4) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Bu nedenle $|S(Tx,Tx,F_1) - S(Tx,Tx,F_2)| = 2a$ olmalıdır. Bu durumda, $S(x,\ x,\ Tx) \leq |S(Tx,Tx,F_1) - S(Tx,Tx,F_2)| - 2a$=$2a - 2a$=$0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in H_S[F_1,F_2,2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $H_S[F_1,F_2,2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 6.18 *$S(x,\ y,\ z) = |x-z| + |y+z-2x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[-2,4,8]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 2x^2 - 3x + 6$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S[-2,4,8] = \{-1,\ 3\}$ için $(H_2^S 1)$ ve $(H_2^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_S[-2,4,8]$ hiperbolü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Ancak bu noktada birkaç basit işlem ile $H_S[-3,5,8]$, $H_S[-4,6,8]$, $H_S\left[-\frac{5}{2},\frac{9}{2},8\right]$ ve $H_S\left[-\frac{13}{4},\frac{21}{4},8\right]$ hiperbollerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin sabit hiperbollerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm hiperbollerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $H_S[1,5,4]$, $H_S[-1,7,4]$ ve $H_S[-1,3,6]$ hiperbolleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.19 *$S(x,\ y,\ z) = |x-z| + |y+z-2x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[-2,4,8]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{15}{8}x - 1$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S[-2,4,8] = \{-1,\ 3\}$ için $(H_2^S 1)$ koşulu*

$x = -1$ için $\frac{15}{4} \leq 8 + 12 - 16 = 4$

$x = 3$ için $\frac{13}{4} \leq 8 + 12 - 16 = 4$

olacağından sağlanırken açıkça $(H_2^S 2)$ koşulu

$x = -1$ için $12 \leq 8$

$x = 3$ için $12 \leq 8$

olup sağlanmaz. $H_S[-2,4,8]$ hiperbolü T altında invaryant değildir.

Örnek 6.20 *$S(x,\ y,\ z) = |x-z| + |y+z-2x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[-2,4,8]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{x}{6} + 1$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S[-2,4,8] = \{-1,\ 3\}$ için $(H_2^S 1)$ koşulu*

$x = -1$ için $\frac{11}{3} \leq 8 + \frac{1}{3} - 16 = -\frac{23}{3}$

$x = 3$ için $3 \leq 8 + 2 - 16 = -6$

olup açıkça sağlanmaz iken $(H_2^S 2)$ koşulu

$x = -1$ için $\frac{2}{3} \leq 8$

$x = 3$ için $2 \leq 8$

olacağından sağlanır. $H_S[-2,4,8]$ hiperbolü T altında invaryant değildir.

Teorem 6.14 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $H_S[F_1, F_2, 2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için
$(H_3^S 1)$ $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(H_3^S 2)$ $\quad h.S(x, x, Tx) + \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $H_S[F_1, F_2, 2a]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ d önüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. T dönüşümü $(H_3^S 1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(H_3^S 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} S(x, x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= |S(x, x, F_1) - S(x, x, F_2)| - |S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| \\ &= 2a - |S(Tx, Tx, F_1) - S(Tx, Tx, F_2)| \\ &\leq hS(x, x, Tx) + |S(Tx, Tx, F_1) \text{-} S(Tx, Tx, F_2)| \text{-} |S(Tx, Tx, F_1) \text{-} S(Tx, Tx, F_2)| \\ &= hS(x, x, Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(1 - h).\ S(x,\ x,\ Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $S(x,\ x,\ Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 6.21 *$S(x,\ y,\ z) = |z - y| + |z - x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[1, -3, 4]$ hiperbolü ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x^2 + 3x$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S[1, -3, 4] = \{-2,\ 0\}$ için $(H_3^S 1)$ ve $(H_3^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_S[-2, 4, 4]$ hiperbolü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $H_S\left[\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, 4\right]$, $H_S[3, -5, 4]$, $H_S\left[\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, 4\right]$ ve $H_S\left[-\frac{9}{4}, -\frac{17}{4}, 4\right]$ hiperbollerinin de T dönüş ümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğ al olarak T nin sabit hiperbollerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm hiperbollerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $H_S[-2, 4, 8]$, $H_S[1, 5, 4]$ ve $H_S[-4, 6, 8]$ hiperbolleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.22 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |z-x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[1,-3,4]$ hiperbolü ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=\frac{x-7}{8}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x\in H_S[1,-3,4]=\{-2,\ 0\}$ için (H_3^S1) koşulu*
$x=-2$ için $\frac{7}{4}\leq 4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$
$x=0$ için $\frac{7}{4}\leq 4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$
olup sağlanırken açıkça (H_3^S1) koşulu
$x=-2$ için $h.\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\geq 4$
$x=0$ için $h.\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\geq 4$
$h\in[0,\ 1)$ için sağlanmaz. Ayrıca $H_S[1,-3,4]$, T altında invaryant değildir.

Örnek 6.23 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |z-x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S[1,-3,4]$ hiperbolü ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=\frac{5x+5}{2}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x\in H_S[1,-3,4]=\{-2,\ 0\}$ için (H_3^S1) koşulu*
$x=-2$ için $1\leq 4-6=-2$
$x=0$ için $5\leq 4-8=-4$
olacağından sağlanmaz iken (H_3^S2) koşulu $h\in[0,\ 1)$ olmak üzere
$x=-2$ için $h+6\geq 4$
$x=0$ için $h.5+8\geq 4$
olup açıkça sağlanır . Fakat $H_S[1,-3,4]$, T altında invaryant değildir.

Teorem 6.15 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $H_S[F_1,F_2,2a]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=|S(x,x,F_1)-S(x,x,F_2)|$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in H_S[F_1,F_2,2a]$ için,
(H_4^S1) $S(x,x,Tx)\leq\varphi(x)+\varphi(Tx)-4a$
(H_4^S2) $S(x,x,Tx)+\varphi(Tx)\leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_S[F_1,F_2,2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $H_S[F_1,F_2,2a]$, (X,S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için $\varphi(x)=|S(x,x,F_1)-S(x,x,F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x\in H_S[F_1,F_2,2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere, . T dönüşümü (H_4^S1) koşulunu sağlandığından bu* *koşuldan başlayarak φ fonksiyonunun tanımı ve $S-$ metriğinin ikinci aksiyomu gereğince,*

$$\begin{aligned}
S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x)+\varphi(Tx)-4a \\
&= |S(x,x,F_1)-S(x,x,F_2)|+|S(Tx,Tx,F_1)-S(Tx,Tx,F_2)|-4a \\
&= |S(Tx,Tx,F_1)-S(Tx,Tx,F_2)|-2a \\
&\leq \varphi(Tx)-[S(x,x,Tx)+\varphi(Tx)] \\
&= -S(x,x,Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2S(x,\ x,\ Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda S fonksiyonu bir $S-$metrik olduğundan dolayı $S(x,\ x,\ Tx)=0$ olmalıdır. Bu nedenle $Tx=x$ olur. Yani her $x \in H_S\left[F_1,F_2,2a\right]$ için $Tx=x$ olduğundan T dönüşümü $H_S\left[F_1,F_2,2a\right]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 6.24 *$S(x,\ y,\ z)=|y-z|+|x+z-2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S\left[1,6,6\right]$ hiperbolü ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=3x^2-20x+30$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S\left[1,6,6\right]=\{2,\ 5\}$ için (H_4^S1) ve (H_4^S2) koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_S\left[1,6,6\right]$ hiperbolü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $H_S\left[\frac{3}{2},\frac{11}{2},6\right]$, $H_S\left[\frac{4}{3},\frac{17}{3},6\right]$, $H_S\left[0,7,6\right]$ ve $H_S\left[8,-1,6\right]$ hiperbollerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin sabit hiperbollerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm hiperbollerin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $H_S\left[-2,4,4\right]$, $H_S\left[3,-5,4\right]$ ve $H_S\left[-4,6,8\right]$ hiperbolleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.25 *$S(x,\ y,\ z)=|y-z|+|x+z-2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $H_S\left[1,6,6\right]$ hiperbolü ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=\frac{11x-15}{6}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in H_S\left[1,6,6\right]=\{2,\ 5\}$ için (H_4^S1) koşulu*
$x=2$ için $\frac{5}{3}\leq 6+\frac{28}{3}-12=\frac{10}{3}$
$x=5$ için $\frac{10}{3}\leq 6+10-12=4$
olup sağlanırken iken açıkça (H_4^S2) koşulu
$x=2$ için $\frac{5}{3}+\frac{28}{3}\leq 6\Rightarrow 11\leq 6$
$x=5$ için $\frac{10}{3}+10\leq 6\Rightarrow\frac{40}{3}\leq 6$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $H_S\left[1,6,6\right]$, T altında invaryant değildir.

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 6.12-6.15 ile $S-$metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve $2a$ asal eksen uzunluklu $H_S\left[F_1,F_2,2a\right]$ hiperbolünü nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit hiperbollerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler

$S-$metrik uzayda birden fazla sabit hiperbole sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 6.5 (X,S) *bir metrik uzay ve* $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ *ile* $H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ (X,S) *$S-$metrik uzayında iki hiperbol olsun. Bu takdirde* $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ *ve* $H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ *hiperbollerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X,S) *$S-$metrik uzayında en az bir* $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme ve S, X üzerinde bir $S-$metrik olmak üzere (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ de $F_{11},\ F_{12}$ odaklı, $2a_1$ asal eksen uzunluklu ve $F_{21},\ F_{22}$ odaklı, $2a_2$ asal eksen uzunluklu olacak şekilde verilen iki hiperbol olsun. Ayrıca P noktası $|S(F_{11},F_{11},P)-S(F_{12},F_{12},P)|\neq 2a_1$ ve $|S(F_{21},F_{21},P)-S(F_{22},F_{22},P)|\neq 2a_2$ olacak şekilde (X,S) $S-$metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]\cup H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2\ :\ X\ \longrightarrow\ [0,\infty)$ dönüş ümleri her $x\in X$ için $\varphi_1(x)=|S(x,x,F_{11})-S(x,x,F_{12})|$ ve $\varphi_2(x)=|S(x,x,F_{21})-S(x,x,F_{22})|$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbolleri için $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (H_S^j1)ve (H_S^j2) koşullarını sağlar. O halde Teorem 6.12-6.15 gereğince açıkça $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbolleri T dönüş ümünün sabit hiperbolleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right]$ ve $H_S\left[F_{21},F_{22},2a_2\right]$ hiperbollerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili hiperboller tamamiyle keyfidir.

Önerme 6.6 (X,S) *bir $S-$metrik uzay ve* $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right],\ \ldots,\ H_S\left[F_{n1},F_{n2},2a_n\right]$ *(X,S), $S-$metrik uzayında n tane hiperbol olsun. Bu takdirde* $H_S\left[F_{11},F_{12},2a_1\right],\ \ldots,\ H_S\left[F_{n1},F_{n2},2a_n\right]$ *hiperbollerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X,S) *$S-$metrik uzayında en az bir* $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 6.5 in ispatına benzer olarak $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ olmak üzere her $x\in X$ için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_S\left[F_{i1},F_{i2},2a_i\right] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü ve her* $x \in X$ *için* $\varphi_i(x) = |S(x,x,F_{i1}) - S(x,x,F_{i2})|$ *olacak şekilde tanımlanan* $\varphi_i : X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada* T *dönüşümündeki* P *noktası* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere* $|S(x,x,F_{i1}) - S(x,x,F_{i2})| \neq 2a_i$ *koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan* $i \in \{1,...,n\}$ *için* $H_S[F_{i1},F_{i2},2a_i]$ *hiperbollerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.*

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X,S) $S-$metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit hiperbole sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 6.16-6.21 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 6.16 (X,S) *bir* $S-$*metrik uzay ,* $H_S[F_1,F_2,2a]$, $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $(H_1^S 1)$ *ve* $(H_1^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her* $x \in H_S[F_1,F_2,2a]$, $y \in X \setminus H_S[F_1,F_2,2a]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için* T *dönüşümü,*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq hS(x,x,y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $H_S[F_1,F_2,2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat (X,S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $H_S[F_1,F_2,2a]$, $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir hiperbol ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in H_S[F_1,F_2,2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_S[F_1,F_2,2a]$ *noktaları için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $S(Tx,\ Tx,\ Ty) \leq hS(x,\ x,\ y)$ *koşulunu sağlasın. Buna göre* $H_S[F_1,F_2,2a]$ *ve* $H_S[F_{1^*},F_{2^*},2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit hiperbolü olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_S[F_1,F_2,2a]$ *ve* $v \in H_S[F_{1^*},F_{2^*},2a^*]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq h.S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $H_S[F_1,F_2,2a]$ *hiperbolü* T *fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(H_1^S 1)$ve $(H_1^S 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^S 1)$ve $(H_i^S 2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 6.17 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay ,* $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$*,* $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T\ :\ X\ \longrightarrow\ X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^S 1)$*ve* $(H_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $y \in X \setminus H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *noktaları için*

$$S(Tx, Tx, Ty) < \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$*,* $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir hiperbol ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $y \in X \setminus H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *noktaları için*

$$S(Tx, Tx, Ty) < \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $H_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit hiperbolü olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $v \in H_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$\begin{aligned} S(u, u, v) &= S(Tu, Tu, Tv) \\ &< \max\{S(u, u, v), S(Tu, Tu, u), S(Tv, Tv, v), S(Tv, Tv, u), S(Tu, Tu, v)\} \\ &= S(u, u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolü* T *fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Teorem 6.18 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$*,* $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T\ :\ X\ \longrightarrow\ X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^S 1)$*ve* $(H_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $y \in X \setminus H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda\left[S(x, x, Tx) + S(y, y, Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat *Teorem 6.16 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_S\left[F_1, F_2, 2a\right]$ *ve* $H_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*\right]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre*

$u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v){=}S(Tu,Tu,Tv) \leq \lambda.\left[S(u,u,Tu)+S(v,v,Tv)\right]{=}\lambda.\left[S(u,u,u)+S(v,v,v)\right]{=}0$$

elde edilir. Buna göre $S(u,\ u,\ v) = 0$ *olup* $u = v$ *bulunur. Bu ise ç elişkidir. O halde* $H_S[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Teorem 6.19 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay ,* $H_S[F_1, F_2, 2a]$*,* $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^S 1)$*ve* $(H_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/3)$ *için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda\left[S(x, x, Ty) + S(y, y, Tx)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $H_S[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat *Teorem 6.16 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} S(u,u,v) &= S(Tu,Tu,Tv) \\ &\leq \lambda.\left[S(u,u,Tv)+S(v,v,Tu)\right] \\ &= \lambda.\left[S(u,u,v)+S(v,v,u)\right] = 2\lambda S(u,u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/3)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $H_S[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Teorem 6.20 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $H_S[F_1, F_2, 2a]$*,* $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^S 1)$*ve* $(H_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \alpha S(x, x, Tx) + \beta S(y, y, Ty) + \gamma S(x, x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $H_S[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat *Teorem 6.16 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_S[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre*

$u \neq v$ olmak üzere $u \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \alpha S(u,u,Tu) + \beta S(v,v,Tv) + \gamma S(u,u,v) = \gamma S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olduğundan açıkça $\gamma < 1$ olacağından bu bir çelişkidir. O halde $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.

Teorem 6.21 *(X, S) bir $S-$metrik uzay , $H_S[F_1, F_2, 2a]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^S 1)$ve $(H_i^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus H_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda + \beta + \gamma < 1$ ve $\lambda + 3\gamma < 1$ olmak üzere,*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq \alpha S(x,x,Ty) + \beta S(y,y,Tx) + \gamma S(x,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.

İspat *Teorem 6.16 daki ispat yöntemine benzer şekilde $H_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ hiperbollerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in H_S[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in H_S[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \alpha S(u,u,Tv) + \beta S(v,v,Tu) + \gamma S(u,u,v) = (\lambda+\beta+\gamma) S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $H_S[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.

6.3 S-Metrik Uzayda Sabit Cassini Eğrisi Teoremleri

Bu kısımda $S-$metrik uzaylarda Cassini eğrileri için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir Cassini eğrisini sabit bırakması yani sabit Cassini eğrisinin varolma koşulları ve sabit Cassini eğrisinin teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak $S-$metrik uzayda Cassini eğrisi ve sabit Cassini eğrisi kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 6.5 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, F_1, $F_2 \in X$ ve $a \in (0,\ \infty)$ olsun. Buna göre*

$$C_S\left[F_1, F_2, a^2\right] = \{x \in X : S(x,x,F_1).S(x,x,F_2) = a^2\}$$

ifadesine odakları F_1, F_2 olan Cassini eğrisi denir.

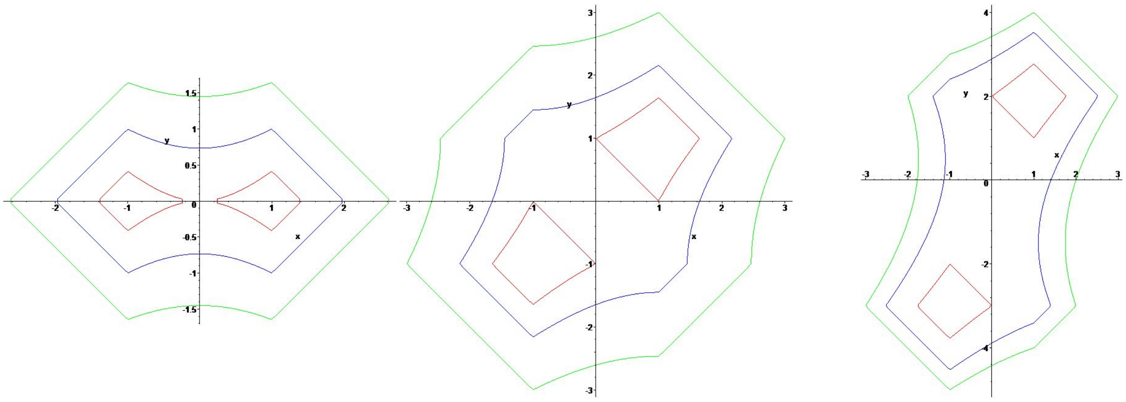
Örnek 6.26 *Elips ve hiperbol kısımında ele alındığı biçimiyle $S-$metrik bir alışılmış metrikden üretilebileceği gibi alışılmış metrikden üretilemeyen $S-$metriklerde vardır. Bunun için burada Örnek 3.1 de verilen iki $S-$metrik örneği ele alınacaktır. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X$ için*

$$S_1(x, y, z) = |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |y_2 - z_2|$$

ve

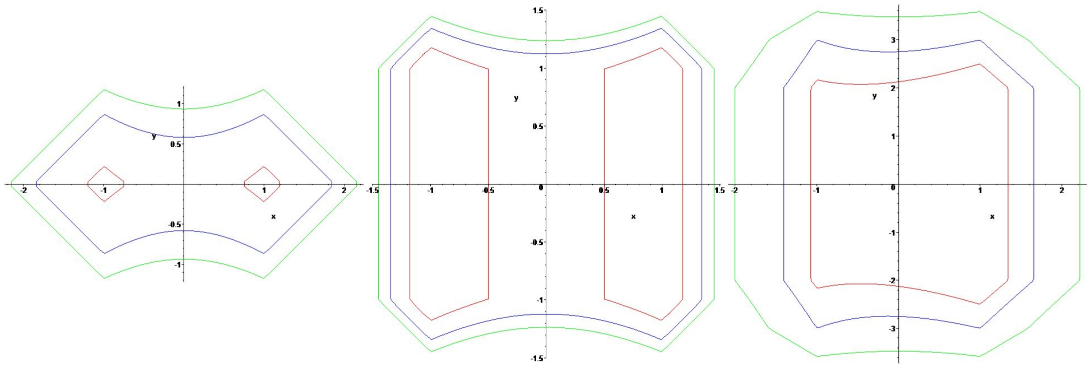
$$S_2(x, y, z) = |x_1 - z_1| + |x_1 + z_1 - 2y_1| + |x_2 - z_2| + |x_2 + z_2 - 2y_2|$$

şeklinde tanımlı $S-$metrikleri ele alınsın. Buna göre şekil 6.7 de yer alan grafiklerin herbirinde a^2 parametresinin farklı değerleri ve S_1, $S-$metriği için olmak üzere sırasıyla odakları $F_1 = (1,0)$, $F_2 = (-1,0)$ ve $a^2 = 1,3,6$ olan Cassini eğrileri, odakları $F_1 = (1,1)$, $F_2 = (-1,-1)$ ve $a^2 = 3,6,12$ olan Cassini eğrileri ve odakları $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (-1,-3)$ ve $a^2 = 6,13,18$ olan Cassini eğrileri görülmektedir.



Şekil 6.7 $C_S[(1,0),(-1,0),a_1^2]$, $C_S[(1,1),(-1,-1),a_2^2]$, $C_S[(1,2),(-1,-3),a_3^2]$, $a_1^2 = 1,3,6$, $a_2^2 = 3,6,12$, $a_3^2 = 6,13,18$

Aynı yolla şekil 6.8 de yer alan grafiklerin herbirinde a^2 parametresinin farklı değerleri ve S_2, $S-$metriği için sırasıyla odakları F_1=$(1,0)$, F_2=$(-1,0)$ ve a^2=$2,10,15$ olan Cassini eğrileri, odakları F_1=$(1,1)$, F_2=$(-1,-1)$ ve a^2=$15,18,20$ olan Cassini eğrileri ve odakları F_1=$(1,2)$, F_2=$(-1,-3)$ ve a^2=$50,60,80$ olan Cassini eğrileri görülmektedir.

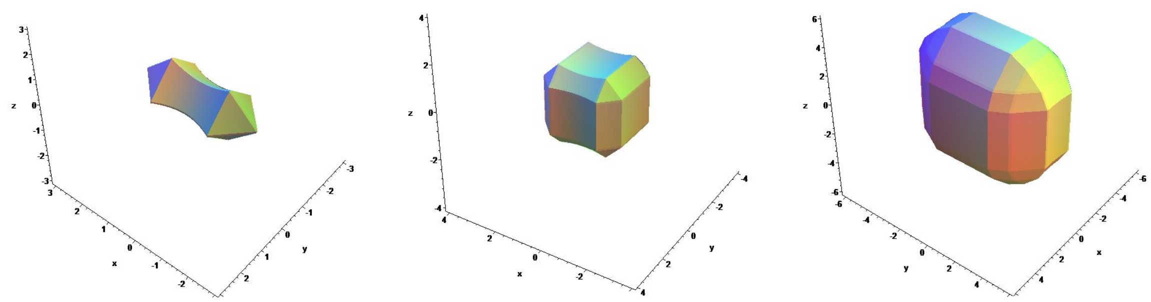


Şekil 6.8 $C_S\left[(1,0),(-1,0),a_1^2\right]$, $C_S\left[(1,1),(-1,-1),a_2^2\right]$, $C_S\left[(1,2),(-1,-3),a_3^2\right]$, $a_1^2=2,10,15$, $a_2^2=15,18,20$, $a_3^2=50,60,80$

$X=\mathbb{R}^3$ *olmak üzere her* $x=(x_1,x_2,x_3)\,,y=(y_1,y_2,y_3)\,,z=(z_1,z_2,z_3)\in X$ *için*

$$S_3(x,y,z)=\sum_{i=1}^{3}\left[|x_i-z_i|+|x_i+z_i-2y_i|\right]$$

şeklinde tanımlı $S-$*metriği verilmiş olsun. Şekil 6.9 da bu* $S-$*metriği için sırasıyla odakları* $F_1=(1,0,0)\,,F_2=(-1,0,0)$ *ve* $a^2=12$ *olan Cassini eğrisi, odakları* $F_1=(1,1,1)\,,F_2=(-1,-1,-1)$ *ve* $a^2=50$ *olan Cassini eğrisi ve odakları* $F_1=(1,2,3)\,,F_2=(-1,3,-2)$ *ve* $a^2=250$ *olan Cassini eğrisi görülmektedir.*



Şekil 6.9 $C_S\left[(1,0,0),(-1,0,0),12\right]$, $C_S\left[(1,1,1),(-1,-1,-1),50\right]$, $C_S\left[(1,2,3),(-1,3,-2),250\right]$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen $S-$metrik ile oluşturulan $S-$metrik uzaydaki Cassini eğrileri arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 6.7 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde $S-$metrik uzayındaki $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi, (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $C_d\left[F_1, F_2, \dfrac{a^2}{4}\right]$ Cassini eğrisidir.*

İspat *$S-$metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$S\left(x, y, z\right) = d\left(x, z\right) + d\left(y, z\right)$$

olacağından açıkca

$$S\left(x, x, y\right) = d\left(x, y\right) + d\left(x, y\right) = 2d\left(x, y\right)$$

olur. O halde $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi için

$$\begin{aligned} S\left(x, x, F_1\right).S\left(x, x, F_2\right) = a^2 \quad &\Rightarrow 2d\left(x, F_1\right).2d\left(x, F_2\right) = a^2 \\ &\Rightarrow d\left(x, F_1\right).d\left(x, F_2\right) = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $C_d\left[F_1, F_2, \dfrac{a^2}{4}\right]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.3 *$X \neq \emptyset$ bir küme, (X, d) bir alışılmış metrik uzay ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $C_d\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi $S-$metrik uzayındaki $C_S\left[F_1, F_2, 4a^2\right]$ Cassini eğrisidir.*

Tanım 6.6 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$, $(X,\ S)$ metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için $Tx = x$ ise $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisine T dönüşümünün sabit Cassini eğrisi denir.*

Teorem 6.22 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$, odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1).S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$ için
$(C_1^S 1)$ $\quad S(x,x,Tx) \le \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_1^S 2)$ $\quad \varphi(Tx) \ge a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$, (X,S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1).\ S(x,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(C_1^S 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\le \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= S(x,x,F_1).S(x,x,F_2) - S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) \\ &= a^2 - S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) \end{aligned} \tag{6.5}$$

elde edilir. T dönüşümü $(C_1^S 2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$ Cassini eğrisinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2) > a^2$ ise yani Tx noktası Cassini eğrisinin dışında ise (6.5) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Dolayısıyla $S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2) = a^2$ olmalıdır. Aksi taktirde (6.5) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bir çelişkidir. Yani Tx noktası Cassini eğrisinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $S(x,\ x,\ Tx) \le a^2 - S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2) = a^2 - a^2 = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_S\left[F_1,F_2,a^2\right]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 6.27 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |x-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\left[1,2,24\right]$ Cassini eğrisi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{2x^2-3x-8}{3}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\left[1,2,24\right] = \{-1,\ 4\}$ için $(C_1^S 1)$ ve $(C_1^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_S\left[1,2,24\right]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $C_S\left[3,0,16\right]$, $C_S\left[4,-1,0\right]$ ve $C_S\left[0,3,16\right]$ Cassini eğrilerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin Cassini eğrilerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat tüm Cassini eğrilerinin de T altında invaryant kaldığı* *anlamına gelmez. Örneğin $C_S[2,4,8]$, $C_S[3,5,10]$ ve $C_S[1,2,16]$ Cassini eğrileri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.28 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |x-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S[1,2,24]$ Cassini eğrisi ve $T:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{-x+39}{20}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S[1,2,24] = \{-1,\ 4\}$ için $(C_1^S 1)$ koşulu*
$x=-1$ *için* $6 \leq 24 - 0 = 24$
$x = 4$ *için* $\frac{9}{2} \leq 24 - \frac{3}{4} = \frac{93}{4}$
olup sağlanır iken açıkça $(C_1^S 2)$ koşulu
$x=-1$ *için* $0 \geq 6$
$x=4$ *için* $\frac{3}{4} \geq 6$
olacağından sağlanmaz. Bu durumda $C_S[1,2,24]$, T altında invaryant değildir.

Örnek 6.29 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |x-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S[1,2,24]$ Cassini eğrisi ve $T:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 2x$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S[1,2,24] = \{-1,\ 4\}$ için $(C_1^S 1)$ koşulu*
$x=-1$ *için* $2 \leq 24 - 48$
$x=4$ *için* $8 \leq 6 - 168$
olup sağlanmaz iken açıkça $(C_1^S 2)$ koşulu
$x=-1$ *için* $48 \geq 24$
$x=4$ *için* $168 \geq 24$
olacağından sağlanır. Ancak $C_S[1,2,24]$, T dönüşümü altında invaryant değildir.

Teorem 6.23 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $C_S[F_1,F_2,a^2]$, $(X,\ S)$ metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1).S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın.Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_S[F_1,F_2,a^2]$ için,
$(C_2^S 1)$ $\quad S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$
$(C_2^S 1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_S[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $C_S[F_1,F_2,a^2]$, (X,S) $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış* *olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm ü alınsın. Bu takdirde* $x \in C_S [F_1, F_2, a^2]$ *herhangi bir nokta olmak üzere.* $(C_2^S 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \\ &= S(x,x,F_1).S(x,x,F_2) + S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) - 2a^2 \\ &= a^2 + S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) - 2a^2 \\ &= S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) - a^2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

elde edilir. $(C_2^S 1)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $C_S [F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre* Tx *noktası Cassini eğrisinin içinde ise yani* $S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2) < a^2$ *ise* (6.6) *eşitsizliği* $S(x,\ x,\ Tx) < 0$ *formuna dönüşür. Ancak uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde* $S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2) = a^2$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası Cassini eğrisinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,* $S(Tx,\ Tx,\ x) \leq S(Tx,\ Tx,\ F_1).\ S(Tx,\ Tx,\ F_2) - a^2 = a^2 - a^2 = 0$ *elde edilir. Bu durumda* $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in C_S [F_1, F_2, a^2]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $C_S [F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisini sabit bırakır.*

Örnek 6.30 $S(x,\ y,\ z) = |z - y| + |z - 2y + x|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $C_S [-2, 2, 48]$ *Cassini eğrisi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $Tx = 3x^2 + x - 48$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x \in C_S [-2, 2, 48] = \{-4,\ 4\}$ *için* $(C_2^S 1)$ *ve* $(C_2^S 2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $C_S [-2, 2, 48]$ *Cassini eğrisi,* T *dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile* $C_S [-1, 1, 60]$ *,* $C_S \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 63\right]$ *ve* $C_S \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 55\right]$ *Cassini eğrilerinin de* T *dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir.* T *altında invaryant kalan Cassini eğrisi örnekleri çoğaltılabilir. Fakat bu durum tüm Cassini eğrilerinin* T *altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin* $C_S [2, 4, 8]$*,* $C_S [3, 5, 10]$ *ve* $C_S [1, 2, 24]$ *Cassini eğrileri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 6.31 $S(x,\ y,\ z) = |z - y| + |z - 2y + x|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $C_S [-2, 2, 48]$ *Cassini eğ risi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $Tx = 2x + 1$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x \in C_S [-2, 2, 48] = \{-4,\ 4\}$ *için* $(C_2^S 1)$ *koşulu*
$x = -4$ *için* $6 \leq 48 + 180 - 96 = 132$
$x = 4$ *için* $10 \leq 48 + 308 - 96 = 260$
olup sağlanıyor iken açıkça $(C_2^S 2)$ *koşulu*
$x = -4$ *için* $180 \leq 48$
$x = 4$ *için* $308 \leq 48$
olacağından sağlanmaz. Dolayısıyla $C_S [-2, 2, 48]$ *Cassini eğrisi* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 6.32 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |z-2y+x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\,[-2,2,48]$ Cassini eğrisi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{1}{2}x + 1$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\,[-2,2,48] = \{-4,\ 4\}$ için $(C_2^S 1)$ koşulu*
$x = -4$ için $6 \leq 48 + 12 - 96 = -36$
$x = 4$ için $2 \leq 48 + 20 - 96 = -28$
olacağından sağlanmaz iken apaçık olarak $(C_2^S 2)$ koşulu
$x = -4$ için $12 \leq 48$
$x = 4$ için $20 \leq 48$
olup sağlanır. Ancak $C_S\,[-2,2,48]$ Cassini eğrisi T nin sabit Cassini eğrisi değildir.

Teorem 6.24 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $C_S\,[F_1,F_2,a^2]$, $(X,\ S)$ metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1).S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_S\,[F_1,F_2,a^2]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için
$(C_3^S 1)$ $\quad S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_3^S 2)$ $\quad h.S(x,x,Tx) + \varphi(Tx) \geq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_S\,[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $C_S\,[F_1,F_2,a^2]$, (X,S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1).\ S(x,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_S\,[F_1,F_2,a^2]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(C_3^S 1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(C_3^S 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= S(x,x,F_1)S(x,x,F_2) - S(Tx,Tx,F_1)S(Tx,Tx,F_2) \\
&= a^2 - S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) \\
&\leq hS(x,x,Tx){+}S(Tx,Tx,F_1)S(Tx,Tx,F_2){-}S(Tx,Tx,F_1)S(Tx,Tx,F_2) \\
&\leq h.S(x,x,Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)S(x,\ x,\ Tx) \geq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $S(x,\ x,\ Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in C_S\,[F_1,F_2,a^2]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_S\,[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi sabit bırakır.

Örnek 6.33 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |x-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\,[1,-3,20]$ Cassini eğrisi ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx = x^2+3x-8$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\,[1,-3,20] = \{-4,\ 2\}$ için (C_3^S1) ve (C_3^S2) koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_S\,[1,-3,20]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $C_S\left[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2},28\right]$, $C_S\,[0,-2,32]$ ve $C_S\left[-1+\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2},34\right]$ Cassini eğrilerinin de T nin sabit Cassini eğrileri olduğu görülebilir. T altında invaryant kalan Cassini eğrisi örnekleri çoğaltılabilir. Fakat bu durum tüm Cassini eğrilerinin T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $C_S\,[2,-2,48]$, $C_S\,[2,4,8]$ ve $C_S\,[1,2,16]$ Cassini eğrileri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.34 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |x-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\,[1,-3,20]$ Cassini eğ risi ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx = \frac{11x-4}{12}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\,[1,-3,20] = \{-4,\ 2\}$ için (C_3^S1) koşulu*
$x=-4$ için $0 \le 20-20 = 0$
$x=2$ için $1 \le 20-9 = 11$
olup açıkça sağlanıyor iken (C_3^S2) koşulu $h\in[0,\ 1)$ olmak üzere
$x=-4$ için $h.0+20 \ge 20$
$x=2$ için $h.1+9 \ge 20$
olacağından sağlanmaz. Dolayısıyla $C_S\,[1,-3,20]$ Cassini eğrisi T altında invaryant değildir.

Örnek 6.35 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |x-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\,[1,-3,20]$ Cassini eğrisi ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx = 3x+1$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\,[1,-3,20] = \{-4,\ 2\}$ için (C_3^S1) koşulu*
$x=-4$ için $14 \le 20-384 = -364$
$x=2$ için $10 \le 20-240 = -220$
olacağından sağlanmaz iken (C_3^S2) koşulu $h\in[0,\ 1)$ olmak üzere
$x=-4$ için $h.14+384 \ge 20$
$x=2$ için $h.10+240 \ge 20$
olup sağlanır. Ancak $C_S\,[1,-3,20]$ Cassini eğrisi T altında invaryant değildir.

Teorem 6.25 *(X,S) bir metrik uzay, $C_S\,[F_1,F_2,a^2]$, (X,S) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1).S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için,
$(C_4^S 1) \quad S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$
$(C_4^S 2) \quad S(x,x,Tx) + \varphi(Tx) \leq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T döüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X,S) $S-$metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1).S(x,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere, T dönüşümü $(C_4^S 1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak φ fonksiyonunun tanımı ve S metriğinin ikinci aksiyomu gereğince*

$$\begin{aligned}
S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \\
&= S(x,x,F_1).S(x,x,F_2) + S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) - 2a^2 \\
&= S(Tx,Tx,F_1).S(Tx,Tx,F_2) - a^2 \\
&\leq S(Tx,Tx,F_1)S(Tx,Tx,F_2)\text{-}S(x,x,Tx)\text{-}S(Tx,Tx,F_1)S(Tx,Tx,F_2) \\
&= -S(x,x,Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2S(x,\ x,\ Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda S bir $S-$metrik olduğundan dolayı $S(x,\ x,\ Tx) = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için $Tx = x$ olduğundan T dönüşümü $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 6.36 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |z-2y+x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\left[3,0,40\right]$ Cassini eğrisi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{x^2-x-10}{2}$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\left[3,0,40\right] = \{-2,\ 5\}$ için $(C_4^S 1)$ ve $(C_4^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_S\left[3,0,40\right]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $C_S\left[2,1,48\right]$, $C_S\left[\frac{3}{2},\frac{3}{2},49\right]$ ve $C_S\left[\frac{5}{2},\frac{1}{2},45\right]$ Cassini eğrilerinin de T nin sabit Cassini eğrileri olduğu görülebilir. T altında invaryant kalan Cassini eğrisi örnekleri çoğaltılabilir. Fakat bu durum tüm Cassini eğrilerinin T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $C_S\left[-2,2,48\right]$, $C_S\left[1,-1,20\right]$ ve $C_S\left[2,4,8\right]$ Cassini eğrileri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.37 *$S(x,\ y,\ z) = |z-y| + |z-2y+x|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $C_S\left[3,0,40\right]$ Cassini eğrisi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 4x+2$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in C_S\left[3,0,40\right] = \{-2,\ 5\}$ için $(C_4^S 1)$ koşulu*
$x = -2$ *için* $8 \leq 40 + 216 - 80 = 176$
$x = 5$ *için* $34 \leq 40 + 1672 - 80 = 1632$

olup sağlanıyor iken apaçık olarak $(C_4^S 2)$ *koşulu*
$x = -2$ *için* $8 + 216 \leq 40$
$x = 5$ *için* $34 + 1672 \leq 40$
olacağından sağlanmaz. Dolayısıyla $C_S[3, 0, 40]$ *,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 6.38 $S(x,\ y,\ z) = |z - y| + |z - 2y + x|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $C_S[3, 0, 40]$ *Cassini eğrisi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $Tx = \frac{-x+5}{2}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x \in C_S[3, 0, 40] = \{-2,\ 5\}$ *için* $(C_4^S 1)$ *koşulu*
$x = -2$ *için* $11 \leq 40 + 7 - 80 = -33$
$x = 5$ *için* $10 \leq 40 + 0 - 80 = -40$
olacağından sağlanmaz iken açıkça $(C_4^S 2)$ *koşulu*
$x = -2$ *için* $11 + 7 \leq 40 \Rightarrow 18 \leq 40$
$x = 5$ *için* $10 + 0 \leq 40 \Rightarrow 10 \leq 40$
olup sağlanır. Ancak $C_S[3, 0, 40]$*,* T *altında invaryant değildir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 6.22-6.25 ile $S-$metrik uzayda $F_1,\ F_2$ odaklı $C_S[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit Cassini eğrilerinin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler $S-$metrik uzayda birden fazla sabit Cassini eğrisine sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 6.8 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay ve* $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ *ile* $C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ (X, S) $S-$*metrik uzayında iki Cassini eğrisi olsun. Bu takdirde* $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ *ile* $C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ *Cassini eğrilerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme ve* S*,* X *üzerinde bir* $S-$*metrik olmak üzere* (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay olsun.* $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ *ve* $C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ *de* $F_{11},\ F_{12}$ *odaklı ve* $F_{21},\ F_{22}$ *odaklı iki Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* P *noktası* $S(F_{11},\ F_{11},\ P).\ S(F_{12},\ F_{12},\ P) \neq a_1^2$ *ve* $S(F_{21},\ F_{21},\ P).\ S(F_{22},\ F_{22},\ P) \neq a_2^2$ *olacak şekilde* (X, S) *metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2] \cup C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2] \ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0, \infty)$ *dönüşümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_1(x) = S(x,\ x,\ F_{11}).\ S(x,\ x,\ F_{12})$ *ve* $\varphi_2(x) = S(x,\ x,\ F_{21}).\ S(x,\ x,\ F_{22})$ *olacak* *şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ ve $C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ Cassini eğrileri için $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_S^j 1)$ve $(C_S^j 2)$ koşullarını sağlar. O halde Teorem 6.22-6.25 gereğince açıkça $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ ve $C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ Cassini eğrileri T dönüşümünün sabit Cassini eğrileridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ ve $C_S[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ Cassini eğrilerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili Cassini eğrileri tamamiyle keyfidir.*

Önerme 6.9 *(X, S) bir $S-$metrik uzay ve $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$, ..., $C_S[F_{n1}, F_{n2}, a_n^2]$ (X, S) $S-$ metrik uzayında n tane Cassini eğrisi olsun. Bu takdirde $C_S[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$, ..., $C_S[F_{n1}, F_{n2}, a_n^2]$ Cassini eğrilerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, S) $S-$metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 6.8 in ispatına benzer olarak $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup_{i=1}^{n} C_S[F_{i1}, F_{i2}, a_i^2] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = S(x,\ x,\ F_{i1}).\ S(x,\ x,\ F_{i2})$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $S(x,\ x,\ F_{i1}).\ S(x,\ x,\ F_{i2}) \neq a_i^2$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $C_S[F_{i1}, F_{i2}, a_i^2]$ Cassini eğrilerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur. elde edilir.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, S) $S-$metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit Cassini eğrisine sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 6.26-6.31 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 6.26 *(X, S) bir $S-$metrik uzay , $C_S[F_1, F_2, a^2]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^S 1)$ ve $(C_1^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in C_S[F_1, F_2, a^2]$, $y \in X \setminus C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq hS(x, x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_S[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $C_S[F_1, F_2, a^2]$, $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $y \in X \setminus C_S[F_1, F_2, a^2]$ *noktaları için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $S(Tx,\ Tx,\ Ty) \leq hS(x,\ x,\ y)$ *koşulunu sağlasın. Buna göre* $C_S[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit Cassini eğrisi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $v \in C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$S(u, u, v) = S(Tu, Tu, Tv) \leq h.S(u, u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $C_S[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^S 1)$ve $(C_1^S 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^S 1)$ve $(C_i^S 2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 6.27 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $C_S[F_1, F_2, a^2]$, $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^S 1)$*ve* $(C_i^S 2)$ *koşullarını sa ğlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $y \in X \setminus C_S[F_1, F_2, a^2]$ *noktaları için*

$$S(Tx, Tx, Ty) < \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_S[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

İspat (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $C_S[F_1, F_2, a^2]$, $(X,\ S)$ $S-$*metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $y \in X \setminus C_S[F_1, F_2, a^2]$ *noktaları için*

$$S(Tx, Tx, Ty) < \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $C_S[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit Cassini eğrisi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere*

$u \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $v \in C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$\begin{aligned} S(u,u,v) &= S(Tu,Tu,Tv) \\ &< \max\{S(u,u,v), S(Tu,Tu,u), S(Tv,Tv,v), S(Tv,Tv,u), S(Tu,Tu,v)\} \\ &= S(u,u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $C_S[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 6.28 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $C_S[F_1, F_2, a^2]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_i^S1)ve (C_i^S2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $y \in X \setminus C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda\left[S(x, x, Tx) + S(y, y, Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_S[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 6.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde $C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $v \in C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \lambda\left[S(u,u,Tu) + S(v,v,Tv)\right] = \lambda\left[S(u,u,u) + S(v,v,v)\right] = 0$$

elde edilir. Buna göre $S(u,\ u,\ v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $C_S[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 6.29 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $C_S[F_1, F_2, a^2]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere (C_i^S1)ve (C_i^S2) koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $y \in X \setminus C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/3)$ için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda\left[S(x, x, Ty) + S(y, y, Tx)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_S[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 6.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde $C_S[F_1, F_2, a^2]$ ve $C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre*

$u \neq v$ olmak üzere $u \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $v \in C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,

$$\begin{aligned} S(u,u,v) &= S(Tu,Tu,Tv) \\ &\leq \lambda.\left[S(u,u,Tv)+S(v,v,Tu)\right] \\ &= \lambda.\left[S(u,u,v)+S(v,v,u)\right] \\ &= 2\lambda S(u,u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/2)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 6.30 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğ risi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^S 1)$ve $(C_i^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $y \in X \setminus C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere,*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq \alpha S(x,x,Tx) + \beta S(y,y,Ty) + \gamma S(x,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 6.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $v \in C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v) = S(Tu,Tu,Tv) \leq \alpha S(u,u,Tu) + \beta S(v,v,Tv) + \gamma S(u,u,v) = \gamma S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olduğundan açıkça $\gamma < 1$ olacağından bu bir çelişkidir. O halde $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 6.31 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^S 1)$ve $(C_i^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $y \in X \setminus C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve $\lambda + \beta + \gamma < 1$ ve $\lambda + 3\gamma < 1$ olmak üzere,*

$$S(Tx,Tx,Ty) \leq \alpha S(x,x,Ty) + \beta S(y,y,Tx) + \gamma S(x,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 6.26 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ *ve* $C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ *ve* $v \in C_S\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u,u,v)=S(Tu,Tu,Tv) \leq \alpha S(u,u,Tv)+\beta S(v,v,Tu) +\gamma S(u,u,v)=(\lambda+\beta+\gamma)S(u,u,v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda+\beta+\gamma < 1$ *olduğundan bu bir çeli şkidir. O halde* $C_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

6.4 S-Metrik Uzayda Sabit Apollonius Çemberi Teoremleri

Bu kısımda $S-$metrik uzaylarda iki odaklı Apollonius çemberleri için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir Apollonius çemberini sabit bırakması yani sabit Apollonius çemberinin varolma koşulları ve sabit Apollonius çemberinin teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak $S-$metrik uzaylarda iki odaklı Apollonius çemberi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 6.7 (X,S) *bir* $S-$*metrik uzay,* F_1*,* $F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Buna göre*

$$A_S\left[F_1, F_2, a\right] = \{x \in X : S(x,x,F_1)/S(x,x,F_2) = a\}$$

ifadesine odakları F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı Apollonius çemberi denir.*

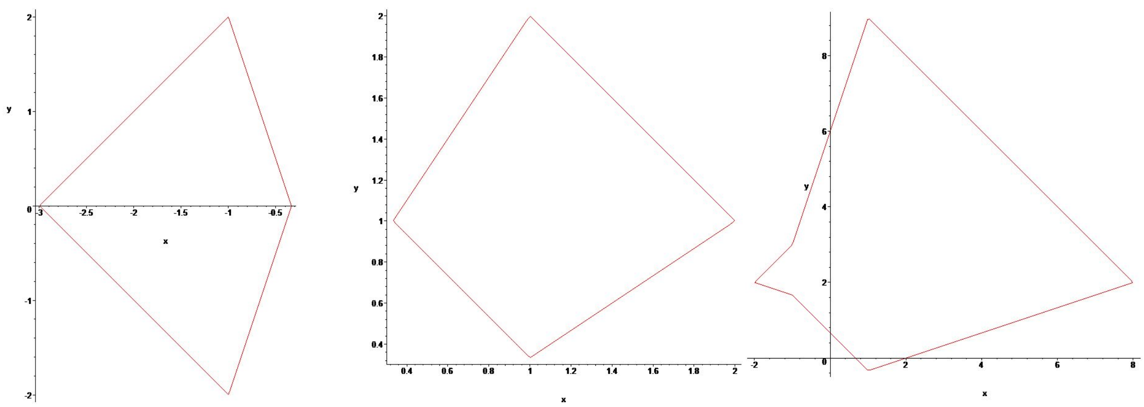
Örnek 6.39 *Bölümün önceki kısımlarında da ele alındığı biçimiyle* $S-$*metrik bir alışılmış metrikden üretilebileceği gibi alışılmış metrikden üretilemeyen* $S-$*metriklerde vardır. Bunun için burada Örnek 3.1 de verilen iki* $S-$*metrik örneği ele alınacaktır.* $X = \mathbb{R}^2$ *olmak üzere her* $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X$ *için*

$$S_1(x,y,z) = |x_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |y_2 - z_2|$$

ve

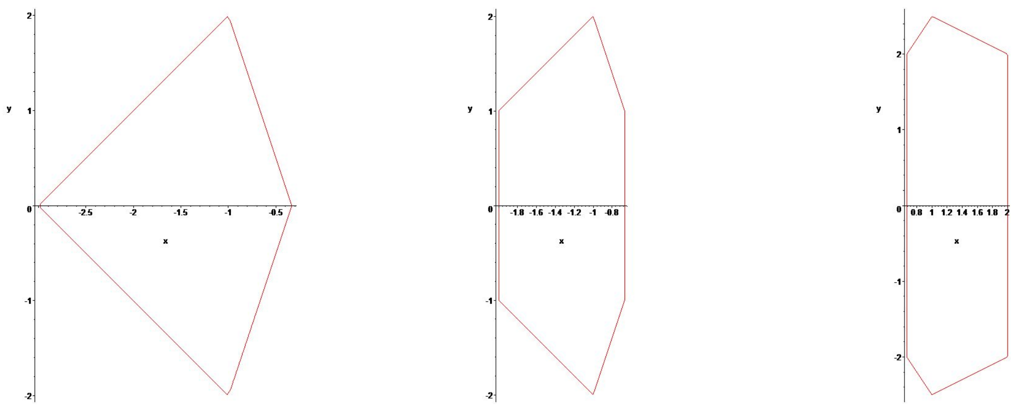
$$S_2(x,y,z) = |x_1 - z_1| + |x_1 + z_1 - 2y_1| + |x_2 - z_2| + |x_2 + z_2 - 2y_2|$$

şeklinde tanımlı $S-$*metrikleri ele alınsın. Buna göre şekil 6.10 da* S_1*,* $S-$*metriği için sırasıyla odakları* $F_1 = (1,0)$*,* $F_2 = (-1,0)$ *ve* $a = 2$ *oranlı olan Apollonius çemberi, odakları* $F_1 = (1,1)$*,* $F_2 = (-1,-1)$ *ve* $a = \frac{1}{5}$ *oranlı olan Apollonius çemberi ve odakları* $F_1 = (1,2)$*,* $F_2 = (-1,-3)$ *ve* $a = \frac{1}{2}$ *oranlı olan Apollonius çemberi görülmektedir.*



Şekil 6.10 $A_S\left[(1,0),(-1,0),2\right]$, $A_S\left[(1,1),(-1,-1),1/5\right]$, $A_S\left[(1,2),(-1,-3),1/2\right]$

Aynı yolla şekil 6.11 de S_2, $S-$metriği için sırasıyla odakları F_1=$(1,0)$, F_2=$(-1,0)$ ve $a=2$ oranlı olan Apollonius çemberi, odakları $F_1=(1,1)$, $F_2=(-1,-1)$ ve $a=2$ oranlı olan Apollonius çemberi ve odakları $F_1=(1,2)$, $F_2=(-1,-3)$ ve $a=\frac{1}{2}$ oranlı olan Apollonius çemberi görülmektedir.

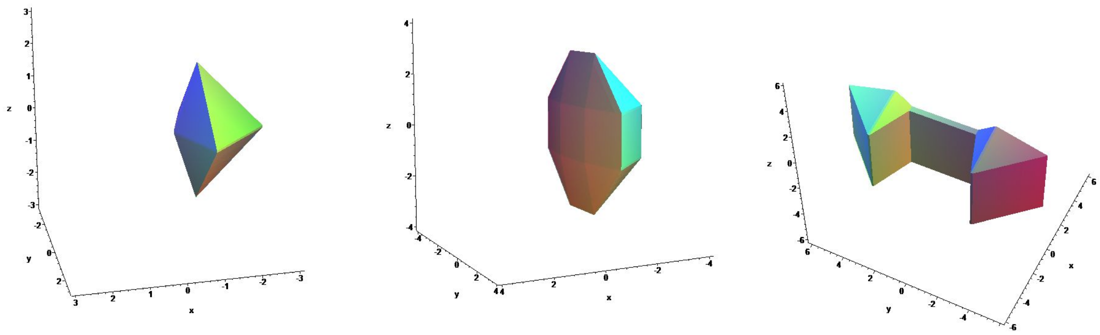


Şekil 6.11 $A_S\left[(1,0),(-1,0),2\right]$, $A_S\left[(1,1),(-1,-1),2\right]$, $A_S\left[(1,2),(-1,-3),1/2\right]$

$X=\mathbb{R}^3$ *olmak üzere her* $x=(x_1,x_2,x_3)\,,y=(y_1,y_2,y_3)\,,z=(z_1,z_2,z_3)\in X$ *için*

$$S_3\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{3}\left[\left|x_i-z_i\right|+\left|x_i+z_i-2y_i\right|\right]$$

şeklinde tanımlı $S-$metriği verilmiş olsun. Şekil 6.12 de bu $S-$metriği için sırasıyla odakları F_1=$(1,0,0)$, F_2=$(-1,0,0)$ ve a=2 oranlı olan Apollonius çemberi, odakları $F_1=(1,1,1)$, $F_2=(-1,-1,-1)$ ve $a=\frac{3}{2}$ oranlı olan Apollonius çemberi ve odakları $F_1=(1,2,3)$, $F_2=(-1,3,-2)$ ve $a=\frac{11}{8}$ oranlı olan Apollonius çemberi görülmektedir.



Şekil 6.12 $A_S\left[(1,0,0),(-1,0,0),2\right]$, $A_S\left[(1,1,1),(-1,-1,-1),3/2\right]$, $A_S\left[(1,2,3),(-1,3,-2),11/8\right]$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen $S-$metrik ile oluşturulan $S-$metrik uzaydaki Apollonius çemberleri arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 6.10 *$X\neq\emptyset$ bir küme ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X,S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde $S-$metrik uzayındaki $A_S\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberi, (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberidir.*

İspat *$S-$metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$S\left(x,y,z\right)=d\left(x,z\right)+d\left(y,z\right)$$

olacağından açıkca

$$S\left(x,x,y\right)=d\left(x,y\right)+d\left(x,y\right)=2d\left(x,y\right)$$

olur. O halde $A_S\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Apollonius çemberi için

$$\begin{aligned}
\frac{S\left(x, x, F_1\right)}{S\left(x, x, F_2\right)}=a \quad & \Rightarrow \frac{2 d\left(x, F_1\right)}{2 d\left(x, F_2\right)}=a \\
& \Rightarrow \frac{d\left(x, F_1\right)}{d\left(x, F_2\right)}=a
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4 *$X \neq \emptyset$ bir küme, (X, d) bir alışılmış metrik uzay ve S, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen $S-$metrik olmak üzere (X, S) bir $S-$metrik uzay olsun. Bu taktirde (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $A_d\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberi $S-$metrik uzayındaki $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberidir.*

Tanım 6.8 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ için $Tx = x$ ise $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberine T d önüşümünün sabit Apollonius çemberi denir.*

Teorem 6.32 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$, odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x)=S(x, x, F_1)/S(x, x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ için
$(A_1^S 1)$ $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x)-\varphi(Tx)$
$(A_1^S 2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1)/S(x,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca T : $X \longrightarrow X$ dönüşüm ü alınsın. Bu takdirde $x \in A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(A_1^S 1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned}
S(x, x, Tx) & \leq \varphi(x)-\varphi(Tx) \\
& = S(x, x, F_1)/S(x, x, F_2)-S(Tx, Tx, F_1)/S(Tx, Tx, F_2) \\
& = a-S(Tx, Tx, F_1)/S(Tx, Tx, F_2) \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. T dönüşümü $(A_1^S 2)$ koşulunu sa ğladığından Tx noktası $A_S[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $S(Tx,\ Tx,\ F_1)/S(Tx,\ Tx,\ F_2) > a$ ise yani Tx noktası Apollonius ç emberinin dışında ise (6.7) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Dolayısıyla $S(Tx,\ Tx,\ F_1)/S(Tx,\ Tx,\ F_2) = a$ olmalıdır. Aksi taktirde (6.7) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası Apollonius çemberinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $S(x,\ x,\ Tx) \leq a - S(Tx,\ Tx,\ F_1)/S(Tx,\ Tx,\ F_2) = a - a = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_S[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 6.40 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |z + x - 2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S[-2, 2, 3]$ Apollonius çemberi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x^2 - 4x + 4$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in A_S[-2, 2, 3] = \{1,\ 4\}$ için $(A_1^S 1)$ ve $(A_1^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A_S[-2, 2, 3]$ Apollonius çemberi, T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $A_S\left[\frac{11}{2}, \frac{13}{4}, 2\right]$, $A_S\left[10, \frac{14}{5}, 5\right]$ ve $A_S\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 2\right]$ Apollonius çemberlerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin Apollonius çemberlerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat bu durum tüm Apollonius çemberlerinin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $A_S[1, 3, 5]$, $A_S[0, 2, 4]$ ve $A_S[-1, 1, 3]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.41 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |z + x - 2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S[-2, 2, 3]$ Apollonius çemberi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{14x-8}{12}$ dönüşümü göz önüne alınsın.*
Her $x \in A_S[-2, 2, 3] = \{1,\ 4\}$ için $(A_1^S 1)$ koşulu
$x = 1$ için $1 \leq 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$
$x = 4$ için $0 \leq 3 - 3 = 0$
olacağından sağlanırken apaçık olarak $(A_1^S 2)$ koşulu
$x = 1$ için $\frac{5}{3} \geq 3$
$x = 4$ için $3 \geq 3$
olup sağlanmaz. Ayrıca $A_S[-2, 2, 3]$, T altında invaryant değildir.

Örnek 6.42 *$S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |z + x - 2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S[-2, 2, 3]$ Apollonius çemberi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{-x+7}{2}$ dönüşümü göz önüne alınsın.*
Her $x \in A_S[-2, 2, 3] = \{1,\ 4\}$ için $(A_1^S 1)$ koşulu
$x = 1$ için $4 \leq 3 - 5 = -2$
$x = 4$ için $5 \leq 3 - 7 = -4$
olup sağlanmaz iken açıkça $(A_1^S 2)$ koşulu

$x = 1$ *için* $5 \geq 3$
$x = 4$ *için* $7 \geq 3$
olacağından sağlanır. Ancak $A_S\,[-2,2,3]$, T *dönüşümü altında invaryant değildir.*

Teorem 6.33 (X,S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $A_S\,[F_1,F_2,a]$, (X,S) $S-$*metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1)/S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_S\,[F_1,F_2,a]$ *için,*
$(A_2^S 1)$ $\quad S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$
$(A_2^S 1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_S\,[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* S*,* X *üzerinde bir* $S-$*metrik olsun.* $A_S\,[F_1,F_2,a]$, (X,S) $S-$*metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1)/S(x,\ x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in A_S\,[F_1,F_2,a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere.* $(A_2^S 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a \\ &= S(x,x,F_1)/S(x,x,F_2) + S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2) - 2a \\ &= a + S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2) - 2a \\ &= S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2) - a \end{aligned} \tag{6.8}$$

elde edilir. $(A_2^S 1)$ *koşulu sağlandığından dolayı* Tx *noktası* $A_S\,[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre* Tx *noktası Apollonius çemberinin içinde ise yani* $S(Tx,\ Tx,\ F_1)/S(Tx,\ Tx,\ F_2) < a$ *ise* (8.4) *eşitsizliği* $S(x,\ x,\ Tx) < 0$ *formuna dönüşür. Ancak bu durumda uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde* $S(Tx,\ Tx,\ F_1)/S(Tx,\ Tx,\ F_2) = a$ *olmalıdır. Yani* Tx *noktası Apollonius çemberinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,*

$$S(Tx,\ Tx,\ x) \leq S(Tx,\ Tx,\ F_1)/S(Tx,\ Tx,\ F_2) - a = a - a = 0$$

elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in A_S\,[F_1,F_2,a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı T dönüşümü* $A_S\,[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberini sabit bırakır.*

Örnek 6.43 *$S(x,\ y,\ z) = |z-x| + |y-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S\,[0,3,2]$ Apollonius çemberi ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx = x^2 - 7x + 12$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in A_S\,[0,3,2] = \{2,\ 6\}$ için (A_2^S1) ve (A_2^S2) koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A_S\,[0,3,2]$ Apollonius çemberi, T dönüşüm ünün bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $A_S\,[8,5,2]$, $A_S\left[10,\frac{14}{3},3\right]$ ve $A_S\left[5,8,\frac{1}{2}\right]$ Apollonius çemberlerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı gör ülebilir. T nin sabit Apollonius çemberlerinin sayısı ço ğaltılabilir. Fakat bu durum tüm Apollonius çemberlerinin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $A_S\,[1,3,5]$, $A_S\,[-2,2,3]$ ve $A_S\,[0,2,4]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.44 *$S(x,\ y,\ z) = |z-x| + |y-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S\,[0,3,2]$ Apollonius çemberi ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx = \frac{3x+46}{20}$ dönüşümü göz önüne alınsın.*
Her $x \in A_S\,[0,3,2] = \{2,\ 6\}$ için (A_2^S1) koşulu
$x = 2$ için $\frac{6}{5} \leq 3 + \frac{13}{2} - 4 = \frac{11}{2}$
$x = 6$ için $\frac{28}{5} \leq 3 + 16 - 4 = 15$
olup sağlanıyorken açıkça (A_2^S2) koşulu
$x = 2$ için $\frac{13}{2} \leq 2$
$x = 6$ için $16 \leq 2$
olacağından sağlanmaz. Bu durumda $A_S\,[0,3,2]$ Apollonius çemberi T altında invaryant değildir.

Örnek 6.45 *$S(x,\ y,\ z) = |z-x| + |y-z|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S\,[0,3,2]$ Apollonius çemberi ve $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx = \frac{10x+10}{3}$ dönüşümü göz önüne alınsın.*
Her $x \in A_S\,[0,3,2] = \{2,\ 6\}$ için (A_2^S1) koşulu
$x = 2$ için $16 \leq 2 + \frac{10}{7} - 4 = -\frac{4}{7}$
$x = 6$ için $\frac{104}{3} \leq 3 + \frac{70}{61} - 4 = -\frac{9}{61}$
olacağından sağlanmaz iken apaçık olarak (A_2^S2) koşulu
$x = 2$ için $\frac{13}{7} \leq 2$
$x = 6$ için $\frac{70}{61} \leq 2$
olup sağlanır. Ancak $A_S\,[0,3,2]$ Apollonius çemberi T altında invaryant değildir.

Teorem 6.34 *(X,S) bir $S-$metrik uzay, $A_S\,[F_1,F_2,a]$, (X,S) $S-$metrik uzayında odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = S(x,x,F_1)/S(x,x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in A_S\,[F_1,F_2,a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için

$(A_3^S 1)\quad S(x,x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(A_3^S 2)\quad h.S(x,x,Tx) + \varphi(Tx) \geq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_S[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, S, X üzerinde bir $S-$metrik olsun. $A_S[F_1,F_2,a]$, (X,S) $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1)/S(x,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in A_S[F_1,F_2,a]$ herhangi bir nokta olmak üzere T dönüşümü $(A_3^S 1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(A_3^S 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= S(x,x,F_1)/S(x,x,F_2) - S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2) \\ &= a - S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2) \\ &\leq h.S(x,x,Tx) + \varphi(Tx) - \varphi(Tx) \\ &\leq h.S(x,x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)S(x,\ x,\ Tx) \geq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $S(x,\ x,\ Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in A_S[F_1,F_2,a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_S[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 6.46 *$S(x,\ y,\ z) = |x-z| + |z+x-2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S[-1,1,3]$ Apollonius çemberi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x^2 + \frac{7}{2}x - 1$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in A_S[-1,1,3] = \{\frac{1}{2},\ 2\}$ için $(A_3^S 1)$ ve $(A_3^S 2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A_S[-1,1,3]$ Apollonius çemberi, T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile $A_S\left[\frac{11}{4},\frac{13}{8},2\right]$, $A_S\left[\frac{14}{4},\frac{18}{12},3\right]$ ve $A_S\left[\frac{17}{2},\frac{23}{16},4\right]$ Apollonius çemberlerinin de T dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir. Doğal olarak T nin Apollonius çemberlerinin tek olmadığı sonucu ortaya çıkar. Fakat bu durum tüm Apollonius çemberlerinin de T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin $A_S[0,3,2]$, $A_S[1,3,5]$ ve $A_S[8,5,2]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 6.47 *$S(x,\ y,\ z) = |x-z| + |z+x-2y|$ olmak üzere $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$metrik uzayında $A_S[-1,1,3]$ Apollonius çemberi ve $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = \frac{3}{2}x - 1$ dönüşümü göz önüne alınsın. Her $x \in A_S[-1,1,3] = \{\frac{1}{2},\ 2\}$ için $(A_3^S 1)$ koşulu*
$x = \frac{1}{2}$ için $\frac{3}{2} \leq 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

$x = 2$ *için* $0 \leq 3 - 3 = 0$
olup sağlanır iken açıkça $(A_3^S 2)$ *koşulu* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere*
$x = \frac{1}{2}$ *için* $h.\frac{3}{2} + \frac{3}{5} \geq 3$
$x = 2$ *için* $h.0 + 3 \geq 3$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $A_S\,[-1, 1, 3]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 6.48 $S(x,\ y,\ z) = |x - z| + |z + x - 2y|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $A_S\,[-1, 1, 3]$ *Apollonius çemberi ve* $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $Tx = 4x - \frac{5}{4}$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x \in A_S\,[-1, 1, 3] = \{\frac{1}{2},\ 2\}$ *için* $(A_3^S 1)$ *koşulu*
$x = \frac{1}{2}$ *için* $\frac{1}{2} \leq 3 - 7 = -4$
$x = 2$ *için* $\frac{19}{2} \leq 3 - \frac{31}{23} = \frac{38}{23}$
olup açıkça sağlanmaz iken $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $(A_3^S 2)$ *koşulu*
$x = \frac{1}{2}$ *için* $h.\frac{1}{2} + \frac{7}{4} \geq 3$
$x = 2$ *için* $h.\frac{19}{2} + \frac{31}{23} \geq 3$
olacağından sağlanır. Ancak $A_S\,[-1, 1, 3]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant değildir.*

Teorem 6.35 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay ,* $A_S\,[F_1, F_2, a]$, F_1, F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = S(x, x, F_1)/S(x, x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_S\,[F_1, F_2, a]$ *için*
$(A_4^S 1)$ $\quad S(x, x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$
$(A_4^S 2)$ $\quad S(x, x, Tx) + \varphi(Tx) \leq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_S\,[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* S*,* X *üzerinde bir* $S-$*metrik olsun.* $A_S\,[F_1, F_2, a]$, (X, S) $S-$*metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı,* a *oranlı bir Apollonius çemberi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = S(x,\ x,\ F_1)/S(x,\ x,\ F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca*
$T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in A_S\,[F_1, F_2, a]$ *herhangi bir nokta olmak*

üzere (A_4^S1) *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımı ve*(A_4^S2) *koşulu gereğince*

$$\begin{aligned} S(x,x,Tx) &\leq \varphi(x)+\varphi(Tx)-2a \\ &= S(x,x,F_1)/S(x,x,F_2)+S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2)-2a \\ &= S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2)-a \\ &\leq S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2)\text{-}S(x,x,Tx)\text{-}S(Tx,Tx,F_1)/S(Tx,Tx,F_2) \\ &= -S(x,x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2S(x,\ x,\ Tx)\leq 0$ *bulunur. Bu durumda* S *bir* $S-$*metrik olduğundan dolayı* $S(x,\ x,\ Tx)=0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx=x$ *olur. Yani her* $x\in A_S[F_1,F_2,a]$ *için* $Tx=x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $A_S[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberini sabit bırakır.*

Örnek 6.49 $S(x,\ y,\ z)=|z-x|+|y-z|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $A_S[0,3,2]$ *Apollonius çemberi ve* $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=x^2-\frac{1}{3}x$ *dönüşümü göz önüne alınsın. Her* $x\in A_S\left[1,2,\frac{1}{2}\right]=\{0,\ \frac{4}{3}\}$ *için* (A_4^S1) *ve* (A_4^S2) *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $A_S\left[1,2,\frac{1}{2}\right]$ *Apollonius çemberi,* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir. Ancak bu noktada biraz dikkat ile* $A_S\left[\frac{8}{3},\frac{8}{9},3\right]$, $A_S[2,1,2]$ *ve* $A_S\left[\frac{10}{3},\frac{10}{12},4\right]$ *Apollonius çemberlerinin de* T *dönüşümü altında invaryant kaldığı görülebilir.* T *nin sabit Apollonius çemberlerinin sayısı çoğaltılabilir. Fakat bu durum tüm Apollonius çemberlerinin de* T *altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. Örneğin* $A_S[-1,1,3]$, $A_S[0,3,2]$ *ve* $A_S[8,5,2]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 6.50 $S(x,\ y,\ z)=|z-x|+|y-z|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $A_S[0,3,2]$ *Apollonius çemberi ve* $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=-\frac{x}{16}+\frac{13}{6}$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x\in A_S\left[1,2,\frac{1}{2}\right]=\{0,\ \frac{4}{3}\}$ *için* (A_4^S1) *koşulu*
$x=0$ *için* $\frac{13}{3}\leq\frac{1}{2}+7-1=\frac{13}{2}$
$x=\frac{4}{3}$ *için* $\frac{3}{2}\leq\frac{1}{2}+13-1=\frac{25}{2}$
olup sağlanır iken apaçık olarak (A_4^S2) *koşulu*
$x=0$ *için* $\frac{13}{3}+7\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{34}{3}\leq\frac{1}{2}$
$x=\frac{4}{3}$ *için* $\frac{3}{2}+13\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{29}{2}\leq\frac{1}{2}$
olacağından sağlanmaz. Üstelik $A_S\left[1,2,\frac{1}{2}\right]$ *Apollonius çemberi* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 6.51 $S(x,\ y,\ z)=|z-x|+|y-z|$ *olmak üzere* $(\mathbb{R},\ S)$ $S-$*metrik uzayında* $A_S[0,3,2]$ *Apollonius çemberi ve* $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $Tx=\frac{15}{16}x$ *dönüşümü ele alınsın. Her* $x\in A_S\left[1,2,\frac{1}{2}\right]=\{0,\ \frac{4}{3}\}$ *için* (A_4^S1) *koşulu*

$x = 0$ *için* $0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$
$x = \frac{4}{3}$ *için* $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{6}$
olup sağlanmaz iken açıkça $(A_4^S 2)$ *koşulu*
$x = 0$ *için* $0 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$
$x = \frac{4}{3}$ *için* $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$
olacağından sağlanır. Ancak $A_S\left[1, 2, \frac{1}{2}\right]$ *Apollonius çemberi* T *altında invaryant değildir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 6.32-6.35 ile $S-$metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve a oranlı olan $A_S\left[F_1, F_2, a\right]$ Apollonius çemberini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit Apollonius çemberinin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler $S-$metrik uzayda birden fazla sabit Apollonius çemberine sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 6.11 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay ve* $A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right]$ *ile* $A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right]$ (X, S) $S-$*metrik uzayında iki Apollonius çemberi olsun. Bu takdirde* $A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right]$ *ile* $A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right]$ *Apollonius çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* $(X,\ S)$ *metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme ve* S, X *üzerinde bir* $S-$*metrik olmak üzere* (X, S) *bir metrik uzay olsun.* $A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right]$ *ve* $A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right]$ *de* $F_{11},\ F_{12}$ *odaklı ve* $F_{21},\ F_{22}$ *odaklı iki Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* P *noktası* $S(F_{11},\ F_{11},\ P)/S(F_{12},\ F_{12},\ P) \neq a_1$ *ve* $S(F_{21},\ F_{21},\ P)/S(F_{22},\ F_{22},\ P) \neq a_2$ *olacak şekilde* (X, S) $S-$*metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right] \cup A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right] \ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0, \infty)$ *dönüşümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_1(x) = S(x,\ x,\ F_{11})/S(x,\ x,\ F_{12})$ *ve* $\varphi_2(x) = S(x,\ x,\ F_{21})/S(x,\ x,\ F_{22})$ *olacak şekilde alınsın. Bu takdirde* T *dönüşümü* $\varphi_1(x)$ *ve* $\varphi_2(x)$ *dönüşümleri ile birlikte* $A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right]$ *ve* $A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right]$ *Apollonius çemberleri için* $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_S^j 1)$*ve* $(A_S^j 2)$ *koşullarını sağlar. O halde Teorem 6.32-6.35 gereğince açıkça* $A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right]$ *ve* $A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right]$ *Apollonius çemberleri* T *dönüşümünün sabit Apollonius çemberleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan* $A_S\left[F_{11}, F_{12}, a_1\right]$ *ve* $A_S\left[F_{21}, F_{22}, a_2\right]$ *Apollonius çemberlerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili Apollonius çemberleri tamamiyle keyfidir.*

Önerme 6.12 *(X, S) bir $S-$metrik uzay ve $A_S[F_{11}, F_{12}, a_1]$, ..., $A_S[F_{n1}, F_{n2}, a_n]$ (X, S) $S-$metrik uzayında n tane Apollonius çemberi olsun. Bu takdirde $A_S[F_{11}, F_{12}, a_1]$, ..., $A_S[F_{n1}, F_{n2}, a_n]$ Apollonius çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak ş ekilde (X, S) $S-$metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ d önüşümü vardır.*

İspat *Önerme 6.11 in ispatına benzer olarak $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_S[F_{i1}, F_{i2}, a_i] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = S(x,\ x,\ F_{i1})/S(x,\ x,\ F_{i2})$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olmak üzere $S(x,\ x,\ F_{i1})/S(x,\ x,\ F_{i2}) \neq a_i$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $A_S[F_{i1}, F_{i2}, a_i]$ Apollonius çemberlerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, S) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit Apollonius çemberine sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 6.36-6.41 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 6.36 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $A_S[F_1, F_2, a]$, $(X,\ S)$ $S-$metrik uzayında odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm ü $(A_1^S 1)$ ve $(A_1^S 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in A_S[F_1, F_2, a]$, $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq hS(x, x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $A_S[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir tek sabit Apollonius çemberidir.

İspat *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $A_S[F_1, F_2, a]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ ve $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere $S(Tx,\ Tx,\ Ty) \leq hS(x,\ x,\ y)$ koşulunu sağlasın. Buna göre $A_S[F_1, F_2, a]$ ve*

$A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ Apollonius çemberlerinin T dönüşü münün iki farklı sabit Apollonius çemberi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in A_S[F_1, F_2, a]$ ve $v \in A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$S(u, u, v) = S(Tu, Tu, Tv) \leq h.S(u, u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $A_S[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(A_1^S 1)$ve $(A_1^S 2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(A_i^S 1)$ve $(A_i^S 2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 6.37 *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $A_S[F_1, F_2, a]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(A_i^S 1)$ve $(A_i^S 2)$ ko şullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ ve $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ noktaları için $\lambda \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olmak üzere*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $A_S[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

İspat *(X, S) bir $S-$metrik uzay, $A_S[F_1, F_2, a]$, (X, S) $S-$metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ ve $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ noktaları için $\lambda \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olmak üzere*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda \max\{S(x, x, y), S(Tx, Tx, x), S(Ty, Ty, y), S(Ty, Ty, x), S(Tx, Tx, y)\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $A_S[F_1, F_2, a]$ ve $A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ Apollonius çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit Apollonius çemberi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in A_S[F_1, F_2, a]$ ve $v \in A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,

$$\begin{aligned} S(u, u, v) &= S(Tu, Tu, Tv) \\ &\leq \lambda \max\{S(u, u, v), S(Tu, Tu, u), S(Tv, Tv, v), S(Tv, Tv, u), S(Tu, Tu, v)\} \\ &= S(u, u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu $\lambda \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ olduğundan bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $A_S[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

Teorem 6.38 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $A_S[F_1, F_2, a]$, (X, S) $S-$*metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^S 1)$*ve* $(A_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda [S(x, x, Tx) + S(y, y, Ty)]$$

koşulunu sağlıyorsa $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 6.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} S(u, u, v) &= S(Tu, Tu, Tv) \\ &\leq \lambda. [S(u, u, Tu) + S(v, v, Tv)] \\ &= \lambda. [S(u, u, u) + S(v, v, v)] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $S(u,\ u,\ v) = 0$ *olup* $u = v$ *bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 6.39 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $A_S[F_1, F_2, a]$, (X, S) $S-$*metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^S 1)$*ve* $(A_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/3)$ *için*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \lambda [S(x, x, Ty) + S(y, y, Tx)]$$

koşulunu sağlıyorsa $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 6.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} S(u, u, v) &= S(Tu, Tu, Tv) \\ &\leq \lambda. [S(u, u, Tv) + S(v, v, Tu)] \\ &= \lambda. [S(u, u, v) + S(v, v, u)] \\ &= 2\lambda S(u, u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda \in [0,\ 1/3)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 6.40 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $A_S[F_1, F_2, a]$*,* (X, S) $S-$*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^S 1)$*ve* $(A_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \alpha S(x, x, Tx) + \beta S(y, y, Ty) + \gamma S(x, x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 6.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u, u, v) = S(Tu, Tu, Tv) \leq \alpha S(u, u, Tu) + \beta S(v, v, Tv) + \gamma S(u, u, v) = \gamma S(u, u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 6.41 (X, S) *bir* $S-$*metrik uzay,* $A_S[F_1, F_2, a]$*,* (X, S) $S-$*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^S 1)$*ve* $(A_i^S 2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_S[F_1, F_2, a]$*,* $y \in X \setminus A_S[F_1, F_2, a]$*,* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *ve* $\lambda + 3\gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$S(Tx, Tx, Ty) \leq \alpha S(x, x, Ty) + \beta S(y, y, Tx) + \gamma S(x, x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 6.36 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_S[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_S[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$S(u, u, v) = S(Tu, Tu, Tv) \leq \alpha S(u, u, Tv) + \beta S(v, v, Tu) + \gamma S(u, u, v) = (\lambda + \beta + \gamma) S(u, u, v)$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $A_S[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

7. A$_B-$ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT EĞRİ TEOREMLERİ

Bu kısımda A$_b-$metrik uzaylarda elips, hiperbol, Cassini eğrisi ve Apollonius çemberi kavramları ele alınacaktır. A$_b$-metrik uzaylarda bu eğrilerin sabit kalma koşulları ortaya konulacak sonrasında bu sabit eğrilerin tekliği ile ilgili koşullar sunulacaktır.

7.1 A$_b$-Metrik Uzayda Sabit Elips Teoremleri

Bu kısımda A_b-metrik uzaylarda iki odaklı elipsler için bir dönüşümün bir elipsi sabit bırakması yani sabit elipsin varlık koşulları ve sabit elipsin teklik koşulları ele alınacaktır. Buna göre ilk olarak A_b-metrik uzayda iki odaklı elips ve sabit elips kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 7.1 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* F_1*,* $F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Bu taktirde*

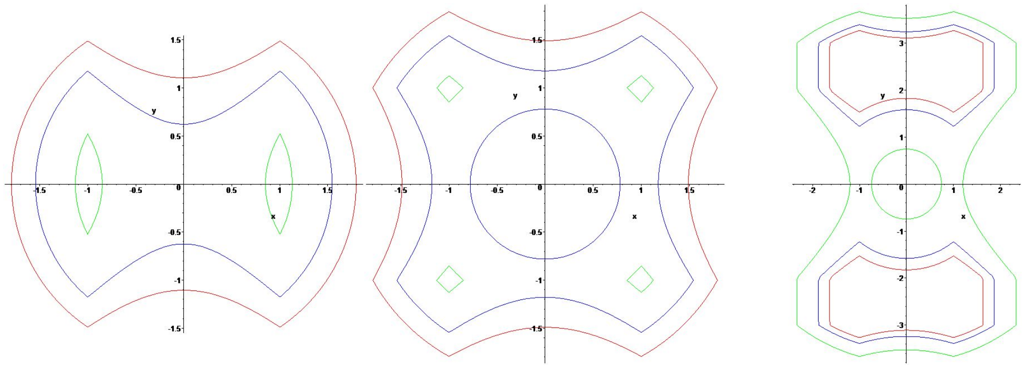
$$E_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right] = \{x \in X : A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2) = 2a\}$$

ifadesine odakları F_1*,* F_2 *asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan elips denir.*

Örnek 7.1 *Temel kavramlar kısımda belirtildiği gibi* A_b-*metrik bir alışılmış metrikden üretilebileceği gibi alışılmış metrikden üretilemeyen* A_b-*metriklerde vardır. Burada Örnek 3.3 de verilen bir alışılmış metrikden üretilemeyen* A_b-*metrik örneği ele alınacaktır.* $X = \mathbb{R}^2,\ n \geq 3$ *ve* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *için* $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ *olmak üzere*

$$A_b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2 - x_{ij}^2\right|\right) + \left|x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\, x_{nj}^2\right|\right]$$

şeklinde tanımlı A_b-*metriği ele alınsın. Buna göre şekil 7.1 de* $n = 10$ *olmak üzere* A_b-*metriği için sırasıyla odakları* $F_1 = (1, 0)\,,\ F_2 = (-1, 0)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 10, 50, 80$ *olan elipsler, odakları* $F_1 = (1, 1)\,,\ F_2 = (-1, -1)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 10, 50, 80$ *olan elipsler ve odakları* $F_1 = (1, 2)\,,\ F_2 = (-1, -3)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 150, 180, 250$ *olan elipsler görülmektedir. Her bir şekilde asal eksen uzunluklarına göre elipsler sırasıyla yeşil, mavi ve kırmızı renkli olarak verilmiştir.*



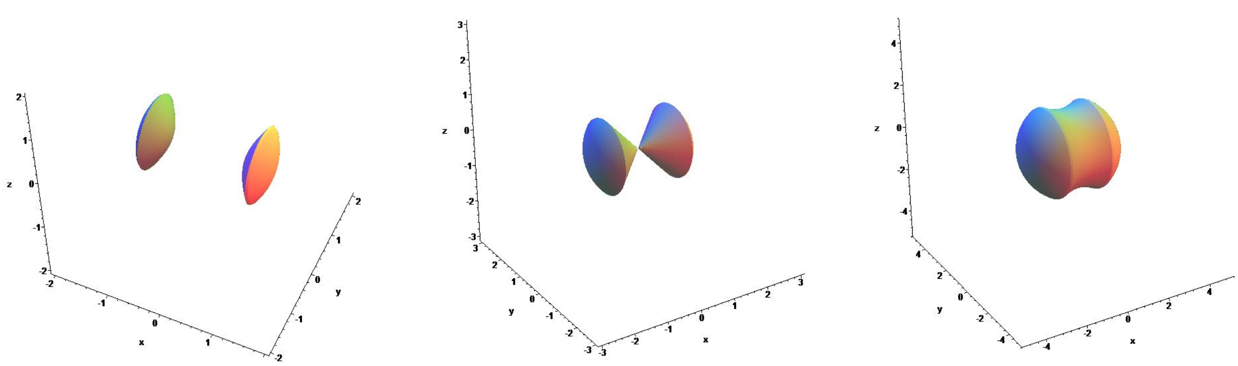
Şekil 7.1 $E_{A_b}\left[(1,0),(-1,0),2a_1\right], E_{A_b}\left[(1,1),(-1,-1),2a_2\right], E_{A_b}\left[(1,2),(-1,-3),2a_3\right]$,

$2a_1 = 10, 50, 80$, $2a_2 = 10, 50, 80$, $2a_3 = 150, 180, 250$

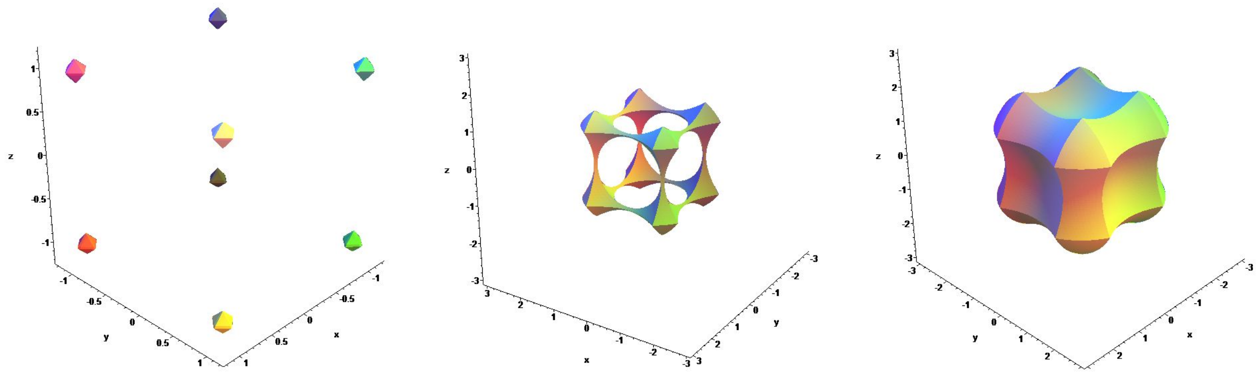
Benzer şekilde $X = \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ *için*

$$A_b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{3}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2 - x_{ij}^2\right|\right) + \left|x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\, x_{nj}^2\right|\right]$$

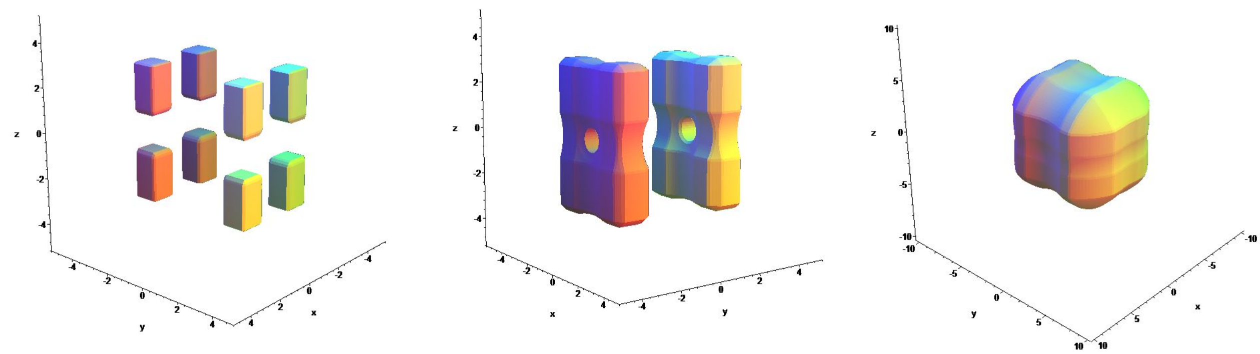
şeklinde tanımlı A_b-*metriği ele alınsın. Bu taktirde, şekil 7.2 de* $3-$*boyulu analitik uzayda tanımlanan* A_b-*metriği için sırasıyla odakları* $F_1 = (1, 0, 0)$, $F_2 = (-1, 0, 0)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 18, 36, 144$ *olan elipsler, şekil 7.3 de odakları* $F_1 = (1, 1, 1)$, $F_2 = (-1, -1, -1)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 10, 40, 100$ *olan elipsler ve şekil 7.4 de ise odakları* $F_1 = (1, 2, 3)$, $F_2 = (-2, -3, -1)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 300, 350, 1000$ *olan elipsler görülmektedir.*



Şekil 7.2 $E_{A_b}\left[(1,0,0),(-1,0,0),2a\right]$, $2a = 18, 36, 144$



Şekil 7.3 $E_{A_b}\left[(1,1,1),(-1,-1,-1),2a\right]$, $2a=10,40,100$



Şekil 7.4 $E_{A_b}\left[(1,2,3),(-2,-3,-1),2a\right]$, $2a=300,350,1000$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen A_b-metrik ile alışılmış metrik uzaydaki elipsler arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 7.1 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X, A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde A_b-metrik uzayındaki $E_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi, (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $E_d\left[F_1, F_2, \frac{2a}{n-1}\right]$ elipsidir.*

İspat *A_b-metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$A_b\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=d\left(x_1,x_n\right)+d\left(x_1,x_2\right)d\left(x_{n-1},x_n\right)$$

olacağından açıkca

$$A_b\left(x,\ldots,x,y\right)=d\left(x,y\right)+\cdots+d\left(x,y\right)=\left(n-1\right)d\left(x,y\right)$$

olur. O halde $E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsi için

$$\begin{aligned} A_b\left(x,\ldots,x,F_1\right)+A_b\left(x,\ldots,x,F_2\right)=2a \quad &\Rightarrow \left(n-1\right)d\left(x,F_1\right)+\left(n-1\right)d\left(x,F_2\right)=2a \\ &\Rightarrow d\left(x,F_1\right)+d\left(x,F_2\right)=\frac{2a}{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $E_d\left[F_1,F_2,\frac{2a}{n-1}\right]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.1 *$X\neq\emptyset$ bir küme, (X,d) bir alışılmış metrik uzay ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X,A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $E_d\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsi A_b-metrik uzayındaki $E_{A_b}\left[F_1,F_2,2\left(n-1\right)a\right]$ elipsidir.*

Tanım 7.2 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$, (X,A_b) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips olsun. $T:X\longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x\in E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$ için $Tx=x$ ise $E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsine T dönüşümünün bir sabit elipsi denir.*

Bu kısımda buradan itibaren verilecek Teorem 7.1-7.4 ile (X,A_b) A_b-metrik uzayında bir $T:X\longrightarrow X$ dönüşümü için sabit elipsin varlığını garanti eden koşullar verilmiştir.

Teorem 7.1 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$, (X,A_b) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=A_b(x,...x,F_1)+A_b(x,...x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, T:$X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$ için

$(E_1^{A_b}1)$ $\quad A_b(x,...x,Tx)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$

$(E_1^{A_b}2)$ $\quad \varphi(Tx)\geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x, ...x,\ F_1) + A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak ü zere $(E_1^{A_b}1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A_b(x, ...x, F_1)\text{+}A_b(x, ...x, F_2)\text{-}A_b(Tx, ..., Tx, F_1)\text{-}A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\ &= 2a - (A_b(Tx, ..., Tx, F_1) + A_b(Tx, ..., Tx, F_2)) \end{aligned} \tag{7.1}$$

elde edilir. T dönüşümü $(E_1^{A_b}2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1) + A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) > 2a$ ise yani Tx noktası elipsin dışında ise (7.1) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Bu nedenle

$$A_b(Tx, \ldots, Tx, F_1) + A_b(Tx, \ldots, Tx, F_2) = 2a$$

olmalıdır. Aksi taktirde (7.1) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası elipsin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,

$$A_b(x, \ldots, x, Tx) \leq 2a - (A_b(Tx, \ldots, Tx, F_1) + A_b(Tx, \ldots, Tx, F_2)) = 2a - 2a = 0$$

elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 7.2 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 2x^2 - x$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[0, 1, (n-1)] = \{0,\ 1\}$ dir ve her $x \in E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ için $(E_1^{A_b}1)$ ve $(E_1^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Burada dikkat edilirse T dönüşümü altında kalan elipslerin sayısı çoğaltılabilir. Örneğin, $E_{A_b}[-1, 1, 2(n-1)]$, $E_{A_b}[2, 0, 2(n-1)]$ ve $E_{A_b}[2, -1, 5(n-1)]$ T dönüşümünün sabit elipsleridir. Ancak bu durum tüm elipslerin T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. $E_{A_b}[1, 3, 4(n-1)]$, $E_{A_b}[2, 3, 4(n-1)]$ ve $E_{A_b}[2, 4, 5(n-1)]$ elipslerinin T altında invaryant kalmadığı görülür.

Örnek 7.3 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x+1}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[0, 1, (n-1)] = \{0,\ 1\}$ için $(E_1^A 1)$ koşulu
$x = 0$ için $(n-1)\frac{1}{4} \leq 1(n-1) - \frac{1}{2}(n-1) \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$
$x = 1$ için $(n-1)0 \leq 1(n-1) - 1(n-1) \Rightarrow 0 \leq 0$
olup sağlanıyor iken açıkça $(E_1^A 2)$ koşulu
$x = 0$ için $\frac{1}{2}(n-1) \geq (n-1) \Rightarrow \frac{1}{2} \geq 1$
$x = 1$ için $(n-1) \geq (n-1) \Rightarrow 1 \geq 1$
olacağından sağlamaz. Ayrıca $E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ elipsi, T altında invaryant değildir.

Örnek 7.4 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x + 2$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[0, 1, (n-1)] = \{0,\ 1\}$ için $(E_1^A 1)$ koşulu
$x = 0$ için $(n-1)4 \leq 1(n-1) - 5(n-1) \Rightarrow 4 \leq -4$
$x = 1$ için $(n-1)4 \leq 1(n-1) - 13(n-1) \Rightarrow 4 \leq -12$
olup sağlanmaz iken açıkça $(E_1^A 2)$ koşulu
$x = 0$ için $5(n-1) \geq (n-1) \Rightarrow 5 \geq 1$
$x = 1$ için $13(n-1) \geq (n-1) \Rightarrow 13 \geq 1$
olacağından sağlanır. Ancak $E_{A_b}[0, 1, (n-1)]$ elipsi, T altında invaryant değildir.

Sonuç 7.2 *(X, A) bir $A-$metrik uzay, $E_A[F_1, F_2, 2a]$, (X, A) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A(x, ...x, F_1) + A(x, ...x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_A[F_1, F_2, 2a]$ için
$(E_1^A 1)$ $\quad A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(E_1^A 2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $E_A[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

Teorem 7.2 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ için
$(E_2^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(E_2^{A_b}1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. $(E_2^{A_b}1)$ koşulundan ve φ fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} A(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2) + A_b(Tx, ..., Tx, F_1) + A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 4a \\ &= 2a + A(Tx, ..., Tx, F_1) + A(Tx, ..., Tx, F_2) - 4a \\ &= A_b(Tx, ..., Tx, F_1) + A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 2a \end{aligned} \tag{7.2}$$

elde edilir. $(E_2^{A_b}2)$ koşulu sağlandığından dolayı Tx noktası $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre Tx noktası elipsin içinde ise yani $A_b(Tx, ..., Tx, F_1) + A_b(Tx, ..., Tx, F_2) < 2a$ ise (7.2) e şitsizliği $A_b(x, ...x, Tx) < 0$ formuna dönüşür. Ancak uzaklığın(metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde $A_b(Tx, ..., Tx, F_1) + A_b(Tx, ..., Tx, F_2) = 2a$ olmalıdır. Yani Tx noktası elipsin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,

$$A_b(x, \ldots, x, Tx) \leq 2a + A_b(Tx, \ldots, Tx, F_1) + A_b(Tx, \ldots, Tx, F_2) - 4a = 2a + 2a - 4a = 0$$

elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ dir. Yani her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 7.5 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A_b:$X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A_b(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[1, 3, 4(n-1)^2]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - 3x + 3$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[1, 3, 4(n-1)^2] = \{1, 3\}$ dir ve her $x \in E_{A_b}[1, 3, 4(n-1)^2]$ için $(E_2^{A_b}1)$ ve $(E_2^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $E_{A_b}[1, 3, 4(n-1)^2]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. T altındaki sabit*

dönüşümlerin sayısı çoğaltılabilir. Örneğin, $E_{A_b}[0,4,10(n-1)^2]$, $E_{A_b}[-1,5,20(n-1)^2]$ *ve* $E_{A_b}[-2,2,2(n-1)^2]$ T *dönüşümün ün sabit elipsleridir. Ancak bu durum tüm elipslerin* T *altında invaryant kaldığı anlamına gelmez.* $E_{A_b}[1,4,5(n-1)^2]$, $E_{A_b}[2,4,4(n-1)]$ *ve* $E_A[1,4,6(n-1)]$ *elipslerinin* T *altında invaryant kalmadığı görülür.*

Örnek 7.6 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]$ *elipsi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{-x+11}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]=\{1,\ 3\}$ *için* (E_2^A1) *koşulu*

$x=1$ *için* $16(n-1)^2\leq 4(n-1)^2+20(n-1)^2-8(n-1)^2\Rightarrow 16\leq 16$

$x=3$ *için* $1(n-1)^2\leq 4(n-1)^2+10(n-1)^2-8(n-1)^2\Rightarrow 1\leq 6$

olup sağlanıyor iken açıkça (E_2^A2) *koşulu*

$x=1$ *için* $20(n-1)^2\leq 8(n-1)^2\Rightarrow 20\leq 8$

$x=3$ *için* $10(n-1)^2\leq 8(n-1)^2\Rightarrow 10\leq 8$

olacağından sağlamaz. Ayrıca $E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]$ *elipsi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.7 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]$ *elipsi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{-x+5}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]=\{1,\ 3\}$ *için* (E_2^A1) *koşulu*

$x=1$ *için* $1(n-1)^2\leq 4(n-1)^2+2(n-1)^2-8(n-1)^2\Rightarrow 1\leq -2$

$x=3$ *için* $4(n-1)^2\leq 4(n-1)^2+4(n-1)^2-8(n-1)^2\Rightarrow 4\leq 0$

olup sağlanmıyor iken açıkça (E_2^A2) *koşulu*

$x=1$ *için* $2(n-1)^2\leq 8(n-1)^2\Rightarrow 2\leq 8$

$x=3$ *için* $4(n-1)^2\leq 8(n-1)^2\Rightarrow 4\leq 8$

olacağından sağlanır. Ancak $E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]$ *elipsi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.3 (X,A) *bir* $A-$*metrik uzay,* $E_A[F_1,F_2,2a]$, (X,A) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için,*

$$\varphi(x)=A(x,...x,F_1)+A(x,...x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, T*:*$X\longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x\in E_A[F_1,F_2,2a]$ *için*

(E_2^A1) $A(x,...x,Tx)\leq\varphi(x)+\varphi(Tx)-4a$

(E_2^A1) $\varphi(Tx)\leq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_A[F_1,F_2,2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir sabit elipsidir.*

Teorem 7.3 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için

$(E_3^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(E_3^{A_b}2)$ $\quad h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1) + A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. T dönüşümü $(E_3^{A_b}1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(E_3^{A_b}2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
A(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= A_b(x, ...x, F_1)\text{+}A_b(x, ...x, F_2)\text{-}A_b(Tx, ..., Tx, F_1)\text{-}A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\
&= 2a - A_b(Tx, ..., Tx, F_1) - A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\
&\leq h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) - \varphi(Tx) \\
&= h.A_b(x, ...x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(1 - h)A_b(x,\ ...x,\ Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $A_b(x,\ ...x,\ Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 7.8 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned}
A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\
&\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[1, 2, 5(n-1)]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 2x^2 - 5x$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[1, 2, 5(n-1)] = \{0,\ 3\}$ dir ve her $x \in E_{A_b}[1, 2, 5(n-1)]$ için $(E_3^{A_b}1)$ ve $(E_3^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $E_{A_b}[1, 2, 5(n-1)]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. Bu T dönüşümü altında sabit kalan elipsleri çoğaltabiliriz.

Örneğin, $E_{A_b}[0,3,9(n-1)]$, $E_{A_b}[-1,4,17(n-1)]$ *ve* $E_{A_b}[-2,5,29(n-1)]$ T *dönüşümünün sabit elipsleridir. Ancak bu durum tüm elipslerin* T *altında invaryant kaldığı anlamına gelmez.* $E_{A_b}[1,4,4(n-1)]$, $E_{A_b}[2,4,5(n-1)]$ *ve* $E_{A_b}[-1,4,6(n-1)]$ *elipslerinin* T *altında invaryant kalmadığı görülür.*

Örnek 7.9 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $E_{A_b}[1,2,5(n-1)]$ *elipsi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{x+3}{3}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in E_{A_b}[1,2,5(n-1)]=\{0,\ 3\}$ *için* (E_3^A1) *koşulu*
$x=0$ *için* $(n-1)\leq 5(n-1)-1(n-1)\Rightarrow 1\leq 4$
$x=3$ *için* $(n-1)\leq 5(n-1)-1(n-1)\Rightarrow 1\leq 4$
olup sağlanıyor iken açıkça (E_3^A2) *koşulu*
$x=0$ *için* $h(n-1)+(n-1)\geq 5(n-1)\Rightarrow h\geq 4$
$x=3$ *için* $h(n-1)+(n-1)\geq 5(n-1)\Rightarrow h\geq 4$
olacağından sağlamaz. Ayrıca $E_{A_b}[1,2,5(n-1)]$ *elipsi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.10 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ *metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $E_{A_b}[1,2,5(n-1)]$ *elipsi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{x+9}{3}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in E_{A_b}[1,2,5(n-1)]=\{0,\ 3\}$ *için* (E_3^A1) *koşulu*
$x=0$ *için* $9(n-1)\leq 5(n-1)-5(n-1)\Rightarrow 9\leq 0$
$x=3$ *için* $(n-1)\leq 5(n-1)-13(n-1)\Rightarrow 1\leq -8$
olup sağlanmıyor iken açıkça (E_3^A2) *koşulu*
$x=0$ *için* $9h(n-1)+5(n-1)\geq 5(n-1)\Rightarrow h\geq 0$
$x=3$ *için* $h(n-1)+13(n-1)\geq 5(n-1)\Rightarrow h\geq -8$
olacağından sağlanır. Ancak $E_{A_b}[1,2,5(n-1)]$ *elipsi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.4 (X,A) *bir* $A-$*metrik uzay,* $E_A[F_1,F_2,2a]$, (X,A) *metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun. Ayrıca* $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için,*

$$\varphi(x)=A(x,...x,F_1)+A(x,...x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_A[F_1, F_2, 2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için

$(E_3^A 1)\quad A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(E_3^A 2)\quad h.A(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \geq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_A[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

Teorem 7.4 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde, T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ için,

$(E_4^{A_b} 1)\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$

$(E_4^{A_b} 2)\quad A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \leq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1) + A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere, T dönüşümü $(E_4^{A_b} 1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak φ fonksiyonunun tanımı ve $(E_4^{A_b} 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\
&= A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2) + A_b(Tx, ..., Tx, F_1) + A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 4a \\
&= \varphi(Tx) - 2a \\
&\leq \varphi(Tx) - [A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx)] \\
&= -A_b(x, ...x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $2A_b(x,\ ...x,\ Tx) \leq 0$ ve $A_b(x,\ ...x,\ Tx) = 0$ olmalıdır. Bu durumda açıkça $Tx = x$ olur. Bu takdirde sonuç olarak her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ i çin T dönüşümü $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsini sabit bırakır.

Örnek 7.11 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A_b:$X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A_b(x_1, x_2, ..., x_n)$=$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} |x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[2, 3, 5(n-1)^2]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - 4x + 4$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[2, 3, 5(n-1)^2] = \{1,\ 4\}$ dir ve her*

$x \in E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ için $(E_4^{A_b}1)$ ve $(E_4^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir. T altında sabit kalan elipslerin sayısı çoğaltılabilir. Örneğin, $E_{A_b}[1,4,9(n-1)^2]$, $E_{A_b}[-1,6,29(n-1)^2]$ ve $E_{A_b}[0,5,17(n-1)^2]$ T dönüşümünün sabit elipsleridir. Ancak bu durum tüm elipslerin T altında invaryant kaldığı anlamına gelmez. $E_{A_b}[1,3,4(n-1)^2]$, $E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ ve $E_A[-1,1,6(n-1)^2]$ elipslerinin T altında invaryant kalmadığı görülür.

Örnek 7.12 *$X=\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A: X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx=\frac{5x-5}{3}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]=\{1,\ 4\}$ iç in (E_4^A1) koşulu*
$x=1$ *için* $1(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2+13(n-1)^2-10(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 8$
$x=4$ *için* $1(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2+13(n-1)^2-10(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 8$
olup sağlanıyor iken açıkça (E_4^A2) koşulu
$x=1$ *için* $14(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow 14 \leq 5$
$x=4$ *için* $14(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow 14 \leq 5$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ elipsi, T altında invaryant değildir.

Örnek 7.13 *$X=\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A: X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ elipsi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx=\frac{x+5}{3}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]=\{1,\ 4\}$ iç in (E_4^A1) koşulu*
$x=1$ *için* $1(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2+1(n-1)^2-10(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -4$
$x=4$ *için* $1(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2+1(n-1)^2-10(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -4$
olup sağlanmıyor iken açıkça (E_4^A2) koşulu
$x=1$ *için* $2(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow 2 \leq 5$
$x=4$ *için* $2(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow 2 \leq 5$
olacağından sağlanır. Fakat $E_{A_b}[2,3,5(n-1)^2]$ elipsi, T altında invaryant değildir.

Sonuç 7.5 *(X,A) bir $A-$metrik uzay, $E_A[F_1,F_2,2a]$, (X,A) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi: X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x)=A(x,...x,F_1)+A(x,...x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in E_A[F_1, F_2, 2a]$ için,
$(E_4^A 1)$ $\quad A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(E_4^A 2)$ $\quad A(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $E_A[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

$X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere X kümesi üzerinde her $x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde tanımlanan $I : X \longrightarrow X$ dönüşümüne birim dönüşüm denir ve hangi kümeyle çalışıldığı rahat anlaşılması için I_X biçiminde gösterilir. Birim dönüşüm açıkça teorem 7.1-7.4 de verilen koşulları sağlar. Buna göre birim dönüşüm açık bir şekilde ilgili elipsleri sabit bırakır. Ancak birim dönüşüm tüm noktaları sabit bıraktığı için çok da anlamlı değildir. Bu nedenle birim dönüşüm dışındaki dönüşümleri incelemek gereklidir. Aşağıda ifade edilen teorem bir elipsi sabit bırakan bir dönüşümün ne zaman birim dönüşüm olduğunu açıklamaktadır.

Teorem 7.5 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ (X, A_b) metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir elips olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > b.(2n-2)$ için,

$$(I_{A_b}) : A_b(x, ..., x, Tx) \leq \frac{\varphi(x) - b^2\varphi(Tx)}{h}$$

koşulunu sağlıyorsa $T = I_X$ ve $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi, T dönüşümünün bir sabit elipsidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ bu uzayda F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips olsun. Ayrıca her $x \in X$ için*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1) + A_b(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ele alınsın. Üstelik T dönüşümü her $x \in X$ ve bazı $h > b.(n-1)$ değerleri için (I_{A_b}) koşulunu sağlasın. O halde $x \in X$ ve $x \neq Tx$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, T dönüşümü (I_{A_b}) koşulunu sağladığından dolayı bu koşuldan yola çıkarak φ fonksiyonunun tanımı ve

A_b-metriğinin ikinci aksiyomunu kullanarak

$$\begin{aligned}
h.A_b(x,...,x,Tx) &\leq \varphi(x)-b^2\varphi(Tx) \\
&= A_b(x,...x,F_1)\text{+}A_b(x,...x,F_2)\text{-}b^2A_b(Tx,...,Tx,F_1)\text{-}b^2A_b(Tx,...,Tx,F_2) \\
&\leq b(n-1)A_b(x,...,x,Tx)\text{+}b.A_b(F_1,...,F_1,Tx)\text{+}b(n-1)A_b(x,...,x,Tx) \\
&\quad +bA_b(F_2,...,F_2,Tx)-b^2A_b(Tx,...,Tx,F_1)-b^2A_b(Tx,...,Tx,F_2) \\
&\leq b(2n-2)A_b(x,...,x,Tx)+b^2A_b(Tx,...,Tx,F_1)+b^2A_b(Tx,...,Tx,F_2) \\
&\quad -b^2A_b(Tx,...,Tx,F_1)-b^2A_b(Tx,...,Tx,F_2) \\
&= b(2n-2)A_b(x,...,x,Tx)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan düzenleme ile $(h-b.\,(2n-2))A(x,\,...,x,Tx)\leq 0$ *elde edilir. Hipotez gereğince* $h>b.\,(2n-2)$ *olduğundan açıkça* $Tx=x$ *elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her* $x\in X$ *için* $Tx=x$ *olduğundan* $T=I_X$ *olur. Tersine* $T=I_X$ *birim dönüşüm olduğundan sonuç olarak* $E_{A_b}\,[F_1,F_2,2a]$ *elipsi* T *nin bir sabit elipsidir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 7.1-7.4 ile A_b-metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve $2a$ asal eksen uzunluklu $E_{A_b}\,[F_1,F_2,2a]$ elipsini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Ayrıca Teorem 7.5 de de $E_{A_b}\,[F_1,F_2,2a]$ elipsinin nokta nokta sabit bırakan T dönüşümünün ne zaman birim dönüşüm olacağı ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit elipslerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler A_b-metrik uzayda birden fazla sabit elipse sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 7.2 (X,A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $E_{A_b}\,[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ile* $E_{A_b}\,[F_{21},F_{22},2a_2]$ (X,A_b) *metrik uzayında iki elips olsun. Bu takdirde* $E_{A_b}\,[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $E_{A_b}\,[F_{21},F_{22},2a_2]$ *elipslerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X,A_b) *metrik uzayında en az bir* $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X\neq\varnothing$ *bir küme ve* A_b*,* X *üzerinde bir* A_b- *metrik olmak üzere* (X,A_b) *bir metrik uzay olsun.* $E_{A_b}\,[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $E_{A_b}\,[F_{21},F_{22},2a_2]$ *de* F_{11}*,* F_{12} *odaklı,* $2a_1$ *asal eksen uzunluklu ve* F_{21}*,* F_{22} *odaklı,* $2a_2$ *asal eksen uzunluklu olacak şekilde verilen iki elips olsun. Ayrıca* P *noktası*

$$A_b(F_{11},\ldots,F_{11},P)\text{+}A_b(F_{12},\ldots,F_{12},P)\neq 2a_1 \text{ ve } A_b(F_{21},\ldots,F_{21},P)\text{+}A_b(F_{22},\ldots,F_{22},P)\neq 2a_2$$

olacak şekilde (X,A_b) *metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x\in X$ *için*

$$Tx=\begin{cases} x, & x\in E_{A_b}\,[F_{11},F_{12},2a_1]\cup E_{A_b}\,[F_{21},F_{22},2a_2] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüş ümleri her* $x \in X$ *için*

$\varphi_1(x) = A_b(x,\ldots,x,F_{11}) + A_b(x,\ldots,x,F_{12})$ *ve* $\varphi_2(x) = A_b(x,\ldots,x,F_{21}) + A_b(x,\ldots,x,F_{22})$

olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T *dönüşümü* $\varphi_1(x)$ *ve* $\varphi_2(x)$ *dönüşümleri ile birlikte* $E_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $E_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2]$ *elipsleri için* $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E^j_{A_b}1)$*ve* $(E^j_{A_b}2)$ *koşullarını sağlar. O halde Teorem 7.1-7.4 gereğince açıkça* $E_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $E_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2]$ *elipsleri* T *dönüşümünün sabit elipsleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan* $E_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $E_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2]$ *elipslerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili elipsler tamamiyle keyfidir.*

Önerme 7.3 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $E_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$, ..., $E_{A_b}[F_{n1},F_{n2},2a_n]$ (X, A_b) *metrik uzayında* n *tane elips olsun. Bu takdirde* $E_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$, ...,$E_{A_b}[F_{n1},F_{n2},2a_n]$ *elipslerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X, A_b) *metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 7.2 nin ispatına benzer olarak* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_{A_b}[F_{i1},F_{i2},2a_i] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü ve her* $x \in X$ *için* $\varphi_i(x) = A_b(x,...,x,F_{i1}) + A_b(x,...,x,F_{i2})$ *olacak şekilde tanımlanan* $\varphi_i : X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada* T *dönüşümündeki* P *noktası* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere* $A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{i1}) + A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{i2}) \neq 2a_i$ *koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan* $i \in \{1,...,n\}$ *için* $E_{A_b}[F_{i1},F_{i2},2a_i]$ *elipslerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.*

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, A_b) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit elipse sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 7.6-7.9 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 7.6 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $E_{A_b}[F_1,F_2,2a]$, (X, A_b) *bir metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü*

$(E_1^{A_b}1)$ ve $(E_1^{A_b}1)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, $y \in X \setminus E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq h.A_b(x, ..., x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere $A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq h.\ A_b(x, ..., x, y)$ koşulunu sağlasın. Buna göre $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ elipslerinin T dönüşümünün iki farklı sabit elipsi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$A_b(u, ..., u, v) = A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \leq \lambda A_b(u, ..., u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(E_1^{A_b}1)$ve $(E_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^{A_b}1)$ve $(E_i^{A_b}2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 7.7 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay , $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(E_i^{A_b}1)$ve $(E_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümüher $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ elipsi T dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay , $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir elips ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit elipsi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$\begin{aligned} A_b(u,...,u,v) &= A_b(Tu,...,Tu,Tv) \\ &< \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(x,...,x,y), A_b(Tx,...,Tx,x), A_b(Ty,...,Ty,y), \\ A_b(Ty,...,Ty,x), A_b(Tx,...,Tx,y) \end{array} \right\} \\ &= A_b(u,...,u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

Teorem 7.8 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) *bir metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E_i^{A_b}1)$ *ve* $(E_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$A_b(Tx,...,Tx,Ty) \leq \lambda\left[A_b(x,...,x,Tx) + A_b(y,...,y,Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.*

İspat *Teorem 7.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u,...,u,v) &= A_b(Tu,...,Tu,Tv) \\ &\leq \lambda.\left[A_b(u,...,u,Tu) + A_b(v,...,v,Tv)\right] \\ &= \lambda.\left[A_b(u,...,u) + A_b(v,...,v)\right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $A_b(u,...,u,v) = 0$ *olup* $u = v$ *bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

Teorem 7.9 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ,* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) *bir metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir elips olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *d önüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(E_i^{A_b}1)$*ve* $(E_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$A_b(Tx,...,Tx,Ty) \leq \alpha A_b(x,...,x,Tx) + \beta A_b(y,...,y,Ty) + \gamma A_b(x,...,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi* T *dönüşümünün bir tek sabit elipsidir.*

İspat *Teorem 7.6 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *elipslerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in E_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A_b(u, ..., u, Tu) + \beta A_b(v, ..., v, Tv) + \gamma A_b(u, ..., u, v) \\ &= \gamma A_b(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $E_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *elipsi T fonksiyonunun tek sabit elipsidir.*

7.2 A$_b-$Metrik Uzayda Sabit Hiperbol Teoremleri

Bu kısımda A_b-metrik uzaylarda iki odaklı hiperboller için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir hiperbolü sabit bırakması yani sabit hiperbolün varlık koşulları ve sabit hiperbolün teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak A_b-metrik uzayda iki odaklı hiperbol ve sabit hiperbol kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 7.3 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* F_1, $F_2 \in X$ *ve* $a \in (0, \infty)$ *olsun. Buna göre*

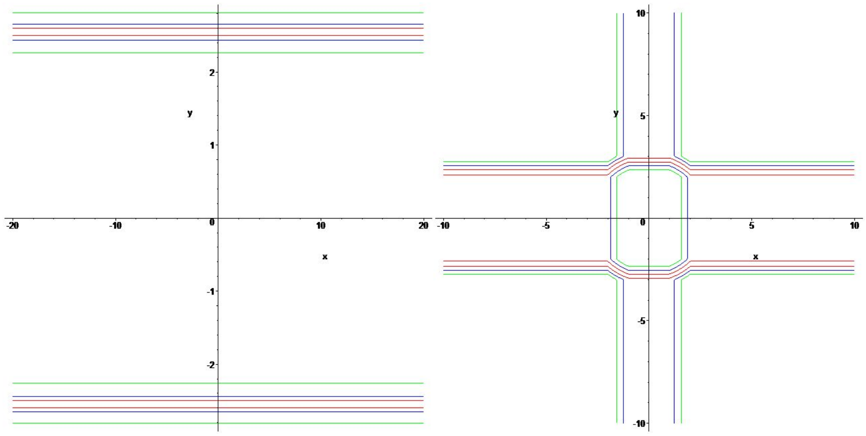
$$H_{A_b}[F_1, F_2, 2a] = \{x \in X : |A_b(x, ..., x, F_1) - A_b(x, ..., x, F_2)| = 2a\}$$

ifadesine odakları F_1, F_2 *asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan hiperbol denir.*

Örnek 7.14 *Bu örnekte Örnek 3.3 de verilen bir alışılmış metrikden üretilemeyen* A_b-*metrik örneği ele alınacaktır.* $X = \mathbb{R}^2$, $n \geq 3$ *ve* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *için* $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ *olmak üzere*

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left| x_{ij}^2 - x_{ij}^2 \right| \right) + \left| x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\, x_{nj}^2 \right| \right]$$

şeklinde tanımlı A_b-*metriği ele alınsın. Buna göre şekil 7.5 de* $n = 10$ *olmak üzere* A_b-*metriği için sırasıyla odakları* $F_1 = (1, 2)$, $F_2 = (-1, -3)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 10, 20, 50$ *olan hiperboller, odakları* $F_1 = (1, 2)$, $F_2 = (-2, -3)$ *ve asal eksen uzunlukları* $2a = 20, 55, 90$ *olan hiperboller görülmektedir. Her bir şekilde asal eksen uzunluklarına göre elipsler sırasıyla kırmızı, mavi ve yeşil renkli olarak verilmiştir.*

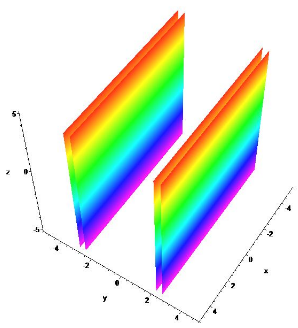


Şekil 7.5 $H_{A_b}\left[(1,2),(-1,-3),2a_1\right]$, $H_{A_b}\left[(1,2),(-2,-3),2a_2\right]$, $2a_1 = 10, 20, 50$, $2a_2 = 20, 55, 90$

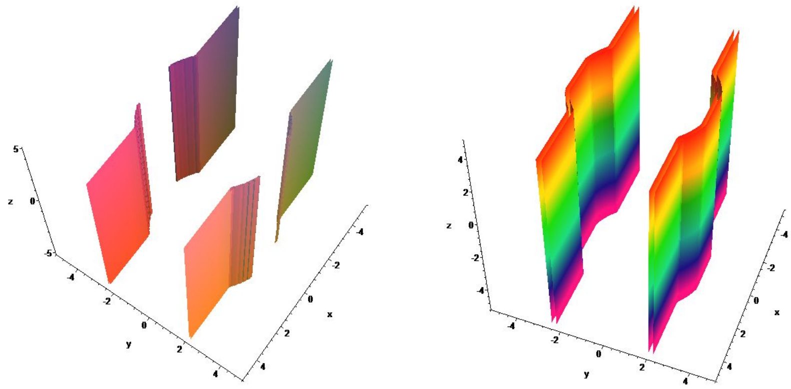
Benzer şekilde $X = \mathbb{R}^3,\ n \geq 3$ ve $i \in \{1,2,...,n\}$ için $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ olmak üzere

$$A_b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{3}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2 - x_{ij}^2\right|\right) + \left|x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\,x_{nj}^2\right|\right]$$

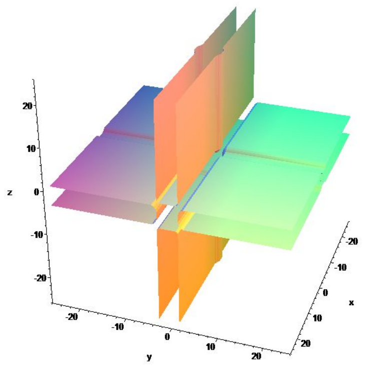
şeklinde tanımlı A_b-metriği ele alınsın. Bu taktirde, şekil 7.6 da $3-$boyulu analitik uzayda tanımlanan A_b-metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1,2,3)$, $F_2 = (-1,-3,-3)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 36$ olan hiperbol, şekil 7.7 de odakları $F_1 = (1,2,3)$, $F_2 = (-2,-3,-3)$ ve asal eksen uzunlukları $2a = 9, 18$ olan hiperboller ve şekil 7.8 de ise odakları $F_1 = (1,2,3)$, $F_2 = (-2,-3,-1)$ ve asal eksen uzunluğu $2a = 144$ olan hiperbol görülmektedir.



Şekil 7.6 $H_{A_b}\left[(1,2,3),(-1,-3,-3),36\right]$



Şekil 7.7 $H_{A_b}\left[(1,2,3),(-2,-3,-3),9\right]$, $H_{A_b}\left[(1,2,3),(-2,-3,-3),18\right]$



Şekil 7.8 $H_{A_b}\left[(1,2,3),(-2,-3,-1),144\right]$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen A_b-metrik ile alışılmış metrik uzaydaki hiperboller arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 7.4 *$X \neq \emptyset$ bir küme ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X, A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde A_b-metrik uzayındaki $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ hiperbolü, (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $H_d\left[F_1, F_2, \frac{2a}{n-1}\right]$ hiperbolüdür.*

İspat *A_b-metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$A_b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = d\left(x_1, x_n\right) + d\left(x_1, x_2\right) d\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

olacağından açıkca

$$A_b\left(x, \ldots, x, y\right) = d\left(x, y\right) + \cdots + d\left(x, y\right) = (n-1)\, d\left(x, y\right)$$

olur. O halde $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ elipsi için

$$\begin{aligned}\left|A_b\left(x, \ldots, x, F_1\right) - A_b\left(x, \ldots, x, F_2\right)\right| = 2a \quad &\Rightarrow \left|(n-1)\, d\left(x, F_1\right) - (n-1)\, d\left(x, F_2\right)\right| = 2a \\ &\Rightarrow \left|d\left(x, F_1\right) - d\left(x, F_2\right)\right| = \frac{2a}{n-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $H_d\left[F_1, F_2, \frac{2a}{n-1}\right]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.6 *$X \neq \emptyset$ bir küme, (X, d) bir alışılmış metrik uzay ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X, A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde (X, d) alışılmış metrik uzayındaki $H_d\left[F_1, F_2, 2a\right]$ hiperbolü A_b-metrik uzayındaki $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2(n-1)a\right]$ hiperbolüdür.*

Tanım 7.4 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$, $(X,\ A_b)$ A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı, $2a$ asal eksen uzunluklu bir hiperbol olsun. $T : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ için $Tx = x$ ise $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ hiperbolüne T dönüşümünün sabit hiperbolü denir.*

Teorem 7.10 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |A_b(x, ..., x, F_1) - A_b(x, ..., x, F_2)|$$

şeklinde tanımlansın.Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ için
$(H_1^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(H_1^{A_b}2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $H_{A_b}\left[F_1, F_2, 2a\right]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve*

$\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |A_b(x,...,x,F_1) - A_b(x,...,x,F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(H_1^{A_b}1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} A_b(x,...x,Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= |A_b(x,...x,F_1)\text{-}A_b(x,...x,F_2)|\text{ - }|A_b(Tx,...,Tx,F_1)\text{-}A_b(Tx,...,Tx,F_2)| \\ &= 2a - |A_b(Tx,...,Tx,F_1) - A_b(Tx,...,Tx,F_2)| \end{aligned} \tag{7.3}$$

elde edilir. T dönüşümü $(H_1^{A_b}2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası için iki durum vardır. Buna göre $|A_b(x,...,x,F_1) - A_b(x,...,x,F_2)| > 2a$ ise (7.3) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Aksi taktirde (7.3) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Bu nedenle $|A_b(x,...,x,F_1) - A_b(x,...,x,F_2)| = 2a$ olmalıdır. Bu durumda, $A_b(x,...,x,Tx) \leq 2a - |A_b(Tx,...,Tx,F_1) - A_b(Tx,...,Tx,F_2)| = 2a - 2a = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşüm ü $H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 7.15 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}[0,1,5(n-1)]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 2x^2 - x - 12$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}[0,1,5(n-1)] = \{-2,\ 3\}$ dir ve her $x \in H_{A_b}[0,1,5(n-1)]$ için $(H_1^{A_b}1)$ ve $(H_1^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_{A_b}[0,1,5(n-1)]$ hiperbolü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Dikkat edilirse T dönüşümü altında sabit hiperbollerin örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin, $H_{A_b}\left[\frac{9}{10},\frac{1}{10},4(n-1)\right]$, $H_{A_b}\left[\frac{4}{5},\frac{1}{5},3(n-1)\right]$ ve $H_{A_b}\left[\frac{11}{10},-\frac{1}{10},6(n-1)\right]$ hiperbolleri T nin sabit hiperbolleridir. Ancak bu durum tüm hiperbollerin T dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez. $H_{A_b}[0,3,5(n-1)]$, $H_{A_b}[0,3,6(n-1)]$ ve $H_{A_b}[0,2,5(n-1)]$ hiperbolleri T altında invaryant değildir.

Örnek 7.16 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}[0,1,5(n-1)]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{2x+1}{4}$ dönüşümü

ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}[0,1,5(n-1)] = \{-2,\ 3\}$ *için* $(H_1^A 1)$ *koşulu*
$x=-2$ *için* $(n-1) \leq 5(n-1) - 3(n-1) \Rightarrow 1 \leq 2$
$x=3$ *için* $(n-1) \leq 5(n-1) - 3(n-1) \Rightarrow 1 \leq 2$
olup sağlanıyor iken açıkça $(H_1^A 2)$ *koşulu*
$x=-2$ *için* $3(n-1) \geq 5(n-1) \Rightarrow 3 \geq 5$
$x=3$ *için* $3(n-1) \geq 5(n-1) \Rightarrow 3 \geq 5$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $H_{A_b}[0,1,5(n-1)] = \{-2,\ 3\}$ *hiperbolü,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.17 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $H_{A_b}[0,1,5(n-1)]$ *hiperbolü ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{x+22}{5}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in H_{A_b}[0,1,5(n-1)] = \{-2,\ 3\}$ *için* $(H_1^A 1)$ *koşulu*
$x=-2$ *için* $36(n-1) \leq 5(n-1) - 7(n-1) \Rightarrow 36 \leq -2$
$x=3$ *için* $4(n-1) \leq 5(n-1) - 9(n-1) \Rightarrow 4 \leq -4$
olup sağlanmıyor iken açıkça $(H_1^A 2)$ *koşulu*
$x=-2$ *için* $7(n-1) \geq 5(n-1) \Rightarrow 7 \geq 5$
$x=3$ *için* $9(n-1) \geq 5(n-1) \Rightarrow 9 \geq 5$
olacağından sağlanır. Ancak $H_{A_b}[0,1,5(n-1)] = \{-2,\ 3\}$ *hiperbolü,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.7 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay,* $H_A[F_1, F_2, 2a]$, *odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = |A(x, ..., x, F_1) - A(x, ..., x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in H_A[F_1, F_2, 2a]$ *için*
$(H_1^A 1)$ $\quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(H_1^A 2)$ $\quad \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_A[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.*

Teorem 7.11 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, *odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = |A_b(x, ..., x, F_1) - A_b(x, ..., x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın.Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *için*

$(H_2^{A_b}1)\quad A_b(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$

$(H_2^{A_b}2)\quad \varphi(Tx) \leq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* A_b*,* X *üzerinde bir* A_b- *metrik olsun.* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* F_1 *ve* F_2 *odaklı asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = |A_b(x, ..., x, F_1) - A_b(x, ..., x, F_2)|$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* $(H_2^{A_b}1)$ *koşulu ve* φ *fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x, \ \ldots \ , x, Tx) & \\ &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\ &= |A_b(x, ..., x, F_1) \text{-} A_b(x, ..., x, F_2)| + |A_b(Tx, ..., Tx, F_1) \text{-} A_b(Tx, ..., Tx, F_2)| \text{-} 4a \\ &= |A_b(Tx, ..., Tx, F_1) - A_b(Tx, ..., Tx, F_2)| - 2a \end{aligned} \tag{7.4}$$

elde edilir. T *dönüşümü* $(H_1^{A_b}2)$ *koşulunu sağladığından* Tx *noktası için iki durum vardır. Buna göre* $|A_b(Tx, ..., Tx, F_1) - A_b(Tx, ..., Tx, F_2)| < 2a$ *ise* (7.4) *eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Çünkü* (*7.4*) *eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Bu nedenle* $|A_b(Tx, ..., Tx, F_1) - A_b(Tx, ..., Tx, F_2)| = 2a$ *olmalıdır. Bu durumda,* $A_b(x, ..., x, Tx) \leq |A_b(Tx, ..., Tx, F_1) - A_b(Tx, ..., Tx, F_2)| - 2a = 2a - 2a = 0$ *elde edilir. O halde* $Tx = x$ *dir. Yani her* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolünü sabit bırakır.*

Örnek 7.18 X=$\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A_b{:}X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A_b(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{i<j} |x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $H_{A_b}[0, 1, 3(n-1)^2]$ *hiperbolü ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = x^2 - 2$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in H_{A_b}[0, 1, 3(n-1)^2] = \{-1,\ 2\}$ *dir ve her* $x \in H_{A_b}[0, 1, 3(n-1)^2]$ *için* $(H_2^{A_b}1)$ *ve* $(H_2^{A_b}2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $H_{A_b}[0, 1, 3(n-1)^2]$ *hiperbolü,* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Dikkat edilirse* T *dönüşümü altında sabit hiperbollerin örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin,* $H_{A_b}\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 6(n-1)^2\right]$, $H_{A_b}[2, -1, 9(n-1)^2]$ *ve* $H_A\left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 12(n-1)^2\right]$ *hiperbolleri* T *nin sabit hiperbolleridir. Ancak bu durum tüm hiperbollerin* T *dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez.* $H_{A_b}[0, 3, 3(n-1)^2]$, $H_{A_b}[1, 0, 3(n-1)^2]$ *ve* $H_{A_b}[0, 2, 5(n-1)^2]$ *hiperbolleri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.19 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$= $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}[0,1,3(n-1)^2]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{4x-2}{3}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}[0,1,3(n-1)^2] = \{-1,\ 2\}$ için (H_2^A1) koşulu*

$x = -1$ *için* $(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 + 5(n-1)^2 - 6(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 2$

$x = 2$ *için* $0(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 + 3(n-1)^2 - 6(n-1)^2 \Rightarrow 0 \leq 0$

olup sağlanıyor iken açıkça (H_2^A2) koşulu

$x = -1$ *için* $5(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 \Rightarrow 5 \leq 3$

$x = 2$ *için* $3(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 \Rightarrow 3 \leq 3$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $H_{A_b}[0,1,3(n-1)^2] = \{-1,\ 2\}$ hiperbolü, T altında invaryant değildir.

Örnek 7.20 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}[0,1,3(n-1)^2]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{-x+2}{3}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}[0,1,3(n-1)^2] = \{-1,\ 2\}$ i çin (H_2^A1) koşulu*

$x = -1$ *için* $4(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 + 1(n-1)^2 - 6(n-1)^2 \Rightarrow 4 \leq -2$

$x = 2$ *için* $4(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 + 1(n-1)^2 - 6(n-1)^2 \Rightarrow 4 \leq -2$

olup sağlanmaz iken açıkça (H_2^A2) koşulu

$x = -1$ *için* $1(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 3$

$x = 2$ *için* $1(n-1)^2 \leq 3(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 3$

olacağından sağlanır. Ancak $H_{A_b}[0,1,3(n-1)^2] = \{-1,\ 2\}$ hiperbolü, T altında invaryant değildir.

Sonuç 7.8 *(X, A) bir $A-$metrik uzay, $H_A[F_1, F_2, 2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |A(x, ..., x, F_1) - A(x, ..., x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_A[F_1, F_2, 2a]$ için

(H_2^A1) $\quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$

(H_2^A2) $\quad \varphi(Tx) \leq 2a$

koşullarını sağlıyorsa $H_A[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.

Teorem 7.12 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |A_b(x, ..., x, F_1) - A_b(x, ..., x, F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için
$(H_3^{A_b}1)$ $A_b(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(H_3^{A_b}2)$ $h.A_b(x, ..., x, Tx) + \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |A_b(x, ..., x, F_1) - A_b(x, ..., x, F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. T dönüşümü $(H_3^{A_b}1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(H_3^{A_b}2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= |A_b(x, ...x, F_1) - A_b(x, ...x, F_2)| - \varphi(Tx) \\
&= 2a - \varphi(Tx) \\
&\leq h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) - \varphi(Tx) \\
&= h.A_b(x, ...x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(1 - h)A_b(x,..., x, Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $A_b(x,..., x, Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 7.21 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned}
A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\
&\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}[2, 3, 3(n-1)]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - 4x + 4$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}[2, 3, 3(n-1)] = \{1,\ 4\}$ dir ve her $x \in H_{A_b}[2, 3, 3(n-1)]$ için $(H_3^{A_b}1)$ ve $(H_3^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_{A_b}[2, 3, 3(n-1)]$ hiperbolü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür. Dikkat edilirse T

dönüşümü altında sabit hiperbollerin örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin, $H_{A_b}\left[\frac{3}{2},\frac{7}{2},6(n-1)\right]$, $H_{A_b}[1,4,9(n-1)]$ *ve* $H_A\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2},12(n-1)\right]$ *hiperbolleri* T *nin sabit hiperbolleridir. Ancak bu durum tüm hiperbollerin* T *dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez.* $H_{A_b}[1,2,3(n-1)]$, $H_{A_b}[1,2,(n-1)]$ *ve* $H_{A_b}[0,2,5(n-1)]$ *hiperbolleri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.22 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $H_{A_b}[2,3,3(n-1)]$ *hiperbolü ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{x+5}{3}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in H_{A_b}[2,3,3(n-1)]=\{1,\ 4\}$ *için* (H_3^A1) *koşulu*
$x=1$ *için* $(n-1)\leq 3(n-1)-1(n-1)\Rightarrow 1\leq 2$
$x=4$ *için* $(n-1)\leq 3(n-1)-1(n-1)\Rightarrow 1\leq 2$
olup sağlanıyor iken açıkça (H_3^A2) *koşulu*
$x=1$ *için* $h(n-1)+(n-1)\geq 3(n-1)\Rightarrow h\geq 2$
$x=4$ *için* $h(n-1)+(n-1)\geq 3(n-1)\Rightarrow h\geq 2$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $H_{A_b}[2,3,3(n-1)]=\{1,\ 4\}$ *hiperbolü,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.23 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $H_{A_b}[2,3,3(n-1)]$ *hiperbolü ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=-x+5$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in H_{A_b}[2,3,3(n-1)]=\{1,\ 4\}$ *için* (H_3^A1) *koşulu*
$x=1$ *için* $9(n-1)\leq 3(n-1)-3(n-1)\Rightarrow 9\leq 0$
$x=4$ *için* $9(n-1)\leq 3(n-1)-3(n-1)\Rightarrow 9\leq 0$
olup sağlanmaz iken açıkça (H_3^A2) *koşulu*
$x=1$ *için* $9h(n-1)+3(n-1)\geq 3(n-1)\Rightarrow h\geq 0$
$x=4$ *için* $9h(n-1)+3(n-1)\geq 3(n-1)\Rightarrow h\geq 0$
olacağından sağlanır. Ancak $H_{A_b}[2,3,3(n-1)]=\{1,\ 4\}$ *hiperbolü,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.9 *(X,A) bir $A-$metrik uzay, $H_A[F_1,F_2,2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |A(x,...,x,F_1) - A(x,...,x,F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in H_A[F_1,F_2,2a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için
$(H_3^A 1)$ $A(x,...,x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(H_3^A 2)$ $h.A(x,...,x,Tx) + \varphi(Tx) \geq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_A[F_1,F_2,2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.

Teorem 7.13 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$, odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = |A_b(x,...,x,F_1) - A_b(x,...,x,F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın.Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ için,
$(H_4^{A_b} 1)$ $A_b(x,...,x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(H_4^{A_b} 2)$ $A_b(x,...,x,Tx) + \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir sabit hiperbolü dür.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$, (X,A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = |A_b(x,...,x,F_1) - A_b(x,...,x,F_2)|$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ herhangi bir nokta olmak üzere, T dönüşümü $(H_4^{A_b} 1)$ koşulunu sağlandığından bu koşuldan başlayarak φ fonksiyonunun tanımı ve A_b-metriğinin ikinci aksiyomu gereğince,*

$$\begin{aligned}
A_b(x,...,x,Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a \\
&= |A_b(x,...,x,F_1) - A_b(x,...,x,F_2)| + \varphi(Tx) - 4a \\
&= |A_b(Tx,...,Tx,F_1) - A_b(Tx,...,Tx,F_2)| - 2a \\
&\leq \varphi(Tx) - A(x,...,x,Tx) - \varphi(Tx) \\
&= -A_b(x,...,x,Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2A_b(x,...,x,Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda A_b bir A_b-metrik olduğundan dolayı $A_b(x,...,x,Tx) = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ için $Tx = x$ olduğundan T dönüşümü $H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ hiperbolünü sabit bırakır.

Örnek 7.24 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A_b:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - 2x + \frac{5}{4}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right] = \{\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\}$ dir ve her $x \in H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right]$ için $(H_4^{A_b}1)$ ve $(H_4^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right]$ hiperbol ü, T dönüşümünün bir sabit hiperbolüdü r. Dikkat edilirse T dönüşümü altında sabit hiperbollerin örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin, $H_{A_b}\left[\frac{9}{10}, \frac{21}{10}, 2(n-1)^2\right]$, $H_A\left[\frac{12}{5}, \frac{3}{5}, 3(n-1)^2\right]$ ve $H_A\left[\frac{3}{10}, \frac{27}{10}, 4(n-1)^2\right]$ hiperbolleri T nin sabit hiperbolleridir. Ancak bu durum tüm hiperbollerin T dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez. $H_A\left[1,2,4(n-1)^2\right]$, $H_A\left[1,2,(n-1)^2\right]$ ve $H_A\left[0,2,3(n-1)^2\right]$ hiperbolleri T altında invaryant değildir.*

Örnek 7.25 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{5}{2}x - \frac{3}{4}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right] = \{\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\}$ için (H_4^A1) koşulu*

$x = \frac{2}{3}$ *için* $\frac{4}{9}(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 + 9(n-1)^2 - 10(n-1)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} \leq 4$

$x = \frac{7}{3}$ *için* $\frac{4}{9}(n-1)^2 \leq \frac{47}{9}(n-1)^2 + 9(n-1)^2 - 10(n-1)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} \leq \frac{38}{9}$

olup sağlanıyor iken açıkça (H_4^A2) koşulu

$x = \frac{2}{3}$ *için* $\frac{4}{9}(n-1)^2 + 9(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow \frac{85}{9} \leq 5$

$x = \frac{7}{3}$ *için* $\frac{4}{9}(n-1)^2 + 9(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow \frac{85}{9} \leq 5$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right] = \{\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\}$ hiperbolü, T altında invaryant değildir.

Örnek 7.26 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right]$ hiperbolü ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{3x+3}{5}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in H_{A_b}\left[0,3,5(n-1)^2\right] = \{\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\}$ için (H_4^A1) koşulu*

$x = \frac{2}{3}$ *için* $\frac{1}{9}(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 + 3(n-1)^2 - 10(n-1)^2 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq -2$

$x = \frac{7}{3}$ *için* $\frac{1}{9}(n-1)^2 \leq \frac{47}{9}(n-1)^2 + 3(n-1)^2 - 10(n-1)^2 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq -\frac{16}{9}$

olup sağlanmaz iken açıkça (H_4^A2) koşulu

$x = \frac{2}{3}$ *için* $\frac{1}{9}(n-1)^2 + 3(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow \frac{28}{9} \leq 5$

$x = \frac{7}{3}$ *için* $\frac{1}{9}(n-1)^2 + 3(n-1)^2 \leq 5(n-1)^2 \Rightarrow \frac{28}{9} \leq 5$

olacağından sağlanır. Ancak $H_{A_b}[0,3,5(n-1)^2] = \{\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\}$ *hiperbolü,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.10 (X,A) *bir* $A-$*metrik uzay,* $H_A[F_1,F_2,2a]$*, odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = |A(x,...,x,F_1) - A(x,...,x,F_2)|$$

olacak şekilde tanımlansın.Bu takdirde T*:*$X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in H_A[F_1,F_2,2a]$ *için,*
$(H_4^A 1)\quad A(x,...,x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 4a$
$(H_4^A 2)\quad A(x,...,x,Tx) + \varphi(Tx) \leq 2a$
koşullarını sağlıyorsa $H_A[F_1,F_2,2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir sabit hiperbolüdür.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 7.10-7.13 ile A_b-metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve $2a$ asal eksen uzunluklu $H_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ hiperbolünü nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit hiperbollerin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler A_b-metrik uzayda birden fazla sabit hiperbole sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 7.5 (X,A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $H_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ile* $H_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2]$ (X,A_b) A_b-*metrik uzayında iki hiperbol olsun. Bu takdirde* $H_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $H_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2]$ *hiperbollerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X,A_b) A_b-*metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme ve* A_b*,* X *üzerinde bir* A_b- *metrik olmak üzere* (X,A_b) *bir* A_b-*metrik uzay olsun.* $H_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1]$ *ve* $H_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2]$ *de* $F_{11},\ F_{12}$ *odaklı,* $2a_1$ *asal eksen uzunluklu ve* $F_{21},\ F_{22}$ *odaklı,* $2a_2$ *asal eksen uzunluklu olacak şekilde verilen iki hiperbol olsun. Ayrıca* P *noktası* $|A_b(F_{11},...,F_{11},P) - A_b(F_{12},...,F_{12},P)| \neq 2a_1$ *ve* $|A_b(F_{21},...,F_{21},P) - A_b(F_{22},...,F_{22},P)| \neq 2a_2$ *olacak şekilde* (X,A_b) A_b-*metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in H_{A_b}[F_{11},F_{12},2a_1] \cup H_{A_b}[F_{21},F_{22},2a_2] \ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca φ_1,φ_2*:*$X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüş ümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_1(x)$=$|A_b(x,...,x,F_{11})$-$A_b(x,...,x,F_{12})|$ *ve* $\varphi_2(x)$=$|A_b(x,...,x,F_{21})$-$A_b(x,...,x,F_{22})|$ *olacak şekilde alınsın. Bu takdirde* T *dönüşümü* $\varphi_1(x)$ *ve* $\varphi_2(x)$ *dönüşümleri ile birlikte*

$H_{A_b}[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ *ve* $H_{A_b}[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ *hiperbolleri için* $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H^j_{A_b}1)$*ve* $(H^j_{A_b}2)$ *koşullarını sağ lar. O halde Teorem 6.31-6.34 gereğince açıkça* $H_{A_b}[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ *ve* $H_{A_b}[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ *hiperbolleri* T *dönüşümünün sabit hiperbolleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan* $H_{A_b}[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$ *ve* $H_{A_b}[F_{21}, F_{22}, 2a_2]$ *hiperbollerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili hiperboller tamamiyle keyfidir.*

Önerme 7.6 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $H_{A_b}[F_{11}, F_{12}, 2a_1],\ ...,\ H_{A_b}[F_{n1}, F_{n2}, 2a_n]$ (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* n *tane hiperbol olsun. Bu takdirde* $H_{A_b}[F_{11}, F_{12}, 2a_1]$, $...,\ H_{A_b}[F_{n1}, F_{n2}, 2a_n]$ *hiperbollerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X, A_b) *metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 7.5 in ispatına benzer olarak* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_{A_b}[F_{i1}, F_{i2}, 2a_i] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü ve her* $x \in X$ *için* $\varphi_i(x) = |A_b(x, ..., x, F_{i1}) - A_b(x, ..., x, F_{i2})|$ *olacak şekilde tanımlanan* $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ *dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada* T *dönüşümündeki* P *noktası* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere* $|A_b(x, ..., x, F_{11}) - A_b(x, ..., x, F_{12})| \neq 2a_i$ *koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan* $i \in \{1, ..., n\}$ *için* $H_{A_b}[F_{i1}, F_{i2}, 2a_i]$ *hiperbollerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.*

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, A_b) metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit hiperbole sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 7.14-7.17 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 7.14 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ,* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $(H_1^{A_b}1)$ *ve* $(H_1^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, $y \in X \setminus H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve bazı* $h \in [0,\ 1)$ *için* T *dönüşümü,*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq hA_b(x, ..., x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir hiperbol ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *noktaları için* $h \in [0,\ 1)$ *olmak üzere* $A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq hA_b(x, ..., x, y)$ *koşulunu sağlasın. Buna göre* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit hiperbolü olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$A_b(u, ..., u, v) = A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \leq h.A_b(u, ..., u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ *olduğundan bu bir çelişkidir. O halde* $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(H_1^{A_b}1)$ve $(H_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^{A_b}1)$ve $(H_i^{A_b}2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 7.15 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2*, asal eksen uzunluğu* $2a$ *olan bir hiperbol olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(H_i^{A_b}1)$*ve* $(H_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.*

İspat (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı,* $2a$ *asal eksen uzunluklu bir hiperbol ve* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşüm olsun. Ayrıca* T *dönüşümü her* $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $y \in X \setminus H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit hiperbolü olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı* *büzülme koşulundan,*

$$\begin{aligned} A_b(u,...,u,v) &= A_b(Tu,...,Tu,Tv) \\ &< \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(x,...,x,y), A_b(Tx,...,Tx,x), A_b(Ty,...,Ty,y), \\ A_b(Ty,...,Ty,x), A_b(Tx,...,Tx,y) \end{array} \right\} \\ &= A_b(u,...,u,v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.

Teorem 7.16 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 , asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^{A_b}1)$ve $(H_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda \in [0,\ 1/2)$ için*

$$A_b(Tx,...,Tx,Ty) \leq \lambda\left[A_b(x,...,x,Tx) + A_b(y,...,Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.

İspat *Teorem 7.14 deki ispat yöntemine benzer şekilde $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ hiperbollerinin T dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre $u \neq v$ olmak üzere $u \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $v \in H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u,...,u,v) &= A_b(Tu,...,Tu,Tv) \\ &\leq \lambda.\left[A_b(u,...,u,Tu) + A_b(v,...,v,Tv)\right] \\ &= \lambda.\left[A_b(u,...,u) + A_b(v,...,v)\right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $A_b(u,...,u,v) = 0$ olup $u = v$ bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.

Teorem 7.17 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında odakları F_1 ve F_2, asal eksen uzunluğu $2a$ olan bir hiperbol olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(H_i^{A_b}1)$ve $(H_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $y \in X \setminus H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ ve $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere,*

$$A_b(Tx,...,Tx,Ty) \leq \alpha A_b(x,...,x,Tx) + \beta A_b(y,...,y,Ty) + \gamma A_b(x,...,x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ hiperbolü T dönüşümünün bir tek sabit hiperbolüdür.

İspat *Teorem 7.14 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *hiperbollerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *ve* $v \in H_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, 2a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A_b(u, ..., u, Tu) + \beta A_b(v, ..., v, Tv) + \gamma A_b(v, ..., v, u) \\ &= \gamma A_b(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $H_{A_b}[F_1, F_2, 2a]$ *hiperbolü* T *fonksiyonunun tek sabit hiperbolüdür.*

7.3 A$_b$-Metrik Uzayda Sabit Cassini Eğrisi Teoremleri

Bu kısımda A_b-metrik uzaylarda iki odaklı Cassini eğrileri için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir Cassini eğrisini sabit bırakması yani sabit Cassini eğrisinin varolma koşulları ve sabit Cassini eğrisinin teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak A_b-metrik uzaylarda Cassini eğrisi ve sabit Cassini eğrisi kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 7.5 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $F_1,\ F_2 \in X$ *ve* $a \in (0,\ \infty)$ *olsun. Buna göre*

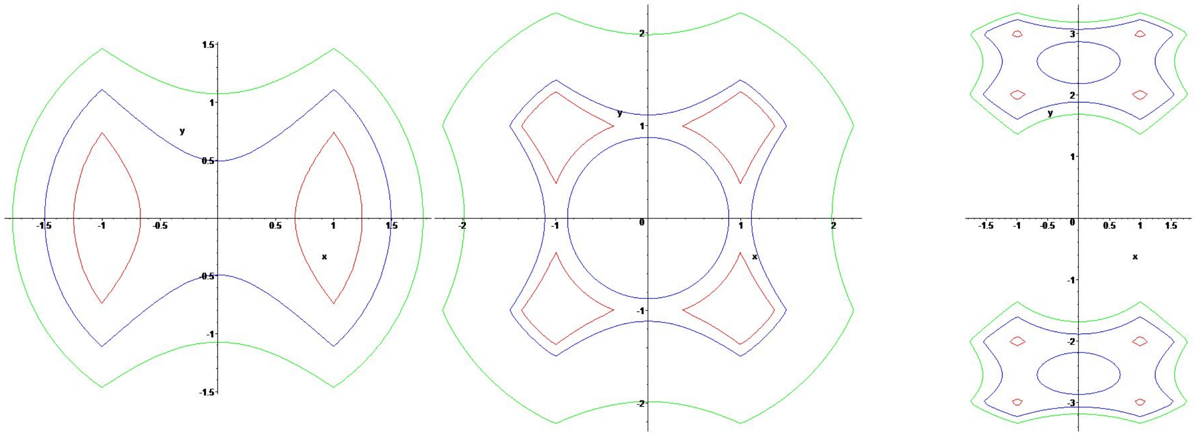
$$C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right] = \{x \in X : A_b(x, ..., x, F_1).A_b(x, ..., x, F_2) = a^2\}$$

ifadesine odakları $F_1,\ F_2$ *olan Cassini eğrisi denir.*

Örnek 7.27 *Burada Örnek 3.3 de verilen bir alışılmış metrikden üretilemeyen* A_b-*metrik örneği ele alınacaktır.* $X = \mathbb{R}^2,\ n \geq 3$ *ve* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *için* $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ *olmak üzere*

$$A_b\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2 - x_{ij}^2\right|\right) + \left|x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\,x_{nj}^2\right|\right]$$

şeklinde tanımlı A_b-*metriği ele alınsın. Buna göre şekil 7.9 da* $n = 10$ *olmak üzere* A_b-*metriği için sırasıyla odakları* $F_1 = (1, 0)\,,\ F_2 = (-1, 0)$ *ve* a^2 *parametreleri* $a^2 = 100, 500, 1500$ *olan Cassini eğrileri, odakları* $F_1 = (1, 1)\,,\ F_2 = (-1, -1)$ *ve* a^2 *parametreleri* $a^2 = 250, 500, 5000$ *olan Cassini eğrileri ve odakları* $F_1 = (1, 2)\,,$ $F_2 = (-1, -3)$ *ve* a^2 *parametreleri* $a^2 = 500, 3000, 5000$ *olan Cassini eğrileri görülmektedir. Her bir şekilde asal eksen uzunluklarına göre elipsler sırasıyla kırmızı, mavi ve yeşil renkli olarak verilmiştir.*

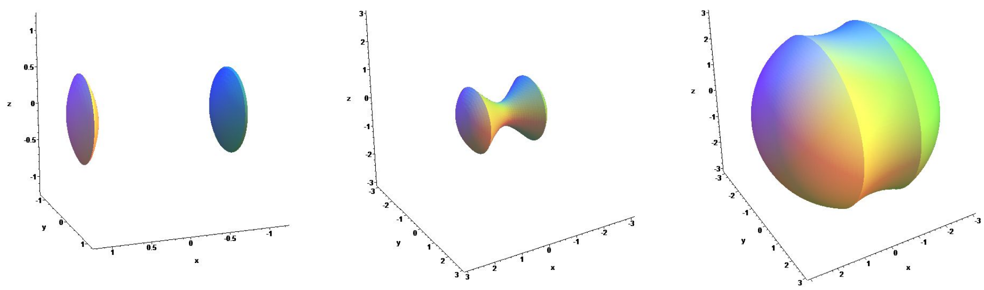


Şekil 7.9 $C_{A_b}\left[(1,0),(-1,0),a_1^2\right]$, $C_{A_b}\left[(1,1),(-1,-1),a_2^2\right]$, $C_{A_b}\left[(1,2),(-1,-3),a_3^2\right]$, $a_1^2=100,500,1500$, $a_2^2=250,500,5000$, $a_3^2=500,3000,5000$

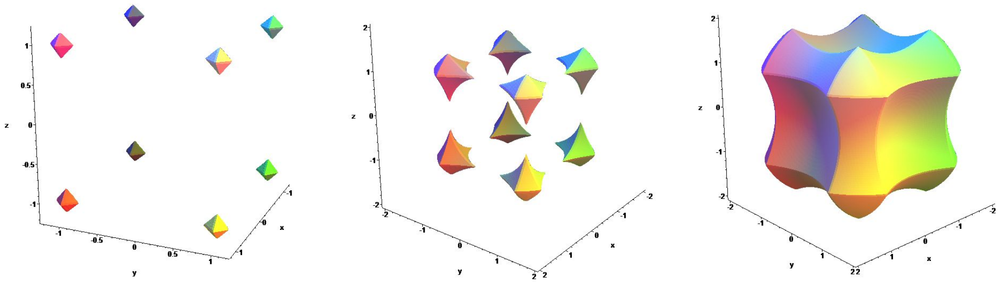
Benzer şekilde X=$\mathbb{R}^3$, $n\geq 3$ *ve* $i\in\{1,2,...,n\}$ *için* x_i=(x_{i1},x_{i2},x_{i3}) *olmak üzere*

$$A_b\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=1}^{3}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2-x_{ij}^2\right|\right)+\left|x_{1j}^2+\cdots+x_{(n-1)j}^2-(n-1)\,x_{nj}^2\right|\right]$$

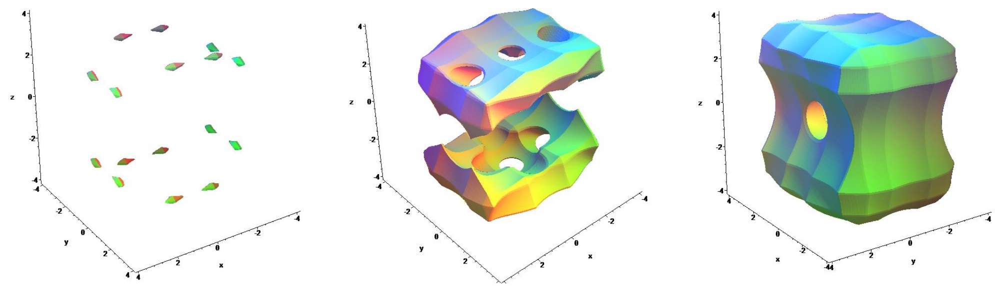
şeklinde tanımlı A_b-*metriği ele alınsın. Bu taktirde, şekil 7.10 da* $3-$*boyulu analitik uzayda tanımlanan* A_b-*metriği için sırasıyla odakları* $F_1=(1,0,0)$, $F_2=(-1,0,0)$ *ve* a^2 *parametreleri* $a^2=36,432,20736$ *olan Cassini eğrileri, şekil 7.11 de odakları* $F_1=(1,1,1)$, $F_2=(-1,-1,-1)$ *ve* a^2 *parametreleri* $a^2=36,288,1728$ *olan Cassini eğrileri ve şekil 7.12 de ise odakları* $F_1=(1,2,3)$, $F_2=(-2,-3,-1)$ *ve* a^2 *parametreleri* $a^2=5832,23328,46656$ *olan Cassini eğrileri görülmektedir.*



Şekil 7.10 $C_{A_b}\left[(1,0,0),(-1,0,0),a^2\right]$, $a^2=36,432,20736$



Şekil 7.11 $C_{A_b}\left[(1,1,1),(-1,-1,-1),a^2\right]$, $a^2=36,288,1728$



Şekil 7.12 $C_{A_b}\left[(1,2,3),(-2,-3,-1),a^2\right]$, $a^2=5832,23328,46656$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen A_b-metrik ile alışılmış metrik uzaydaki Cassini eğrileri arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 7.7 *$X\neq\emptyset$ bir küme ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X,A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde A_b-metrik uzayındaki $C_{A_b}\left[F_1,F_2,a^2\right]$ Cassini eğrisi, (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $C_d\left[F_1,F_2,\dfrac{a^2}{(n-1)^2}\right]$ Cassini eğrisidir.*

İspat *A_b-metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$A_b\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=d\left(x_1,x_n\right)+d\left(x_2,x_n\right)+\ldots+d\left(x_{n-1},x_n\right)$$

olacağından açıkca

$$A_b(x,\ldots,x,y)=d(x,y)+\cdots+d(x,y)=(n-1)\,d(x,y)$$

olur. O halde $C_{A_b}[F_1,F_2,2a]$ elipsi için

$$\begin{aligned}A_b(x,\ldots,x,F_1)*A_b(x,\ldots,x,F_2)=a^2 \quad &\Rightarrow (n-1)\,d(x,F_1)*(n-1)\,d(x,F_2)=a^2\\ &\Rightarrow d(x,F_1)+d(x,F_2)=\frac{a^2}{(n-1)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $E_d\left[F_1,F_2,\frac{a^2}{(n-1)^2}\right]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.11 *$X\neq\emptyset$ bir küme, (X,d) bir alışılmış metrik uzay ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X,A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $C_d[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi A_b-metrik uzayındaki $C_{A_b}\left[F_1,F_2,(n-1)^2a^2\right]$ Cassini eğrisidir.*

Tanım 7.6 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$, $(X,\ A_b)$ A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T:X\longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x\in C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$ i çin $Tx=x$ ise $C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisine T dönüşümünün sabit Cassini eğrisi denir.*

Teorem 7.18 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$, odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=A_b(x,...,x,F_1).A_b(x,...,x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$ için
$(C_1^{A_b}1)\quad A_b(x,...x,Tx)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$
$(C_1^{A_b}2)\quad \varphi(Tx)\geq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X\neq\varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$, (X,A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için $\varphi(x)=A_b(x,\ ...,\ x,\ F_1).\ A_b(x,\ ...,\ x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca*

$T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(C_1^{A_b}1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A_b(x, ...x, F_1).A_b(x, ...x, F_2) - A_b(Tx, ..., Tx, F_1).A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\ &= a^2 - A_b(Tx, ..., Tx, F_1).A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \end{aligned} \quad \textbf{(7.5)}$$

elde edilir. T dönüşümü $(C_1^{A_b}2)$ koş ulunu sağladığından Tx noktası $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1).\ A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) > a^2$ ise yani Tx noktası Cassini eğrisinin dışında ise (7.5) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Dolayısıyla $A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1).\ A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) = a^2$ olmalıdır. Aksi taktirde (7.5) eşitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bu bir çelişkidir. Yani Tx noktası Cassini eğrisinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $A_b(x,\ ...x,\ Tx) \leq a^2 - A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1).\ A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 7.28 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[1, 2, 4(n-1)^2]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 2x^2 - 5x$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}[1, 2, 4(n-1)^2] = \{0,\ 3\}$ dir ve her $x \in C_{A_b}[1, 2, 4(n-1)^2]$ için $(C_1^{A_b}1)$ ve $(C_1^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_{A_b}[1, 2, 4(n-1)^2]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Dikkat edilirse T dönüşümü altında sabit Cassini eğrisi örnekleri çoğaltılabilir.

Örnek 7.29 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[1, 2, 4(n-1)^2]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x+3}{3}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}[1, 2, 4(n-1)^2] = \{0,\ 3\}$ için $(C_1^{A_b}1)$ koşulu

$x = 0$ için $(n-1) \leq 4(n-1)^2 - 0(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 4(n-1)$

$x = 3$ *için* $(n-1) \leq 4(n-1)^2 - 0(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 4(n-1)$
olup sağlanıyor iken açıkça $(C_1^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = 0$ *için* $0(n-1)^2 \geq 4(n-1)^2 \Rightarrow 0 \geq 4$
$x = 3$ *için* $0(n-1)^2 \geq 4(n-1)^2 \Rightarrow 0 \geq 4$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}[1,2,4(n-1)^2] = \{0,\ 3\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.30 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[1,2,4(n-1)^2]$ *Cassini eğrisi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{x+9}{3}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[1,2,4(n-1)^2] = \{0,\ 3\}$ *için* $(C_1^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = 0$ *için* $9(n-1) \leq 4(n-1)^2 - 4(n-1)^2 \Rightarrow 9 \leq 0$
$x = 3$ *için* $(n-1) \leq 4(n-1)^2 - 36(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -32(n-1)$
olup sağlanmıyor iken açıkça $(C_1^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = 0$ *için* $4(n-1)^2 \geq 4(n-1)^2 \Rightarrow 4 \geq 4$
$x = 3$ *için* $36(n-1)^2 \geq 4(n-1)^2 \Rightarrow 36 \geq 4$
olacağından sağlanır. Fakat $C_{A_b}[1,2,4(n-1)^2] = \{0,\ 3\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant kalmaz.*

Sonuç 7.12 $(X,\ A)$ *bir* $A-$*metrik uzay,* $C_A[F_1, F_2, a^2]$, *odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, F_1).A(x, ..., x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in C_A[F_1, F_2, a^2]$ *için*
(C_1^A1) $A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
(C_1^A2) $\varphi(Tx) \geq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_A[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.*

Teorem 7.19 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, (X, A_b) A_b-*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, F_1).A_b(x, ..., x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ için,
$(C_2^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$
$(C_2^{A_b}1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ i çin $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1).\ A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(C_2^{A_b}1)$ koşulundan ve φ fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \\ &= A_b(x, ...x, F_1)A_b(x, ...x, F_2)+A_b(Tx, ..., Tx, F_1)A_b(Tx, ..., Tx, F_2)\text{-}2a^2 \\ &= a^2 + A_b(Tx, ..., Tx, F_1)A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 2a^2 \\ &= A_b(Tx, ..., Tx, F_1)A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - a^2 \qquad (7.6) \end{aligned}$$

elde edilir. $(C_2^{A_b}1)$ koşulu sağlandığından dolayı Tx noktası $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre Tx noktası Cassini eğrisinin içinde ise yani $A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1).\ A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) < a^2$ ise (7.6) eşitsizliği $A_b(x,\ ...x,\ Tx) < 0$ formuna dönüşür. Ancak uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde $A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1).\ A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) = a^2$ olmalıdır. Yani Tx noktası Cassini eğrisinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda,

$$A_b(x,\ \ldots x,\ Tx) \leq A_b(Tx,\ \ldots,\ Tx,\ F_1).\ A_b(Tx,\ \ldots,\ Tx,\ F_2) - a^2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ dir. Yani her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 7.31 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A_b:$X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A_b(x_1, x_2, ..., x_n)$=$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}[3, 1, 9(n-1)^4]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 3x^2 - 11x$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}[3, 1, 9(n-1)^4] = \{0,\ 4\}$ dir ve her $x \in C_{A_b}[3, 1, 9(n-1)^4]$ için $(C_2^{A_b}1)$ ve $(C_2^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_{A_b}[3, 1, 9(n-1)^4]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Örneğin, $C_{A_b}[2, 2, 16(n-1)^4]$ Cassini eğrisi de T altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Cassini eğrilerinin T dön üşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez.*

$C_A\left[1,2,5(n-1)^4\right]$, $C_A\left[1,-2,4(n-1)^4\right]$ *ve* $C_A\left[2,0,3(n-1)^4\right]$ *Cassini eğrileri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.32 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A{:}X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}\left[3,1,9(n-1)^4\right]$ *Cassini eğrisi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{3}{2}x-1$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in C_{A_b}\left[3,1,9(n-1)^4\right]=\{0,\ 4\}$ *için* $(C_2^{A_b}1)$ *koşulu*

$x=0$ *için* $(n-1)^4\leq 9(n-1)^4+64(n-1)^4-18(n-1)^2\Rightarrow 1\leq 55$

$x=4$ *için* $(n-1)^2\leq 9(n-1)^4+64(n-1)^4-18(n-1)^2\Rightarrow 1\leq 55(n-1)^2$

olup sağlanıyor iken açıkça $(C_2^{A_b}2)$ *koşulu*

$x=0$ *için* $64(n-1)^4\leq 9(n-1)^4\Rightarrow 64\leq 9$

$x=4$ *için* $64(n-1)^4\leq 9(n-1)^4\Rightarrow 64\leq 9$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}\left[3,1,9(n-1)^4\right]=\{0,\ 4\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.33 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A{:}X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}\left[3,1,9(n-1)^4\right]$ *Cassini eğrisi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{x}{4}+2$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in C_{A_b}\left[3,1,9(n-1)^4\right]=\{0,\ 4\}$ *için* $(C_2^{A_b}1)$ *koşulu*

$x=0$ *için* $4(n-1)^2\leq 9(n-1)^4+(n-1)^4-18(n-1)^2\Rightarrow 4\leq -8(n-1)^2$

$x=4$ *için* $(n-1)^2\leq 9(n-1)^4+0(n-1)^4-18(n-1)^2\Rightarrow 1\leq -9(n-1)^2$

olup sağlanmıyor iken açıkça $(C_2^{A_b}2)$ *koşulu*

$x=0$ *için* $(n-1)^4\leq 9(n-1)^4\Rightarrow 1\leq 9$

$x=4$ *için* $0(n-1)^4\leq 9(n-1)^4\Rightarrow 0\leq 9$

olacağından sağlanır. Ancak $C_{A_b}\left[3,1,9(n-1)^4\right]=\{0,\ 4\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.13 $(X,\ A)$ *bir* $A-$*metrik uzay,* $C_A\left[F_1,F_2,a^2\right]$, $(X,\ A)$ $A-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi: X\longrightarrow[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için,*

$$\varphi(x)=A(x,...,x,F_1).A(x,...,x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X\longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x\in C_A\left[F_1,F_2,a^2\right]$ *için,*

(C_2^A1) $\quad A(x,...x,Tx)\leq\varphi(x)+\varphi(Tx)-2a^2$

(C_2^A1) $\quad \varphi(Tx)\leq a^2$

koşullarını sağlıyorsa $C_A\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 7.20 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1).A_b(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için

$(C_3^{A_b}1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(C_3^{A_b}2)$ $\quad h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \geq a^2$

koşullarını sağlıyorsa $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1)$. $A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere. T dönüşümü $(C_3^{A_b}1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(C_3^{A_b}2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= A_b(x, ...x, F_1).A_b(x, ...x, F_2) - A_b(Tx, ..., Tx, F_1).A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\
&= a^2 - A_b(Tx, ..., Tx, F_1).A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\
&\leq h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) - \varphi(Tx) \\
&= h.A_b(x, ...x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)A_b(x,\ ...x,\ Tx) \geq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $A_b(x,\ ...x,\ Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi sabit bırakır.

Örnek 7.34 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned}
A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \left|x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1\right|^2 + \left|x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2\right|^2 \\
&\quad + \cdots + \left|x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}\right|^2 + \left|x_n - x_{n-1}\right|^2
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}\left[1, 4, 16(n-1)^2\right]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - 4x$

dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2] = \{0,\ 5\}$ *dir ve her* $x \in C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2]$ *için* $(C_3^{A_b}1)$ *ve* $(C_3^{A_b}2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2]$ *Cassini eğrisi,* T *dönü şümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Örneğin,* $C_{A_b}[3,2,36(n-1)^2]$ *Cassini eğrisi de* T *altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Cassini eğrilerinin* T *dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez.* $C_A[2,5,5(n-1)^2]$, $C_A[0,-2,4(n-1)^2]$ *ve* $C_A[2,0,3(n-1)^2]$ *Cassini eğrileri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.35 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2]$ *Cassini eğrisi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{3x+5}{5}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2] = \{0,\ 5\}$ *i çin* $(C_3^{A_b}1)$ *koşulu*
$x=0$ *için* $(n-1) \leq 16(n-1)^2 - 0(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 16(n-1)$
$x=5$ *için* $(n-1) \leq 16(n-1)^2 - 0(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 16(n-1)$
olup sağlanıyor iken açıkça $(C_3^{A_b}2)$ *koşulu*
$x=0$ *için* $h(n-1)+0(n-1)^2 \geq 16(n-1)^2 \Rightarrow h \geq 16(n-1)$
$x=5$ *için* $h(n-1)+0(n-1)^2 \geq 16(n-1)^2 \Rightarrow h \geq 16(n-1)$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2] = \{0,\ 5\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.36 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2]$ *Cassini eğrisi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{x+25}{5}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2] = \{0,\ 5\}$ *için* $(C_3^{A_b}1)$ *koşulu*
$x=0$ *için* $25(n-1) \leq 16(n-1)^2 - 16(n-1)^2 \Rightarrow 25 \leq 0$
$x=5$ *için* $(n-1) \leq 16(n-1)^2 - 100(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -84(n-1)$
olup sağlanmıyor iken açıkça $(C_3^{A_b}2)$ *koşulu*
$x=0$ *için* $25h(n-1)+16(n-1)^2 \geq 16(n-1)^2 \Rightarrow 25h \geq 0$
$x=5$ *için* $h(n-1)+100(n-1)^2 \geq 16(n-1)^2 \Rightarrow h \geq -84(n-1)$
olacağından sağlanır. Ancak $C_{A_b}[1,4,16(n-1)^2] = \{0,\ 5\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.14 *$(X,\ A)$ bir $A-$metrik uzay, $C_A\left[F_1, F_2, a^2\right]$, $(X,\ A)$ $A-$metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A(x, ...x, F_1).A(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dö nüşümü, her $x \in C_A\left[F_1, F_2, a^2\right]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için
$(C_3^A 1)$ $\quad A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(C_3^A 2)$ $\quad h.A(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \geq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_A\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

Teorem 7.21 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1).A_b(x, ...x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü her $x \in C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için,
$(C_4^{A_b} 1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$
$(C_4^{A_b} 2)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \leq a^2$
koşullarını sağlıyorsa $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1)$. $A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ herhangi bir nokta olmak üzere, . T dönüşümü $(C_4^{A_b} 1)$ koş ulunu sağladığından bu koşuldan başlayarak φ fonksiyonunun tanımı ve A_b metriğinin ikinci aksiyomu gereğ ince*

$$\begin{aligned}
A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2 \\
&= A_b(x, ...x, F_1)A_b(x, ...x, F_2) + A_b(Tx, ..., Tx, F_1)A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 2a^2 \\
&= A_b(Tx, ..., Tx, F_1)A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - a^2 \\
&\leq \varphi(Tx) - A_b(x, ...x, Tx) - \varphi(Tx) \\
&= -A_b(x, ...x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2A_b(x,\ ...x,\ Tx) \leq 0$ bulunur. Bu durumda A_b bir A_b-metrik olduğundan dolayı $A_b(x,\ ...x,\ Tx) = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ için $Tx = x$ oldu ğundan T dönüşümü $C_{A_b}\left[F_1, F_2, a^2\right]$ Cassini eğrisini sabit bırakır.

Örnek 7.37 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A_b:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - x - 3$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right] = \{-1,\ 3\}$ dir ve her $x \in C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right]$ için $(C_4^{A_b}1)$ ve $(C_4^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right]$ Cassini eğrisi, T dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir. Örneğin, $C_{A_b}\left[1,1,16(n-1)^4\right]$ Cassini eğrisi de T altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Cassini eğrilerinin T dön üşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez. $C_{A_b}\left[0,5,5(n-1)^4\right]$, $C_{A_b}\left[1,2,4(n-1)^4\right]$ ve $C_{A_b}\left[2,0,9(n-1)^4\right]$ Cassini eğrileri T altında invaryant değildir.*

Örnek 7.38 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{3x-1}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right] = \{-1,\ 3\}$ için $(C_4^{A_b}1)$ koşulu*

$x = -1$ *için* $(n-1)^2 \leq 9(n-1)^4 + 64(n-1)^4 - 18(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 55(n-1)^2$

$x = 3$ *için* $(n-1)^2 \leq 9(n-1)^4 + 64(n-1)^4 - 18(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq 55(n-1)^2$

olup sağlanıyor iken açıkça $(C_4^{A_b}2)$ koşulu

$x = -1$ *için*

$1(n-1)^2 + 64(n-1)^4 \leq 9(n-1)^4 \Rightarrow 1 + 64(n-1)^2 \leq 9(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -55(n-1)^2$

$x = 3$ *için*

$1(n-1)^2 + 64(n-1)^4 \leq 9(n-1)^4 \Rightarrow 1 + 64(n-1)^2 \leq 9(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -55(n-1)^2$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right] = \{-1,\ 3\}$ Cassini eğrisi, T altında invaryant değildir.

Örnek 7.39 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n)$=$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b -metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right]$ Cassini eğrisi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x+1}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in C_{A_b}\left[0,2,9(n-1)^4\right] = \{-1,\ 3\}$ için $(C_4^{A_b}1)$ koşulu*

$x = -1$ *için* $(n-1)^2 \leq 9(n-1)^4 + 0(n-1)^4 - 18(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -9(n-1)^2$

$x = 3$ *için* $(n-1)^2 \leq 9(n-1)^4 + 0(n-1)^4 - 18(n-1)^2 \Rightarrow 1 \leq -9(n-1)^2$

olup sağlanmıyor iken açıkça $(C_4^{A_b}2)$ koşulu

$x = -1$ *için* $1(n-1)^2 + 0(n-1)^4 \leq 9(n-1)^4 \Rightarrow 1 \leq 9(n-1)^2$

$x = 3$ *için* $1(n-1)^2 + 0(n-1)^4 \leq 9(n-1)^4 \Rightarrow 1 \leq 9(n-1)^2$

olacağından sağlanır. Ayrıca $C_{A_b}[0,2,9(n-1)^4] = \{-1,\ 3\}$ *Cassini eğrisi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.15 $(X,\ A)$ *bir* $A-$*metrik uzay,* $C_A[F_1,F_2,a^2]$*,* $(X,\ A)$ $A-$*metrik uzayında odakları* F_1 *ve* F_2 *olan bir Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x,...x,F_1).A(x,...x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde T*:*$X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in C_A[F_1,F_2,a^2]$ *için,*

$(C_4^A 1)\quad A(x,...x,Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a^2$

$(C_4^A 2)\quad A(x,...,x,Tx) + \varphi(Tx) \leq a^2$

koşullarını sağlıyorsa $C_A[F_1,F_2,a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün bir sabit Cassini eğrisidir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 7.18-7.21 ile A_b-metrik uzayda F_1, F_2 odaklı $C_{A_b}[F_1,F_2,a^2]$ Cassini eğrisini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit Cassini eğrilerinin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler A_b-metrik uzayda birden fazla sabit Cassini eğrisine sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 7.8 (X,A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $C_{A_b}[F_{11},F_{12},a_1^2]$ *ile* $C_{A_b}[F_{21},F_{22},a_2^2]$ (X,A_b) A_b-*metrik uzayında iki Cassini eğrisi olsun. Bu takdirde* $C_{A_b}[F_{11},F_{12},a_1^2]$ *ile* $C_{A_b}[F_{21},F_{22},a_2^2]$ *Cassini eğrilerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X,A_b) A_b-*metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme ve* A_b*,* X *üzerinde bir* A_b- *metrik olmak üzere* (X,A_b) *bir* A_b-*metrik uzay olsun.* $C_{A_b}[F_{11},F_{12},a_1^2]$ *ve* $C_{A_b}[F_{21},F_{22},a_2^2]$ *de* $F_{11},\ F_{12}$ *odaklı ve* $F_{21},\ F_{22}$ *odaklı iki Cassini eğrisi olsun. Ayrıca* P *noktası* $A_b(F_{11},\ ...,\ F_{11},\ P).\ A_b(F_{12},\ ...,\ F_{12},\ P) \neq a_1^2$ *ve* $A_b(F_{21},\ ...,\ F_{21},\ P).\ A_b(F_{22},\ ...,\ F_{22},\ P) \neq a_2^2$ *olacak şekilde* $(X,\ A_b)$ A_b-*metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in C_{A_b}[F_{11},F_{12},a_1^2] \cup C_{A_b}[F_{21},F_{22},a_2^2] \ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüşümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_1(x) = A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{11}).\ A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{12})$ *ve* $\varphi_2(x) = A_b(x,$

..., x, F_{21}). $A_b(x, ..., x, F_{22})$ olacak şekilde alınsın. Bu takdirde T dönüşümü $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ dönüşümleri ile birlikte $C_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ ve $C_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ Cassini eğrileri için $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $(C_{A_b}^j 1)$ve $(C_{A_b}^j 2)$ koşullarını sağlar. O halde Teorem 7.18-7.21 gereğince açıkça $C_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ ve $C_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ Cassini eğrileri T dönüşümünün sabit Cassini eğrileridir. Burada dikkat edilirse ele alınan $C_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$ ve $C_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2^2]$ Cassini eğrilerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili Cassini eğrileri tamamiyle keyfidir.

Önerme 7.9 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay ve $C_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$, ..., $C_{A_b}[F_{n1}, F_{n2}, a_n^2]$ (X, A_b) A_b-metrik uzayında n tane Cassini eğrisi olsun. Bu takdirde $C_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1^2]$, ..., $C_{A_b}[F_{n1}, F_{n2}, a_n^2]$ Cassini eğrilerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde (X, A_b) A_b-metrik uzayında en az bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 7.8 in ispatına benzer olarak $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere her $x \in X$ için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{A_b}[F_{i1}, F_{i2}, a_i^2] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü ve her $x \in X$ için $\varphi_i(x) = A_b(x, ..., x, F_{i1}). A_b(x, ..., x, F_{i2})$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi_i : X \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada T dönüşümündeki P noktası $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $A_b(x, ..., x, F_{i1}). A_b(x, ..., x, F_{i2}) \neq a_i^2$ koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan $i \in \{1, ..., n\}$ için $C_{A_b}[F_{i1}, F_{i2}, a_i^2]$ Cassini eğrilerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, A_b) A_b-metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit Cassini eğrisine sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 7.22-7.25 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 7.22 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay , $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında odakları F_1 ve F_2 olan bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^{A_b} 1)$ ve $(C_1^{A_b} 2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, $y \in X \setminus C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve bazı $h \in [0, 1)$ için T dönüşümü,*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq h A_b(x, ..., x, y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün bir tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere $A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq hA_b(x, ..., x, y)$ koşulunu sağlasın. Buna göre $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşümünün iki farklı sabit Cassini eğrisi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $v \in C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büz ülme koşulundan,*

$$A_b(u, ..., u, v) = A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \leq h.A_b(u, ..., u, v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(C_1^{A_b}1)$ve $(C_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^{A_b}1)$ve $(C_i^{A_b}2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 7.23 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(C_i^{A_b}1)$ve $(C_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dön üşümü her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max\left\{\begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array}\right\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı bir Cassini eğrisi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max\left\{\begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlasın. Buna göre $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit Cassini eğrisi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $v \in C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *noktaları alınsın* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &< \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\} \\ &= A_b(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

Teorem 7.24 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(C_i^{A_b}1)$*ve* $(C_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dön üşümü her* $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $y \in X \setminus C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \lambda\left[A_b(x, ..., x, Tx) + A_b(y, ..., y, Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

İspat *Teorem 7.22 deki ispat yöntemine benzer şekilde* $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *Cassini eğrilerinin* T *dönüşüm ü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna g öre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *ve* $v \in C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümün ün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \lambda.\left[A_b(u, ..., u, Tu) + A_b(v, ..., v, Tv)\right] \\ &= \lambda.\left[A_b(u, ..., u) + A_b(v, ..., v)\right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $A_b(u,..., u, v) = 0$ *olup* $u = v$ *bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde* $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ *Cassini eğrisi* T *dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.*

Teorem 7.25 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı bir Cassini eğrisi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere*

$(C_i^{A_b}1)$ve $(C_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dön üşümü her $x \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $y \in X \setminus C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere,

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \alpha A_b(x, ..., x, Tx) + \beta A_b(y, ..., y, Ty) + \gamma A_b(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

İspat *Teorem 7.22 deki ispat yöntemine benzer şekilde $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ Cassini eğrilerinin T dönüşüm ü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna g öre $u \neq v$ olmak üzere $u \in C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ ve $v \in C_{A_b}\left[F_{1^*}, F_{2^*}, a^{*^2}\right]$ noktaları alınsın. O halde T dönüşümün ün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A_b(u, ..., u, Tu) + \beta A_b(v, ..., v, Tv) + \gamma A_b(u, ..., u, v) \\ &= \gamma A_b(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ olduğundan açıkça $\gamma < 1$ olacağından bu bir çelişkidir. O halde $C_{A_b}[F_1, F_2, a^2]$ Cassini eğrisi T dönüşümünün tek sabit Cassini eğrisidir.

7.4 A$_b$-Metrik Uzayda Sabit Apollonius Çemberi Teoremleri

Bu kısımda A_b-metrik uzaylarda iki odaklı Apollonius çemberleri için uzay üzerinde tanımlı bir dönüşümün bir Apollonius çemberini sabit bırakması yani sabit Apollonius çemberinin varolma koşulları ve sabit Apollonius çemberinin teklik koşulları ele alınacaktır. Bu takdirde ilk olarak A_b-metrik uzaylarda iki odaklı Apollonius çemberi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 7.7 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay, F_1, $F_2 \in X$ ve $a \in (0, \infty)$ olsun. Buna göre*

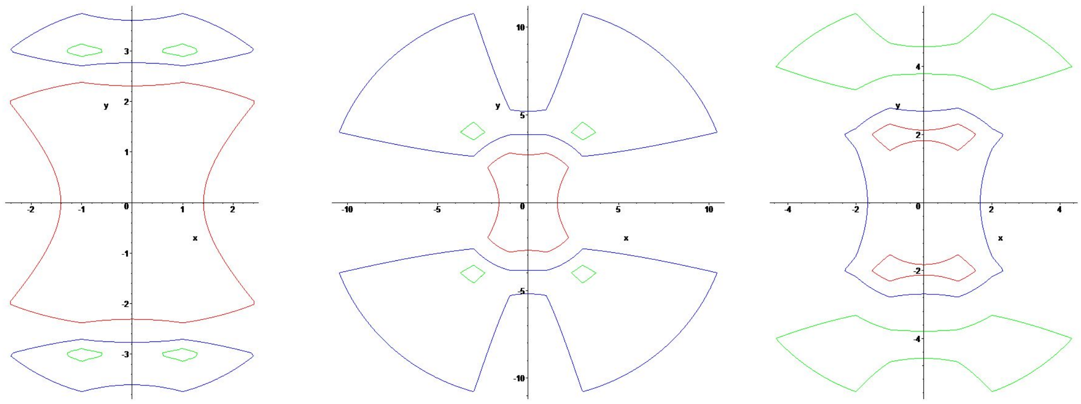
$$A_{A_b}[F_1, F_2, a] = \{x \in X : A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2) = a\}$$

ifadesine odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı Apollonius çemberi denir.

Örnek 7.40 *Burada Örnek 3.3 de verilen bir alışılmış metrikden üretilemeyen A_b-metrik örneği ele alınacaktır. $X = \mathbb{R}^2$, $n \geq 3$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ olmak üzere*

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_{ij}^2 - x_{ij}^2\right|\right) + \left|x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\,x_{nj}^2\right|\right]$$

şeklinde tanımlı A_b-metriği ele alınsın. Buna göre şekil 7.13 de $n = 10$ olmak üzere A_b-metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (-1,-3)$ ve a oranı $a = \frac{1}{2}, 2, 7$ olan Apollonius çemberleri, odakları $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (-3,4)$ ve a oranı $a = \frac{1}{4}, \frac{6}{5}, 5$ olan Apollonius çemberleri ve odakları $F_1 = (1,2)$, $F_2 = (2,-4)$ ve a oranı $a = \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, 2$ olan Apollonius çemberleri görülmektedir. Her bir şekilde asal eksen uzunluklarına göre elipsler sırasıyla kırmızı, mavi ve yeşil renkli olarak verilmiştir.

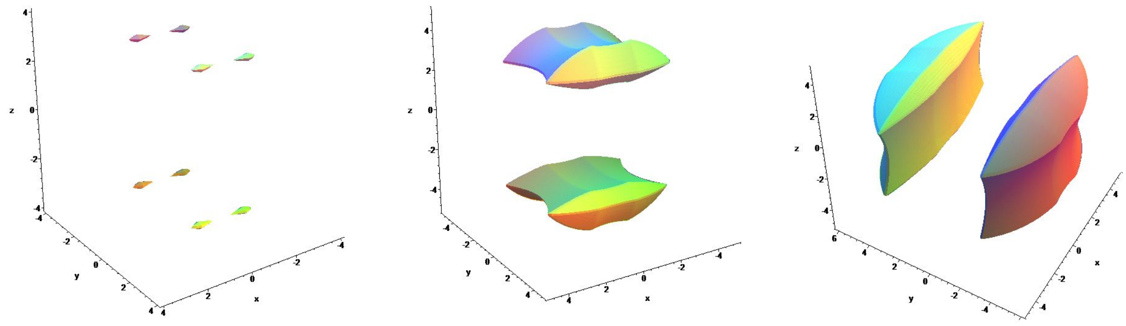


Şekil 7.13 $A_{A_b}[(1,2),(-1,-3),a_1]$, $A_{A_b}[(1,2),(-3,-4),a_2]$, $A_{A_b}[(1,2),(2,-4),a_3]$, $a_1 = 1/2, 2, 7$, $a_2 = 1/4, 6/5, 5$, $a_3 = 1/10, 1/3, 2$

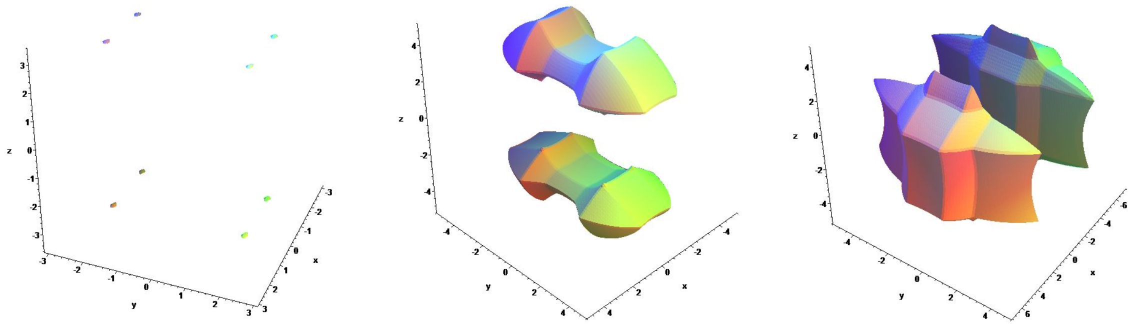
Benzer şekilde X=$\mathbb{R}^3$, $n \geq 3$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için x_i=(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) olmak üzere

$$A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{3} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left| x_{ij}^2 - x_{ij}^2 \right| \right) + \left| x_{1j}^2 + \cdots + x_{(n-1)j}^2 - (n-1)\, x_{nj}^2 \right| \right]$$

şeklinde tanımlı A_b-metriği ele alınsın. Bu taktirde, şekil 7.14 de $3-$boyulu analitik uzayda tanımlanan A_b-metriği için sırasıyla odakları $F_1 = (1,2,3)$, $F_2 = (-1,-3,-2)$ ve a oranı $a = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ olan Apollonius çemberleri ve şekil 7.15 de odakları $F_1 = (1,2,3)$, $F_2 = (-3,-1,-2)$ ve a oranı $a = \frac{1}{36}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ olan Apollonius çemberleri görülmektedir.



Şekil 7.14 $A_{A_b}\left[(1,2,3),(-1,-3,-2),a\right]$, $a=1/10, 1/2, 3/2$



Şekil 7.15 $A_{A_b}\left[(1,2,3),(-3,-1,-2),a\right]$, $a=1/36, 1/2, 3/2$

Aşağıdaki önerme ve akabindeki sonuç, bir alışılmış metrik uzay ve bu uzaydaki metrik tarafından türetilen A_b-metrik ile alışılmış metrik uzaydaki Apollonius çemberleri arasındaki ilgiyi ortaya koymaktadır.

Önerme 7.10 *$X\neq\emptyset$ bir küme ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X,A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde A_b-metrik uzayındaki $A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberi, (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberidir.*

İspat *A_b-metriği d alışılmış metriği tarafından üretildiğinden*

$$A_b\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=d\left(x_1,x_n\right)+d\left(x_2,x_n\right)+\ldots+d\left(x_{n-1},x_n\right)$$

olacağından açıkca

$$A_b\left(x,\ldots,x,y\right)=d\left(x,y\right)+\cdots+d\left(x,y\right)=\left(n-1\right)d\left(x,y\right)$$

olur. O halde $A_{A_b}\left[F_1,F_2,2a\right]$ Apollonius çemberi için

$$\begin{aligned}\frac{A_b\left(x,\ldots,x,F_1\right)}{A_b\left(x,\ldots,x,F_2\right)}=a\quad&\Rightarrow\frac{\left(n-1\right)d\left(x,F_1\right)}{\left(n-1\right)d\left(x,F_2\right)}=a\\&\Rightarrow\frac{d\left(x,F_1\right)}{d\left(x,F_2\right)}=a\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkca $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki önermeden kolayca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.16 *$X\neq\emptyset$ bir küme, (X,d) bir alışılmış metrik uzay ve A_b, bir alışılmış d metriği tarafından üretilen A_b-metrik olmak üzere (X,A_b) bir A_b-metrik uzay olsun. Bu taktirde (X,d) alışılmış metrik uzayındaki $A_d\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberi A_b-metrik uzayındaki $C_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberidir.*

Tanım 7.8 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$, $(X,\ A_b)$ A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T:X\longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x\in A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$ için $Tx=x$ ise $A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberine T dönüşümünün sabit Apollonius çemberi denir.*

Teorem 7.26 *(X,A_b) bir metrik uzay, $A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$, odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu her $x\in X$ için,*

$$\varphi(x)=A_b(x,...x,F_1)/A_b(x,...x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X\longrightarrow X$ dönüşümü, her $x\in A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$ için
$(A_1^{A_b}1)\quad A_b(x,...x,Tx)\leq\varphi(x)-\varphi(Tx)$
$(A_1^{A_b}2)\quad \varphi(Tx)\geq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_{A_b}\left[F_1,F_2,a\right]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$, (X, A_b) A_b- metrik uzayında F_1 ve F_2 odaklı, a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ herhangi bir nokta olmak üzere $(A_1^{A_b}1)$ koşulu ve φ fonksiyonunun tanımı gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &= A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2) - A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\ &= a - A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \end{aligned} \tag{7.7}$$

elde edilir. T dönüşümü $(A_1^{A_b}2)$ koşulunu sağladığından Tx noktası $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberinin üzerinde veya dışında olmalıdır. O halde burada iki durum söz konusudur. Buna göre $A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) > a$ ise yani Tx noktası Apollonius çemberinin dışında ise (7.7) eşitsizliğinden dolayı çelişki elde edilir. Dolayısıyla $A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) = a$ olmalıdır. Aksi taktirde (7.7) e şitsizliğinin sağ tarafı negatif olur. Uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığından dolayı bir çeliş kidir. Yani Tx noktası Apollonius çemberinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $A_b(x, ...x, Tx) \leq a - A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) = a - a = 0$ elde edilir. O halde $Tx = x$ dir. Yani her $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 7.41 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R}, A_b)$, A_b-metrik uzayında $A_{A_b}[0, 2, 9]$ Apollonius çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{9}{2}$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in A_{A_b}[0, 2, 9] = \{\frac{3}{2}, 3\}$ dir ve her $x \in A_{A_b}[0, 2, 9]$ için $(A_1^{A_b}1)$ ve $(A_1^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A_{A_b}[0, 2, 9]$ Apollonius çemberi, T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir. Dikkat edilirse T dönüşümü altında sabit Apollonius çemberi örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin, $A_{A_b}\left[\frac{3}{4}, \frac{15}{8}, 4\right]$, $A_{A_b}\left[\frac{15}{4}, \frac{21}{8}, 4\right]$ ve $A_{A_b}[0, 2, 9]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Apollonius çemberlerinin T dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez. $A_{A_b}[1, 2, 4]$, $A_{A_b}[0, 2, 4]$ ve $A_{A_b}[-1, 1, 9]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant değildir.

Örnek 7.42 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\ &\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[0,2,9]$ *Apollonius çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{4x-3}{3}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in A_{A_b}[0,2,9] = \{\frac{3}{2},\ 3\}$ *için* $(A_1^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = \frac{3}{2}$ *için* $\frac{1}{4}(n-1) \leq 9-1 \Rightarrow (n-1) \leq 32$
$x = 3$ *için* $0(n-1) \leq 9-9 \Rightarrow 0 \leq 0$
olup sağlanıyor iken açıkça $(A_1^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = \frac{3}{2}$ *için* $1 \geq 9$
$x = 3$ *için* $9 \geq 9$
olacağından sağlanmaz. Ayrıca$A_{A_b}[0,2,9] = \{\frac{3}{2},\ 3\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.43 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[0,2,9]$ *Apollonius çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = -x + \frac{9}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in A_{A_b}[0,2,9] = \{\frac{3}{2},\ 3\}$ *için* $(A_1^{A_b}1)$ *koşulu*
$x = \frac{3}{2}$ *için* $\frac{9}{4}(n-1) \leq 9-9 \Rightarrow (n-1) \leq 0$
$x = 3$ *için* $\frac{9}{4}(n-1) \leq 9-9 \Rightarrow (n-1) \leq 0$
olup sağlanmıyor iken açıkça $(A_1^{A_b}2)$ *koşulu*
$x = \frac{3}{2}$ *için* $9 \geq 9$
$x = 3$ *için* $9 \geq 9$
olacağından sağlanır. Ancak $A_{A_b}[0,2,9] = \{\frac{3}{2},\ 3\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.17 $(X,\ A)$ *bir metrik uzay,* $A_A[F_1,F_2,a]$*, odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x,...x,F_1)/A(x,...x,F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_A[F_1,F_2,a]$ *için*
(A_1^A1) $A(x,...x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
(A_1^A2) $\varphi(Tx) \geq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_A[F_1,F_2,a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 7.27 (X,A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$*,* (X,A_b) A_b-*metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$

fonksiyonu her $x \in X$ için,

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde T:$X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ için,
$(A_2^{A_b}1)$ $A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$
$(A_2^{A_b}1)$ $\varphi(Tx) \leq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$, (X, A_b) A_b- metrik uzayında odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1)/A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. $(A_2^{A_b}1)$ koşulundan ve φ fonksiyonunun tanımından dolayı,*

$$\begin{aligned} A_b(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a \\ &= A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2) + A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 2a \\ &= a + A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 2a \\ &= A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - a \qquad (7.8) \end{aligned}$$

elde edilir. $(A_2^{A_b}1)$ koşulu sağlandığından dolayı Tx noktası $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberinin üzerinde veya içinde olmalıdır. Dolayısıyla iki durum vardır. Buna göre Tx noktası Apollonius çemberinin içinde ise yani $A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1)/A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) < a$ ise (7.8) eşitsizliği $A_b(x,\ ...x,\ Tx) < 0$ formuna dönüşür. Ancak bu durumda uzaklığın (metriğin) pozitif tanımlılığı gereğince çelişki meydana gelir. O halde$A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1)/A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) = a$ olmalıdır. Yani Tx noktası Apollonius çemberinin üzerinde olmalıdır. Bu durumda, $A_b(x,\ ...x,\ Tx) \leq A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_1)/A_b(Tx,\ ...,\ Tx,\ F_2) - a = a - a = 0$ elde edilir. Bu durumda $Tx = x$ dir. Yani her $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 7.44 *X=$\mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için A_b:$X^n \longrightarrow [0, \infty)$, $A_b(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $A_{A_b}[0, 1, 4]$ Apollonius çemberi ve her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = 3x^2 - 7x + 4$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x \in A_{A_b}[0, 1, 4] = \{\frac{2}{3},\ 2\}$ dir ve her $x \in A_{A_b}[0, 1, 4]$ için $(A_2^{A_b}1)$ ve $(A_2^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A_{A_b}[0, 1, 4]$ Apollonius çemberi, T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir. Dikkat edilirse T dön üşümü altında sabit*

Apollonius çemberi örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin, $A_{A_b}\left[-\frac{2}{3},\frac{10}{9},9\right]$, $A_{A_b}\left[\frac{10}{3},\frac{14}{9},9\right]$ *ve* $A_{A_b}\left[4,\frac{3}{2},16\right]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez.* $A_{A_b}[1,2,4]$, $A_{A_b}[0,2,9]$ *ve* $A_{A_b}[-1,1,9]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.45 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[0,1,4]$ *Apollonius çemberi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in A_{A_b}[0,1,4]=\{\frac{2}{3},\ 2\}$ *için* $(A_2^{A_b}1)$ *koşulu*

$x=\frac{2}{3}$ *için* $0(n-1)^2\leq 4+4-8\Rightarrow 0\leq 0$

$x=2$ *için* $\frac{4}{9}(n-1)^2\leq 4+16-8\Rightarrow(n-1)^2\leq 27$

olup sağlanıyor iken açıkça $(A_2^{A_b}2)$ *koşulu*

$x=\frac{2}{3}$ *için* $4\leq 4$

$x=2$ *için* $16\leq 4$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $A_{A_b}[0,1,4]=\{\frac{2}{3},\ 2\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.46 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$, $A_b(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i-x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[0,1,4]$ *Apollonius çemberi ve her* $x\in\mathbb{R}$ *için* $Tx=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x\in A_{A_b}[0,1,4]=\{\frac{2}{3},\ 2\}$ *için* $(A_2^{A_b}1)$ *koşulu*

$x=\frac{2}{3}$ *için* $\frac{16}{9}(n-1)^2\leq 4+4-8\Rightarrow(n-1)^2\leq 0$

$x=2$ *için* $(n-1)^2\leq 4+\frac{9}{4}-8\Rightarrow(n-1)^2\leq-\frac{7}{4}$

olup sağlanmıyor iken açıkça $(A_2^{A_b}2)$ *koşulu*

$x=\frac{2}{3}$ *için* $4\leq 4$

$x=2$ *için* $\frac{9}{4}\leq 4$

olacağından sağlanır. Ancak $A_{A_b}[0,1,4]=\{\frac{2}{3},\ 2\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.18 $(X,\ A)$ *bir* $A-$*metrik uzay,* $A_A[F_1,F_2,a]$, $(X,\ A)$ $A-$*metrik uzayında odakları* F_1, F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi:X\longrightarrow[0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x\in X$ *için,*

$$\varphi(x)=A(x,...x,F_1)/A(x,...x,F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in A_A[F_1, F_2, a]$ için,

$(A_2^A 1)$ $\quad A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$

$(A_2^A 1)$ $\quad \varphi(Tx) \leq a$

koşullarını sağlıyorsa $A_A[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

Teorem 7.28 *(X, A_b) bir A_b-metrik uzay , $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında odakları F_1, F_2 olan ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü, her $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için

$(A_3^{A_b} 1)$ $\quad A_b(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$

$(A_3^{A_b} 2)$ $\quad h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \geq a$

koşullarını sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.

İspat *$X \neq \varnothing$ bir küme, A_b, X üzerinde bir A_b- metrik olsun. $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$, (X, A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = A_b(x,\ ...x,\ F_1)/A_b(x,\ ...x,\ F_2)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü alınsın. Bu takdirde $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ herhangi bir nokta olmak üzere. T dönüşümü $(A_3^{A_b} 1)$ koşulu sağlandığından bu koşuldan başlayarak, φ fonksiyonunun tanımı ve $(A_3^{A_b} 2)$ koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
A(x, ...x, Tx) &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \\
&= A_b(x, ...x, F_1)/A_b(x, ...x, F_2) - A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\
&= a - A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) \\
&\leq h.A_b(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) - \varphi(Tx) \\
&= h.A_b(x, ...x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $(h-1)A_b(x,\ ...x,\ Tx) \geq 0$ bulunur. Bu durumda $h \in [0,\ 1)$ olduğundan dolayı $A_b(x,\ ...x,\ Tx) = 0$ olmak zorundadır. Bu nedenle $Tx = x$ olur. Yani her $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ için $Tx = x$ olduğundan dolayı T dönüşümü $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberini sabit bırakır.

Örnek 7.47 *$X = \mathbb{R}$ ve $n \geq 3$ için $A_b : X^n \longrightarrow [0, \infty)$,*

$$\begin{aligned}
A_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= |x_n + \cdots + x_2 - (n-1)x_1|^2 + |x_n + \cdots + x_3 - (n-2)x_2|^2 \\
&\quad + \cdots + |x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}|^2 + |x_n - x_{n-1}|^2
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $A_{A_b}[3,1,9]$ Apollonius çemberi ve her $x\in\mathbb{R}$ için $Tx=2x^2-2x$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x\in A_{A_b}[3,1,9]=\{0,\ \frac{3}{2}\}$ dir ve her $x\in A_{A_b}[3,1,9]$ için $(A_3^{A_b}1)$ ve $(A_3^{A_b}2)$ koşulları sağlanır. Dolayısıyla $A_{A_b}[3,1,9]$ Apollonius çemberi, T dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir. Dikkat edilirse T dön üşümü altında sabit Apollonius çemberi örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin, $A_{A_b}\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{8},4\right]$, $A_{A_b}\left[\frac{9}{4},\frac{9}{8},4\right]$ ve $A_{A_b}\left[-\frac{9}{4},\frac{9}{16},16\right]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Apollonius çemberlerinin T dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez. $A_{A_b}[1,2,4]$, $A_{A_b}[0,2,4]$ ve $A_{A_b}\left[4,\frac{3}{2},16\right]$ Apollonius çemberleri T altında invaryant değildir.

Örnek 7.48 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $A_{A_b}[3,1,9]$ Apollonius çemberi ve her $x\in\mathbb{R}$ için $Tx=\frac{4}{3}x$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x\in A_{A_b}[3,1,9]=\{0,\ \frac{3}{2}\}$ için $(A_1^{A_b}1)$ koşulu

$x=0$ *için* $0(n-1)\leq 9-9\Rightarrow 0\leq 0$

$x=\frac{3}{2}$ *için* $\frac{1}{4}(n-1)\leq 9-1\Rightarrow n\leq 33$

olup sağlanıyor iken açıkça $(A_1^{A_b}2)$ koşulu

$x=0$ *için* $0.h(n-1)+9\geq 9\Rightarrow 9\geq 9$

$x=\frac{3}{2}$ *için* $\frac{1}{4}h(n-1)+1\geq 9\Rightarrow h(n-1)\geq 32$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $A_{A_b}[3,1,9]=\{0,\ \frac{3}{2}\}$ Apollonius çemberi, T altında invaryant değildir.

Örnek 7.49 $X=\mathbb{R}$ *ve* $n\geq 3$ *için* $A:X^n\longrightarrow[0,\infty)$,

$$\begin{aligned} A_b(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= |x_n+\cdots+x_2-(n-1)x_1|^2+|x_n+\cdots+x_3-(n-2)x_2|^2 \\ &\quad +\cdots+|x_n+x_{n-1}-2x_{n-2}|^2+|x_n-x_{n-1}|^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı A_b-metrik olmak üzere $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-metrik uzayı verilsin. $(\mathbb{R},\ A_b)$, A_b-metrik uzayında $A_{A_b}[3,1,9]$ Apollonius çemberi ve her $x\in\mathbb{R}$ için $Tx=-x+3$ dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her $x\in A_{A_b}[3,1,9]=\{0,\ \frac{3}{2}\}$ için $(A_3^{A_b}1)$ koşulu

$x=0$ *için* $9(n-1)\leq 9-0\Rightarrow n\leq 2$

$x=\frac{3}{2}$ *için* $0(n-1)\leq 9-9\Rightarrow 0\leq 0$

olup sağlanmaz iken açıkça $(A_3^{A_b}2)$ koşulu

$x=0$ *için* $9h(n-1)+0\geq 9\Rightarrow h(n-1)\geq 1$

$x = \frac{3}{2}$ *için* $0h(n-1) + 9 \geq 9 \Rightarrow 9 \geq 9$
olacağından sağlanır. Ayrıca $A_{A_b}[3, 1, 9] = \{0, \frac{3}{2}\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.19 (X, A) *bir* $A-$*metrik uzay ,* $A_A[F_1, F_2, a]$, (X, A) $A-$*metrik uzayında odakları* F_1, F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x, ...x, F_1)/A(x, ...x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_A[F_1, F_2, a]$ *ve bazı* $h \in [0, 1)$ *için*
$(A_3^A 1)$ $A(x, ...x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$
$(A_3^A 2)$ $h.A(x, ...x, Tx) + \varphi(Tx) \geq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_A[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 7.29 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ,* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$, F_1 *ve* F_2 *odaklı,* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A_b(x, ..., x, F_1)/A_b(x, ..., x, F_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *için*
$(A_4^{A_b} 1)$ $A_b(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$
$(A_4^{A_b} 2)$ $A_b(x, ..., x, Tx) + \varphi(Tx) \leq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme,* A_b, X *üzerinde bir* A_b- *metrik olsun.* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$, (X, A_b) A_b- *metrik uzayında* F_1, F_2 *odaklı,* a *oranlı bir Apollonius çemberi ve* $\varphi : X \longrightarrow [0, \infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $\varphi(x) = A_b(x, ..., x, F_1)/A_b(x, ..., x, F_2)$ *şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü alınsın. Bu takdirde* $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *herhangi bir nokta olmak üzere* $(A_4^{A_b} 1)$ *koşulundan ve* φ *fonksiyonunun tanımı ve*$(A_4^{A_b} 2)$ *koşulu gereğince*

$$\begin{aligned}
A_b(x, ..., x, Tx) &\leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a \\
&= A_b(x, ..., x, F_1)/A_b(x, ..., x, F_2) + A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - 2a \\
&= A_b(Tx, ..., Tx, F_1)/A_b(Tx, ..., Tx, F_2) - a \\
&\leq \varphi(Tx) - A_b(x, ..., x, Tx) - \varphi(Tx) \\
&= -A_b(x, ..., x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre açıkça $2A_b(x,...,x,Tx) \leq 0$ *bulunur. Bu durumda* A_b *bir* A_b-*metrik olduğundan dolayı* $A_b(x,...,x,Tx) = 0$ *olmak zorundadır. Bu nedenle* $Tx = x$ *olur. Yani her* $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *için* $Tx = x$ *olduğundan dolayı* T *dönüşümü* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberini sabit bırakır.*

Örnek 7.50 X=$\mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* A_b:$X^n \longrightarrow [0,\infty)$, $A_b(x_1, x_2,..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b*-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[4,2,4]$ *Apollonius çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = 3x^2 - 7x$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in A_{A_b}[4,2,4] = \{0,\ \frac{8}{3}\}$ *dir ve her* $x \in A_{A_b}[4,2,4]$ *için* $(A_4^{A_b}1)$ *ve* $(A_4^{A_b}2)$ *koşulları sağlanır. Dolayısıyla* $A_{A_b}[4,2,4]$ *Apollonius çemberi,* T *dönüşüm ünün bir sabit Apollonius çemberidir. Dikkat edilirse* T *dönüşümü altında sabit Apollonius çemberi örnekleri çoğaltılabilir. Örneğin,* $A_{A_b}\left[-\frac{8}{4}, \frac{8}{9}, 9\right]$, $A_{A_b}\left[\frac{16}{3}, \frac{16}{9}, 9\right]$ *ve* $A_{A_b}[-4,1,16]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant kalır. Ancak bu durum tüm Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında sabit kaldığı anlamına gelmez.* $A_{A_b}[1,2,4]$, $A_{A_b}[0,2,9]$ *ve* $A_{A_b}\left[4, \frac{3}{2}, 16\right]$ *Apollonius çemberleri* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.51 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$*,* $A_b(x_1, x_2,..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[4,2,4]$ *Apollonius çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{13}{16}x + \frac{1}{2}$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in A_{A_b}[0,4,4] = \{0,\ \frac{8}{3}\}$ *için* $(A_4^{A_b}1)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $\frac{1}{4}(n-1)^2 \leq 4 + \frac{49}{9} - 8 \Rightarrow (n-1)^2 \leq \frac{52}{9}$

$x = \frac{8}{3}$ *için* $0(n-1)^2 \leq 4 + 4 - 8 \Rightarrow 0 \leq 0$

olup sağlanıyor iken açıkça $(A_4^{A_b}2)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $\frac{1}{4}(n-1)^2 + \frac{49}{9} \leq 4 \Rightarrow (n-1)^2 \leq -\frac{52}{9}$

$x = \frac{8}{3}$ *için* $0(n-1)^2 + 4 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4$

olacağından sağlanmaz. Ayrıca $A_{A_b}[4,2,4] = \{0,\ \frac{8}{3}\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Örnek 7.52 $X = \mathbb{R}$ *ve* $n \geq 3$ *için* $A : X^n \longrightarrow [0,\infty)$*,* $A_b(x_1, x_2,..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i<j}|x_i - x_j|^2$ *biçiminde tanımlı* A_b *-metrik olmak üzere* $(\mathbb{R},\ A_b)$ A_b-*metrik uzayı verilsin.* $(\mathbb{R},\ A_b)$*,* A_b-*metrik uzayında* $A_{A_b}[4,2,4]$ *Apollonius çemberi ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $Tx = \frac{9}{8}x$ *dönüşümü ele alınsın. Bu noktada her* $x \in A_{A_b}[0,4,4] = \{0,\ \frac{8}{3}\}$ *için* $(A_4^{A_b}1)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $0(n-1)^2 \leq 4 + 4 - 8 \Rightarrow 0 \leq 0$

$x = \frac{8}{3}$ *için* $\frac{1}{9}(n-1)^2 \leq 4 + 1 - 8 \Rightarrow (n-1)^2 \leq -27$

olup sağlanmıyor iken açıkça $(A_4^{A_b}2)$ *koşulu*

$x = 0$ *için* $0(n-1)^2 + 4 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4$
$x = \frac{8}{3}$ *için* $\frac{1}{9}(n-1)^2 + 1 \leq 4 \Rightarrow (n-1)^2 \leq 27$
olacağından sağlanır. Ancak $A_{A_b}[4,2,4] = \{0, \frac{8}{3}\}$ *Apollonius çemberi,* T *altında invaryant değildir.*

Sonuç 7.20 $(X,\ A)$ *bir* $A-$*metrik uzay ,* $A_A[F_1, F_2, a]$, F_1 *ve* F_2 *odaklı,* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* $\varphi : X \longrightarrow [0,\infty)$ *fonksiyonu her* $x \in X$ *için,*

$$\varphi(x) = A(x, ..., x, F_1)/A(x, ..., x, F_2)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde $T{:}X \longrightarrow X$ *dönüşümü, her* $x \in A_A[F_1, F_2, a]$ *için*
$(A_4^A 1)$ $\quad A(x, ..., x, Tx) \leq \varphi(x) + \varphi(Tx) - 2a$
$(A_4^A 2)$ $\quad A(x, ..., x, Tx) + \varphi(Tx) \leq a$
koşullarını sağlıyorsa $A_A[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün bir sabit Apollonius çemberidir.*

Buraya kadar olan kısımda verilen Teorem 7.25-7.29 ile A_b-metrik uzayda F_1, F_2 odaklı ve a oranlı $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ Apollonius çemberini nokta-nokta sabit bırakacak T üzerine dönüşümün koşulları incelendi ve ilgili teoremlerde bu koşullar ifade edildi. Bahsi geçen teoremlerde sabit Apollonius çemberinin sayısına dair bir bilgi verilmedi. Aşağıdaki önermeler A_b-metrik uzayda birden fazla sabit Apollonius çemberine sahip dönüşümlerin mevcut olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 7.11 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ile* $A_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2]$ (X, A_b) A_b-*metrik uzayında iki Apollonius çemberi olsun. Bu takdirde* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ile* $A_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2]$ *Apollonius çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat $X \neq \varnothing$ *bir küme ve* A_b*,* X *üzerinde bir* A_b- *metrik olmak üzere* (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay olsun.* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ve* $A_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2]$ *de* $F_{11},\ F_{12}$ *odaklı,* a_1 *oranlı ve* $F_{21},\ F_{22}$ *odaklı,* a_2 *oranlı iki Apollonius çemberi olsun. Ayrıca* P *noktası* $A_b(F_{11},\ ...,\ F_{11},\ P)/A_b(F_{12},\ ...,\ F_{12},\ P) \neq a_1$ *ve* $A_b(F_{21},\ ...,\ F_{21},\ P)/A_b(F_{22},\ ...,\ F_{22},\ P) \neq a_2$ *olacak şekilde* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında sabit bir nokta olsun. Buna göre* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1] \cup A_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2] \ \textit{ise} \\ P, & \textit{diğer hallerde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bunun yanı sıra $\varphi_1,\ \varphi_2\ :\ X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüş ümleri her* $x \in X$ *için* $\varphi_1(x) = A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{11})/A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{12})$ *ve* $\varphi_2(x) = A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{21})/A_b(x,\ x,\ F_{22})$ *olacak şekilde alınsın. Bu takdirde* T *dönüşümü* $\varphi_1(x)$ *ve* $\varphi_2(x)$ *dönüşümleri ile birlikte* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ve* $A_{A_b}[F_{21}, ..., F_{22}, a_2]$ *Apollonius çemberleri için* $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A^j_{A_b}1)$*ve* $(A^j_{A_b}2)$ *koşullarını sağlar. O halde Teorem 7.25-7.29 gereğince açıkça* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ve* $A_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2]$ *Apollonius çemberleri* T *dönüşümünün sabit Apollonius çemberleridir. Burada dikkat edilirse ele alınan* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1]$ *ve* $A_{A_b}[F_{21}, F_{22}, a_2]$ *Apollonius çemberlerinin konumları ve birbirlerine göre pozisyonları hakkında herhangi bir kısıtlama yoktur. İlgili Apollonius çemberleri tamamiyle keyfidir.*

Önerme 7.12 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay ve* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1],\ ...,\ A_{A_b}[F_{n1}, F_{n2}, a_n]$ (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* n *tane Apollonius çemberi olsun. Bu takdirde* $A_{A_b}[F_{11}, F_{12}, a_1],\ ...,\ A_{A_b}[F_{n1}, F_{n2}, a_n]$ *Apollonius çemberlerini nokta nokta sabit bırakacak şekilde* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında en az bir* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü vardır.*

İspat *Önerme 7.11 in ispatına benzer olarak* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere her* $x \in X$ *için*

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{A_b}[F_{i1}, F_{i2}, a_i] \text{ ise} \\ P, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü ve her* $x \in X$ *için* $\varphi_i(x) = A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{i1})/A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{i2})$ *olacak şekilde tanımlanan* $\varphi_i : X \longrightarrow [0,\infty)$ *dönüşümleri kullanılarak kolayca verilebilir. Burada* T *dönüşümündeki* P *noktası* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *olmak üzere* $A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{i1})/A_b(x,\ ...,\ x,\ F_{i2}) \neq a_i$ *koşullarını sağlayacak şekilde sabit bir noktadır. Ayrıca bir önceki önermede olduğu gibi burada ele alınan* $i \in \{1, ..., n\}$ *için* $A_{A_b}[F_{i1}, F_{i2}, a_i]$ *Apollonius çemberlerinin birbirlerine göre konumları tamamiyle keyfidir, herhangi bir kısıtlama yoktur. elde edilir.*

Yukarıda ele alınan iki önermeden sonra şimdi bir (X, A_b) A_b-metrik uzayında bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümünün ne zaman ya da hangi koşullar altında bir tek sabit Apollonius çemberine sahip olacağının tespit edilmesi önemli bir probleme dönüşmüş olur. Aşağıda ifade edilen Teorem 7.30-7.33 ile bu sorunun yanıtı verilmiştir.

Teorem 7.30 (X, A_b) *bir metrik uzay ,* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$*,* $(X,\ A_b)$ A_b-*metrik uzayında odakları* F_1*,* F_2 *olan ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü*

$(A_1^{A_b}1)$ ve $(A_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde, her $x \in A_{A_b}[F_1,F_2,a]$, $y \in X \setminus A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ ve bazı $h \in [0,\ 1)$ için T dönüşümü,

$$A_b(Tx,...,Tx,Ty) \leq hA_b(x,...,x,y)$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün bir tek sabit Apollonius çemberidir.

İspat *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$, (X,A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T dönüşümü her $x \in A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ ve $y \in X \setminus A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ noktaları için $h \in [0,\ 1)$ olmak üzere $A_b(Tx,...,Tx,Ty) \leq hA_b(x,...,x,y)$ koşulunu sağlasın. Buna göre $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ ve $A_{A_b}[F_{1^*},F_{2^*},a^*]$ Apollonius çemberlerinin T dönüşümünün iki farklı sabit Apollonius çemberi olduğu varsayılsın. $u \neq v$ olmak üzere $u \in A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ ve $v \in A_{A_b}[F_{1^*},F_{2^*},a^*]$ noktaları alınsın. T dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$A_b(u,...,u,v) = A_b(Tu,...,Tu,Tv) \leq h.A_b(u,...,u,v)$$

elde edilir. Ancak $h \in [0,\ 1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ olmalıdır. Bu takdirde $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

Yukarıdaki teoremin hipotezin $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $(A_1^{A_b}1)$ve $(A_1^{A_b}2)$ koşullarını sağlamaktadır. Ancak buradaki koşullar elbette $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(A_i^{A_b}1)$ve $(A_i^{A_b}2)$ olarak değiştirilebilir.

Teorem 7.31 *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$, (X,A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi olsun. $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ olmak üzere $(A_i^{A_b}1)$ ve $(A_i^{A_b}2)$ koşullarını sağlasın. Bu takdirde T dönüşümü her $x \in A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ ve $y \in X \setminus A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ noktaları için*

$$A_b(Tx,...,Tx,Ty) < \max\left\{\begin{array}{r} A_b(x,...,x,y), A_b(Tx,...,Tx,x), A_b(Ty,...,Ty,y), \\ A_b(Ty,...,Ty,x), A_b(Tx,...,Tx,y) \end{array}\right\}$$

büzülme koşulunu sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$ Apollonius çemberi T dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.

İspat *(X,A_b) bir A_b-metrik uzay, $A_{A_b}[F_1,F_2,a]$, (X,A_b) A_b-metrik uzayında F_1, F_2 odaklı ve a oranlı bir Apollonius çemberi ve $T : X \longrightarrow X$ dönüşüm olsun. Ayrıca T*

dönüşümü her $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *noktaları için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) < \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(x, ..., x, y), A_b(Tx, ..., Tx, x), A_b(Ty, ..., Ty, y), \\ A_b(Ty, ..., Ty, x), A_b(Tx, ..., Tx, y) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. . Buna göre $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümünün iki farklı sabit Apollonius çemberi olduğu varsayılsın.* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın.* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulundan,*

$$\begin{array}{rcl} A_b(u, ..., u, v) & = & A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ & < & \max \left\{ \begin{array}{r} A_b(u, ..., u, v), A_b(Tu, ..., Tu, u), A_b(Tv, ..., Tv, v), \\ A_b(Tv, ..., Tv, u), A_b(Tu, .., Tu, v) \end{array} \right\} \\ & = & A_b(u, ..., u, v) \end{array}$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $u = v$ *olmalıdır. Bu takdirde* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 7.32 (X, A_b) *bir metrik uzay,* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$*,* $(X,\ A_b)$ A_b-*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^{A_b}1)$ *ve* $(A_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda \in [0,\ 1/2)$ *için*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \lambda \left[A_b(x, ..., x, Tx) + A_b(y, ..., y, Ty)\right]$$

koşulunu sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 7.30 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{array}{rcl} A_b(u, ..., u, v) & = & A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ & \leq & \lambda . \left[A_b(u, ..., u, Tu) + A_b(v, ..., v, Tv)\right] \\ & = & \lambda . \left[A_b(u, ..., u) + A_b(v, ..., v)\right] = 0 \end{array}$$

elde edilir. Buna göre $A_b(u, ..., u, v) = 0$ *olup* $u = v$ *bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

Teorem 7.33 (X, A_b) *bir* A_b-*metrik uzay,* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$*,* (X, A_b) A_b-*metrik uzayında* F_1*,* F_2 *odaklı ve* a *oranlı bir Apollonius çemberi olsun.* $T : X \longrightarrow X$ *dönüşümü* $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ *olmak üzere* $(A_i^{A_b}1)$ *ve* $(A_i^{A_b}2)$ *koşullarını sağlasın. Bu takdirde* T *dönüşümü her* $x \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $y \in X \setminus A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olmak üzere,*

$$A_b(Tx, ..., Tx, Ty) \leq \alpha A_b(x, ..., x, Tx) + \beta A_b(y, ..., y, Ty) + \gamma A_b(x, ..., x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

İspat *Teorem 7.30 daki ispat yöntemine benzer şekilde* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $A_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *Apollonius çemberlerinin* T *dönüşümü altında nokta nokta invaryant kaldığı varsayılsın. Buna göre* $u \neq v$ *olmak üzere* $u \in A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *ve* $v \in A_{A_b}[F_{1^*}, F_{2^*}, a^*]$ *noktaları alınsın. O halde* T *dönüşümünün sağladığı büzülme koşulu gereğince,*

$$\begin{aligned} A_b(u, ..., u, v) &= A_b(Tu, ..., Tu, Tv) \\ &\leq \alpha A_b(u, ..., u, Tu) + \beta A_b(v, ..., v, Tv) + \gamma A_b(u, ..., u, v) \\ &= \gamma A_b(u, ..., u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\lambda + \beta + \gamma < 1$ *olduğundan açıkça* $\gamma < 1$ *olacağından bu bir çelişkidir. O halde* $A_{A_b}[F_1, F_2, a]$ *Apollonius çemberi* T *dönüşümünün tek sabit Apollonius çemberidir.*

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında alışılmış metrik uzay ve alışılmış metrik uzayın birer genelleştirilmesi olan $S-$metrik uzay, $A-$metrik uzay ve A_b-metrik uzaylarda sabit çember, sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini eğrisi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca ilgili metrik uzaylarda alışılmış sabit nokta teorisinin dışında yer alan bu geometrik kavramların yani sabit çemberin, sabit elipsin, sabit hiperbolün, sabit Cassini eğrisinin ve sabit Apollonius çemberinin varlık ve teklik koşulları incelenmiş ve bununla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Ele alınan her bir geometrik yapı için dörder çift varlık koşulları verilmiştir. Ayrıca çalışılan uzaydaki birçok meşhur sabit nokta teoremlerinden faydalanılarak pekçok teklik koşulu ortaya konulmuş ve diğer teklik koşulları için yol göstermede bulunulmuştur.

Son yıllarda Nihal Özgür ve Nihal Taş'ın öncülünde başlayan çalışmalar ile klasik sabit nokta çalışmalarının ötesinde özellikle genelleştirilmiş metrik uzaylarda geometri yapılmasının yolu açılmış oldu. Bu bağlamda bu tezde elde edilen sonuçlar ile bahsi geçen genelleştirilmiş metrik uzaylarda çeşitli geometrik nesneler ile sabit nokta teorisi birleştirilmiş oldu. Dolayısıyla özellikle genelleştirilmiş metrik uzaylarda geometrik çalışmalar için çeşitli yeni sonuçlar elde edilmiştir.

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tezde alışılmış ve $S-$metrik uzay için önceden elde edilen sabit çember sonuçları kullanılarak sabit çemberin varlık ve teklik koşulları $A-$metrik uzay ve A_b-metrik uzay için tespit edildi. Ayrıca elde olan yöntemlerden hareket ederek alışılmış metrik uzay ve alışılmış metrik uzayın birer genelleştirilmesi olan $S-$metrik uzay, $A-$metrik uzay ve A_b-metrik uzaylarda sabit çember, sabit elips, sabit hiperbol, sabit Cassini eğrisi ve sabit Apollonius çemberi kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca ilgili metrik uzaylarda alışılmış sabit nokta teorisinin dışında yer alan bu geometrik kavramların yani sabit çemberin, sabit elipsin, sabit hiperbolün, sabit Cassini eğrisinin ve sabit Apollonius çemberinin varlık ve teklik koşulları incelenmiş ve bununla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Bu tezde ele alınan her bir geometrik yer için dörder çift varlık koşulları verilmiş ve ayrıca ilgili metrik uzaylardaki bazı sabit nokta teoremlerinden faydalanılarak birçok teklik koşulu ortaya konulmuştur. Bu noktada daha sonraki çalışmalar için mevcut tespit edilen varlık ve teklik koşulların dışında mevcut fonksiyonların faklı olan koşulların belirlenmesi problemi örnek gösterilebilir.

Klasik sabit nokta teorisinden farklı olup genelleştirilmiş metrik uzayların geometrik yönündeki bu tip çalışmalar farklı tarzda geometrik özellikleri olan eğriler için de verilebilir. Ayrıca şu ana kadar incelenmiş eğrilerin bu tezde ele alınmamış diğer metrik uzay genellemelerindeki yansımaları araştırılabilir.

Ayrıca daha önemli bir problem olarak herhangi bir metrik uzayda verilen bir dönüşümün herhangi bir geometrik nesneyi sabit bırakıp bırakmadığını açıklayacak koşullar araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbas M., Ali B. and Suleiman Y. I., 2015, Generalized coupled common fixed point results in partially ordered A-metric spaces. Fixed Point Theory and Applications., 2015:64, DOI: 10.1186/s13663-015-0309-2

Agarwal R.P., Karapınar E., O'Regan D., Francisco A., 2015, Fixed Point Theory In Metrik Type Space, Springer

Banach, S., 1922, Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3: 133-181.

Caristi, J., 1976, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions Trans. Amer. Math. Soc., 215, 241 – 251.

Chatterjea, S. K., 1972, Fixed point theorem, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25, 727 –730.

Chen, G. , 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University, 43p.

Dhage, B.C., 1992, Generalized metric spaces and mapping with fixed point. Bull. Cal. Math. Soc. 84, 329–336

Dhage, B.C., 1994, Generalized metric space and topological structure II. Pure Appl. Math. Sci. 40, 37–41

Dhage, B.C., 2000, Generalized metric space and topological structure I. An. Stiint. Univ. Al.I, Cuza. Iazi, Mat (ANS) 46, 3–24

Edelstein M., 1961, An extension of Banach's contraction principle Pro. Amer. Math. Soc.12: 7-10

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22, 1–74

Fréchet, M., 1926, Les espaces abstrait topologiquement affine, Acta Math., 47: 25-52.

Gähler, S., 1963, 2-Metriche raume und ihre topologische strukture. Math. Nachr. 26, 115–148

Gähler, S., 1966, Zur geometric 2-metriche raume. Revue Roumaine de Math. Pures Appl. XI, 664–669

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gelişgen, Ö. and Ermiş, T., 2019, A Generalized Fixed Point Theorem and Its Corollaries in $A-$Metric Space, Preprint, Submitted to journal.

Joshi, M., Tomar, A. and Padaliya S. K., 2020, Fixed Point to Fixed Ellipse in Metric Spaces and Discontinuous Activation Function, Applied Mathematics E-Notes, 20, 1-12

Kannan, R., 1969, Some results on fixed points II, Am. Math. Mon., 76, 405 –408.

Kreyszig, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 7(2), 289–297

Özgür, N. Y. and Taş, N., 2016, Some generalizations of fixed point theorems on S – metric spaces, Essays in Mathematics and Its Applications in Honor of Vladimir Arnold, New York, Springer.

Özgür N.Y., Taş N., 2018, Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle. AIP Conference Proceedings, 1926 (1): 020048. doi: 10.1063/1.5020497

Özgür, N.Y. and Taş, N., 2017, Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25), Math Sci, 11:7–16.

Özgür, N.Y., Taş, N. and Çelik U., 2017, New Fixed-Circle Results On S-Metric Spaces, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 9(2), 10-23.

Özgür, N.Y. and Taş, N., 2019, Some Fixed-Circle Theorems on Metric Spaces. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 42, 1433–1449.

Priyobarta, N., Rohen Y. and Devi M. B., 2020, Partial Ab-metric space and some fixed point theorems, International Journal of Mathematics and Computer Science, 15 (2), 533–547.

Ram´ırez, J. L. and Rubiano G. N., 2014, Elliptic Inversion of Two-Dimensional Objects, International Journal of Geometry, 3 (1), 12-27.

Reich, S., 1971, Some remarks concerning contraction mappings, Oanad. Math. Bull., 14, 121-124.

Rhoades, B. E., 1977, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257 – 290.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sedghi, S., Shobe, N. and Aliouche, A., 2012, A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces, Mat. Vesnik, 64 (3), 258 – 266.

Sedghi, S. and Dung, N. V., 2014, Fixed point theorems on S – metric spaces, Mat. Vesnik, 66 (1), 113 – 124.

Taş, N., 2017, Sabit Nokta Teoremleri Ve Çeşitli Uygulamaları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Tian, S., 2005, Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 17, 1, 35-40.

Ughade, M., Türkoğlu, D., Singh, S. K. and Daheriya, R. D., 2016, Some fixed point theorems in Ab – metric space, British Journal of Mathematics and Computer Science, 19 (6), 1 – 24.

ÖZGEÇMİŞ

[redacted]