Fuzzy ve Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlemlerde Dönüşümler Üzerine

Elif Altıntaş Kahriman

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2020

On Maps in Fuzzy and Intuitionistic Fuzzy Projective Planes

Elif Altıntaş Kahriman

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

September 2020

Fuzzy ve Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlemlerde Dönüşümler Üzerine

Elif Altıntaş Kahriman

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Eylül 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Fuzzy ve Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlemlerde Dönüşümler Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/09/2020

Elif Altıntaş Kahriman

ÖZET

Bu tez klasik projektif düzlemlerde tanımlanan dönüşümlerin fuzzy ve sezgisel fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif düzlemlerdeki fuzzy ve sezgisel fuzzy karşılıklarını ve özelliklerini sunmaktadır.

İlk iki bölüm fuzzy ve sezgisel fuzzy vektör uzayları ile fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif geometrinin literatür araştırmasını ve tezin amacını içermektedir. Üçüncü bölümde, cebir, fuzzy ve sezgisel fuzzy küme teorisi, fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif uzaylardaki temel kavramlar sunulmaktadır. Dördüncü bölüm fuzzy ve sezgisel fuzzy vektör uzaylarının bilinen temel özelliklerinden oluşmaktadır. Beşinci bölümde, $3-$ boyutlu sezgisel fuzzy vektör uzayından sezgisel fuzzy projektif düzlem elde edildi. Sezgisel fuzzy vektör uzayında oluşturulan maksimal flag yardımıyla sezgisel fuzzy projektif düzlemin nokta ve doğruları oluşturuldu.

Altıncı bölümde, klasik projektif düzlemlerde tanımlı olan kolinasyon ve merkezsel kolinasyonların fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemlerdeki karşılıkları verildi. Daha sonra bu dönüşümlerin sağladığı özellikler, bu dönüşümler altında düzlemin taban noktasının ve taban doğrusunun invaryant kalmasına göre düzlemin üyelik dereceleri ile ilgili ilişkileri içeren teoremler ve sonuçlar elde edildi.

Yedinci bölümde, sezgisel fuzzy vektör uzaylarından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde sezgisel fuzzy homomorfizm, sezgisel fuzzy izomorfizm ve sezgisel fuzzy merkezsel kolinasyon taban projektif düzleminde karşılık gelen dönüşümler yardımıyla tanımlandı. Sezgisel fuzzy projektif dönüşümlerin invaryant bıraktığı özellikler ve düzlemin üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler teorem ve sonuçlarla verildi.

Anahtar Kelimeler : Projektif Düzlem, Fuzzy Projektif Düzlem, Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlem, Fuzzy Kolinasyon, Sezgisel Fuzzy Kolinasyon.

SUMMARY

This thesis presents fuzzy and intuitionistic fuzzy counterparts of maps defined in classical projective planes and properties in fuzzy and intuitionistic fuzzy projective planes obtained from fuzzy and intuitionistic fuzzy vector spaces.

The first chapter presents the aim of the thesis and the second chapter includes a literature research on fuzzy and intuitionistic fuzzy vector spaces and projective geometry. The third chapter includes the brief summary of basic concepts in algebra, the fuzzy and intuitionistic fuzzy set theory, fuzzy and intuitionistic fuzzy projective spaces. The fourth chapter consists of the known basic properties of fuzzy and intuitionistic fuzzy vector spaces. In the fifth chapter the intuitionistic fuzzy projective point, line and plane are obtained by using the maximal flag constructed in the 3-dimensional intuitionistic fuzzy vector space.

In the sixth chapter, the fuzzy counterparts of the collination and central collinations defined in classical projective planes in fuzzy projective planes obtained from vector spaces are given. The properties of these maps and the relations related to the membership degrees of the plane according to the invariant of the base point and line of plane under these maps are presented.

In the seventh chapter, intuitionistic fuzzy homomorphism, isomorphism and intuitionistic fuzzy central collinations in intuitionistic fuzzy projective planes from intuitionistic fuzzy vector spaces are defined with the help of the corresponding maps in the base projective plane. The relations between the properties that intuitionistic fuzzy projective transformations leave invariant and the membership degrees of plane are given by theorems and results.

Keywords : Projective Plane, Fuzzy Projective Plane, Intuitionistic Fuzzy Projective Plane, Collineation, Intuitionistic Fuzzy Collineation.

TEŞEKKÜR

[redacted]

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Fuzzy kavramı ilk olarak Zadeh tarafından 1965 yılında kurulmuş ve pek çok bilim adamı bu alana katkı sağlamıştır. Günümüze kadar fuzzy kümelerin birçok genişlemesi oluşturulmuştur. Cebir, topoloji ve grafik teorisi gibi klasik matematiksel alanlardaki orijinal fikirler ve kavramlar, hem fuzzy hem de sezgisel fuzzy küme teorilerinin hızlı büyümesiyle genelleştirilmiştir. Fuzzy gruplar hakkındaki ilk makale 1971'de Azriel Rosenfeld tarafından yayınlandı. 1977 de Katsaras ve Liu vektör uzayının fuzzy alt uzayı kavramı üzerine çalışmalar yapmış ve formülize etmişlerdir. Vektör uzaylarıyla ilgili birçok kavram ve sonuç fuzzy alt uzaylara genişletilmiştir. Bu sonuçlar (Abdukhalikov vd. 1994; Abdukhalikov, 1996; Lubczonok, 1990; Mordeson, 1993; Zadeh, 1965) de bulunabilir. 1983'de Atanassov tarafından ait olma ve ait olmama üyelik dereceleriyle birlikte sezgisel fuzzy küme oluşturulmuştur. Kumar, 1992 de diğer görüşler ve sonuçlar arasından, bir fuzzy alt uzayının fuzzy kosetinin iyi tanımlanması ve homomorfizm altındaki fuzzy alt uzaylarına doğal cebirsel işlemlerin uygulanabilmesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Yine Kumar diğer bir çalışmasında da fuzzy alt uzayının fuzzy tabanı ve boyutunun iyi tanımlanması ve çalışması konusu üzerinde durmuştur.

Projektif uzaylar ilk kez 1998 de Kuijken, Maldeghem ve Kerre tarafından fuzzileştirilmiştir. Yine Kuijken ve Maldeghem tarafından 2002 de Fuzzy Projektif Geometrik yapılardan daha zengin olan Fiber Geometriler inşa edilmiştir. Bayar, Akça ve Ekmekçi, 2006 yılında 4- boyutlu fuzzy vektör uzayından elde edilen 3-boyutlu projektif uzayın fuzzy doğrularının sınıflamasını incelemişlerdir. Daha sonra da aynı fuzzy projektif uzayın fuzzy düzlemlerini sınıflamışlardır. Vektör uzaylarındaki dönüşümlerin Fuzzy karşılıkları ilk olarak 1996 yılında Abdulhalikov tarafından verilmiştir. Yine Abdulhalikov tarafından fuzzy lineer dönüşümlerin fuzzy alt uzayının dual dönüşümlerin fuzzy alt uzayına izomorf olduğu gösterilmiştir. Kuijken ve Maldeghem tarafından 2003 yılında fuzzy projektif düzlemdeki kolinasyonlar tanımlanmıştır.

Bu tezin amacı fuzzy ve sezgisel fuzzy vektör uzayından elde edilen fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde, klasik projektif düzlemlerde tanımlanan dönüşümlerin fuzzy ve sezgisel fuzzy karşılıklarını tanımlamak, bu tanımlanan dönüşümlerin özellikleri ve bunların invaryant bıraktığı bazı özellikleri ispatlamaktır. Böylece sunulan tanım, teorem ve sonuçlar fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif düzlemlerdeki teorileri geliştirmekle birlikte, daha yüksek boyutlu fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif uzaylarda, fuzzy ve sezgisel fuzzy teorinin gelişmesine katkı sağlayacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Matematikte birçok teorinin fuzzy karşılığı bulunmaktadır. Bu nedenle fuzzy teori birçok bilim dalında önemli bir yere sahiptir. Fuzzy kavramı ilk olarak Zadeh tarafından 1965 yılında kurulmuş ve pek çok bilim adamı bu alana katkı sağlamıştır. Günümüze kadar fuzzy kümelerin birçok genişlemesi oluşturulmuştur. Cebir, topoloji ve grafik teorisi gibi klasik matematiksel alanlardaki orijinal fikirler ve kavramlar, hem fuzzy hem de sezgisel fuzzy küme teorilerinin hızlı büyümesiyle genelleştirilmiştir. Fuzzy gruplar hakkındaki ilk makale 1971'de Rosenfeld tarafından yayınlandı. Daha sonra birçok fuzzy cebirsel yapı formüle edildi. Rosenfeld, t-norm minimuma göre bir grupoidin fuzzy alt grubu ve bir grubun fuzzy alt grubu kavramlarını formüle etti. 1979'da Anthony ve Sherwood fuzzy alt grubu üçgen norm kavramını kullanarak yeniden tanımladı. Fuzzy alt grup teorisi, Das (1981), Gupta ve Sarma (1995), Kim ve Bae (1997), Kuroki (1992), Ray (1992) gibi birçok matematikçi tarafından daha da geliştirildi.

1977 de Katsaras ve Liu vektör uzayının fuzzy alt uzayı kavramı üzerine çalışmalar yapmış ve formülize etmişlerdir. 1989, Nanda fuzzy cisim üzerinde fuzzy cismin ve fuzzy lineer uzayın kavramlarını tanıttı. " Vektör uzayı " ve " Lineer uzay " terminolojileri aynı cebirsel yapıyı temsil etse de, Katsaras ve Liu'nun fuzzy vektör uzayı kavramı, Nanda'nın fuzzy cisim üzerinde fuzzy lineer uzay kavramından farklıdır. Biswas, Nanda'nın tanımının rasyonel olmadığını düşündü ve 1989'da fuzzy cisim ve fuzzy lineer uzay kavramlarını yeniden tanımladı. Vektör uzaylarıyla ilgili birçok kavram ve sonuç fuzzy alt uzaylara genişletilmiştir. Bu sonuçlar (Abdukhalikov vd. 1994; Abdukhalikov, 1996; Lubczonok, 1990; Mordeson, 1993; Zadeh, 1965) de bulunabilir. 1983'de Atanassov tarafından ait olma ve ait olmama üyelik dereceleriyle birlikte sezgisel fuzzy küme oluşturulmuştur. Fuzzy ve sezgisel fuzzy küme teorilerinin, uygulamada endüstriyel süreç kontrolünden, tıbbi teşhis ve grup karar süreçlerine kadar geniş bir alana sahiptir.

Kumar, 1992 de bir fuzzy alt uzayının fuzzy kosetinin tanımlanması ve homomorfizm altındaki fuzzy alt uzaylarına doğal cebirsel işlemlerin uygulanabilmesi üzerine çalışmalar yapmıştır. Yine Kumar diğer bir çalışmasında da fuzzy alt uzayının fuzzy tabanı ve boyutunun tanımlanması ve çalışması konusu üzerinde durmuştur.

Vektör uzaylarındaki dönüşümlerin Fuzzy karşılıkları ilk olarak 1996 yılında Abdulhalikov tarafından verilmiştir. Yine Abdulhalikov tarafından fuzzy lineer dönüşümlerin fuzzy alt uzayının dual dönüşümlerin fuzzy alt uzayına izomorf olduğu gösterilmiştir.

Kuijken, Maldeghem ve Kerre tarafından fuzzy vektör uzaylarından elde edilen projektif geometrilerin ilk modeli 1998 de verildi ve daha sonra 1999 yılında fuzzy gruplardan elde edilen fuzzy projektif geometrilerin ilk modeli verildi. Yine Kuijken ve Maldeghem (2002) tarafından Fuzzy Projektif Geometrik yapılardan daha zengin olan Fiber Geometriler inşa edilmiştir. Kuijken ve Maldeghem tarafından 2003 yılında Projektif düzlemdeki kolinasyonların fuzzy karşılıkları tanımlanmıştır. Bayar, Ekmekçi ve Akça (2008) tarafından fiber projektif düzlemlerde üçgesel normun rolü incelenmiştir. 2014 yılında Bayar ve Ekmekçi tarafından fiber projektif düzlemde Menelaus ve Ceva teoremlerinin fiber versiyonları verilmiştir.

Bayar, Akça ve Ekmekçi (2006), 4- boyutlu fuzzy vektör uzayından elde edilen 3-boyutlu projektif uzayın fuzzy doğrularının sınıflamasını incelemişlerdir. Daha sonra da aynı fuzzy projektif uzayın fuzzy düzlemlerini sınıflamışlardır. Ayrıca Bayar, Akça, Ekmekçi ve Maldeghem (2006) fuzzy projektif uzaylarda tanımlı fuzzy projektif spreadleri tanımlamışlardır.

Ghassan tarafından 2009 yılında fiber ve sezgisel projektif geometri arasındaki ilişki araştırılmış ve sezgisel fuzzy projektif geometrinin bir modeli oluşturulmuştur. 2015 yılında Bayar ve Ekmekçi tarafından taban düzlemi Dezargsel ve Pappussel düzlem olan projektif düzlemlerdeki bazı klasik teoremlerin sezgisel fuzzy karşılıkları verilmiştir. 2020 yılında Akça, Bayar ve Ekmekçi tarafından sezgisel fuzzy projektif düzlemde Menelaus ve Ceva teoremlerinin sezgisel fuzzy versiyonları tanımlanmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde cebirsel kavramlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Cebirsel yapılar üzerinde tanımlı projektif 3- uzay, projektif düzlemler tanıtılmıştır. 1965 yılında ilk olarak Zadeh tarafından geliştirilen fuzzy küme teorisi ve temel tanımları verilmiştir. 1986 yılında ilk olarak Atanassov tarafından geliştirilen sezgisel fuzzy küme kavramları sunulmuştur. İlk olarak Kuijken, Maldeghem ve Kerre tarafından 1998 yılında sunulan fuzzy projektif düzlem kavramları tanıtılmış ve daha sonra 2009 yılında Ghassan E. Arif tarafından tanımlanan sezgisel fuzzy projektif düzlem tanımları gözden geçirilmiştir.

3.1 Bazı Cebirsel Kavramlar

Tanım 3.1 *A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya tanımlı bir*

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \to & A \\ & (x,y) & \to & (x*y) \end{array}$$

fonksiyonuna A içinde ikili işlem denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. $A \times A$ nın herhangi bir (a,b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a + b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş,1998).
Tam sayıların ve gerçel sayıların toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri en çok bilinen ikili işlemlerdir.

Tanım 3.2 *G boş olmayan bir küme ve $*$, G de ikili bir işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir (Çallıalp, 2011).*

G1. *$*$, G de bir ikili işlemdir. Yani G kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.*

G2. *$*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır . Yani $\forall$ x, y, z $\in$ G için $x * (y * z) = (x * y) * z$*

G3. *G kümesinin $*$ işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır.*

G4. *G kümesinin her elemanının $*$ işlemine göre tersi vardır. Yani $x \in$ G için $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ olacak şekilde $\exists\, x^{-1} \in$ G vardır.*

Örnek 3.1 *Z, Q, R ve C kümeleri adi toplama işlemine (+ işlemine) göre birer gruptur. $R \setminus \{0\}$, $Z \setminus \{0\}$ ve $C \setminus \{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine göre birer gruptur. $(N, +)$ ve*

$(Z, .)$ cebirsel yapıları ise grup değildir.

Tanım 3.3 *$(G, *)$ bir grup olsun. $\forall$ x, y $\in$G için $x * y = y * x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba* **değişmeli grup** *veya* **abelyan grup** *denir (Çallıalp, 2011).*
Grubun işlemi "$+$" ise **toplamsal grup***, "." ise* **çarpımsal grup** *denir (Çallıalp, 2011).*

Örnek 3.2 *Z, Q ve R kümeleri adi toplama işlemine (+ işlemine) göre birer değişmeli gruptur.*
$Q \setminus \{0\}$ ve $R \setminus \{0\}$ kümeleri de adi çarpma işlemine göre değişmeli gruptur.

Tanım 3.4 *$(G, *)$ bir grup olsun. G sonlu bir küme ise $(G, *)$ grubuna bir* **sonlu grup** *denir ve grubun eleman sayısına da* **grubun mertebesi** *denir (Çallıalp, 2011).*

Tanım 3.5 *G bir grup ve G nin boş olmayan alt kümesi H olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye G nin* **alt grubu** *denir ve H<G ile gösterilir (Çallıalp, 2011).*

Önerme 3.1 *G grubunun, boş olmayan H alt kümesinin alt grup olması için gerek ve yeter şart $\forall$ x, y $\in$ H için $xy^{-1} \in H$ (veya $x^{-1}y \in H$) olmasıdır (Çallıalp, 2011).*

Tanım 3.6 *$(G, .)$ bir grup ve $f : G \to G$ bir fonksiyon olsun. Eğer*

(i) *f birebir ve örten fonksiyon*

(ii) *$\forall$ x, y $\in G$ için $f(x.y) = f(x).f(y)$*

koşulları sağlanıyorsa f ye G üzerinde bir **otomorfizma** *denir. G nin bütün otomorfizmalarının kümesi $O(G)$ ile gösterilir (Karakaş, 1998).*

Önerme 3.2 *G nin bütün otomorfizmalarının kümesi $O(G)$ bileşke işlemi altında bir gruptur (Çallıalp, 2011).*

Örnek 3.3 *G bir abelyan grup ise, $f : G \to G$ $f(x) = x^{-1}$ ile tanımlanan dönüşüm G nin bir otomorfizmidir. Çünkü $\forall$ x, y $\in G$ için,*
$f(x) = f(y) \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$ ve $f(y^{-1}) = y$

olduğundan, f birebir-örtendir ve
$f(xy) = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$
olduğundan f dönüşümü G üzerinde bir otomorfizmadır (Karakaş,1998).

Tanım 3.7 *K boştan farklı bir küme olsun. Eğer $f : K \to K$ fonksiyonu birebir ve örten ise f ye K üzerinde bir* **permütasyon** *denir. K üzerindeki bütün permütasyonların bileşke işlemi altında oluşturduğu gruba* **permütasyon grubu** *veya* **simetrik grup** *denir. $K = \{1,\ 2,\ ,...,\ n\}$ kümesi üzerinde simetrik grup S_n ile gösterilir ve S_n simetrik grubunun mertebesi $n!$ dir. S_n nin bir α elemanı,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir (Karakaş, 1998).

Örnek 3.4 *S_4 ün mertebesi 24 dür ve bu 24 eleman*

$$\begin{array}{cccc} \alpha(1) = (1) & \alpha(2) = (123) & \alpha(3) = (134) & \alpha(4) = (234) \\ \alpha(5) = (241) & \alpha(6) = (243) & \alpha(7) = (214) & \alpha(8) = (314) \\ \alpha(9) = (132) & \alpha(10) = (12) & \alpha(11) = (13) & \alpha(12) = (14) \\ \alpha(13) = (23) & \alpha(14) = (24) & \alpha(15) = (34) & \alpha(16) = (1234) \\ \alpha(17) = (1243) & \alpha(18) = (1342) & \alpha(19) = (1432) & \alpha(20) = (1324) \\ \alpha(21) = (1423) & \alpha(22) = (14)(23) & \alpha(23) = (13)(24) & \alpha(24) = (12)(34) \end{array}$$

şeklindedir.

Tanım 3.8 *F, boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+ : F \times F \to F$ ve $. : F \times F \to F$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(F, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya* **cisim** *adı verilir (Karakaş, 1998).*

C1. $\forall a, b \in F$ *için* $a + b = b + a$ *ve* $a.b = b.a$ *dır.*

C2. $\forall a, b, c \in F$ *için* $a + (b + c) = (a + b) + c$ *ve* $(a.b).c = a.(b.c)$ *dir.*

C3. $\forall a, b, c \in F$ *için* $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$ *dir.*

C4. *F kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki,* $\forall a \in F$ *için* $a + 0 = a$ *eşitliğini sağlar.*

C5. *F kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı* $\forall a \in F$ *için* $a.1 = a$ *eşitliğini sağlar.*

C6. $\forall a \in F$ *için, F kümesinde öyle bir* $-a$ *elemanı vardır ki,* $a + (-a) = 0$ *eşitliğini sağlar.*

C7. $\forall a \neq 0 \in F$ *için, F kümesinde öyle bir* a^{-1} *elemanı vardır ki,* $a.a^{-1} = 1$ *eşitliğini sağlar.*

Örnek 3.5 *Q, R, C birer cisim iken Z bir cisim değildir.*

Tanım 3.9 *V, boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : V \times V \rightarrow V$ ve $. : F \times V \rightarrow V$ iki fonksiyon olmak üzere $(V, F, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa,V kümesine F cismi üzerinde bir* **vektör uzayı** *denir (Karakaş, 1998).*

V1. *$\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ tir.*

V2. *$\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.*

V3. *$\forall x \in V$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde V de bir tek θ elemanı vardır.*

V4. *$\forall x \in V$ için $x + y = \theta$ eşitliğini sağlayan V de bir tek y elemanı vardır.*

V5. *$\forall a, b \in F$ ve $\forall x \in V$ için $a.(b, x) = (a.b).x$ tir.*

V6. *$\forall a, b \in F$ ve $\forall x \in V$ için $(a + b).x = a.x + b.x$ tir.*

V7. *$\forall a \in F$ ve $\forall x, y \in V$ için $a.(x + y) = a.x + a.y$ dir.*

V8. *$\forall x \in V$ için $1.x = x$ dir (1 cismin birim elemanı).*

Örnek 3.6 *Q, R, C ve $n \in N^+$ olmak üzere R^n bir vektör uzayıdır.*

Teorem 3.1 *V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W nın V nin bir alt uzay olması için gerek ve yeter koşul*

(i) *$x, y \in W$ iken $x + y \in W$ (W toplama işlemine göre kapalı)*

(ii) *$x \in W, c \in R$ iken $c.x \in W$ olmasıdır (W skalerle çarpma işlemine göre kapalı) (Karakaş, 1998).*

3.2 Projektif 3-Uzay

Tanım 3.10 *Biri noktalardan, diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ üzerinde bir $\sim$ bağıntısından meydana gelen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \sim)$ üçlüsüne bir* **geometrik yapı** *denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $a, b, c, ..., x, y, z, ...$ gibi küçük harflerle $\mathcal{D}$ nin elemanları $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$ gibi büyük harflerle gösterilir.*
$n_1, n_2, n_3, ... \in \mathcal{N}$ noktaları için $n_i \sim \mathcal{D}, i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $D \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara **doğrudaş noktalar** *denir.*
$D_1, D_2, D_3, ... \in \mathcal{D}$ doğruları için $n \sim \mathcal{D}_i, i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $n \in \mathcal{N}$ varsa, yani bu doğruların hepsi aynı noktadan geçerler ise bunlara **noktadaş doğrular** *denir.*
$D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ ve $D_1 \neq D_2$ olsun. Eğer $\mathcal{N} \sim D_1$ ve $\mathcal{N} \sim D_2$ olacak şekilde hiçbir $n \in \mathcal{N}$ noktası yoksa D_1 ve D_2 ye paralel doğrular denir ve $D_1 \parallel D_2$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

Tanım 3.11 *V bir vektör uzayı $D(V)$ de V nin alt uzaylarının bir koleksiyonu ve $\sim$ da bu alt uzaylar arasında bir üzerinde bulunma bağıntısı olsun. $D(V)$ ve $D(V)$ deki üzerinde bulunma bağıntısı yardımıyla tanımlanan $PG(V) = (D(V), \circ)$ geometrik yapısına* **projektif uzay** *denir. U ve U' alt uzayları V nin alt uzayları olsun. Eğer $U \subseteq U'$ veya $U' \subseteq U$ şartlarından biri sağlanıyorsa U ve U' birbirinin üzerindedir denir ve $U \circ U'$ ile gösterilir (Kuijken vd., 1999).*

Tanım 3.12 *V bir vektör uzayı ve V nin bir alt uzayı U olsun. U alt uzayının boyutu tabanındaki vektör sayısına eşittir ve $boy(U)$ ile gösterilir. U alt uzayının* **projektif boyutu** *da U nun boyutunun bir eksiğidir ve $pboy(U) = boy(U) - 1$ ile gösterilir (Kuijken vd., 1999).*

Sonlu boyutlu bir projektif uzayda bütün doğrular eşit sayıda nokta içerir ve projektif uzayın mertebesi herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğidir. Eğer q mertebeli sonlu bir cisim üzerindeki projektif uzaylar üzerinde çalışırsak, bir doğru üzerindeki noktaların sayısı $q + 1$ e eşittir, böylece projektif uzayın mertebesi q olacaktır. q mertebeli bir cisim üzerindeki $n-$ boyutlu projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir.

Tanım 3.13 *$S_n = PG(n, q)$, $n-$ boyutlu projektif uzay ve $n \geq 2$ olsun. O zaman aşağıdaki aksiyomlar geçerlidir (Casse, 2006):*

A1. *S_n elemanları noktalar olan bir kümedir.*

A2. *$-1 \leq h \leq n$ ve $\forall h \in Z$ için, S_h, S_n nin $h-$ boyutlu alt uzayıdır.*

A3. *S_n nin aşikar alt uzayları S_n ve S_{-1} dir. S_{-1} alt uzayı S_n nin boş alt uzayıdır.*

A4. *S_n nin noktaları kendisinin 0 boyutlu alt uzaylarıdır.*

A5. *$n-$ boyutlu tek alt uzay S_n dir.*

A6. *S_h ve S_k, S_n nin iki alt uzayı olsun. O zaman $S_h \cap S_k$ da S_n nin alt uzayıdır.*

A7. *S_h ve S_k, S_n nin iki alt uzayı olsun. O zaman $S_h \cap S_k$ alt uzayının boyutu,*

$$pboy(S_h \oplus S_k) + pboy(S_h \cap S_k) = pboy(S_h) + pboy(S_k)$$

şeklinde hesaplanır ($S_h \oplus S_k$ uzayı S_h ve S_k alt uzaylarının gerdiği uzaydır, bu ifade $\langle S_h, S_k \rangle$ şeklinde de gösterilebilir).

Tanım 3.14 *$S_n = PG(n, q)$, $n-$ boyutlu bir projektif uzay olsun. O zaman*
0 boyutlu S_0 projektif alt uzayına **projektif nokta**,
1 boyutlu S_1 projektif alt uzayına **projektif doğru**,
2 boyutlu S_2 projektif alt uzayına **projektif düzlem**,
3 boyutlu S_3 projektif alt uzayına **projektif uzay**, *denir (Casse, 2006).*

Tanım 3.15 *Nokta, doğru ve düzlem denilen tanımsız geometrik nesnelerden oluşan, boş olmayan üç ayrık küme, bu kümelerin elemanları arasında tanımlı üzerinde bulunma bağıntılarıyla birlikte aşağıdaki aksiyomları gerçekliyorsa bunların hepsine birden bir* **projektif 3 $-$ uzay** *denir (Kaya, 2005).*

U1. *Farklı iki noktadan geçen tek bir doğru vardır.*

U2. *Her doğru üzerinde en az üç nokta vardır.*

U3. *Doğrudaş olmayan üç nokta tek bir düzlem üzerindedir.*

U4. *Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve hepsi aynı düzlem üzerinde bulunmayan dört nokta vardır.*

U5.*Bir doğru ve bir düzlemin en az bir ortak noktası vardır.*

U6. *İki düzlemin en az bir ortak doğrusu vardır.*

Tanım 3.16 *$\mathcal{P}$ n-boyutlu bir projektif uzay olsun. $\mathcal{P}$ de aşikar olmayan alt uzayların ($\emptyset$ ve P den farklı alt uzaylar) ve $\forall j \leq i \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_i$ olacak şekilde iç içe geçmiş farklı alt uzayların $(U_0, U_1, \cdots, U_m)$ dizisine $\mathcal{P}$ de bir* **flag** *denir (Kuijken vd.,1999).*

U_i nin boyutu i olsun. $\{U_i, U_{i+1}, ..., U_m\}$ şeklinde bir flag aşikar olmayan farklı alt uzayların ve $\forall j \leq i < k \leq m \leq n-1$ için $U_j \subset U_k$ olacak şekilde $(U_i, U_{i+1}, ..., U_m)$ ayrık dizisidir, bu flag kısaca $[i, m]$ flag olarak da gösterilebilir.

3.3 Projektif Düzlem

Tanım 3.17 *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular kümesi olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere, $P1, P2, P3$ aksiyomlarını gerçekleyen $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine bir* **projektif düzlem** *denir (Kaya, 2005).*

P1. *Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta tek bir doğru belirtir.*

P2. *Her $c, d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.*

P3. *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

Teorem 3.2 *$\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).*

Tanım 3.18 *Her sonlu $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan n pozitif tamsayısı vardır. Bu tamsayıya* **projektif düzlemin mertebesi** *denir (Kaya, 2005).*

(1) *$\mathcal{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta vardır.*

(2) *$\mathcal{P}$ nin her noktası tam olarak $n+1$ doğru üzerindedir.*

(3) *$\mathcal{P}$ deki noktaların toplam sayısı n^2+n+1 dir.*

(4) *$\mathcal{P}$ deki doğruların toplam sayısı n^2+n+1 dir.*

Teorem 3.3 *Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir projektif düzlem vardır (Kaya, 2005).*
F herhangi bir cisim olsun.

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in F, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0), (x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3), \lambda \in F, \lambda \neq 0\}$$

$$D = \{[a_1, a_2, a_3] : a_1, a_2, a_3 \in F, [a_1, a_2, a_3] \neq [0,0,0], [a_1, a_2, a_3] = \lambda[a_1, a_2, a_3], \lambda \in F, \lambda \neq 0\}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir projektif düzlemdir. F cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak $\mathcal{P}_2F$ ile gösterilir. Özel olarak $F = R, C$ ve Q cisimleri için $\mathcal{P}_2R$ düzlemi düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005).

Yukarıdaki teoremden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.
Sonuç r pozitif bir tamsayı p de bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $GF(p^r)$ cismi olduğu için, bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde

$$\frac{(p^r)^3 - 1}{p^r} - 1 = (p^r)^2 + p^r + 1$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin p^r olduğunu gösterir. Diğer bir ifade ile her r pozitif tamsayısı ve her p asal sayısı için mertbesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşılık cisimler yardımıyla elde edilen birçok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebesi p^r biçiminde yazılabilen pozitif tamsayılardır (Kaya, 2005).

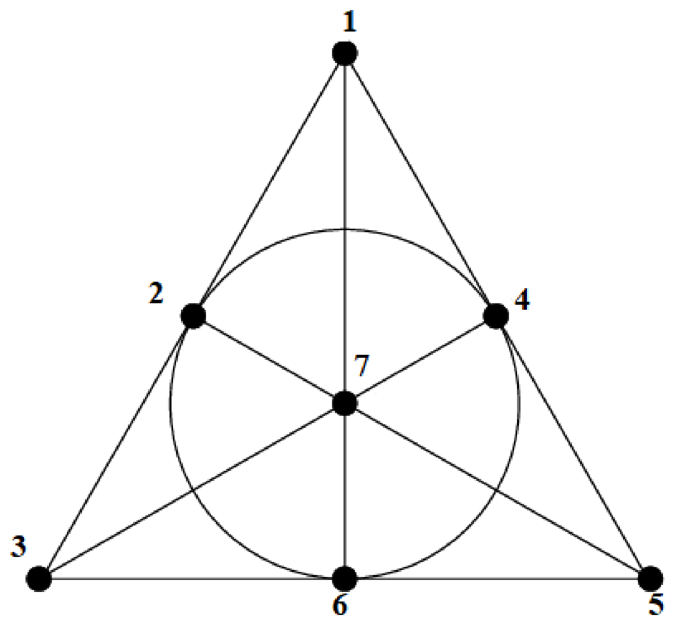
Örnek 3.7 *En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.*

$$\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7\}\,,\ \mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$$

ve

$$d_1 = \{1,2,3\}\,, \quad d_2 = \{1,4,5\}\,, \quad d_3 = \{1,6,7\}\,, \quad d_4 = \{2,4,6\}\,,$$
$$d_5 = \{2,5,7\}\,, \quad d_6 = \{3,4,7\}\,, \quad d_7 = \{3,5,6\}$$

olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *sistemi bir projektif düzlemdir. Yedi noktalı bu projektif düzleme* **Fano düzlemi** *denir (Kaya, 2005) (Şekil 3.1).*



Şekil 3.1 Fano Düzlemi

P1) *3 ve 5 farklı iki nokta çifti olsun. 3 ve 5 den geçen bir tek* d_7 *doğrusu vardır. 3 ve 5 noktalarından geçen başka doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.*

P2) d_1, d_2 *doğruları alınırsa, bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 1 dir. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.*

P3) *1, 2, 3 ve 7 noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır.*

Örnek 3.8 F=$GF(2)$ *olmak üzere* $\mathcal{P}_2 F$ *düzleminin noktaları* $(0,0,1),(0,1,0),$ $(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,0)$ *üçlülerinden oluşur. Doğruları da aynı üçlülerden ibarettir. Aşağıda her doğrunun üzerinde bulunan noktalar gösterilmektedir.*

$$[0,0,1] : (0,1,0),(1,0,0),(1,1,0)$$

$$[0,1,0] : (0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$$

$$[1,0,0] : (0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)$$
$$[0,1,1] : (0,1,1),(1,0,0),(1,1,1)$$
$$[1,0,1] : (0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)$$
$$[1,1,0] : (0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)$$
$$[1,1,1] : (0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$$

$\mathcal{P}_2F$ bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

3.4 Fuzzy Kümeler

Matematikte birçok teorinin Fuzzy karşılığı vardır. Temel olarak bu bir kümeye ait elemanların üyelik derecesinin $[0,1]$ aralığında değer almasıdır. Fuzzy kavramı ilk olarak Zadeh (1965) tarafından kuruldu ve bu fuzzy teori birçok mühendislik ve temel bilimler alanları tarafından uygulamada önemli bir role sahiptir.

Tanım 3.19 *X boştan farklı bir küme ve X üzerinde bir fuzzy küme A ise bu takdirde A fuzzy kümesi*

$$\begin{array}{rccc} \mu_A : & X & \to & [0,1] \\ & x & \to & \mu_A(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon yardımıyla karakterize edilen bir kümedir. Ayrıca μ_A fonksiyonuna **üyelik fonksiyonu** *da denir (Zadeh, 1965).*
X kümesi üzerindeki μ_A ve λ_A gibi iki fuzzy kümelerinin arakesiti

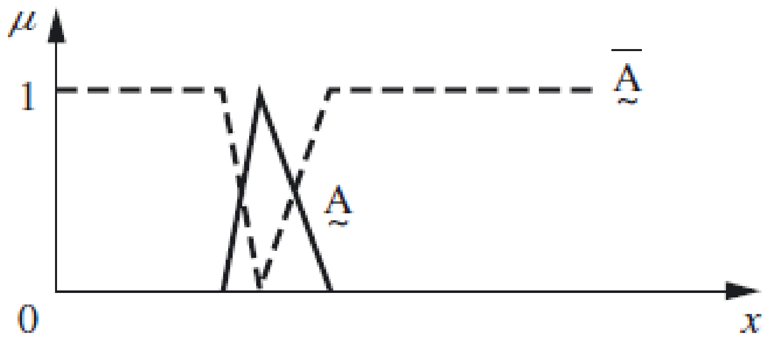
$$\begin{array}{rccc} \mu_A \wedge \lambda_A : & X & \to & [0,1] \\ & x & \to & \mu_A(x) \wedge \lambda_A(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_A \wedge \lambda_A$ fuzzy kümesidir. Burada $\wedge$ minimum operatörünü ifade eder (Zadeh, 1965).

Tanım 3.20 *A ve B, X üzerinde iki fuzzy küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B fuzzy kümeleri eşittir denir ve kısaca $\mu_A = \mu_B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).*

Tanım 3.21 *X üzerinde bir fuzzy A kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için*

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Şekil 3.2 A Fuzzy Kümesinin Tümleyeni

şeklinde tanımlanır (Zadeh, 1965) (Şekil 3.2).

Tanım 3.22 *Bir X kümesi üzerinde μ ve λ fuzzy kümelerini düşünelim. Bu iki fuzzy kümenin $\mu \times \lambda$* **kartezyen çarpımı** *aşğıdaki gibi tanımlanır:*

$$\begin{array}{rccc} \mu \times \lambda : & X \times X & \to & [0,1] \\ & (x,y) & \to & \mu(x) \wedge \lambda(y) \end{array}$$

Tanım 3.23 *X kümesi için x in bütün fuzzy alt kümelerinin kümesini $F(x)$ ile gösterelim. X_1, X_2 ve Y herhangi kümeler olsun. f, $X_1 \times X_2$ den Y ye dönüşüm olsun. Genişletme prensibi ifade eder ki bu dönüşüm aşağıdakilerden birine genişletilebilinir.*

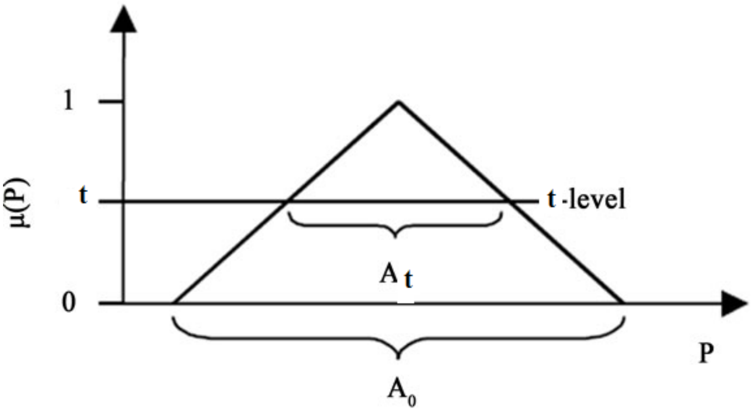
$$\begin{array}{rccc} f : & F(X_1) \times F(X_2) & \to & F(Y) \\ & (\mu_1, \mu_2) & \to & f(\mu_1, \mu_2) \end{array}$$

$\mu_1 \in F(X_1)$ ve $\mu_2 \in F(X_2)$ olmak üzere Y üzerinde $f(\mu_1, \mu_2)$ görüntü kümesi

$$y \to \left\{ \begin{array}{cc} sup_{f(x_1,x_2)=y} \left\{ (\mu_1 \times \mu_2)_{(x_1,x_2)} \mid x_i \in X_i, i = 1,2 \right\}, & \exists \bar{x} \in X_1 \times X_2 : f(\bar{x}) = y \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

şeklinde bir fuzzy kümesi tanımlar.

Tanım 3.24 *μ, X kümesinin bir fuzzy kümesi olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için $\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$ kümesine μ fuzzy kümesinin* **seviye alt kümesi** *denir (Zadeh, 1965) (Şekil 3.3).*

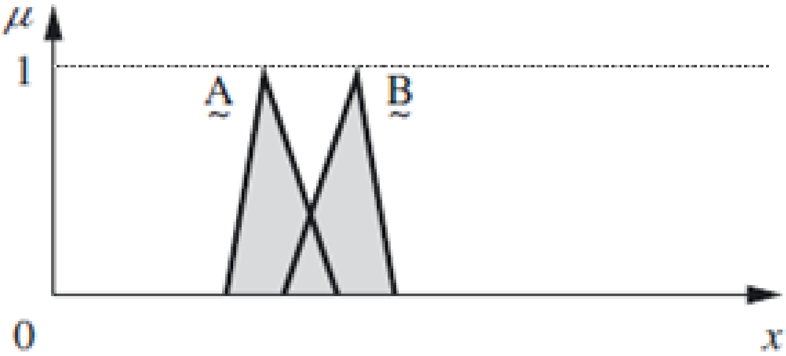


Şekil 3.3 t-Seviye Alt Kümesi

Tanım 3.25 *X üzerinde üyelik fonksiyonları sırası ile μ_A, μ_B olan herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. Ayrıca $A \cup B$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için*

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

şeklinde tanımlanır ve kısaca $\mu_A \vee \mu_B$ biçiminde gösterilir (Zadeh, 1965) (Şekil 3.4).

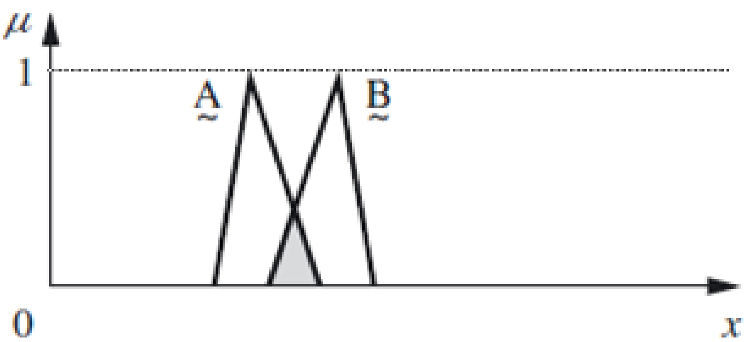


Şekil 3.4 İki Fuzzy Kümenin Birleşimi

Tanım 3.26 *X kümesi üzerindeki üyelik fonksiyonları sırası ile μ_A, μ_B olan herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. Bu takdirde A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi de fuzzy kümedir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $A \cap B$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için*

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

şeklinde tanımlanır ve kısaca $\mu_A \wedge \mu_B$ biçiminde gösterilir (Zadeh, 1965) (Şekil 3.5).

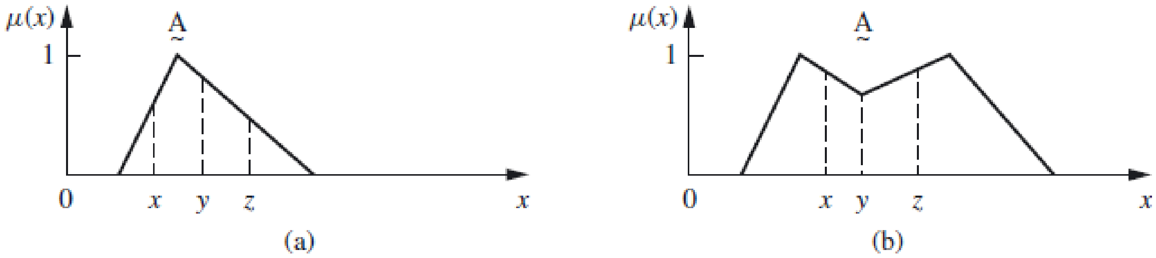


Şekil 3.5 İki Fuzzy Kümenin Kesişimi

Tanım 3.27 *Fuzzy A kümesinin $x < y < z$ bağıntısını sağlayan x, y, z elemanları için*

$$\mu_A(y) \geq min\,\{\mu_A(x), \mu_A(z)\}$$

sağlanıyorsa A kümesine **fuzzy konveks** *küme denir (Ross, 1995) (Şekil 3.6).*



Şekil 3.6 a) Fuzyy konveks Küme b) Fuzzy konveks olmayan küme

Tanım 3.28 *$X \subseteq R^n$, $n-$ boyutlu Öklidyen uzay olsun. $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]$ için $\mu_V(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\,\{\mu_V(x_1), \mu_V(x_2)\}$ sağlanıyorsa X deki V fuzzy kümesi konvekstir.*

Tanım 3.29 *$f : X \to Y$ herhangi bir crisp fonksiyonu ve $V \in F(X)$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $f(x) = f(y)$ iken $\mu_V(x) = \mu_V(y)$ ise V fuzzy kümesine $f-$değişmez denir.*

Tanım 3.30 *$f : X \to Y$ herhangi bir crisp fonksiyonu olsun. X deki V fuzzy kümesinin görüntüsü f fonksiyonu altında $f(V)$ ile gösterilir ve Y kümesinde $\forall y \in Y$ için*

$$\mu_{f(V)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_V(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & diğer\ \ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir fuzzy kümedir.
Y de tanımlı W bir fuzzy küme ise, o zaman f fonksiyonu altında W nin önresmi $f^{-1}(W)$ ile gösterilir ve X kümesinde $\forall x \in X$ için

$$\mu_{f^{-1}(W)}(x) = \mu_w(f(x))$$

şeklinde tanımlanan bir fuzzy kümedir.
f birebir fonksiyon ise, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ olduğunda, $\mu_{f(V)}(y) = \mu_V(f^{-1}(y))$ sağlanır.

Tanım 3.31 *A, X üzerinde tanımlı bir fuzzy küme ve B, Y üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olsun. A ve B fuzzy kümelerinin kartezyen çarpımının fuzzy bağıntısı R olmak üzere*

$$A \times B = R \subset X \times X$$

ve

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \times B}(x, y) = min\,(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

biçiminde tanımlanır (Ross, 1995).

Tanım 3.32 *R, $X \times Y$ üzerinde bir fuzzy bağıntı, S, $Y \times Z$ üzerinde bir fuzzy bağıntı ve T, $X \times Z$ üzerinde bir fuzzy bağıntı olmak üzere,*

$$\underset{\sim}{\mathrm{T}} = \underset{\sim}{\mathrm{R}} \circ \underset{\sim}{\mathrm{S}},$$
$$\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{T}}}(x, z) = \bigvee_{y \in \mathrm{Y}} (\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathrm{S}}}(y, z)),$$

ve fuzzy max- çarpım

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{T}}}(x, z) = \bigvee_{y \in \mathrm{Y}} (\mu_{\underset{\sim}{\mathrm{R}}}(x, y) \bullet \mu_{\underset{\sim}{\mathrm{S}}}(y, z)).$$

biçiminde tanımlanır (Ross, 1995).

Tanım 3.33 *Varsayalım ki $\mathcal{P}, (P, B, I)$ projektif düzlem olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, $P \cup B$ üzerinde μ fuzzy kümesi $\mathcal{P}$ de* **fuzzy projektif düzlemdir** *(Kuijken vd., 1999).*

i. $\mu(L) \geq \mu(p) \wedge \mu(q)$, $\forall p, q : \langle p, q \rangle = L$ *ve*
ii. $\mu(p) \geq \mu(L) \wedge \mu(M)$, $\forall L, M : L \cap M = p$

Tanım 3.34 *$\mathcal{P}$, $n-$boyutlu bir projektif uzay ve $\mathcal{P}$ üzerinde bir fuzzy μ kümesi olsun. $\mathcal{P}$ nin her p, q, r doğrudaş noktaları için*

$$\mu(p) \geq \mu(q) \wedge \mu(r)$$

şartı sağlanıyorsa μ ye $\mathcal{P}$ üzerinde $n-$ boyutlu **fuzzy projektif uzay** *denir ve $[\mu, \mathcal{P}]$ ile gösterilir. P projektif uzayına $[\mu, \mathcal{P}]$ nin* **taban projektif uzayı** *denir (Kuijken, 1999).*

3.5 Sezgisel Fuzzy Kümeler

Sezgisel Fuzzy küme ilk olarak 1986 yılında Atanassov tarafından yayınlanmıştır. Ghassan tarafından 2009 yılında fiber ve sezgisel projektif geometri arasındaki ilişki araştırılmış ve sezgisel fuzzy projektif geometrinin bir modeli tanımlanmıştır. 2015 yılında Bayar ve Ekmekçi tarafından projektif düzlemdeki bazı klasik konfigürasyonların taban düzlemi Dezargsel ve Pappussel düzlem olan sezgisel fuzzy projektif düzlemlerdeki karşılıkları verilmiştir. Bu bölümde projektif düzlemdeki bazı temel teoremlerin sezgisel fuzzy versiyonları tanıtılacaktır.

Tanım 3.35 *Bir sezgisel fuzzy küme aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa toplama ve çarpma ikili işlemleriyle birlikte sezgisel fuzzy cebiri oluşturur:(Atanassov, 1983)*
1) $a + a = a, a.a = a$
2) $a + b = b + a, a.b = b.a$
3) $a + (b + c) = (a + b) + c,\ a.(b.c) = (a.b).c$
4) $a + (a.b) = a,\ a.(a + b) = a$
5) $a.(b + c) = (a.b) + (a.c),\ a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
6) $a + 0 = a,\ a + 1 = 1,\ a.0 = 0,\ a.1 = a$

Tanım 3.36 *X boştan farklı bir küme olsun.*
Her bir $x \in X$ için, $\lambda : X \to I$ ve $\mu : X \to I$, $I = [0, 1]$, sırasıyla A kümesine ait olma derecesi ve ait olmamama derecesini belirten fuzzy fonksiyonlardır ve $0 \leq \lambda(x) + \mu(x) \leq 1$ *olmak üzere, X üzerinde tanımlı* **A sezgisel fuzzy kümesi** $A = \{\langle x, \lambda(x), \mu(x) \rangle : x \in X\}$

formundadır.
$A = \{\langle x, \lambda(x), \mu(x)\rangle : x \in X\}$ *sezgisel fuzzy kümesi* $A = \{\langle x, \lambda, \mu\rangle : x \in X\}$ *veya sadece* $A = \langle \lambda, \mu\rangle$ *şeklinde gösterilir (Atanassov, 1983).*

$A = \{\langle x, \lambda(x), \mu(x)\rangle : x \in X\}$ *ve* $B = \{\langle x, \delta(x), \gamma(x)\rangle : x \in X\}$, X *üzerinde tanımlı iki sezgisel fuzzy küme olsun. O zaman, (Atanassov, 1983)*

a) $\bar{A} = \{\langle x, \mu(x), \lambda(x)\rangle : x \in X\}$ *(A nın tümleyeni)*
b) $A \cap B = \{\langle x, \lambda(x) \wedge \delta(x), \mu(x) \vee \gamma(x)\rangle : x \in X\}$ *(A ve B nin arakesiti)*
c) $A \cup B = \{\langle x, \lambda(x) \vee \delta(x), \mu(x) \wedge \gamma(x)\rangle : x \in X\}$ *(A ve B nin birleşimi)*
d) *Herbir* $x \in X$ *için,* $A \subseteq B \Leftrightarrow \lambda(x) \leq \delta(x)$ *ve* $\mu(x) \geq \gamma(x)$
e) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *ve* $B \subseteq A$
f) $\tilde{1} = \{\langle x, 1, 0\rangle : x \in X\}$, $\tilde{0} = \{\langle x, 0, 1\rangle : x \in X\}$

$\forall x \in X$, $\emptyset$ *boş küme* $\lambda_\emptyset(x) = 0$ *ve* $\mu_\emptyset(x) = 1$ *olarak ifade edilir ve* $\emptyset$ *ye* **sezgisel fuzzy boş küme** *denir (De vd., 1997).*

Tanım 3.37 $\alpha + \beta \leq 1, \alpha, \beta \in [0, 1]$ *sabit sayılar olmak üzere,* X *deki* V *sezgisel fuzzy kümesi tarafından üretilen* $(\alpha, \beta) -$ **kesenlerinin kümesi**

$$N_{\alpha,\beta}(V) = \{x \in X : \lambda_V(x) \geq \alpha, \mu_V(x) \leq \beta\}$$

olarak tanımlanır (Atanassov, 1999).

Tanım 3.38 X *de* V *ve* W *sezgisel fuzzy kümeler olsun. O zaman,*

(i) $V \subset W$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\forall x \in X, \lambda_V(x) \leq \lambda_W(x)$ *ve* $\mu_V(x) \geq \mu_W(x)$
ii) $V = W$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\forall x \in X, \lambda_V(x) = \lambda_W(x)$ *ve* $\mu_V(x) = \mu_W(x)$

dir (Atanassov, 1999).

Tanım 3.39 X *de* V *ve* W *sezgisel fuzzy kümeler olsun. O zaman,*X *deki* $V \cap W$ *kümesi* $\forall x \in X$ *için,*

$$\lambda_{V\cap W}(x) = min\{\lambda_V(x), \lambda_W(x)\},\ \mu_{V\cap W}(x) = max\{\mu_V(x), \mu_W(x)\}$$

biçiminde tanımlanan sezgisel fuzzy kümedir.
Benzer olarak sezgisel fuzzy kümelerin $\{V_\gamma\}_{\gamma\in J}$ *koleksiyonu olmak üzere,* X *deki* $\bigcap_{\gamma\in J}$ *kümesi* $\forall x \in X$ *için,*

$$\lambda_{(\bigcap_{\gamma\in J} V_\gamma)}(x) = \inf_{\gamma\in J} \lambda_{V_\gamma}(x),\ \mu_{(\bigcap_{\gamma\in J} V_\gamma)}(x) = \sup_{\gamma\in J} \mu_{V_\gamma}(x)$$

biçiminde tanımlanan sezgisel fuzzy kümedir (Atanassov, 1999).

Tanım 3.40 V_1 *ve* V_2 *sırasıyla* X_1, X_2 *de tanımlı sezgisel fuzzy kümeler olsun.* $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ *için* V_1 *ve* V_2 *nin kartezyen çarpımı,*

$$\lambda_{V_1 \times V_2}(x) = min\left\{\lambda_{V_1}(x_1), \lambda_{V_2}(x_2)\right\}, \; \mu_{V_1 \times V_2}(x) = max\left\{\mu_{V_1}(x_1), \mu_{V_2}(x_2)\right\}$$

biçiminde tanımlanır.
Benzer olarak, $V_1, V_2 ... V_n$ *sırasıyla* $X_1, X_2, ..., X_n$*, de tanımlı fuzzy kümeler ise, O zaman,* $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ *için,*

$$\lambda_{V_1 \times V_2 \times ... \times V_n}(x) = min_{i=1,2,..,n} \lambda_{V_i}(x_i), \; \mu_{V_1 \times V_2 \times ... \times V_n}(x) = max_{i=1,2,...,n} \mu_{V_i}(x_i)$$

biçiminde $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ *iç çarpım uzayında tanımlı sezgisel fuzzy kümedir.*
Aynı zamanda, $\forall \gamma \in J$ *için,* X_γ *da* V_γ *sezgisel fuzzy küme ise, o zaman* $\prod_{\gamma \in J} V_\gamma$, $x = (x_\gamma)_{\gamma \in J} \in \prod_{\gamma \in J} X_\gamma$ *için,*

$$\lambda_{(\prod_{\gamma \in J} V_\gamma)}(x) = inf_{\gamma \in J} \lambda_{V_\gamma}(x_\gamma), \; \mu_{(\prod_{\gamma \in J} V_\gamma)}(x) = sup_{\gamma \in J} \mu_{V_\gamma}(x_\gamma)$$

biçiminde $\prod_{\gamma \in J} X_\gamma$ *iç çarpım uzayında tanımlı sezgisel fuzzy kümedir (Atanassov, 1999).*

Not Bu tezde $min\left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$ leri $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ ile ve $inf_{\gamma \in J} a_\gamma$ ları da $\bigwedge_{\gamma \in J} a_\gamma$ ile gösterilecektir.
Benzer şekilde $max\left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$ leri $a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$ ile ve $sup_{\gamma \in J} a_\gamma$ ları da $\bigvee_{\gamma \in J} a_\gamma$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.41 n *boyutlu* S *projektif uzayında, herhangi doğrudaş üç* p, q, r *noktası için,* $\lambda(p) \geq \lambda(q) \wedge \lambda(r)$ *ve* $\mu(p) \leq \mu(q) \vee \mu(r)$ *ise* $A = \{\langle x, \lambda(x), \mu(x) \rangle : x \in X\}$ *sezgisel fuzzy kümesine* S *projektif uzayında tanımlı* $n-$ *boyutlu* **sezgisel fuzzy projektif uzay** *denir ve* $[A, S]$ *ile gösterilir. Eğer* $[A, S]$ *sezgisel fuzzy nokta, doğru, düzlem,... ise sırasıyla taban nokta, taban doğru, taban düzlem,.. kavramları kullanılır.* S *projektif uzayına da* $[A, S]$ *nin taban projektif düzlemi olarak adlandırılır (Ghassan, 2009).*

Tanım 3.42 $\mathcal{P} = (P, B, I)$ *projektif düzlemini göz önüne alarak varsayalım ki* $a \in P$ *ve* $\alpha, \beta \in [0, 1]$ *olsun.* $\mathcal{P}$ *projektif düzleminin* P *nokta kümesinde* (a, α, β) **sezgisel fuzzy nokta,**

$$(a,\alpha,\beta) : P \to [0,1]\times[0,1] : \begin{cases} a \to \alpha, a \to \beta \\ \quad x \to 0, \qquad x \in P \setminus \{a\} \end{cases}$$

olacak şekilde bir sezgisel fuzzy kümedir. a noktası, (a,α,β) sezgisel fuzzy noktasının taban noktası olarak adlandırılır. Benzer şekilde L doğrusu, (L,α,β) sezgisel fuzzy doğrusunun taban doğrusu olarak tanımlanır.

(L,α,β) ve (M,σ,ω) sezgisel fuzzy doğruları, bir tek $(L\cap M, \alpha\wedge\sigma, \beta\vee\omega)$ sezgisel fuzzy noktasında kesişir (Ghassan, 2009).

Tanım 3.43 *$\mathcal{P} = (P,B,I)$ projektif düzlem olmak üzere, $P\cup B$ üzerinde $Z = \langle\lambda,\mu\rangle$ sezgisel fuzzy kümesi*

1) *$\lambda(L) \geq \lambda(p)\wedge\lambda(q)$ ve $\mu(L) \leq \mu(p)\vee\mu(q)$; $\forall p,q : \langle p,q\rangle = L$*

2) *$\lambda(p) \geq \lambda(L)\wedge\lambda(M)$ ve $\mu(p) \leq \mu(L)\vee\mu(M)$; $\forall L,M : L\cap M = p$*

şartlarını sağlıyorsa, $\mathcal{P}$ de **sezgisel fuzzy projektif düzlem** *denir (Ghassan, 2009).*

Teorem 3.4 *$\mathcal{P}$ taban düzlemi Dezargsel olan sezgisel fuzzy projektif düzlem olsun. Sezgisel fuzzy projektif düzlemde $(a_i,\alpha_i,\alpha_i^{'})$, $i\in\{1,2,3\}$ taban noktaları doğrudaş olmayan üç sezgisel fuzzy nokta ve $i\in\{1,2,3\}$ için $\left(\langle a_i,b_i\rangle, \alpha_i\wedge\beta_i, \alpha_i^{'}\vee\beta_i^{'}\right)$ $f-$doğruları sezgisel fuzzy projektif düzleminin $a_i\neq b_i\neq p\neq a_i$ için (p,γ,μ) sezgisel fuzzy noktasında kesişmek üzere $i\in\{1,2,3\}$, $(b_i,\beta_i,\beta_i^{'})$, taban noktaları doğrudaş olmayan diğer üç $f-$ nokta olsun. O zaman $i\neq j$ ve $i,j\in\{1,2,3\}$ için $\left(\langle a_i,a_j\rangle, \alpha_i\wedge\alpha_j, \alpha_i^{'}\vee\alpha_j^{'}\right)$ ve $\left(\langle b_i,b_j\rangle, \beta_i\wedge\beta_j, \beta_i^{'}\vee\beta_j^{'}\right)$ sezgisel fuzzy doğrularının arakesitlerinden elde edilen üç $(c_{\{i,j\}},\gamma_{\{i,j\}},\gamma_{\{i,j\}}^{'})$ sezgisel fuzzy nokta doğrudaştır (Bayar ve Ekmekçi, 2015).*

İspat $i\neq j$, $\{i,j\}\subseteq\{1,2,3\}$ için $\left(\langle a_i,a_j\rangle, \alpha_i\wedge\alpha_j, \alpha_i^{'}\vee\alpha_j^{'}\right)$ ve $\left(\langle b_i,b_j\rangle, \beta_i\wedge\beta_j, \beta_i^{'}\vee\beta_j^{'}\right)$ sezgisel fuzzy doğrularının arakesiti olan

$$\gamma = \alpha_i\wedge\alpha_j\wedge\beta_i\wedge\beta_j$$
$$\gamma^{'} = \alpha_i^{'}\vee\alpha_j^{'}\vee\beta_i^{'}\vee\beta_j^{'}$$

hesaplanır.

$\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ için, $(c_{\{i,j\}},\gamma_{\{i,j\}},\gamma_{\{i,j\}}^{'})$, $(c_{\{i,k\}},\gamma_{\{i,k\}},\gamma_{\{i,k\}}^{'})$ sezgisel fuzzy noktaları tarafından gerilen doğrunun üyelik derecesi, i bağımsız değişken olmak üzere

$$\alpha_i\wedge\alpha_i\wedge\alpha_j\wedge\alpha_k\wedge\beta_i\wedge\beta_i\wedge\beta_j\wedge\beta_k = \gamma\wedge\gamma$$

ve

$$\alpha_i^{'} \vee \alpha_i^{'} \vee \alpha_j^{'} \vee \alpha_k^{'} \vee \beta_i^{'} \vee \beta_i^{'} \vee \beta_j^{'} \vee \beta_k^{'} = \mu \vee \mu$$

ye eşittir.

Teorem 3.5 *$\mathcal{P}$ taban düzlemi Pappussel olan sezgisel fuzzy projektif düzlem olsun. $\mathcal{P}$ de iki farkı doğru L_1 ve L_2 alınsın. a_1, a_2, b_1, b_2 taban noktalarının herhangi üçü doğrudaş olmayacak şekilde ve $a_1, a_2, a_3; L_1$ ve $b_1, b_2, b_3; L_2$ üzerinde olacak şekilde $(a_i, \alpha_i, \alpha_i^{'})$, $(b_i, \beta_i, \beta_i^{'})$ sezgisel fuzzy noktalarının iki üçlüsü seçilsin. O zaman*

$$\begin{aligned}
(c_1, \gamma_1, \gamma_1^{'}) &= (a_2b_3 \cap a_3b_2, \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3, \alpha_2^{'} \vee \alpha_3^{'} \vee \beta_2^{'} \vee \beta_3^{'}) \\
(c_2, \gamma_2, \gamma_2^{'}) &= (a_1b_3 \cap a_3b_1, \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3, \alpha_1^{'} \vee \alpha_3^{'} \vee \beta_1^{'} \vee \beta_3^{'}) \\
(c_3, \gamma_3, \gamma_3^{'}) &= (a_1b_2 \cap a_2b_1, \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2, \alpha_1^{'} \vee \alpha_2^{'} \vee \beta_1^{'} \vee \beta_2^{'})
\end{aligned}$$

kesişimlerden oluşan üç sezgisel fuzzy noktaları doğrudaştır (Bayar ve Ekmekçi, 2015).

İspat $(a_i, \alpha_i, \alpha_i^{'})$, $(b_i, \beta_i, \beta_i^{'})$ sezgisel fuzzy noktaları, sezgisel fuzzy doğrudaş olduğundan, $i = 1, 2, 3$ olmak üzere; $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 = \alpha_2 \wedge \alpha_3$ ve $\beta_1 \wedge \beta_2 = \beta_1 \wedge \beta_3 = \beta_2 \wedge \beta_3$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \wedge \gamma_2 &= \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3 \\
\gamma_1 \wedge \gamma_3 &= \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \\
\gamma_2 \wedge \gamma_3 &= \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2
\end{aligned}$$

Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'} &= \alpha_2^{'} \wedge \alpha_3^{'} \wedge \beta_2^{'} \wedge \beta_3^{'} \wedge \alpha_1^{'} \wedge \alpha_3^{'} \wedge \beta_1^{'} \wedge \beta_3^{'} \\
\gamma_1^{'} \wedge \gamma_3^{'} &= \alpha_2^{'} \wedge \alpha_3^{'} \wedge \beta_2^{'} \wedge \beta_3^{'} \wedge \alpha_1^{'} \wedge \alpha_2^{'} \wedge \beta_1^{'} \wedge \beta_2^{'} \\
\gamma_2^{'} \wedge \gamma_3^{'} &= \alpha_1^{'} \wedge \alpha_3^{'} \wedge \beta_1^{'} \wedge \beta_3^{'} \wedge \alpha_1^{'} \wedge \alpha_2^{'} \wedge \beta_1^{'} \wedge \beta_2^{'}
\end{aligned}$$

sağlanır.
Açıktır ki, $\gamma_1^{'} \vee \gamma_2^{'} = \gamma_1^{'} \vee \gamma_3^{'} = \gamma_2^{'} \vee \gamma_3^{'}$.

4. FUZZY VE SEZGİSEL FUZZY VEKTÖR UZAYLARI

Bu bölümde, ilk olarak 1990 yılında Lubczonok tarafından tanımlanan fuzzy vektör uzayı kavramları verilmiş ve bu kavramların örneklendirilmesi amaçlanmıştır. Daha sonra ait olma ve ait olmama üyelik dereceleriyle birlikte fuzzy vektör uzaylarındaki kavramlar zenginleştirilerek sezgisel fuzzy vektör uzaylarındaki versiyonları incelenmiştir.

4.1 Fuzzy Vektör Uzayları

Bu bölümde fuzzy vektör uzaylarının cebirsel özellikleri (Lubczonok, 1990) temel alınarak verilecektir. Burada ortaya atılan fikirler kolaylıkla diğer fuzzy cebirsel kavramlara uygulanabilir.

Tanım 4.1 *G bir grup olsun. G nin μ fuzzy alt kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, μ ye G grubunun bir* **fuzzy alt grubu** *denir (Kandasamy, 2003).*

i. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall x, y \in G$
ii.$\mu(x^{-1}) = \mu(x)$, $\forall x \in G$

Tanım 4.2 *R bir halka olsun. R nin μ fuzzy alt halkası aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, μ ye R halkasının bir* **fuzzy alt halkası** *denir (Kandasamy,2003).*

i. $\mu(x - y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall x, y \in R$
ii. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall x, y \in R$

Tanım 4.3 *F bir X cisminin 0 dan farklı bir üyelik derecesine sahip bir alt kümesi ve μ üyelik fonksiyonu olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa F ye X üzerinde bir* **fuzzy cisim** *denir (Kandasamy, 2003).*

i. $\mu(x + y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall x, y \in X$
ii. $\mu(-x) = \mu(x), \forall x \in X$
iii. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall x, y \in X$
iv. $\mu(x^{-1}) = \mu(x), \forall x \in X$

Tanım 4.4 *$\mu : E \rightarrow [0, 1]$, E üzerinde bir fuzzy küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa μ ye E üzerinde bir* **fuzzy vektör uzayı** *denir ve $\tilde{E} = (E, \mu)$ ile gösterilir*

(Lubczonok, 1990).
$\forall x, y \in E$ *ve* $\forall a, b \in R$ *için*

$$\mu(ax + by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

Bir $\tilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı için

$$\begin{array}{rccl} .T_\mu^\alpha = & \mu_\alpha^{-1} & = & \{x \in E : \mu(x) = \alpha\} \\ .H_\mu^\alpha = & \mu_\alpha^{-1}((0,1]) & = & \{x \in E : \mu(x) > \alpha\} \\ .E_\mu^\alpha = & \mu_\alpha^{-1}([0,1]) & = & \{x \in E : \mu(x) \geq \alpha\} \end{array}$$

notasyonları kullanılır.
F cismi üzerinde V bir vektör uzayı, $\bar{u}, \bar{v} \in V$ ve $\alpha \in F - \{0\}$ olsun.
Eğer $\mu : V \to [0,1]$ fuzzy vektör uzayı ise aşağıdaki özellikler geçerlidir:
i. $\mu(\alpha.\bar{u}) = \mu(\bar{u})$
ii. $\mu(\bar{0}) = sup_{\bar{u} \in V} \mu(\bar{u})$
iii. $\mu(\bar{u}) \neq \mu(\bar{v})$ ise $\mu(\bar{u} + \bar{v}) = \mu(\bar{u}) \wedge \mu(\bar{v})$.

Tanım 4.5 *K bir cisim ve F, K de bir fuzzy alt cismi olsun. V, K üzerinde bir lineer uzay ve μ de V de bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer,*
i. $\mu(x + y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$, $\forall x, y \in V$
ii. $\mu(-x) \geq \mu(x), \forall x \in V$
iii. $\mu(\alpha x) \geq \mu(\alpha) \wedge \mu(x)$, $\forall \alpha \in K, x \in V$
iv. $\mu(1) \geq \mu(0)$
özellikleri sağlanıyorsa μ ye F fuzzy altcismi üzerinde bir **fuzzy lineer uzaydır** *denir (Zimmermann, 1985).*

Örnek 4.1 *$x \in R$ için μ fuzzy alt kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

μ alt uzay değildir. Çünkü $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{7}, A = 3, B = 6$ seçilirse,

$$\mu(aA + bB) \geq \mu(A) \wedge \mu(B)$$

şartı

$$\mu(\frac{1}{3}.3 + \frac{1}{7}.6) = \frac{1}{2}$$

ve

$$\mu(3) \wedge \mu(6) = 1$$

olduğundan μ lineer alt uzay değildir.

Örnek 4.2 *$x \in R$ için ν fuzzy alt kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

ν alt uzaydır. Çünkü $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{7}, A = 1, B = 2$ seçilirse,

$$\nu(aA + bB) \geq \nu(A) \wedge \nu(B)$$

şartı

$$\nu(\frac{1}{3}.1 + \frac{1}{7}.2) = 1$$

ve

$$\nu(1) \wedge \nu(2) = \frac{1}{2}$$

olduğundan $1 \geq \frac{1}{2}$ sağlanır ve ν lineer alt uzaydır.

Tanım 4.6 *$\tilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı olsun. Bu takdirde $\forall \alpha_i \in R$ $(i = 1, 2, ...n)$ için $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \subset E$ lineer bağımsız kümesi*

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(a_i x_i)$$

özelliğini sağlar ise $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ lineer bağımsız kümesine **fuzzy lineer bağımsız** *denir (Lubczonok, 1990).*

Ayrıca $\tilde{E}$ de verilmiş herhangi bir vektör kümesinin tüm alt kümeleri fuzzy lineer bağımsız ise verilmiş olan vektör kümesi de fuzzy lineer bağımsızdır.

Tanım 4.7 $\tilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzayı olmak üzere* E *nin herhangi bir tabanı aynı zamanda fuzzy lineer bağımsız oluyorsa bu tabana* E *nin* **fuzzy tabanı** *denir (Lubczonok, 1990).*

Tanım 4.8 E *tabanı* X *olan bir vektör uzayı ve* $\tilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzayı olmak üzere*

$$sup \sum_{v \in X} \mu(v)$$

ifadesine E **fuzzy vektör uzayının boyutu** *denir ve* $boy(\tilde{E})$ *ile gösterilir (Lubczonok, 1990).*

4.2 Sezgisel Fuzzy Vektör Uzayları

Tanım 4.9 X *cismi üzerinde sıfırdan farklı* λ_F *üyelik ve* μ_F *üyelik olmayan fonksiyonları ile tanımlı* F *sezgisel fuzzy kümesi*

i) $\forall a, b \in X$ *için* $\lambda_F(a+b) \geq \lambda_F(a) \wedge \lambda_F(b), \mu_F(a+b) \leq \mu_F(a) \vee \mu_F(b)$

ii) $\forall a \in X$ *için* $\lambda_F(-a) = \lambda_F(a), \mu_F(-a) = \mu_F(a)$

iii) $\forall a, b \in X$ *için* $\lambda_F(a.b) \geq \lambda_F(a) \wedge \lambda_F(b), \mu_F(a.b) \leq \mu_F(a) \vee \mu_F(b)$

iv) $\forall a (\neq 0) \in X$ *için* $\lambda_F(a^{-1}) = \lambda_F(a), \mu_F(a^{-1}) = \mu_F(a)$

şartlarını sağlıyorsa, o zaman (F, X) *e,* X *in* **sezgisel fuzzy cisim** *denir (Santhosh, 2011).*

Tanım 4.10 (F, X)*,* X *cismi üzerinde sezgisel fuzzy cisim olsun. Sıfırdan farklı* λ_V *üyelik ve* μ_V *üyelik olmayan fonksiyonları ile* Y *üzerinde tanımlanan* V *sezgisel fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa*

i) $\forall u, v \in Y$ *için* $\lambda_V(u+v) \geq \lambda_V(u) \wedge \lambda_V(v), \mu_V(u+v) \leq \mu_V(u) \vee \mu_V(v)$

ii) $\forall u \in Y$ *için* $\lambda_V(-u) = \lambda_V(u), \mu_V(-u) = \mu_V(u)$

iii) $\forall a \in X, \forall u \in Y$ *için* $\lambda_V(au) \geq \lambda_F(a) \wedge \lambda_V(u), \mu_V(au) \leq \mu_F(a) \vee \mu_V(u)$

iv) $\lambda_F(1) \geq \lambda_V(0), \mu_F(1) \leq \mu_V(0)$

(V, Y) *ye* (F, X) *üzerinde bir* **sezgisel fuzzy lineer uzay** *denir (Santhosh, 2011).*

Bu bölümdeki ifadelerde $(V, Y), (W, Y)$, Y nin sezgisel fuzzy lineer uzaylarını, (W, Z) de (F, X) sezgisel fuzzy cismi üzerinde Z nin sezgisel fuzzy lineer uzayını belirtmektedir.

Önerme 4.1 *Eğer (W, Z) sezgisel fuzzy lineer uzay ve T, Y den Z ye lineer dönüşüm ise, o zaman $(T^{-1}(W), Y)$ sezgisel fuzzy lineer uzaydır (Santhosh, 2011).*

İspat **1)** $\forall a, b \in X$ ve $\forall u, v \in Y$ için,

$$\begin{aligned} \mu_{T^{-1}(W)}(au+bv) &= \mu_W(T(au+bv)) \\ &\leq \mu_F(a) \vee \mu_W(T(u)) \vee \mu_F(b) \vee \mu_W(T(v)) \\ &= \mu_F(a) \vee \mu_{T^{-1}(W)}(u) \vee \mu_F(b) \vee \mu_{T^{-1}(W)}(v) \end{aligned}$$

ve benzer olarak, $\lambda_{T^{-1}(W)}(au+bv) \geq \lambda_F(a) \wedge \lambda_{T^{-1}(W)}(u) \wedge \lambda_F(b) \wedge \lambda_{T^{-1}(W)}(v)$

2) (W, Z), (F, X) üzerinde sezgisel fuzzy lineer uzay olduğundan, $\forall u \in Y$ için,

$$\lambda_F(1) \geq \lambda_W(T(u)) \; ve \; \mu_F(1) \leq \mu_w(T(u))$$

Yani, $\forall u \in Y$ için,

$$\lambda_F(1) \geq \lambda_{T^{-1}(W)}(u) \; ve \; \mu_F(1) \leq \mu_{T^{-1}(W)}(u)$$

(1) ve (2) den $(T^{-1}(W), Y)$ sezgisel fuzzy lineer uzaydır.

Tanım 4.11 *V, F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı olsun. V de tanımlı $A = (\lambda, \mu)$ sezgisel fuzzy kümesi herhangi $x, y \in V$, $a, b \in F$ için*

$$\lambda_A(ax+by) \geq min\left\{\lambda_A(x), \lambda_A(y)\right\} \; ve \; \mu_A(ax+by) \leq max\left\{\mu_A(x), \mu_A(y)\right\}$$

şartını sağlıyorsa, A ya V vektör uzayının **sezgisel fuzzy alt uzayı** *denir.*
(V_n, λ, μ), F üzerindeki tüm $(\langle X_{1\lambda}, X_{1\mu}\rangle, \langle X_{2\lambda}, X_{2\mu}\rangle, ..., \langle X_{n\lambda}, X_{n\mu}\rangle)$ $n-$lilerin kümesini göstersin. Bu durumda x_i bileşeninin üyelik değerleri ve üyelik olmayan değerleri sırasıyla $X_{i\lambda}$, $X_{i\mu}$ olmak üzere V_n nin elemanları n boyutlu **sezgisel fuzzy vektör** *olarak adladırılır (Rani vd., 2017).*

Tanım 4.12 *$\lambda : V \to [0,1]$ ve $\mu : V \to [0,1]$, V vektör uzayı üzerinde tanımlı bir sezgisel fuzzy küme olsun. $\forall x, y \in v$ ve $\forall a, b \in F$ için*

$$\lambda(ax+by) \geq \lambda(x) \wedge \lambda(y), \; \mu(ax+by) \leq \mu(x) \vee \mu(y)$$

özellikleri sağlanıyorsa $\langle\lambda, \mu\rangle$ *ye* V *üzerinde bir* **sezgisel fuzzy vektör uzayı** *denir (Pradhan ve Pal, 2012).*

5. 3-BOYUTLU VEKTÖR UZAYLARINDAN ELDE EDİLEN FUZZY VE SEZGİSEL FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMLER

1998 yılında Kuijken, Maldeghem ve Kerre tarafından ”Fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif geometriler” adlı makalede fuzzy projektif uzaylar oluşturuldu. Bu bölümün 5.1 kısmında bu inceleme verildikten sonra, 5.2 de $3-$ boyutlu sezgisel fuzzy vektör uzayından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemin, sezgisel fuzzy projektif noktaları, sezgisel fuzzy projektif doğruları ve üzerinde bulunma bağıntısı verildi.

5.1 Vektör Uzaylarından Elde Edilen Fuzzy Projektif Uzaylar

$\mathcal{P}$, $n-$ boyutlu bir projektif uzay ve $[\lambda, \mathcal{P}]$, $\mathcal{P}$ üzerinde tanımlı $n-$ boyutlu bir projektif uzay olsun. Bir önceki bölümde olduğu gibi $\mathcal{P}$ nin otomorfizm grubu üzerinde bir fuzzy alt grubu tanımlamak mümkündür.

Tanım 5.1 *Varsayalım ki V $n-$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. V de tanımlı bir flag $\forall j < i \leq n-1$ için $U_j \subset U_i$ olacak şekilde $(U_0, U_1, ..., U_n)$ aşikar olmayan alt uzayların ayrık dizisidir. Bir flagin rankı içerdiği alt uzayların sayısıdır. V vektör uzayında maksimal flag n uzunluğunda bir flagtir (Kuijken vd., 1998).*

Teorem 5.1 *$\lambda : V \to [0,1]$, V vektör uzayında tanımlı $n-$ boyutlu fuzzy vektör uzay ise, o zaman $d(U_i) = i$ ve $[0,1]$ de $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$ reel sayılar olmak üzere λ aşağıdaki formda olacak şekilde $n-$ uzunluğunda $(U_0, U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}, V)$ maksimal flagi* *vardır (Kuijken vd., 1998):*

$$\begin{array}{rcll} \lambda: V & \rightarrow & [0,1] & \\ \bar{u} & \rightarrow & a_0, & \bar{u}=\bar{o}=U_0 \\ \bar{u} & \rightarrow & a_1, & \bar{u}\in U_1\setminus U_0 \\ \bar{u} & \rightarrow & a_2, & \bar{u}\in U_2\setminus U_1 \\ \bar{u} & \rightarrow & a_3, & \bar{u}\in U_3\setminus U_2 \\ & \cdots & & \\ \bar{u} & \rightarrow & a_{n-1}, & \bar{u}\in U_{n-1}\setminus U_{n-2} \\ \bar{u} & \rightarrow & a_n, & \bar{u}\in V\setminus U_{n-1} \end{array}$$

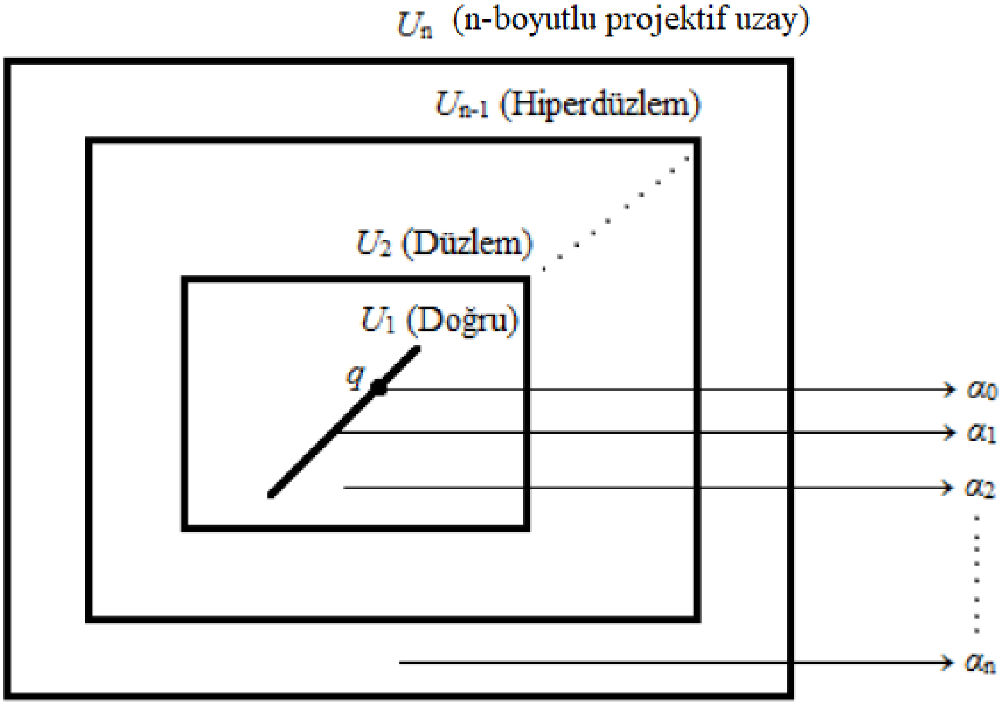
Teorem 5.2 *$\mathcal{P}$ de uzunluğu n olan $(q, U_1, U_2, ..., U_{n-1})$ maksimal flagı ve $[0,1]$ aralığındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ reel sayıları için $[\lambda, \mathcal{P}]$, $n-$ boyutlu bir projektif uzayı*

$$\begin{array}{rcll} \lambda: \mathcal{P} & \rightarrow & [0,1] & \\ p & \rightarrow & a_0, & p=q\ ise \\ p & \rightarrow & a_1, & p\in U_1\setminus\{q\} \\ p & \rightarrow & a_2, & p\in U_2\setminus U_1 \\ & \cdots & & \\ p & \rightarrow & a_{n-1}, & p\in U_{n-1}\setminus U_{n-2} \\ p & \rightarrow & a_n, & p\in \mathcal{P}\setminus U_{n-1} \end{array}$$

şeklindedir (Kuijken, 1998).
Burada
a_0: q noktasının üyelik derecesi,
$a_1 : U_1 \setminus q$ alt uzayının noktalarının üyelik derecesi,
$\cdots$
$a_n : U_n \setminus U_{n-1}$ alt uzayının noktalarının üyelik derecesidir.
Ayrıca $\mathcal{P}$ nin $q = U_0, U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}, U_{n-2} = \mathcal{P}$ alt uzayları,

$$\begin{array}{rcl} q = U_0 & = & \{p\in P : \lambda(p)\geq a_0\} \\ U_1 & = & \{p\in P : \lambda(p)\geq a_1\} \\ U_2 & = & \{p\in P : \lambda(p)\geq a_2\} \\ & \cdots & \\ U_n & = & \{p\in P : \lambda(p)\geq a_n\} \end{array}$$

şeklinde ifade edilebilir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 $\mathcal{P}$ nin alt uzaylarının kümesel gösterimi

5.1.1 Fuzzy Vektör Doğruları ve Düzlemleri

V, bir K cismi üzerinde $n-$ boyutlu vektör uzayı olsun. $n \geq 2$ olmak üzere L, sıfırdan farklı $\bar{u}$ vektörü ile tanımlanır. Bazen de bu L doğrusu $\overline{ou}$ ile gösterilir. L üzerindeki bir λ fuzzy kümesi verilsin.

Teorem 5.3 *$\lambda : L \to [0,1]$, L üzerinde bir fuzzy vektör doğrusu ise $\forall \bar{u}, \bar{v} \in L - \{\bar{o}\}$, $\lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$ ve $\forall \bar{u} \in L$, için $\lambda(\bar{o}) \geq \lambda(\bar{u})$ dür (Kuijken, 1998).*

$n \geq 3$ olmak üzere, $n-$ boyutlu V vektör uzayının bir vektör düzlemi α olsun. Bu takdirde $\alpha, \bar{u}$ ve $\bar{v}$ gibi iki lineer bağımsız vektör tarafından tek türlü olarak bellidir. Bazen de bu α düzlemi örneği $\overline{ouv}$ ile gösterilir.
Aşağıdaki teoremde α üzerindeki λ fuzzy kümesini ele alınmaktadır.

Teorem 5.4 $\lambda : \alpha \to [0,1], \alpha$ *üzerinde bir fuzzy vektör düzlemi*

$$\begin{array}{rcll} \lambda: \ \alpha & \to & [0,1] & \\ \bar{o} & \to & a_0 & \\ \bar{u} & \to & a_1, & \bar{u} \in L \setminus \{\bar{o}\} \\ \bar{u} & \to & a_2, & \bar{u} \in \alpha \setminus L \end{array}$$

olup, $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \in [0,1]$ *ve* L, α *vektör düzleminin bir vektör doğrusudur (Kuijken vd., 1998).*

5.1.2 Fuzzy Projektif Noktalar ve Doğrular

Bir V vektör uzayına karşılık gelen bir projektif uzay $PG(V) = (D(V), \sim)$ ile gösterilir. Burada $PG(V) = (D(V), \sim)$ projektif uzayı V nin bir boyutlu alt uzaylarının bir koleksiyonu, $\sim$ da alt uzaylar üzerindeki üzerinde bulunma bağıntısıdır. U ve U' gibi iki alt uzay için $U \supseteq U'$ ya da $U \subseteq U'$ ise $U \sim U'$ dir. Bir U uzayının boyutu olan $boy(U)$, U nun taban vektörlerinin sayısına eşittir. U nun projektif boyutu olan $pd(U)$ ise $pd(U) = boy(U) - 1$ şeklinde tanımlanır. Projektif noktalar, doğrular, düzlemler gibi yapıların tanımı bu projektif boyuta dayanır. Yani 0 projektif boyuta sahip olan alt uzaylara **projektif nokta**, projektif boyutu 1 olan alt uzaylara **projektif doğru** ve projektif boyutu 2 olan alt uzaylara **projektif düzlem** denir.
Klasik durumda bir $n-$ boyutlu projektif uzay, $(n+1)-$ boyutlu vektör uzayından elde edilir. Bundan sonra bir fuzzy projektif uzayın da fuzzy vektör uzayından nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır.

Fuzzy Projektif Noktalar
Bir projektif nokta sadece bir vektör doğrusudur. V nin bir vektör doğrusu L olmak üzere (λ, L) fuzzy vektör doğrusundan başlayarak bir fuzzy projektif nokta inşa edilecektir.

$$\begin{array}{rcll} \lambda: \ L & \to & [0,1] & \\ \bar{o} & \to & a_0 & \\ \bar{u} & \to & a_1, & \bar{u} \in L \setminus \{\bar{o}\}, \quad a_0 \geq a_1 \in [0,1] \\ \bar{u} & \to & a_2, & \bar{u} \in \alpha \setminus L \end{array}$$

L vektör doğrusu üzerindeki belli bir projektif nokta p ile gösterilsin. Böylece $p \in PG(V)$ dir. p üzerinde λ' fuzzy projektif noktası oluşturmak için boyutun bir eksiltilmesi gerektiğinden, L vektör doğrusuna karşılık gelen $\bar{o}$ vektörünün değeri seçilemez. Dolayısıyla p üzerinde bir λ' **fuzzy projektif nokta** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{array}{rcl} \lambda': \ p & \to & [0,1] \\ p & \to & a_1 \end{array}$$

Burada fuzzy vektör uzay gösteriminden farklı olması için köşeli parantez kullanarak fuzzy projektif nokta $[\lambda^{'}, p]$ ile gösterilir (Kuijken vd., 1998).

Fuzzy Projektif Doğrular

Fuzzy projektif doğrular için de benzer şeyler yapılmaktadır. α, V nin bir vektör düzlemi olsun. (λ, α) nın aşağıdaki gibi bir fuzzy düzlemi olduğu bilinmektedir.

$$\begin{aligned} \lambda : \alpha &\rightarrow [0,1] \\ \bar{o} &\rightarrow a_0 \\ \bar{u} &\rightarrow a_1, \qquad \bar{u} \in L \setminus \{\bar{o}\} \\ \bar{u} &\rightarrow a_2, \qquad \bar{u} \in \alpha \setminus L \end{aligned}$$

L, α nın vektör doğrusudur ve $p, L \subseteq \alpha$ vektör doğrusu üzerinde bir projektif nokta olsun. Bu durumda M üzerinde $\alpha^{'}$ **fuzzy projektif doğrusu** aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{array}{cccl} \alpha^{'}: & M & \rightarrow & [0,1] \\ & p & \rightarrow & a_1 \\ & q & \rightarrow & a_2, \quad q \in M \setminus \{p\}, a_1 \geq a_2 \in [0,1] \end{array}$$

Bu fuzzy projektif doğru $[\alpha^{'}, M]$ olarak gösterilmektedir. Bir fuzzy projektif doğru, bir fuzzy vektör doğrusu gibi görünmektedir. Fark, karşılık gelen vektör uzayının en büyük üyelik derecesine sahip olan $\bar{o}$ orijin vektörünü içermemesidir. Fuzzy projektif doğru üzerinde herhangi bir nokta, eşleşen vektör düzleminde özel bir doğrudur (Kuijken vd., 1998).

5.1.3 Fuzzy Projektif Uzaylar

n boyutlu λ fuzzy projektif uzayının genel tanımı verilebilir. Bir $(n+1)$ boyutlu (λ, V) vektör uzayı: $j < i$ için U_j alt uzaylarını içeren V vektör uzayının $i-$ boyutlu alt uzayı U_i ve $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{n+1}, a_i \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{array}{cccll} \lambda : & V & \rightarrow & [0,1] & \\ & \bar{o} & \rightarrow & a_0 & \\ & \bar{u} & \rightarrow & a_1, & \bar{u} \in U_1 \setminus \{\bar{o}\} \\ & \bar{u} & \rightarrow & a_2, & \bar{u} \in U_2 \setminus U_1 \\ & \bar{u} & \rightarrow & a_3, & \bar{u} \in U_3 \setminus U_2 \\ & & \vdots & & \\ & \bar{u} & \rightarrow & a_n, & \bar{u} \in U_n \setminus U_{n-1} \\ & \bar{u} & \rightarrow & a_{n+1}, & \bar{u} \in V \setminus U_n \end{array}$$

şeklindedir. $(n+1)-$ boyutlu V vektör uzayına karşılık gelen $n-$ boyutlu projektif uzay $\mathcal{P}_n^{'}$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{P}_n^{'}$ üzerinde **n $-$ boyutlu fuzzy projektif uzayı** $\lambda^{'}$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır :

$$
\begin{array}{rlll}
\lambda^{'}: & V^{'} & \rightarrow & [0,1] \\
& q & \rightarrow & a_1 \\
& p & \rightarrow & a_2, \quad p \in U_1^{'} \setminus \{q\} \\
& p & \rightarrow & a_3, \quad p \in U_2^{'} \setminus U_1^{'} \\
& & \vdots & \\
& p & \rightarrow & a_n, \quad p \in U_{n-1}^{'} \setminus U_{n-2}^{'} \\
& p & \rightarrow & a_{n+1}, \quad p \in V^{'} \setminus U_{n-1}^{'}
\end{array}
$$

Burada qU_1 vektör doğrusu ile eşleşen projektif nokta ve $U_i^{'}$ de $i-$ boyutlu projektif uzaydır. U_{i+1} vektör uzayına eşleşen $(q, U_1, \cdots U_{n-1}, V^{'})$ maksimal flagtir ve $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{n+1}, a_i \in [0,1]$ (Kuijken vd., 1998).

Zadeh'in X in bazı μ ve λ fuzzy alt kümelerinin $\subseteq$ fuzzy kapsama tanımına göre;
λ fuzzy alt kümesi, μ fuzzy alt kümesini içerir $\Leftrightarrow \forall x \in X$, $\mu(x) \leq \lambda(x)$ olduğu biliniyor, $[\mu, U]$ ve $[\lambda, U^{'}]$ fuzzy projektif uzaylar için bu tanım,

$$\forall p \in U,\ [\mu, U] \subseteq [\lambda, U^{'}] \Leftrightarrow \forall p \in PG(V),\ \mu(p) \leq \lambda(p)$$

şeklinde ifade edilir (Kuijken vd., 1998).
Fakat $PG(V)$ deki her p noktası sadece bir üyelik derecesine sahip ise o zaman $\mu(p) = \lambda(p)$ dir.
İki fuzzy projektif alt uzay için üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki tanımla verilebilir:

Tanım 5.2 *U ve $U^{'}$, V vektör uzayının iki alt uzayı olsun. Eğer U, $U^{'}$ üzerinde ise ve $\forall \bar{x} \in U \cap U^{'}$, $\mu(\bar{x}) = \lambda(\bar{x})$ ise, o zaman $[\mu, U]$ ve $\left[\lambda, U^{'}\right]$ fuzzy projektif uzayları birbiri üzerindedir (Kuijken vd., 1998).*

5.1.4 Fuzzy Projektif Düzlemler

$3-$ boyutlu vektör uzaylarına kendimizi kısıtlarsak, $PG(V)$, noktalar ve doğrulardan oluşan yani 0 ve $1-$ boyutlu projektif altuzayları içeren bir projektif düzlemdir. Burada bir doğru üzerindeki nokta sayısı s ile, bir noktadan geçen doğru sayısı ise t ile gösterilecektir. Bunlar bir projektif düzlemde eşittir. $PG(V)$ üzerindeki $\mathcal{P}$ fuzzy projektif düzlemi aşağıdaki formdadır:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}: & PG(V) & \to & [0,1] \\ & q & \to & a_1 \\ & p & \to & a_2, \quad p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & a_3, \quad p \in PG(V) \setminus L \end{array}$$

L, q yu içeren $PG(V)$ nin bir projektif doğrusudur. a_1, a_2, a_3 birbirinden farklı ise $\mathcal{P}$ deki fuzzy projektif doğrular üç farklı türdedir:

$i \in 1, 2, \cdots, t-1$ ve $j \in 1, 2, \cdots, s-1$ olmak üzere i ve j tamsayıları kullanılırsa

1) Taban doğrusu L olan fuzzy doğru λ_1 tektir. λ_1 aşağıdaki formdadır:

$$\begin{array}{rccl} \lambda_1 & : L & \to & [0,1] \\ & q & \to & a_1 \\ & p & \to & a_2, \quad p \in L \setminus \{q\} \end{array}$$

2) L taban doğrusunu a_1 üyelik dereceli noktada kesen ve taban doğrusu olarak M_i yi kabul eden λ_{2i} fuzzy doğruları aşağıdaki formdadır:

$$\begin{array}{rccl} \lambda_{2i}: & M_i & \to & [0,1] \\ & q & \to & a_1 \\ & p & \to & a_3, \quad p \in M_i \setminus \{q\} \end{array}$$

3) λ_{3ij} fuzzy doğruların taban doğrusu N_{ij} dir. Bu N_{ij} doğruları L doğrusunun üyelik derecesi a_2 olan q_j noktalarında keser ve fuzzy doğruları aşağıdaki formdadır (Kuijken vd., 1998).

$$\begin{array}{rccl} \lambda_{3ij}: & N_{ij} & \to & [0,1] \\ & q_j & \to & a_2 \\ & p & \to & a_3, \quad p \in N_{ij} \setminus \{q_j\} \end{array}$$

Örnek 5.1 *$j = 2, k = 2, t = 3$ için λ_{i2} ve η_{i23} fuzzy alt uzayları aşağıdaki gibidir. α_2 vektör düzlemi ve $a_0 \geq a_i \geq b_{i2}$, $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ olmak üzere*

$$\begin{array}{rccl} \lambda_{2i}: & \alpha_2 & \to & [0,1] \\ & \bar{o} & \to & a_0 \\ & \bar{u} & \to & a_i, \quad \bar{u} \in L \setminus \{\bar{o}\} \\ & \bar{u} & \to & b_{i2}, \quad \bar{u} \in \alpha_j \setminus L \end{array}$$

ve γ_{23} vektör düzlemi ve $a_0 \geq c_{i2} \geq d_{i3}$, $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \eta_{23}: & \gamma_{23} & \to & [0,1] \\ & \bar{o} & \to & a_0 \\ & \bar{u} & \to & c_{i2}, \quad \bar{u} \in \beta_2 \setminus \{\bar{o}\} \\ & \bar{u} & \to & d_{i3}, \quad \bar{u} \in \gamma_{23} \setminus \{\bar{o}\} \end{array}$$

λ_{i2} ve η_{23} alt fuzzy düzlemlerinden elde edilen $\lambda_{i2}^{'}$ ve $\eta_{23}^{'}$ fuzzy projektif doğruları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{rccll}\lambda_{i2}^{'}: & L_2 & \to & [0,1] & \\ & q & \to & a_i & \\ & p & \to & b_{i2}, & p \in L_2 \setminus \{q\} \\ \eta_{i23}^{'}: & N_{23} & \to & [0,1] & \\ & p & \to & c_{i2}, & p \in L_2 \\ & p & \to & d_{i3}, & p \in N_{23} \setminus L\end{array}$$

Teorem 5.5 *P fuzzy projektif düzleminin fuzzy nokta ve fuzzy doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar:*

***i)** Farklı her fuzzy nokta çifti, bir tek fuzzy doğrusu üzerinde bulunur. Fakat bu fuzzy doğru, noktaların üyelik dereceleri farklı ise belirlenebilir.*

***ii)** Farklı her fuzzy doğru çiftinin bir tek ortak fuzzy noktası vardır.*

***iii)** $\mathcal{P}$ fuzzy projektif düzleminde herhangi üçü aynı fuzzy doğrusu üzerinde bulunmayan dört tane fuzzy nokta vardır (Kuijken vd., 1998).*

Ayrıca fuzzy projektif düzlem bilinir ise tek bir fuzzy projektif doğru tanımlamak için iki farkı üyelik derecesi olma şartına ihtiyaç yoktur.

5.2 3-Boyutlu Sezgisel Fuzzy Vektör Uzaylarından Elde Edilen Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlemler

Bu bölümde $3-$ boyutlu sezgisel vektör uzaylarından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemler oluşturulmaktadır. Bölüm 5.1 deki fuzzy projektif düzlemin oluşumuna benzer olarak sezgisel fuzzy projektif düzlemin sezgisel fuzzy projektif noktaları ve doğruları belirlenerek bunlarla ilişkili bazı teoremler verildi.

Bölüm 4 de sezgisel fuzzy cismi üzerinde tanımlı sezgisel fuzzy vektör uzayları incelendi. (F, X), X cismi üzerinde sezgisel fuzzy cismi olsun. Sıfırdan farklı λ_V üyelik ve μ_V üyelik olmayan fonksiyonları ile Y vektör uzayı üzerinde tanımlanan V sezgisel fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa

i) $\forall u, v \in Y$ için $\lambda_V(u+v) \geq \lambda_V(u) \wedge \lambda_V(v), \mu_V(u+v) \leq \mu_V(u) \vee \mu_V(v)$

ii) $\forall u \in Y$ için $\lambda_V(-u) = \lambda_V(u), \mu_V(-u) = \mu_V(u)$

iii)$\forall a \in X, \forall u \in Y$ için $\lambda_V(au) \geq \lambda_F(a) \wedge \lambda_V(u), \mu_V(au) \leq \mu_F(a) \vee \mu_V(u)$

iv)$\lambda_F(1) \geq \lambda_V(0), \mu_F(1) \leq \mu_V(0)$

(V, Y) ye (F, X) sezgisel fuzzy cismi üzerinde bir **sezgisel fuzzy lineer uzay** denir (Santhosh, 2011).

Yukarıdaki tanımda herhangi bir K cismi üzerinde tanımlı klasik vektör uzayı V ye karşılık gelen sezgisel fuzzy vektör uzayın aşağıdaki özellikleri sağladığı gösterilebilir:

Önerme 5.1 *Herhangi K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun ve $\bar{u}, \bar{v} \in V$, $a \in K \setminus \{o\}$ olsun. Eğer $(\lambda, \mu) : K \to [0,1] \times [0,1]$ sezgisel fuzzy vektör uzayı ise, o zaman:*

i) $\lambda(a.\bar{u}) = \lambda(\bar{u}), \mu(a.\bar{u}) = \mu(\bar{u})$*;*

ii) $\lambda(\bar{o}) = sup_{\bar{u} \in V} \lambda(\bar{u}), \mu(\bar{o}) = inf_{\bar{u} \in V} \mu(\bar{u})$;

iii) *Eğer* $\lambda(\bar{u}) \neq \lambda(\bar{v}), \mu(\bar{u}) \neq \mu(\bar{v})$ *ise, o zaman* $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$ $\mu(\bar{u} + \bar{v}) = \mu(\bar{u}) \vee \mu(\bar{v})$ *sağlanır.*

İspat λ fonksiyonu için fuzzy vektör uzaylarında geçerli olduğu Kuijken (1998) tarafından ispatlanmıştır ve Tanım 4.10 dan ispat aşikardır.

(λ, μ), V vektör uzayı üzerinde sezgisel fuzzy vektör uzayı olduğunu varsayalım. $sup(\lambda, \mu)$ $(sup(\lambda, \mu) = \{x \in V | \lambda(x) \neq 0, \mu(x) \neq 1\})$ ile üretilen L alt uzayına (λ, μ) nün taban vektör uzayı denir veya daha basitçe L üzerindeki sezgisel fuzzy vektör uzayı denir ve (L, λ, μ) ile gösterilir. $L \subseteq U \subseteq V$ olacak şekilde bir alt uzay ise, (λ, μ) U üzerinde sezgisel fuzzy vektör uzayı olarak düşünülebilir. Bu durumda (λ, μ), (U, λ, μ) ile gösterilir. U üzerinde tanımlanan (λ, μ) sezgisel fuzzy vektör uzayını V üzerindeki (λ', μ') ye $\forall \bar{x} \in V \setminus U$ için $\lambda'(\bar{x}) = 0,\ \mu'(\bar{x}) = 1$ alarak genişletilebilir.

Tanım 5.3 *V vektör uzayının sezgisel fuzzy alt uzayının boyutu $d(\lambda, \mu)$, taban alt uzayının boyutudur.*

V nin $1-$ boyutlu alt uzayına karşılık gelen sezgisel fuzzy vektör uzayı (L, λ, μ) ise $d(\lambda, \mu) = 1$ dir.

Tanım 5.4 *V, $3-$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer U, V vektör uzayının $1-$ boyutlu alt uzayı ise karşılık gelen (U, λ, μ) sezgisel fuzzy vektör uzayına* **sezgisel fuzzy vektör doğru** *denir.*
Eğer U, V vektör uzayının $2-$ boyutlu alt uzayı yani bir vektör düzlemi ise karşılık gelen (U, λ, μ) ye U üzerinde **sezgisel fuzzy vektör düzlem** *denir.*
Benzer biçimde V vektör uzayına karşılık gelen (V, λ, μ) ye **sezgisel fuzzy vektör uzay** *denir.*

Herhangi bir K cismi üzerinde tanımlı $3-$boyutlu vektör uzayı, V olsun. V vektör uzayının L vektör doğrusu sıfırdan farklı bir $\bar{u}$ vektörü ile tek olarak tanımlanır. L doğrusu $\overline{ou}$ ile gösterilmek üzere L üzerindeki (λ, μ) sezgisel fuzzy kümesinde, orijin vektörü hariç diğer vektörlerin aynı üyelik derecelerine sahip olduğu aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 5.6 $(\lambda, \mu) : L \to [0,1] \times [0,1]$, *$L$ üzerinde sezgisel fuzzy vektör doğru olsun. O zaman* $\forall \bar{u}, \bar{v} \in L \setminus \{\bar{o}\}$ *için* $\lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v}),\ \mu(\bar{u}) = \mu(\bar{v})$ *ve* $\forall \bar{u} \in L$ *için* $\lambda(\bar{o}) \geq \lambda(\bar{u})$, $\mu(\bar{o}) \leq \mu(\bar{u})$ *dir.*

İspat u ve v, aynı L vektör doğrusu üzerinde olduğundan biri diğerinin katıdır. $\forall a \in K$ için, $v = au$ yazabiliriz. Önerme 5.1 i) den $\lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v}),\ \mu(\bar{u}) = \mu(\bar{v})$ sağlanır. Benzer şekilde Önerme 5.1 ii) den $\lambda(\bar{o}) \geq \lambda(\bar{u}), \mu(\bar{o}) \leq \mu(\bar{u})$ elde edilir.
$n \geq 3$ olmak üzere $n-$ boyutlu V vektör uzayının vektör düzlemi α olsun. O zaman α düzlemi lineer bağımsız $\bar{u}, \bar{v}$ vektörleri tarafından tek olarak tanımlanır. Bu vektör düzlemi $\overline{ouv}$ ile gösterilirse, α üzerinde (λ, μ) sezgisel fuzzy kümesi aşağıdaki teoremdeki forma sahiptir:

Teorem 5.7 $(\lambda, \mu) : \alpha \to [0,1] \times [0,1]$, *$\alpha$ üzerinde bir sezgisel fuzzy vektör düzlem olsun. O zaman α nın bir L vektör doğrusu ve aşağıdaki yapıda olacak şekilde* $a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2$, $0 \leq a_i + b_i \leq 1, i = 0, 1, 2$ *reel sayıları vardır:*

$$\begin{array}{rccll} (\lambda, \mu): & \alpha & \to & [0,1] \times [0,1] & \\ & \bar{o} & \to & (a_0, b_0), & \\ & \bar{u} & \to & (a_1, b_1), & \bar{u} \in L \setminus \{\bar{o}\} \\ & \bar{u} & \to & (a_2, b_2), & \bar{u} \in \alpha \setminus L \end{array}$$

İspat $\lambda(\bar{o}) = a_0$ ve $\mu(\bar{o}) = b_0$ olsun. O zaman Önerme 5.1 ii) den $\forall \bar{u} \in V$ için $a_0 = \lambda(\bar{o}) \geq \lambda(\bar{u})$ ve $b_0 = \mu(\bar{o}) \leq \mu(\bar{u})$ sağlanır.
α düzleminin bir tabanı $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ olsun. O zaman α ya ait bir $\bar{w}$ vektörü $\forall \bar{w} \in \alpha$, $a, b \in K$ olmak üzere, $\bar{w} = a.\bar{u} + b.\bar{v}$ şeklinde $\bar{u}, \bar{v}$ nin lineer toplamı olarak yazılır. Sezgisel fuzzy vektör uzayı tanımından
$\lambda(\bar{w}) = \lambda(a.\bar{u} + b.\bar{v}) \geq \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$ ve $\mu(\bar{w}) = \mu(a.\bar{u} + b.\bar{v}) \leq \mu(\bar{u}) \vee \mu(\bar{v})$
şartları sağlanır.
$\bar{u'} = a.\bar{u}$ ve $\bar{v'} = b.\bar{v}$ alınırsa, $\lambda(\bar{w}) = \lambda(a.\bar{u} + b.\bar{v})$ yi $\lambda(\bar{w}) = \lambda(\bar{u'} + \bar{v'})$ şeklinde ve $\mu(\bar{w}) = \mu(a.\bar{u} + b.\bar{v})$ yi $\mu(\bar{w}) = \mu(\bar{u'} + \bar{v'})$ şeklinde yeniden yazılabilir. Burada dört farklı

durum oluşur:
Durum 1 : $\lambda(\bar{u'}) \neq \lambda(\bar{v'})$ ve $\mu(\bar{u'}) \neq \mu(\bar{v'})$
$a, b \in K \setminus \{\bar{o}\}$ olsun. Önerme 5.1 i) ve iii) den

$$\lambda(\bar{w}) = \lambda(\bar{u'}) \wedge \lambda(\bar{v'}) = \lambda(a.\bar{u}) \wedge \lambda(b.\bar{v}) = \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$$

ve

$$\mu(\bar{w}) = \mu(\bar{u'}) \vee \mu(\bar{v'}) = \mu(a.\bar{u}) \vee \mu(b.\bar{v}) = \mu(\bar{u}) \vee \mu(\bar{v})$$

sağlanır. Bunun anlamı şudur: $\bar{w} = a.\bar{u} + b.\bar{v}$ biçiminde yazılan her vektörün ait olma derecesi $\lambda(\bar{u})$ ya da $\lambda(\bar{v})$ nin minimumuna, ait olmama üyelik derecesi de $\mu(\bar{u})$ ya da $\mu(\bar{v})$ nin maksimumuna eşit olmak zorundadır.
Eğer $\lambda(\bar{u}) > \lambda(\bar{v})$ ve $\mu(\bar{u}) < \mu(\bar{v})$ ise o zaman $\overline{0u}$ vektör doğrusu üzerindeki vektörler hariç, α düzlemindeki tüm vektörler $\lambda(\bar{v})$ ait olma üyelik derecesine ve $\mu(\bar{v})$ ait olmama üyelik derecesine sahiptir.
$a \neq 0, a \in K$ için $\lambda(\bar{w}) = \lambda(a.\bar{u}) = \lambda(\bar{u}) = a_1$ ve $\mu(\bar{w}) = \mu(a.\bar{u}) = \mu(\bar{u}) = b_1$ elde edilir. Bu durumda $L = \overline{ou}$ dir.
Benzer şekilde $\lambda(\bar{u}) < \lambda(\bar{v})$ ve $\mu(\bar{u}) > \mu(\bar{v})$ ise, $L = \overline{ov}$ dir.
Durum 2 : $\lambda(\bar{u'}) = \lambda(\bar{v'}) = \lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$ ve $\mu(\bar{u'}) = \mu(\bar{v'}) = \mu(\bar{u}) = \mu(\bar{v})$

a) $\lambda(\bar{w}) > \lambda(\bar{u'}) = \lambda(\bar{v'})$ ve $\mu(\bar{w}) < \mu(\bar{u'}) = \mu(\bar{v'})$ olacak şekilde α da $\bar{w} \neq \bar{o}$ vektörü var olmasın, o zaman α nın tüm vektörleri $\lambda-$ ait olma üyelik derecesine ve $\mu-$ ait olmama üyelik derecesine sahiptir ve teorem aşikar olarak doğrudur. Her bir vektör doğrusu, L vektör doğrusu olarak düşünülebilir ve $a_1 = a_2 = \lambda(\bar{u'})$ ve $b_1 = b_2 = \mu(\bar{u'})$ sağlanır.

b) $\lambda(\bar{w}) > \lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$ ve $\mu(\bar{w}) < \mu(\bar{u}) = \mu(\bar{v})$ olacak şekilde $\bar{w} \neq \bar{o}$ vektörü var olsun (özel olarak $\bar{w}$, $\overline{ou}$ ve $\overline{ov}$ üzerinde değil). Bu durumda $\{\bar{u}, \bar{w}\}$ yı α yı geren vektörlerin bir kümesi olarak alınabilir, bu durumda Durum 1 oluşur.
Durum 3 : $\lambda(\bar{u'}) \neq \lambda(\bar{v'})$ ve $\mu(\bar{u'}) = \mu(\bar{v'}) = \mu(\bar{u}) = \mu(\bar{v})$
$\lambda(\bar{u'}) \neq \lambda(\bar{v'})$ olduğundan Durum 1) den $a_0 \neq a_1$ elde edilir.
$\mu(\bar{w}) < \mu(\bar{u'}) = \mu(\bar{v'})$ olacak şekilde α da $\bar{w} \neq \bar{o}$ vektörü var olmasın, o zaman $b_1 = b_2$ dir.
$\mu(\bar{w}) < \mu(\bar{u'}) = \mu(\bar{v'})$ olacak şekilde α da $\bar{w} \neq \bar{o}$ vektörü var olsun, o zaman $b_1 \neq b_2$ elde edilir.
Durum 4 : $\lambda(\bar{u'}) = \lambda(\bar{v'}) = \lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$ ve $\mu(\bar{u'}) \neq \mu(\bar{v'})$
$\mu(\bar{u'}) \neq \mu(\bar{v'})$ olduğundan Durum 1) den $b_0 \neq b_1$ olur.
$\lambda(\bar{w}) > \lambda(\bar{u'}) = \lambda(\bar{v'})$ olacak şekilde α da $\bar{w} \neq \bar{o}$ vektörü var olmasın, o zaman $a_1 = a_2$ dir.
$\lambda(\bar{w}) > \lambda(\bar{u'}) = \lambda(\bar{v'})$ olacak şekilde α da $\bar{w} \neq \bar{o}$ vektörü var olsun, o zaman $a_1 \neq a_2$ elde edilir. Bu durumda $\{\bar{u}, \bar{w}\}$ yı α yı geren vektörlerinin bir kümesi olarak alınabilir ve $\bar{o}\bar{u}$, $\bar{o}\bar{w}$ doğruları taban doğrusu olabilir.

Önerme 5.2 *V, K cismi üzerinde tanımlı $3-$boyutlu bir vektör uzayı ve V nin bir tabanı $\{\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{x_3}\}$ olsun. (λ, μ), V üzerinde tanımlı sezgisel fuzzy vektör uzayı, $i \neq j$ için $\lambda(\bar{x_i}) \neq \lambda(\bar{x_j})$ ve $\mu(\bar{x_i}) \neq \mu(\bar{x_j})$ olmak üzere $\bar{x} = a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3}$ ise, o zaman $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x_1}) \wedge \lambda(\bar{x_2}) \wedge \lambda(\bar{x_3})$ ve $\mu(\bar{x}) = \mu(\bar{x_1}) \vee \mu(\bar{x_2}) \vee \mu(\bar{x_3})$ olur.*

İspat $\bar{x}$ vektörü taban elemanlarının lineer toplamı olarak yazılabilir.
$\bar{x} = a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3}$ olsun. $\lambda(\bar{x}) = \lambda(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3})$ eşitliğinde
$\bar{x'} = a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2}$ alınırsa
$\lambda(\bar{x}) = \lambda(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3}) = \lambda(\bar{x'} + a_3\bar{x_3})$ olur.
$\lambda(\bar{x_1}) \neq \lambda(\bar{x_2})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{x'}) &= \lambda(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2}) \\ &= \lambda(a_1\bar{x_1}) \wedge \lambda(a_2\bar{x_2}) && \text{(Önerme 5.1 iii) den)} \\ &= \lambda(\bar{x_1}) \wedge \lambda(\bar{x_2}) && \text{(Önerme 5.1 i) den)} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca Önerme 5.1 i) den $\lambda(a_3\bar{x_3}) = \lambda(\bar{x_3})$ dir.
$\lambda(\bar{x_1}) \neq \lambda(\bar{x_2}) \neq \lambda(\bar{x_3})$ olduğundan

$$\lambda(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3}) = \lambda(\bar{x_1}) \wedge \lambda(\bar{x_2}) \wedge \lambda(\bar{x_3})$$

elde edilir.
Benzer şekilde μ için ispat verilirse,
$\mu(\bar{x}) = \mu(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3}) = \mu(\bar{x'} + a_3\bar{x_3})$ ve $\mu(\bar{x'}) = \mu(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2})$ elde edilir.
$\mu(\bar{x_1}) \neq \mu(\bar{x_2})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu(\bar{x'}) &= \mu(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2}) \\ &= \mu(a_1\bar{x_1}) \vee \mu(a_2\bar{x_2}) && \text{(Önerme 5.1 iii) den)} \\ &= \mu(\bar{x_1}) \vee \mu(\bar{x_2}) && \text{(Önerme 5.1 i) den)} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca Önerme 5.1 i) den $\mu(a_3\bar{x_3}) = \mu(\bar{x_3})$ dir.
$\mu(\bar{x_1}) \neq \mu(\bar{x_2}) \neq \mu(\bar{x_3})$ olduğundan

$$\mu(a_1\bar{x_1} + a_2\bar{x_2} + a_3\bar{x_3}) = \mu(\bar{x_1}) \vee \mu(\bar{x_2}) \vee \mu(\bar{x_3})$$

elde edilir.
Sezgisel fuzzy vektör uzaylarında maksimal flag, Tanım 5.1 de verilen maksimal flagin tanımından aşağıdaki formda verilebilir:

$(\lambda,\mu)\,:\,V\,\rightarrow\,[0,1]\times[0,1]$, V vektör uzayı üzerinde $3-$ boyutlu sezgisel fuzzy vektör olsun. O zaman $d(U_i)=i, a_0\geq a_1\geq a_2\geq a_3,\ b_0\leq b_1\leq b_2\leq b_3,$
$a_i,b_i\in[0,1]\,,\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ a_i+b_i\leq 1$ şartlarını sağlayan ve (λ,μ) aşağıdaki formda olacak şekilde $3-$uzunluğunda (U_0,U_1,U_2) maksimal flagi vardır:

$$
\begin{array}{rccll}
(\lambda,\mu): & V & \rightarrow & [0,1]\times[0,1] & \\
 & \bar{u} & \rightarrow & (a_0,b_0)\,, & \bar{u}=\bar{o}=U_0 \\
 & \bar{u} & \rightarrow & (a_1,b_1)\,, & \bar{u}\in U_1\setminus U_0 \\
 & \bar{u} & \rightarrow & (a_2,b_2)\,, & \bar{u}\in U_2\setminus U_1 \\
 & \bar{u} & \rightarrow & (a_3,b_3)\,, & \bar{u}\in V\setminus U_2
\end{array}
$$

Üyelik dereceleri farklı iken bu flag tek olarak belirlenebilir.
$3-$ boyutlu vektör uzayından elde edilen projektif düzlemin boyutu 2 olduğundan, $3-$boyutlu sezgisel fuzzy vektör uzayından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemin boyutu 2 olur. Vektör uzayının bir vektör doğrusu karşılık gelen projektif düzlemin bir noktasıdır. Bu yüzden V nin vektör doğrusu L olmak üzere (L,λ,μ) sezgisel fuzzy doğrusundan bir sezgisel fuzzy projektif nokta oluşturulabilir. Teorem 5.6 dan (L,λ,μ) nün $a_0\geq a_1, b_0\leq b_1,\ a_i,\ b_i\in[0,1]\,,\ 0\leq a_i+b_i\leq 1,\ i=0,1$ için, aşağıdaki formda olduğu bilinmektedir:

$$
\begin{array}{rccll}
(\lambda,\mu): & L & \rightarrow & [0,1]\times[0,1] & \\
 & \bar{o} & \rightarrow & (a_0,b_0)\,, & \\
 & \bar{u} & \rightarrow & (a_1,b_1)\,, & \bar{u}\in L\setminus\{\bar{o}\}
\end{array}
$$

Şimdi L vektör doğrusuna karşılık gelen projektif noktayı p ile gösterilsin, $p\in PG(V)$ dir. p üzerinde (λ',μ') sezgisel fuzzy projektif noktayı oluşturmak için boyutu bir birim düşürülmesi gerektiğinden, karşılık gelen L vektör doğrusunda $\bar{o}$ nun üyelik dereceleri dikkate alınmaz. Böylece p üzerinde (λ',μ') sezgisel fuzzy nokta aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$
\begin{array}{rccl}
\left(\lambda',\mu'\right): & \{p\} & \rightarrow & [0,1]\times[0,1] \\
 & p & \rightarrow & (a_1,b_1)
\end{array}
$$

Bu sezgisel fuzzy projektif nokta $\left(p,\lambda',\mu'\right)$ ile gösterilecektir.

Sezgisel projektif doğruları, sezgisel fuzzy projektif noktayı tanımladığımız gibi tanımlayabiliriz. α, V nin bir vektör doğrusu olsun. Teorem 5.7 den (λ,μ,α) sezgisel fuzzy vektör düzleminin α nın herhangi bir vektör doğrusu L ve $a_0\ \geq\ a_1\ \geq\ a_2,$ $b_0\leq b_1\leq b_2,\ \ a_i,b_i\in[0,1]\,,\ 0\leq a_i+b_i\leq 1,\ i=0,1,2$ olmak üzere aşağıdaki gibi gösterildiği bilinmektedir:

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu):\ \ \alpha &\to [0,1]\times[0,1] \\
\bar{o} &\to \quad (a_0,b_0) \\
\bar{u} &\to \quad (a_1,b_1) \qquad \bar{u}\in L\setminus\{\bar{o}\} \\
\bar{u} &\to \quad (a_2,b_2)\,, \qquad \bar{u}\in\alpha\setminus L
\end{aligned}$$

Varsayalım ki M, α vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğru ve p, $L\subseteq\alpha$ vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta olsunlar. O zaman M üzerindeki (M,λ',μ') sezgisel fuzzy projektif doğru $a_1\geq a_2, b_1\leq b_2,\ a_i,b_i\in[0,1]\,,\ 0\leq a_i+b_i\leq 1,\ i=1,2$ olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
(\lambda',\mu'):\ \ M &\to [0,1]\times[0,1] \\
p &\to \quad (a_1,b_1) \\
q &\to \quad (a_2,b_2) \qquad q\in M\setminus\{p\}
\end{aligned}$$

Sezgisel fuzzy projektif doğru (M,λ',μ') ile gösterilir. Görülür ki sezgisel projektif doğru, fuzzy vektör doğru gibidir. Fark, fuzzy vektör doğruları üzerinde sabit bir daha 'iyi' veya 'özel' noktanın olmamasıdır. Ait olma üyelik derecesi her zaman en büyük olan, ait olmama üyelik derecesi en küçük olan nokta V nin $\bar{o}$ orijin noktasıdır. Sezgisel fuzzy projektif doğruda karşılık gelen vektör düzleminde özel doğruya bağlı olarak herhangi bir nokta olabilir.

Her $3-$ boyutlu sezgisel fuzzy vektör uzayından bir sezgisel fuzzy projektif düzlemi elde edilebilir. $3-$ boyutlu (λ,μ) sezgisel fuzzy vektör uzayı aşağıdaki formdadır:
$j<i$ için U_i nin tüm U_j leri içeren V vektör uzayının $3-$ boyutlu alt uzayı ve $a_0\geq a_1\geq a_2,\ b_0\leq b_1\leq b_2,\ a_i,b_i\in[0,1]\,,\ a_i+b_i\leq 1,\ i=0,1,2$ reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu):\ \ V &\to [0,1]\times[0,1] \\
\bar{o} &\to \quad (a_0,b_0)\,, \\
\bar{u} &\to \quad (a_1,b_1) \qquad \bar{u}\in U_1\setminus\{\bar{o}\} \\
\bar{u} &\to \quad (a_2,b_2)\,, \qquad \bar{u}\in U_2\setminus U_1.
\end{aligned}$$

Varsayalım ki, $3-$boyutlu V vektör uzayına karşılık gelen projektif düzlem V' olsun. U_1 vektör doğrusuna karşılık gelen $0-$boyutlu sezgisel fuzzy projektif nokta q, U_2 vektör düzlemine karşılık gelen $1-$boyutlu sezgisel fuzzy projektif doğru U_1' olmak üzere (q,U_1',V') bir maksimal flag oluşturur. $a_1\geq a_2\geq a_3$ ve $b_1\leq b_2\leq b_3, a_i,\ b_i\in[0,1]\,,$
$a_i+b_i\leq 1,\ i=1,2,3$ reel sayılar olmak üzere, $[\mathcal{P},\lambda',\mu']$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi aşağıdaki formdadır:

$$\begin{array}{rrcll} (\lambda', \mu') : & V' & \rightarrow & [0,1] \times [0,1] & \\ & q & \rightarrow & (a_1, b_1)\,, & \\ & p & \rightarrow & (a_2, b_2)\,, & p \in U_1' \setminus \{q\} \\ & p & \rightarrow & (a_3, b_3)\,, & p \in U_2' \setminus U_1' \end{array}$$

Tanım 5.5 *Sezgisel fuzzy projektif düzleminde* (p, α, β) *noktasının* (L, λ, μ) *sezgisel fuzzy doğrusu verilsin. Eğer* $p \in L$ *ve* $\lambda(p) = \alpha, \mu(p) = \beta$ *şartı sağlanıyorsa* (p, α, β) *sezgisel fuzzy noktası* (L, λ, μ) *sezgisel fuzzy doğrusu üzerindedir.*
Taban projektif düzleminde L_1 *ve* L_2 *doğrularının arakesit noktası* p *olmak üzere,* (L_1, λ_1, μ_1) *ve* (L_2, λ_2, μ_2) *iki sezgisel fuzzy doğrunun arakesitinin üyelik derecesi her iki doğru için aynıdır.*
$(L_1, \lambda_1, \mu_1) \cap (L_2, \lambda_2, \mu_2) = (p, \alpha, \beta)$ *ve* $\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = \alpha, \mu_1(p) = \mu_2(p) = \beta$ *dir.*

Klasik $PG(V)$ projektif düzleminde aşağıdaki teorem geçerlidir (Kaya, 2005):

Teorem 5.8 $PG(V)$ *nin noktaları ve doğruları aşağıdaki özellikleri sağlar:*
i. *Farklı her nokta çifti tek bir doğru üzerinde bulunur.*
ii. *Farklı her doğrunun tek bir ortak noktası vardır.*
iii. *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

Şimdi sezgisel fuzzy projektif düzlemde benzer durumun varlığı incelenecektir. İlk olarak $ii)$ maddesi ele alınırsa:
Farklı iki sezgisel fuzzy projektif doğrunun bir ortak sezgisel fuzzy projektif noktaya sahip olduğu açıktır. Sezgisel fuzzy projektif doğruların taban doğrularının herhangi bir çifti $PG(V)$ de tam olarak bir noktada kesişir. Her sezgisel fuzzy doğru $PG(V)$ de aslında bir doğru olduğundan ve üzerindeki noktalarla birlikte ait olma ve ait olmama üyelik dereceleri olduğundan, kesişim noktası da aynı zamanda ait olma ve ait olmama üyelik derecelerine sahiptir. $\mathcal{P}$ deki her nokta tek bir ait olma ve ait olmama üyelik derecesine sahip olduğundan, bu noktanın üyelik dereceleri, kesişen bu iki sezgisel fuzzy doğru üzerinde aynıdır.
Şimdi $i)$ incelensin. Burada iki duruma ayrılabilir. $\mathcal{P}$ nin herhangi iki keyfi (p, λ, μ) ve $\left(q, \lambda', \mu'\right)$ sezgisel fuzzy projektif noktaları alınsın. Taban projektif düzlemi $PG(V)$ de bu p ve q noktaları bir tek L doğrusu üzerinde olduğundan bu sezgisel fuzzy projektif noktalar

bir tek sezgisel fuzzy projektif doğru üzerindedir. Ancak, sezgisel fuzzy projektif düzlemin bütün noktalarını bilinmiyorsa, sadece iki sezgisel fuzzy nokta biliniyorsa, o zaman bu doğrunun hangi sezgisel fuzzy projektif doğru olduğundan emin olunamaz.

Durum 1. $\lambda(p) \neq \lambda^{'}(q)$, $\mu(p) \neq \mu^{'}(q)$. Bu durumda, $a, a^{'} \in \{a_1, a_2, a_3\}$, $b, b^{'} \in \{b_1, b_2, b_3\}$ olacak şekilde $\lambda(p) = a, \lambda^{'}(p) = a^{'}$ ve $\mu(q) = b, \mu^{'}(q) = b^{'}$, reel sayı olan ait olma ve ait olmama üyelik dereceleri karşılaştırılabildiği için, iki noktanın üzerinde bulunduğu bir tek doğru vardır. L doğrusunun üzerinde bulunan diğer tüm noktalar; eğer $a \leq a^{'}, b \geq b^{'}$ ise (a, b) üyelik derecesine sahiptir, eğer $a^{'} \leq a, b^{'} \geq b$ ise $(a^{'}, b^{'})$ üyelik derecesine sahiptir. Bu durumda $\left(L, \lambda^{'}, \mu^{'}\right)$ sezgisel fuzzy doğrusu için tek bir olasılık vardır.

Durum 2. Varsayalım ki, $a \in \{a_2, a_3\}$, $b \in \{b_2, b_3\}$ olmak üzere $\lambda(p) = \lambda^{'}(q) = a$, $\mu(p) = \mu^{'}(q) = b$ olsun.
Eğer $a = a_2, b = b_2$ ise, o zaman bu üyelik derecelerine sahip iki noktayı içeren bir tek sezgisel fuzzy doğru (L, λ_1, μ_1) olduğu için sadece bir olasılık vardır. Fakat ileri sezgisel fuzzy projektif düzlemleri bilinmiyorsa, (L, λ_1, μ_1) in diğer sezgisel fuzzy noktalarının üyelik derecelerinin (a_1, b_1) olup olmadığını bilmek imkansızdır.
Eğer $a = a_3, b = b_3$ ise o zaman hiçbir şey söylenemez. Doğrular üzerindeki diğer noktalar sırasıyla (a_1, b_1), (a_2, b_2) üyelik derecelerine sahip olabilir.
Özellik $iii)$ aşikardır: Taban projektif düzlemi $PG(V)$ de herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta bulunduğundan ve bir sezgisel fuzzy projektif nokta sadece bir üyelik derecesine sahip projektif nokta olduğundan, taban düzlemi $\mathcal{P}$ olan sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde de bu durum sağlanır.

Teorem 5.9 $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ *sezgisel fuzzy projektif düzleminin sezgisel fuzzy noktaları ve doğruları aşağıdaki özellikleri sağlar:*

i) *Farklı sezgisel fuzzy noktaların her bir çifti bir tek ortak sezgisel fuzzy doğru üzerindedir, fakat bu sezgisel fuzzy noktalar farklı ait olma ve ait olmama üyelik derecelerine sahip ise, o zaman bu sezgisel fuzzy doğru tam olarak belirlenebilir.*

ii) *Farklı sezgisel fuzzy doğruların her bir çifti, bir tek ortak sezgisel fuzzy noktada kesişir.*

iii) $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ *herhangi üçü doğrudaş olmayan dört sezgisel fuzzy nokta içerir.*
Ayrıca, eğer sezgisel fuzzy projektif doğru biliniyorsa, tek bir sezgisel fuzzy doğru belirlemek için iki üyelik derecesinin farklı olma şartı aranmaz.
Bu teorem sadece özel bir sezgisel fuzzy projektif düzlemde sağlanır. Örneğin, L *ve* $L^{'}$ V, $3-$ *boyutlu* V *vektör uzayından üretilen aynı* $PG(V)$ *projektif düzlemde olmak üzere,* (L, λ, μ) *ve* $\left(L^{'}, \lambda, \mu\right)$ *iki sezgisel fuzzy projektif doğru olsunlar.* L *ve* $L^{'}$ *tek bir ortak noktada kesişir. Şimdi varsayalım ki,*

$$\begin{array}{rccc} (\lambda,\mu): & L & \to & [0,1]\times[0,1] \\ & q & \to & (a_1,b_1) \\ & p & \to & (a_2,b_2) \qquad p\in L\setminus\{q\} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} (\lambda',\mu'): & L' & \to & [0,1]\times[0,1] \\ & q' & \to & (a_3,b_3) \\ & p' & \to & (a_4,b_4) \qquad p'\in L'\setminus\{q'\} \end{array}$$

Bu iki sezgisel fuzzy projektif doğru üzerindeki kesişim noktası aynı üyelik derecesine sahip olamaz. Klasik durumda olduğu gibi, bu iki sezgisel fuzzy projektif doğru bir sezgisel fuzzy projektif düzlemi germez.

6. FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMLERDE DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde temel oluşturması bakımından öncelikle projektif düzlemlerde dönüşümler, kolinasyon ve merkezsel kolinasyon yapıları gözden geçirildikten sonra fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemlerde homomorfizm, izomorfizm, kolinasyon ve klasik projektif düzlemde tanımlanan kolinasyonların özel bir tipi olan merkezsel kolinasyonların fuzzy karşılıkları tanımlanmıştır. Daha sonra bu dönüşümlerin özellikleri, üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler, invaryant bıraktığı özellikler analiz edilmiş ve uzayın üyelik derecesi ile ilgili teoremler oluşturulup, ispatlanmıştır. Taban projektif düzleminde kolinasyonların sağladığı bazı özelliklerin karşılık gelen fuzzy projektif düzlemde geçerliliği araştırıldı. Üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler kolinasyon altında taban noktasının ve taban doğrusunun invaryant olma durumlarına göre teoremlerle karakterize edildi. Merkezsel kolinasyonların fuzzy karşılıkları verildikten sonra, merkez nokta ve eksen doğrularının durumlarına göre üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler teorem ve sonuçlarla verildi.

6.1 Projektif Düzlemlerde Dönüşümler

Matematiğin birçok dalında olduğu gibi geometride de dönüşümler önemli bir yer tutmaktadır. Dönüşümlerin ve dönüşüm gruplarının incelenmesinde iki temel neden vardır: Birincisi, hangi koşullar altında iki geometrik yapının aynı olduğunun belirtilmesine yarayacak bir yönteme gereksinim duyulması; ikincisi de, her geometrinin bazı dönüşümler altında değişmez kalan (korunan) özelliklerinin incelenmesidir. Göz önüne alınacak dönüşümler için ilkel kavramlar olan *nokta*, *doğru* ve *üzerinde bulunma* korunması gereken başlıca yapılardır.

Tanım 6.1 $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *ve* $\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ'\right)$ *herhangi iki geometrik yapı olsun.*
Eğer $f:\mathcal{N}\cup\mathcal{D}\rightarrow\mathcal{N}'\cup\mathcal{D}'$ *fonksiyonu*

1. $f(\mathcal{N})\subseteq\mathcal{N}'$

2. $f(\mathcal{D})\subseteq\mathcal{D}'$

3. *Her* $N\in\mathcal{N}$ *,* $d\in\mathcal{D}$ *ve* $N\circ d\Rightarrow f(N)\circ' f(d)$

koşullarını da sağlıyorsa f ye $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *dan* $\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ'\right)$ *ye bir* **homomorfizm** *denir. Birebir ve örten özelliği bulunan homomorfizme* **izomorfizm** *denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme de* **kolinasyon** *veya* **otomorfizm** *denir (Kaya, 2005).*

Teorem 6.1 *f, $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemiyle bir $\mathcal{P}' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ projektif düzlemi arasında bir izomorfizmse aşağıdakiler geçerlidir (Kaya, 2005):*

***1.** Her $M, N \in \mathcal{N}, M \neq N$ için $f(M \vee N) = f(M) \vee f(N)$*

***2.**Her $c, d \in \mathcal{D}, c \neq d$ için $f(c \wedge d) = f(c) \wedge f(d)$*

***3.**Her $N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}$ için $N \text{ø} d \Rightarrow f(N) \text{ø}' f(d)$.*

Teorem 6.2 *f, $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ ve $\mathcal{P}' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ projektif düzlemi arasında bir homomorfizm olsun. Eğer f, $\mathcal{N}$ den $\mathcal{N}'$ ye birebir ve örtense $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{P}'$ arasında bir izomorfizmdir (Kaya, 2005).*

Tanım 6.2 *$\mathcal{P}$ bir projektif düzlem, f de $\mathcal{P}$ nin bir kolinasyonu olsun. Eğer $\mathcal{P}$ deki bir N noktası için $f(N) = N$ ise N için f altında değişmeyen nokta, f altında* **değişmez kalan nokta** *yada f nin bir* **değişmez noktası** *terimlerinden herhangi biri kullanılır. Benzer biçimde $\mathcal{P}$ nin bir d doğrusu için $f(d) = d$ ise d için f altında değişmeyen doğru, f altında* **değişmez kalan doğru** *ya da f nin bir* **değişmez doğrusu** *terimlerinden herhangi biri kullanılır. Ayrıca, eğer bir d doğrusunun her X noktası için $f(X) = X$ ise yani d nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa, f kolinasyonu d yi nokta-nokta değişmez bırakır denir. $\mathcal{P}$ nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa f ye* **birim kolinasyon** *ya da* **özdeşlik kolinasyonu** *denir (Kaya, 2005).*

$PG(2)$ Fano düzlemi $GF(2)$ sonlu cismi üzerinde projektif düzlemdir. Fano düzlemi $\mathcal{F}$ ile gösterilir. Fano düzlemi 7 nokta ve 7 doğrudan oluşur ve en küçük aşikar olmayan projektif düzlemdir. $\mathcal{F}$ nin her noktasından $\mathcal{F}$ nin üç doğrusu geçer ve $\mathcal{F}$ nin her doğrusu üzerinde üç nokta vardır. Fano düzleminin otomorfizm grubu $L_3(2)$ dir ve 168 elemandan oluşur. $L_3(2)$ nin noktalarını sabitleyen alt gruplar, mertebesi 24 olan simetrik gruplardır. Benzer şekilde $L_3(2)$ nin bir doğruyu sabitleyen alt grupları da mertebesi 24 olan simetrik gruplardır.

Fano düzleminin otomorfizm grubu olan $L_3(2)$ nin eleman sayısı Fano düzleminin 7 noktasını yine Fano düzleminin 7 noktasına götüren birebir örten φ dönüşümünün kolinasyonları hesaplanarak bulunabilir (φ :F$\rightarrow$ $\mathcal{F}$ bir otomorfizmadır). İlk olarak $\varphi(1)$ in seçilmesi için 7 yol vardır ve $\varphi(1)$ seçildikten sonra $\varphi(2)$ nin seçilmesi için 6 yol vardır. φ bir kolinasyon olduğundan $\varphi(1)$ ve $\varphi(2)$ ile belirlenen doğru üzerindeki üçüncü nokta $\varphi(3)$ olmalıdır. Geriye kalan nokta sayısı 4 olduğundan, $\varphi(4)$ seçmek için 4 yol vardır. $\varphi(1)$ ve $\varphi(4)$ ile belirlenen doğru üzerindeki kalan nokta $\varphi(5)$ olmalıdır, $\varphi(2)$ ve $\varphi(4)$ ile belirlenen doğru üzerindeki kalan nokta $\varphi(6)$ olmalıdır ve son olarak $\varphi(3)$ ve $\varphi(4)$ ile belirlenen doğru üzerindeki kalan nokta $\varphi(7)$ olmalıdır. Bu yüzden φ otomorfizmasının seçilmesi için $7 \times 6 \times 4 = 168$ yol vardır ve $L_3(2)$ otomorfizm grubunun mertebesi 168 dir (Kuijken vd., 1999).

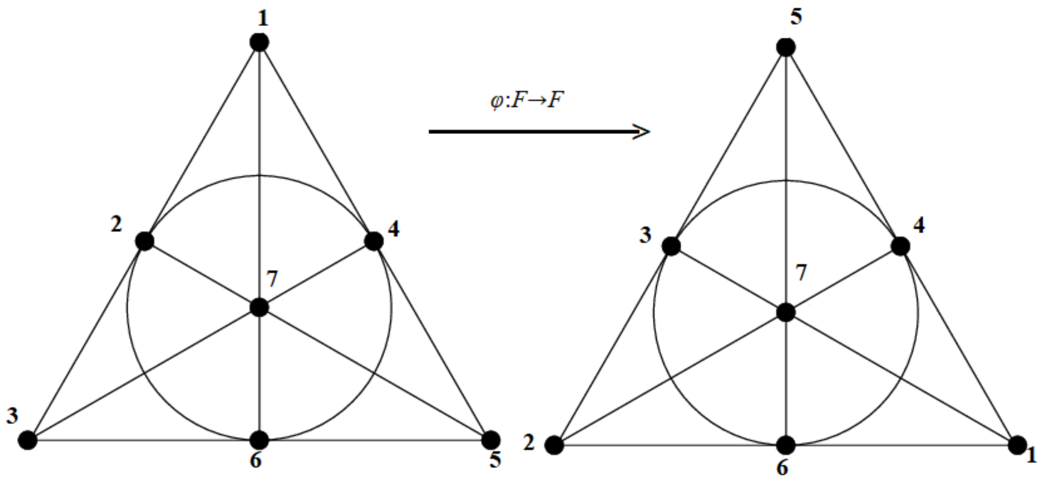
Örnek 6.1 *$L_3(2)$ grubunun 168 elemanından sadece 8 tanesi,*

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$x_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad x_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada $x_3 \in L_3(2)$ ele alınırsa, x_6 elemanı $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dönüşümünün

$$\varphi(1) = 5,\ \varphi(2) = 3,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 4,\ \varphi(5) = 1,\ \varphi(6) = 6,\ \varphi(7) = 7$$

şeklinde bir kombinasyonudur. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi x_6 elemanı $\mathcal{F}$ Fano düzleminin şeklini korumaktadır (Şekil 6.1).



Şekil 6.1 Fano düzleminin φ kolinasyonu

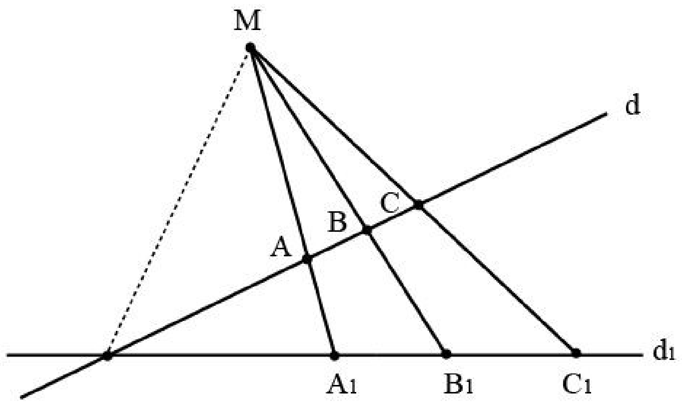
Tanım 6.3 *d ile d_1 projektif düzlemde herhangi iki doğru ve M de M ød ve M ød_1 olacak biçimde herhangi bir nokta olsun. Her $X \circ d$ noktası için $Y = \psi(X) = MX \wedge d_1$ olacak* *biçimde belirtilen ψ dönüşümüne d doğrusunu d_1 doğrusuna dönüştüren* **M merkezli bir perspektiflik** *denir. Bu perspektiflik*

$$\psi\text{: d} \overset{M}{\underset{\wedge}{=}} \text{d}_1 \quad \text{ya da kısaca d} \overset{M}{\underset{\wedge}{=}} \text{d}_1$$

biçiminde gösterilir (Kaya, 2005). Ayrıca eğer ψ, d doğrusunun $A, B, C, ...$ noktalarını d_1 doğrusunun sırasıyla $A_1, B_1, C_1, ...$ noktalarına dönüştürüyorsa bu perspektiflik için

$$\psi\text{: ABC}\ldots \overset{M}{\underset{\wedge}{=}} \text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\ldots \ \text{ ya da daha kısa olan ABC}\ldots \overset{M}{\underset{\wedge}{=}} \text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\ldots$$

gösterimi de kullanılır (Kaya, 2005)(Şekil 6.2).



Şekil 6.2 M merkezli perspektiflik

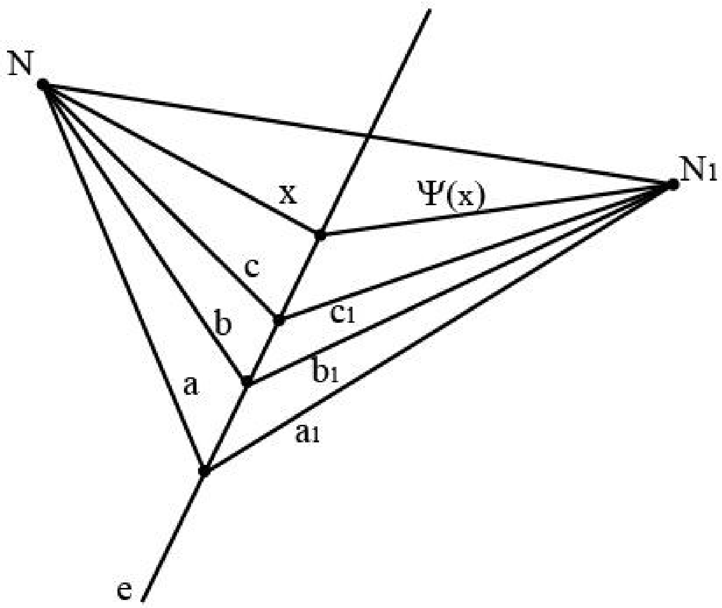
Tanım 6.4 *N ve N_1 bir projektif düzlemde herhangi iki nokta ve e de N ø$'$ e ve N_1 ø$'$ e olacak biçimde herhangi bir doğru olsun. $N \circ x$ özelliğinde her x doğrusu için $y = \psi(x) = (x \wedge e) \vee N_1$ olacak biçimde belirtilen ψ dönüşümüne N de noktadaş olan* *doğruları* N_1 *de noktadaş olan doğrulara dönüştüren* **e eksenli bir perspektiflik** *denir. Bu perspektiflik*

$$\psi : N \overset{e}{\underset{\wedge}{=}} N_1 \quad \text{ya da} \quad N \overset{e}{\underset{\wedge}{=}} N_1$$

biçiminde gösterilir.
Üstelik eğer ψ*,* N *deki demetin* $a, b, c, \ldots$ *doğrularını* N_1 *deki demetin sırayla* $a_1, b_1, c_1, \ldots$ *doğrularına dönüştürüyorsa bu perspektiflik için*

$$\psi : abc\ldots \overset{e}{\underset{\wedge}{=}} a_1 b_1 c_1 \ldots \quad \text{ya da daha kısa olan} \quad abc\ldots \overset{e}{\underset{\wedge}{=}} a_1 b_1 c_1 \ldots$$

gösterimi de kullanılır (Kaya, 2005) (Şekil 6.3).



Şekil 6.3 e-eksenli perspektiflik

Tanım 6.5 *Bir projektif düzlemde sonlu sayıda aynı tip perspektifliklerin bileşkesine* **izdüşel dönüşüm** *ya da* **izdüşellik** (**projectivity**) *denir. Perspektiflik ve izdüşelliklere birlikte bir boyutlu dönüşümler denir (Kaya, 2005).*

Tanımdan da anlaşılacağı gibi iki türlü izdüşellik söz konusudur. Bunlardan birincisi iki doğrunun noktaları arasında tanımlı olan izdüşel dönüşümdür ki şöyle açıklanabilir: n *bir doğal sayı,* $i = 1, 2, ..., n$ *ve* M_i ø$'$ $d_i - 1$, M_i ø$'$ d_i *olacak biçimde* M_i *noktalarını ve* d_0, d_i *doğrularını göz önüne alınsın.*

n *tane*

$$\psi_i : d_{i-1} \overset{M_i}{\underset{\wedge}{=}} d_i$$

perspektifliklerinin $\psi = \psi_n \psi_n - 1 ... \psi_1$ *bileşkesine* d_0 *ile* d_n *doğruları arasında bir izdüşellik denilmektedir. Bu izdüşellik ya*

$$d_0 \overset{M_1}{\underset{\wedge}{=}} d_1 \overset{M_2}{\underset{\wedge}{=}} d_2 \ldots \; d_{n-1} \overset{M_n}{\underset{\wedge}{=}} d_n$$

$A_i, B_i, C_i, ...$ *noktaları* d_i *doğrusu üzerinde olmak kaydıyla*

$$A_0B_0C_0 \ldots \overset{M_1}{\underset{\wedge}{=}} A_1B_1C_1 \ldots \overset{M_2}{\underset{\wedge}{=}} A_2B_2C_2 \ldots \overset{M_n}{\underset{\wedge}{=}} A_nB_nC_n \ldots$$

biçiminde ifade edilebildiği gibi daha kısaca

$$d_0 \,\bar{\wedge}\, d_n \text{ ya da } A_0B_0C_0 \ldots \bar{\wedge}\, A_nB_nC_n \ldots$$

biçimlerinde de gösterilir (Şekil 6.4). Özel olarak $d_0 = d_n$ *olması halinde bir doğrunun kendi kendine bir izdüşel dönüşümü söz konusu olur.*
İkinci tip izdüşellik doğru demetleri arasında tanımlı olanıdır ki o duallikten yararlanılarak şöyle açıklanabilir: $i = 1, 2, ..., n$ *ve* $N_i - 1 \text{ø}' e_i, N_i \text{ø}' e_i$ *olacak biçimde* e_i *doğrularını ve* N_0, N_i *noktalarını göz önüne alalım:*

$$\varphi_i : \mathrm{N}_{i-1} \overset{\mathrm{e_i}}{\underset{\wedge}{=}} \mathrm{N}_i$$

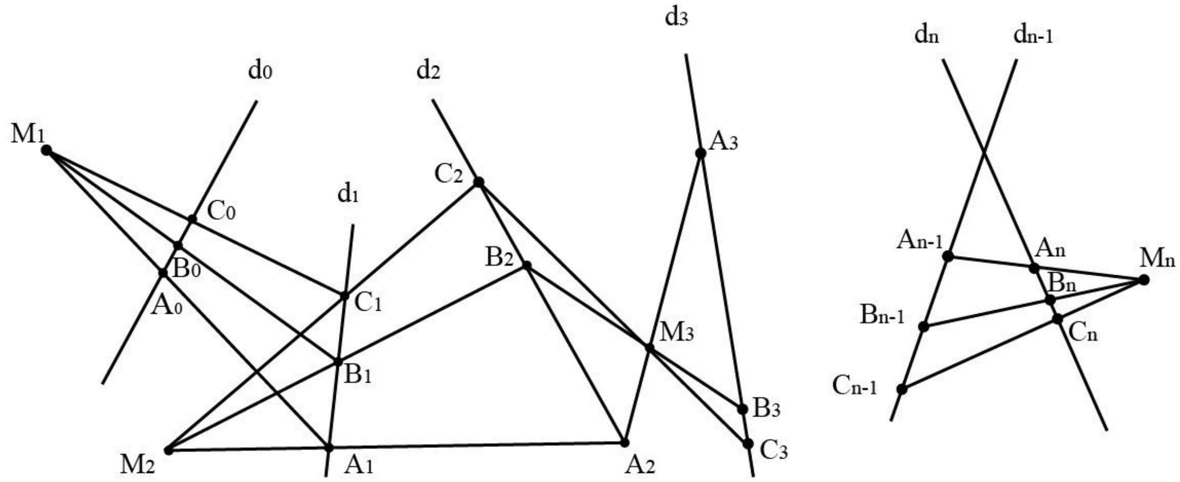
perspektifliklerinin

$$\mathrm{N}_0 \overset{\mathrm{e_1}}{\underset{\wedge}{=}} \mathrm{N}_1 \overset{\mathrm{e_2}}{\underset{\wedge}{=}} \mathrm{N}_2 \ldots \mathrm{N}_{n-1} \overset{\mathrm{e_n}}{\underset{\wedge}{=}} \mathrm{N}_n$$

bileşkesi verilen N_0 *ve* N_n *noktadaş olan doğrular arasında bir izdüşel dönüşüm olup genellikle*

$$\mathrm{N_0} \,\bar{\wedge}\, \mathrm{N_n} \qquad \text{ya da} \qquad \mathrm{a_0 b_0 c_0} \ldots \bar{\wedge}\, \mathrm{a_n\, b_n\, c_n} \ldots$$

ile gösterilir. $N_0 = N_n$ *olması özel halinde bir demetin kendi kendisine bir izdüşellik ile eşlenmesi ile meydana çıkar.*
Her perspektifliğin birebir ve örten olması nedeniyle her izdüşel dönüşüm birebir ve örtendir.



Şekil 6.4 İzdüşel dönüşüm

Tanım 6.6 *f, bir $\mathcal{P}$ projektif düzleminin bir otomorfizmi olsun. $\mathcal{P}$ nin bir M noktasından geçen her x doğrusu için $f(x) = x$ ise M ye f nin merkezi denir. Benzer olarak $\mathcal{P}$ nin bir e doğrusu üzerindeki her X noktası için $f(X) = X$ ise e ye f nin ekseni denir. Eğer f nin bir M merkezi ve bir e ekseni varsa f ye $\mathcal{P}$ nin bir* $(\mathbf{M}, \mathbf{e}) -$ **merkezsel kolinasyonu** *ya da* $(\mathbf{M}, \mathbf{e}) -$ **perspektifliği** *denir. Ayrıca eğer $M \circ e$ ise f ye* **öteleme**, *$M \not\circ e$ ise f ye* **homoloji** *denir (Kaya,2005).*

Tanım 6.7 *$\mathcal{P}$ projektif düzleminin, $G(P)$ kolinasyonlar grubunun periyodu 2 olan birimden farklı her elemanına bir* **involusyonlu kolinasyon** *ya da* **involusyon** *denir (Kaya, 2005).*

Tanım 6.8 *f, bir $\mathcal{P}$ projektif düzleminin herhangi bir kolinasyonu, d de $\mathcal{P}$ nin herhangi bir doğrusu ve $f(d) = d'$ olsun. Eğer f nin d ye kısıtlanmışı olan $f_{/d} : d \to d'$ dönüşümü bir izdüşellikse f ye* **izdüşel kolinasyon** *denir (Kaya, 2005).*

Tanım 6.9 *$\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ herhangi bir projektif düzlem olsun. Bu düzlemde*

$$\sigma : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \to \mathcal{N} \cup \mathcal{D}$$

eşleşmesi aşağıdaki özelliklere sahipse σ ya $\mathcal{P}$ nin bir **korelasyonu** *denir:*

1. *$\sigma : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \to \mathcal{N} \cup \mathcal{D}$ dir,* *2.*σ *birebir ve örtendir,*

3. $N, N' \in \mathcal{N}$, $d, d' \in \mathcal{D}$ *için eğer* $N \circ d$, $\sigma(N) = d'$ *ve* $\sigma(d) = N'$ *ise* $N' \circ d'$

Projektif düzlemde herhangi bir korelasyon yalnızca doğruları noktalara ve noktaları da doğrulara birebir ve örten biçimde eşlemekle kalmaz aynı zamanda üzerinde bulunma bağıntısını da korur. Bir korelasyon doğrudaş noktaları noktadaş doğrulara, tamdörtgenleri tamdörtkenarlara, tamdörtkenarları tamdörtgenlere eşler (Kaya, 2005).

Tanım 6.10 *$\mathcal{P}$ bir projektif düzlem ve σ da $\mathcal{P}$ nin bir korelasyonu olsun. Eğer σ $\mathcal{P}$ deki her bir doğruya (bu doğru üzerindeki noktalar kümesine) ya da herbir noktaya (bu noktadan geçen doğrular kümesine) kısıtlanmışı bir izdüşellikse σ ya $\mathcal{P}$ nin* **izdüşel korelasyonu** *denir ve σ nın d doğrusu ve N noktasına kısıtlanmışı sırayla $\sigma_{/d}$ ve $\sigma_{/N}$ ile gösterilir (Kaya, 2005).*

Tanım 6.11 *K cismi üzerinde V bir (sol) vektör uzayı olsun. $(P, L) = PG(V, K)$ nın bir kolinasyonu birebir ve örtendir: $\tau : P \cup L \to P \cup L$, $\tau : L \to L$ üzerinde bulunma bağıntısını korur. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa $\alpha : V \to V$ birebir örten dönüşümüne* **yarı lineer dönüşüm** *denir (Landjev, 1998):*
$\forall x, y \in V, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
$\forall x \in V, \forall \alpha \in K, \exists \sigma \in AutK, \alpha(ax) = a^{\sigma}\alpha(x)$

V nin tüm yarı lineer dönüşümlerinin kümesi dönüşümlerin birleşim işlemi altında bir gruptur ve $\Gamma L(V, K)$ olarak gösterilir. Eğer $K = F_q$ ve $V = F_q^{N+1}$ ise, $\Gamma L(k + 1, q)$ yazılabilir. $K = F_q$ ve $V = F_q^{N+1}$ ise tüm lineer dönüşümleri içeren $\Gamma L(V, K)$ nın alt grubu $GL(k+1, q)$ veya $GL(N + 1, q)$ ile gösterilir.

Teorem 6.3 (Projektif Geometrinin Temel Teoremi 1) *V, K cismi üzerinde bir (sol) vektör uzayı olsun. Her yarı lineer dönüşüm $\alpha \in \Gamma L(V, K)$, $\bar{\alpha}(K^* x) = K^* \alpha(x)$ tarafından $PG(V, K)$ nın bir kolinasyonunu üretir. $dimV \geq 3$ olsun. O zaman $PG(V, K)$ nın her π kolinasyonu için $\bar{\alpha} = \pi$ ile birlikte bir yarı lineer $\alpha \in \Gamma L(V, K)$ dönüşümü vardır. Sırasıyla σ_1 ve σ_2 cisim otomorfizmlerine sahip aynı kolinasyonu üreten $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, $\alpha, \beta \in \Gamma L(V, K)$ olsun. O zaman her $x \in V$ için $\beta(x) = \alpha(ax)$ ve her $b \in K$ için $b^{\sigma_2} = (aba^{-1})^{\sigma_1}$ olacak şekilde $a \in K^*$ vardır. Tersine, her $\alpha \in \Gamma L(V, K)$ yarı lineer dönüşümü ve $a \in K^*$ dönüşümü için $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ile birlikte*

$$\beta : \begin{cases} V & \to & V \\ x & \to & \alpha(ax) \end{cases}$$

dönüşümü yarı lineerdir (Landjev, 1998).

$K = F_q$ ve $V = F_q^{N+1}$ ise $PG(V, K)$ nın tüm kolinasyonlarının grubu $P\Gamma L(V, K)$ veya $P\Gamma L(N + 1, q)$ ile gösterilir. $GL(V, K)$ nın elemanlarıyla oluşturulan $P\Gamma L(V, K)$ nın alt grubu $PGL(V, K)$ projektif gruptur. $K = F_q$ ve $V = F_q^{N+1}$ için bu grup $PGL(N+1, q)$ ile gösterilir. Sonraki teorem $PGL(V, K)$ nın geçişkenliğinin önemini vurgular.

Teorem 6.4 (Projektif Geometrinin Temel Teoremi 2) *V, K cismi üzerinde $k + 1$ boyutlu (sol) vektör uzayı olsun ve $P_1, P_2, ..., P_{k+2}$ ve $Q_1, Q_2, ..., Q_{k+2}$ noktalarının herhangi $k + 1$ i $PG(V, K)$ nın taban kümesini oluşturan iki noktalar kümesi olsun. O zaman $P_i^\pi = Q_i$, $i = 1, 2, ..., k + 2$ olacak şekilde tam olarak bir tane $\pi \in PGL(V, K)$ kolinasyonu vardır (Landjev,1998).*

Tanım 6.12 *τ yu ς ya dönüştüren, $\tau^\pi = \{P^\pi | P \in \tau\} = \tau, \pi \in P\Gamma L(V, K)$ daki noktaların çoklu kümeleri τ ve ς denktir (Landjev, 1998).*

6.2 Fuzzy Lineer Dönüşümler

Vektör uzayları arasında pek çok lineer dönüşüm tanımlanabilir. İki vektör uzayı arasında tanımlanan izomorfizmler birebir ve örten lineer dönüşümlerdir. İzomorf vektör uzayları eş yapılıdır. İzomorfizmler bir vektör uzayında geçerli olan teoremleri izomorf olduğu vektör uzayındaki geçerli teoremlere dönüştürür. İki vektör uzayı arasındaki izomofizm kavramı fuzzy vektör uzayları arasındaki izomorfizme genişletilebilir.

Tanım 6.13 *$\tilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı ve $f : E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde,*

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} sup\,\{(\mu)(x) : x \in f^{-1}(y)\}\,, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Lubczonok, 1990).
$\widetilde{cekf} = (cekf, \mu_{|cekf})$ ve $\widetilde{gorf} = (gorf,_{|gorf})$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.14 *(E_1, μ_1) ve (E_2, μ_2) iki fuzy alt uzay olsun. $\varphi : E_1 \to E_2$ izomorfizmi her $x \in E_1$ için,*

$$\mu_1(x) = \mu_2(\varphi(x))$$

şartını sağlayacak şekilde varsa (E_1, μ_1) *ve* (E_2, μ_2) *alt uzayları* **izomorfiktir** *denir (Abdukhalikov, 1996).*
X, F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı iken X ten F ye giden tüm lineer fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzaya X in dual uzayı denir ve X^* ile gösterilir. Benzer şekilde X^* üzerinde μ^* fuzzy alt kümesi aşağıdaki şekilde verilebilir.

Örnek 6.2 *R^3 ün $\mu : R^3 \to [0,1]$ fuzzy alt kümesi her $(x,y,z) \in R^3$ için $\mu(x,y,z) = 1$ ve R^2 nin $\lambda : R^2 \to [0,1]$ fuzzy alt kümesi her $(x,y) \in R^2$ için $\lambda(x,y) = \frac{1}{2}$ biçiminde tanımlansın.*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & R^3 & \to & R^2 \\ & (x,y,z) & \to & (x,y) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm R^3 üzerinde fuzzy lineer dönüşümdür.
μ ve λ nın R^3 ve R^2 üzerinde sırasıyla fuzzy alt uzay olduklarını gösterelim.
Her $a, b \in F$ ve $A, B \in R^3$ ve μ için

$$\mu(aA + bB) \geq min\{\mu(A), \mu(B)\}$$

şartını sağldığından R^3 üzerinde ve benzer biçimde λ, $\lambda(aA + bB) \geq min\{\lambda(A), \lambda(B)\}$ şartını sağladığından R^2 üzerinde fuzzy alt uzayıdır.
μ ve λ, R^3 ve R^2 üzerinde sırasıyla iki alt uzay olsun.
Her $(x,y,z) \in R^3$ için $\varphi(x,y,z) = (x,y)$ olacak şekilde $\varphi : \mu \to \lambda$ dönüşümü vardır.
Her $A, B, s, d \in R^3$ için

$$\begin{aligned} \varphi(aA + bB) &= sup\{min\{\mu(aA), \mu(bB)\}\}, \\ &= sup\{min\{\varphi(s), \varphi(d)\} : s = aA, d = bB\}, \\ &= sup\{min\{\varphi(s), \varphi(d)\} : s = (ax_1, ay_1, az_1), d = (bx_2, by_2, bz_2)\}, \\ &= sup\{min\{\varphi(A), \varphi(B)\}\}, \\ &\geq min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \end{aligned}$$

olduğundan φ, μ fuzzy alt uzayı üzerinde bir fuzzy lineer dönüşümdür.

Fuzzy Lineer Dönüşümler Uzayının Bir Fuzzy Alt Uzayı

Tanım 6.15 *$\mu : X \to [0,1]$, X vektör uzayı üzerinde bir fuzzy alt küme olsun. X^* üzerinde μ^* fuzzy alt kümesi $f \in X^*$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:*

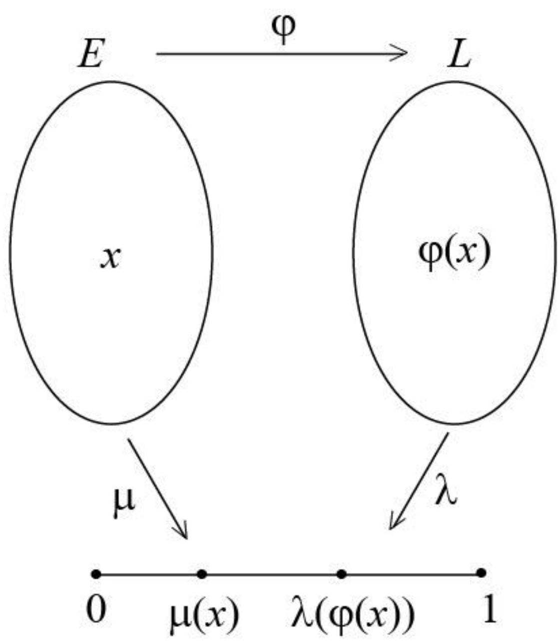
$$\mu^*(f) = \begin{cases} 1 - sup\{\mu(x) : x \in X, f(x) \neq 0\}, & f \neq 0 \\ 1 - inf\{\mu(x) : x \in X\}, & f = 0 \end{cases}$$

(Abdukhalikov, 1996).

Tanım 6.16 *E ve L, F cismi üzerinde birer vektör uzayı ve $\mu : E \to [0,1], \lambda : L \to [0,1]$ birer fuzzy alt uzay olsun. $\varphi : E \to L$ bir lineer dönüşüm olmak üzere eğer $\forall x \in E$ için,*

$$\lambda(\varphi(x)) \geq \mu(x)$$

şartı sağlanıyorsa φ ye **fuzzy lineerdir** *denir (Abdukhalikov, 1996) (Şekil 6.5).*



Şekil 6.5 Fuzzy Lineer Dönüşüm

Örnek 6.3 *R^3 ün $\mu : R^3 \to [0,1]$ fuzzy alt kümesi her $(x,y,z) \in R^3$ için $\mu(x,y,z) = \frac{1}{2}$ ve R^2 nin $\lambda : R^2 \to [0,1]$ fuzzy alt kümesi her $(x,y) \in R^2$ için $\lambda(x,y) = 1$ biçiminde tanımlansın.*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & R^3 & \to & R^2 \\ & (x,y,z) & \to & (x,y) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm R^3 üzerinde fuzzy lineer dönüşümdür.

Önerme 6.1 *$\lambda(0) \geq \mu(0)$ ise μ den λ ya tanımlanan tüm lineer dönüşümlerin kümesi bir vektör uzayıdır (Abdukhalikov, 1996).*

Tanım 6.17 *E den L ye tanımlanan sıfır lineer dönüşümü $(E,\mu) \to (L,\lambda)$ fuzzy alt uzayları arasında fuzzy lineer dönüşüm ise* **fuzzy sıfır lineer dönüşümü** *denir (Abdukhalikov, 1996).*

Tanım 6.18 *$FHom(\mu,\lambda)$ nin ν fuzzy alt kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\nu(\varphi) = \begin{cases} 1 - inf\left\{\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) : x \in E, \varphi(x) \neq 0\right\}, \varphi \neq 0 \\ 1 - sup\left\{\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) : x \in E\right\}, \qquad \varphi = 0 \end{cases}$$

Dolayısıyla eğer $\varphi \neq 0$ ise $\nu(\varphi)$, E den alınan her x vektörü için ya

$$\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) \geq \alpha$$

ya da $\varphi(x) = 0$ olacak şekilde en büyük α reel sayısıdır (Abdukhalikov, 1996).

Tanım 6.19 *Fuzzy prjektif düzlem (Π, Λ, I) olsun. Bir fuzzy kolinasyon, fuzzy doğruları fuzzy doğrulara dönüştüren Π nin bir permütasyonudur, böylece aynı şekilde Λ nin de bir permütasyonudur. Tüm fuzzy kolinasyonlarının kümesi birleşim işlemi altında bir grup oluşturur,* **fuzzy kolinasyon grubu** *denir (Kuijken ve Maldeghem, 2003).*

Tanım 6.20 *Bir fuzzy p noktasından geçen her fuzzy doğru $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalıyorsa, o zaman p ye $\bar{f}$* **fuzzy kolinasyonunun merkezi** *denir. Merkeze sahip fuzzy kolinasyon* **merkezsel fuzzy kolinasyon** *olarak adlandırılır. $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun invaryant fuzzy noktalarının oluşturduğu fuzzy doğruya $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun* **ekseni** *denir ve böyle bir eksene sahipse $\bar{f}$ ye* **eksensel fuzzy kolinasyon** *denir. $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun merkezi, ekseni üzerinde ise $\bar{f}$ ye* **özel merkezsel fuzzy kolinasyon** *denir (Kuijken ve Maldeghem, 2003).*

6.3 Fuzzy Vektör Uzaylarından Elde Edilen Fuzzy Projektif Düzlemlerde Kolinasyonlar

Vektör uzaylarında tanımlı homomorfizm izomorfizm tanımları (Abdulhalikov, 1998), fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemlere genişletilebilir. Projektif düzlemlerde tanımlı homomorfizm tanımını, fuzzy projektif düzlemlerde aşağıdaki şekilde verilecektir.

Tanım 6.21 *$[\mathcal{P}, \lambda]$ taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlem olan ve $[\mathcal{P}', \mu]$ taban düzlemi $\mathcal{P}' = \left(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ'\right)$ olan herhangi iki fuzzy projektif düzlem olsun.*

$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \to \mathcal{P}' = \left(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ'\right)$ *bir homomorfizm olsun.* $[\mathcal{P}, \lambda]$ *fuzzy projektif düzleminden* $[\mathcal{P}', \mu]$ *fuzzy projektif düzlemine*
$\lambda(p) = \alpha$ *ve* $\mu(f(p)) = \beta$ *olmak üzere* $\forall (p, \alpha) \in [\mathcal{P}, \lambda]$ *için*

$$\begin{array}{rcl} \bar{f} : \ [\mathcal{P}, \lambda] & \to & [\mathcal{P}', \mu] \\ \bar{f}(p, \alpha) & = & (f(p), \beta) \ \ni \alpha \leq \beta \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $\bar{f}$ *dönüşümüne* $[\mathcal{P}, \lambda]$ *ve* $[\mathcal{P}', \mu]$ *fuzzy projektif düzlemleri arasında* $\mathcal{P}$ *den* $\mathcal{P}'$ *ye* **f homomorfizminin tanımladığı fuzzy homomorfizm** *denir.*
$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ *bir izomorfizm olmak üzere ve* $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \to [\mathcal{P}', \mu]$ *dönüşümü için*
$\lambda(p) = \alpha, \mu(f(p)) = \beta$ *olmak üzere* $\forall p \in \mathcal{N}$ *için,*

$$\bar{f}(p, \alpha) = (f(p), \beta), \ \alpha = \beta$$

şartını sağlayan $\bar{f}$ *ye fuzzy projektif düzlemleri arasında bir* **f izomorfizminin tanımladığı fuzzy izomorfizm** *denir.*

Teorem 6.5 $f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \to \mathcal{P}' = \left(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ'\right)$ *bir izomorfizm olsun.* f *izomorfizminin tanımladığı* $\bar{f}$ *için* $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \to [\mathcal{P}', \mu]$ *bir fuzzy izomorfizm olmak üzere*

a) $[\mathcal{P}, \lambda]$ *da taban noktaları farklı her* (p_1, α_1) *ve* (p_2, α_2) *fuzzy noktaları için*

$$\bar{f}(\langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle) = \left\langle \bar{f}(p_1, \alpha_1), \bar{f}(p_2, \alpha_2) \right\rangle$$

dir.

b) $[\mathcal{P}, \lambda]$ *da taban doğruları farklı her* (L, β_1) *ve* (M, β_2) *fuzzy doğruları için*

$$\bar{f}((L, \beta_1) \cap (M, \beta_2)) = \bar{f}(L, \beta_1) \cap \bar{f}(M, \beta_2)$$

dir.

c) $[\mathcal{P}, \lambda]$ *daki* (p, α) *fuzzy noktası ve* (L, β) *fuzzy doğrusu için* p *taban noktası* L *doğrusu üzerinde değil ise* $[\mathcal{P}', \mu]$ *de* $\bar{f}(p, \alpha)$ *fuzzy noktası* $\bar{f}(L, \beta)$ *fuzzy doğrusu üzerinde değildir.*

İspat **a)** $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \to [\mathcal{P}', \mu]$ bir fuzzy izomorfizm olsun. $[\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy projektif düzleminde taban noktaları farklı (p_1, α_1) ve (p_2, α_2) fuzzy noktalarını birleştiren fuzzy doğru

$$\langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle = \langle (p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2 \rangle$$

dir. Bu noktaların $\bar{f}$ altında görüntüsü

$$\bar{f}(p_1, \alpha_1) = (f(p_1), \alpha_1'), \alpha_1 = \alpha_1'$$

ve

$$\bar{f}(p_2, \alpha_2) = (f(p_2), \alpha_2^{'}), \alpha_2 = \alpha_2^{'}$$

dir.
$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{'}$ ye bir izomorfizm olduğundan $f(p_1) \neq f(p_2)$ dir.
Bu yüzden $\bar{f}(p_1, \alpha_1)$ ve $\bar{f}(p_2, \alpha_2)$ fuzzy noktaları $[\mathcal{P}^{'}, \mu]$ de farklı iki fuzzy noktadır.
Bu görüntü noktalarının ürettiği doğru

$$\left\langle \bar{f}(p_1, \alpha_1), \bar{f}(p_2, \alpha_2) \right\rangle = \left\langle (f(p_1), \alpha_1^{'}), (f(p_2), \alpha_2^{'})) \right\rangle \qquad (1)$$

olur. Şimdi $\langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle$ doğrusunun görüntüsüne bakılırsa,

$$\bar{f}(\langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle) = \bar{f}(\langle (p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2 \rangle) = (f(p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2)$$

olur.
f, P den $\mathcal{P}^{'}$ ye izomorfizm olduğundan $f(p_1 \cup p_2) = f(p_1) \cup f(p_2)$ dir.

$$\bar{f}(\langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle) = (f(p_1 \cup p_2), \alpha_1^{'} \wedge \alpha_2^{'}) = \left\langle (f(p_1), \alpha_1^{'}), (f(p_2), \alpha_2^{'}) \right\rangle \qquad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinden

$$\bar{f}(\langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle) = \left\langle \bar{f}(p_1, \alpha_1), \bar{f}(p_2, \alpha_2) \right\rangle \qquad (3)$$

elde edilir.

b) $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \to [\mathcal{P}^{'}, \mu]$ bir fuzzy izomorfizm olsun. $[\mathcal{P}, \lambda]$ projektif düzleminde taban doğruları farklı (L, β_1) ve (M, β_2) fuzzy doğrularının kesişim noktası
$(L, \beta_1) \cap (M, \beta_2) = (L \cap M, \beta_1 \wedge \beta_2)$ dir. Bu doğruların $\bar{f}$ altında görüntüsü

$$\bar{f}(L, \beta_1) = (f(L), \beta_1^{'}), \ \beta_1 = \beta_1^{'} \ \ ve \ \ \bar{f}(M, \beta_2) = (f(M), \beta_2^{'}), \ \beta_2 = \beta_2^{'}$$

dir. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{'}$ ye bir izomorfizm olduğundan $f(L) \neq f(M)$ dir. Bu yüzden $\bar{f}(L, \beta_1)$ ve $\bar{f}(M, \beta_2)$ fuzzy doğruları $[\mathcal{P}^{'}, \mu]$ de farklı iki fuzzy doğrudur.
Bu görüntü doğrularının arakesiti olan nokta

$$\bar{f}(L, \beta_1) \cap \bar{f}(M, \beta_2) = (f(L), \beta_1^{'}) \cap (f(M), \beta_2^{'}) = (f(L) \cap f(M), \beta_1^{'} \wedge \beta_2^{'}) \qquad (1)$$

olur. Şimdi $(L, \beta_1) \cap (M, \beta_2)$ arakesit noktasının görüntüsüne bakılırsa,

$$\bar{f}((L, \beta_1) \cap (M, \beta_2)) = \bar{f}(L \cap M, \beta_1 \wedge \beta_2) = (f(L \cap M), \beta_1 \wedge \beta_2)$$

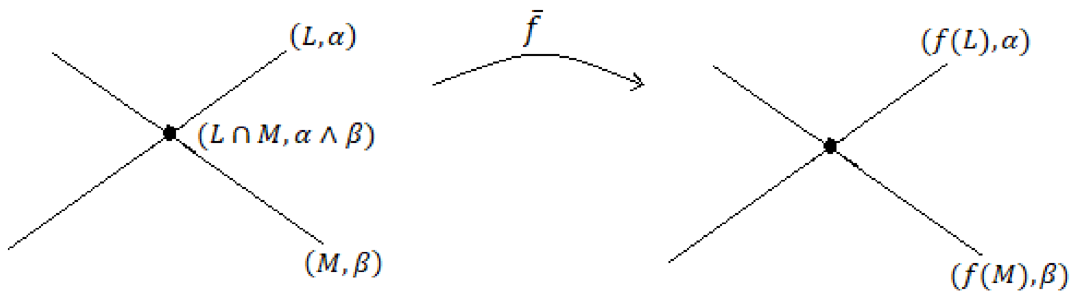
olur.
f, $\mathcal{P}$ den $\mathcal{P}^{'}$ ye izomorfizm olduğundan $f(L \cap M) = f(L) \cap f(M)$ dir.

$$\begin{aligned} \bar{f}((L, \beta_1) \cap (M, \beta_2)) &= \bar{f}(L \cap M, \beta_1 \wedge \beta_2) \\ &= (f(L \cap M), \beta_1^{'} \wedge \beta_2^{'}) \\ &= (f(L), \beta_1^{'}) \cap (f(M), \beta_2^{'}) \quad (2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) denklemlerinden ve $\beta_i = \beta_i',\ i = 1,\ 2$ den

$$\bar{f}((L,\beta_2) \cap (M,\beta_2)) = \bar{f}(L,\beta_1) \cap \bar{f}(M,\beta_2) \qquad (3)$$

elde edilir (Şekil 6.6).



Şekil 6.6 $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında iki fuzzy doğrunun kesişimi

c) $[\mathcal{P},\lambda]$ daki (p,α) fuzzy noktası ve (L,β) fuzzy doğrusu için p taban noktası L doğrusu üzerinde değil iken $\bar{f}((p,\alpha))$ noktasının $\bar{f}((L,\beta))$ üzerinde olduğunu varsayalırsa, o zaman (p,α) fuzzy noktası da (L,β) fuzzy doğrusu üzerinde değildir.
$\bar{f}((p,\alpha)) = (f(p),\alpha)$ noktası $\bar{f}((L,\beta)) = (f(L),\beta)$ doğrusu üzerinde olduğundan $f(p) \circ f(L)$ dir. Bu taban düzleminde $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ ye bir izomorfizm olduğundan $p \circ L$ olmasını gerektirir. Bu da hipotezle çelişir.
Vektör uzayından elde edilen fuzzy projektif düzlemlerde tanımlı fuzzy kolinasyonun taban doğrusu, taban noktası ve üyelik derecelerine bağlı olarak $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında invaryant olma özellikleri ayrıntılı biçimde aşağıdaki teoremle incelenmiştir.

Teorem 6.6 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P},\lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rccll} \lambda : & PG(V) & \to & [0,1] & \\ & q & \to & a_0 & \\ & p & \to & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & a_2, & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ biçiminde tanımlansın.
$\mathcal{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ) \to \mathcal{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P},\lambda] \to [\mathcal{P},\lambda]$ fuzzy kolinasyonu verilsin. O zaman

a) *$a_0 \neq a_1 \neq a_2$ ise taban noktası ve taban doğrusu, $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında invaryant* *kalır.*

b) $a_0 \neq a_1 = a_2$ *ise* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonu altında, taban noktası invaryant kalır ve taban doğrusu da taban noktasından geçen bir doğruya dönüşür.*

İspat **a)** $a_0 \neq a_1 \neq a_2$ olsun.
Taban noktası (q, a_0) ın görüntüsü $\bar{f}(q, a_0) = (f(q), a_0)$ dır. $[\mathcal{P}, \lambda]$ da a_0 üyelik dereceli başka nokta olmadığından $(f(q), a_0)$ taban noktası olmak zorundadır. $f(q) = q$ olduğundan $\bar{f}(q, a_0) = (q, a_0)$ dır.
Taban doğrusu $(L, a_1) = \langle (q, a_0), (p_i, a_1) \rangle \ni p_i \circ L$ olduğundan ve Teorem 6.5 a) şıkkından

$$\begin{aligned}
\bar{f}((L, a_1)) &= \left\langle \bar{f}(q, a_0), \bar{f}(p_i, a_1) \right\rangle \\
&= \langle (f(q), a_0), (f(p_i), a_1) \rangle \ \ (f(q) = q) \\
&= \langle (q, a_0), (f(p_i), a_1) \rangle \\
&= (\langle q, f(p_i) \rangle, a_0 \wedge a_1) \\
&= (\langle q, f(p_i) \rangle, a_1)
\end{aligned}$$

doğrusudur. a_1 üyelik dereceli başka doğru olmadığından

$$\bar{f}((L, a_1)) = (\langle q, f(p_i) \rangle, a_1) = (L, a_1)$$

dir.
Buradan taban noktası ve taban doğrusu invaryant kalır.
Bu önermenin tersi doğru değildir. Taban noktası ve taban doğrusu invaryant iken üyelik dereceleri farklı ya da eşit olabilir.

b) $a_0 \neq a_1 = a_2$ olsun.
Taban noktası (q, a_0) ın görüntüsü $\bar{f}(q, a_0) = (f(q), a_0)$ dır. $[\mathcal{P}, \lambda]$ da a_0 üyelik dereceli başka nokta olmadığından, $(f(q), a_0)$ taban noktası olmak zorundadır.
$f(q) = q$ olduğundan $\bar{f}(q, a_0) = (f(q), a_0) = (q, a_0)$ dır.
$(q, a_0) \circ (L, a_1)$ ve $\bar{f}$ izomorfizm olduğundan $\bar{f}(q, a_0) \circ \bar{f}(L, a_1)$ dir.
Buradan (q, a_0) taban noktası $(f(L), a_1)$ üzerindedir.

$$\begin{aligned}
\bar{f}(L, a_1) &= \bar{f}(\langle (q, a_0), (p_i, a_1) \rangle) \\
&= \left\langle \bar{f}(q, a_0), \bar{f}(p_i, a_1) \right\rangle \\
&= \langle (f(q), a_0), (f(p_i), a_1) \rangle \\
&= \langle (q, a_0), f(p_i, a_1) \rangle \\
&= (q \cup f(p_i), a_0 \wedge a_1) \\
&= (q \cup f(p_i), a_1)
\end{aligned}$$

$$(q, a_0) \circ (L, a_1) \Rightarrow (f(q), a_0) \circ (f(L), a_1) = (f(L), a_2)$$

$f(L) = q \cup f(p_i)$ olduğundan taban doğrusu taban noktasından geçen doğruya dönüşmek zorundadır.
Aşağıdaki teorem taban noktası invaryant iken, $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun özelliklerini ifade eder.

Teorem 6.7 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rcll} \lambda: \quad PG(V) & \rightarrow & [0,1] & \\ q & \rightarrow & a_0 & \\ p & \rightarrow & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ p & \rightarrow & a_2 & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \rightarrow \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \rightarrow [\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu kolinasyon altında taban noktası invaryant iken

***a)** Taban doğrusu da invaryant ise en fazla üç üyelik derecesi oluşur.*

***b)** Taban doğrusu taban noktasından geçen, taban doğrusundan farklı bir doğruya dönüşürse uzayda en fazla iki üyelik derecesi oluşur ve $a_0 \geq a_1 = a_2$ sağlanır.*

***c)** Taban doğrusu taban noktasından geçmeyen bir doğruya dönüşmez.*

İspat **a)** $\bar{f}(q, a_0) = (q, a_0)$ olsun.
$(p, a_1) \circ (L, a_1)$, $\bar{f}(p, a_1) = (f(p), a_1) \circ L$ dir.
$a_0 \neq a_1 \neq a_2$ alınırsa üç farklı üyelik derecesi oluşur.

b) $\bar{f}(q, a_0) = (q, a_0)$ olsun.
Taban noktası taban doğrusu üzerinde $(q, a_0) \circ (L, a_1)$ olduğundan ve $\bar{f}$ fuzzy izomorfizm olduğundan, taban noktasının görüntüsü de taban doğrusunun görüntüsü üzerindedir.
$\bar{f}(q, a_0) = (q, a_0) \circ \bar{f}(L, a_1) = (f(L), a_1)$ dir.
$L \neq f(L)$ olduğundan ve taban doğrusu üzerinde olmayan a_2 üyelik dereceli noktalardan geçtiğinden $f(L)$ doğrusunun üyelik derecesi a_2 olur.
Ancak $\bar{f}(L, a_1) = (f(L), a_1) = (f(L), a_2)$ dir.
Bu durumda $a_1 = a_2$ elde edilir.

c) $(q, a_0) \circ (L, a_1)$ iken $\bar{f}$ izomorfizm olduğundan
$\bar{f}(q, a_0) \circ \bar{f}(L, a_1)$ ve $(q, a_0) \circ (f(L), a_1)$ dir.
Taban noktası taban doğrusu üzerinde olduğundan görüntüsü de taban doğrusunun görüntüsü üzerindedir. Ancak taban noktası invaryant olduğundan görüntü doğrusu taban noktasından geçmek zorundadır.
Taban noktası görüntü doğrusu üzerindedir.

Teorem 6.8 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rllll} \lambda: & PG(V) & \rightarrow & [0,1] & \\ & q & \rightarrow & a_0 & \\ & p & \rightarrow & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \rightarrow & a_2 & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \rightarrow \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \rightarrow [\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu kolinasyon altında taban noktası invaryant olmasın ve taban doğrusu üzerinde bir noktaya dönüşsün.

a) *$\overline{f}$ kolinasyonu altında taban doğrusu invaryant ise $a_0 = a_1 \geq a_2$ sağlanır.*

b) *$\overline{f}$ kolinasyonu altında taban noktası taban doğrusu üzerinde kendisinden farklı bir noktaya dönüşsün o zaman uzayda bir tek üyelik derecesi oluşur.*

İspat **a)** $\bar{f}(q, a_0) = (f(q), a_1)$
$(q, a_0) \circ (L, a_1)$ iken $\bar{f}$ izomorfizm olduğundan

$$\bar{f}(q, a_0) \circ \bar{f}(L, a_1)$$

$$(f(q), a_1) \circ (f(L), a_1)$$

Buradan $a_0 = a_1$ elde edilir. Taban doğrusu üzerinde (p, a_1) noktaları yine taban doğrusu üzerindeki $(p^{'}, a_1)$ noktaları ile eşleşir.

b) $(q, a_0) \circ (L, a_1)$ iken $\bar{f}$ izomorfizm olduğundan $\bar{f}(q, a_0) \circ \bar{f}(L, a_1)$
Buradan $a_0 = a_1$ dir.
(L, a_1) üzerindeki taban noktasından farklı (p, a_1) noktaları a_2 üyelik dereceli noktalara dönüştüğünden $a_1 = a_2$ dir. O zaman $a_0 = a_1 = a_2$ elde edilir.

Teorem 6.9 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rllll} \lambda: & PG(V) & \rightarrow & [0,1] & \\ & q & \rightarrow & a_0 & \\ & p & \rightarrow & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \rightarrow & a_2, & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \rightarrow \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \rightarrow [\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu kolinasyon altında taban noktası taban doğrusu üzerinde olmayan bir noktaya dönüşsün. O zaman uzayda bir tek üyelik derecesi oluşur.

İspat Taban noktası, taban doğrusu üzerinde olmayan bir noktaya dönüştüğü için $\bar{f}(q, a_0) = (f(q), a_2)$ olduğundan $f(q)$, L doğrusu üzerinde değildir.
f izomorfizm olduğundan $a_0 = a_2$ dir.
Uzayda üyelik dereceleri arasındaki $a_0 \geq a_1 \geq a_2$ şartından

$$a_0 = a_1 = a_2$$

elde edilir.
Sonuç : Taban noktası taban doğrusu üzerinde kendisinden farklı bir noktaya dönüşürse f altında taban doğrusu invaryant kalmaz.
İspat $(q, a_0) \circ (L, a_1)$ olduğundan ve $f(q)$, L doğrusu üzerinde olmadığından $f(q) \circ L'$, $L' \neq L$ dir.
$L = q \cup p$ ve $q, p \circ L$
$f(L) = f(q) \cup f(p) \neq L$ olduğundan L doğrusu invaryant kalmaz.

Teorem 6.10 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rcll} \lambda : \; PG(V) & \rightarrow & [0,1] & \\ q & \rightarrow & a_0 & \\ p & \rightarrow & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ p & \rightarrow & a_2 & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \rightarrow \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \rightarrow [\mathcal{P}, \lambda]$ fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu durumda

a) *$\mathcal{P}$ projektif düzleminde f kolinasyonu altında p ve q noktaları invaryant ise $[\mathcal{P}, \lambda]$ da (p, α) ve (q, β) fuzzy noktalarının ürettiği fuzzy doğru $\bar{f}$ kolinasyonu altında invaryant kalır.*

b) *$\mathcal{P}$ projektif düzleminde L ve M, f kolinasyonu altında değişmez kalan doğrular ise $[\mathcal{P}, \lambda]$ da (L, α) ve (M, β) fuzzy doğrularının arakesiti $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun bir değişmez fuzzy noktasıdır.*

c) *L doğrusu $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde f kolinasyonu altında nokta-nokta invaryant ise, (L, β) fuzzy doğrusu da $[\mathcal{P}, \lambda]$ da $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında nokta-nokta invaryanttır.*

d) *L_1 ve L_2 doğruları f kolinasyonu altında nokta-nokta invaryant ise $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu $[\mathcal{P}, \lambda]$ nın her noktasını invaryant bırakır.*

e) *$\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde p noktasından geçen doğrular f kolinasyonu altında invaryant ise $[\mathcal{P}, \lambda]$ da (p, α) fuzzy nokytasından geçen fuzzy doğrular invaryanttır.*

f) *p_1 ve p_2 noktaları $\mathcal{P}$ projektif düzleminde f kolinasyonu altında doğru-doğru invaryant ise $[\mathcal{P}, \lambda]$ nın her doğrusu $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.*

İspat **a)** (p,α) ve (q,β), $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında değişmez kalan fuzzy noktalar olsun.
Bu durumda $\bar{f}(p,\alpha)=(f(p),\alpha)=(p,\alpha)$ ve $\bar{f}(q,\beta)=(f(q),\beta)=(q,\beta)$ olur.

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\langle(p,\alpha),(q,\beta)\rangle) &= \bar{f}(p\cup q,\alpha\wedge\beta)\\
&= (f(p\cup q),\alpha\wedge\beta)\\
&= (f(p)\cup f(q),\alpha\wedge\beta) \quad (f\ izomorfizm)\\
&= (p\cup q,\alpha\wedge\beta) \quad (p\ ve\ q\ noktalar\ invaryant)\\
&= \langle(p,\alpha),(q,\beta)\rangle
\end{aligned}$$

$(\langle pq\rangle\,,\alpha\wedge\beta)$ fuzzy doğrusu $\bar{f}$ kolinasyonu altında invaryant kalır.

b) (L,α) ve (M,β), $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında değişmez kalan fuzzy doğrular olsun.
Bu durumda $\bar{f}(L,\alpha)=(L,\alpha)$ ve $\bar{f}(M,\beta)=(M,\beta)$ olur.

$$\begin{aligned}
\bar{f}((L,\alpha)\cap(M,\beta)) &= \bar{f}(L\cap M),\alpha\wedge\beta)\\
&= (f(L\cap M),\alpha\wedge\beta)\\
&= (f(L)\cap f(M),\alpha\wedge\beta) \quad (f\ kolinasyon)\\
&= (L\cap M,\alpha\wedge\beta) \quad (L\ ve\ M\ invaryant\ )
\end{aligned}$$

$(L\cap M,\alpha\wedge\beta)$ fuzzy noktası $\bar{f}$ kolinasyonu altında invaryant kalır.

c) L üzerinde $\forall p$ için $f(p)=p$ dir. $\forall(p,\alpha)\circ(L,\beta)$ için $\bar{f}(p,\alpha)=(p,\alpha)$

$$\bar{f}(p,\alpha)=(f(p),\alpha),\ p\circ L$$

f kolinasyonu L doğrusunu nokta-nokta invaryant bıraktığından $f(p)=p$ dir.
Yani (L,β) nokta- nokta invaryanttır.

d) c) şıkkından (L_1,α_1) ve (L_2,α_2) doğruları $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında nokta- nokta invaryanttır.
(p,μ) ø(L_1,α_1) ve (L_2,α_2) olsun.
(p,μ) noktasından geçen iki farklı fuzzy doğru (M_1,β_1) ve (M_2,β_2) olsun.
$\forall x_1,x_2\circ M_1$ için $x_1\circ L_1$, L_1 nokta- nokta değişmez olduğundan $f(x_1)=(x_1)$
$x_2\circ L_2$ ve L_2 nokta-nokta değişmez olduğundan

$$f(x_2)=(x_2),\ f(M_1)=(M_1)$$

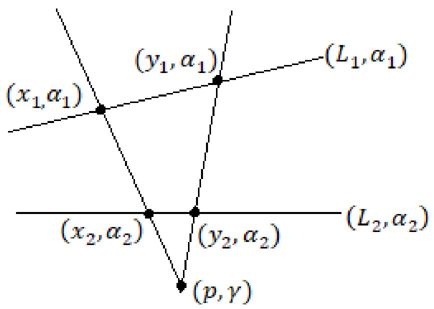
(L_i,α_i), $i=1,2$ doğruları f kolinasyonu altında nokta-nokta invaryant olduğundan

$$\bar{f}(x_i,\beta_i)=(x_i,\beta_i)\ ve\ \bar{f}(y_i,\gamma_i)=(y_i,\gamma_i),\ i=1,2$$

dir.

$$\begin{aligned}
(p,\mu) &= \langle (x_1,\beta_1),(x_2,\beta_2)\rangle \cap \langle (y_1,\gamma_1),(y_2,\gamma_2)\rangle \\
&= (x_1x_2,\beta_1\wedge\beta_2)\cap(y_1y_2,\gamma_1\wedge\gamma_2) \\
\bar{f}(p,\mu) &= \bar{f}((x_1x_2,\beta_1\wedge\beta_2)\cap(y_1y_2,\gamma_1\wedge\gamma_2)) \\
&= \bar{f}((x_1x_2\cap y_1y_2),\beta\wedge\gamma),\ \beta_1\wedge\beta_2=\beta,\gamma_1\wedge\gamma_2=\gamma \\
&= (f(x_1x_2\cap y_1y_2),\beta\wedge\gamma) \\
&= (f(x_1x_2)\cap f(y_1y_2),\beta\wedge\gamma),\ (f\ kolinasyon) \\
&= (f(x_1)f(x_2)\cap f(y_1)f(y_2),\beta\wedge\gamma) \\
&= (x_1x_2\cap y_1y_2,\beta\wedge\gamma) \\
&= (p,\mu)
\end{aligned}$$

elde edilir (Şekil 6.7).



Şekil 6.7 $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında (L,β) doğruları nokta-nokta invaryant

e) $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde p noktasından geçen doğrular f kolinasyonu altında invaryant olsun.
Yani $\forall L \circ p$ için $f(L)=L$ dir. $\forall (L,\beta)\circ(p,\alpha)$ için

$$\bar{f}(L,\beta)=(f(L),\beta)=(L,\beta)$$

elde edilir.

f) p_1 ve p_2 noktaları $\mathcal{P}$ projektif düzleminde f kolinasyonu altında doğru-doğru invaryant olsun. e) şıkkından (p_i,α_i) noktalarından geçen her fuzzy doğru invaryanttır.
$(M,\alpha)=(p_1,\alpha_1)\cup(p_2,\alpha_2),\alpha=\alpha_1\wedge\alpha_2$ olsun.

$$f(M,\alpha)=(M,\alpha)$$

(p_1, α_1) ve $p_2, \alpha_2)$ noktalarından geçmeyen bir (L, β) fuzzy doğrusunu alalım.
$(L, \beta) = (x_1, \beta_1) \cap (x_2, \beta_2), \beta = \beta_1 \wedge \beta_2$ olmak üzere
$(p_1p_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap (x_1x_2, \beta_1 \wedge \beta_2) = (q, \mu)$ noktasını alalım.
$(M, \alpha) \cap (L, \beta) = (q, \mu), \mu = \alpha \wedge \beta$
$(q, \mu) \circ (M, \alpha)$ ve (M, α) invaryant olduğundan (q, μ) dan geçen her doğru invaryant olur.
$(q, \mu) \circ (L, \beta)$, f kolinasyonu altında (q, μ) dan geçen her doğru invaryant olduğundan
$f(x_1, \beta_1) = (x_1, \beta_1), f(x_2, \beta_2) = (x_2, \beta_2)$ olur.

$$
\begin{aligned}
(L, \beta) &= (x_1, \beta_1) \cup (x_2, \beta_2) \\
&= (x_1x_2, \beta_1 \wedge \beta_2) \\
\bar{f}(L, \beta) &= \bar{f}((x_1, \beta_1) \cup (x_2, \beta_2)) \\
&= \bar{f}(x_1x_2, \beta_1 \wedge \beta_2) \\
&= (f(x_1x_2), \beta_1 \wedge \beta_2) \\
&= (f(x_1)f(x_2), \beta_1 \wedge \beta_2),\ (f\ kolinasyon) \\
&= (x_1x_2, \beta_1 \wedge \beta_2) \\
&= (x_1, \beta_1) \cup (x_2, \beta_2) \\
&= (L, \beta)
\end{aligned}
$$

Örnek 6.4

$$N = n_0, n_1, ..., n_6$$
$$L_i = n_i, n_{i+1}, n_{i+3} \textit{ (mod 7)}$$
$$n_i \circ L_i$$

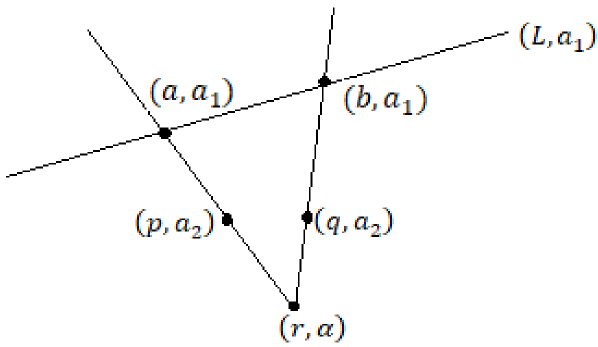
olmak üzere $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir Fano düzlemi olsun. Fano düzleminin noktaları arasında tanımlı
$f : N \to N, f(n_i) = n_{i+1}, i = 0, 1, ..., 6\ (mod\ 7)$ kolinasyonu göz önüne alınsın.
Taban düzlemi bu Fano düzlemi olan $[P, \lambda]$ fuzzy Fano projektif düzlemindeki f yardımıyla tanımlanan $\bar{f} : [P, \lambda] \to [P, \lambda]$ fuzzy kolinasyonun sabit noktası yoktur. Çünkü $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun tanımında

$$\bar{f}(n_i, \alpha) = (f(n_i), \alpha) = (n_{i+1}, \alpha),\ \alpha \in (0, 1],\ i = 0, 1, ..., 6$$

dir. Buradan görüldüğü gibi herhangi bir (n_i, α) fuzzy noktası kendisinden farklı bir fuzzy noktaya gitmektedir.

Teorem 6.11 *$[P, \lambda]$ fuzzy projektif düzleminin taban projektif düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ olsun. Taban projektif düzlemindeki f kolinasyonu yardımıyla tanımlanan $[P, \lambda]$ daki fuzzy projektif düzleminin fuzzy kolinasyonu $\bar{f} : [P, \lambda] \to [P, \lambda]$ verilsin.*
Taban projektif düzleminde f kolinasyonu altında L doğrusu nokta-nokta invaryant ve L üzerinde olmayan farklı iki nokta f altında invaryant kalıyorsa, o zaman $\bar{f} : [P, \lambda] \to [P, \lambda]$ fuzzy birim kolinasyondur.

İspat Taban projektif düzleminde tanımlanan bir f kolinasyonu bir L doğrusunu nokta-nokta invaryant ve L üzerinde olmayan p ve q noktaları da invaryant bıraksın. O zaman Teorem 6.10 c) şıkkından $\bar{f}(p, a_2) = (p, a_2)$ ve $\bar{f}(q, a_2) = (q, a_2)$ dir.
Teorem 6.10 d) şıkkından $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu her noktayı invaryant bırakır. Böylece $\bar{f}$ birim kolinasyondur (Şekil 6.8).



Şekil 6.8 $\bar{f}$ altında invaryant fuzzy noktalar

Teorem 6.12 *$\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu bir fuzzy noktasını doğru-doğru invaryant bırakırsa bu noktadan geçmeyen herhangi bir doğruyu nokta-nokta invaryant bırakır.*

İspat (p, α) , $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında doğru-doğru invaryant fuzzy nokta olsun.
(L, β) da (p, α) dan geçmeyen fuzzy doğru olsun.

Durum 1: Varsayalım ki $\bar{f}(L, \beta) = (L, \beta)$ olsun.
Taban düzleminde her $x \circ L$ noktası $x = px \cap L$ olarak verilsin.

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(x,\gamma) &= (f(px \cap L),\gamma) \\
&= (f(px) \cap f(L),\gamma), \quad (f,[P,\lambda]da\ kolinasyon) \\
&= (px \cap L,\gamma) = (x,\gamma)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısı ile (L,β) doğrusu, nokta-nokta invaryanttır.

Durum 2: Varsayalım ki $\bar{f}(L,\beta) \neq (L,\beta)$ olsun.
Bu kolinasyon altında (p,α) dan geçmeyen (L,β) da farklı bir $(L^{'},\beta^{'}), L \neq L^{'}$ doğrusuna dönüşsün.
Bu iki doğrunun ara kesit noktası

$$
\begin{aligned}
(n,\gamma) &= (L,\beta) \cap (L^{'},\beta^{'}), \gamma = \beta \wedge \beta^{'} \\
&= \langle (p,\alpha),(n,\gamma) \rangle \cap f(L,\beta) \\
&= \langle pn, \alpha \wedge \gamma \rangle \cap f(L,\beta) \\
\bar{f}(n,\gamma) &= \bar{f}(pn,\alpha \wedge \gamma) \cap \bar{f}(L^{'},\beta^{'}) \\
&= (f(pn),\alpha \wedge \gamma) \cap (f(L),\beta^{'}) \\
&= (pn,\alpha \wedge \gamma) \cap (f(L),\beta^{'}) \\
&= (pn \cap f(L),\alpha \wedge \gamma \wedge \beta^{'}) \\
&= (n,\beta), \quad (\gamma = \beta \wedge \beta^{'})
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısı ile (L,β) doğrusu, nokta-nokta invaryanttır.

6.4 Fuzzy Projektif Düzlemlerde Merkezsel Kolinasyonlar

Bu bölümde projektif düzlemlerde tanımlanan merkezsel kolinasyonların, fuzzy projektif düzlemlerde karşılık gelen fuzzy merkezsel kolinasyon tanımı verilecek ve bu kolinasyonların özellikleri ayrıntılı biçimde incelenecektir.

Tanım 6.22 *Taban düzlemi* $\mathcal{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *projektif düzlemi olan fuzzy projektif düzlem* $[P,\lambda]$ *olsun.* $[P,\lambda]$ *nın bir* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonu alınsın.*
$[P,\lambda]$ *da bir* (p,α) *fuzzy noktasından geçen her fuzzy doğru* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalıyorsa,* (p,α) *ya* $\bar{f}$ **fuzzy kolinasyonunun merkezi** *denir. Bir merkeze sahip olan fuzzy kolinasyon* **merkezsel fuzzy kolinasyon** *olarak adlandırılır.* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonunun invaryant fuzzy noktalarının oluşturduğu fuzzy doğruya* $\bar{f}$ **fuzzy kolinasyonunun ekseni** *denir.*

(M,α) merkezine ve (e,β) eksenine sahip olan $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonuna $((\mathbf{M},\alpha),(\mathbf{e},\beta))-$ **merkezsel fuzzy kolinasyon** *denir. Merkezsel kolinasyonda merkez eksen üzerinde ise $\bar{f}$ ye* **fuzzy öteleme**, *merkez eksen üzerinde değil ise $\bar{f}$ ye* **fuzzy homoloji** *denir. Özel olarak fuzzy birim kolinasyon için uzayda her fuzzy nokta merkez ve her fuzzy doğru da eksen olarak düşünülebilir. Bu yüzden fuzzy birim kolinasyon hem fuzzy öteleme hem de fuzzy homolojidir.*
Bir $\bar{f}$ fuzzy kolinasyon altında merkezden geçen doğrular invaryant olduğundan merkez, nokta ve görüntüsü fuzzy doğrudaştır. Fakat merkezden geçen doğruların üzerindeki noktalar birbiriyle yer değiştirebilir.

Teorem 6.13 *Fuzzy Fano düzleminin her fuzzy homolojisi bir birim kolinasyondur.*

İspat $[P,\lambda]$ fuzzy Fano düzleminin (M,α) merkezli, (e,β) eksenli homolojisi $\bar{f}$ olsun. $\bar{f}$ fuzzy homoloji olduğundan taban düzleminde merkez eksen üzerinde değildir.
Varsayalım ki $\bar{f}$ birimden farklı bir fuzzy kolinasyon olsun. Merkez ve eksen üzerindeki her nokta invaryanttır. Fano düzleminin bütün noktaları merkezden geçen fuzzy doğrular üzerindedir. Dolayısıyla bu doğruların hepsi eksenle kesiştiğinden iki noktası invaryant kalır. Merkezden geçen bu doğruların birini merkez, diğeri de eksen üzerindeki nokta olduğundan $\bar{f}$ altında invaryanttır. Geriye M den geçen doğru üzerinde görüntüsü belli olmayan bir nokta kalır. Bu da merkez nokta ve görüntüsü doğrudaş olduğundan kendisine dönüşmek zorundadır. Bu durumda o nokta da invaryant kalır. Dolayısıyla her nokta invaryant kalır. $\bar{f}$ fuzzy birim kolinasyondur.

Teorem 6.14 *Fuzzy Fano düzleminin birimden farklı bir tek fuzzy merkezsel kolinasyonu vardır.*

İspat $\bar{f}$, Fuzzy Fano düzleminin bir fuzzy merkezsel kolinasyonu olsun. Bir önceki teoremden $\bar{f}$ fuzzy homoloji ise $\bar{f}$ birim fuzzy kolinasyondur.
Varsayalım ki $\bar{f}$ fuzzy öteleme olsun.
Merkez eksen üzerindedir. Merkez ve eksen üzerindeki noktalar invaryanttır. Eksen dışındaki hehangi bir noktanın görüntüsü, kendisini merkezle birleştiren bir doğru üzerinde olmak zorundadır. Merkez kendisine dönüştüğünden birbirine eşleşen iki nokta bulunmaktadır. Nokta kendisine dönüşürse $\bar{f}$ birim fuzzy kolinasyon olur ya da diğer noktaya dönüşür ise birimden farklı bir tek merkezsel fuzzy kolinasyon vardır.
Sonuç Fuzzy Fano düzleminin birimden farklı bir tek fuzzy ötelemesi vardır.

Teorem 6.15 *Taban projektif düzleminde* $f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \rightarrow \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *,* M *merkezli kolinasyon olmak üzere* $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda] \rightarrow [\mathcal{P}, \lambda]$ *merkezsel fuzzy kolinasyonu verilsin.*

a) *Merkez,* $\bar{f}$ *merkezsel fuzzy kolinasyonu altında invaryanttır.*

b) *Eksen,* $\bar{f}$ *merkezsel fuzzy kolinasyonunun altında invaryanttır.*

İspat **a)** Merkezin tanımından merkezden geçen fuzzy doğrular invaryanttır.

$$
\begin{aligned}
(M, \alpha) &= (L_1, \beta_1) \cap (L_2, \beta_2) \\
&= (L_1 \cap L_2, \beta_1 \wedge \beta_2) \\
\bar{f}(M, \alpha) &= (f(M), \alpha) \\
&= \bar{f}(L_1 \cap L_2, \beta_1 \wedge \beta_2) \\
&= (f(L_1 \cap L_2), \beta_1 \wedge \beta_2) \\
&= (f(L_1) \cap f(L_2), \alpha), \quad \beta_1 \wedge \beta_2 = \alpha \\
&= (L_1 \cap L_2, \alpha) \\
&= (M, \alpha)
\end{aligned}
$$

b) Eksen tanımından eksen üzerindeki her (p_i, α_i), $i = 1, 2, ...n$ için

$$\bar{f}(p_i, \alpha_i) = (p_i, \alpha_i), i = 1, 2$$
$$e = p_1 \cup p_2 \text{ ve } (e, \beta) = \langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle$$

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(e, \beta) &= \bar{f}(p_1 \cup p_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2) \\
&= (f(p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2) \\
&= (f(p_1) \cup f(p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2), \quad (f,\ e\ eksenli\ merkezsel\ kolinasyon) \\
&= (p_1 \cup p_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2) \\
&= (e, \alpha_1 \wedge \alpha_2)
\end{aligned}
$$

Teorem 6.16 $\bar{f}$*, bir* (M, α) *merkezli fuzzy kolinasyon olsun. Eğer* $\bar{f}$*,merkezden geçmeyen iki farklı doğruyu invaryant bırakırsa* $\bar{f}$ *birim fuzzy kolinasyondur.*

İspat (L_1, β_1) ve (L_2, β_2), $[P, \lambda]$ da merkezden geçmeyen iki farklı invaryant fuzzy doğru olsun.

Teorem 6.5 b) şıkkından bu doğruların arakesit noktası $\bar{f}$ altında invaryant kalır.

$\bar{f}$ altında merkez invaryant olduğundan ve merkezden geçen her doğru invaryant olduğundan (L_1, β_1) ve (L_2, β_2) ile (M, α) dan geçen her fuzzy doğrunun arakesit noktası $\bar{f}$

altında invaryanttır. Böylece merkez (L_i, β_i) üzerindeki her nokta invaryant olduğundan ve Teorem 6.11 den nokta-nokta invaryant kalan bir fuzzy doğru üzerinde olmayan iki fuzzy nokta invaryant kaldığından $\bar{f}$ fuzzy birim kolinasyondur.

Teorem 6.17 $\mathcal{FP} = (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ)$ *bir fuzzy projektif düzlem olsun.*

$$\begin{array}{rlcll} \lambda: & PG(V) & \to & [0,1] & \\ & q & \to & a_0 & \\ & p & \to & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & a_2 & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

fuzzy projektif düzlemi ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2$ *şartı altında*
$f : (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ) \to (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ)$ *kolinasyonu verilsin.*
$\bar{f}$ *de bir* $e-$ *ekseninden geçen,* (M, a_0) *merkezli* $\mathcal{FP}$ *fuzzy projektif düzleminin bir fuzzy kolinasyonu olsun.*

a) f *kolinasyonunun merkezi* $M \circ L$ *ve* M *øe iken* (q, a_0) *fuzzy nokta ise* M *øe,* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonunun ekseninin olması için* $a_1 = a_2$ *olmalıdır.*

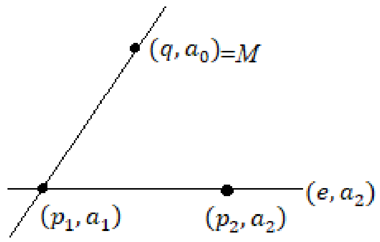
b) f *kolinasyonu altında merkezi* M *ø*L *,* M *øe ve* $f(e) = e$ *ise* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonunun ekseninin olması için* (M, a_2) *merkez olmalıdır.*

c) M *ø*L *ve* $f(L) \neq L$ *için* $L_1 \cap f(L_1) = n_1$ *noktası verilsin.* $\bar{f}$ *fuzzy kolinasyonunun ekseninin olması için* $a_1 = a_2$ *olmalıdır.*

İspat **a)** f kolinasyonunun merkezi $M \circ L$ ve M øe iken (q, a_0) fuzzy noktası verilsin.
Durum 1 : $(p_1, a_1) \circ (e, a_2)$ ve $(p_2, a_2) \circ (e, a_2)$ noktaları alınsın. $p_1 = qp_1 \cap e$ olsun.

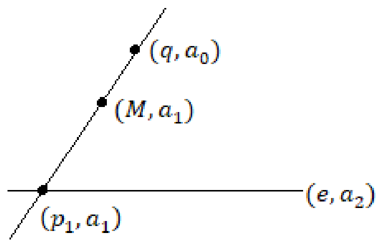
$$\bar{f}(p_1, a_1) = \bar{f}((qp_1, a_1) \cap (e, a_2)) = (qp_1 \cap e, a_2) = (p_1, a_2)$$

Bu durumda $a_1 = a_2$ eşitliği sağlanır ve (e, a_2), $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun eksenidir (Şekil 6.9).



Şekil 6.9 Eksen üzerinde olmayan merkez, taban noktası

Durum 2 : f kolinasyonunun merkezi $M \circ L$, (M,a_1) ve M øL iken $f(e) = e$ doğrusunun $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun ekseni olması için merkez (M,a_1) noktasının taban noktasından farklı ve $M \circ L$ doğrusunun taban doğrusu olmalıdır (Şekil 6.10).



Şekil 6.10 Eksen üzerinde olmayan, taban noktasından farklı merkez

b) f kolinasyonu altında merkezi M øL, M øe ve $f(e) = e$ olsun. $x \circ e$ için x noktasının üyelik derecesi a_1 veya a_2 olabilir. $x = Mx \cap e$ için $f(x) = f(Mx) \cap f(e)$, x noktası eğer a_1 üyelik derecesine sahip ise

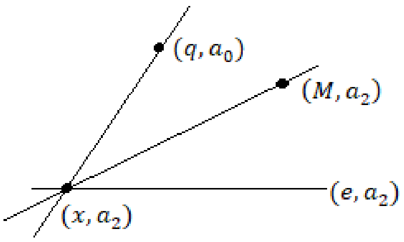
$$\begin{aligned} \bar{f}(x,a_1) &= \bar{f}((Mx,a_2) \cap (e,a_2)) \\ &= \bar{f}(Mx,a_2) \cap \bar{f}(e,a_2) \\ &= (Mx,a_2) \cap (e,a_2) \\ &= (Mx \cap e,a_2) \end{aligned}$$

eşitliğinden $a_1 = a_2$ elde edilir.

x noktası eğer a_2 üyelik derecesine sahip ise

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, a_2) &= ((Mx, a_2) \cap (e, a_2) \\ &= (Mx \cap e, a_2) \\ &= (x, a_2)\end{aligned}$$

dir (Şekil 6.11).



Şekil 6.11 Eksen ve taban doğrusu üzerinde olmayan merkez

c) $M \not{o} L$ ve $f(L) \neq L$ için $L_1 \cap f(L_1) = n_1$ noktası verilsin.
$\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında, (n_1, α) fuzzy noktası invaryanttır.
$n_1 = Mn_1 \cap L_1$ noktası $\bar{f}$ kolinasyonu altında,

$$\begin{aligned}\bar{f}(n_1, \alpha) &= \bar{f}(Mn_1, a_2) \cap \bar{f}(L_1, a_2) \\ &= (Mn_1, a_2) \cap (\bar{f}(L_1), a_2) \\ &= (Mn_1 \cap \bar{f}(L_1), a_2)\end{aligned}$$

Buradan $\alpha = a_2$ elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}(M, a_0) = (M, a_0) \\ \bar{f}(n_1, a_2) = (n_1, a_2)\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (e, a_2) = (Mn_1, a_2)$$

$\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.
$x \circ Mn_1$ noktası alınsın.
$(x, \alpha) \circ (Mn_1, a_2) \Leftrightarrow \alpha = a_2$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, a_2) &= \bar{f}(Mn_1 \cap L_2, a_2) \\ &= (Mn_1, a_2) \cap (f(L_2), a_2) \\ &= (Mn_1 \cap (f(L_2), a_2) \\ &= (x, a_2)\end{aligned}$$

Bu durumda Mn_1 doğrusu $e-$ eksen doğrusudur.
$x \circ Mn_1$, $(x, a_1) = (Mn_1 \cap L_2, a_2)$ için

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, a_1) &= \bar{f}((Mn_1, a_2) \cap (L_2), a_2) \\ &= \bar{f}(Mn_1, a_2) \cap \bar{f}(L_2, a_2) \\ &= (Mn_1 \cap (f(L_2), a_2) \end{aligned}$$

Bu durumda $a_1 = a_2$ elde edilir.
Sonuç $\mathcal{FP} = (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ)$ bir fuzzy projektif düzlem olsun.

$$\begin{array}{rccll} \lambda: & PG(V) & \to & [0,1] & \\ & q & \to & a_0 & \\ & p & \to & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & a_2, & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

fuzzy projektif düzlemi ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2$ şartı altında
$\bar{f} : (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ) \to (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ)$ birimden farklı bir fuzzy kolinasyonu verilsin. Merkez noktası var iken, eksenin var olabilmesi için $a_1 = a_2$ dir.

Teorem 6.18 *Taban projektif düzlemi $\mathcal{P}$ olan bir $[P, \lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rccll} \lambda: & PG(V) & \to & [0,1] & \\ & q & \to & a_0 & \\ & p & \to & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & a_2, & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ biçiminde tanımlansın. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ bir $(M, e)-$ merkezsel kolinasyon olsun. Bu dönüşüm yardımıyla tanımlanan $\bar{f} : (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ) \to (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ)$ fuzzy kolinasyonu da merkezsel kolinasyondur.

İspat $\mathcal{P}$ projektif düzleminde e eksen olduğundan f merkezsel kolinasyonu altında nokta-nokta invaryanttır. Teorem 6.10 c) şıkkından (e, β) fuzzy doğrusu da $[P, \lambda]$ da $\bar{f}$ altında nokta-nokta invaryanttır. Bu yüzden (e, β) doğrusu $\bar{f}$ altında eksendir.
Benzer biçimde M noktası $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde merkez olduğundan doğru-doğru invaryanttır. Teorem 6.10 e) şıkkından (M, α) fuzzy noktası da $[P, \lambda]$ da $\bar{f}$ altında doğru-doğru invaryant kalır. Böylece (M, α) $\bar{f}$ altında merkezdir. Buradan $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonu M merkez noktalı, e eksene sahip bir merkezsel fuzzy kolinasyondur.
Sonuç $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde f merkezsel kolinasyonuna karşılık gelen $[P, \lambda]$ da bir

merkezsel fuzzy kolinasyon vardır.

Teorem 6.19 *Taban projektif düzlemi $\mathcal{P}$ olan bir $[P,\lambda]$ fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rlcll} \lambda: & PG(V) & \rightarrow & [0,1] & \\ & q & \rightarrow & a_0 & \\ & p & \rightarrow & a_1, & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \rightarrow & a_2, & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$ *biçiminde tanımlansın.* $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ *bir* $(M,e)-$ *merkezsel kolinasyon olsun. Bu dönüşüm yardımıyla tanımlanan* $\bar{f} : (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ) \rightarrow (\mathcal{FN}, \mathcal{FD}, \circ)$ *fuzzy kolinasyonunun merkezinin var olması için gerek ve yeter koşul ekseninin var olmasıdır.*

İspat $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde f kolinasyonunun projektif geometrideki teorem (f in merkezinin olması için gerek ve yeter koşul bir ekseninin var olmasıdır (Kaya, 2005)) ve Teorem 6.18 den $\bar{f}$ altında merkez var ise merkezden geçen doğrular nokta-nokta invaryant olacağından $\bar{f}$ nin merkezi (M,α) olsun. O zaman M, $\mathcal{P}$ de f nin merkezidir. f de merkezi var ise eksenide var olduğundan e doğrusu $\mathcal{P}$ de eksendir. Eksen üzerindeki her nokta invaryant olduğundan Teorem 6.10 c) şıkkından $[P,\lambda]$ da bir (e,β) fuzzy doğrusu nokta-nokta invaryant olacak şekilde vardır ve eksendir.
$\bar{f}$ nin ekseni (e,β) olsun. O zaman e $\mathcal{P}$ de f nin ekseni olduğundan ve projektif geometride ekseni varsa merkezi de var olduğundan M noktası $\mathcal{P}$ de merkezdir. Merkezden geçen her doğru invaryant olduğundan Teorem 6.10 e) şıkkından $[P,\lambda]$ da bir (M,α) fuzzy noktası doğru-doğru invaryant olacak şekilde vardır ve merkezdir.

7. SEZGİSEL FUZZY PROJEKTİF DÜZLEMLERDE DÖNÜŞÜMLER

Sezgisel fuzzy vektör uzayları ayrıntılı bir biçimde Bölüm 5.2 de incelendi. Bu bölümde sezgisel fuzzy vektör uzaylarından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde sezgisel fuzzy izomorfizm, homomorfizm, kolinasyon ve sezgisel fuzzy merkezsel kolinasyon kavramları tanımlanarak bu sezgisel fuzzy dönüşümlerin özellikleri, üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler, invaryant bıraktığı özellikler analiz edilmiş ve düzlemin üyelik dereceleri ile ilgili teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Taban projektif düzleminde kolinasyonların sağladığı bazı özelliklerin karşılık gelen sezgisel fuzzy projektif düzlemde geçerliliği araştırılmıştır. Üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler kolinasyon altında taban noktasının ve taban doğrusunun invaryant olma durumlarına göre teoremlerle incelenmiştir. Merkezsel kolinasyonların sezgisel fuzzy karşılıkları verildikten sonra, merkez nokta ve eksen doğrularının durumlarına göre üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler sunulmuştur.

7.1 Sezgisel Fuzzy Lineer Dönüşümler

Bu bölümde Abdulhalikov'un çalışmalarındaki fuzzy lineer dönüşümler ile ilgili tanım, teorem ve ispatların sezgisel fuzzy karşılıkları sezgisel fuzzy lineer dönüşüm tanımından yararlanılarak verilmektedir (Abdulhalikov, 1998; Santhosh, 2011).

Tanım 7.1 *F cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı V ve W olmak üzere, V den W ya tanımlı lineer dönüşüm T olsun. (V, λ_V, μ_V) ve (W, λ_W, μ_W), F cismi üzerinde birer sezgisel fuzzy vektör uzay olsunlar. $\forall x \in V$ için, $0 \leq \lambda_V(x) + \mu_V(x) \leq 1$ ve $0 \leq \lambda_W(x) + \mu_W(x) \leq 1$ olmak üzere, $\forall x \in V$ için*

$$\lambda_W(T(x)) \geq \lambda_V(x) \quad \textit{ve} \quad \mu_W(T(x)) \leq \mu_V(x)$$

şartları sağlanıyorsa T ye (V, λ_V, μ_V) sezgisel fuzzy vektör uzayından (W, λ_W, μ_W) sezgisel fuzzy vektör uzayına tanımlı **sezgisel fuzzy lineer dönüşüm** *denir.*

Tanım 7.2 *V den W ya tanımlanan sıfır lineer dönüşümü $(V, \lambda_V, \mu_V) \rightarrow (W, \lambda_W, \mu_W)$ sezgisel fuzzy alt uzayları arasında sezgisel fuzzy lineer dönüşüm ise* **sezgisel fuzzy sıfır lineer dönüşümü** *denir.*

Örnek 7.1 *(F, R), $\lambda_F(0) = \lambda_F(1)$ ve $\mu_F(0) = \mu_F(1)$ olacak şekilde R nin sezgisel fuzzy cismi olsun. Eğer $T_1 : R^3 \to R^2$, $T_1(a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3)$ lineer dönüşüm olsun.*

$$\begin{aligned}\mu_{F\times F}(T_1(a_1,a_2,a_3)) &= max\{\mu_F(a_2), \mu_F(a_3)\}\\ &\leq max\{\mu_F(a_1), \mu_F(a_2), \mu_F(a_3)\}\\ &= \mu_{F\times F\times F}(a_1,a_2,a_3)\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\lambda_{F\times F}(T_1(a_1,a_2,a_3)) \geq \lambda_{F\times F\times F}(a_1,a_2,a_3);$$

olduğundan $(T_1, (F \times F \times F, R^3), (F \times F, R^2), (F, R))$ sezgisel fuzzy lineer dönüşümdür (Santhosh, 2011).

Örnek 7.2 *(F, R), $\lambda_F(0) = \lambda_F(1)$ ve $\mu_F(0) = \mu_F(1)$ olacak şekilde R nin sezgisel fuzzy cismi olsun. Eğer $T_2 : R^3 \to R^2$ $T_2(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2, a_1 + a_3)$ şeklinde lineer dönüşüm ise,*

$$\begin{aligned}\mu_{F\times F}(T_2(a_1,a_2,a_3)) &= \mu_{F\times F}(a_1+a_2, a_1+a_3)\\ &\leq max\{\mu_F(a_1), \mu_F(a_2), \mu_F(a_3)\}\\ &= \mu_{F\times F\times F}(a_1,a_2,a_3)\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\lambda_{F\times F}(T_2(a_1,a_2,a_3)) \geq \lambda_{F\times F\times F}(a_1,a_2,a_3)$$

olduğundan $(T_2, (F \times F \times F, R^3), (F \times F, R^2), (F, R))$ sezgisel fuzzy lineer dönüşümdür (Santhosh, 2011).

Önerme 7.1 *Eğer $T : (V, \lambda_V, \mu_V) \to (W, \lambda_W, \mu_W)$ sezgisel fuzzy lineer dönüşüm ise, o zaman $\forall y \in Y$ için, $\lambda_W(0) \geq \lambda_V(y)$ ve benzer şekilde $\mu_W(0) \leq \mu_V(y)$ sağlanır (Santhosh, 2011).*

İspat $\mu_W(0) = \mu_W(T(0)) \leq \mu_V(0) \leq \mu_V(y)$ ve benzer şekilde $\forall x \in W$ için, $\lambda_W(0) = \lambda_W(T(0)) \geq \lambda_V(0) \geq \lambda_V(x)$ elde edilir.

Önerme 7.2 *$\lambda_W(0) \geq \lambda_V(0)$ ve $\mu_W(0) \leq \mu_V(0)$ şartlarını sağlayan (V, λ_V, μ_V) den (W, λ_W, μ_W) ye tanımlanan tüm lineer dönüşümlerin kümesi bir sezgisel fuzzy vektör uzaydır.*

İspat V vektör uzayından W vektör uzayına tanımlı $T = 0$ dönüşümü aşikar lineer dönüşüm olduğundan, bu küme boştan farklıdır. Hipotezden ve sıfırın üyelik derecesinin ait olma üyelik derecesine göre en büyük, ait olmama üyelik derecesine göre en küçük olmasından,

$$\lambda_W(T(x)) = \lambda_W(0) \geq \lambda_V(0) \geq \lambda_V(x) \;\; ve \;\; \mu_W(T(x)) = \mu_W(0) \leq \mu_V(0) \leq \mu_V(x)$$

dir. $T, T^{'}$, V den W ya iki lineer dönüşüm ve $a, b \in F$ olsun. O zaman, (V, λ_V, μ_V) ve (W, λ_W, μ_W) sezgisel vektör uzayı oldduğundan ve yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\lambda_W((aT + bT^{'})(x)) = \lambda_W(aT(x) + bT^{'}(x)) \geq \lambda_W(T(x)) \wedge \lambda(T^{'}(x)) \geq \lambda_V(x)$$

ve

$$\mu_W((aT + bT^{'})(x)) = \mu_W(aT(x) + bT^{'}(x)) \leq \mu_W(T(x)) \vee \mu(T^{'}(x)) \leq \mu_V(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 7.3 *(V, λ_1, μ_1) ve (W, λ_2, μ_2) iki sezgisel fuzzy alt uzay ve $\forall x \in V$ için $f : V \to W$ bir izomorfizm olsun.*
$\bar{f} : (V, \lambda_1, \mu_1) \to (W, \lambda_2, \mu_2)$ $f(x, \lambda_1(x), \mu_1(x)) = (f(x), \lambda_2(f(x)), \mu_2(f(x)))$ biçiminde tanımlı sezgisel fuzzy lineer dönüşümü $\forall x \in V$ için $\lambda_1(x) = \lambda_2(f(x))$ ve $\mu_1(x) = \mu_2(f(x))$ şartlarını sağlıyorsa $\bar{f}$ ye (V, λ_1, μ_1) ve (W, λ_2, μ_2) sezgisel fuzzy alt uzayları arasında **sezgisel fuzzy izomorfizm** *ve bu uzaylara da* **sezgisel fuzzy izomorfiktir** *denir.*

7.2 Sezgisel Fuzzy Vektör Uzaylarından Elde Edilen Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlemlerde Kolinasyonlar

5. Bölümde sezgisel fuzzy vektör uzayından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemde nokta, doğru ve üzerinde bulunma kavramları incelendi. Bu bölümde klasik projektif düzlemdeki kolinasyonların ve kolinasyonların özel bir tipi olan merkezsel kolinasyon kavramlarının sezgisel fuzzy karşılıkları tanım, teorem, sonuçlarla verilmektedir.

Tanım 7.4 $[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]$ *taban düzlemi* $\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *olan ve* $\left[\mathcal{P}',\lambda_{\mathcal{P}'},\mu_{\mathcal{P}'}\right]$ *taban düzlemi* $\mathcal{P}'=\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ'\right)$ *olan herhangi iki sezgisel fuzzy projektif düzlem olsun.* $f:(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)\rightarrow\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ'\right)$ *homomorfizm ve* $\lambda_{\mathcal{P}}(p)=\alpha,\ \mu_{\mathcal{P}}(p)=\beta$ $\lambda_{\mathcal{P}'}(f(p))=\alpha',\ \mu_{\mathcal{P}'}(f(p))=\beta'$ *olmak üzere* $\forall\,(p,\alpha,\beta)\in[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]$ *için*

$$\bar{f}:[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]\rightarrow\left[\mathcal{P}',\lambda_{\mathcal{P}'},\mu_{\mathcal{P}'}\right]$$
$$\bar{f}(p,\alpha,\beta)=(f(p),\alpha',\beta')\ni\alpha\leq\alpha',\beta\geq\beta'$$

biçiminde tanımlanan $\bar{f}$ *dönüşümüne* $[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]$ *den* $\left[\mathcal{P}',\lambda_{\mathcal{P}'},\mu_{\mathcal{P}'}\right]$ *ye sezgisel fuzzy projektif düzlemleri arasında* **f homomorfizminin tanımladığı sezgisel fuzzy homomorfizm** *denir.*

Tanım 7.5 $[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]$ *taban düzlemi* $\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *olan ve* $\left[\mathcal{P}',\lambda_{\mathcal{P}'},\mu_{\mathcal{P}'}\right]$ *taban düzlemi* $\mathcal{P}'=\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ'\right)$ *olan herhangi iki sezgisel fuzzy projektif düzlem olsun.* $f:(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)\rightarrow(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ')$ *bir izomorfizm ve* $\lambda_{\mathcal{P}}(p)=\alpha,\mu_{\mathcal{P}}(p)=\beta,\lambda_{\mathcal{P}'}(f(p))=\alpha',\mu_{\mathcal{P}'}(f(p))=\beta'$ *olmak üzere* $\forall\,(p,\alpha,\beta)\in[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]$ *için*

$$\bar{f}:[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]\rightarrow\left[\mathcal{P}',\lambda_{\mathcal{P}'},\mu_{\mathcal{P}'}\right]$$
$$\bar{f}(p,\alpha,\beta)=(f(p),\alpha',\beta')\ni\alpha=\alpha',\beta=\beta'$$

biçiminde tanımlı dönüşüme $[\mathcal{P},\lambda_{\mathcal{P}},\mu_{\mathcal{P}}]$ *den* $\left[\mathcal{P}',\lambda_{\mathcal{P}'},\mu_{\mathcal{P}'}\right]$ *ye sezgisel fuzzy projektif düzlemler arasında* **f izomorfizminin tanımladığı sezgisel fuzzy izomorfizm** *denir.*

Teorem 7.1 $f:\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)\rightarrow\mathcal{P}'=\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ'\right)$ *bir izomorfizm olsun.* f *izomorfizminin tanımladığı* $\bar{f}$ *için* $\bar{f}:[\mathcal{P},\lambda,\mu]\rightarrow\left[\mathcal{P}',\lambda',\mu'\right]$ *bir sezgisel fuzzy izomorfizm olmak üzere*

a) $[\mathcal{P},\lambda,\mu]$ *da taban noktaları farklı her* (p_1,α_1,β_1) *ve* (p_2,α_2,β_2) *sezgisel fuzzy noktaları için*

$$\bar{f}\left(\langle(p_1,\alpha_1,\beta_1),(p_2,\alpha_2,\beta_2)\rangle\right)=\left\langle\bar{f}\left(p_1,\alpha_1,\beta_1\right),\bar{f}\left(p_2,\alpha_2,\beta_2\right)\right\rangle$$

dir.

b) $[\mathcal{P},\lambda,\mu]$ *da taban doğruları farklı her* (L,γ_1,σ_1) *ve* (M,γ_2,σ_2) *sezgisel fuzzy doğruları için*

$$\bar{f}\left((L,\gamma_1,\sigma_1)\cap(M,\gamma_2,\sigma_2)\right)=\bar{f}\left(L,\gamma_1,\sigma_1\right)\cap\bar{f}\left(M,\gamma_2,\sigma_2\right)$$

dir.

c) $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ *daki* (p, α, β) *sezgisel fuzzy noktası ve* (L, γ, σ) *sezgisel fuzzy doğrusu için* p *taban noktası* L *doğrusu üzerinde değil ise* $\left[\mathcal{P}', \lambda', \mu'\right]$ *de* $\bar{f}\,(p, \alpha, \beta)$ *sezgisel fuzzy noktası* $\bar{f}\,(L, \gamma, \sigma)$ *sezgisel fuzzy doğrusu üzerinde değildir.*

İspat **a)** $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda, \mu] \to \left[\mathcal{P}', \lambda', \mu'\right]$ bir sezgisel fuzzy izomorfizm olsun. $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzleminde taban noktaları farklı (p_1, α_1, β_1) ve (p_2, α_2, β_2) sezgisel fuzzy noktalarını birleştiren sezgisel fuzzy doğru

$$\langle (p_1, \alpha_1, \beta_1), (p_2, \alpha_2, \beta_2) \rangle = \langle (p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2 \rangle$$

dir. Bu noktaların $\bar{f}$ altında görüntüsü

$$\bar{f}\,(p_1, \alpha_1, \beta_1) = \left(f(p_1), \alpha_1', \beta_1'\right), \alpha_1 = \alpha_1', \beta_1 = \beta_1'$$

ve

$$\bar{f}\,(p_2, \alpha_2, \beta_2) = \left(f(p_2), \alpha_2', \beta_2'\right), \alpha_2 = \alpha_2', \beta_2 = \beta_2'$$

dir.

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ ye bir izomorfizm olduğundan $f(p_1) \neq f(p_2)$ dir.

Bu yüzden $\bar{f}\,(p_1, \alpha_1, \beta_1)$ ve $\bar{f}\,(p_2, \alpha_2, \beta_2)$ sezgisel fuzzy noktaları $\left[\mathcal{P}', \lambda', \mu'\right]$ de farklı iki sezgisel fuzzy noktadır. Bu görüntü noktalarının ürettiği doğru

$$\left\langle \bar{f}\,(p_1, \alpha_1, \beta_1), \bar{f}\,(p_2, \alpha_2, \beta_2) \right\rangle = \left\langle \left(f(p_1), \alpha_1', \beta_1'\right), \left((f(p_2), \alpha_2', \beta_2'\right) \right\rangle \qquad (1)$$

olur. Şimdi $\langle (p_1, \alpha_1, \beta_1), (p_2, \alpha_2, \beta_2) \rangle$ doğrusunun görüntüsüne bakılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{f}\,(\langle (p_1, \alpha_1, \beta_1), (p_2, \alpha_2, \beta_2) \rangle) &= \bar{f}\,(\langle (p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2 \rangle) \\ &= (f\,(p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \end{aligned}$$

olur.

$f, \mathcal{P}$ den $\mathcal{P}'$ ye izomorfizm olduğundan $f\,(p_1 \cup p_2) = f\,(p_1) \cup f\,(p_2)$ dir.

$$\begin{aligned} \bar{f}\,(\langle (p_1, \alpha_1, \beta_1), (p_2, \alpha_2, \beta_2) \rangle) &= \left(f\,(p_1 \cup p_2), \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2'\right) \\ &= \left\langle \left(f(p_1), \alpha_1', \beta_1'\right), \left((f(p_2), \alpha_2', \beta_2'\right) \right\rangle \qquad (2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) denklemlerinden

$$\bar{f}\,(\langle (p_1, \alpha_1, \beta_1), (p_2, \alpha_2, \beta_2) \rangle) = \left\langle \bar{f}\,(p_1, \alpha_1, \beta_1), \bar{f}\,(p_2, \alpha_2, \beta_2) \right\rangle \qquad (3)$$

elde edilir.

b) $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda, \mu] \to \left[\mathcal{P}^{'}, \lambda^{'}, \mu^{'}\right]$ bir sezgisel fuzzy izomorfizm olsun. $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzleminde taban doğruları farklı (L, γ_1, σ_1) ve (M, γ_2, σ_2) sezgisel fuzzy doğrularının kesişim noktası

$$(L, \gamma_1, \sigma_1) \cap (M, \gamma_2, \sigma_2) = (L \cap M, \gamma_1 \wedge \gamma_2, \sigma_1 \vee \sigma_2)$$

dir. Bu doğruların $\bar{f}$ altında görüntüsü

$$\bar{f}\,(L, \gamma_1, \sigma_1) = \left(f(L), \alpha_1^{'}, \beta_1^{'}\right), \gamma_1 = \gamma_1^{'}, \sigma_1 = \sigma_1^{'}$$

ve

$$\bar{f}\,(M, \gamma_2, \sigma_2) = \left(f(M), \gamma_2^{'}, \sigma_2^{'}\right), \gamma_2 = \gamma_2^{'}, \sigma_2 = \sigma_2^{'}$$

dir.

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{'}$ ye bir izomorfizm olduğundan $f(L) \neq f(M)$ dir.

Bu yüzden $\bar{f}\,(L, \gamma_1, \sigma_1)$ ve $\bar{f}\,(M, \gamma_2, \sigma_2)$ sezgisel fuzzy doğruları $\left[\mathcal{P}^{'}, \lambda^{'}, \mu^{'}\right]$ de farklı iki sezgisel fuzzy doğrudur. Bu görüntü doğrularının arakesiti olan nokta

$$\begin{aligned} \bar{f}\,(L, \gamma_1, \sigma_1) \cap \bar{f}\,(M, \gamma_2, \sigma_2) &= \left(f\,(L)\,, \gamma_1^{'}, \sigma_1^{'}\right) \cap \left(f\,(M)\,, \gamma_2^{'}, \sigma_2^{'}\right) \\ &= \left(f\,(L) \cap f\,(M)\,, \gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'}, \sigma_1^{'} \vee \sigma_2^{'}\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $(L, \gamma_1, \sigma_1) \cap (M, \gamma_2, \sigma_2)$ arakesit noktasının görüntüsüne bakılırsa,

$$\bar{f}\,((L, \gamma_1, \sigma_1) \cap (M, \gamma_2, \sigma_2)) = \bar{f}\left(L \cap M, \gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'}, \sigma_1^{'} \vee \sigma_2^{'}\right) = \left(f\,(L \cap M)\,, \gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'}, \sigma_1^{'} \vee \sigma_2^{'}\right)$$

olur.

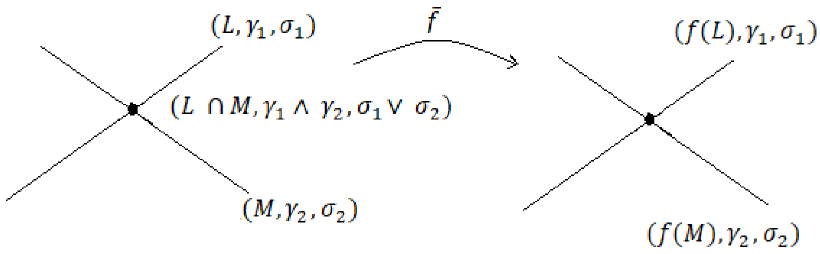
$f, \mathcal{P}$ den $\mathcal{P}^{'}$ ye izomorfizm olduğundan $f\,(L \cap M) = f\,(L) \cap f\,(M)$ dir.

$$\begin{aligned} \bar{f}\,((L, \gamma_1, \sigma_1) \cap (M, \gamma_2, \sigma_2)) &= \bar{f}\,(L \cap M, \gamma_1 \wedge \gamma_2, \sigma_1 \vee \sigma_2) \\ &= \left(f\,(L \cap M)\,, \gamma_1^{'} \wedge \gamma_2^{'}, \sigma_1^{'} \vee \sigma_2^{'}\right) \\ &= \left(f\,(L)\,, \gamma_1^{'}, \sigma_1^{'}\right) \cap \left(f\,(M)\,, \gamma_2^{'}, \sigma_2^{'}\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) denklemlerinden ve $\gamma_i = \gamma_i^{'},\ \sigma_i = \sigma_i^{'},\ i = 1,\ 2$ den

$$\bar{f}\,((L, \gamma_1, \sigma_1) \cap (M, \gamma_2, \sigma_2)) = \bar{f}\,(L, \gamma_1, \sigma_1) \cap \bar{f}\,(M, \gamma_2, \sigma_2) \qquad (3)$$

elde edilir (Şekil 7.1).



Şekil 7.1 $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında iki sezgisel fuzzy doğrunun kesişimi

c) $[\mathcal{P},\lambda,\mu]$ deki (p,α,β) sezgisel fuzzy noktası ve (L,γ,σ) sezgisel fuzzy doğrusu için p taban noktası L doğrusu üzerinde değil iken $\bar{f}\left((p,\alpha,\beta)\right)$ noktasının $\bar{f}\left((L,\gamma,\sigma)\right)$ üzerinde olduğunu varsayalım. O zaman (p,α,β) sezgisel fuzzy noktası da (L,γ,σ) sezgisel fuzzy doğrusu üzerinde değildir.
$\bar{f}\left((p,\alpha,\beta)\right) = \left(f\left(p\right),\alpha,\beta\right)$ noktası $\bar{f}\left((L,\gamma,\sigma)\right) = \left(f\left(L\right),\gamma,\sigma\right)$ doğrusu üzerinde olduğundan $f\left(p\right)\circ f\left(L\right)$ dir. Bu taban düzleminde $f : \mathcal{P}\rightarrow\mathcal{P}'$ ye bir izomorfizm olduğundan $p\circ L$ olmasını gerektirir. Bu da hipotezle çelişir.

Sezgisel vektör uzaydan elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde tanımlı sezgisel fuzzy kolinasyonun taban doğrusu, taban noktası ve üyelik derecelerine bağlı olarak $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant olma özellikleri ayrıntılı biçimde aşağıdaki teoremle incelenmiştir.

Teorem 7.2 *Taban düzlemi $\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P},\lambda,\mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rccl} (\lambda,\mu): & PG(V) & \rightarrow & [0,1]\times[0,1] \\ & q & \rightarrow & (a_0,b_0) \\ & p & \rightarrow & (a_1,b_1), \qquad p\in L\setminus\{q\} \\ & p & \rightarrow & (a_2,b_2), \qquad p\in PG(V)\setminus\{L\} \end{array}$$

$a_0\geq a_1\geq a_2$, $b_0\leq b_1\leq b_2$, $0\leq a_i+b_i\leq 1, i=0,\ 1,\ 2$ *biçiminde tanımlansın.*
$f:\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)\rightarrow\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *bir kolinasyon olmak üzere* $\bar{f}:[\mathcal{P},\lambda,\mu]\rightarrow[\mathcal{P},\lambda,\mu]$ *sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin. O zaman*

a) $a_0\neq a_1\neq a_2$ *ise taban noktası ve taban doğrusu,* $\bar{f}$ *sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.*

b) $a_0\neq a_1=a_2$ *ise* $\bar{f}$ *sezgisel fuzzy kolinasyonu altında, taban noktası invaryant kalır ve taban doğrusu da taban noktasından geçen bir doğruya dönüşür.*

İspat **a)** $a_0 \neq a_1 \neq a_2$ olsun.
Taban noktası (q, a_0, b_0) ın görüntüsü $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (f(q), a_0, b_0)$ dır. $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ de (a_0, b_0) üyelik dereceli başka nokta olmadığından $(f(q), a_0, b_0)$ taban noktası olmak zorundadır $f(q) = q$ olduğundan $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (q, a_0, b_0)$ dır.
Taban doğrusu $(L, a_1, b_1) = \langle (q, a_0, b_0), (p_i, a_1, b_1) \rangle \ni p_i \circ L$ olduğundan ve Teorem 7.1 a) şıkkından

$$\begin{aligned}
\bar{f}((L, a_1, b_1)) &= \left\langle \bar{f}(q, a_0, b_0), \bar{f}(p_i, a_1, b_1) \right\rangle \\
&= \langle (f(q), a_0, b_0), (f(p_i), a_1, b_1) \rangle, \quad (f(q) = q) \\
&= \langle (q, a_0, b_0), (f(p_i), a_1, b_1) \rangle \\
&= (\langle q, f(p_i) \rangle, a_0 \wedge a_1, b_0 \vee b_1) \\
&= (\langle q, f(p_i) \rangle, a_1, b_1)
\end{aligned}$$

doğrusudur. (a_1, b_1) üyelik dereceli başka doğru olmadığından

$$\bar{f}((L, a_1, b_1)) = (\langle q, f(p_i) \rangle, a_1, b_1) = (L, a_1, b_1)$$

dir.
Buradan taban noktası ve taban doğrusu invaryant kalır.
Bu önermenin tersi doğru değildir. Taban noktası ve taban doğrusu invaryant iken üyelik dereceleri farklı ya da eşit olabilir.
b) $a_0 \neq a_1 = a_2$ olsun.
Taban noktası (q, a_0, b_0) ın görüntüsü $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (f(q), a_0, b_0)$ dır. $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ da (a_0, b_0) üyelik dereceli başka nokta olmadığından, $(f(q), a_0, b_0)$ taban noktası olmak zorundadır.
$f(q) = q$ olduğundan $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (f(q), a_0, b_0) = (q, a_0, b_0)$ dır.
$(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1)$ ve $\bar{f}$ izomorfizm olduğundan $\bar{f}(q, a_0, b_0) \circ \bar{f}(L, a_1, b_1)$ dir.
Buradan (q, a_0, b_0) taban noktası $(f(L), a_1, b_1)$ üzerindedir.

$$\begin{aligned}
\bar{f}(L, a_1, b_1) &= \bar{f}(\langle (q, a_0, b_0), (p_i, a_1, b_1) \rangle) \\
&= \left\langle \bar{f}(q, a_0, b_0), \bar{f}(p_i, a_1, b_1) \right\rangle \\
&= \langle (f(q), a_0, b_0), (f(p_i), a_1, b_1) \rangle \\
&= \langle (q, a_0, b_1), (f(p_i), a_1, b_1) \rangle \\
&= (q \cup f(p_i), a_0 \wedge a_1, b_0 \vee b_1) \\
&= (q \cup f(p_i), a_1, b_1)
\end{aligned}$$

$$(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1) \Rightarrow (f(q), a_0, b_0) \circ (f(L), a_1, b_1) = (f(L), a_2, b_2)$$

$f(L) = q \cup f(p_i)$ olduğundan taban doğrusu taban noktasından geçen doğruya dönüşmek zorundadır.

Aşağıdaki teorem taban noktası invaryant iken, $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun özelliklerini ifade eder.

Teorem 7.3 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$
\begin{array}{rccll}
(\lambda, \mu): & PG(V) & \to & [0,1] \times [0,1] & \\
 & q & \to & (a_0, b_0) & \\
 & p & \to & (a_1, b_1), & p \in L \setminus \{q\} \\
 & p & \to & (a_2, b_2), & p \in PG(V) \setminus \{L\}
\end{array}
$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2, 0 \leq a_i + b_i \leq 1, i = 0, 1, 2$ *biçiminde tanımlansın.*
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \to \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *bir kolinasyon olmak üzere* $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda, \mu] \to [\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ *sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu kolinasyon altında taban noktası invaryant iken*

a) *Taban doğrusu da invaryant ise en fazla üç üyelik derecesi oluşur.*

b) *Taban doğrusu taban noktasından geçen, taban doğrusundan farklı bir doğruya dönüşürse uzayda en fazla iki üyelik derecesi oluşur,* $a_0 \geq a_1 = a_2$ *ve* $b_0 \leq b_1 = b_2$ *sağlanır.*

c) *Taban doğrusu taban noktasından geçmeyen bir doğruya dönüşmez.*

İspat **a)** $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (q, a_0, b_0)$ olsun.
$(p, a_1, b_1) \circ (L, a_1, b_1)$ iken, $\bar{f}(p, a_1, b_1) = (f(p), a_1, b_1) \circ L$ dir.
$a_0 \neq a_1 \neq a_2$ alınırsa üç farklı üyelik derecesi oluşur.

b) $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (q, a_0, b_0)$ olsun.
Taban noktası taban doğrusu üzerinde $(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1)$ olduğundan ve $\bar{f}$ sezgisel fuzzy izomorfizm olduğundan, taban noktasının görüntüsü de taban doğrusunun görüntüsü üzerindedir.
$\bar{f}(q, a_0, b_0) = (q, a_0, b_0) \circ \bar{f}(L, a_1, b_1) = (f(L), a_1, b_1)$ dir.
$L \neq f(L)$ olduğundan ve taban doğrusu üzerinde olmayan (a_2, b_2) üyelik dereceli noktalardan geçtiğinden $f(L)$ doğrusunun üyelik derecesi (a_2, b_2) olur.
Ancak $\bar{f}(L, a_1, b_1) = (f(L), a_1, b_1) = (f(L), a_2, b_2)$ dir.
Bu durumda $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ elde edilir.

c) $(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1)$ iken $\bar{f}$ sezgisel fuzzy izomorfizm olduğundan
$\bar{f}(q, a_0, b_0) \circ \bar{f}(L, a_1, b_1)$ ve $(q, a_0, b_0) \circ (f(L), a_1, b_1)$ dir.
Taban noktası taban doğrusu üzerinde olduğundan görüntüsü de taban doğrusunun görüntüsü üzerindedir. Ancak taban noktası invaryant olduğundan görüntü doğrusu taban noktasından geçmek zorundadır. Taban noktası görüntü doğrusu üzerindedir.

Teorem 7.4 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rclll} (\lambda,\mu): & PG(V) & \to & [0,1]\times[0,1] & \\ & q & \to & (a_0,b_0) & \\ & p & \to & (a_1,b_1)\,, & p \in L\setminus\{q\} \\ & p & \to & (a_2,b_2)\,, & p \in PG(V)\setminus\{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2, 0 \leq a_i + b_i \leq 1, i = 0, 1, 2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \to \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\overline{f} : [\mathcal{P}, \lambda, \mu] \to [\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu kolinasyon altında taban noktası invaryant olmasın ve taban doğrusu üzerinde bir noktaya dönüşsün.

a) *$\overline{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında taban doğrusu invaryant ise $a_0 = a_1 \geq a_2$ ve $b_0 = b_1 \leq b_2$ sağlanır.*

b) *$\overline{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında taban noktası taban doğrusu üzerinde kendisinden farklı bir noktaya dönüşsün o zaman uzayda bir tek üyelik derecesi oluşur.*

İspat **a)** Taban doğrusu $\bar{f}$ altında invaryant kalsın. $(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1)$ iken $\bar{f}$ kolinasyon olduğundan

$$\bar{f}(q, a_0, b_0) \circ \bar{f}(L, a_1, b_1)$$

dir.

$$\bar{f}(q, a_0, b_0) = (f(q), a_1, b_1) \circ (f(L), a_1, b_1)$$

olur. Buradan $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ elde edilir. Taban doğrusu üzerinde (p, a_1, b_1) sezgisel fuzzy noktaları yine taban doğrusu üzerindeki (p', a_1, b_1) sezgisel fuzzy noktaları ile eşleşir.

b) $(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1)$ iken $\bar{f}$ izomorfizm olduğundan $\bar{f}(q, a_0, b_0) \circ \bar{f}(L, a_1, b_1)$
ve buradan $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ dir.
(L, a_1, b_1) üzerindeki taban noktasından farklı (p, a_1, b_1) sezgisel fuzzy noktaları (a_2, b_2) üyelik dereceli noktalara dönüştüğünden $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ dir. O zaman $a_0 = a_1 = a_2$ ve $b_0 = b_1 = b_2$ elde edilir.

Teorem 7.5 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rclll} (\lambda,\mu): & PG(V) & \to & [0,1]\times[0,1] & \\ & q & \to & (a_0,b_0) & \\ & p & \to & (a_1,b_1)\,, & p \in L\setminus\{q\} \\ & p & \to & (a_2,b_2)\,, & p \in PG(V)\setminus\{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2,\ 0 \leq a_i + b_i \leq 1,\ i = 0,\ 1,\ 2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \to \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda, \mu] \to [\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu kolinasyon altında taban noktası taban doğrusu üzerinde olmayan bir noktaya dönüşsün. O zaman uzayda bir tek sezgisel fuzzy üyelik derecesi oluşur.

İspat Taban noktası, taban doğrusu üzerinde olmayan bir noktaya dönüştüğü için $\bar{f}(q, a_0, b_0) = (f(q), a_2, b_2)$ olduğundan $f(q)$, L doğrusu üzerinde değildir.
f izomorfizm olduğundan $a_0 = a_2$ ve $b_0 = b_2$ dir.
Düzlemde üyelik dereceleri arasında $a_0 \geq a_1 \geq a_2$ ve $b_0 \leq b_1 \leq b_2,\ 0 \leq a_i + b_i \leq 1,$
$i = 0,\ 1,\ 2$ şartından $a_0 = a_1 = a_2$ ve $b_0 = b_1 = b_2$ elde edilir.
Sonuç : Taban noktası taban doğrusu üzerinde kendisinden farklı bir noktaya dönüşürse $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında taban doğrusu invaryant kalmaz.
İspat $(q, a_0, b_0) \circ (L, a_1, b_1)$ olduğundan ve $f(q)$, L doğrusu üzerinde olmadığından $f(q) \circ L'$, $L' \neq L$ dir.
$L = q \cup p$ ve $q, p \circ L$
$f(L) = f(q) \cup f(p) \neq L$ olduğundan L doğrusu invaryant kalmaz.

Teorem 7.6 *Taban düzlemi $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi olan bir $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{llll} (\lambda, \mu): & PG(V) & \to & [0,1] \times [0,1] \\ & q & \to & (a_0, b_0), \\ & p & \to & (a_1, b_1), \qquad p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & (a_2, b_2), \qquad p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2, 0 \leq a_i + b_i \leq 1, i = 0, 1, 2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \to \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir kolinasyon olmak üzere $\bar{f} : [\mathcal{P}, \lambda, \mu] \to [\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin. Bu durumda

a) *$\mathcal{P}$ projektif düzleminde f kolinasyonu altında p ve q noktaları invaryant ise $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ de (p, α, β) ve (q, α', β') sezgisel fuzzy noktalarının ürettiği sezgisel fuzzy doğru $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.*

b) *$\mathcal{P}$ projektif düzleminde L ve M, f kolinasyonu altında değişmez kalan doğrular ise $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ de (L, α, β) ve (M, α', β') sezgisel fuzzy doğrularının arakesiti $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun bir değişmez sezgisel fuzzy noktasıdır.*

c) *L doğrusu $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde f kolinasyonu altında nokta-nokta invaryant ise, (L, α, β) sezgisel fuzzy doğrusu da $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ de $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında nokta-nokta invaryanttır.*

d) *L_1 ve L_2 doğruları f kolinasyonu altında nokta-nokta invaryant ise $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ nün her sezgisel fuzzy noktasını invaryant bırakır.*

e) *$\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde p noktasından geçen doğrular f kolinasyonu altında invaryant ise $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ de (p, α, β) sezgisel fuzzy noktasından geçen sezgisel fuzzy doğrular invaryanttır.*

f) *p_1 ve p_2 noktaları $\mathcal{P}$ projektif düzleminde f kolinasyonu altında doğru-doğru invaryant ise $[\mathcal{P}, \lambda, \mu]$ nün her doğrusu $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.*

İspat **a)** (p, α, β) ve (q, α', β'), $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında değişmez kalan sezgisel fuzzy noktalar olsun. Bu durumda

$$\bar{f}(p, \alpha, \beta) = (f(p), \alpha, \beta) = (p, \alpha, \beta) \; ve \; \bar{f}(q, \alpha', \beta') = (f(q), \alpha', \beta') = (q, \alpha', \beta')$$

olur.

$$\begin{aligned} \bar{f}(\Big\langle (p, \alpha, \beta), (q, \alpha', \beta') \Big\rangle) &= \bar{f}(p \cup q, \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta') \\ &= (f(p \cup q), \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta') \\ &= (f(p) \cup f(q), \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta') \quad (f \; izomorfizm) \\ &= (p \cup q, \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta') \quad (p, \; q \; noktalar \; invaryant) \\ &= \Big\langle (p, \alpha, \beta), (q, \alpha', \beta') \Big\rangle \end{aligned}$$

$(\langle pq \rangle, \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta')$ sezgisel fuzzy doğrusu $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.

b) (L, α, β) ve $(M, \alpha' \beta')$, $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında değişmez kalan sezgisel fuzzy doğrular olsun. Bu durumda $\bar{f}(L, \alpha, \beta) = (L, \alpha, \beta)$ ve $\bar{f}(M, \alpha', \beta') = (M, \alpha', \beta')$ dir.

$$\begin{aligned} \bar{f}((L, \alpha, \beta) \cap (M, \alpha', \beta')) &= \bar{f}((L \cap M), \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta') \\ &= (f(L \cap M), \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta') \end{aligned}$$

f kolinasyon olduğundan, $\bar{f}((L, \alpha, \beta) \cap (M, \alpha', \beta')) = (f(L) \cap f(M), \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta')$ ve L ve M doğruları invaryant olduğundan,

$$\bar{f}((L, \alpha, \beta) \cap (M, \alpha', \beta')) = (L \cap M, \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta')$$

elde edilir. Böylece $(L \cap M, \alpha \wedge \alpha', \beta \vee \beta')$ sezgisel fuzzy noktası $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.

c) L üzerinde $\forall p$ için $f(p) = p$ dir.
$\forall (p, \alpha, \beta) \circ (L, \alpha', \beta')$ için $\bar{f}(p, \alpha, \beta) = (p, \alpha, \beta)$

$$\bar{f}(p, \alpha, \beta) = (f(p), \alpha, \beta), \; p \circ L$$

f kolinasyonu L doğrusunu nokta-nokta invaryant bıraktığından $f(p) = p$ dir.
Yani (L, α', β') nokta- nokta invaryanttır.

d) c) şıkkından (L_1, α_1, β_1) ve (L_2, α_2, β_2) sezgisel fuzzy doğruları $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında nokta- nokta invaryanttır.
(p, λ, μ) ø(L_1, α_1, β_1) ve (L_2, α_2, β_2) olsun.
(p, λ, μ) noktasından geçen iki farklı sezgisel fuzzy doğru $(M_1, \alpha_1', \beta_1')$ ve $(M_2, \alpha_2', \beta_2')$ olsun.
$\forall x_1, x_2 \circ M_1$ için $x_1 \circ L_1$, L_1 nokta- nokta değişmez olduğundan $f(x_1) = (x_1)$
$x_2 \circ L_2$ ve L_2 nokta-nokta değişmez olduğundan

$$f(x_2) = (x_2),\ f(M_1) = (M_1)$$

$(L_i, \alpha_i, \beta_i),\ i = 1,\ 2$ sezgisel fuzzy doğruları f kolinasyonu altında nokta-nokta invaryant olduğundan

$$\bar{f}(x_i, \alpha_i', \beta_i') = (x_i, \alpha_i', \beta_i')\ ve\ \bar{f}(y_i, \gamma_i, \sigma_i) = (y_i, \gamma_i, \sigma_i),\ i = 1,\ 2$$

dir.

$$\begin{aligned}
(p, \lambda, \mu) &= \Big\langle (x_1, \alpha_1', \beta_1'), (x_2, \alpha_2', \beta_2') \Big\rangle \cap \langle (y_1, \gamma_1, \sigma_1), (y_2, \gamma_2, \sigma_2) \rangle \\
&= (x_1 x_2, \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') \cap (y_1 y_2, \gamma_1 \wedge \gamma_2, \sigma_1 \vee \sigma_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(p, \lambda, \mu) &= \bar{f}((x_1 x_2, \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') \cap (y_1 y_2, \gamma_1 \wedge \gamma_2, \sigma_1 \vee \sigma_2)) \\
& \begin{cases} \alpha_1' \wedge \alpha_2' = \alpha' & \beta_1' \vee \beta_2' = \beta' \\ \gamma_1 \wedge \gamma_2 = \gamma & \sigma_1 \vee \sigma_2 = \sigma \end{cases} \\
&= \bar{f}((x_1 x_2 \cap y_1 y_2), \alpha' \wedge \gamma, \beta' \vee \sigma) \\
&= (f(x_1 x_2 \cap y_1 y_2), \alpha' \wedge \gamma, \beta' \vee \sigma) \\
&= (f(x_1 x_2) \cap f(y_1 y_2), \alpha' \wedge \gamma, \beta' \vee \sigma),\ \ (f\ kolinasyon) \\
&= (f(x_1) f(x_2) \cap f(y_1) f(y_2), \alpha' \wedge \gamma, \beta' \vee \sigma) \\
&= (x_1 x_2 \cap y_1 y_2, \alpha' \wedge \gamma, \beta' \vee \sigma) \\
&= (p, \lambda, \mu)
\end{aligned}$$

elde edilir.

e) $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde p noktasından geçen doğrular f kolinasyonu altında invaryant olsun.
$\forall L \circ p$ için $f(L) = L$ olsun. $\forall (L, \alpha', \beta') \circ (p, \alpha, \beta)$ için

$$\bar{f}(L, \alpha', \beta') = (f(L), \alpha', \beta') = (L, \alpha', \beta')$$

f) p_1 ve p_2 noktaları $\mathcal{P}$ projektif düzleminde f kolinasyonu altında doğru-doğru invaryant olsun.
e) şıkkından (p_i, α_i, β_i) sezgisel fuzzy noktalarından geçen her sezgisel fuzzy doğru invaryanttır.
$(M, \alpha, \beta) = (p_1, \alpha_1, \beta_1) \cup (p_2, \alpha_2, \beta_2), \alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta = \beta_1 \vee \beta_2$ olsun.

$$f(M, \alpha, \beta) = (M, \alpha, \beta)$$

(p_1, α_1, β_1) ve (p_2, α_2, β_2) sezgisel fuzzy noktalarından geçmeyen bir (L, α', β') sezgisel fuzzy doğrusu alınırsa,
$(L, \alpha', \beta') = (x_1, \alpha_1', \beta_1') \cap (x_2, \alpha_2', \beta_2'), \alpha' = \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta' = \beta_1' \vee \beta_2'$ olmak üzere
$(p_1p_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \cap (x_1x_2, \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') = (q, \lambda, \mu)$ noktası alınırsa,
$(M, \alpha, \beta) \cap (L, \alpha', \beta') = (q, \lambda, \mu)$, $\lambda = \alpha \wedge \alpha'$, $\mu = \beta \vee \beta'$
$(q, \lambda, \mu) \circ (M, \alpha, \beta)$ ve (M, α, β) invaryant olduğundan (q, λ, μ) dan geçen her sezgisel fuzzy doğru invaryant olur.
$(q, \lambda, \mu) \circ (L, \alpha', \beta')$, f kolinasyonu altında (q, λ, μ) dan geçen her doğru invaryant olduğundan
$f(x_1, \alpha_1', \beta_1') = (x_1, \alpha_1', \beta_1'),\ f(x_2, \alpha_2', \beta_2') = (x_2, \alpha_2', \beta_2')$ olur.

$$\begin{aligned}
(L, \alpha_1', \beta_1') &= (x_1, \alpha_1', \beta_1') \cup (x_2, \alpha_2', \beta_2') \\
&= (x_1x_2, \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') \\
\bar{f}(L, \alpha_1', \beta_1') &= \bar{f}((x_1, \alpha_1', \beta_1') \cup (x_2, \alpha_2', \beta_2')) \\
&= \bar{f}(x_1x_2, \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') \\
&= (f(x_1x_2), \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') \\
&= (f(x_1)f(x_2), \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2'),\ \ (f\ kolinasyon) \\
&= (x_1x_2, \alpha_1' \wedge \alpha_2', \beta_1' \vee \beta_2') \\
&= (x_1, \alpha_1', \beta_1') \cup (x_2, \alpha_2', \beta_2') \\
&= (L, \alpha_1', \beta_1')
\end{aligned}$$

Örnek 7.3

$$N = n_0, n_1, ..., n_6$$
$$L_i = n_i, n_{i+1}, n_{i+3}\ \textit{(mod 7)}$$
$$n_i \circ L_i$$

olmak üzere $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *bir Fano düzlemi olsun. Fano düzleminin noktaları arasında tanımlı* $f : N \to N, f(n_i) = n_{i+1}, i = 0, 1, ..., 6\ (mod\ 7)$ *kolinasyonunu göz önüne alalım.*

Taban düzlemi bu Fano düzlemi olan $[P, \lambda, \mu]$ *sezgisel fuzzy Fano projektif düzlemindeki* f *yardımıyla tanımlanan* $\bar{f} : [P, \lambda, \mu] \to [P, \lambda, \mu]$ *sezgisel fuzzy kolinasyonun sabit noktası yoktur. Çünkü* $\bar{f}$ *sezgisel fuzzy kolinasyonunun tanımında*

$$\bar{f}(n_i, \alpha, \beta) = (f(n_i), \alpha, \beta) = (n_{i+1}, \alpha, \beta),\ \alpha,\ \beta \in (0, 1],\ 0 \leq a_i + b_i \leq 1\ i = 0,\ 1,\ ...,\ 6$$

dir. Buradan görüldüğü gibi herhangi bir (n_i, α, β) *sezgisel fuzzy noktası kendisinden farklı bir sezgisel fuzzy noktaya gitmektedir.*

Teorem 7.7 $[P, \lambda, \mu]$ *sezgisel fuzzy projektif düzleminin taban projektif düzlemi* $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *olsun.*
Taban projektif düzlemindeki f *kolinasyonu yardımıyla tanımlanan* $[P, \lambda, \mu]$ *deki sezgisel fuzzy projektif düzleminin kolinasyonu* $\bar{f} : [P, \lambda, \mu] \to [P, \lambda, \mu]$ *verilsin.*
Taban projektif düzleminde f *kolinasyonu altında* L *doğrusu nokta-nokta invaryant ve* L *üzerinde olmayan farklı iki nokta* f *altında invaryant kalıyorsa, o zaman* $\bar{f} : [P, \lambda, \mu] \to [P, \lambda, \mu]$ *sezgisel fuzzy birim kolinasyondur.*

İspat Taban projektif düzleminde tanımlanan bir f kolinasyonu bir L doğrusunu nokta-nokta invaryant ve L üzerinde olmayan p ve q noktaları da invaryant bıraksın. O zaman Teorem 7.6 c) şıkkından $\bar{f}(p, a_2, b_2) = (p, a_2, b_2)$ ve $\bar{f}(q, a_2, b_2) = (q, a_2, b_2)$ dir.
Teorem 7.6 d) şıkkından $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu her noktayı invaryant bırakır. Böylece, $\bar{f}$ sezgisel fuzzy birim kolinasyondur.

Teorem 7.8 $\bar{f}$ *sezgisel fuzzy kolinasyonu bir sezgisel fuzzy noktayı doğru-doğru invaryant bırakırsa bu noktadan geçmeyen herhangi bir sezgisel fuzzy doğruyu nokta-nokta invaryant bırakır.*

İspat (p, α, β) , $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında doğru-doğru invaryant sezgisel fuzzy nokta olsun.
(L, α', β') da (p, α, β) dan geçmeyen sezgisel fuzzy doğru olsun.
Durum 1: Varsayalım ki $\bar{f}(L, \alpha', \beta') = (L, \alpha', \beta')$ olsun.
Taban düzleminde her $x \circ L$ noktası $x = px \cap L$ olarak verilsin.

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x,\gamma,\sigma) &= (f(px\cap L),\gamma,\sigma)\\
&= (f(px)\cap f(L),\gamma,\sigma),\ (f,[P,\lambda,\mu]\ de\ kolinasyon)\\
&= (px\cap L,\gamma,\sigma)=(x,\gamma,\sigma)
\end{aligned}$$

Dolayısı ile $(L,\alpha^{'},\beta^{'})$ sezgisel fuzzy doğrusu, nokta-nokta invaryanttır.

Durum 2: Varsayalım ki $\bar{f}(L,\alpha^{'},\beta^{'})\neq(L,\alpha^{'},\beta^{'})$ olsun.
Bu kolinasyon altında (p,α,β) dan geçmeyen $(L,\alpha^{'},\beta^{'})$ da farklı bir $(L^{'},\alpha^{''},\beta^{''}), L\neq L^{'}$ doğrusuna dönüşsün.
Bu iki doğrunun ara kesit noktası

$$\begin{aligned}
(n,\gamma,\sigma) &= (L,\alpha^{'},\beta^{'})\cap(L^{'},\alpha^{''},\beta^{''}),\ \ \gamma=\alpha^{'}\wedge\alpha^{''},\ \sigma=\beta^{'}\vee\beta^{''}\\
&= \langle(p,\alpha,\beta),(n,\gamma,\sigma)\rangle\cap f(L,\alpha^{'},\beta^{'})\\
&= \langle pn,\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\sigma\rangle\cap f(L,\alpha^{'},\beta^{'})\\
\bar{f}(n,\gamma,\sigma) &= \bar{f}(pn,\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\sigma)\cap\bar{f}(L,\alpha^{'},\beta^{'})\\
&= (f(pn),\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\sigma)\cap(f(L),\alpha^{'},\beta^{'})\\
&= (pn,\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\sigma)\cap(f(L),\alpha^{'},\beta^{'})\\
&= (pn\cap f(L),\alpha\wedge\gamma\wedge\alpha^{'},\beta\vee\sigma\vee\beta^{'})\\
&= (n,\alpha^{'},\beta^{'}),\ \ (\gamma=\alpha^{'}\wedge\alpha^{''},\ \sigma=\beta^{'}\vee\beta^{''})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısı ile $(L,\alpha^{'},\beta^{'})$ sezgisel fuzzy doğrusu, nokta-nokta invaryanttır.

7.3 Sezgisel Fuzzy Projektif Düzlemlerde Sezgisel Fuzzy Merkezsel Kolinasyonlar

Bu bölümde projektif düzlemlerde ve fuzzy projektif düzlemlerde tanımlanan merkezsel kolinasyonların, sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde karşılık gelen sezgisel fuzzy merkezsel kolinasyon tanımı verilecektir ve bu kolinasyonların özellikleri ayrıntılı biçimde incelenecektir.

Tanım 7.6 *Taban düzlemi $\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ projektif düzlemi olan sezgisel fuzzy projektif düzlem $[P,\lambda,\mu]$ olsun. $[P,\lambda,\mu]$ nün bir $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu alınsın.*
$[P,\lambda,\mu]$ de bir (p,α,β) sezgisel fuzzy noktasından geçen her sezgisel fuzzy doğru $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalıyorsa, (p,α,β) ya $\bar{f}$ **sezgisel fuzzy kolinasyonunun merkezi** *denir. Bir merkeze sahip sezgisel fuzzy kolinasyon* **merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyon** *olarak adlandırılır. $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun invaryant*

sezgisel fuzzy noktalarının oluşturduğu sezgisel fuzzy doğruya $\bar{f}$ **sezgisel fuzzy kolinasyonunun ekseni** *denir.* (M, α, β) *merkezi ve* $(e, \alpha' \beta')$ *eksenine sahip olan* $\bar{f}$ *kolinasyonuna* $((\mathbf{M}, \alpha, \beta), (\mathbf{e}, \alpha' \beta')) -$ **merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyon** *denir. Merkezsel kolinasyonda merkez eksen üzerinde ise* $\bar{f}$ *ye* **sezgisel fuzzy öteleme***, merkez eksen üzerinde değil ise* $\bar{f}$ *ye* **sezgisel fuzzy homoloji** *denir. Özel olarak sezgisel fuzzy birim kolinasyon için uzayda her sezgisel fuzzy nokta merkez ve her sezgisel fuzzy doğru da eksen olarak düşünülebilir. Bu yüzden sezgisel fuzzy birim kolinasyon hem sezgisel fuzzy öteleme hem de sezgisel fuzzy homolojidir.*

Bir $\bar{f}$ *sezgisel fuzzy kolinasyon altında merkezden geçen doğrular invaryant olduğundan merkez, nokta ve görüntüsü sezgisel fuzzy doğrudaştır. Fakat merkezden geçen doğruların üzerindeki noktalar birbiriyle yer değiştirebilir.*

Teorem 7.9 *Sezgisel fuzzy Fano düzleminin her homolojisi bir birim kolinasyondur.*

İspat $[P, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy Fano düzleminin (M, α, β) merkezli, $(e, \alpha' \beta')$ eksenli sezgisel fuzzy homolojisi $\bar{f}$ olsun. $\bar{f}$ sezgisel fuzzy homoloji olduğundan taban düzleminde merkez eksen üzerinde değildir.
Varsayalım ki $\bar{f}$ birimden farklı bir sezgisel fuzzy kolinasyon olsun. Merkez ve eksen üzerindeki her nokta invaryanttır. Fano düzleminin bütün noktaları merkezden geçen sezgisel fuzzy doğrular üzerindedir. Dolayısıyla bu doğruların hepsi eksenle kesiştiğinden iki noktası invaryant kalır. Merkezden geçen bu doğruların birini merkez, diğeri de eksen üzerindeki nokta olduğundan $\bar{f}$ altında invaryanttır. Geriye M den geçen doğru üzerinde görüntüsü belli olmayan bir nokta kalır. Bu da merkez nokta ve görüntüsü doğrudaş olduğundan kendisine dönüşmek zorundadır. Bu durumda o nokta da invaryant kalır. Dolayısıyla her nokta invaryant kalır. $\bar{f}$ sezgisel fuzzy birim kolinasyondur.

Teorem 7.10 *Sezgisel fuzzy Fano düzleminin birimden farklı bir tek sezgisel fuzzy merkesel kolinasyonu vardır.*

İspat $\bar{f}$, sezgisel fuzzy Fano düzleminin bir sezgisel fuzzy merkezsel kolinasyonu olsun. Bir önceki teoremden $\bar{f}$ sezgisel fuzzy homoloji ise $\bar{f}$ birim sezgisel fuzzy kolinasyondur.
Varsayalım ki $\bar{f}$ sezgisel fuzzy öteleme olsun.
Merkez eksen üzerindedir. Merkez ve eksen üzerindeki noktalar invaryanttır. Eksen

dışındaki hehangi bir noktanın görüntüsü, kendisini merkezle birleştiren bir doğru üzerinde olmak zorundadır. Merkez kendisine dönüştüğünden birbirine eşleşen iki nokta bulunmaktadır. Nokta kendisine dönüşürse $\bar{f}$ birim sezgisel fuzzy kolinasyon olur ya da diğer noktaya dönüşür ise birimden farklı bir tek merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyon vardır.

Sonuç Sezgisel fuzzy Fano düzleminin birimden farklı bir tek sezgisel fuzzy ötelemesi vardır.

Teorem 7.11 *Taban projektif düzleminde* $f : \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ) \rightarrow \mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *,* M *merkezli kolinasyon olmak üzere* $\bar{f} : [P, \lambda, \mu] \rightarrow [P, \lambda, \mu]$ *merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin.*

a) *Merkez,* $\bar{f}$ *merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryanttır.*

b) *Eksen,* $\bar{f}$ *merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyonunun altında invaryanttır.*

İspat **a)** Merkezin tanımından merkezden geçen sezgisel fuzzy doğrular invaryanttır.

$$(M, \alpha, \beta) = (L_1, \alpha_1, \beta_1) \cap (L_2, \alpha_2, \beta_2) = (L_1 \cap L_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2)$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(M, \alpha, \beta) &= (f(M), \alpha, \beta) \\
&= \bar{f}(L_1 \cap L_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \\
&= (f(L_1 \cap L_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \\
&= (f(L_1) \cap f(L_2), \alpha, \beta),\ \alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2,\ \beta = \beta_1 \vee \beta_2 \\
&= (L_1 \cap L_2, \alpha, \beta) \\
&= (M, \alpha, \beta)
\end{aligned}$$

b) Eksen tanımından eksen üzerindeki her $(p_i, \alpha_i, \beta_i),\ i = 1,\ 2,\ ...\ n$ için

$$\bar{f}(p_i, \alpha_i, \beta_i) = (p_i, \alpha_i, \beta_i),\ i = 1,\ 2$$
$$e = p_1 \cup p_2\ ve\ (e, \alpha^{'}, \beta^{'}) = \langle (p_1, \alpha_1), (p_2, \alpha_2) \rangle$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(e, \alpha^{'}, \beta^{'}) &= \bar{f}(p_1 \cup p_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \\
&= (f(p_1 \cup p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2)
\end{aligned}$$

f, e eksenli merkezsel kolinasyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
\bar{f}(e, \alpha^{'}, \beta^{'}) &= (f(p_1) \cup f(p_2), \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \\
&= (p_1 \cup p_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2) \\
&= (e, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 7.12 *$\bar{f}$, bir (M, α, β) sezgisel fuzzy kolinasyon olsun. Eğer $\bar{f}$, merkezden geçmeyen iki farklı sezgisel fuzzy doğruyu invaryant bırakırsa $\bar{f}$ sezgisel fuzzy birim kolinasyondur.*

İspat (L_1, α_1, β_1) ve (L_2, α_2, β_2), $[P, \lambda, \mu]$ de merkezden geçmeyen iki farklı invaryant sezgisel fuzzy doğru olsun.
Teorem 7.1 b) şıkkından bu doğruların arakesit noktası $\bar{f}$ altında invaryant kalır.
$\bar{f}$ altında merkez invaryant olduğundan ve merkezden geçen her doğru invaryant olduğundan (L_1, α_1, β_1) ve (L_2, α_2, β_2) ile (M, α, β) dan geçen her sezgisel fuzzy doğrularının arakesit noktası $\bar{f}$ altında invaryanttır. Böylece merkez (L_i, α_i, β_i) üzerindeki her nokta invaryant olduğundan ve Teorem 7.7 den nokta-nokta invaryant kalan bir sezgisel fuzzy doğru üzerinde olmayan iki sezgisel fuzzy nokta invaryant kaldığından $\bar{f}$ sezgisel fuzzy birim kolinasyondur.

Teorem 7.13 *$\mathcal{IFP} = (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ)$ bir sezgisel fuzzy projektif düzlem olsun.*

$$\begin{array}{rclll} (\lambda, \mu): & PG(V) & \to & [0,1] & \\ & q & \to & (a_0, b_0) & \\ & p & \to & (a_1, b_1), & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & (a_2, b_2), & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

sezgisel fuzzy projektif düzlemi ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq 1 \leq b_2$, $0 \leq a_i + b_i \leq 1$, $i = 0, 1, 2$ şartı altında
$\bar{f} : (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ) \to (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ)$ sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin.
$\bar{f}$ de bir $e-$ ekseninden geçen, (M, a_0, b_0) merkezli $\mathcal{IFP}$ sezgisel fuzzy projektif düzleminin bir sezgisel fuzzy kolinasyonu olsun.

a) *f kolinasyonunun merkezi $M \circ L$ ve $M \o e$ iken (q, a_0, b_0) sezgisel fuzzy nokta ise $M \o e$, $\bar{f}$ fuzzy kolinasyonunun ekseninin olması için $a_1 = a_2$ olmalıdır.*

b) *f kolinasyonu altında merkezi $M \o L$, $M \o e$ ve $f(e) = e$ ise $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun ekseninin olması için (M, a_2, b_2) merkez olmalıdır.*

c) *$M \o L$ ve $f(L) \neq L$ için $L_1 \cap f(L_1) = n_1$ noktası verilsin. $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun ekseninin olması için $a_1 = a_2$ olmalıdır.*

İspat **a)** f kolinasyonunun merkezi $M \circ L$ ve $M \o e$ iken (q, a_0, b_0) sezgisel fuzzy noktası verilsin.
Durum 1 : $(p_1, a_1, b_1) \circ (e, a_2, b_2)$ ve $(p_2, a_2, b_2) \circ (e, a_2, b_2)$ noktaları alınsın.

$p_1 = qp_1 \cap e$ olsun.

$$\bar{f}(p_1, a_1, b_1) = \bar{f}((qp_1, a_1, b_1) \cap (e, a_2, b_2)) = (qp_1 \cap e, a_2, b_2) = (p_1, a_2, b_2)$$

Bu durumda $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ eşitliği sağlanır ve (e, a_2, b_2), $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun eksenidir.

Durum 2 : f kolinasyonunun merkezi $M \circ L$, (M, a_1, b_1) ve $M \not{o} L$ iken $f(e) = e$ doğrusunun $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun ekseni olması için merkez (M, a_1, b_1) sezgisel fuzzy noktasının taban noktasından farklı ve $M \circ L$ doğrusunun taban doğrusu olmalıdır.

b) f kolinasyonu altında merkezi $M \not{o} L$, $M \not{o} e$ ve $f(e) = e$ olsun. $x \circ e$ için x noktasının üyelik derecesi (a_1, b_1) veya (a_2, b_2) olabilir. $x = Mx \cap e$ için $f(x) = f(Mx) \cap f(e)$
x noktası eğer (a_1, b_1) üyelik derecesine sahip ise

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x, a_1, b_1) &= \bar{f}((Mx, a_2, b_2) \cap (e, a_2, b_2)) \\
&= \bar{f}(Mx, a_2, b_2) \cap \bar{f}(e, a_2, b_2) \\
&= (Mx, a_2, b_2) \cap (e, a_2, b_2) \\
&= (Mx \cap e, a_2, b_2)
\end{aligned}$$

eşitliğinden $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ elde edilir.
x noktası eğer (a_2, b_2) üyelik derecesine sahip ise

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x, a_2, b_2) &= ((Mx, a_2, b_2) \cap (e, a_2, b_2) \\
&= (Mx \cap e, a_2, b_2) \\
&= (x, a_2, b_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) $M \not{o} L$ ve $f(L) \neq L$ için $L_1 \cap f(L_1) = n_1$ noktası verilsin.
$\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında, (n_1, α, β) sezgisel fuzzy noktası invaryanttır.
$n_1 = Mn_1 \cap L_1$ noktası $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında,

$$\begin{aligned}
\bar{f}(n_1, \alpha, \beta) &= \bar{f}(Mn_1, a_2, b_2) \cap \bar{f}(L_1, a_2, b_2) \\
&= (Mn_1, a_2, b_2) \cap (\bar{f}(L_1), a_2, b_2) \\
&= (Mn_1 \cap \bar{f}(L_1), a_2, b_2)
\end{aligned}$$

Buradan $\alpha = a_2$ ve $\beta = b_2$ elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}
\bar{f}(M, a_0, b_0) = (M, a_0, b_0) \\
\bar{f}(n_1, a_2, b_2) = (n_1, a_2, b_2)
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (e, a_2, b_2) = (Mn_1, a_2, b_2)$$

$\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu altında invaryant kalır.
$x \circ Mn_1$ noktası alınsın.
$(x, \alpha, \beta) \circ (Mn_1, a_2, b_2) \Leftrightarrow \alpha = a_2, \beta = b_2$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, a_2, b_2) &= \bar{f}(Mn_1 \cap L_2, a_2, b_2)\\ &= (Mn_1, a_2, b_2) \cap (f(L_2), a_2, b_2)\\ &= (Mn_1 \cap (f(L_2), a_2, b_2)\\ &= (x, a_2, b_2)\end{aligned}$$

Bu durumda Mn_1 doğrusu $e-$ eksen doğrusudur.
$x \circ Mn_1$, $(x, a_1, b_1) = (Mn_1 \cap L_2, a_2, b_2)$ için

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, a_1, b_1) &= \bar{f}((Mn_1, a_2, b_2) \cap (L_2), a_2, b_2)\\ &= \bar{f}(Mn_1, a_2, b_2) \cap \bar{f}(L_2, a_2, b_2)\\ &= (Mn_1 \cap (f(L_2), a_2, b_2)\end{aligned}$$

Bu durumda $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ elde edilir.
Sonuç $\mathcal{IFP} = (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ)$ bir sezgisel fuzzy projektif düzlem olsun.

$$\begin{array}{rccll} (\lambda, \mu): & PG(V) & \to & [0,1] \times [0,1] & \\ & q & \to & (a_0, b_0) & \\ & p & \to & (a_1, b_1), & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & (a_2, b_2), & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

sezgisel fuzzy projektif düzlemi ve $a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2$, $0 \leq a_i + b_i \leq 1$, $i = 0, 1, 2$ şartı altında
$\bar{f} : (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ) \to (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ)$ birimden farklı bir sezgisel fuzzy kolinasyonu verilsin. Merkez noktası var iken, eksenin var olabilmesi için $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ dir.

Teorem 7.14 *Taban projektif düzlemi $\mathcal{P}$ olan bir $[P, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rccll} (\lambda, \mu): & PG(V) & \to & [0,1] \times [0,1] & \\ & q & \to & (a_0, b_0) & \\ & p & \to & (a_1, b_1), & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \to & (a_2, b_2), & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2$, $0 \leq a_i + b_i \leq 1$, $i = 0, 1, 2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ bir $(M, e)-$ merkezsel kolinasyon olsun. Bu dönüşüm yardımıyla tanımlanan $\bar{f} : (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ) \to (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ)$ sezgisel fuzzy kolinasyonu da merkezsel kolinasyondur.

İspat $\mathcal{P}$ projektif düzleminde e eksen olduğundan f merkezsel kolinasyonu altında nokta-nokta invaryanttır. Teorem 7.6 c) şıkkından $(e, \alpha' \beta')$ sezgisel fuzzy doğrusu da $[P, \lambda, \mu]$ de $\bar{f}$ altında nokta-nokta invaryanttır. Bu yüzden $(e, \alpha' \beta')$ sezgisel fuzzy doğrusu $\bar{f}$ altında eksendir.

Benzer biçimde M noktası $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde merkez olduğundan doğru-doğru invaryanttır. Teorem 7.6 e) şıkkından (M, α, β) sezgisel fuzzy noktası da $[P, \lambda, \mu]$ de $\bar{f}$ altında doğru-doğru invaryant kalır. Böylece (M, α, β) $\bar{f}$ altında merkezdir. Buradan $\bar{f}$ sezgisel fuzzy kolinasyonu M merkez noktalı, e eksene sahip bir merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyondur.

Sonuç $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde f merkezsel kolinasyonuna karşılık gelen $[P, \lambda, \mu]$ de bir merkezsel sezgisel fuzzy kolinasyon vardır.

Teorem 7.15 *Taban projektif düzlemi $\mathcal{P}$ olan bir $[P, \lambda, \mu]$ sezgisel fuzzy projektif düzlemi*

$$\begin{array}{rccll} (\lambda, \mu): & PG(V) & \rightarrow & [0,1] \times [0,1] & \\ & q & \rightarrow & (a_0, b_0), & \\ & p & \rightarrow & (a_1, b_1), & p \in L \setminus \{q\} \\ & p & \rightarrow & (a_2, b_2), & p \in PG(V) \setminus \{L\} \end{array}$$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $b_0 \leq b_1 \leq b_2$, $0 \leq a_i + b_i \leq 1$, $i = 0, 1, 2$ biçiminde tanımlansın.
$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ bir $(M, e)-$ merkezsel kolinasyon olsun. Bu dönüşüm yardımıyla tanımlanan $\bar{f}$: $(\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ) \rightarrow (\mathcal{IFN}, \mathcal{IFD}, \circ)$ sezgisel fuzzy kolinasyonunun merkezinin var olması için gerek ve yeter koşul ekseninin var olmasıdır.

İspat $\mathcal{P}$ taban projektif düzleminde f kolinasyonunun projektif geometrideki teorem (f in merkezinin olması için gerek ve yeter koşul bir ekseninin var olmasıdır (Kaya, 2005)) ve Teorem 7.14 den $\bar{f}$ altında merkez var ise merkezden geçen doğrular nokta-nokta invaryant olacağından $\bar{f}$ nin merkezi (M, α, β) olsun. O zaman M, $\mathcal{P}$ de f nin merkezidir. f de merkezi var ise eksenide var olduğundan e doğrusu $\mathcal{P}$ de eksendir. Eksen üzerindeki her nokta invaryant olduğundan Teorem 7.6 c) şıkkından $[P, \lambda, \mu]$ de bir $(e, \alpha' \beta')$ sezgisel fuzzy doğrusu nokta-nokta invaryant olacak şekilde vardır ve eksendir.

$\bar{f}$ nin ekseni $(e, \alpha' \beta')$ olsun. O zaman e $\mathcal{P}$ de f nin ekseni olduğundan ve projektif geometride ekseni varsa merkezi de var olduğundan M noktası $\mathcal{P}$ de merkezdir. Merkezden geçen her doğru invaryant olduğundan Teorem 7.6 e) şıkkından $[P, \lambda, \mu]$ de bir (M, α, β) sezgisel fuzzy noktası doğru-doğru invaryant olacak şekilde vardır ve merkezdir.

8. MATERYAL VE YÖNTEM

8.1 Materyal

Projektif düzlemlerde tanımlı dönüşüm, kolinasyon ve merkezsel kolinasyon kavramları kullanılmıştır. Fuzzy ve sezgisel fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif düzlemlerdeki nokta, doğru, düzlem, üzerinde bulunma bağıntıları kullanılarak üzerinde tanımlı yeni dönüşümler elde edilmiştir.

8.2 Yöntem

Çalışmadaki ilgili tanım ve teoremler, mevcut geometrik yapılar incelenerek oluşturulmuştur.

9. BULGULAR VE TARTIŞMA

$3-$ boyutlu sezgisel fuzzy vektör uzayından sezgisel fuzzy projektif düzlem oluşturuldu. Sezgisel fuzzy projektif düzlemde bulunan sezgisel fuzzy projektif nokta, sezgisel fuzzy projektif doğru ve üzerinde bulunma bağıntıları sezgisel fuzzy vektör uzayındaki karşılıklarından yararlanılarak tanımlandı.

Klasik projektif düzlemde var olan homomorfizm, izomorfizm, kolinasyonlar ve merkezsel kolinasyonların fuzzy projektif düzlemlerdeki fuzzy karşılıkları tanımlanmıştır. Bu tanımlanan dönüşümlerin özellikleri ve bunların invaryant bıraktığı bazı özelliklerin klasik projektif düzlemdeki teorilerle benzerlik oluşturduğu belirlenmiştir. Ayrıca bu dönüşümler altında fuzzy projektif düzlemlerdeki, taban noktasının ve taban doğrusunun invaryant kalma şartlarına göre üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler belirlenerek literatüre sunulmuştur. Literatüre kazandırılan bu fuzzy projektif düzlemlerdeki sonuçların fuzzy geometriden farklı olarak ait olma ve ait olmama üyelik derecesine sahip olan sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde de tanımları detaylı bir şekilde verilmiştir. Taban projektif düzlemdeki tanımlı dönüşümlere karşılık gelen sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde sezgisel fuzzy homomorfizm, sezgisel fuzzy izomorfizm, sezgisel fuzzy kolinasyon ve sezgisel fuzzy merkezsel kolinasyon tanımları oluşturulmuştur.

Fuzzy vektör uzayından elde edilen fuzzy projektif düzlemlerdeki dönüşümlerde elde edilen sonuçların, sezgisel vektör uzaylarından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde tanımlanan dönüşümlerin benzer özellikleri sağladığı görüldü.

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak sezgisel vsezgisel fuzzy vektör uzayından sezgisel fuzzy projektif düzlem oluşturuldu. Klasik projektif düzlemde tanımlı olan bazı temel teoremlerin sezgisel fuzzy projektif nokta ve sezgisel fuzzy projektif doğrular arasında da geçerliliği belirlendi.

Daha sonra fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemlerde, taban projektif düzleminde tanımlı olan homomorfizm, izomorfizm, kolinasyon, merkezsel kolinasyonlar ve merkezsel kolinasyonların özel tipleri olan homoloji ve ötelemeler fuzzileştirildi. Taban düzlemindeki dönüşümlerin sağladığı bazı özellikler ile karşılık gelen Fuzzy projektif düzlemlerde tanımlanan fuzzy dönüşümlerin benzer özellikleri sağladığı görüldü. Üyelik dereceleri arasındaki şartlara bağlı olarak taban noktası ve taban doğrusunun üzerinde bulunma durumları karakterize edildi. Ayrıca dönüşümler altında taban noktasının ve taban doğrusunun invaryant kalma durumlarına göre üyelik dereceleri arasındaki ilişkiler oluşturuldu. Taban noktası, taban doğrusu üzerinde kendisinden farklı bir noktaya dönüşürse fuzzy kolinasyon altında taban doğrusunun invaryant kalamayacağı ispatlandı. Fuzzy Fano düzleminin her homolojisinin fuzzy birim kolinasyon olduğu ve birimden farklı bir tek fuzzy kolinasyonu olduğu belirlendi. Fuzzy projektif düzlemlerde tanımlı merkezsel kolinasyon altında merkez noktası var iken eksenin var olabilmesi için düzlemin iki farklı üyelik derecesine sahip olduğu belirlendi. Ayrıca fuzzy projektif düzlemlerde tanımlanan fuzzy kolinasyonun taban projektif düzlemindeki kolinasyonla benzer özellikler sağladığı gösterildi.

Fuzzy projektif düzlemlerde tanımlanan fuzzy dönüşümlere benzer olarak sezgisel fuzzy vektör uzaylarından elde edilen sezgisel fuzzy projektif düzlemlerdeki sezgisel fuzzy dönüşümler tanımlandı. Sonuç olarak fuzzy projektif düzlemlerde sağlanan şartların ait olma ve ait olmama üyelik derecelerine sahip olan sezgisel fuzzy projektif düzlemlerde de geçerli olduğu tespit edildi. Sezgisel fuzzy Fano düzleminin birimden farklı bir tek sezgisel fuzzy ötelemesi olduğu belirlendi.

Bu tezde elde edilen sonuçlar fuzzy projektif geometriye ve sezgisel fuzzy projektif geometriye katkı sağlayacaktır. Daha yüksek dereceli fuzzy ve sezgisel fuzzy projektif uzaylarda dönüşümler teorisine temel oluşturacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abdukhalikov, K.S., 1996, The Dual of a Fuzzy Subspace, FSS 82, 375-381.

Abdukhalikov, K.S., 1998, Fuzzy Linear Maps, Journal of Mathematical Analysis and Applications 220, 1-12.

Abdukhalikov, K.S., Tulenbaev, M.S., Umirbaev, U.U., 1994, On fuzzy bases of vector spaces, Fuzzy Sets and Systems, 63, 201-206.

Akça, Z., Bayar, A., Ekmekçi, S., 2006, On the classification of fuzzy projective lines of fuzzy 3 dimensional projective space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat, vol. 55, no. 2, 17–23.

Akça, Z., Bayar, A., Ekmekçi, S., Maldeghem, H.V., 2006, Fuzzy projective spreads of fuzzy projective spaces, Fuzzy Sets and Systems, vol. 157, no. 24, 3237–3247.

Akça, Z., Bayar, A., Ekmekçi, S., 2020, On the Intuitionistic Fuzzy Projective Menelaus and Ceva's Conditions, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Ser. A1 Math. Stat., 69, 1, 891-899.

Anthony, J.M. and Sherwood, H., 1979, Fuzzy groups redefined, J. Math. Anal. Appl. 69, 124-130.

Atanassov, K.T. ,1999, Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory And Applications, Physica-Verlag, Heidelberg.

Atanassov, K.T. , 1983, Intuitionistic Fuzzy Sets, VII ITKR's Session, Sofia.

Bayar, A., Akça, Z., Ekmekçi, S., 2008, A note on fibered projective plane geometry, Information Sciences, vol. 178, no. 4, 1257–1262.

Bayar, A., Ekmekçi, S., 2014, On the Menelaus and Ceva 6-figures in the fibered projective planes, Abstract and Applied Analysis, 5.

Bayar, A., Ekmekçi, S., 2015, On some classical theorems in intuitionistic fuzzy projective plane, Konuralp Journal of Mathematics, vol. 3, no. 1, 12–15.

Biswas, R., 1986, Fuzzy fields and fuzzy linear spaces redefined, Fuzzy Sets and Systems 19, 89-94.

Biswas B.K., Dutta, T.K., 2000, On fuzzy congruence of a near-ring module, Fuzzy Sets and Systems, 112, 343-348.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Casse, R., ,2006, Projective Geometry: An Introduction.

Çallıalp, F., 2011, Örneklerle Soyut Cebir.

Das, P.S. , 1981, Fuzzy groups and level subgroups, J. Math. Anal. Appl. 84, 264-269.

De, S.K. , Biswas R. and Roy, A.R., 1997, On intuitionistic fuzzy sets, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 3 (4), 14-20.

Ekmekçi, S., Akça Z., Bayar, A., 2009, On the classification of fuzzy projective planes of fuzzy 3 dimensional projective space, Chaos, Solitons Fractals, vol. 40, no. 5, 2146–2151.

Ekmekçi, S., Bayar, A., 2014, The Menelaus and Ceva 6 figures in the fibered projective planes, Absract and Applied Analysis, 1–5.

Ekmekçi, S., Bayar, A., 2015, A note on fibered quadrangles, Konuralp Journal of Mathematics, vol. 3, no. 2, 185–189.

Ghassan, E. A. , 2009, Intuitionistic fuzzy projective geometry, J. of Al-Ambar University for Pure Science, 3, 1-5.

Gupta, K. C., Sarma, B. K., 1995, Operator domains on fuzzy groups, Inform. Sci. 84, 247-259.

Kandasamy, V.W.B., 2003, Smarandache Fuzzy Algebra, Department of Mathematics Indian Institute of Technology Madras Chennai – 600s.

Karakaş¸ H. I., 1998, Soyut Cebire Giris¸, 1-6, 140-143 s.

Katsaras , A. K. , Liu, D. B. , 1977, Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces, J. Math. Anal. Appl. 58 (1), 135-146.

Kaya, R., 2005, Projektif Geometri, Osmangazi Üniveristesi Yayınları.

Kim, J.P., Bae, D.R. , 1997, Fuzzy congruences in groups, Fuzzy Sets and Systems 85 , 115-120.

Kuijken, L., Maldeghem, H.V, Kerre, EE., 1998, Fuzzy projective geometries from fuzzy vector spaces, Information processing and management of uncertainty in knowledge-based systems. Editions Medicales et Scientifiques. Paris,La Sorbonne, p. 1331–8.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kuijken, L., Maldeghem, H.V, Kerre, EE., 1999, Fuzzy projective geometries from fuzzy groups, Tatra Mt. Math. Publ. 16, 85-108.

Kuijken, L., Maldeghem, H.V, 2002, Fibered Geometries, Discrete Mathematics 255, 259-274.

Kuijken, L., Maldeghem, H.V, 2003, On the definition and some conjectures of fuzzy projective planes by Gupta and Ray, and a new definition of fuzzy building geometries, Fuzzy Sets and Systems 138, 667- 685.

Kumar, R., 1992, Fuzzy subgroups, fuzzy ideals and fuzzy cosets : Some properties, Fuzzy Sets and Systems, 48, 267-274.

Kuroki, N., 1992, Fuzzy congruences and fuzzy normal subgroups, Inform. Sci. 60, 247-361.

Landjev I. N. , 1998, Linear codes over finite fields and finite projective geometries, Discrete Mathematics 213, 211-244.

Lubczonok, P., 1990, Fuzzy Vector Spaces, Fuzzy Sets and Systems 38 329-343.

Mordeson, J.N., 1993, Bases of Vector Spaces, İn: Inform. Sci. 67, pp. 87–92.

Nanda, S. , 1989, Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems 33, 257-259.

Pradhan, R., Pal, M. ,2012, Intuitionistic Fuzzy Linear Transformations, Annals of Pure and Applied Mathematics, Vol. 1, No. 1, 2012, 57-68.

Rani, M. J., Priya, P. , Deepa, K., 2017, Intuitionistic Fuzzy B* Algebra in Linear Transformation, International Journal of Current Research and Modern Education.

Ray, S. , 1992, Analysis of the level subgroups of fuzzy group, Fuzzy Sets and Systems 51 , 323-331.

Rosenfeld, A., 1971, Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. 35, 512-517.

Ross, T.J., 2010, Fuzzy Logic With Engineering Applications, University of New Mexico, USA.

Santhosh, C.P., 2011, A Study of Fuzzy and Intuitionistic Fuzzy Linear Spaces, Kannur University.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy sets, Inform. and Control, 8, 338-353 Sowell.

Zimmermann, H.J., 1985, Fuzzy set theory and its applications, Kluwer-Nijhoff Publishing, Hingham.

ÖZGEÇMİŞ

[redacted]