

Parçalı Polinomlu En Küçük Kareler Yönteminin KTD Denklemlere Uygulanması

Sedat Ülker

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2020

Application of Piecewise Polynomial Least Squares Method for PDEs

Sedat Ülker

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

August 2020

Parçalı Polinomlu En Küçük Kareler Yönteminin KTD Denklemlere Uygulanması

Sedat Ülker

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Bülent Saka

Ağustos 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Bülent Saka danışmanlığında hazırlamış olduğum “Parçalı Polinomlu En Küçük Kareler Yönteminin KTD Denklemlere Uygulanması” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 14/08/2020

Sedat Ülker

ÖZET

Bu doktora tezi, en küçük kareler üstel B-spline yöntemini kullanarak RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümlerini bulmaya odaklanan sekiz bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, diferensiyel denklemlerin çeşitli başlangıç ve sınır koşulları altında analitik çözümlere sahip olmasına rağmen, neden sayısal çözümlerin geliştirildiği ve spline fonksiyonlarının tercih edildiği soruları yanıtlanarak tezin kapsamı ve amacı açıklanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde çözülecek denklemlerin literatür taraması ve bunun için kullanılacak yöntemler verilmiştir. Ardından soliton ve solitary dalgaları ile bu dalgaların kullanım alanları hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra ağırlıklı rezidüer yöntemi, spline fonksiyonlar ve üstel B-spline fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bu bölümün son kısmında RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemleri tanımlanmıştır.

Sonraki bölümlerde sırasıyla en küçük kareler üstel B-spline yöntemi kullanılarak RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiş ve test problemleri kullanılarak çözümlerin güvenilirliği kontrol edilmiştir. Ayrıca elde edilen sayısal çözüm verileri tablolar ve şekiller aracılığıyla yorumlanmıştır.

Son iki bölümünde ise çalışmada elde edilen veriler özetlenerek tartışılmış ve sonraki araştırmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferensiyel denklem, soliton, solitary dalga, üstel B-spline, sonlu elemanlar yöntemi, en küçük kareler yöntemi, RLW denklemi, Burgers denklemi, AD denklemi, Fisher denklemi.

SUMMARY

This doctoral dissertation consists of eight chapters, focusing on the finding the numerical solutions of RLW, Burgers', AD and Fisher equations by using the least squares exponential B-spline method.

In the introduction chapter, scope and purpose of the dissertation was explained such as the questions why numerical solutions are developed and spline functions are preferred answered, despite the fact that differential equations have analytical solutions under various initial and boundary conditions.

In the second chapter of the dissertation, literature review of the equations to be solved and the methods to be used for such was given. Next, information regarding soliton and solitary waves and the usage areas of these waves was given. After that, weighted residuals method, spline functions and exponential B-spline functions were defined. In the last part of this chapter RLW, Burgers', AD and Fisher equations were defined.

Respectively in the following chapters, numerical solutions of RLW, Burgers', AD and Fisher equations were obtained by using least squares exponential B-spline method and the reliability of the solutions were checked by using testing problems. In addition, acquired numerical solution data was interpreted via tables and figures.

In the last two parts of the doctoral dissertation, the data obtained in the study were summarized and discussed, and suggestions were made for the next researches.

Keywords: Partial differential equation, soliton, solitary wave, exponential B-spline, finite element method, least squares method, RLW equation, Burgers' equation, AD equation, Fisher equation.

TEŞEKKÜR

Tez konusu seçiminde ve bu konunun seçiminden sonra çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Bülent Saka'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Matematik bölümündeki değerli hocalarıma, beni bu günlerime getiren sevgili aileme, özellikle tezin yazımında çok büyük emeği olan, hiçbir zaman üzerimden desteğini esirgemeyen sevgili eşim Emel Ülker'e ve varlıklarıyla beni motive eden çocuklarım Pınar Sude ve Nilüfer Berra'ya teşekkür ederim.

Sedat Ülker

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
2.1. Dalga ve Dalgaların Sıfıflandırılması	8
2.2. Soliton ve Solitary Dalgalar	10
2.3. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri	13
2.3.1. Korunum kanunları	13
2.4. Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri	14
2.4.1. Ağırlıklı rezidüler yöntemi	16
2.5. Spline Fonksiyonlar	17
2.5.1. Üstel B-spline fonksiyonlar	19
2.6. Regularized Long-Wave (RLW) Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	30
2.7. Burgers Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	32
2.8. AD Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	33
2.9. Fisher Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	34
3. RLW DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	35
3.1. RLW Denklemine Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	35
3.2. Başlangıç Durumu	43
3.3. Test Problemleri	44

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.3.1. Tek dalga çözümü	44
3.3.2. İki pozitif dalganın girişimi	53
3.3.3. Ardışık dalgaların gelişimi	57
3.3.4. Dalga oluşumu	60
4. BURGERS DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	63
4.1. Burgers Denklemine Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	63
4.2. Başlangıç Durumu	69
4.3. Test Problemleri	70
4.3.1. Problem(1)	70
4.3.2. Problem(2)	73
4.3.3. Problem(3)	75
5. AD DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	79
5.1. AD Denklemine Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	79
5.2. Başlangıç Durumu	85
5.3. Test Problemleri	86
5.3.1. Problem(1): Son derece uzun bir kanalda adveksiyon ($\mu = 0$)	86
5.3.2. Problem(2): Adveksiyon ve difüzyon ile taşınım	89
5.3.3. Problem(3)	91
6. FİŞER DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	95
6.1. Fisher Denklemine Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi	95

İÇİNDEKİLER (devam)**Sayfa**

6.2. Başlangıç Durumu	101
6.3. Test Problemleri	102
6.3.1. Problem(1): Güçlü reaksiyon	102
6.3.2. Problem(2): Başlangıç titreşim profili	106
7. BULGULAR VE TARTIŞMA	109
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	112
KAYNAKLAR DİZİNİ	114
ÖZGEÇMİŞ	125

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Basit bir dalga profili	9
2.2. Russell'in solitary dalga üretirken kullandığı yöntem	10
2.3. İki solitary dalganın girişimi	11
2.4. Solitary dalgaları açıklamak için kullanılan parametre ve değişkenler	11
2.5. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten ardışık dört üstel B-spline fonksiyon	26
2.6. Ardışık dalgalar	31
3.1. Tek dalga simülasyonu, $3\check{c} = 0,09$	47
3.2. $3\check{c} = 0,09$ genlikli dalga için $u - U$	47
3.3. Hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ anındaki L_∞ hata normu ...	48
3.4. $3\check{c} = 0,09$ genlikli dalga için $u - U$	49
3.5. Hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ anındaki L_∞ hata normu ...	49
3.6. Tek dalga simülasyonu, $3\check{c} = 0,3$	51
3.7. $3\check{c} = 0,3$ genlikli dalga için $u - U$	51
3.8. Hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ anındaki L_∞ hata normu ...	52
3.9. İki dalganın girişimi $\rho = 0,4224 \times 10^{-1}$	55
3.10. İki dalganın girişimi	56
3.11. Ardışık dalgaların gelişimi $d = 2, \rho = 0,08014$	58
3.12. Ardışık dalgaların gelişimi $d = 5, \rho = 0,09245$	58
3.13. Dalga oluşumu, $t = 12, \mu = 0,04$	61
3.14. Dalga oluşumu, $t = 12, \mu = 0,01$	61
4.1. $\lambda = 0,001$ viskozite değeri için U	72
4.2. $\lambda = 0,001$ viskozite değeri için U	74
4.3. $\lambda = 0,5$ viskozite değeri için U	77
4.4. $\lambda = 0,005$ viskozite değeri için U ve u	77
5.1. Sadece adveksiyon ile taşınım, U	88
5.2. Hata normlarının değişimi ve $t = 9600$ anındaki hata	89
5.3. Adveksiyon ve difüzyon ile taşınım, U	90

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.4. Hata normlarının değişimi ve $t = 5$ anındaki hata.....	91
5.5. $\Delta t = 10$ için çeşitli zamanlardaki U ve u	94
5.6. Hata normlarının değişimi ve $t = 3000$ anındaki hata	94
6.1. $\rho = 1$, $h = 1/40$ ve $\beta = 2 \times 10^3$ için U	103
6.2. $\rho = 1$, $h = 1/120$ ve $\beta = 10^4$ için U	104
6.3. $\rho = 1$, $h = 1/64$ ve $\beta = 10^4$ için L_∞	104
6.4. $\rho = 1$, $h = 1/120$ ve $\beta = 10^4$ için L_∞	105
6.5. Başlangıç anına yakın zamanlar için çözümler	106
6.6. Kısa zaman aralığı için U	107
6.7. Uzun zaman aralığı için U	107

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
2.1. Bölünme noktalarındaki üstel B-spline değerleri.....	22
2.2. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı örten dört üstel B-spline fonksiyon.....	23
2.3. Dört üstel B-spline fonksiyonun uç noktalardaki değerleri.....	26
2.4. U, U' ve U'' fonksiyonlarının uç noktalardaki değerleri.....	28
2.5. Yerelleştirilmiş üstel B-spline fonksiyonların uç noktalardaki değerleri.....	30
3.1. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri.....	46
3.2. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri.....	48
3.3. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri.....	50
3.4. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri, $h = 0, 1$	52
3.5. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri, $h = 0, 2$	53
3.6. İki dalganın girişimi, korunum sabitleri.....	54
3.7. İki dalganın girişimi, genlik değişimi.....	55
3.8. İki dalganın girişimi, korunum sabitlerinin değişimi.....	56
3.9. Ardışık dalgalar, $d = 2$	59
3.10. Ardışık dalgalar, $d = 5$	59
3.11. $t = 250$ anında ardışık dalgaların genlikleri.....	59
3.12. Dalga oluşumu, korunum sabitleri.....	62
4.1. Farklı konum artımları için sayısal çözümler.....	71
4.2. Farklı viskozite değerleri için sayısal çözümler.....	73
4.3. Farklı viskozite değerleri için sayısal çözümler.....	75
4.4. $\lambda = 0, 5$ viskozite değeri için farklı zamanlardaki sayısal çözümler.....	76
5.1. Sadece adveksiyon ile taşınım, $t = 9600$	87
5.2. $t = 9600$ anındaki pik değerleri, $x = 6800$	88
5.3. Adveksiyon ve difüzyon ile taşınım.....	90
5.4. $t = 3000$ anındaki hata normları.....	92
5.5. $t = 3000$ anındaki sayısal ve analitik değerler, $h = 1$	93
6.1. Farklı zamanlar için L_∞ ve L_2 hata normları.....	105

ÇİZELGELER DİZİNİ (devam)ÇizelgeSayfa6.2. Farklı zamanlara için *Rel* hata normu 108

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

B-spline

C_1, C_2, C_3

$\|e\|_1$

h

L_2

L_∞

Rel

Δt

u

U

Açıklama

Basic/basis-spline

Korunum sabitleri

Ağırlaştırılmış hata normu

Konum adım uzunluğu

Ortalama hata normu

Maksimum hata normu

Bağıl hata normu

Zaman adım uzunluğu

Analitik çözüm

Sayısal çözüm

Kısaltmalar

AD

RLW

Açıklama

Adveksiyon-difüzyon

Regularized long wave (düzenli uzun dalga)

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Araştıran ve sorgulayan gözlerle çevremizde olup biten fiziksel (yer çekimi, dalgalar, elektro manyetik gibi) olayları gözlemlediğimizde bu olaylar hakkında bir takım teorik söylemler geliştirmemiz mümkündür fakat bu söylemlerin bilimsel bir değer ifade edebilmesi için matematiksel modellemelere ve denklemlere dönüştürülmesi gerekir. Bu sayede test edilmeye ve doğrulanmaya veya reddedilmeye uygun hale gelirler. Örneğin yer çekimi, evrenin başlangıcından beri var olmasına karşın Newton onu denklemsel bir kalıba sokana kadar bilim insanlarının dikkatini çekmeyi başaramamıştır. Benzer bir şey J. Scott Russell tarafından 1834 yılında bilim insanlarının dikkatine sunulmuştur; Solarity dalga. Herkesin bakıp geçtiği dalgaları, at sırtında kilometrelerce takip etmiş, gözlemsel ve teorik söylemlerin yanında bu dalgalara yönelik ilk matematiksel formülleri 1844 yılında "Dalgalar üzerine raporlar" ismiyle yayımlamıştır (Russell, 1844). Böylelikle bilim insanlarının dikkatini dalgalar üzerine çekmeyi başarmıştır.

Bu fiziksel olaylar herkesin gözü önünde olmasına rağmen, sadece birilerinin (bilim insanlarının) matematiksel model oluşturmaya yeltenmesi elbette tesadüf eseri değildir. Çevremizde cereyan eden fiziksel olayların (genellikle ve çoğunlukla) temel matematik bilgisiyle matematiksel olarak modellenmesi pek mümkün değildir çünkü bu olaylar genellikle zamana ait bir değişken içereceğinden ve zamanın sürekliliğinden dolayı anlık değişimleri de içermesi için adi veya kısmi diferensiyel denklemler ve/veya bunların denklem sistemleri kullanılarak modellenmek zorundadır ki bu zorunluluk beraberinde birtakım zorluklar getirmektedir. Bu zorluklardan bir tanesi ve bu çalışmanın ana konusu, yapılan bu matematiksel modellemede kullanılan diferensiyel denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin oldukça karmaşık ya da bulunmasının mümkün olmadığı durumlar olabilmesidir. Böyle durumlar için analitik çözüm aramak yerine yaklaşık çözümler üreten sayısal yöntemler tercih edilmektedir.

Birçok sayısal yöntemden biri de sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemde kullanılacak olan integral formları, sayısal yöntemle elde edilen yaklaşım denklemiyle orijinal denklem arasındaki sapma miktarını en aza indirgeyen, ağırlıklı rezidüleri kullanılarak verilmektedir. Ağırlıklı rezidü kullanılan sonlu elemanlar yöntemlerinin bazıları kolokasyon, Galerkin, Petrov-Galerkin ve bu çalışmada da kullanılacak olan en

küçük kareler yöntemleridir. Bu çalışmada RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümleri üstel B-spline fonksiyonlar ile en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilecektir.

Elle hesaplanabilmesi ve bilgisayar programlarının kolay yapılması nedeniyle adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinde spline fonksiyonlar tercih edilir. Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır, ayrıca sonlu baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır. Belirli derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile gösterilebilir (De Boor, 1978). Bu sebeple de B-spline fonksiyonlar spline fonksiyonlar için birer taban oluştururlar. Bu çalışmada kullanılan üstel B-spline fonksiyonlar, üstel spline fonksiyon uzayı için birer tabandır.

Maliyet ve işlem zorluğu nedeniyle literatürde üstel B-spline fonksiyonlar ile en küçük kareler yöntemi genellikle birlikte kullanılmamıştır. Bu çalışmada, bu yöntem, RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesi ve daha önce çalışılmış test problemlerine uygulamak için kullanılmış ve elde edilen sonuçlar çizelgeler ve şekiller yardımıyla yorumlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde önce, spline fonksiyonlar, üstel B-spline fonksiyonlar, RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemleri ile ilgili yapılan literatür taramaları verilecektir. Daha sonra ise çalışmada kullanılacak olan yöntem ve kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için bir takım ön bilgiler verilecektir.

Spline teorisi Schoenberg (1946) tarafından literatüre kazandırılmadan önce sayısal hesaplamalarda işaret fonksiyonu, adım fonksiyonu gibi parçalı fonksiyonlar kullanılmıştır. Bunun nedeni polinomların kullanılmasıyla aynı temel sebebe dayanmaktadır, yüksek işlem maliyetinden sakınmak. Fakat zamanla bilgisayar teknolojisinin de ilerlemesiyle spline fonksiyonlara rağbet artmıştır. Bu fonksiyonlar önce interpolasyon polinomlarının yerini almış daha sonra ise bilgisayarda düzgün ve esnek şekiller çizmek için bir araç haline gelmiştir. Daha sonraları gelişen sanayi ile araçların dış yüzeyleri için yapılan modellemelerin esin kaynağı splinelar olmuştur. Bunlardan bir tanesi General Motors için çalışan De Boor'un çalışmasıdır (Birkhoff ve De Boor, 1965). B-spline fonksiyonların De Boor (1978) tarafından tanımlanmasıyla birlikte bu fonksiyonları baz alan trigonometrik B-spline (Koch, 1988) ve üstel B-spline (McCartin, 1981) gibi birçok B-spline fonksiyon tanımı ortaya çıkmıştır.

Literatüre bakıldığında üstel B-spline fonksiyonlarının birçok farklı alanda kullanıldığını görmek mümkündür. Ducros vd. (2009) üstel B-spline fonksiyonları baz alarak diffüz optik tomografi üzerine çalışmışlar ve zaman çözümümlü sinyaller için çok çözünürlüklü yaklaşıma dayalı yeni bir rekonstrüksiyon şeması oluşturmuşlardır. Rao ve Kumar (2008) üstel B-spline fonksiyonları kullanarak self-adjoint sınır değer problemini çözmüşlerdir. Mohammadi (2013) konveksiyon difüzyon denklemini, Dirichlet tipli sınır değerleri kullanarak kolokasyon yöntemiyle çözmek için üstel B-spline fonksiyonları kullanmıştır. Mohammadi bu çalışmasında zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemini kullanmıştır. Ayrıca yöntemin koşulsuz kararlılığını Von Neumann yöntemiyle göstermiştir. Mohammadi (2015) yine zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemini kullanarak, genelleştirilmiş RLW denkleminin çözümü için üstel B-spline kolokasyon yöntemini kullanmıştır. Üstel kübik B-spline'lar

yardımıyla Dağ ve Ersoy (2015) genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Dağ ve Ersoy bu çalışmalarında zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemini kullanmışlardır. Fisher denkleminin sayısal çözümü için Dağ ve Ersoy (2016) üstel kübik B-spline'lar kullanmışlar ve zaman parçalanması için Crank-Nicolson yöntemini önermişlerdir. Su dalgaları için bazı Boussinesq sistemlerinin çözümünde Ersoy vd. (2016) üstel B-spline kolokasyon yöntemini kullanmışlardır. Görgülü vd. (2017) zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemini kullandıkları RLW denklemini çalışmak için üstel B-spline Galerkin yöntemini kullanmışlardır. Shukla ve Tamsir (2017) üstel kübik B-spline'lar kullanarak 2D ve 3D konveksiyon-difüzyon denklemlerini çalışmışlardır. Bu çalışmada lineerleştirme için 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Hepson vd. (2020) zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson ve birinci mertebeden lineerleştirme yöntemini kullanarak Gardner denkleminin sayısal çözümlerini üstel B-spline fonksiyonları kullanarak elde etmişlerdir.

Ardışık dalgaların gelişimini modellemek için RLW denklemini önerdiği çalışmasında Peregrine (1966) bu denklemin sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümlerini de elde etmiştir. Her ne kadar Korteweg-de Vries denklemi daha yaygın olarak bilinse de bu denklemin sonsuz sayıda korunum kuralına sahip olması gibi bazı dezavantajları vardır. Benjamin ve arkadaşlarının RLW denklem çözümlerinin kararlı ve benzersiz olduğunu göstermesi RLW denklemlerine olan ilgiyi artırmıştır çünkü bu denklemin sadece üç korunum kuralı vardır (Benjamin vd., 1972; Olver, 1979). RLW denkleminin bazı başlangıç şartları altında özel analitik çözümleri mevcut olmakla birlikte literatürde sayısal yöntemler kullanılarak elde edilen çözümlerine ait çalışmalar oldukça fazladır. Jain vd. (1993) RLW denkleminin sayısal çözümü için kübik spline kullanmışlardır. Gardner vd. (1995) kuadratik B-spline sonlu elemanlar yöntemini kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümünü çalışmışlardır. Bu çalışmada zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemini kullanmışlardır. Dağ (2000) kuadratik B-spline fonksiyonları kullanarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin çözümünü çalışmıştır. Dağ ve Özer (2001) kübik B-spline en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü çalışmışlardır. Dağ vd. (2004) kübik B-spline kolokasyon yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü çalışmışlardır.

Kutluay ve Esen (2006) RLW denkleminin sayısal çözümü için sonlu farklar yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmada zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi önerilmiştir. Kuintik B-spline kolokasyon yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümü, Saka vd. tarafından çalışılmıştır (Saka vd., 2008). Bu çalışmada zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi kullanılmıştır. RLW denkleminin sayısal çözümü için septik ve septik B-spline kolokasyon yöntemi (Saka vd., 2011) tarafından önerilmiştir. Irk (2012), zaman ayrıştırması için Adams Moulton, konum ayrıştırması için ise kuintik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak kolokasyon yöntemiyle RLW denklemini sayısal olarak çözmüştür. Sun ve Wang (2017) Galerkin yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümü ve hata analizini çalışmışlardır. Bayarassou vd. (2019) RLW denklemlerinin çözümü için yüksek dereceli konservatif doğrusallaştırılmış sonlu fark şeması kullanmışlardır.

Burgers denkleminin en çok bilinen hali viskoziteli Burgers denklemidir. Viskozite, akışkanın etkilendiği kuvvetler altında şekil değiştirmeye gösterdiği dirençtir ve kısaca akamazlık olarak da tanımlanabilir. Burgers kendi adını verdiği bu denklemin Navier-Stokes denkleminin sadeleşmiş bir hali olduğunu göstermiş ve denklemini türbülansın matematiksel modellemesi için kullanmıştır (Burgers, 1939, 1948). Sonraları ise Burgers denklemi şok dalgaları, gaz dinamiği gibi birçok farklı alanda yapılan çalışmalar için matematiksel model olarak kullanılmıştır. Burgers denkleminin denge durumu çözümü ilk olarak (Bateman, 1915) çalışmasında verilmiştir. Hopf-Cole dönüştürme yardımıyla Burgers denkleminin Fourier serisi cinsinden analitik çözümleri bulunabilir (Hopf, 1950; Cole, 1951). Benton ve Platzman (1972) Burgers denkleminin farklı başlangıç değerlerini için çözümlerini listeledikleri bir çalışma yapmışlardır. Burgers denklemi alt denklemlere parçalanarak da (splitting) çalışılmıştır (Jain ve Holla, 1978; Jain ve Raja, 1979; Jain vd., 1992). Varoğlu ve Finn ağırlıklı rezidü formülasyonu kullanarak, yüksek hassasiyet ve kararlılık gösteren, bir sonlu elemanlar yöntemi ile Burgers denkleminin sayısal çözümünü çalışmışlardır (Varoğlu ve Finn, 1980). Nguyen ve Rynen (1982) Burgers denkleminin sayısal çözümü için en küçük kareler yöntemine dayalı doğrusal konum-zamanlı bir sonlu elemanlar yöntemi kullanmışlardır. Ali vd. Burgers denkleminin sayısal çözümü için B-spline Galerkin ve B-spline kolokasyon yöntemini kullanılmıştır (Ali vd., 1990, 1992). Raslan

(2003) kuadratik B-spline sonlu elemanlar kullanarak kolokasyon yöntemiyle Burgers denkleminin sayısal çözümünü elde etmiştir. Kutluay vd. (2004) Burgers denkleminin sayısal çözümü için kuadratik B-spline sonlu elemanlar yöntemini önermişler ve yöntemin kararlılığını Fourier karahlık analizi ile göstermişlerdir. Dağ vd. (2005) bir boyutlu Burgers denkleminin sayısal çözümü için kübik B-spline sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. (Saka ve Dağ, 2007) çalışmasında Burgers denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline kolokasyon yöntemini önermişlerdir. Dağ vd. (2011) B-spline fonksiyonlar kullanarak Burgers denkleminin sayısal çözümü için Taylor-Galerkin ve Taylor kolokasyon yöntemini kullanmışlardır. Korkmaz ve Dağ (2013) kübik B-spline diferensiyel kuadratur yöntemiyle Burgers denkleminin çözümünü ve yöntemin kararlılığını araştırmışlardır. Burgers denkleminin sayısal çözümü için Tamsir vd. (2016) üstel modifiye kübik B-spline diferensiyel kuadratur yöntemini kullanmışlardır. Jiwari ve Saleh (2017) Burgers tipli denklemlerin çözümü için modifiye trigonometrik kübik B-spline fonksiyonlar üstüne kurulmuş yeni bir sayısal yöntem çalışmışlardır. Bir ve iki boyutta Burgers denkleminin sayısal çözümü için Arora ve Joshi (2018) modifiye edilmiş trigonometrik kübik B-spline kullanmışlardır.

Hareket halindeki akışkanın içinde bulunan bir maddenin, akışkan ile birlikte belirli bir yönde, kütle hareketi sonucu taşınmasına adveksiyon denir. Difüzyon (yayınım) ise bir madde içindeki belirli bir türden hareketli parçacıkların, derişimin yüksek olduğu yerden az olduğu yerlere doğru taşınması olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla AD denklemi birçok fiziksel olayın özellikle de sıvıların (akışkanların) akışının matematiksel modellenmesinde kullanılmıştır (Roache, 1972; Spalding, 1972; Dehghan, 2004). Chatwin ve Allen (1985) tuzlu suların tatlı su akiferlerine sızması ve kirleticilerin nehir ve derelere yayılmasının matematiksel modellemesini AD denklemi ile yapmıştır. Zlatev vd. (1984) hava kirleticilerinin uzun mesafelere taşınmasını AD denklemi kullanarak incelemişlerdir. AD denkleminin sayısal çözümü için Pepper vd. (1979) kuasi Lagrange kübik spline yöntemini kullanmışlardır. Gardner ve Dağ (1994) AD denklemini çözmek için kübik B-spline Galerkin yöntemini kullanmışlardır. Dağ vd. (2006) AD denkleminin sayısal çözümü için B-spline en küçük kareler yöntemini kullanmışlardır. Goh vd. (2012) kübik B-spline kolokasyon yöntemi kullanarak AD denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Korkmaz ve Dağ (2012) AD denkleminin sayısal

çözümü için kübik B-spline diferensiyel kuadratur yöntemlerini çalışmışlardır. AD denkleminin sayısal çözümleri genişletilmiş kübik B-spline kullanarak da elde edilmiştir (Irk vd., 2015; Görgülü vd., 2018). Hutomo vd. (2019) du-fort frankel yöntemi kullanarak değişken katsayılı 2-d adveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümünü çalışmışlardır.

Modern istatistiğin kurucularından kabul edilen ve ANOVA'nın geliştiricisi olan Ronald Aymler Fisher doğal seçim prensibinin matematiksel biçimde ifade edilmesine de büyük katkı katkı sağlamıştır. Fisher ve Balmukand (1928) yayımladıkları çalışmada bir nüfus içinde gen çokluluk dağılımlarının hesaplanması için difüzyon denklemlerini kullanılması önermişlerdir. Fisher 1937 yılında avantajlı genlerin ilerleme dalgası isimli bir çalışma yayımlamıştır (Fisher, 1937). Ablowitz ve Zeppetella belirli bir hızla sahip dalgalar için Fisher denkleminin çözümünü yapmışlardır (1937) Zhao ve Wei (2003) Fisher denklemini çalışmışlar ve elde ettikleri sonucu Fourier pseudo-spectral metodu gibi bazı yöntemlerle karşılaştırmışlardır. Şahin vd. (2008) Fisher denkleminin çözümü için B-spline Galerkin yöntemini kullanmışlardır. Dağ vd. (2010) kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Galerkin yöntemiyle Fisher denkleminin çözümünü çalışmışlardır. Dağ ve Ersoy (2016) Fisher denkleminin sayısal çözümü için üstel kübik B-spline algoritmasını kullanmışlardır. Görgülü ve Dağ (2017) üstel B-spline Galerkin yöntemiyle Fisher denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir.

Dalga kavramından ve dalgaların sınıflandırılmasından başlanmak üzere, bu bölümün geri kalan kısmında, bu çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilecektir. Bu kavramlardan bazıları kullanıldıkları bölümde yeri geldikçe detaylandırılacaktır. Verilecek temel kavramların uygulanacak sayısal yöntemi anlamaya ve çözümü yorumlamaya yetecek seviyede olmasına dikkat edilmekle beraber ana konuyu dağıtmaması için mümkün olduğunca gereksiz ayrıntı içermemesine dikkat edilmeye çalışılmıştır. Sayısal çözümü çalışılacak olan RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemleri solitary dalga çözümlerine sahip olduğu için, soliton teorisi ve solitary dalgalar hakkında kısaca bilgi verilecektir. Ardından lineer olmayan oluşum denklemleri, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri açıklanacaktır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri özetlendikten sonra, bu çalışmada kullanılacak olan en küçük kareler yöntemini de içeren ağırlıklı rezidüel yönteminin ve spline

fonksiyonların tanımları verilerek, tezde kullanılacak olan üstel B-spline interpolasyon fonksiyonları ve sayısal çözümü araştırılacak olan RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemleri tanıtılacaktır. Son olarak da sayısal çözümü araştırılan RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemleri, üstel B-spline en küçük kareler yöntemiyle çözülecek ve test problemlerine ait sonuçlar verilecektir.

2.1. Dalga ve Dalgaların Sınıflandırılması

Dalga, bir fizik terimi olarak uzayda ve maddede yayılan ve enerjinin taşınmasına yol açan titreşime denir. Dalga hareketi, çok az ya da hiç kütle taşımamı olmadan, enerjiyi bir yerden başka bir yere taşır. Dalgalar sabit konumda oluşan titreşimlerden oluşurlar ve zamanla nasıl ilerlediğini gösteren bir dalga denklemi ile tanımlanırlar. Bu denklemin matematiksel tanımı dalga çeşidine göre farklılık gösterir.

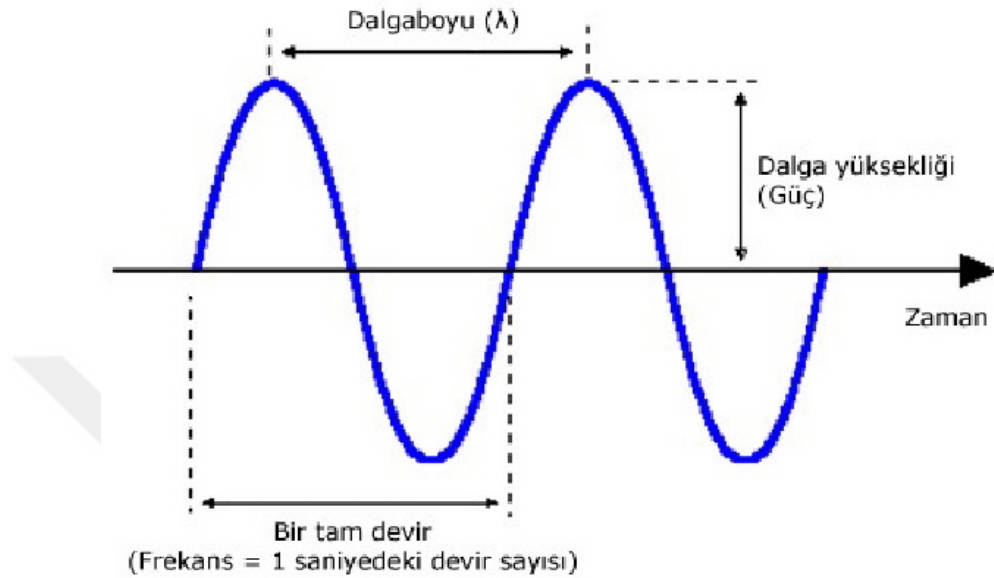
İki çeşit dalga vardır. *Mekanik dalgalar* bir ortam aracılığıyla yayılırlar ve deforme edilirler. Mesela, ses dalgaları çarpışan hava molekülleri yolu ile yayılır. Hava molekülleri çarpıştığında, moleküller birbirleri boyunca sıçrarlar. Bu, moleküllerin dalganın yönünde yol almasını devam ettirir.

Dalgaların ikinci çeşidi *elektromanyetik dalgalar*dır. Elektromanyetik dalgalar bir ortama ihtiyaç duymazlar. Bunun yerine yüklü parçacıklar tarafından, elektrik ve manyetik alanların periyodik titreşimlerinden meydana gelirler ve böylece boşlukta ilerlerler. Bu tip dalgalara örnek olarak radyo dalgaları, mikrodalgalar, kızılötesi ışınlar, görüntür ışınlar, morötesi ışınlar, gama ışınları ve x ışınları verilebilir.

Titreşimin yönüne bağlı olarak enine dalgalar veya boyuna dalgalar oluşabilir. Elektromanyetik dalgalarda olduğu gibi enerji transferinin yönünde, yayılmaya dik açılarda bir titreşim oluşursa enine dalgalar meydana gelir. Havada yayılan ses dalgalarında olduğu gibi titreşimlerin yayılmanın yönüne paralel olduğu durumda ise boyuna dalgalar meydana gelir. Su dalgaları ve deprem dalgaları (yüzey dalgaları) gibi bazı mekanik dalgalar hem enine hem de boyuna dalgalardır.

Havada farklılığa sebep olan her şeyin görülmesi mümkündür. Örneğin ses dalgalarının ve hatta havanın kendisinin “Schlieren Flow Visualization” (Schlieren Akış Görselleştirme) tekniği ile görüntülenmesi mümkündür. Bu teknik yoğunluk farkı

kullanarak şeffaf maddelerin gözle görülmesine imkân sağlamaktadır. Ayrıntılı bilgi için (Settles, 2001) incelenebilir.



Şekil 2.1. Basit bir dalga profili

Basit bir dalga profili Şekil 2.1'de gösterildiği gibidir. Dalganın yayılma hızı ortamın özelliklerine (ayrıca dalganın şekline ve tipine) de bağlıdır. Örneğin, ses dalgaları havada 340 m/s, helyum içinde ise 1000 m/s ile seyahat ederler (Crawford, 1968).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak da sınıflandırılabilir. Duran (durağan) dalgalar sabit pozisyonda kalan dalgalardır. Bu olay ortamın dalgaya zıt yönde hareket etmesi sonucunda meydana gelebilir ya da durağan bir ortamda zıt yönlerde hareket eden iki dalga arasındaki girişimin bir sonucu olarak ortaya çıkabilir. Birbirine karşı yayılan (eşit genlik ve frekansa sahip) iki dalganın toplamı, duran dalga oluşturur. Duran dalgalar genelde sınırın dalganın daha fazla yayılmasını engellemesi, böylece dalga yansımaya neden olması sonucunda ortaya çıkar ve dolayısıyla birbirine karşı yayılan dalga oluştururlar.

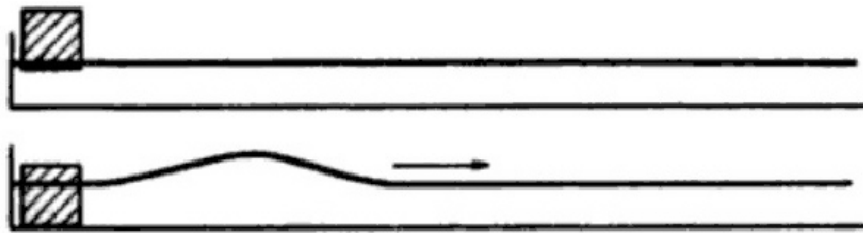
İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

2.2. Soliton ve Solitary Dalgalar

Solitonlar için kapsamlı ve kesin bir tanım yapmak kolay değildir fakat aşağıdaki üç özelliğe sahip lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilirler (Drazin ve Johnson, 1989).

1. Kalıcı bir şekle sahiptirler.
2. Bir bölge ile sınırlanmışlardır.
3. Diğer solitonlarla güçlü etkileşime girebilirler fakat kendi özelliklerini kaybetmezler (Bkz. Şekil 2.3). Burada tek istisna durum faz kaymasıdır (dopler etkisi).

İlk özellik, solitary dalga şartıdır. Solitary dalga ilk kez J. Scott Russell tarafından 1834 yılında Union Kanalı'nda gözlemlenmiştir. Russell bu dalgayı "büyük dönüşüm dalgası" olarak tanımlamıştır. Russell at sırtında yaptığı meşhur gözlemi sonrasında, elde ettiği bazı matematiksel bulguları "Dalgalar üzerine raporlar" ismiyle 1844 yılında British Association'da paylaşmıştır (Russell, 1844). Russell bu raporda solitary dalgaları laboratuvarında deneyimlemek için ne tür çalışmalar yaptığından da bahsetmektedir. Şekil 2.2'de Russell'ın bir su kanalının sonuna bir ağırlık bırakarak elde ettiği solitary dalga diyagramı verilmiştir.



Şekil 2.2. Russell'ın solitary dalga üretirken kullandığı yöntem

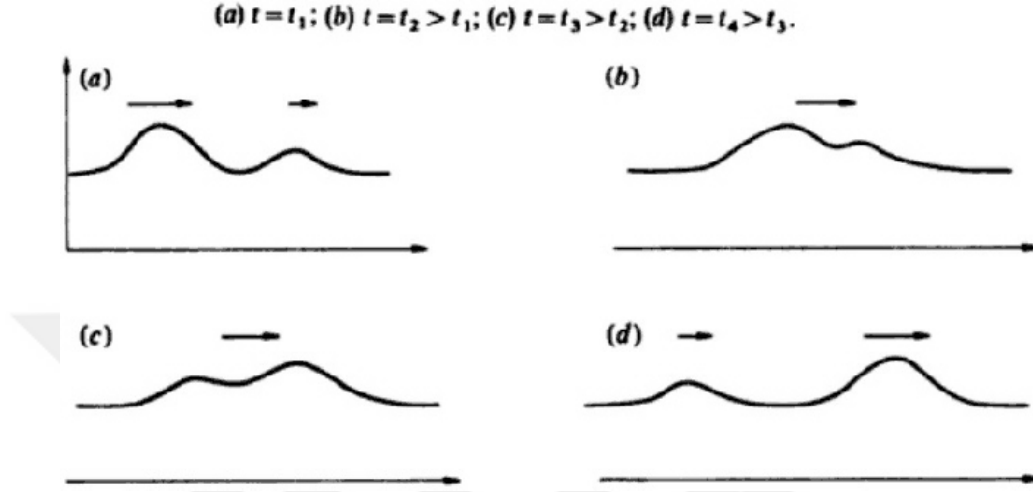
Russell bu raporunda bir solitary dalganın hızını yaklaşık olarak

$$v = \sqrt{gh} \quad (2.1)$$

ve tam olarak

$$v = \sqrt{g(h+k)} \quad (2.2)$$

bulduğunu açıklamıştır. Burada g yerçekimi ivmesi, h kanalın derinliğini ve k dalganın yüksekliğini (amplitude) göstermektedir (Bkz. Şekil 2.4). (2.2) denkleminin en önemli sonuçlarından biri yüksek dalganın daha hızlı hareket edeceğidir (Bkz. Şekil 2.3).

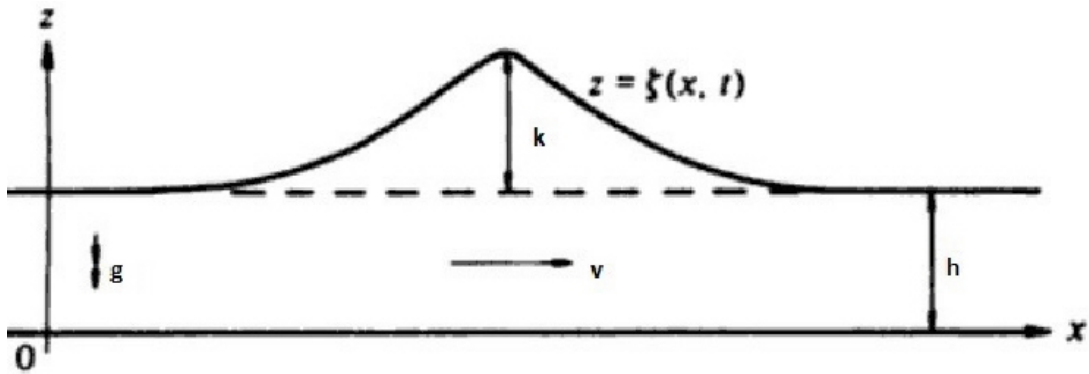


Şekil 2.3. İki solitary dalganın girişimi

Boussinesq (1871) ve Lord Rayleigh (1876) yaptıkları çalışmalarda dalga hızı için Russell'in verdiği formülü elde ettiler. Ayrıca dalga denkleminin, herhangi pozitif bir a için $\beta^{-2} = 4h^2(h + k)/3a$ olmak üzere

$$z = \zeta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 [\beta (x - vt)] \quad (2.3)$$

olduğunu göstermişlerdir. Buradaki sech^2 formunun kesin doğruluğu için $k/h < 1$ olmalıdır.



Şekil 2.4. Solitary dalgaları açıklamak için kullanılan parametre ve değişkenler

Boussinesq ve Lord Rayleigh $\zeta(x, t)$ için (2.3) denklemini sağlayacak şekilde bir denklem yazamamışlardır. Bu son adım Korteweg ve de Vries tarafından tamamlanmıştır (Korteweg ve de Vries, 1895). Korteweg ve de Vries ε ve σ küçük sayılar ve χ dalganın üzerinde hareket ettiği koordinat olmak üzere

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3} \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \chi^3} \right) \quad (2.4)$$

olduğunu gösterdiler. Denklemden

- ε , keyfi parametreye;
- $\sigma = \frac{1}{3}k^3 - Tk/g\rho$, dağılma parametresine;
- T , yüzey gerilimine;
- ρ , suyun yoğunluğuna;

karşılık gelmektedir ve genellikle $T < \frac{1}{3}g\rho k^2$ dir (Drazin ve Johnson, 1989).

1965 yılında Zabusky ve Kruskal KdV denkleminin sonlu farklar yöntemi ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky ve Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner vd. tarafından ters saçılma dönüşüm yöntemi geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir (Gardner vd., 1967).

Soliton çözümleri hem analitik hem de sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerindeki çalışmalar daha da hızlanmıştır. İlk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, lazer fiziği, süper iletkenlik fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Gu, 1995).

Solitonlar ayrıca uzun mesafelere yol alabildiğinden, teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple soliton, elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır. Optik soliton ilk defa teorik olarak Hasegawa ve Tappert

tarafından gösterilmiş (Hasegawa ve Tappert, 1973) ve Mollenauer vd. tarafından deneysel olarak gözlenmiştir (Mollenauer vd., 1980).

Solitonlar DNA ve proteinlerde de oluşabilirler (Yakushevich, 2000; Davydov, 1991). Son zamanlarda sinirbiliminde geliştirilmiş olan model, nöron sinyallerinin, solitonlar biçiminde davranışlar sergiledikleri söylemektedir (Andersen vd., 2009).

2.3. Linear Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri t zamanı olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri, $K[u]$; u ve u 'nun x değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere

$$u_t = K[u] \quad (2.5)$$

formundadır. Eğer $K[u]$, u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve $K[u]$, u terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir. Bir teldeki titreşim veya ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine örnek olarak verilebilir.

Zamana bağlı, bağımsız değişken içeren lineer olmayan oluşum denklemleri yalnızca matematiğin farklı alanları için değil, fizik, mekanik ve malzeme bilimi gibi farklı bilim dalları için de ortaya çıkarılmıştır. Kullanım alanlarına örnek olarak, akışkanlar mekaniğindeki Navier-Stokes ve Euler denklemleri, ısı transferi ve biyolojik bilimlerdeki lineer olmayan tepki-yayılm denklemleri, kuantum mekaniğindeki lineer olmayan Klein-Gordan denklemleri ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri ve malzeme bilimindeki polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda kullanılan Cahn-Hilliard denklemleri verilebilir (Zheng, 2004).

2.3.1. Korunum kanunları

(2.5) lineer olmayan oluşum denklemlerinin korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \quad (2.6)$$

formundadır. Burada $\mathcal{T}[u]$ ve $\mathcal{X}[u]$ sırasıyla, u ve u fonksiyonunun x değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır. \mathcal{T}_t ve \mathcal{X}_x sırasıyla t ve x değişkenlerine göre tam türevi ifade ederler ve zincir kuralından

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + \dots \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_x + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + \dots\end{aligned}\quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir.

(2.6) denkleminin x değişkenine göre bir (A, B) aralığında integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = \frac{d}{dt} \int_A^B \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = 0 \quad (2.8)$$

elde edilir. $(B - A)$ 'nın periyodun tam katı olduğu veya $u(x, t)$ 'nin $x \rightarrow \mp\infty$ ve $(A, B) = (-\infty, \infty)$ iken sıfıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında, (2.8) eşitliğinden

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \mathcal{T} dx = 0 \quad (2.9)$$

ifadesi bulunur. Burada t değişkenine göre integral alındığında (2.10) hareket sabiti elde edilir (Fordy, 1990; Döken, 2002).

$$\int_A^B \mathcal{T} dx = \text{sabit} \quad (2.10)$$

2.4. Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferensiyel denklemler, kısmi türevli diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ile ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı, analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu veya başlangıç ve sınır şartlarının esnetilmek istendiği durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri bu yöntemlerden ikisidir.

Sonlu farklar yönteminde, üzerinde çalışılan tanım aralığı birbirlerinden farklı olan noktalar kümesi ile yer değiştirilirken, sonlu elemanlar yönteminde, tanım bölgesi sonlu

elemanlar olarak adlandırılan alt tanım bölgelerine ayrılır. Ayrıca sonlu elemanlar yönteminde aranan çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemleri arasında birtakım farklılıklar vardır. Bu farklılıklar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Sonlu farklar yönteminde, diferensiyel denklemdaki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar yönteminde ise diferensiyel denklemin çözümü için bir yaklaşım yapılır.
- Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar yöntemi ile çözümleri zordur. Ayrıca sonlu farklar yöntemi, problemin çözüm bölgesinin düzgün geometrik şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık, sonlu elemanlar yöntemi hem düzgün hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir.
- Sonlu farklar yönteminin en önemli özelliği uygulanmasının kolay olmasıdır.
- Bölünme noktaları arasındaki bir değer için, sonlu farklar yöntemi ile bir yaklaşım yapılamazken, sonlu elemanlar yönteminde her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir.
- Sonlu elemanlar yaklaşımı, genelde sonlu farklar yaklaşımından daha iyidir. Fakat bu durum probleme bağlıdır ve aksi örnekler bulunabilir.
- Sonlu farklar yöntemlerini elde etmek için Taylor serileri yeterli olurken, sonlu elemanlar yöntemlerini elde etmek daha zor işlemler ve daha fazla bilgi gerektirir.

Aşağıda bu çalışmada kullanacağımız sonlu elemanlar yönteminin temeli sayılan ağırlıklı rezidüler yöntemi hakkında birtakım bilgiler verilmiştir.

2.4.1. Ağırlıklı rezidüler yöntemi

$$Lu - f = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilen bir diferensiyel denklemde; L bir lineer diferensiyel operatör, f bilinen bir fonksiyon ve u aranan çözüm olsun. (2.11) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü yöntemi kullanıldığında, aranan $u(x, t)$ ifadesi yerine

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (2.12)$$

formundaki U sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(2.12) eşitliğinde verilen $\phi_j(x)$, $j = 1, \dots, N$ analitik (deneme veya genişleme) fonksiyonu, diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve a_j , $j = 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar yönteminde, ϕ_j fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemi sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidüler yöntemi, U sayısal çözümüyle orijinal denklem arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçüsü rezidü ile tanımlanır:

$$R = LU - f \quad (2.13)$$

W_j lineer bağımsız ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere (2.13) ile verilen rezidü ifadesi; W_j ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak Ω tanım bölgesi üzerindeki integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} W_j R dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

formunda N bilinmeyen N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden a_j bilinmeyenleri bulunarak (2.12) eşitliğinde yerine yazılırsa U sayısal çözümüne ulaşılır.

Aşağıda farklı ağırlık fonksiyonları seçilerek üretilen önemli hesaplama yöntemlerinin birkaçı verilmiştir (Kumar, 2008)

Ağırlık fonksiyonu, W_j	Yöntem
$W_j(x) = \begin{cases} 1 & x, \Omega \text{ nın içinde} \\ 0 & x, \Omega \text{ nın dışında} \end{cases}$	Kolokasyon
$W_j(x) = \frac{\partial R}{\partial a_j}$	En küçük kareler
$W_j(x) = x^j$	Moment yöntemi
$W_j(x) = \phi_j(x)$	Galerkin
$W_j(x) = \Psi_j(x) [\neq \phi_j(x)]$	Petrov-Galerkin

2.5. Spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayısı çoğaldıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda ardı ardına gelen iki veri arasında birinci, ikinci, üçüncü ya da daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır:

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır (yeterince türevelere sahip).
- Spline fonksiyonlar, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve bilgisayar programlarının yapılması kolaydır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

B-spline fonksiyonlar spline fonksiyonların özel bir halidir. Farklı dereceden B-spline fonksiyonlar vardır. Örneğin 0. dereceden B-spline fonksiyon

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.15)$$

formunda tanımlanır. Burada

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \quad (2.16)$$

B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesidir. B_i^0 B-spline fonksiyonun süreksiz olduğu açıktır. Diğer yandan sıçramanın olduğu her noktada

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) = 1 = B_i^0(x_i) \\ \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) = 0 = B_i^0(x_{i+1}) \end{array} \right\} \text{her } i \text{ ve } x_i \text{ için} \quad (2.17)$$

olduğundan B_i^0 B-spline fonksiyon sağdan süreklidir. Yukarıdaki verilen iki eşitlikten dolayı da $B_i^0(x)$ B-spline fonksiyonun

$$\begin{aligned} &\text{Her } i \text{ ve } x_i \text{ için, } B_i^0(x) \geq 0, \\ &\text{Her } x \text{ için, } \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

özelliklerini sağladığı ve sadece $[x_i, x_{i+1})$ aralığında değer aldığı açıktır.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} B_i^k &= \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ k &= 1, 2, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir. B_i^k B-spline fonksiyon aynı nokta dizileri için tanımlı ve derecesi k olan spline fonksiyonlar için tabandır. Ayrıca derecesi k olan B-spline fonksiyon, (2.20) ve (2.21) kullanılarak da elde edilebilir.

$$(x - x_{m+i})_+^k = \begin{cases} (x - x_{m+i})^k, & x_{m+i} \leq x \\ 0, & x_{m+i} > x \quad -\infty < i < \infty \end{cases} \quad (2.20)$$

$$B_i^k(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{k=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} (-1)^m (x - x_{m+i})_+^k \quad (2.21)$$

(2.21) ifadesi, $x \leq x_i$ ve $x \geq x_{i+m+1}$ olduğunda $B_i^k(x) = 0$ durumunu sağlar ve derecesi k olan B-spline, $k - 1$ kez sürekli türevelere sahip olur (De Boor, 1978).

2.5.1. Üstel B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (2.22)$$

düğüm noktaları kullanılarak $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N - 1$ eşit uzunluklu N sonlu eleman ile ayrıştırılsın. ϕ_m üstel B-spline fonksiyonları, çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığının dışında

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \text{ ve } x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$$

olacak şekilde 6 ilave düğüm noktası ile birlikte tanımlanır. Üstel B-spline fonksiyonların bir kümesi $\{\phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}\}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır ve ϕ_m üstel B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N + 1$ için aşağıdaki gibi tanımlanır (McCartin, 1981):

$$\phi_m(x) = \begin{cases} g_1(x_{m-2} - x) & ; x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ g_2(x_m - x) & ; x \in [x_{m-1}, x_m], \\ g_2(x - x_m) & ; x \in [x_m, x_{m+1}], \\ g_1(x - x_{m+2}) & ; x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0 & ; \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.23)$$

Burada

$$\begin{aligned} g_1(x) &= b_2 \left[x - \frac{1}{\rho} \sinh(\rho x) \right], \\ g_2(x) &= a_1 + b_1 x + c_1 e^{\rho x} + d_1 e^{-\rho x} \end{aligned} \quad (2.24)$$

ve $s = \sinh(\rho h)$, $c = \cosh(\rho h)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\rho hc}{\rho hc - s}, \\
b_1 &= \frac{\rho}{2} \left[\frac{c(c-1) + s^2}{(\rho hc - s)(1-c)} \right], \\
b_2 &= \frac{\rho}{2(\rho hc - s)}, \\
c_1 &= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-\rho h}(1-c) + s(e^{-\rho h} - 1)}{(\rho hc - s)(1-c)} \right], \\
d_1 &= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{\rho h}(c-1) + s(e^{\rho h} - 1)}{(\rho hc - s)(1-c)} \right]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

olarak alınmıştır.

$\phi_m(x)$ baz fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında iki kez sürekli diferensellenebilir ve bu aralık dışında $\phi_m(x)$ baz fonksiyonu ve onun ilk iki türevi sıfırdır. (2.23) bize her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanın dört üstel B-spline tarafından örtüldüğünü ve yine her bir üstel B-spline'nın dört sonlu elemanı örttüğünü gösterir.

(2.23)'den faydalanarak ' ve '' , x 'e göre sırasıyla birinci ve ikinci türevleri göstermek üzere, $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ fonksiyonlarının $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığındaki bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-2}) &= g_1(x_{m-2} - x_{m-2}) = g_1(0) = b_2 \left[0 - \frac{1}{\rho} \sinh(0) \right] \\
&= 0 \\
\phi_m(x_{m-1}) &= g_2(x_m - x_{m-1}) = g_2(h) = a_1 + b_1 h + c_1 e^{\rho h} + d_1 e^{-\rho h} \\
&= \frac{\rho hc}{\rho hc - s} + \frac{\rho h}{2} \left[\frac{c(c-1) + s^2}{(\rho hc - s)(1-c)} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1-c+s(1-e^{\rho h})}{(\rho hc - s)(1-c)} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{c-1+s(1-e^{-\rho h})}{(\rho hc - s)(1-c)} \right] \\
&= \frac{s-\rho h}{2(\rho hc - s)} \\
\phi_m(x_m) &= g_2(x_m - x_m) = g_2(0) = a_1 + c_1 + d_1 \\
&= \frac{\rho hc}{\rho hc - s} + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-\rho h}(1-c) + s(e^{-\rho h} - 1)}{(\rho hc - s)(1-c)} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{\rho h}(c-1) + s(e^{\rho h} - 1)}{(\rho hc - s)(1-c)} \right] \\
&= 1 \\
\phi_m(x_{m+1}) &= g_1(x_{m+1} - x_{m+2}) = g_1(-h) = b_2 \left[-h - \frac{1}{\rho} \sinh(-\rho h) \right] \\
&= \frac{\rho}{2(\rho hc - s)} \left(-h + \frac{1}{\rho} s \right) \\
&= \frac{s-\rho h}{2(\rho hc - s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m+2}) &= g_1(x_{m+2} - x_{m+2}) = g_1(0) = b_2 \left[0 - \frac{1}{\rho} \sinh(0) \right] \\
&= 0 \\
\phi'_m(x_{m-2}) &= -g'_1(x_{m-2} - x)|_{x_{m-2}} = -g'_1(0) = -b_2 [1 - \cosh(0)] \\
&= 0 \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= -g'_2(x_m - x)|_{x_{m-1}} = -g'_2(h) = -b_1 - \rho c_1 e^{\rho h} + \rho d_1 e^{-\rho h} \\
&= -\frac{\rho}{2} \left[\frac{c(c-1)+s^2}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] - \frac{\rho}{4} \left[\frac{1-c+s(1-e^{\rho h})}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] + \frac{\rho}{4} \left[\frac{c-1+s(1-e^{-\rho h})}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] \\
&= \frac{\rho(c-1)}{2(\rho hc-s)} \\
\phi'_m(x_m) &= g'_2(x - x_m)|_{x_m} = g'_2(0) = b_1 + \rho c_1 - \rho d_1 \\
&= \frac{\rho}{2} \left[\frac{c(c-1)+s^2}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] + \frac{\rho}{4} \left[\frac{e^{-\rho h}(1-c)+s(e^{-\rho h}-1)}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] - \frac{\rho}{4} \left[\frac{e^{\rho h}(c-1)+s(e^{\rho h}-1)}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] \\
&= 0 \\
\phi'_m(x_{m+1}) &= g'_1(x - x_{m+2})|_{x_{m+1}} = g'_1(-h) = b_2 [1 - \cosh(-\rho h)] \\
&= \frac{\rho}{2(\rho hc-s)} [1 - \cosh(-\rho h)] \\
&= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho hc-s)} \\
\phi'_m(x_{m+2}) &= g'_1(x - x_{m+2})|_{x_{m+2}} = g'_1(0) = b_2 [1 - \cosh(0)] \\
&= 0 \\
\phi''_m(x_{m-2}) &= g''_1(x_{m-2} - x)|_{x_{m-2}} = g''_1(0) = -\rho b_2 \sinh(0) \\
&= 0 \\
\phi''_m(x_{m-1}) &= g''_2(x_m - x)|_{x_{m-1}} = g''_2(h) = \rho^2 (c_1 e^{\rho h} + d_1 e^{-\rho h}) \\
&= \frac{\rho^2}{4} \left[\frac{1-c+s(1-e^{\rho h})+c-1+s(1-e^{-\rho h})}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho hc-s)} \\
\phi''_m(x_m) &= g''_2(x - x_m)|_{x_m} = g''_2(0) = \rho^2 (c_1 + d_1) \\
&= \frac{\rho^2}{4} \left[\frac{e^{-\rho h}(1-c)+s(e^{-\rho h}-1)+e^{\rho h}(c-1)+s(e^{\rho h}-1)}{(\rho hc-s)(1-c)} \right] \\
&= \frac{-\rho^2 s}{\rho hc-s} \\
\phi''_m(x_{m+1}) &= g''_1(x - x_{m+2})|_{x_{m+1}} = g''_1(-h) = -\rho b_2 \sinh(-\rho h) \\
&= \rho b_2 s \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho hc-s)} \\
\phi''_m(x_{m+2}) &= g''_1(x - x_{m+2})|_{x_{m+2}} = g''_1(0) = -\rho b_2 \sinh(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2.26)

olarak elde edilir.

Bölünme noktalarındaki üstel B-spline değerleri Çizelge 2.1'de toplu olarak gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. Bölünme noktalarındaki üstel B-spline değerleri

	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$	1	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$	0
ϕ'_m	0	$\frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)}$	0	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)}$	0
ϕ''_m	0	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$	$-\frac{\rho^2 s}{\rho h c-s}$	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$	0

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı örten dört üstel B-spline fonksiyon $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ ve bu fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\phi_{m-1}(x) = g_1(x - x_{m+1})$$

$$\phi_m(x) = g_2(x - x_m)$$

$$\phi_{m+1}(x) = g_2(x_{m+1} - x)$$

$$\phi_{m+2}(x) = g_1(x_m - x)$$

$$\begin{aligned} \phi'_{m-1}(x) &= g'_1(x - x_{m+1}) \\ &= \frac{\rho}{2(\rho h c-s)} [1 - \cosh(\rho(x - x_{m+1}))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi'_m(x) &= g'_2(x - x_m) \\ &= b_1 + \rho c_1 e^{\rho(x-x_m)} - \rho d_1 e^{-\rho(x-x_m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi'_{m+1}(x) &= -g'_2(x_{m+1} - x) \\ &= -[b_1 + \rho c_1 e^{\rho(x_{m+1}-x)} - \rho d_1 e^{-\rho(x_{m+1}-x)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi'_{m+2}(x) &= -g'_1(x_m - x) \\ &= \frac{-\rho}{2(\rho h c-s)} [1 - \cosh(\rho(x_m - x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi''_{m-1}(x) &= g''_1(x - x_{m+1}) \\ &= \frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x-x_{m+1})]}{2(\rho h c-s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi''_m(x) &= g''_2(x - x_m) \\ &= \rho^2 c_1 e^{\rho(x_m-x)} + \rho^2 d_1 e^{-\rho(x_m-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}''(x) &= g_2''(x_{m+1} - x) \\
&= \rho^2 c_1 e^{\rho(x_{m+1}-x)} + \rho^2 d_1 e^{-\rho(x_{m+1}-x)} \\
\phi_{m+2}''(x) &= g_1''(x_m - x) \\
&= \frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x_m-x)]}{2(\rho hc-s)}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

olarak elde edilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı örten dört üstel B-spline fonksiyon ile bu fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri Çizelge 2.2'de toplu olarak gösterilmiştir.

Çizelge 2.2. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı örten dört üstel B-spline fonksiyon

	Kendisi	I. Türevi
$\phi_{m-1}(x)$	$g_1(x - x_{m+1})$	$\frac{\rho}{2(\rho hc-s)} [1 - \cosh(\rho(x - x_{m+1}))]$
$\phi_m(x)$	$g_2(x - x_m)$	$b_1 + \rho c_1 e^{\rho(x-x_m)} - \rho d_1 e^{-\rho(x-x_m)}$
$\phi_{m+1}(x)$	$g_2(x_{m+1} - x)$	$- [b_1 + \rho c_1 e^{\rho(x_{m+1}-x)} - \rho d_1 e^{-\rho(x_{m+1}-x)}]$
$\phi_{m+2}(x)$	$g_1(x_m - x)$	$\frac{-\rho}{2(\rho hc-s)} [1 - \cosh(\rho(x_m - x))]$
		II. Türevi
$\phi_{m-1}(x)$		$\frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x-x_{m+1})]}{2(\rho hc-s)}$
$\phi_m(x)$		$\rho^2 c_1 e^{\rho(x-x_m)} + \rho^2 d_1 e^{-\rho(x-x_m)}$
$\phi_{m+1}(x)$		$\rho^2 c_1 e^{\rho(x_{m+1}-x)} + \rho^2 d_1 e^{-\rho(x_{m+1}-x)}$
$\phi_{m+2}(x)$		$\frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x_m-x)]}{2(\rho hc-s)}$

Çizelge 2.2'de verilen $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ üstel B-spline fonksiyonlarının ve onların birinci ve ikinci türevlerinin de $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1}(x_m) &= g_1(x_m - x_{m+1}) = g_1(-h) \\
&= \frac{\rho}{2(\rho hc-s)} \left[-h - \frac{1}{\rho} \sinh(-\rho h) \right] \\
&= \frac{s-\rho h}{2(\rho hc-s)} \\
\phi_{m-1}(x_{m+1}) &= g_1(x_{m+1} - x_{m+1}) = g_1(0) \\
&= b_2 \left[0 - \frac{1}{\rho} \sinh(0) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(x_m) &= g_2(x_{m+1} - x_m) = g_2(h) \\
&= a_1 + b_1 h + c_1 e^{\rho h} + d_1 e^{-\rho h} \\
&= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(x_{m+1}) &= g_2(x_{m+1} - x_{m+1}) = g_2(0) \\
&= a_1 + c_1 + d_1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+2}(x_m) &= g_1(x_m - x_m) = g_1(0) \\
&= b_2 \left[0 - \frac{1}{\rho} \sinh(0) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+2}(x_{m+1}) &= g_1(x_m - x_{m+1}) = g_1(-h) \\
&= \frac{\rho}{2(\rho h c - s)} \left[-h - \frac{1}{\rho} \sinh(-\rho h) \right] \\
&= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_{m-1}(x_m) &= \frac{\rho}{2(\rho h c - s)} [1 - \cosh(\rho(x_m - x_{m+1}))] \\
&= \frac{\rho}{2(\rho h c - s)} [1 - \cosh(-\rho h)] \\
&= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_{m-1}(x_{m+1}) &= \frac{\rho}{2(\rho h c - s)} [1 - \cosh(\rho(x_{m+1} - x_{m+1}))] \\
&= \frac{\rho}{2(\rho h c - s)} [1 - \cosh(0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_{m+1}(x_m) &= -[b_1 + \rho c_1 e^{\rho(x_{m+1} - x_m)} - \rho d_1 e^{-\rho(x_{m+1} - x_m)}] \\
&= -(b_1 + \rho c_1 e^{\rho h} - \rho d_1 e^{-\rho h}) \\
&= \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_{m+1}(x_{m+1}) &= -[b_1 + \rho c_1 e^{\rho(x_{m+1} - x_{m+1})} - \rho d_1 e^{-\rho(x_{m+1} - x_{m+1})}] \\
&= -(b_1 + \rho c_1 - \rho d_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_{m+2}(x_m) &= \frac{-\rho}{2(\rho h c - s)} [1 - \cosh(\rho(x_m - x_m))] \\
&= \frac{-\rho}{2(\rho h c - s)} [1 - \cosh(0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_{m+2}(x_{m+1}) &= \frac{-\rho}{2(\rho hc-s)} [1 - \cosh(\rho(x_m - x_{m+1}))] \\
&= \frac{-\rho}{2(\rho hc-s)} [1 - \cosh(-\rho h)] \\
&= \frac{\rho(c-1)}{2(\rho hc-s)} \\
\phi''_{m-1}(x_m) &= \frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x_m - x_{m+1})]}{2(\rho hc-s)} \\
&= \frac{-\rho^2 \sinh(-\rho h)}{2(\rho hc-s)} \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho hc-s)} \\
\phi''_{m-1}(x_{m+1}) &= \frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x_{m+1} - x_{m+1})]}{2(\rho hc-s)} \\
&= \frac{-\rho^2 \sinh(0)}{2(\rho hc-s)} \\
&= 0 \\
\phi''_{m+1}(x_m) &= \rho^2 c_1 e^{\rho(x_{m+1} - x_m)} + \rho^2 d_1 e^{-\rho(x_{m+1} - x_m)} \\
&= \rho^2 c_1 e^{\rho h} + \rho^2 d_1 e^{-\rho h} \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho hc-s)} \\
\phi''_{m+1}(x_{m+1}) &= \rho^2 c_1 e^{\rho(x_{m+1} - x_{m+1})} + \rho^2 d_1 e^{-\rho(x_{m+1} - x_{m+1})} \\
&= \rho^2 c_1 + \rho^2 d_1 \\
&= \frac{-\rho^2 s}{\rho hc-s} \\
\phi''_{m+2}(x_m) &= \frac{-\rho^2 \sinh(\rho(x_m - x_m))}{2(\rho hc-s)} \\
&= \frac{-\rho^2 \sinh(0)}{2(\rho hc-s)} \\
&= 0 \\
\phi''_{m+2}(x_{m+1}) &= \frac{-\rho^2 \sinh[\rho(x_m - x_{m+1})]}{2(\rho hc-s)} \\
&= \frac{-\rho^2 \sinh(-\rho h)}{2(\rho hc-s)} \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho hc-s)}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

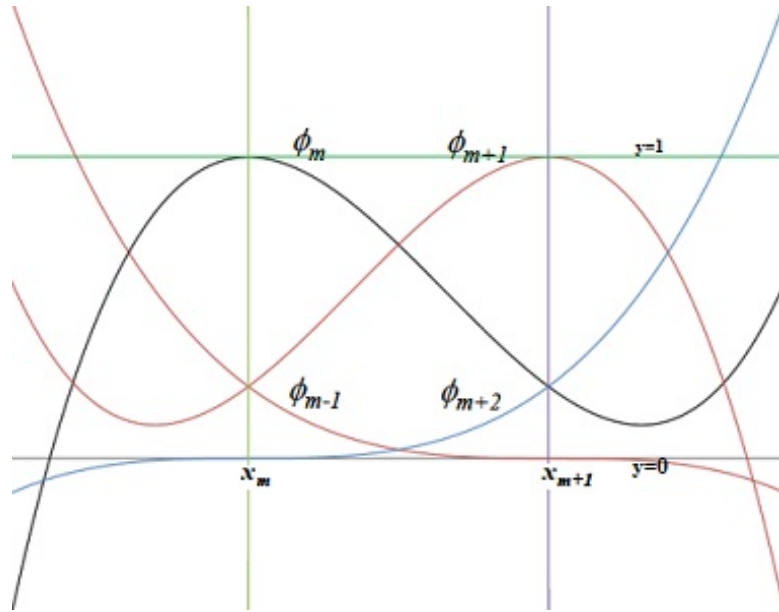
olarak elde edilir.

Çizelge 2.1 ve elde edilen bu değerler ile birlikte $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını örten dört üstel B-spline fonksiyonun, sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri toplu olarak Çizelge 2.3'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.3. Dört üstel B-spline fonksiyonun uç noktadaki değerleri

	x_m	x_{m+1}
ϕ_{m-1}	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$	0
ϕ'_{m-1}	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)}$	0
ϕ''_{m-1}	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$	0
ϕ_m	1	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$
ϕ'_m	0	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)}$
ϕ''_m	$\frac{-\rho^2 s}{\rho h c-s}$	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$
ϕ_{m+1}	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$	1
ϕ'_{m+1}	$\frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)}$	0
ϕ''_{m+1}	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$	$\frac{-\rho^2 s}{\rho h c-s}$
ϕ_{m+2}	0	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$
ϕ'_{m+2}	0	$\frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)}$
ϕ''_{m+2}	0	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$

Çizelge 2.3'deki değerler ile birlikte, $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı örten ardışık dört üstel B-spline fonksiyon Şekil 2.5'de gösterilmiştir.



Şekil 2.5. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı örten ardışık dört üstel B-spline fonksiyon

$u(x, t)$ fonksiyonunun sayısal çözümü $U(x, t)$, üstel B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (2.29)$$

toplamlarıyla bulunabilir. Ayrıca $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı Çizelge 2.2'de verilen dört ardışık üstel B-spline fonksiyon tarafından örtüldüğünden $u(x, t)$ fonksiyonunun bu eleman üzerindeki sayısal çözümü

$$U(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (2.30)$$

olarak alınabilir. (2.30) ve Çizelge 2.3 değerleri kullanılarak U , U' ve U'' fonksiyonlarının $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri

$$\begin{aligned} U(x_m, t) &= U_m \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \\ &= \phi_{m-1}(x_m) \delta_{m-1} + \phi_m(x_m) \delta_m + \phi_{m+1}(x_m) \delta_{m+1} \\ &\quad + \phi_{m+2}(x_m) \delta_{m+2} \\ &= \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m-1} + 1 \delta_m + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x_{m+1}, t) &= U_{m+1} \\ &= \phi_{m-1}(x_{m+1}) \delta_{m-1} + \phi_m(x_{m+1}) \delta_m + \phi_{m+1}(x_{m+1}) \delta_{m+1} \\ &\quad + \phi_{m+2}(x_{m+1}) \delta_{m+2} \\ &= \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_m + 1 \delta_{m+1} + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U'(x_m, t) &= U'_m \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(x_m) \delta_j(t) \\ &= \phi'_{m-1}(x_m) \delta_{m-1} + \phi'_m(x_m) \delta_m + \phi'_{m+1}(x_m) \delta_{m+1} \\ &\quad + \phi'_{m+2}(x_m) \delta_{m+2} \\ &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{m-1} + 0 \delta_m + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U'(x_{m+1}, t) &= U'_{m+1} \\ &= \phi'_{m-1}(x_{m+1}) \delta_{m-1} + \phi'_m(x_{m+1}) \delta_m + \phi'_{m+1}(x_{m+1}) \delta_{m+1} \\ &\quad + \phi'_{m+2}(x_{m+1}) \delta_{m+2} \\ &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_m + 0 \delta_{m+1} + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_{m+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U''(x_m, t) &= U''_m \\
&= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(x_m) \delta_j(t) \\
&= \phi''_{m-1}(x_m) \delta_{m-1} + \phi''_m(x_m) \delta_m + \phi''_{m+1}(x_m) \delta_{m+1} \\
&\quad + \phi''_{m+2}(x_m) \delta_{m+2} \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + \frac{-\rho^2 s}{\rho h c - s} \delta_m + \frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1} \\
U''(x_{m+1}, t) &= U''_{m+1} \\
&= \phi''_{m-1}(x_{m+1}) \delta_{m-1} + \phi''_m(x_{m+1}) \delta_m \\
&\quad + \phi''_{m+1}(x_{m+1}) \delta_{m+1} + \phi''_{m+2}(x_{m+1}) \delta_{m+2} \\
&= \frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_m + \frac{-\rho^2 s}{\rho h c - s} \delta_{m+1} + \frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+2}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

olarak bulunur. U , U' ve U'' fonksiyonlarının $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri Çizelge 2.4'de toplu olarak gösterilmiştir.

Çizelge 2.4. U , U' ve U'' fonksiyonlarının uç noktalardaki değerleri

	x_m	x_{m+1}
U	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 1 \delta_m + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1}$	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_m + 1 \delta_{m+1} + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+2}$
U'	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 0 \delta_m + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1}$	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)} \delta_m + 0 \delta_{m+1} + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+2}$
U''	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + \frac{-\rho^2 s}{\rho h c - s} \delta_m + \frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1}$	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_m + \frac{-\rho^2 s}{\rho h c - s} \delta_{m+1} + \frac{\rho^2 s}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+2}$

Yapacağımız işlemlerde sonlu elemanlardan kurtulmak yani baz fonksiyonlarını yerelleştirmek için $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \tau \leq 1$ ve $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ olmak üzere

$$x = x_m + \eta h, \quad t = t^n + \tau \Delta t \tag{2.32}$$

dönüşümleri kullanılmıştır. Bu dönüşümler ve Çizelge 2.2. değerleri kullanıldığında üstel B-spline fonksiyonlarının $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde yeniden düzenlenmiş halleri

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1}(\eta) &= g_1(x_m + \eta h - x_{m+1}) \\
&= g_1(\eta h - h) \\
&= b_2 \left[\eta h - h - \frac{1}{\rho} \sinh(\rho(\eta h - h)) \right] \\
&= b_2 \left[(\eta - 1) h - \frac{1}{\rho} \sinh(\rho(\eta - 1) h) \right]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(\eta) &= g_2(x_m + \eta h - x_m) \\
&= g_2(\eta h) \\
&= a_1 + b_1 \eta h + c_1 e^{\rho \eta h} + d_1 e^{-\rho \eta h}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+1}(\eta) &= g_2(x_{m+1} - x_m - \eta h) \\
&= g_2(h - \eta h) \\
&= a_1 + b_1(1 - \eta)h + c_1 e^{\rho(1-\eta)h} + d_1 e^{-\rho(1-\eta)h}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m+2}(\eta) &= g_1(x_m - x_m - \eta h) \\
&= g_1(-\eta h) \\
&= b_2 \left[-\eta h - \frac{1}{\rho} \sinh(-\rho \eta h) \right] \\
&= b_2 \left[-\eta h + \frac{1}{\rho} \sinh(\rho \eta h) \right]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

olarak bulunur. Yerelleştirilmiş üstel B-spline fonksiyonlarını kısaca

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1}(\eta) & \\
\phi_m(\eta) & \\
\phi_{m+1}(\eta) & \\
\phi_{m+2}(\eta) &
\end{aligned} = \begin{cases} g_1((\eta - 1)h), \\ g_2(\eta h), \\ g_2(h(1 - \eta)), \\ g_1(-\eta h), \end{cases} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \tag{2.37}$$

olarak yazabiliriz.

Yerelleştirilmiş üstel B-spline fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların birinci ve ikinci türevlerinin $\eta = 0$ ve $\eta = 1$ noktalarındaki (uç noktalardaki) değerleri, Çizelge 2.5'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.5. Yerelleştirilmiş üstel B-spline fonksiyonların uç noktadaki değerleri

	η	
	0	1
$\phi_{m-1}(\eta)$	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$	0
$\phi'_{m-1}(\eta)$	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)}$	0
$\phi''_{m-1}(\eta)$	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$	0
$\phi_m(\eta)$	1	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$
$\phi'_m(\eta)$	0	$\frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)}$
$\phi''_m(\eta)$	$\frac{-\rho^2 s}{\rho h c-s}$	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$
$\phi_{m+1}(\eta)$	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$	1
$\phi'_{m+1}(\eta)$	$\frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)}$	0
$\phi''_{m+1}(\eta)$	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$	$\frac{-\rho^2 s}{\rho h c-s}$
$\phi_{m+2}(\eta)$	0	$\frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)}$
$\phi'_{m+2}(\eta)$	0	$\frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)}$
$\phi''_{m+2}(\eta)$	0	$\frac{\rho^2 s}{2(\rho h c-s)}$

(2.37)'da verilen üstel B-spline fonksiyonlarını kullanarak $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde yerelleştirilmiş koordinatlarda $u(\eta, \tau)$ fonksiyonunun sayısal çözümü,

$$U(\eta, \tau) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \quad (2.38)$$

biçiminde verilebilir. Burada $\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}$ ve δ_{m+2} zaman adımlarının başlangıçlarının düğüm parametreleri ve $\Delta \delta_{m-1}, \Delta \delta_m, \Delta \delta_{m+1}$ ve $\Delta \delta_{m+2}$ bir Δt zaman adımında düğüm parametrelerindeki artışları göstermektedir.

2.6. Regularized Long-Wave (RLW) Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 3'de,

$$u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (2.39)$$

formundaki lineer olmayan Regularized Long-Wave (RLW) denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemiyle sayısal çözümü verilecektir. Bu denklemdeki ε ve μ reel sabitler, x ve t indisleri ise türevleri göstermektedir.

(Olver, 1979) RLW denkleminin sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_a^b u dx \simeq \Delta x \sum_{m=0}^N U_m, \\
C_2 &= \int_a^b [u^2 + \mu(u_x)^2] dx \simeq \Delta x \sum_{m=0}^N [U_m^2 + \mu(U_x)_m^2], \\
C_3 &= \int_a^b (u^3 + 3u^2) dx \simeq \Delta x \sum_{m=0}^N (U_m^3 + 3U_m^2)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

üç korunum kuralına sahip olduğunu göstermiştir. Bu korunum kuralları ve analitik çözüm olduğunda L_2 ortalama hata normu

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - U_j|^2} \tag{2.42}$$

ile L_∞ maksimum hata normu

$$L_\infty = \|u - U\|_\infty = \max_j |u_j - U_j| \tag{2.43}$$

elde edeceğimiz algoritmaların doğruluğunu çözeceğimiz test problemleriyle test etmek için hesaplanacaktır.

2.7. Burgers Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 4'de,

$$u_t + uu_x - \lambda u_{xx} = 0 \tag{2.44}$$

formundaki Burgers denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned}
u(a, t) &= \xi_1, & u(b, t) &= \xi_2, \\
u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0, \quad t > 0 \\
u(x, 0) &= f(x), & a &\leq x \leq b
\end{aligned} \tag{2.45}$$

sınır ve başlangıç şartları kullanılacaktır. Burada $\lambda > 0$ kinematik viskozite katsayısıdır. $f(x)$ fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir.

(2.44) denkleminin sayısal çözümü (2.30) ve yerel koordinatlarda (2.38) formunda aranacaktır. U sayısal çözümün, üzerinde çalışılacak olan sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri Çizelge 2.4 kullanılarak bulunacaktır.

Bulunan sayısal değerlerle analitik çözümü karşılaştırmak için ağırlaştırılmış $\|e\|_1$ hata normu

$$\|e\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{u_j - U_j}{u_j} \right| \quad e = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{N-1}]^T \quad (2.46)$$

olarak alınacaktır.

2.8. AD Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 5'de,

$$u_t + \alpha u_x - \mu u_{xx} = 0 \quad (2.47)$$

formundaki AD denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \Phi_0(t), & u(L, t) &= \Phi_L(t), \\ u_x(0, t) &= 0, & u_x(L, t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 &\leq x \leq L \end{aligned} \quad (2.48)$$

sınır ve başlangıç şartları kullanılacaktır. Burada αu_x adveksiyon terimini, $-\mu u_{xx}$ difüzyon terimini, α suyun sabit akış hızını, μ sabit difüzyon katsayısını, L kanalın uzunluğunu ve Φ akış yönündeki akıyı göstermektedir. $f(x)$ fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir.

(2.47) denkleminin sayısal çözümü (2.30) ve yerel koordinatlarda (2.38) formunda aranacaktır. U sayısal çözümün, üzerinde çalışılacak olan sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri Çizelge 2.4 kullanılarak bulunacaktır.

L_2 ortalama hata normu

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - U_j|^2} \quad (2.49)$$

ile L_∞ maksimum hata normu

$$L_\infty = \|u - U\|_\infty = \max_j |u_j - U_j| \quad (2.50)$$

elde edeceğimiz algoritmaların doğruluğunu çözeceğimiz test problemleriyle test etmek için hesaplanacaktır.

2.9. Fisher Denklemini, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 6'da,

$$u_t = \lambda u_{xx} + \beta u(1 - u) \quad (2.51)$$

formundaki Fisher denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.52)$$

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0 \quad (2.53)$$

veya

$$u(a, t) = 1, \quad u(b, t) = 0 \quad (2.54)$$

başlangıç ve sınır şartları kullanılacaktır. Burada λ sıfırdan farklı bir katsayı olmak üzere, λu_{xx} difüzyon terimini, β reel değerli bir parametreyi göstermektedir. $f(x)$ fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir.

(2.51) denkleminin sayısal çözümü (2.30) ve yerel koordinatlarda (2.38) formunda aranacaktır. U sayısal çözümün, üzerinde çalışılacak olan sonlu elemanın uç noktalarındaki değerleri Çizelge 2.4 kullanılarak bulunacaktır.

L_∞ maksimum hata normu

$$L_\infty = \|u - U\|_\infty = \max_j |u_j - U_j| \quad (2.55)$$

L_2 ortalama hata normu

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - U_j|^2} \quad (2.56)$$

ile Rel bağıl hata normu

$$Rel = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^N |U_j^{n+1} - U_j^n|^2}{\sum_{j=0}^N |U_j^{n+1}|^2}} \quad (2.57)$$

elde edeceğimiz algoritmaların doğruluğunu çözeceğimiz test problemleriyle test etmek için hesaplanacaktır.

3. RLW DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan RLW denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, üç test problemi kullanılarak, korunum sabitleri, grafikler ve analitik çözüm varsa hata normları yardımıyla incelenmiştir.

3.1. RLW Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu kısımda RLW denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır. Zaman ve konum sınırlarına göre integral altında (2.39) denklemi için en küçük kareler yaklaşımı

$$\delta \int_0^t \int_a^b (U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt})^2 dx dt = 0 \quad (3.1)$$

denklemi ile verilir. dx, dt, U_t, U_x ve U_{xxt} için (2.32) dönüşümü yapıldığında

$$dx = \Delta x d\eta, \quad dt = \Delta t d\tau$$

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t}$$

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x}$$

$$U_{xxt} = (U_x)_{xt} = \left(\frac{\partial \left(U_\eta \frac{1}{\Delta x} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_t = \left(U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \right)_t \quad (3.2)$$

$$= \frac{U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$= U_{\eta\eta\tau} \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta t}$$

elde edilir. (3.2) ve yerel sınırlar, (3.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde, yöntem

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau \frac{1}{\Delta t} + U_\eta \frac{1}{\Delta x} + \varepsilon \hat{U} U_\eta \frac{1}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta\tau} \frac{1}{\Delta x^2} \frac{1}{\Delta t} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \left(U_\tau + U_\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} + \varepsilon \hat{U} U_\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta\tau} \frac{1}{\Delta x^2} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon \hat{U}) U_\eta - \frac{\mu}{\Delta x^2} U_{\eta\eta\tau} \right)^2 d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau})^2 d\eta d\tau = 0 \quad (3.3)
\end{aligned}$$

halini alır. Burada \hat{U} integrali basitleştirmek için $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanını üzerinde bir sabit, $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon \hat{U})$ ve $\beta = -\frac{\mu}{\Delta x^2}$ olarak alınmıştır. (3.3), Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau})^2 d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 2 (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) d\eta d\tau = 0 \quad (3.4)
\end{aligned}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \quad (3.5)$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. (2.38) kullanılarak U_τ, U_η ve $U_{\eta\eta\tau}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
U_\tau &= \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \tau} \\
&= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \quad (3.7)$$

$$U_{\eta\eta} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j'(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} \quad (3.8)$$

$$= \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \tau}$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) \Delta \delta_j$$

elde edilir. (3.6), (3.7) ve (3.8) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta (U_\tau + \alpha U_\eta + \beta U_{\eta\eta\tau}) \\ &= \delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j'(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) \Delta \delta_j \right] \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j'(\eta) \tau + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} [\phi_j(\eta) + \alpha \phi_j'(\eta) \tau + \beta \phi_j''(\eta)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

haline döndür. Burada ağırlık fonksiyonu kısaca

$$w_i = \phi_i(\eta) + \alpha \phi_i'(\eta) \tau + \beta \phi_i''(\eta) \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir. (3.11) denkleminde indis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonunun indisi i olarak alınmıştır. (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.10) değerleri (3.4)

denkleminde yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) + \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) \Delta \delta_j \right] [\phi_i(\eta) + \alpha \phi'_i(\eta) \tau + \beta \phi''_i(\eta)] d\eta d\tau = 0$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [\phi_j \Delta \delta_j + \alpha \phi'_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) + \beta \phi''_j \Delta \delta_j] (\phi_i + \alpha \phi'_i \tau + \beta \phi''_i) d\eta d\tau = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 (\phi_i \phi_j \Delta \delta_j + \beta \phi_i \phi''_j \Delta \delta_j + \beta \phi_j \phi''_i \Delta \delta_j + \alpha \phi_i \delta_j \phi'_j + \beta^2 \phi''_i \phi''_j \Delta \delta_j \\ & + \alpha^2 \tau \delta_j \phi'_i \phi'_j + \alpha^2 \tau^2 \phi'_i \phi'_j \Delta \delta_j + \alpha \tau \phi_i \phi'_j \Delta \delta_j + \alpha \tau \phi_j \phi'_i \Delta \delta_j + \beta \alpha \delta_j \phi'_j \phi''_i \\ & + \beta \alpha \tau \phi'_i \phi''_j \Delta \delta_j + \beta \alpha \tau \phi'_j \phi''_i \Delta \delta_j) d\eta d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [(\phi_i \phi_j + \beta \phi_i \phi''_j + \beta \phi_j \phi''_i + \beta^2 \phi''_i \phi''_j + \alpha^2 \tau^2 \phi'_i \phi'_j + \alpha \tau \phi_i \phi'_j + \alpha \tau \phi_j \phi'_i \\ & + \beta \alpha \tau \phi'_i \phi''_j + \beta \alpha \tau \phi'_j \phi''_i) \Delta \delta_j + (\alpha \phi_i \phi'_j + \alpha^2 \tau \phi'_i \phi'_j + \beta \alpha \phi'_j \phi''_i) \delta_j] d\eta d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left[\left(\phi_i \phi_j + \beta \phi_i \phi''_j + \beta \phi_j \phi''_i + \beta^2 \phi''_i \phi''_j + \frac{\alpha^2}{3} \phi'_i \phi'_j + \frac{\alpha}{2} \phi_i \phi'_j + \frac{\alpha}{2} \phi_j \phi'_i \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta \frac{\alpha}{2} \phi'_i \phi''_j + \beta \frac{\alpha}{2} \phi'_j \phi''_i \right) \Delta \delta_j + \left(\alpha \phi_i \phi'_j + \frac{\alpha^2}{2} \phi'_i \phi'_j + \beta \alpha \phi'_j \phi''_i \right) \delta_j \right] d\eta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[\phi_i \phi_j + \frac{\alpha}{2} (\phi_i \phi'_j + \phi_j \phi'_i) + \frac{\alpha^2}{3} \phi'_i \phi'_j + \beta (\phi_i \phi''_j + \phi_j \phi''_i) + \frac{\beta \alpha}{2} (\phi'_i \phi''_j \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi'_j \phi''_i) + \beta^2 \phi''_i \phi''_j \right] d\eta \right\} \Delta \delta_j + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \left(\alpha \phi_i \phi'_j + \frac{\alpha^2}{2} \phi'_i \phi'_j + \beta \alpha \phi'_j \phi''_i \right) d\eta \right] \delta_j = 0 \end{aligned}$$

(3.11)

denklemini elde edilir. (3.11) denklemini bir matris formunda

$$\begin{aligned} \left[A^e + \frac{\alpha}{2} (B^e + (B^e)^T) + \frac{\alpha^2}{3} C^e + \beta (D^e + (D^e)^T) + \frac{\alpha\beta}{2} (E^e + (E^e)^T) + \beta^2 F^e \right] \Delta \delta^e \\ + \left[\alpha B^e + \frac{\alpha^2}{2} C^e + \alpha\beta (E^e)^T \right] \delta^e = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak yazabilir. Burada T matrisin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere

$$\delta^e = [\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e, \delta_{m+2}^e]^T \quad (3.13)$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta, & B^e = B_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta, & C^e = C_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\eta, \\ D^e = D_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\eta, & E^e = E_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i' \phi_j'' d\eta, & F^e = F_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i'' \phi_j'' d\eta, \\ & & & & i, j &= m-1, m, m+1, m+2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak alınmıştır. A^e eleman matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_m \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

(2.37) ve Çizelge 2.5 yardımıyla hesaplanabilir. a_{ij} , A^e matrisinin i . satır, j . sütun elemanını göstermek üzere A^e matrisinin elemanları MATLAB paket programı

kullanılarak

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{2 \cosh(hp) - p^2 \left(\frac{h^2}{3} + \frac{2 \sinh(hp) + \frac{\sinh(2hp) - hp}{4}}{hp^3} \right)}{(2 \sinh(hp) - 2hp \cosh(hp))^2} \\
a_{21} &= \frac{1}{12hp (hp - e^{2hp} + hp e^{2hp} + 1)^2} (27 e^{hp} - 27 e^{3hp} - 9 e^{4hp} + 6hp \\
&\quad - 4h^3 p^3 e^{hp} + 2h^3 p^3 e^{2hp} - 4h^3 p^3 e^{3hp} + 15hp e^{hp} \\
&\quad + 48hp e^{2hp} + 15hp e^{3hp} + 6hp e^{4hp} + 9) \\
a_{31} &= \frac{-1}{24hp (hp - e^{2hp} + hp e^{2hp} + 1)^2} (60 e^{hp} - 60 e^{3hp} - 15 e^{4hp} \\
&\quad + 4h^3 p^3 e^{hp} - 8h^3 p^3 e^{2hp} + 4h^3 p^3 e^{3hp} + 60hp e^{hp} \\
&\quad + 60hp e^{2hp} + 60hp e^{3hp} + 15) \\
a_{41} &= \frac{12hp - 15 \sinh(hp) + h^3 p^3 + 3hp \cosh(hp)}{12hp (2 \cosh(hp))^2 + 2h^2 p^2 \cosh(hp)^2 - 4hp \cosh(hp) \sinh(hp) - 2} \\
a_{12} &= \frac{1}{12hp (hp - e^{2hp} + hp e^{2hp} + 1)^2} (27 e^{hp} - 27 e^{3hp} - 9 e^{4hp} \\
&\quad + 6hp - 4h^3 p^3 e^{hp} + 2h^3 p^3 e^{2hp} - 4h^3 p^3 e^{3hp} \\
&\quad + 15hp e^{hp} + 48hp e^{2hp} + 15hp e^{3hp} + 6hp e^{4hp} + 9) \\
a_{22} &= \frac{-1}{hp (hp - e^{2hp} + hp e^{2hp} + 1)^2} \left(4 e^{hp} - 4 e^{3hp} - \frac{29 e^{4hp}}{8} + 2hp \right. \\
&\quad \left. + e^{2hp} \left(\frac{21hp}{2} - h^3 p^3 \right) - \frac{h^3 p^3}{3} + \frac{h^3 p^3 e^{hp}}{3} + \frac{h^3 p^3 e^{3hp}}{3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{h^3 p^3 e^{4hp}}{3} + 4hp e^{hp} + 4hp e^{3hp} + 2hp e^{4hp} + \frac{29}{8} \right) \\
a_{32} &= \frac{1}{12hp (hp - e^{2hp} + hp e^{2hp} + 1)^2} (51 e^{hp} - 51 e^{3hp} - 42 e^{4hp} \\
&\quad + 12hp + 2h^3 p^3 - 8h^3 p^3 e^{hp} + 6h^3 p^3 e^{2hp} \\
&\quad - 8h^3 p^3 e^{3hp} + 2h^3 p^3 e^{4hp} + 87hp e^{hp} + 72hp e^{2hp} \\
&\quad + 87hp e^{3hp} + 12hp e^{4hp} + 42) \\
a_{42} &= \frac{-1}{24hp (hp - e^{2hp} + hp e^{2hp} + 1)^2} (60 e^{hp} - 60 e^{3hp} - 15 e^{4hp} \\
&\quad + 4h^3 p^3 e^{hp} - 8h^3 p^3 e^{2hp} + 4h^3 p^3 e^{3hp} + 60hp e^{hp} \\
&\quad + 60hp e^{2hp} + 60hp e^{3hp} + 15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= \frac{-1}{24hp(hp-e^{2hp}+hpe^{2hp}+1)^2} (60e^{hp} - 60e^{3hp} - 15e^{4hp} \\
&\quad + 4h^3p^3e^{hp} - 8h^3p^3e^{2hp} + 4h^3p^3e^{3hp} + 60hpe^{hp} \\
&\quad + 60hpe^{2hp} + 60hpe^{3hp} + 15) \\
a_{23} &= \frac{1}{12hp(hp-e^{2hp}+hpe^{2hp}+1)^2} (51e^{hp} - 51e^{3hp} - 42e^{4hp} \\
&\quad + 12hp + 2h^3p^3 - 8h^3p^3e^{hp} + 6h^3p^3e^{2hp} \\
&\quad - 8h^3p^3e^{3hp} + 2h^3p^3e^{4hp} + 87hpe^{hp} \\
&\quad + 72hpe^{2hp} + 87hpe^{3hp} + 12hpe^{4hp} + 42) \\
a_{33} &= \frac{1}{12hp(\cosh(2hp)+h^2p^2+h^2p^2\cosh(2hp)-2hp\sinh(2hp)-1)} \\
&\quad \left[48\sinh(hp) + \frac{87\sinh(2hp)}{2} - 63hp + 6h^3p^3 \right. \\
&\quad - 4h^3p^3\cosh(hp) + 4h^3p^3\cosh(2hp) \\
&\quad \left. - 48hp\cosh(hp) - 24hp\cosh(2hp) \right] \\
a_{43} &= \frac{1}{12hp(hp-e^{2hp}+hpe^{2hp}+1)^2} (27e^{hp} - 27e^{3hp} - 9e^{4hp} \\
&\quad + 6hp - 4h^3p^3e^{hp} + 2h^3p^3e^{2hp} - 4h^3p^3e^{3hp} \\
&\quad + 15hpe^{hp} + 48hpe^{2hp} + 15hpe^{3hp} \\
&\quad + 6hpe^{4hp} + 9) \\
a_{14} &= \frac{12hp-15\sinh(hp)+h^3p^3+3hp\cosh(hp)}{12hp(2\cosh(hp)^2+2h^2p^2\cosh(hp)^2-4hp\cosh(hp)\sinh(hp)-2)} \\
a_{24} &= \frac{-1}{24hp(hp-e^{2hp}+hpe^{2hp}+1)^2} (60e^{hp} - 60e^{3hp} - 15e^{4hp} \\
&\quad + 4h^3p^3e^{hp} - 8h^3p^3e^{2hp} + 4h^3p^3e^{3hp} + 60hpe^{hp} \\
&\quad + 60hpe^{2hp} + 60hpe^{3hp} + 15) \\
a_{34} &= \frac{1}{12hp(hp-e^{2hp}+hpe^{2hp}+1)^2} (27e^{hp} - 27e^{3hp} - 9e^{4hp} \\
&\quad + 6hp - 4h^3p^3e^{hp} + 2h^3p^3e^{2hp} - 4h^3p^3e^{3hp} \\
&\quad + 15hpe^{hp} + 48hpe^{2hp} + 15hpe^{3hp} + 6hpe^{4hp} + 9) \\
a_{44} &= -\frac{2\cosh(hp)-p^2\left(\frac{h^2}{3} + \frac{2\sinh(hp)+\frac{\sinh(2hp)}{4}-\frac{hp}{2}}{hp^3}\right)}{(2\sinh(hp)-2hp\cosh(hp))^2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Diğer eleman matrislerinin elemanları da benzer şekilde elde edilebilir.

(3.12) denklemi, tüm eleman matrislerinin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_{21} & a_{22}+a_{11} & a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & \cdot \\ a_{31} & a_{32}+a_{21} & a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & \cdot \\ a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & a_{44}+a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & \cdot \\ 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

biçiminde ifade edilen matrisleri cinsinden

$$\left[A + \frac{\alpha^2}{3}C + \beta^2F + \frac{\alpha}{2}(B + B^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E + E^T) + \beta(D + D^T) \right] \Delta\delta + \left(\alpha B + \frac{\alpha^2}{2}C + \alpha\beta E^T \right) \delta = 0 \quad (3.17)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\delta = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin bir vektörüdür ve

$$\delta = \delta^n, \quad \Delta\delta = \delta^{n+1} - \delta^n \quad (3.18)$$

biçiminde tanımlanabilir. (3.17) denklemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\alpha}{2}(B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3}C + \beta(D + D^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E + E^T) + \beta^2F \right] (\delta^{n+1} - \delta^n) \\ & \quad + \left(\alpha B + \frac{\alpha^2}{2}C + \alpha\beta E^T \right) \delta^n = 0 \\ & \left[A + \frac{\alpha}{2}(B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3}C + \beta(D + D^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E + E^T) + \beta^2F \right] \delta^{n+1} \\ & = \left[A + \frac{\alpha}{2}(B^T - B) - \frac{\alpha^2}{6}C + \beta(D + D^T) + \frac{\alpha\beta}{2}(E - E^T) + \beta^2F \right] \delta^n \end{aligned} \quad (3.19)$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada α 'nın element değeri

$$\begin{aligned} \alpha_m^e &= \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon \hat{U}) = \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + \varepsilon U_m) \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 1 \delta_m + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1} \right) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

(3.19) denklemi, (2.40) sınır koşulu ve Çizelge 2.4 birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} u(a, t) = U(x_0) &= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{-1} + 1\delta_0 + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_1 = \xi_1 \\ \delta_{-1} &= \frac{2(\rho h c - s)}{s - \rho h} (\xi_1 - \delta_0) - \delta_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} u(b, t) = U(x_N) &= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{N-1} + 1\delta_N + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{N+1} = \xi_2 \\ \delta_{N+1} &= \frac{2(\rho h c - s)}{s - \rho h} (\xi_2 - \delta_N) - \delta_{N-1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

olacak şekilde δ_{-1} ve δ_{N+1} elimine edilmiş ve $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemine dönüştürülmüştür.

3.2. Başlangıç Durumu

(3.19) denkleminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\delta^0 = [\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.29) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0$$

(2.40) sınır ve başlangıç koşulları Çizelge 2.4 ile birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned} u_x(a, 0) &= U'(x_0) \\ &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)} \delta_{-1} + 0\delta_0 + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)} \delta_1 \\ &= 0 \\ u_x(b, 0) &= U'(x_N) \\ &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)} \delta_{N-1} + 0\delta_N + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)} \delta_{N+1} \\ &= 0 \\ u(x_m, 0) &= U(x_m) \\ &= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 1\delta_m + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edebilmek için hesaplamalar, $-40 \leq x \leq 60$ ve $0 \leq t \leq 20$ aralığı içinde $\varepsilon = \mu = 1$, $X_0 = 0$, $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\check{c}}{1 + \check{c}}}$ parametre değerleri ve $\xi_1 = \xi_2 = 0$ sınır koşulları ile yapılmıştır. Hesaplamalarda konum artımı $h = 0,125$ ve $\Delta t = 0,1$ alınmıştır.

$t = 0$ anındaki tek dalga çözümü için (2.41)'da verilen korunumların analitik değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6\check{c}}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{80k+1}} - \frac{1}{e^{120k+1}}\right) \simeq \frac{6\check{c}}{k} \\
C_2 &= \frac{12\check{c}^2 (e^{200k}-1)}{5k (e^{80k}+e^{120k}+e^{200k}+1)^5} \left(25e^{80k} + 25e^{120k} + 35e^{160k} + 130e^{200k} \right. \\
&+ 50e^{240k} + 200e^{280k} + 200e^{320k} + 125e^{360k} + 330e^{400k} + 125e^{440k} \\
&+ 200e^{480k} + 200e^{520k} + 50e^{560k} + 130e^{600k} + 35e^{640k} + 25e^{680k} \\
&+ 25e^{720k} + 5e^{800k} + 4\mu k^2 + 20\mu k^2 e^{80k} + 20\mu k^2 e^{120k} \\
&- 20\mu k^2 e^{160k} + 104\mu k^2 e^{200k} + 40\mu k^2 e^{240k} - 80\mu k^2 e^{280k} \\
&- 80\mu k^2 e^{320k} + 340\mu k^2 e^{360k} - 696\mu k^2 e^{400k} + 340\mu k^2 e^{440k} \\
&- 80\mu k^2 e^{480k} - 80\mu k^2 e^{520k} + 40\mu k^2 e^{560k} + 104\mu k^2 e^{600k} \\
&- 20\mu k^2 e^{640k} + 20\mu k^2 e^{680k} + 20\mu k^2 e^{720k} + 4\mu k^2 e^{800k} + 5) \\
&\simeq \frac{12\check{c}^2}{k} + \frac{48\mu k\check{c}^2}{5} \\
C_3 &= \frac{36\check{c}^2 (e^{200k}-1)}{5k (e^{80k}+e^{120k}+e^{200k}+1)^5} \left(4\check{c} + 25e^{80k} + 25e^{120k} + 35e^{160k} + 130e^{200k} \right. \\
&+ 50e^{240k} + 200e^{280k} + 200e^{320k} + 125e^{360k} + 330e^{400k} + 125e^{440k} \\
&+ 200e^{480k} + 200e^{520k} + 50e^{560k} + 130e^{600k} + 35e^{640k} + 25e^{680k} \\
&+ 25e^{720k} + 5e^{800k} + 20\check{c}e^{80k} + 20\check{c}e^{120k} + 40\check{c}e^{160k} + 104\check{c}e^{200k} \\
&+ 40\check{c}e^{240k} + 220\check{c}e^{280k} + 220\check{c}e^{320k} + 40\check{c}e^{360k} + 504\check{c}e^{400k} + 40\check{c}e^{440k} \\
&+ 220\check{c}e^{480k} + 220\check{c}e^{520k} + 40\check{c}e^{560k} + 104\check{c}e^{600k} + 40\check{c}e^{640k} + 20\check{c}e^{680k} \\
&+ 20\check{c}e^{720k} + 4\check{c}e^{800k} + 5) \\
&\simeq \frac{36\check{c}^2}{k} + \frac{144\check{c}^3}{5k}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

olarak bulunur.

Alınan parametrelerle birlikte (3.26) kullanıldığında $3\check{c} = 0,09$ genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik ve yaklaşık analitik değerleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2,1070468 \quad , \quad C_1 \simeq \frac{6\check{c}}{k} = 2,1094075 \\
C_2 &= 0,1273013 \quad , \quad C_2 \simeq \frac{12\check{c}^2}{k} + \frac{48\mu k\check{c}^2}{5} = 0,1273017 \\
C_3 &= 0,3888046 \quad , \quad C_3 \simeq \frac{36\check{c}^2}{k} + \frac{144\check{c}^3}{5k} = 0,3888060
\end{aligned} \tag{3.27}$$

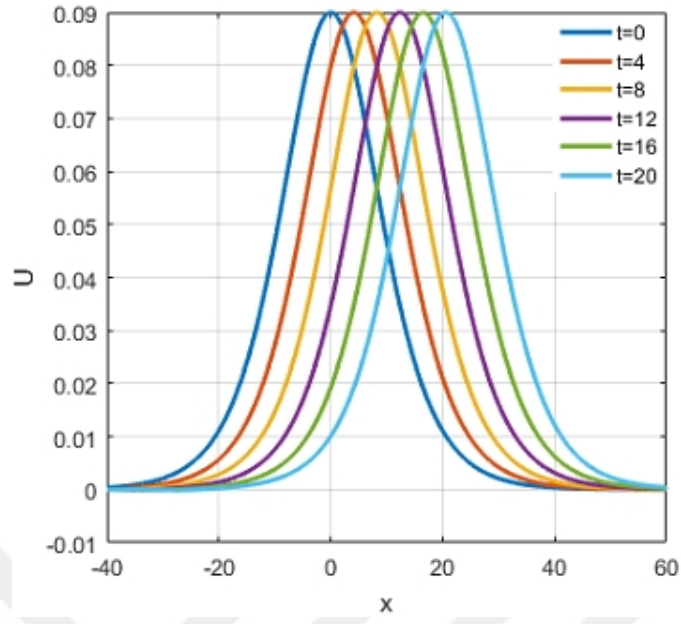
olarak hesaplanabilir.

0,09 genlikli tek dalga çözümü için program $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılmış, elde edilen verilerle L_2 ve L_∞ hata normları ile C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin sayısal değerleri bulunarak Çizelge 3.1'de gösterilmiştir. Korunum sabitlerinin bulunan sayısal değerlerinin analitik değerlerle uyumlu olduğu görülmüştür. Çizelge 3.1'den $t = 20$ anındaki L_∞ hata normunun, $u(60, 20) = 0,0004315117$ analitik değeri ile aynı olduğu görülmektedir. Başka bir ifadeyle hata değeri, analitik değerle kullandığımız $u(b, t) = 0$ sınır koşulunun farkı çıkmıştır.

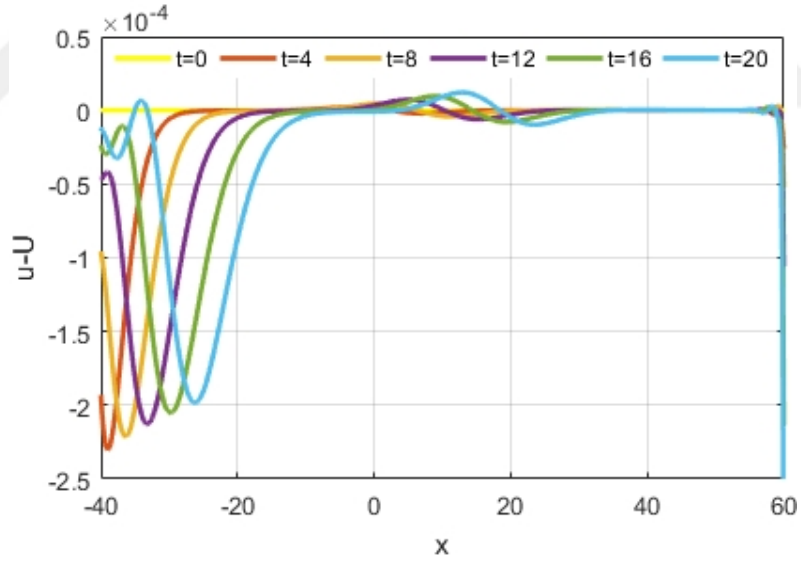
Çizelge 3.1. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri

Genlik = 0,09 $-40 \leq x \leq 60$ $h = 0,125$ $\Delta t = 0,1$ $\rho = 0,2478$					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0,0000000	0,0000000	2,1070719	0,1273013	0,3888047
4	0,4129635	0,2301939	2,1071027	0,1273012	0,3888043
8	0,5124688	0,2213591	2,1069048	0,1273012	0,3888044
12	0,5374903	0,2128817	2,1065605	0,1273013	0,3888045
16	0,5460296	0,2138706	2,1059379	0,1273015	0,3888044
20	0,5683763	0,4315117	2,1046132	0,1273019	0,3888032

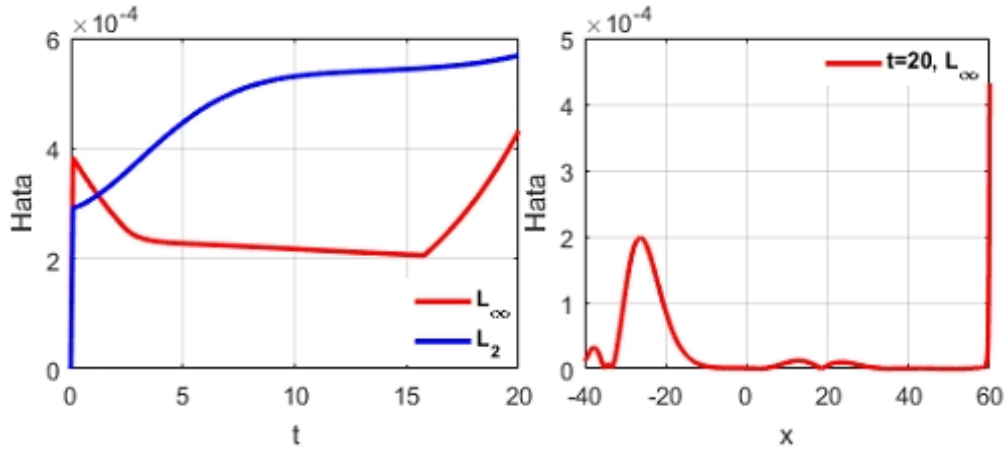
Şekil 3.1'de $t = 0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 zamanlarındaki 0,09 genlikli tek dalga çözümünün grafiği, Şekil 3.2'de ise $t = 0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 zamanlarındaki analitik çözümle sayısal çözüm arasındaki fark grafiği çizilmiştir. Şekil 3.3'de ise L_2 ve L_∞ hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ zamanındaki L_∞ hata normunun grafiği verilmiştir.



Şekil 3.1. Tek dalga simülasyonu, $3\check{c} = 0,09$



Şekil 3.2. $3\check{c} = 0,09$ genlikli dalga için $u - U$



Şekil 3.3. Hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ anındaki L_∞ hata normu

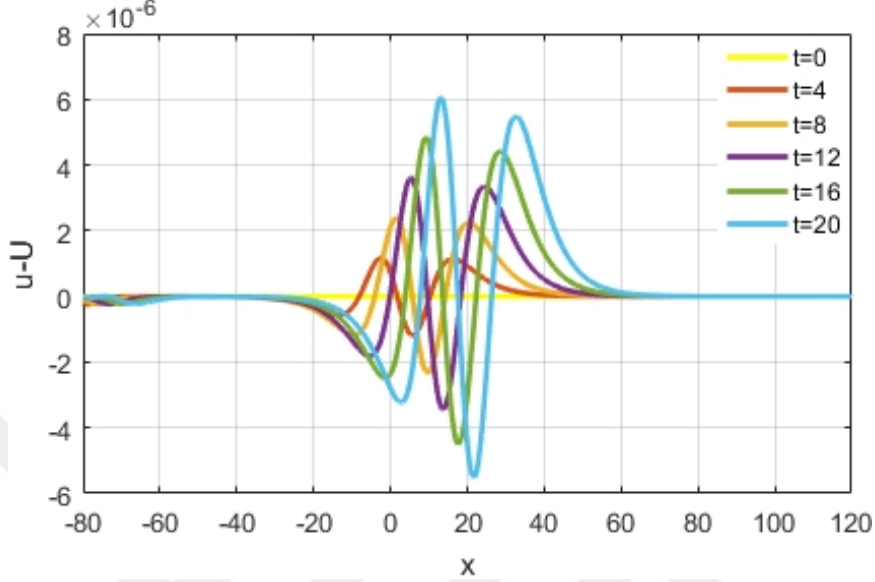
Şekil 3.2 grafiği incelendiğinde $[-40, 60]$ olarak alınan konum aralığının uç noktalarındaki hatanın, orta noktalardaki hatadan daha düşük olduğu gözlemlenmiştir. Bu tip bir hata grafiğinde seçilen konum aralığının bir miktar genişletilmesi, hatanın seçilen sınır koşulundan kaynaklı olup olmadığını anlamamıza yardımcı olacağından konum aralığı $[-80, 120]$ alınarak program tekrar çalıştırılmıştır. Konum aralığı arttırıldığında elde edilen veriler Çizelge 3.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri

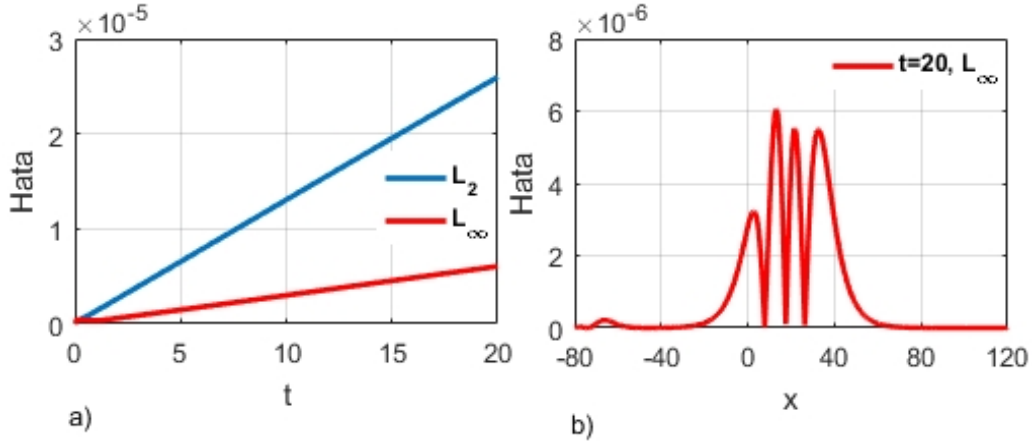
Genlik = 0,09 $-80 \leq x \leq 120$ $h = 0,125$ $\Delta t = 0,1$ $\rho = 0,1956$					
Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^5$	C_1	C_2	C_3
0	0,0000000	0,0000000	2,1094050	0,1273017	0,3888060
4	0,0524059	0,1183966	2,1094135	0,1273022	0,3888073
8	0,1045388	0,2389104	2,1094218	0,1273026	0,3888087
12	0,1565309	0,3619470	2,1094301	0,1273030	0,3888101
16	0,2082941	0,4845822	2,1094385	0,1273035	0,3888114
20	0,2597400	0,6050277	2,1094468	0,1273039	0,3888128

Şekil 3.4’de $[-80, 120]$ konum aralığı için $t = 0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 zamanlarındaki analitik çözümle sayısal çözüm arasındaki fark grafiği çizilmiştir. Şekil 3.5’de ise aynı

konum aralığı için sırasıyla L_2 ve L_∞ hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ zamanındaki L_∞ hata normunun grafiği verilmiştir.



Şekil 3.4. $3\check{c} = 0,09$ genlikli dalga için $u - U$



Şekil 3.5. Hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ anındaki L_∞ hata normu

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 karşılaştırıldığında seçilen konum aralığının hata üzerindeki etkisi net bir şekilde görülmektedir. Örneğin, $t = 20$ zamanındaki L_∞ hata normu, konum aralığı $[-40, 60]$ seçildiğinde $0,4315117 \times 10^{-3}$ iken konum aralığı $[-80, 120]$ olarak genişletildiğinde $0,6050277 \times 10^{-5}$ olarak bulunmuştur.

Buradaki iyileşme, dalganın fiziksel sınır koşullarının $x \rightarrow \pm\infty$ için geçerli olmasındandır. Yani dalganın fiziksel sınırı koşulları $x \rightarrow \pm\infty$ için u ve $u_x \rightarrow 0$ olmasını gerektirdiğinden seçilen konum aralığının geniş olması $u(a, t) = 0$ ve $u(b, t) = 0$ seçimiyle daha uyumlu hale gelmiştir.

Aynı parametreler kullanıldığında $3\check{c} = 0,3$ genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik ve yaklaşık analitik değerleri

$$\begin{aligned} C_1 &= 3,9799266, & C_1 &\simeq \frac{6\check{c}}{k} = 3,9799497 \\ C_2 &= 0,8104625, & C_2 &\simeq \frac{12\check{c}^2}{k} + \frac{48\mu k\check{c}^2}{5} = 0,8104625 \\ C_3 &= 2,5790074, & C_3 &\simeq \frac{36\check{c}^2}{k} + \frac{144\check{c}^3}{5k} = 2,5790074 \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak hesaplanabilir.

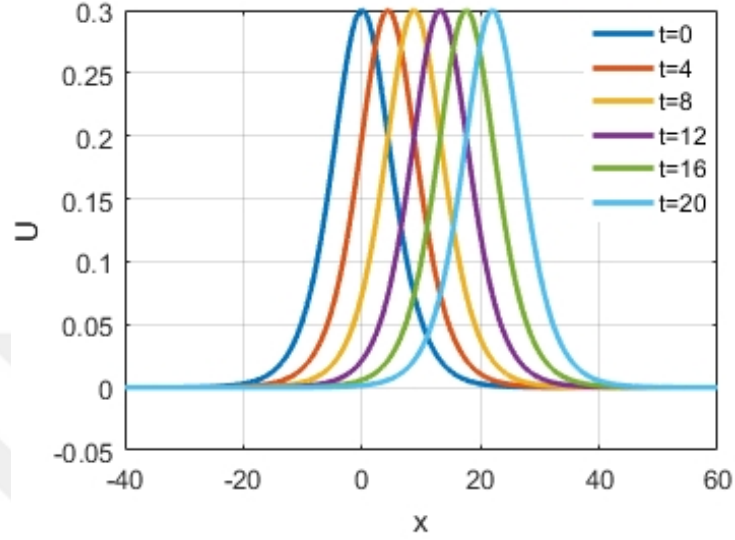
Dalga genliği $3\check{c} = 0,3$ alınarak program çalıştırılmış ve elde edilen veriler kullanılarak L_2 ve L_∞ hata normları ile C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerinin sayısal değerleri bulunarak Çizelge 3.3'de gösterilmiştir. Korunum sabitlerinin bulunan sayısal değerlerinin, analitik değerlerle uyumlu olduğu görülmüştür.

Çizelge 3.3. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri

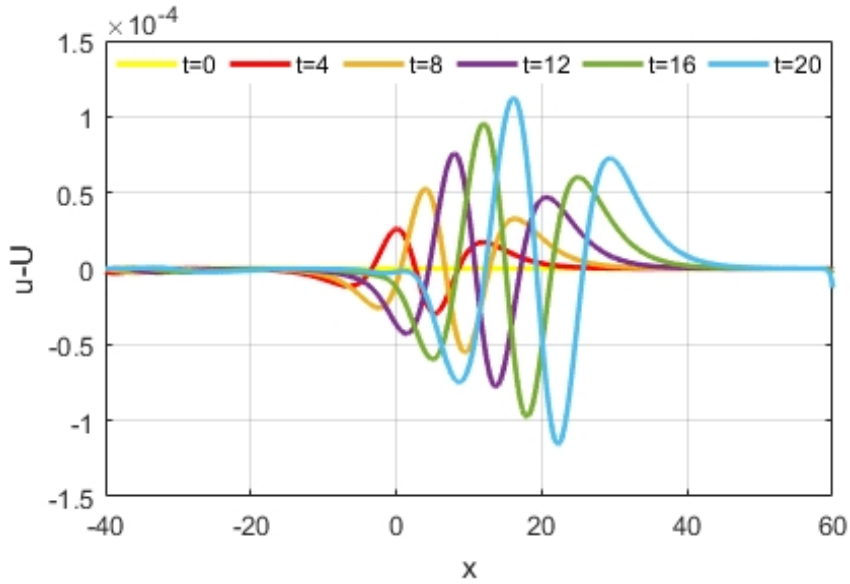
Genlik = 0,3 $-40 \leq x \leq 60$ $h = 0,125$ $\Delta t = 0,1$ $\rho = 0,2207$					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0	0,0000000	0,0000000	3,9799271	0,8104625	2,5790074
4	0,0817346	0,2958270	3,9799671	0,8104507	2,5789685
8	0,1610046	0,5533908	3,9800024	0,8104388	2,5789292
12	0,2363195	0,7772297	3,9800367	0,8104268	2,5788898
16	0,3069365	0,9762584	3,9800649	0,8104148	2,5788501
20	0,3728163	1,1562396	3,9800675	0,8104028	2,5788102

Çizelge 3.3'de kullanılan parametreler kullanılarak elde edilen $t = 0, 4, 8, 12, 16$ ve 20 zamanlarındaki 0,3 genlikli tek dalga çözümünün grafiği Şekil 3.6'da, analitik çözümle sayısal çözüm arasındaki farkı gösteren grafik ise Şekil 3.7'de çizilmiştir. Şekil 3.7 incelendiğinde seçilen zaman adımları için yüksek hatanın tanım aralığının

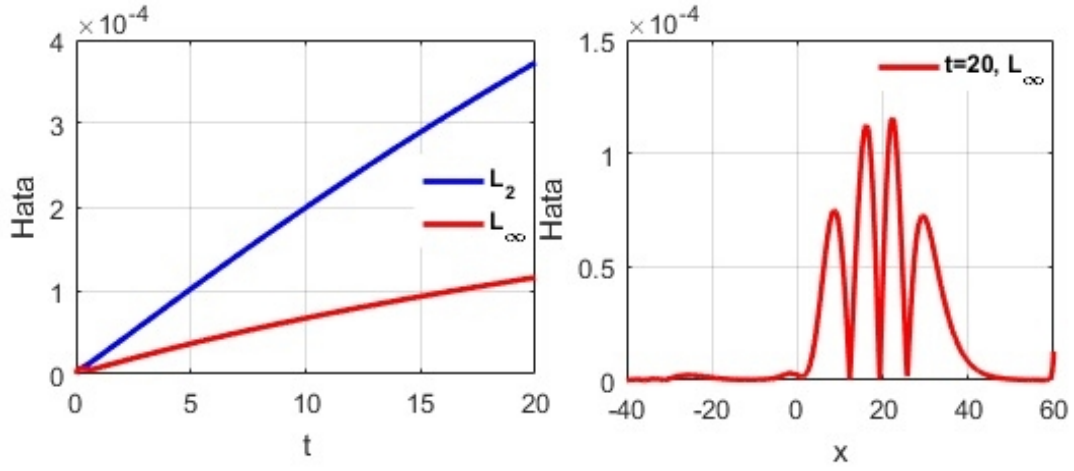
orta noktaları civarında olduğu görülmüştür. Bu parametreler için L_2 ve L_∞ hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ zamanındaki L_∞ hata normunun grafiği ise Şekil 3.8’de verilmiştir.



Şekil 3.6. Tek dalga simülasyonu, $3\check{c} = 0,3$



Şekil 3.7. $3\check{c} = 0,3$ genlikli dalga için $u - U$



Şekil 3.8. Hata normlarının zamana göre değişimi ve $t = 20$ anındaki L_∞ hata normu

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.3 incelendiğinde $-40 \leq x \leq 60$ için $3\check{c} = 0,3$ genlikli dalga için elde edilen hata normlarının, $3\check{c} = 0,09$ genlikli dalga için elde edilen hata normlarından daha küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca her iki genlik için de L_∞ hataları L_2 hatalarından daha küçük bulunmuştur.

Konum artımındaki değişimin yöntemine etkisi görmek için $3\check{c} = 0,3$ genlikli dalgada $h = 0,1$ ve $h = 0,2$ alınarak program tekrar çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5’de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri, $h = 0,1$

Genlik = 0,3 $-40 \leq x \leq 60$ $\Delta t = 0,1$ $\rho = 0,2657$					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0	0,0000000	0,0000000	3,9799270	0,8104625	2,5790074
4	0,0720208	0,2363964	3,9798463	0,8104472	2,5789571
8	0,1418490	0,4415028	3,9797609	0,8104320	2,5789067
12	0,2083012	0,6225947	3,9796745	0,8104167	2,5788563
16	0,2706647	0,8212194	3,9795823	0,8104014	2,5788059
20	0,3288263	1,0087855	3,9794645	0,8103862	2,5787555

Çizelge 3.5. Tek dalga çözümü için hata normları ve korunum sabitleri, $h = 0,2$

Genlik = 0,3 $-40 \leq x \leq 60$ $\Delta t = 0,1$ $\rho = 0,09128$					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0,0000000	0,0000000	3,9799274	0,8104625	2,5790074
4	0,3176020	0,1323301	3,9801725	0,8103965	2,5787897
8	0,6233364	0,2469759	3,9804104	0,8103291	2,5785670
12	0,9094259	0,3432695	3,9806446	0,8102603	2,5783399
16	1,1732804	0,4256847	3,9808702	0,8101905	2,5781092
20	1,4155480	0,4981182	3,9810681	0,8101197	2,5778756

3.3.2. İki pozitif dalganın girişimi

Bu kısımda, $k_j = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \check{c}_j}{\mu (1 + \varepsilon \check{c}_j)}}$ ve

$$u_j(x, 0) = 3\check{c}_j \operatorname{sech}^2 [k_j (x - x_j)] \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.29)$$

olmak üzere aynı yönlü farklı genlikli ve hızları $v_j = 1 + \varepsilon \check{c}_j$ olan iki ayrılmış tek dalganın lineer toplamı olarak verilen

$$u(x, 0) = u_1 + u_2 \quad (3.30)$$

başlangıç koşulu ile iki pozitif dalganın girişimi çalışılmıştır. Mevcut bazı çalışmalarla aynı sonuçları elde edebilmek için iki farklı tanım ve zaman aralığı ile iki farklı parametre değerleri seçilmiştir.

İlk, iki dalga girişimi testi için $0 \leq x \leq 120$ konum ve $0 \leq t \leq 30$ zaman aralığı içinde, $\varepsilon = \mu = 1$, $x_1 = 15$, $\check{c}_1 = \frac{16}{9}$, $x_2 = 35$, $\check{c}_2 = \frac{9}{16}$, $k_j = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\check{c}_j}{1 + \check{c}_j}}$ parametre değerleri ve $\xi_1 = \xi_2 = 0$ sınır koşulları seçilmiş ve konum artımı $h = 0,3$ ve zaman artımı $\Delta t = 0,1$ alınmıştır.

İkinci, iki dalga girişimi testi içinse $200 \leq x \leq 400$ konum ve $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığı içinde, $\varepsilon = \mu = 1$, $x_1 = -177$, $\check{c}_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 147$, $\check{c}_2 = \frac{1}{10}$, $k_j = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\check{c}_j}{1 + \check{c}_j}}$ parametre değerleri ve yine $\xi_1 = \xi_2 = 0$ sınır koşulları seçilmiş ve konum artımı $h = 0,12$ ve zaman artımı $\Delta t = 0,1$ alınmıştır.

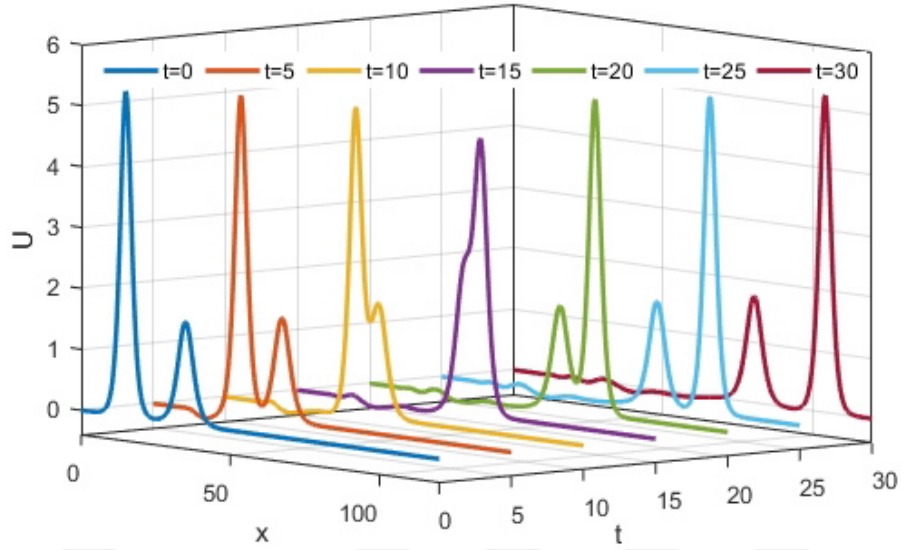
İki dalganın girişimi problemi için analitik çözüm olmadığından korunum sabitlerinin değişimi izlenmiş ve ρ değeri korunum değerlerindeki değişimi en küçük yapacak şekilde aranmıştır.

İlk, iki dalga testinde $\rho = 0,04224$ değeri kullanılarak program çalıştırılmıştır. Bu ρ değeri için dalganın korunum sabitlerinin değişimi makul seviyede bulunmuştur. Elde edilen korunum sabitlerinin farklı zaman adımlarındaki değerleri Çizelge 3.6'da gösterilmiştir.

Çizelge 3.6. İki dalganın girişimi, korunum sabitleri

Genlik1 = $\frac{16}{3}$ Genlik2 = $\frac{27}{16}$ $h = 0,3$ $\Delta t = 0,1$ $0 \leq x \leq 120$ $\rho = 0,4224 \times 10^{-1}$			
Zaman	C_1	C_2	C_3
0	37,9165217	120,5227680	744,0812089
5	37,9577752	121,5727033	749,5944412
10	37,8306176	122,1887332	749,5572727
15	37,4830787	120,5186987	733,4245360
20	37,2458287	119,3146854	729,8855744
25	37,2071904	119,7371130	732,6421593
30	37,1939457	120,3033935	735,7701548

Yüksek dalganın zaman içinde diğer dalgayı yakalayıp girişimde bulunması ve şekil bozulmasına uğramadan devam etmesi beklenmektedir (Bkz. Şekil 2.3). Çizelge 3.6 verileriyle çizilen Şekil 3.9 incelendiğinde beklenti ile uyumlu olarak, hızlı (yüksek) olan dalganın diğer (yavaş) dalgayı yakaladığı, dalgayla birleştiği ve onu geçtiği görülmüştür.



Şekil 3.9. İki dalganın girişimi $\rho = 0,4224 \times 10^{-1}$

Şekil 3.9 incelendiğinde dalgaların girişim sonrası eski yüksekliklerine çok yakın değerler aldıkları görülmektedir. Dalgaların $t = 0$ ve $t = 30$ zaman adımlarındaki genlikleri Çizelge 3.7’de verilmiştir.

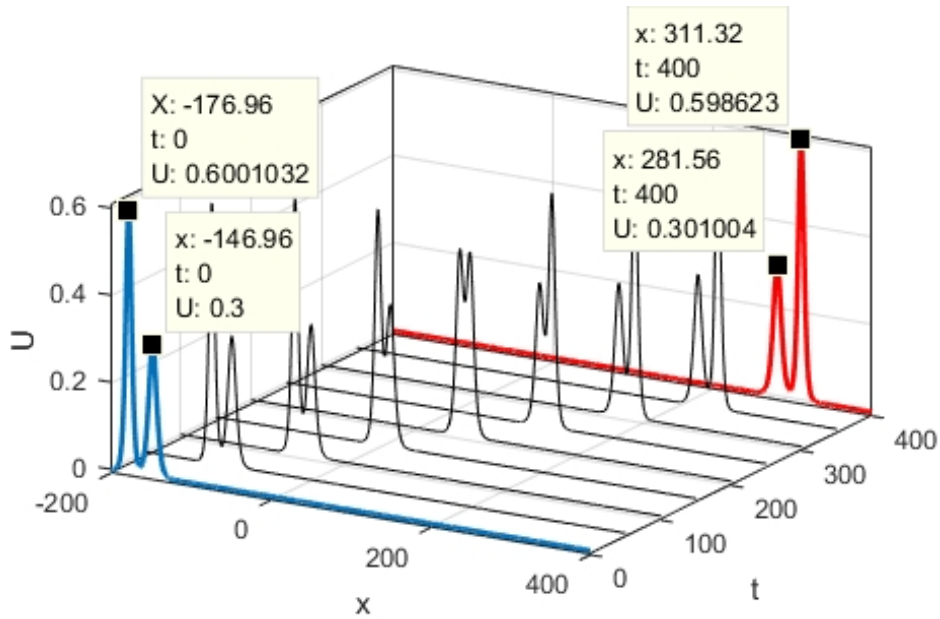
Çizelge 3.7. İki dalganın girişimi, genlik değişimi

$h = 0,3 \quad \Delta t = 0,1 \quad \rho = 0,4224 \times 10^{-1}$		
Zaman	$\check{c}_1 = 16/3 = 5,3333$	$\check{c}_2 = 27/16 = 1,6875$
0	5,3333748	1,6859844
30	5,1498921	1,7353808

İkinci, iki dalga testinde $\rho = 0,24$ alınmıştır. İki dalga testi için analitik çözüm olmadığından korunum sabitlerinin değişimi izlenmiştir. Farklı zaman değerleri için korunum sabitlerinin karşılaştırması Çizelge 3.8’de verilmiştir. Ayrıca elde edilen U yaklaşım fonksiyonunun grafiği Şekil 3.10’da verilmiştir. Şekil 3.10 incelendiğinde hızlı olan dalganın yavaş olan dalgayı yakalayıp geçtiği ve ayrılma sonrası her iki dalganın da genliklerin ilk durumdaki hallerine döndükleri görülmüştür.

Çizelge 3.8. İki dalğanın girişimi, korunum sabitlerinin değışimi

Genlik1 = $\frac{3}{5}$ Genlik2 = $\frac{3}{10}$ $h = 0,12$ $\Delta t = 0,10$ $-200 \leq x \leq 400$ $\rho = 0,24$			
Zaman	C_1	C_2	C_3
0	9,8582453	3,2447895	10,7783294
40	9,8593328	3,2444415	10,7768522
80	9,8603120	3,2441251	10,7754693
120	9,8613217	3,2439148	10,7744193
160	9,8625784	3,2439990	10,7743730
200	9,8643854	3,2445458	10,7760931
240	9,8661645	3,2451638	10,7783503
280	9,8673689	3,2453554	10,7791032
320	9,8683514	3,2452074	10,7784959
360	9,8693589	3,2449225	10,7773087
400	9,8704164	3,2445971	10,7759421

**Şekil 3.10.** İki dalğanın girişimi

3.3.3. Ardışık dalgaların gelişimi

Bu kısımda başlangıç koşulu

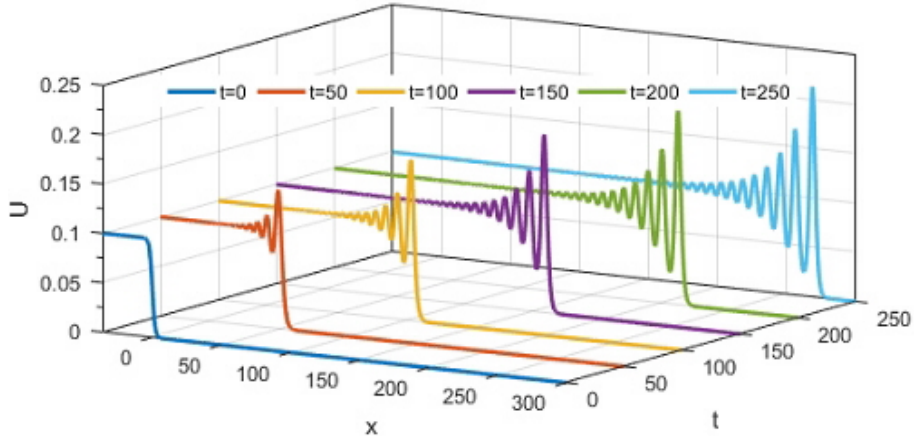
$$u(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left(1 - \tanh \frac{x - X_0}{d} \right) \quad (3.31)$$

ve sınır koşulları

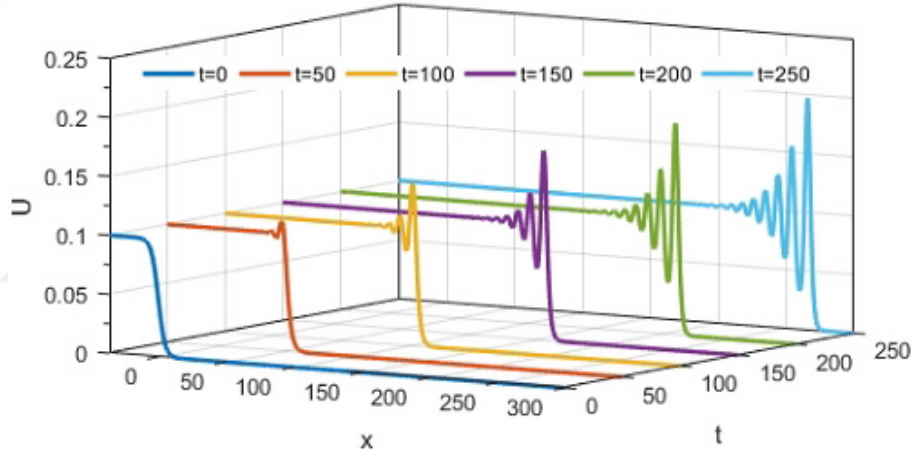
$$\xi_1 = U_0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad (3.32)$$

kullanılarak ardışık dalgaların gelişimi testi yapılmıştır. Burada $u(x, 0)$, $t = 0$ zamanındaki durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yükseltisini gösterir. d ise durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. Su seviyesindeki yükseklik değişimi $u(x, 0)$, $x = X_0$ noktasına yerleştirilmiştir. Böylece durgun su bölgesinin sağında yer alır ve $u = 0$ yüzeyinden U_0 ilave yükseltisinde suyun sahip olduğu akış soldan durgun suyun içine doğru hareket eder. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için fiziksel sınır koşulları $x \rightarrow \infty$ için $u \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow -\infty$ için $u \rightarrow U_0$ yapay sınır koşulları (3.32) ile değiştirildi. Elde edilecek sonuçların mevcut çalışmalarla karşılaştırılabilmesi için $\varepsilon = 1, 5$, $\mu = 1/6$, $U_0 = 0, 1$, $X_0 = 0$, $a = -36$, $b = 300$, $h = 0, 24$, $\Delta t = 0, 1$, $d = 2$ ve $d = 5$ parametre değerleri kullanılmıştır.

Program $d = 2$ için $t = 250$ zamanına kadar çalıştırılmış ve $t = 0, 50, 100, 150, 200, 250$ zamanlarındaki dalga grafikleri Şekil 3.11'de gösterilmiştir. Şekil 3.12'de ise $d = 5$ için $t = 0, 50, 100, 150, 200, 250$ zamanlarındaki dalga grafikleri gösterilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde başlangıç koşulunda yüksek eğim alındığında daha fazla ardışık dalga oluştuğu gözlenmiştir. Yüksek ve düşük eğimler için en öndeki dalgaların büyüklüklerinin t arttıkça birbirine daha fazla yaklaştıkları görülmüştür.



Şekil 3.11. Ardışık dalgaların gelişimi $d = 2$, $\rho = 0,08014$



Şekil 3.12. Ardışık dalgaların gelişimi $d = 5$, $\rho = 0,09245$

$d = 2$ ve $d = 5$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri sırasıyla Çizelge 3.9 ve Çizelge 3.10'da gösterilmiştir. Ayrıca her iki eğim için $t = 250$ zamanındaki ardışık ilk altı dalganın genlik ve tepe noktalarının konum değerleri Çizelge 3.11'de verilmiştir.

Çizelge 3.9. Ardışık dalgalar, $d = 2$

$h = 0,24 \quad \Delta t = 0,10 \quad -36 \leq x \leq 300 \quad \rho = 0,08014$			
Zaman	C_1	C_2	C_3
0	3,6120000	0,3514778	1,0882200
50	8,9879513	0,8995484	2,7870851
100	14,3594842	1,4470838	4,4840833
150	19,7331405	1,9956927	6,1844693
200	25,1135227	2,5467108	8,8926268
250	30,5046966	3,1015931	9,6133283

Çizelge 3.10. Ardışık dalgalar, $d = 5$

$h = 0,24 \quad \Delta t = 0,10 \quad -36 \leq x \leq 300 \quad \rho = 0,09245$			
Zaman	C_1	C_2	C_3
0	3,6120001	0,3363111	1,0409701
50	8,9770162	0,8840639	2,7393687
100	14,3378503	1,4308033	4,4342933
150	19,7044608	1,9788543	6,1330705
200	25,0858124	2,5304250	7,8428764
250	30,4878151	3,0871622	9,5691241

Çizelge 3.11. $t = 250$ anında ardışık dalgaların genlikleri

	$d = 2$		$d = 5$	
	Konum	Genlik	Konum	Genlik
İlk dalga	268,32	0,2125065	265,92	0,1963427
İkinci dalga	255,84	0,1679065	254,16	0,1546061
Üçüncü dalga	245,04	0,1423144	244,08	0,1297500
Dördüncü dalga	235,20	0,1265685	234,72	0,1152646
Beşinci dalga	226,32	0,1170733	226,08	0,1074784
Altıncı dalga	217,68	0,1113581	217,68	0,1034798

Korunum sabitlerinin zamana göre değişimleri analitik olarak aşağıdaki gibi bulunmuştur (Olver, 1979).

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{d}{dt} C_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} U dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0,1075 \\ M_2 &= \frac{d}{dt} C_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} [U^2 + \mu (U_x)^2] dx = U_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3} U_0^3 = 0,011 \\ M_3 &= \frac{d}{dt} C_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (U^3 + 3U^2) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon) U_0^3 + \frac{3\varepsilon}{4} U_0^4 = 0,0341125 \end{aligned}$$

Korunum sabitlerinin değişimi $d = 2$ ve $\rho = 0,08014$ iin izelge 3.9'dan

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{30,5046966 - 3,6120000}{250} = 0,1075708 \\ M_2 &= \frac{3,1015931 - 0,3514778}{250} = 0,0110005 \\ M_3 &= \frac{9,6133283 - 1,0882200}{250} = 0,0341004 \end{aligned}$$

$d = 5$ ve $\rho = 0,09245$ için korunum sabitlerinin değişimi izelge 3.10'dan

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{30,4878151 - 3,6120001}{250} = 0,1075033 \\ M_2 &= \frac{3,0871622 - 0,3363111}{250} = 0,0110034 \\ M_3 &= \frac{9,5691241 - 1,0409701}{250} = 0,0341126 \end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır.

3.3.4. Dalga oluşumu

Bu kısımda Maxwell başlangıç koşulu

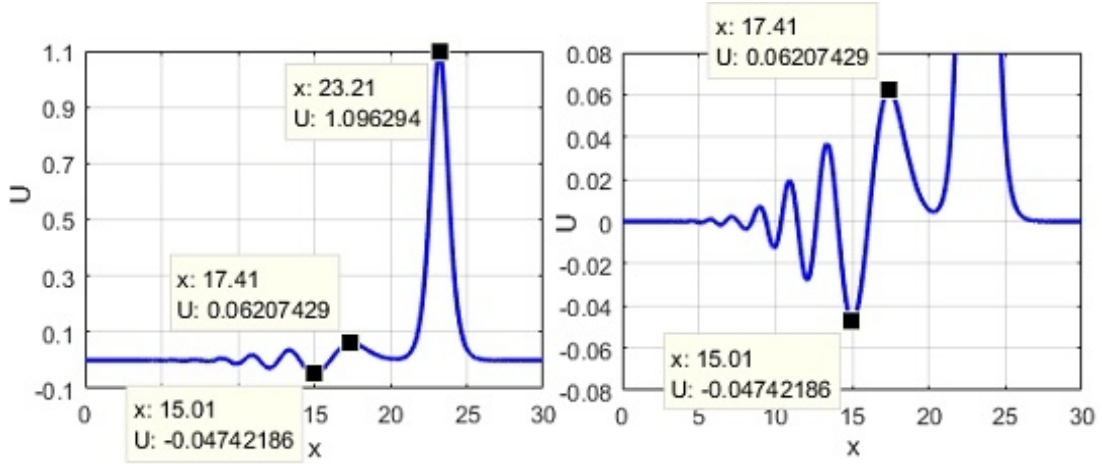
$$u(x, 0) = e^{-(x-7)^2} \quad (3.33)$$

ve sınır koşulları

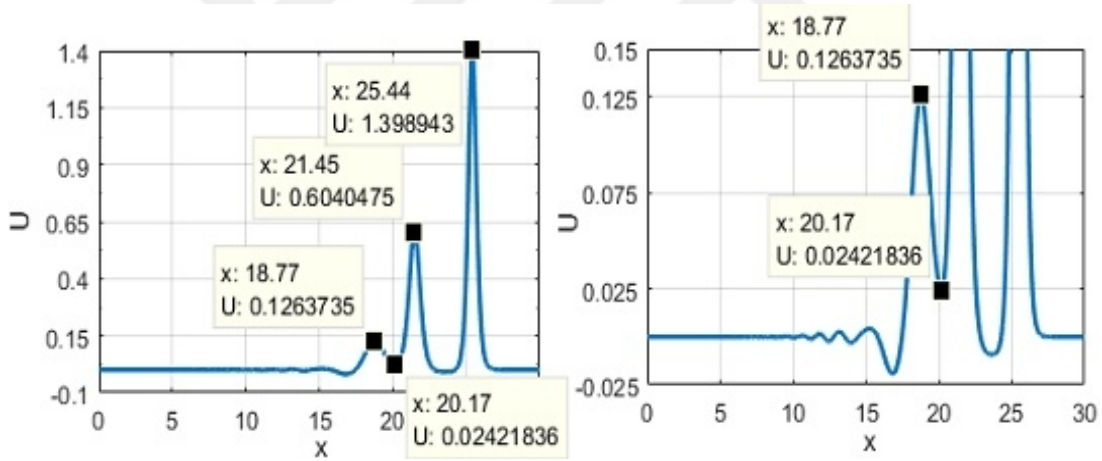
$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad (3.34)$$

kullanılarak RLW denkleminin sayısal ozmleri değişik μ değerleri için elde edildi. $0 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde, konum artımı $h = 0,01$ ve $0 \leq t \leq 25$ zaman aralığı içinde, zaman artımı $\Delta t = 0,01$ ve $\varepsilon = 1$ olarak alınmıştır.

$\mu = 0,04$ ve $\mu = 0,01$ parametre değerleri için bulunan yaklaşım fonksiyonlarının $t = 12$ anındaki grafikleri sırasıyla Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'de çizilmiştir. Őekillerde verilen ikinci grafiklerde dalgaların salınımlarını daha iyi görebilmek için U eksen aralığı ktlmştir.



Şekil 3.13. Dalga oluşumu, $t = 12$, $\mu = 0,04$



Şekil 3.14. Dalga oluşumu, $t = 12$, $\mu = 0,01$

$\mu = 0,04$ ve $\mu = 0,01$ parametre değerleri için elde edilen korunum sabitlerinin, sayısal değerlerinin $[0,12]$ zaman aralığı için bulunan değerleri Çizelge 3.12'de verilmiştir.

Çizelge 3.12.Dalga oluşumu, korunum sabitleri

$h = 0,01 \quad \Delta t = 0,01 \quad 0 \leq x \leq 30$					
μ	ρ	Zaman	C_1	C_2	C_3
0,04	1,6930	0	1,7724539	1,3034467	4,7832691
		3	1,7727219	1,3047847	4,7874577
		6	1,7719704	1,3042841	4,7850170
		9	1,7710767	1,3035599	4,7819603
		12	1,7701696	1,3028212	4,7788803
0,01	1,5063	0	1,7724539	1,2658473	4,7832691
		3	1,7887847	1,2930126	4,9062747
		6	1,7802160	1,2851855	4,8681121
		9	1,7692244	1,2763945	4,8224915
		12	1,7588868	1,2694285	4,7848444

Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 incelendiğinde seçilen μ değerinin oluşan tek dalganın ve arkasında oluşturduğu diğer dalgaların yüksekliğine ve sayısına etki ettiği görülmüştür.

4. BURGERS DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan Burgers denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, üç test problemi kullanılarak, ağırlaştırılmış $\|e\|_1$ hata normu ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

4.1. Burgers Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu kısımda Burgers denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemiyle sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır. Zaman ve konum sınırlarına göre integral altında (2.44) denklemi için en küçük kareler yaklaşımı

$$\delta \int_0^t \int_a^b (U_t + UU_x - \lambda U_{xx})^2 dx dt = 0 \quad (4.1)$$

olarak yazılabilir. dx , dt , U_t , U_x ve U_{xx} için (2.32) dönüşümü yapıldığında,

$$dx = \Delta x d\eta, \quad dt = \Delta t d\tau$$

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t}$$

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x}$$

$$U_{xx} = (U_x)_x$$

$$= \frac{\partial \left(U_\eta \frac{1}{\Delta x} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}$$

(4.2)

elde edilir. (4.2) ve yerel sınırlar, (4.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde, yöntem

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau \frac{1}{\Delta t} + UU_\eta \frac{1}{\Delta x} - \lambda U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \left(U_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x} \check{U} U_\eta - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau + \frac{\Delta t}{\Delta x} \check{U} U_\eta - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} \right)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = 0 \tag{4.3}
\end{aligned}$$

halini alır. Burada \check{U} integrali basitleştirmek için $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde bir sabit, $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} \check{U}$, ve $\beta = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ olarak alınmıştır. (4.3), Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 2(U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0 \tag{4.4}
\end{aligned}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonları

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\eta}) \tag{4.5}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. (2.38) kullanılarak U_τ , U_η ve $U_{\eta\eta}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
U_\tau &= \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \tau} \\
&= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \quad (4.7)$$

$$U_{\eta\tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j'(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \right)}{\partial \tau} \quad (4.8)$$

$$= \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \tau}$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) \Delta \delta_j$$

elde edilir. (4.6),(4.7) ve (4.8) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta (U_\tau + \alpha U_\eta - \beta U_{\eta\tau}) \\ &= \delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j'(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) - \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right] \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j'(\eta) \tau - \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) \tau \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} [\phi_j(\eta) + \alpha \tau \phi_j'(\eta) - \beta \tau \phi_j''(\eta)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

haline döndürür. Burada ağırlık fonksiyonları kısaca

$$w_i = \phi_i(\eta) + \alpha \tau \phi_i'(\eta) - \beta \tau \phi_i''(\eta) \quad , \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (4.10)$$

olarak yazılabilir. İndis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonlarının indisi i olarak alınmıştır. (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.10) değerleri (4.4) denkleminde yerlerine yazılır ve

denklem düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j \Delta \delta_j + \alpha \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) - \beta \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right] (\phi_i + \alpha \tau \phi'_i - \beta \tau \phi''_i) d\eta d\tau = 0$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [\phi_j \Delta \delta_j + \alpha \phi'_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) - \beta \phi''_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)] (\phi_i + \alpha \tau \phi'_i - \beta \tau \phi''_i) d\eta d\tau = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [\phi_i \phi_j + \alpha \tau (\phi_i \phi'_j + \phi'_i \phi_j) + \alpha^2 \tau^2 \phi'_i \phi'_j - \beta \tau (\phi_i \phi''_j + \phi''_i \phi_j) \right. \\ & \quad \left. - \alpha \beta \tau^2 (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \beta^2 \tau^2 \phi''_i \phi''_j] \Delta \delta_j \right. \\ & \left. + [\alpha \phi_i \phi'_j + \alpha^2 \tau \phi'_i \phi'_j - \beta \phi_i \phi''_j - \alpha \beta \tau (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \beta^2 \tau \phi''_i \phi''_j] \delta_j \right\} d\eta d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left\{ \left[\phi_i \phi_j + \frac{\alpha}{2} (\phi_i \phi'_j + \phi'_i \phi_j) + \frac{\alpha^2}{3} \phi'_i \phi'_j - \frac{\beta}{2} (\phi_i \phi''_j + \phi''_i \phi_j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\alpha \beta}{3} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{\beta^2}{3} \phi''_i \phi''_j \right] \Delta \delta_j \right. \\ & \left. + \left[\alpha \phi_i \phi'_j + \frac{\alpha^2}{2} \phi'_i \phi'_j - \beta \phi_i \phi''_j - \frac{\alpha \beta}{2} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{\beta^2}{2} \phi''_i \phi''_j \right] \delta_j \right\} d\eta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[\phi_i \phi_j + \frac{\alpha}{2} (\phi_i \phi'_j + \phi'_i \phi_j) + \frac{\alpha^2}{3} \phi'_i \phi'_j - \frac{\beta}{2} (\phi_i \phi''_j + \phi''_i \phi_j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\alpha \beta}{3} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{\beta^2}{3} \phi''_i \phi''_j \right] d\eta \right\} \Delta \delta_j \\ & + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[\alpha \phi_i \phi'_j + \frac{\alpha^2}{2} \phi'_i \phi'_j - \beta \phi_i \phi''_j - \frac{\alpha \beta}{2} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{\beta^2}{2} \phi''_i \phi''_j \right] d\eta \right\} \delta_j = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemleri elde edilir. (4.11) denklemleri bir matris formunda

$$\begin{aligned} & \left[A^e + \frac{\alpha}{2} (B^e + (B^e)^T) + \frac{\alpha^2}{3} C^e - \frac{\beta}{2} (D^e + (D^e)^T) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha\beta}{3} (E^e + (E^e)^T) + \frac{\beta^2}{3} F^e \right] \Delta \delta^e \\ & + \left[\alpha B^e + \frac{\alpha^2}{2} C^e - \beta D^e - \frac{\alpha\beta}{2} (E^e + (E^e)^T) + \frac{\beta^2}{2} F^e \right] \delta^e = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak yazabiliriz. Burada T matrisinin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere

$$\delta^e = [\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e, \delta_{m+2}^e]^T \quad (4.13)$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta & B^e = B_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta, & C^e = C_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\eta, \\ D^e = D_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\eta, & E^e = E_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i' \phi_j'' d\eta, & F^e = F_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i'' \phi_j'' d\eta, \\ & & & & i, j &= m - 1, m, m + 1, m + 2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

olarak alınmıştır. A^e eleman matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_m \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

(2.37) ve Çizelge 2.5 yardımıyla hesaplanabilir.

(4.12) denklemi, tüm eleman matrislerinin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & . \\ a_{21} & a_{22}+a_{11} & a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & . \\ a_{31} & a_{32}+a_{21} & a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & . \\ a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & a_{44}+a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & . \\ 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

biçiminde ifade edilen matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3} C - \frac{\beta}{2} (D + D^T) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha\beta}{3} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{3} F \right] \Delta\delta \\ & + \left[\alpha B + \frac{\alpha^2}{2} C - \beta D - \frac{\alpha\beta}{2} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{2} F \right] \delta = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\delta = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin birer vektörüdür ve

$$\delta = \delta^n \quad , \quad \Delta\delta = \delta^{n+1} - \delta^n \quad (4.18)$$

biçiminde tanımlanabilir. (4.17) denklemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3} C - \frac{\beta}{2} (D + D^T) - \frac{\alpha\beta}{3} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{3} F \right] (\delta^{n+1} - \delta^n) \\ & + \left[\alpha B + \frac{\alpha^2}{2} C - \beta D - \frac{\alpha\beta}{2} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{2} F \right] \delta^n = 0 \\ & \left[A + \frac{\alpha}{2} (B + B^T) + \frac{\alpha^2}{3} C - \frac{\beta}{2} (D + D^T) - \frac{\alpha\beta}{3} (E + E^T) + \frac{\beta^2}{3} F \right] \delta^{n+1} \\ & = \left[A + \frac{\alpha}{2} (B^T - B) - \frac{\alpha^2}{6} C + \frac{\beta}{2} (D - D^T) + \frac{\alpha\beta}{6} (E + E^T) - \frac{\beta^2}{6} F \right] \delta^n \end{aligned} \quad (4.19)$$

$(N+3) \times (N+3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada α 'nın element değeri

$$\begin{aligned} \alpha_m^e &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \ddot{U} \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 1 \delta_m + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1} + 0 \delta_{m+2} \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

(4.19) denklemi, (2.45) sınır koşulu ve Çizelge 2.4 birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} u(a, t) = U(x_0) &= \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{-1} + 1\delta_0 + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_1 = \xi_1 \\ \delta_{-1} &= \frac{2(\rho h c-s)}{s-\rho h} (\xi_1 - \delta_0) - \delta_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} u(b, t) = U(x_N) &= \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{N-1} + 1\delta_N + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{N+1} = \xi_2 \\ \delta_{N+1} &= \frac{2(\rho h c-s)}{s-\rho h} (\xi_2 - \delta_N) - \delta_{N-1} \end{aligned}$$

olacak şekilde δ_{-1} ve δ_{N+1} elimine edilmiş ve $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemine dönüştürülmüştür.

4.2. Başlangıç Durumu

(4.19) denkleminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\delta^0 = [\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.29) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0 \quad (4.21)$$

(2.45) sınır ve başlangıç koşulları ile Çizelge 2.4 ile birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned} u_x(a, 0) = U'(x_0) &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{-1} + 0\delta_0 + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_1 = 0 \\ \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{-1} + 0\delta_0 + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(b, 0) = U'(x_N) &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N-1} + 0\delta_N + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N+1} = 0 \\ \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N-1} + 0\delta_N + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_m, 0) = U(x_m) &= \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m-1} + 1\delta_m + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m+1} = f(x_m), \\ & \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.22)$$

alınacaktır. Problem(1) için bir Fourier serisi (analitik) çözümü Cole (1951) tarafından

$$u(x, t) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} j a_j e^{-j^2 \pi^2 \lambda t} \sin(j \pi x)}{a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j^2 \pi^2 \lambda t} \cos(j \pi x)} \quad (4.26)$$

olarak verilmiştir. Burada Fourier katsayıları

$$a_0 = \int_0^1 e^{-\frac{\cos(\pi x) - 1}{2\pi\lambda}} dx$$

$$a_j = 2 \int_0^1 e^{-\frac{\cos(\pi x) - 1}{2\pi\lambda}} \cos(j \pi x) dx, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.27)$$

biçimindedir.

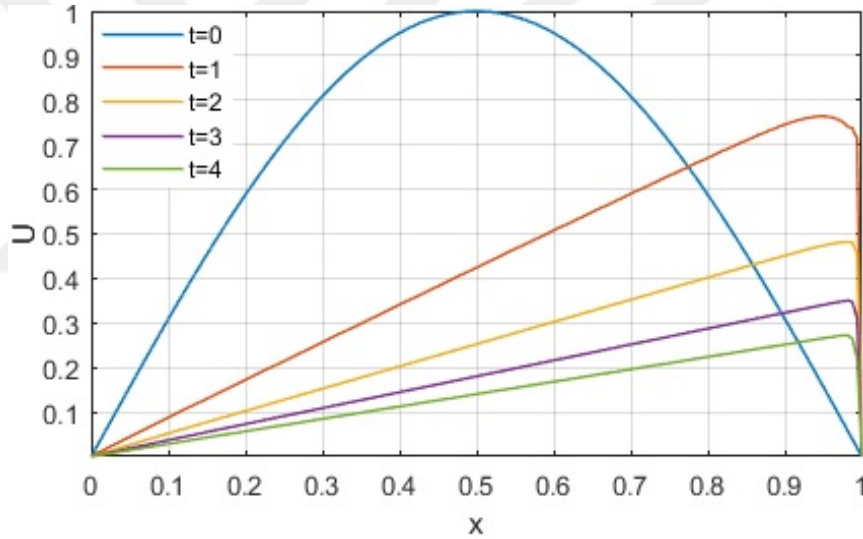
Problem(1) için ilk hesaplamada $0 \leq x \leq 1$, $\lambda = 1$, $\Delta t = 0,00001$ olarak alınmış program $t = 0$ 'dan $t = 0,1$ 'e kadar çalıştırılmış ve dört farklı konum artımı için $t = 0,1$ zamanındaki $\|e\|_1$ hata normları hesaplanmıştır. Bulunan sayısal değerlerle analitik değerlerin karşılaştırılması Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Farklı konum artımları için sayısal çözümler

	Sayısal				Analitik
x	$h_1 = 0,1$	$h_2 = 0,05$	$h_3 = 0,025$	$h_4 = 0,0125$	
	$\rho_1 = 0,143$	$\rho_2 = 0,364$	$\rho_3 = 0,721$	$\rho_4 = 1,397$	
0,1	0,11001	0,10976	0,10965	0,10958	0,10954
0,2	0,21037	0,20995	0,20988	0,20982	0,20979
0,3	0,29207	0,29182	0,29187	0,29186	0,29190
0,4	0,34759	0,34757	0,34777	0,34782	0,34792
0,5	0,37092	0,37107	0,37135	0,37144	0,37158
0,6	0,35843	0,35859	0,35885	0,35892	0,35905
0,7	0,30966	0,30969	0,30983	0,30985	0,30991
0,8	0,22806	0,22788	0,22788	0,22783	0,22782
0,9	0,12109	0,12088	0,12080	0,12073	0,12069
$\ e\ _1$	0,00180	0,00107	0,00057	0,00029	

Problem(1) için ikinci olarak konum aralığı $0 \leq x \leq 1$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 3$, $h = 0,0125$ ve $\Delta t = 0,0001$ alınarak farklı λ değerleri için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar üç farklı konum ve beş farklı zaman için Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Ayrıca Problem(1) için konum aralığı $0 \leq x \leq 1$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 3$, $\lambda = 0,001$, $\Delta t = 0,075$ ve zaman artımı $h = 0,00625$ alınarak farklı zamanlardaki sayısal çözüm bulunmuştur. $\lambda < 0,01$ için analitik çözümün (sonsuz serilerin yavaş yakınsamasından dolayı) başarısız olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $\lambda < 0,01$ için bulunan sayısal çözümler, analitik çözümlerle karşılaştırılmamış fakat sayısal yaklaşımın, problemin gerçek fiziksel davranışını modellediğini göstermek için bulunan değerler bir grafik olarak Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4.1. $\lambda = 0,001$ viskozite değeri için U

Çizelge 4.2. Farklı viskozite değerleri için sayısal çözümler

		$\lambda_1 = 1,0$		$\lambda_2 = 0,1$		$\lambda_3 = 0,01$	
x	t	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
		$\rho_1 = 1,055$		$\rho_2 = 1,006$		$\rho_3 = 0,878$	
0,25	0,4	0,01356	0,01357	0,30839	0,30889	0,34307	0,34191
	0,6	0,00188	0,00189	0,24011	0,24074	0,27049	0,26896
	0,8	0,00026	0,00026	0,19489	0,19568	0,22306	0,22148
	1	0,00004	0,00004	0,16160	0,16256	0,18969	0,18819
	3	0,00000	0,00000	0,02593	0,02720	0,07564	0,07511
0,50	0,4	0,01922	0,01924	0,56736	0,56963	0,65979	0,66071
	0,6	0,00267	0,00267	0,44493	0,44721	0,52872	0,52942
	0,8	0,00037	0,00037	0,35681	0,35924	0,43882	0,43914
	1	0,00005	0,00005	0,28927	0,29192	0,37440	0,37442
	3	0,00000	0,00000	0,03823	0,04021	0,15052	0,15018
0,75	0,4	0,01362	0,01363	0,62630	0,62544	0,91454	0,91026
	0,6	0,00189	0,00189	0,48611	0,48721	0,76810	0,76724
	0,8	0,00026	0,00026	0,37173	0,37392	0,64745	0,64740
	1	0,00004	0,00004	0,28474	0,28747	0,55599	0,55605
	3	0,00000	0,00000	0,02826	0,02977	0,22522	0,22481

4.3.2. Problem(2)

(2.44) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.28)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.29)$$

alınacaktır. Problem(2) için bir Fourier serisi (analitik) çözüm

$$u(x, t) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} j a_j e^{-j^2 \pi^2 \lambda t} \sin(j \pi x)}{a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-j^2 \pi^2 \lambda t} \cos(j \pi x)} \quad (4.30)$$

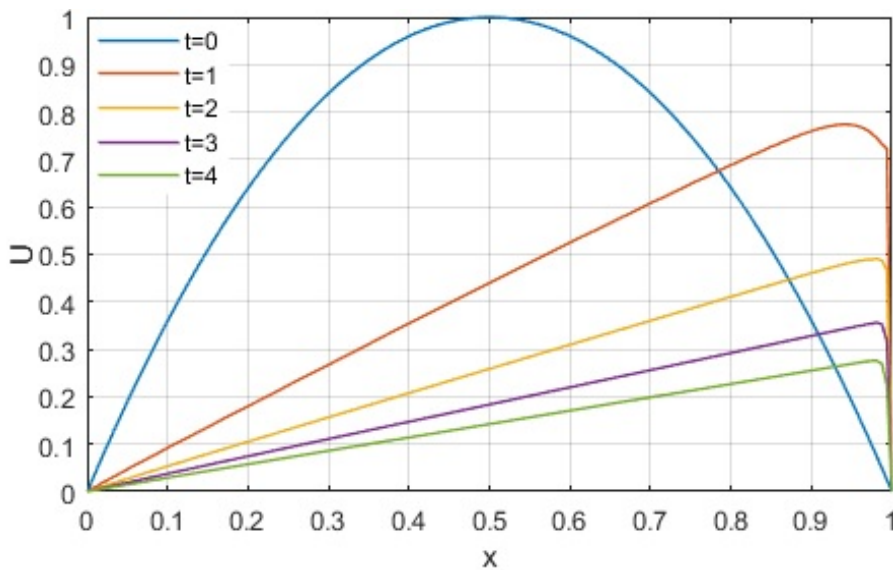
olarak alınacaktır. Burada Fourier katsayıları

$$a_0 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2(2x-3)}{3\lambda}} dx$$

$$a_j = 2 \int_0^1 e^{-\frac{x^2(2x-3)}{3\lambda}} \cos(j \pi x) dx, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

biçimindedir.

Problem(2) için konum aralığı $0 \leq x \leq 1$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 3$, $\lambda = 0,001$, $\Delta t = 0,0075$ ve konum artımı $h = 0,00625$ alınarak farklı zamanlardaki sayısal çözüm bulunmuştur. Bu çözümden elde edilen değerlerle Şekil 4.2 grafiği çizilmiştir. Ayrıca konum aralığı $0 \leq x \leq 1$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 3$, $h = 0,0125$ ve $\Delta t = 0,0001$ alınarak farklı λ değerleri için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar üç farklı konum ve beş farklı zaman için Çizelge 4.3'de verilmiştir.



Şekil 4.2. $\lambda = 0,001$ viskozite değeri için U

Çizelge 4.3. Farklı viskozite değerleri için sayısal çözümler

		$\lambda_1 = 1,0$		$\lambda_2 = 0,1$		$\lambda_3 = 0,01$	
x	t	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
		$\rho_1 = 1,055$		$\rho_2 = 1,006$		$\rho_3 = 0,878$	
0,25	0,4	0,01400	0,01400	0,31695	0,31752	0,36347	0,36226
	0,6	0,00194	0,00195	0,24548	0,24614	0,28372	0,28204
	0,8	0,00027	0,00027	0,19876	0,19956	0,23220	0,23045
	1	0,00004	0,00004	0,16463	0,16560	0,19633	0,19469
	3	0,00000	0,00000	0,02647	0,02776	0,07669	0,07613
0,50	0,4	0,01984	0,01985	0,58215	0,58454	0,68282	0,68368
	0,6	0,00275	0,00276	0,45562	0,45798	0,54760	0,54832
	0,8	0,00038	0,00038	0,36491	0,36740	0,45340	0,45371
	1	0,00005	0,00005	0,29566	0,29834	0,38570	0,38568
	3	0,00000	0,00000	0,03906	0,04107	0,15256	0,15218
0,75	0,4	0,01406	0,01407	0,64641	0,64562	0,92568	0,92050
	0,6	0,00195	0,00195	0,50150	0,50268	0,78433	0,78299
	0,8	0,00027	0,00027	0,38308	0,38534	0,66297	0,66272
	1	0,00004	0,00004	0,29306	0,29586	0,56936	0,56932
	3	0,00000	0,00000	0,02890	0,03044	0,22820	0,22774

4.3.3. Problem(3)

(2.44) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 1 \quad (4.32)$$

ve başlangıç koşulu olarak $t = 1$ zamanı için

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{4\lambda}(x^2 - \frac{1}{4})}} \quad (4.33)$$

almacaktır. Problem(3) için analitik çözüm $t_0 = e^{\frac{1}{8\lambda}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0} e^{\frac{x^2}{4\lambda t}}}}, \quad t > 1 \quad (4.34)$$

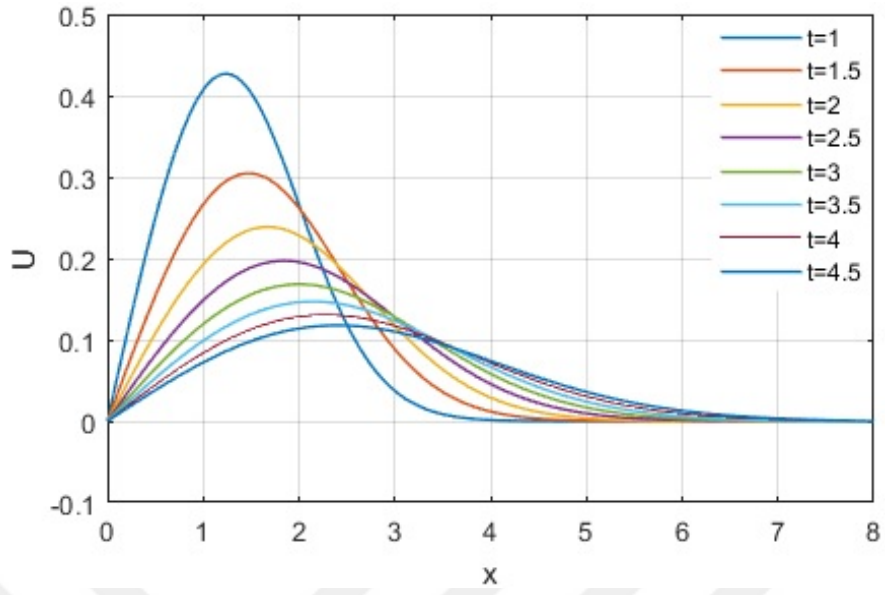
olarak verilmiştir (Nguyen ve Reynen, 1982).

Problem(3) için konum aralığı $[a, b] = [0, 8]$, zaman aralığı $1 \leq t \leq 4, 5$, $\lambda = 0, 5$, $\Delta t = 0,0001$ ve konum artımı $h = 0,05$ alınarak üç farklı zamandaki sayısal çözüm bulunmuş ve bu değerler Çizelge.4.4'de verilmiştir. Bulunan sayısal değerler ve analitik çözüm arasında tatmin edici bir uyum gözlenmiştir. $x = 5, 5$ değerinden sonra her iki çözüm çakıştığı için bu değerler Çizelge 4.4'de verilmemiştir.

Çizelge 4.4. $\lambda = 0, 5$ viskozite değeri için farklı zamanlardaki sayısal çözümler

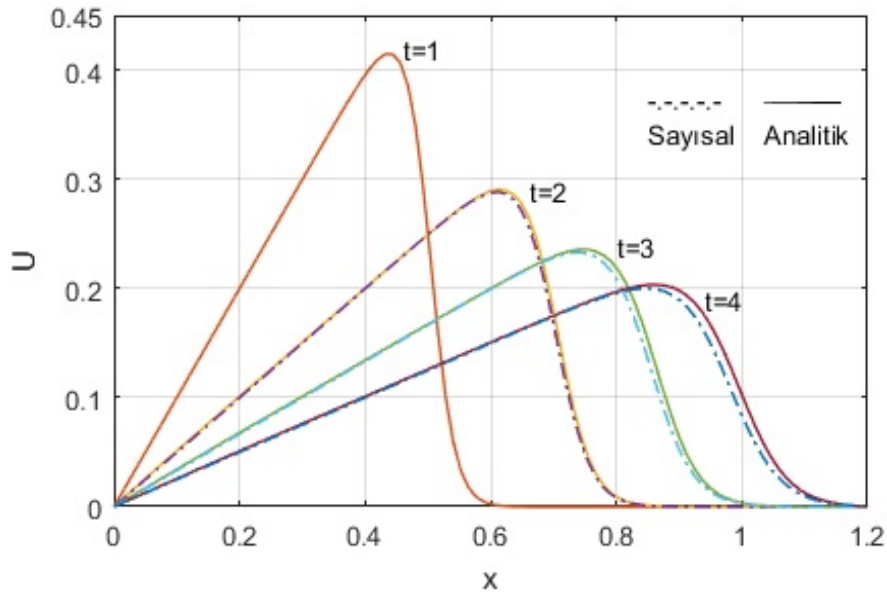
$\rho = 1$	$t_1 = 1, 5$		$t_2 = 3, 0$		$t_3 = 4, 5$	
x	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0, 5	0, 15399	0, 15327	0, 06467	0, 06426	0, 03825	0, 03799
1, 0	0, 26636	0, 26577	0, 11942	0, 11880	0, 07230	0, 07187
1, 5	0, 30452	0, 30412	0, 15576	0, 15509	0, 09847	0, 09793
2, 0	0, 26190	0, 26142	0, 16831	0, 16762	0, 11399	0, 11339
2, 5	0, 17268	0, 17217	0, 15698	0, 15630	0, 11761	0, 11698
3, 0	0, 08838	0, 08807	0, 12802	0, 12738	0, 11010	0, 10949
3, 5	0, 03593	0, 03582	0, 09185	0, 09134	0, 09425	0, 09369
4, 0	0, 01189	0, 01186	0, 05833	0, 05798	0, 07409	0, 07361
4, 5	0, 00325	0, 00325	0, 03305	0, 03284	0, 05367	0, 05330
5, 0	0, 00074	0, 00074	0, 01684	0, 01674	0, 03597	0, 03572
5, 5	0, 00014	0, 00014	0, 00776	0, 00772	0, 02240	0, 02224

$\lambda = 0, 5$ viskozite değeri için elde edilen sayısal verilerle farklı t zamanları için grafik Şekil 4.3'de çizilmiştir.



Şekil 4.3. $\lambda = 0,5$ viskozite değeri için U

Problem(3) testinin farklı ve daha küçük bir λ değerlerindeki sayısal ve analitik çözümünü resmetmek için $\lambda = 0,005$, $h = 0,012$ ve $\Delta t = 0,05$ parametre değeriyle bulunan değerler Şekil 4.4'de gösterilmiştir. $t = 1$ zamanındaki sayısal ve analitik çözüm çok yakın olduğundan eğriler birbirinden ayırt edilememektedir.



Şekil 4.4. $\lambda = 0,005$ viskozite değeri için U ve u

İncelenen üç test problemine göre, lineer olmayan Burgers denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz üstel B-spline en küçük kareler yönteminin tatmin edici sonuçlar verdiği söylenebilir.



5. AD DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer AD denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, L_2 ve L_∞ hata normları ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

5.1. AD Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu kısımda AD denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemiyle sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır. Zaman ve konum sınırlarına göre integral altında (2.47) denklemi için en küçük kareler yaklaşımı

$$\delta \int_0^t \int_a^b (U_t + \alpha U_x - \mu U_{xx})^2 dx dt = 0 \quad (5.1)$$

olarak yazılabilir. dx , dt , U_t , U_x ve U_{xx} için (2.32) dönüşümü yapıldığında,

$$dx = \Delta x d\eta, \quad dt = \Delta t d\tau$$

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t}$$

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\eta \frac{1}{\Delta x}$$

$$U_{xx} = (U_x)_x$$

$$= \frac{\partial \left(U_\eta \frac{1}{\Delta x} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}$$

(5.2)

elde edilir. (5.2) ve yerel sınırlar, (5.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde, yöntem

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau \frac{1}{\Delta t} + \alpha U_\eta \frac{1}{\Delta x} - \mu U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \left(U_\tau + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} U_\eta - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} U_\eta - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} \right)^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = 0 \tag{5.3}
\end{aligned}$$

haline alır. Burada $c = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $d = -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ olarak alınmıştır. (5.3), Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta})^2 d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 2(U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta}) \delta (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta}) \delta (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta}) d\eta d\tau = 0 \tag{5.4}
\end{aligned}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta}) \tag{5.5}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine dönüşür. (2.38) kullanılarak U_τ , U_η ve $U_{\eta\eta}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
U_\tau &= \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \tau} \\
&= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j \tag{5.6}
\end{aligned}$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \quad (5.7)$$

$$U_{\eta\eta} = \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.6), (5.7) ve (5.8) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta (U_\tau + cU_\eta + dU_{\eta\eta}) \\ &= \delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j + c \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) + d \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right] \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) + c \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(\eta) \tau + d \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) \tau \\ &= \sum_{j=m-1}^{m+2} [\phi_j(\eta) + c\tau \phi'_j(\eta) + d\tau \phi''_j(\eta)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

haline dönüşür. Burada ağırlık fonksiyonları kısaca

$$w_i = \phi_i(\eta) + c\tau \phi'_i(\eta) + d\tau \phi''_i(\eta) \quad , \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (5.10)$$

olarak yazılabilir. İndis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonlarının indisi i olarak alınmıştır. (5.6), (5.7), (5.8) ve (5.10) değerleri (5.4) denkleminde yerlerine yazılır ve

denklem düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j \Delta \delta_j + c \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) + d \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right] (\phi_i + c\tau \phi'_i + d\tau \phi''_i) d\eta d\tau = 0$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [\phi_j \Delta \delta_j + c\phi'_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) + d\phi''_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)] (\phi_i + c\tau \phi'_i + d\tau \phi''_i) d\eta d\tau = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 \{ [\phi_i \phi_j + c\tau (\phi_i \phi'_j + \phi'_i \phi_j) + c^2 \tau^2 \phi'_i \phi'_j + d\tau (\phi_i \phi''_j + \phi''_i \phi_j) \\ & \quad + cd\tau^2 (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + d^2 \tau^2 \phi''_i \phi''_j] \Delta \delta_j \\ & + [c\phi_i \phi'_j + c^2 \tau \phi'_i \phi'_j + d\phi_i \phi''_j + cd\tau (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + d^2 \tau \phi''_i \phi''_j] \delta_j \} d\eta d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left\{ \left[\phi_i \phi_j + \frac{c}{2} (\phi_i \phi'_j + \phi'_i \phi_j) + \frac{c^2}{3} \phi'_i \phi'_j + \frac{d}{2} (\phi_i \phi''_j + \phi''_i \phi_j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{cd}{3} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{d^2}{3} \phi''_i \phi''_j \right] \Delta \delta_j \right. \\ & \left. + \left[c\phi_i \phi'_j + \frac{c^2}{2} \phi'_i \phi'_j + d\phi_i \phi''_j + \frac{cd}{2} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{d^2}{2} \phi''_i \phi''_j \right] \delta_j \right\} d\eta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[\phi_i \phi_j + \frac{c}{2} (\phi_i \phi'_j + \phi'_i \phi_j) + \frac{c^2}{3} \phi'_i \phi'_j + \frac{d}{2} (\phi_i \phi''_j + \phi''_i \phi_j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{cd}{3} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{d^2}{3} \phi''_i \phi''_j \right] d\eta \right\} \Delta \delta_j \\ & + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \int_0^1 \left[c\phi_i \phi'_j + \frac{c^2}{2} \phi'_i \phi'_j + d\phi_i \phi''_j + \frac{cd}{2} (\phi'_i \phi''_j + \phi''_i \phi'_j) + \frac{d^2}{2} \phi''_i \phi''_j \right] d\eta \right\} \delta_j = 0 \end{aligned}$$

(5.11)

denklemleri elde edilir. (5.11) denklemleri bir matris formunda,

$$\begin{aligned} & \left[A^e + \frac{c}{2} \left(B^e + (B^e)^T \right) + \frac{c^2}{3} C^e + \frac{d}{2} \left(D^e + (D^e)^T \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{cd}{3} \left(E^e + (E^e)^T \right) + \frac{d^2}{3} F^e \right] \Delta \delta^e \\ & + \left[cB^e + \frac{c^2}{2} C^e + dD^e + \frac{cd}{2} \left(E^e + (E^e)^T \right) + \frac{d^2}{2} F^e \right] \delta^e = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

olarak yazabiliriz. Burada T matrisinin transpozunu göstermektedir. $m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere

$$\delta^e = [\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e, \delta_{m+2}^e]^T \quad (5.13)$$

eleman parametreleridir. Element matrisleri Çizelge 2.5'deki değerler kullanılarak

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij} &= \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta, & B^e = B_{ij} &= \int_0^1 \phi_i \phi'_j d\eta, & C^e = C_{ij} &= \int_0^1 \phi'_i \phi'_j d\eta \\ D^e = D_{ij} &= \int_0^1 \phi_i \phi''_j d\eta, & E^e = E_{ij} &= \int_0^1 \phi'_i \phi''_j d\eta, & F^e = F_{ij} &= \int_0^1 \phi''_i \phi''_j d\eta \\ & & & & & i, j = m - 1, m, m + 1, m + 2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

olarak alınmıştır. A^e eleman matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} A^e = A_{ij}^e &= \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_m \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+2} d\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

(2.37) ve Çizelge 2.5 yardımıyla hesaplanabilir.

(3.12) denklemi, tüm eleman matrislerinin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & . \\ a_{21} & a_{22}+a_{11} & a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & . \\ a_{31} & a_{32}+a_{21} & a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & . \\ a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & a_{44}+a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & . \\ 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

biçiminde ifade edilen matrisler cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{c}{2} (B + B^T) + \frac{c^2}{3} C + \frac{d}{2} (D + D^T) \right. \\ & \quad \left. + \frac{cd}{3} (E + E^T) + \frac{d^2}{3} F \right] \Delta \delta \\ & + \left[cB + \frac{c^2}{2} C + dD + \frac{cd}{2} (E + E^T) + \frac{d^2}{2} F \right] \delta = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\delta = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin birer vektörü ve

$$\delta = \delta^n \quad , \quad \Delta \delta = \delta^{n+1} - \delta^n \quad (5.18)$$

biçiminde tanımlanabilir. (5.17) denklemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[A + \frac{c}{2} (B + B^T) + \frac{c^2}{3} C + \frac{d}{2} (D + D^T) + \frac{cd}{3} (E + E^T) + \frac{d^2}{3} F \right] (\delta^{n+1} - \delta^n) \\ & \quad + \left[cB + \frac{c^2}{2} C + dD + \frac{cd}{2} (E + E^T) + \frac{d^2}{2} F \right] \delta^n = 0 \\ & \left[A + \frac{c}{2} (B + B^T) + \frac{c^2}{3} C + \frac{d}{2} (D + D^T) + \frac{cd}{3} (E + E^T) + \frac{d^2}{3} F \right] \delta^{n+1} \\ & = \left[A + \frac{c}{2} (B^T - B) - \frac{c^2}{6} C + \frac{d}{2} (D^T - D) - \frac{cd}{6} (E + E^T) - \frac{d^2}{6} F \right] \delta^n \end{aligned} \quad (5.19)$$

$(N+3) \times (N+3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. Burada $c = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $d = -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ 'dir.

(5.19) denklemi, (2.48) sınır koşulları ve Çizelge 2.4 birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} u(0, t) &= U(x_0 = 0) = \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{-1} + 1\delta_0 + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_1 = \Phi_0(t) \\ \delta_{-1} &= \frac{2(\rho h c-s)}{s-\rho h} [\Phi_0(t) - \delta_0] - \delta_1 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} u(L, t) &= U(x_N = L) = \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{N-1} + 1\delta_N + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{N+1} = \Phi_L(t) \\ \delta_{N+1} &= \frac{2(\rho h c-s)}{s-\rho h} [\Phi_L(t) - \delta_N] - \delta_{N-1} \end{aligned}$$

olacak şekilde δ_{-1} ve δ_{N+1} elimine edilmiş ve $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 7 bant matris denklemin sistemine dönüştürülmüştür.

5.2. Başlangıç Durumu

(5.19) denklem sisteminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\delta^0 = [\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[0, L]$ aralığı için (2.29) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0 \quad (5.21)$$

(2.48) sınır ve başlangıç koşulları Çizelge 2.4 ile birlikte kullanıldığında

$$\begin{aligned} u_x(0, 0) &= U'(x_0 = 0) = \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{-1} + 0\delta_0 + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_1 = 0 \\ \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{-1} + 0\delta_0 + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(L, 0) &= U'(x_N = L) = \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N-1} + 0\delta_N + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N+1} = 0 \\ \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N-1} + 0\delta_N + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c-s)} \delta_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_m, 0) &= U(x_m) = \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m-1} + 1\delta_m + \frac{s-\rho h}{2(\rho h c-s)} \delta_{m+1} = f(x), \\ & \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.22)$$

kullanılacaktır. Bu analitik değer, standart sapması p ve ilk pik değerini \tilde{x} değerinde 10 birim yükseklikle alan bir normal dağılım (Gauss dağılım) eğrisidir. Bu test probleminde önceki çalışmalarla uyum olması için $p = 264$ m ve $\tilde{x} = 2000$ m ve $\alpha = 0,5$ m/sn alınmıştır.

Problem(1) için hesaplamada kanalın uzunluğu 9000 m alınmış ve program $t = 9600$ zamanına kadar farklı Δt ve h değerleri için çalıştırılmıştır. Hata normlarını en küçük yapan ρ değerleriyle birlikte $t = 9600$ anındaki sonuçlar Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Sadece adveksiyon ile taşınım, $t = 9600$

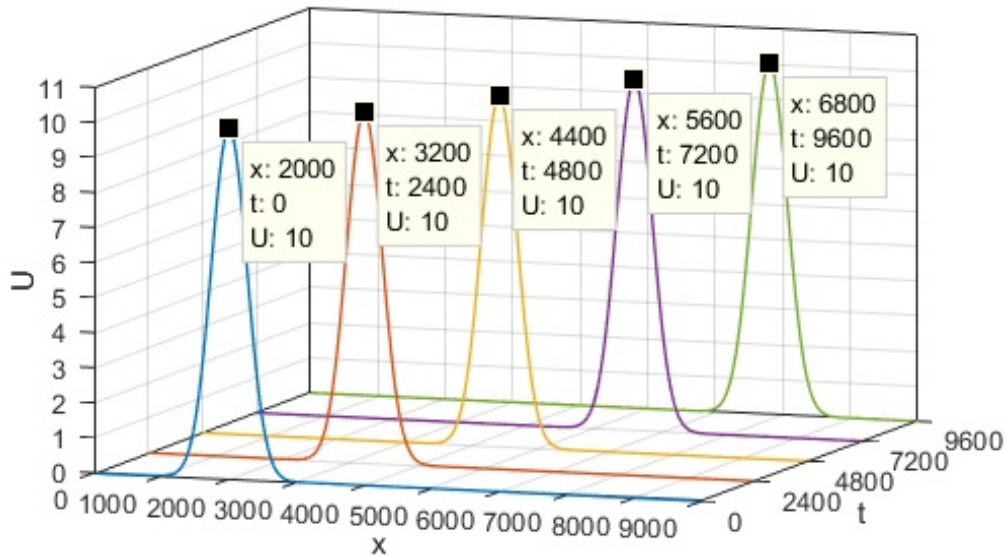
h	Δt	ρ	L_2	L_∞
500	50	$2,69449 \times 10^{-5}$	31,106	$6,893 \times 10^{-1}$
300	50	$5,28487 \times 10^{-5}$	11,673	$2,777 \times 10^{-1}$
200	50	$9,27991 \times 10^{-5}$	1,358	$3,982 \times 10^{-2}$
100	50	$1,46562 \times 10^{-4}$	0,734	$3,930 \times 10^{-2}$
50	50	$2,07835 \times 10^{-4}$	0,876	$3,935 \times 10^{-2}$
25	25	$5,50561 \times 10^{-4}$	0,936	$3,686 \times 10^{-2}$
10	10	$3,13440 \times 10^{-3}$	0,205	$7,014 \times 10^{-3}$
5	5	$8,29718 \times 10^{-3}$	$5,123 \times 10^{-2}$	$1,754 \times 10^{-3}$
1	1	$6,53500 \times 10^{-2}$	$2,064 \times 10^{-3}$	$7,502 \times 10^{-5}$
0,5	0,5	$1,65170 \times 10^{-1}$	$5,272 \times 10^{-4}$	$2,230 \times 10^{-5}$

Analitik değerler incelendiğinde u fonksiyonunun $t = 9600$ anındaki pik değerini $x = 6800$ konumunda aldığı yani tepe noktasının 4,8 km ilerlediği görülmüştür. $t = 9600$ ve $x = 6800$ için sayısal ve analitik pik değerleri bulunurken Çizelge 5.1'deki ρ değerleri kullanılmış ve sonuçlar Çizelge 5.2'de verilmiştir.

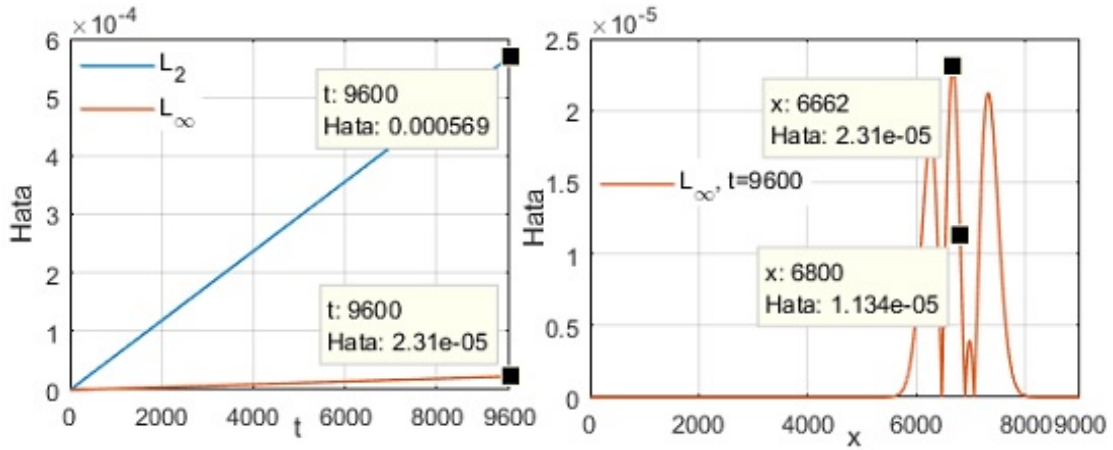
Çizelge 5.2. $t = 9600$ anındaki pik değerleri, $x = 6800$

h	Δt	ρ	üstel B-spline	Analitik	$ u - U $
200	50	$9,27991 \times 10^{-5}$	9,972	10	$2,846 \times 10^{-2}$
100	50	$1,46562 \times 10^{-4}$	10,028	10	$2,811 \times 10^{-2}$
50	50	$2,07835 \times 10^{-4}$	10,013	10	$1,284 \times 10^{-2}$
25	25	$5,50561 \times 10^{-4}$	10,007	10	$7,123 \times 10^{-3}$
25	25	$7,53200 \times 10^{-4}$	9,999	10	$1,233 \times 10^{-3}$
10	10	$3,13440 \times 10^{-3}$	10,000	10	$1,258 \times 10^{-4}$
5	5	$8,29718 \times 10^{-3}$	10,000	10	$1,571 \times 10^{-5}$
1	1	$6,53500 \times 10^{-2}$	10,000	10	$2,146 \times 10^{-6}$
0,5	0,5	$1,65170 \times 10^{-1}$	10,000	10	$3,729 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.1’de en iyi hata normları $h = \Delta t = 0,5$ için bulunmasına rağmen, Çizelge 5.2 ye göre pik değeri için en iyi değer $h = \Delta t = 1$ için bulunmuştur. Bunun nedeni ρ değerlerinin Çizelge 5.1’deki L_2 ve L_∞ hata normalarını minimum yapacak şekilde seçilmesidir. $|u - U|$ değerlerini daha iyi yapacak şekilde de ρ değerleri bulunabilir. Buna örnek olması için $\rho = 7,532 \times 10^{-4}$ değeri kullanılarak $h = \Delta t = 25$ için ikinci bir sonuç verilmiştir. U yaklaşım fonksiyonunun grafiği Şekil 5.1’de çizilmiştir.

**Şekil 5.1.** Sadece adveksiyon ile taşımın, U

Şekil 5.1 için kullanılan parametre değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının $0 \leq t \leq 9600$ aralığındaki değişimi ve $t = 9600$ anındaki L_∞ hata normunun grafiği sırasıyla Şekil 5.2'de verilmiştir. Bu değerler için her iki hata normunun da zaman ilerledikçe arttığı görülmüştür.



Şekil 5.2. Hata normlarının değişimi ve $t = 9600$ anındaki hata

5.3.2. Problem(2): Adveksiyon ve difüzyon ile taşınım

Problem(2) için (2.47) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(0, t) = u(9, t) = 0, \quad (5.27)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x} - at)^2}{\mu(4t+1)} \right], \quad (5.28)$$

analitik çözümünün (Sankaranarayanan vd., 1998) $t = 0$ daki değeri

$$u(x, 0) = \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x})^2}{\mu} \right], \quad (5.29)$$

alınacaktır. Bu analitik değer, $t = 0$ zamanındaki (ilk) pik değerini \tilde{x} değerinde, $\frac{1}{\sqrt{4t+1}} \Big|_{t=0} = 1$ birim yükseklikle alan bir normal dağılım (Gauss dağılım) eğrisidir.

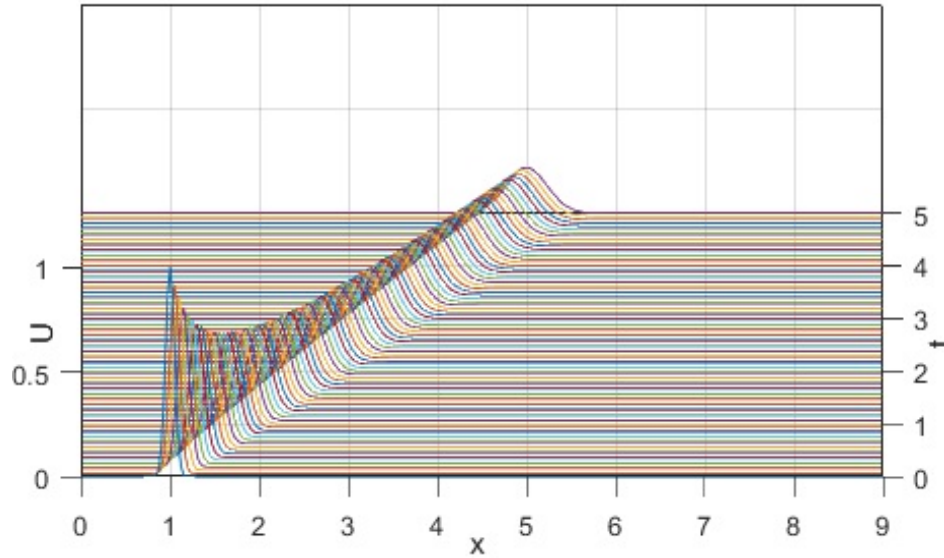
Bu test probleminde önceki çalışmalarla uyum olması için $\tilde{x} = 1$ m, $\mu = 0,005$ m²/sn ve $\alpha = 0,8$ m/sn alınmıştır.

Hesaplama konum aralığı $0 \leq x \leq 9$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 5$ ve $\Delta t = 0,0125$ alınarak farklı h değerleri için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. $t = 5$ anındaki hata normları Çizelge 5.3'de verilmiştir.

Çizelge 5.3. Adveksiyon ve difüzyon ile taşımın

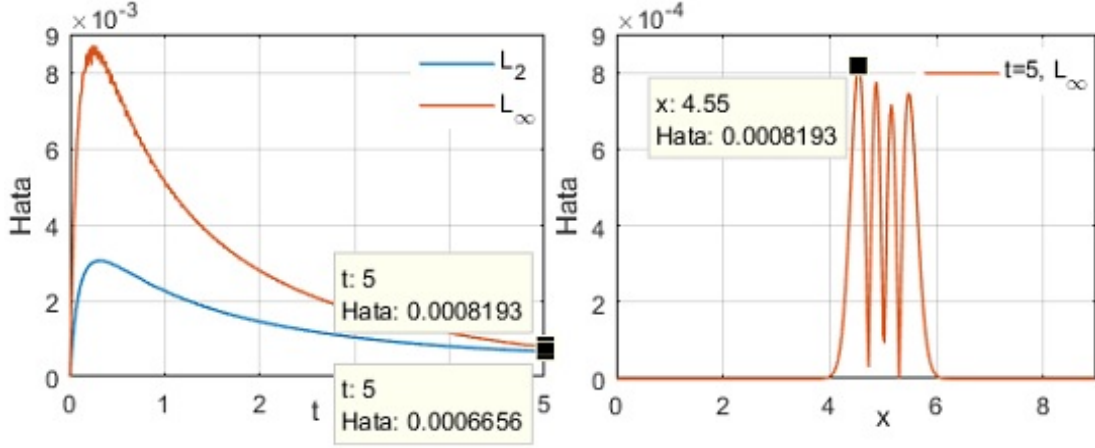
h	ρ	L_2	L_∞
0,2	$4,682 \times 10^{-2}$	$1,080 \times 10^{-1}$	$8,830 \times 10^{-2}$
0,1	$1,595 \times 10^{-1}$	$2,497 \times 10^{-3}$	$3,771 \times 10^{-3}$
0,05	$3,239 \times 10^{-1}$	$4,230 \times 10^{-4}$	$6,905 \times 10^{-4}$
0,025	$9,553 \times 10^{-1}$	$6,656 \times 10^{-4}$	$8,193 \times 10^{-4}$

Bu problemde $h = 0,025$, $\Delta t = 0,0125$, $\mu = 0,005$, $\alpha = 0,8$ ve $\rho = 9,553 \times 10^{-1}$ değerleri alınarak elde edilen U yaklaşım fonksiyonunun $[0, 5]$ zaman aralığındaki grafiği Şekil 5.3'de verilmiştir.



Şekil 5.3. Adveksiyon ve difüzyon ile taşımın, U

L_∞ hata normunun $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığındaki değişimi ve $t = 5$ anındaki grafiği sırasıyla Şekil 5.4'de gösterilmiştir.



Şekil 5.4. Hata normlarının değişimi ve $t = 5$ anındaki hata

5.3.3. Problem(3)

(2.47) denkleminde sınır koşulu olarak

$$u(0, t) = 1, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.30)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \quad (5.31)$$

alınacaktır. Problem(3) için analitik çözüm, $erfc(x)$ tamamlayıcı hata fonksiyonu

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (5.32)$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4\mu t}}\right) + \frac{1}{2} e^{\left(\frac{\alpha x}{\mu}\right)} erfc\left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4\mu t}}\right) \quad (5.33)$$

olarak verilmiştir (Szymkiewicz, 1993). Test probleminde önceki çalışmalarla uyum olması için kanal uzunluğu $L = 100$ m, difüzyon katsayısı $\mu = 0,002$ m²/sn ve akış hızı $\alpha = 0,8$ m/sn alınmıştır.

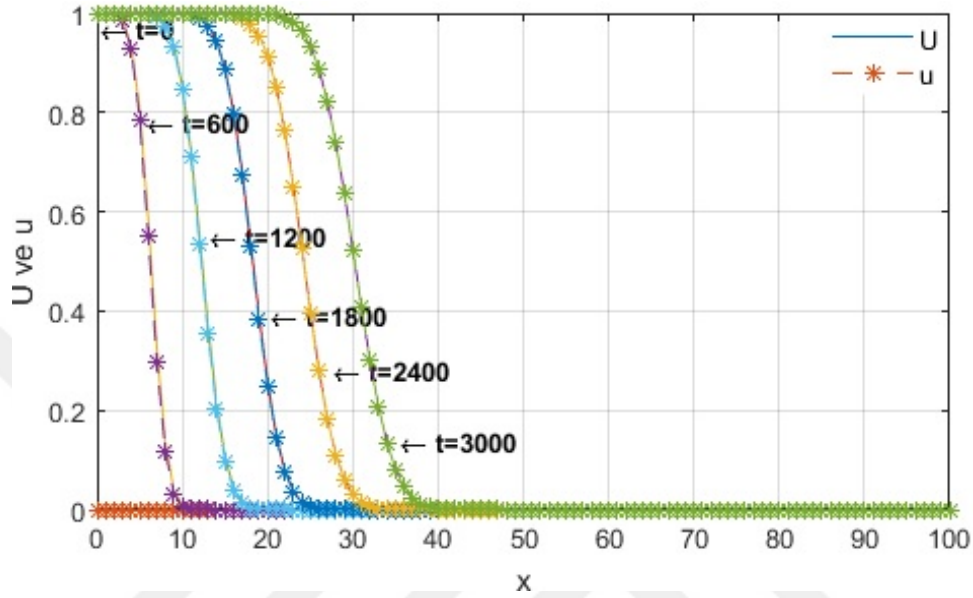
Konum aralığı $0 \leq x \leq 100$, $h = 1$ değerleri ve farklı zaman artımları için program $t = 3000$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Elde edilen hata normları Çizelge 5.4'de verilmiştir.

Çizelge 5.4. $t = 3000$ anındaki hata normları

Δt	ρ	L_2	L_∞
60	$1,216 \times 10^{-2}$	$1,315 \times 10^{-2}$	$3,938 \times 10^{-3}$
30	$1,388 \times 10^{-2}$	$2,034 \times 10^{-3}$	$7,835 \times 10^{-4}$
20	$2,032 \times 10^{-2}$	$2,436 \times 10^{-3}$	$8,762 \times 10^{-4}$
10	$1,900 \times 10^{-2}$	$4,712 \times 10^{-4}$	$1,448 \times 10^{-4}$
5	$1,809 \times 10^{-2}$	$7,662 \times 10^{-4}$	$2,831 \times 10^{-4}$
1	$1,937 \times 10^{-2}$	$7,722 \times 10^{-4}$	$2,931 \times 10^{-4}$

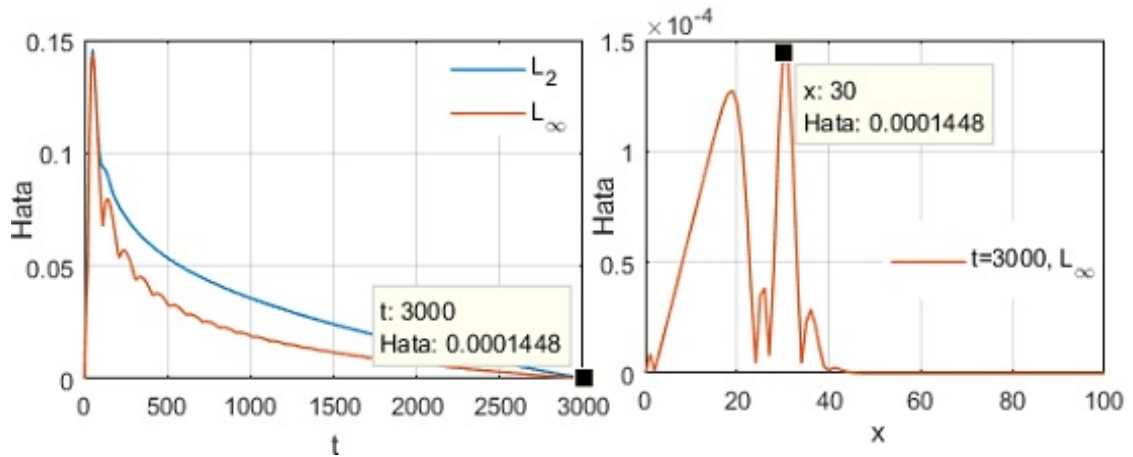
Çizelge 5.4'de verilen zaman artımları ve ρ değerleri kullanılarak $t = 3000$ anındaki sayısal ve analitik çözüm değerleri karşılaştırmalı olarak Çizelge 5.5'de verilmiştir. Analitik değerler Szymkiewicz (1993) tarafından verilmiştir fakat o değerler kullanılmamış analitik değerler MATLAB kullanılarak yeniden hesaplanmıştır.

Çizelge 5.5’de görüldüğü gibi $\Delta t < 60$ için sayısal çözüm, analitik çözümle çok yakın değerler almaktadır. $\Delta t = 10$ için elde edilen yaklaşım değerleriyle, analitik değerler Şekil 5.5’de grafik üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5.5. $\Delta t = 10$ için çeşitli zamanlardaki U ve u

L_2 ve L_∞ hata normlarının $0 \leq t \leq 3000$ zaman aralığındaki değişimi ve $t = 3000$ zamanındaki L_∞ hata normunun $0 \leq x \leq 100$ konum aralığındaki değişimi Şekil 5.6’da verilmiştir. Şekil 5.6’dan da görüldüğü gibi hata normları zaman ilerledikçe küçülmektedir.



Şekil 5.6. Hata normlarının değişimi ve $t = 3000$ anındaki hata

6. FİŞHER DENKLEMİNİN ÜSTEL B-SPLINE EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan Fisher denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Yöntem uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, iki test problemi kullanılarak, grafikler ve hata normları yardımıyla incelenmiştir.

6.1. Fisher Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Üstel B-spline En Küçük Kareler Yöntemi

Bu kısımda Fisher denkleminin üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır. Zaman ve konum sınırlarına göre integral altında (2.51) denklemi için en küçük kareler yaklaşımı

$$\delta \int_0^t \int_a^b [U_t - \alpha U_{xx} - \beta U(1-U)]^2 dx dt = 0 \quad (6.1)$$

denklemi ile verilir. dx, dt, U_t ve U_{xx} için (2.32) dönüşümü yapıldığında

$$dx = \Delta x d\eta, \quad dt = \Delta t d\tau$$

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = U_\tau \frac{1}{\Delta t}$$

$$U_{xx} = (U_x)_x = \frac{\partial \left(U_\eta \frac{1}{\Delta x} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6.2)$$

$$= U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2}$$

elde edilir. (6.2) ve yerel sınırlar, (6.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde, yöntem

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(U_\tau \frac{1}{\Delta t} - \alpha U_{\eta\eta} \frac{1}{\Delta x^2} - \beta \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \hat{U} \right)^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \left[U_\tau - \alpha U_{\eta\eta} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \Delta t \beta \hat{U} \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right]^2 \Delta x \Delta t d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{\eta\eta} - \beta \Delta t \hat{U} \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right]^2 d\eta d\tau = 0 \\
& \delta \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right]^2 d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

halini alır. Burada \hat{U} integrali basitleştirmek için $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde bir sabit, $\varepsilon = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ve $\mu = \beta \Delta t \hat{U}$ olarak alınmıştır. (6.3), Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right]^2 d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 2 \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right] \\
& \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right] d\eta d\tau = 0 \\
& \int_0^1 \int_0^1 \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right] \\
& \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right] d\eta d\tau = 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

olarak yazıldığında en küçük kareler yöntemi, ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \sum_{j=m-1}^{m+2} W_j \delta_j = \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right] \tag{6.5}$$

olan bir Petrov-Galerkin yöntemine döndürür. (2.38) kullanılarak U_τ ve $U_{\eta\eta}$ hesaplanırsa

$$U_\tau = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \tau} \quad (6.6)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j$$

$$U_\eta = \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta}$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)$$

$$U_{\eta\eta} = \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi'_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)}{\partial \eta} \quad (6.7)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)$$

elde edilir. (6.6) ve (6.7) kullanıldığında ağırlık fonksiyonu

$$\delta W = \delta \left[U_\tau - \varepsilon U_{\eta\eta} - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right]$$

$$= \delta \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j - \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right]$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) - \varepsilon \tau \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi''_j(\eta) - \mu \tau \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta)$$

$$= \sum_{j=m-1}^{m+2} [(1 - \mu \tau) \phi_j(\eta) - \varepsilon \tau \phi''_j(\eta)] \quad (6.8)$$

haline döndürür. Burada ağırlık fonksiyonu kısaca

$$w_i = (1 - \mu \tau) \phi_i - \varepsilon \tau \phi''_i \quad i = m-1, m, m+1, m+2 \quad (6.9)$$

olarak yazılabilir. (6.10) denkleminde indis karışıklığı olmaması için ağırlık fonksiyonunun indisi i olarak alınmıştır. (6.6), (6.7) ve (6.9) değerleri (6.4) denkleminde

yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) \Delta \delta_j - \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j''(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) - \mu \left(\sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(\eta) (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) \right) \right] [(1 - \mu\tau) \phi_i(\eta) - \varepsilon\tau \phi_i''(\eta)] d\eta d\tau = 0$$

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [\phi_j \Delta \delta_j - \varepsilon \phi_j'' (\delta_j + \tau \Delta \delta_j) - \mu \phi_j (\delta_j + \tau \Delta \delta_j)] [(1 - \mu\tau) \phi_i - \varepsilon\tau \phi_i''] d\eta d\tau = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [(1 - \mu\tau) \phi_i \phi_j \Delta \delta_j - (1 - \mu\tau) \varepsilon \phi_i \phi_j'' \delta_j - (1 - \mu\tau) \varepsilon \tau \phi_i \phi_j'' \Delta \delta_j \\ & - (1 - \mu\tau) \mu \phi_i \phi_j \delta_j - (1 - \mu\tau) \mu \tau \phi_i \phi_j \Delta \delta_j - \varepsilon \tau \phi_i'' \phi_j \Delta \delta_j + \varepsilon^2 \tau \phi_i'' \phi_j'' \delta_j \\ & + \varepsilon^2 \tau^2 \phi_i'' \phi_j'' \Delta \delta_j + \varepsilon \mu \tau \phi_i'' \phi_j \delta_j + \varepsilon \mu \tau^2 \phi_i'' \phi_j \Delta \delta_j] d\eta d\tau = 0 \\ & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [((1 - \mu\tau) \phi_i \phi_j - (1 - \mu\tau) \varepsilon \tau \phi_i \phi_j'' - (1 - \mu\tau) \mu \tau \phi_i \phi_j - \varepsilon \tau \phi_i'' \phi_j \\ & + \varepsilon^2 \tau^2 \phi_i'' \phi_j'' + \varepsilon \mu \tau^2 \phi_i'' \phi_j) \Delta \delta_j + \\ & (- (1 - \mu\tau) \varepsilon \phi_i \phi_j'' - (1 - \mu\tau) \mu \phi_i \phi_j + \varepsilon^2 \tau \phi_i'' \phi_j'' + \varepsilon \mu \tau \phi_i'' \phi_j) \delta_j] d\eta d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \int_0^1 [((1 - \mu\tau)^2 \phi_i \phi_j - (1 - \mu\tau) \varepsilon \tau \phi_i \phi_j'' + (\varepsilon \mu \tau^2 - \varepsilon \tau) \phi_i'' \phi_j + \varepsilon^2 \tau^2 \phi_i'' \phi_j'') \Delta \delta_j \\ & + (- (1 - \mu\tau) \mu \phi_i \phi_j - (1 - \mu\tau) \varepsilon \phi_i \phi_j'' + \varepsilon \mu \tau \phi_i'' \phi_j + \varepsilon^2 \tau \phi_i'' \phi_j'') \delta_j] d\eta d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \int_0^1 \left[\left(\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) \phi_i \phi_j - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon \phi_i \phi_j'' + \left(\frac{\varepsilon \mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \phi_i'' \phi_j + \frac{\varepsilon^2}{3} \phi_i'' \phi_j'' \right) \Delta \delta_j \right. \\ & \left. + \left(- \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \mu \phi_i \phi_j - \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \varepsilon \phi_i \phi_j'' + \frac{\varepsilon \mu}{2} \phi_i'' \phi_j + \frac{\varepsilon^2}{2} \phi_i'' \phi_j'' \right) \delta_j \right] d\eta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \left(\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3}\right) \phi_i \phi_j - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}\right) \varepsilon \phi_i \phi_j'' + \left(\frac{\varepsilon \mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \phi_i'' \phi_j + \frac{\varepsilon^2}{3} \phi_i'' \phi_j'' \right) d\eta \right] \Delta \delta_j \\
& + \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \left(-\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \mu \phi_i \phi_j - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \varepsilon \phi_i \phi_j'' + \frac{\varepsilon \mu}{2} \phi_i'' \phi_j + \frac{\varepsilon^2}{2} \phi_i'' \phi_j'' \right) d\eta \right] \delta_j = 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

denklemini elde edilir. (6.10) denklemini bir matris formunda

$$\begin{aligned}
& \left[\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3}\right) A^e - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3}\right) \varepsilon B^e + \left(\frac{\varepsilon \mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right) (B^e)^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C^e \right] \Delta \delta^e \\
& + \left[-\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \mu A^e - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \varepsilon B^e + \frac{\varepsilon \mu}{2} (B^e)^T + \frac{\varepsilon^2}{2} C^e \right] \delta^e = 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

olarak yazabilir. Burada T matrisin transpozunu göstermektedir ve $m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere

$$\delta^e = [\delta_{m-1}^e, \delta_m^e, \delta_{m+1}^e, \delta_{m+2}^e]^T \tag{6.12}$$

eleman parametreleridir. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned}
A^e &= A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta, & B^e &= B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\eta, \\
C^e &= C_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i'' \phi_j'' d\eta, & i, j &= m - 1, m, m + 1, m + 2
\end{aligned} \tag{6.13}$$

olarak alınmıştır. A^e eleman matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
A^e &= A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta \\
&= \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m-1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_m \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_m \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+1} \phi_{m+2} d\eta \\ \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m-1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_m d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+1} d\eta & \int_0^1 \phi_{m+2} \phi_{m+2} d\eta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

(2.37) ve Çizelge 2.5 yardımıyla hesaplanabilir.

(6.11) denklemi, tüm eleman matrislerinin

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_{21} & a_{22}+a_{11} & a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & \cdot \\ a_{31} & a_{32}+a_{21} & a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & 0 & \cdot \\ a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & a_{44}+a_{33}+a_{22}+a_{11} & a_{34}+a_{23}+a_{12} & a_{24}+a_{13} & a_{14} & \cdot \\ 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & a_{43}+a_{32}+a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{42}+a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

biçiminde ifade edilen matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) A - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon B + \left(\frac{\varepsilon\mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \right) B^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C \right] \Delta\delta \\ & + \left[- \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \mu A - \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \varepsilon B + \frac{\varepsilon\mu}{2} B^T + \frac{\varepsilon^2}{2} C \right] \delta = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

olarak gösterilebilir. Burada $\delta = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}]^T$ tüm düğüm parametrelerinin bir vektörüdür ve

$$\delta = \delta^n \quad , \quad \Delta\delta = \delta^{n+1} - \delta^n \quad (6.17)$$

biçiminde tanımlanabilir. (6.16) denklemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) A - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon B + \left(\frac{\varepsilon\mu}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \right) B^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C \right] (\delta^{n+1} - \delta^n) \\ & + \left[- \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \mu A - \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \varepsilon B + \frac{\varepsilon\mu}{2} B^T + \frac{\varepsilon^2}{2} C \right] \delta^n = 0 \\ & \left[\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{3} \right) A - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \varepsilon B - \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{3} \right) B^T + \frac{\varepsilon^2}{3} C \right] \delta^{n+1} \\ & = \left[\left(1 - \frac{\mu^2}{6} \right) A + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\mu}{3} \right) B - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{\mu}{3} \right) B^T - \frac{\varepsilon^2}{6} C \right] \delta^n \end{aligned} \quad (6.18)$$

$(N+3) \times (N+3)$ boyutlu bir matris denklem sistemi elde edilir. μ 'nün element değeri

$$\begin{aligned} \mu_m^e &= \beta \Delta t \hat{U} = \beta \Delta t (1 - U_m) \\ &= \beta \Delta t \left[1 - \left(\frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 1 \delta_m + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

olarak hesaplanabilir.

(6.18) denklemi, seçilen test problemlerine uygun olarak (2.53) veya (2.54) sınır koşulu ve Çizelge 2.4 birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} u(a, t) = U(x_0) &= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{-1} + 1\delta_0 + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_1 \\ \delta_{-1} &= \frac{2(\rho h c - s)}{s - \rho h} [U(x_0) - \delta_0] - \delta_1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} u(b, t) = U(x_N) &= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{N-1} + 1\delta_N + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{N+1} \\ \delta_{N+1} &= \frac{2(\rho h c - s)}{s - \rho h} [U(x_N) - \delta_N] - \delta_{N-1} \end{aligned} \quad (6.21)$$

olacak şekilde δ_{-1} ve δ_{N+1} elimine edilmiş ve $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu, 7 bant matris denklem sistemine dönüştürülmüştür.

6.2. Başlangıç Durumu

(6.18) denkleminde iterasyonu başlatmak için başlangıç düğüm noktalarındaki başlangıç parametre vektörünün $\delta^0 = [\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0]^T$ hesaplanması gerekmektedir. Bunun için $t = 0$ zamanında $[x_0, x_N]$ aralığı için (2.29) yaklaşım fonksiyonu yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

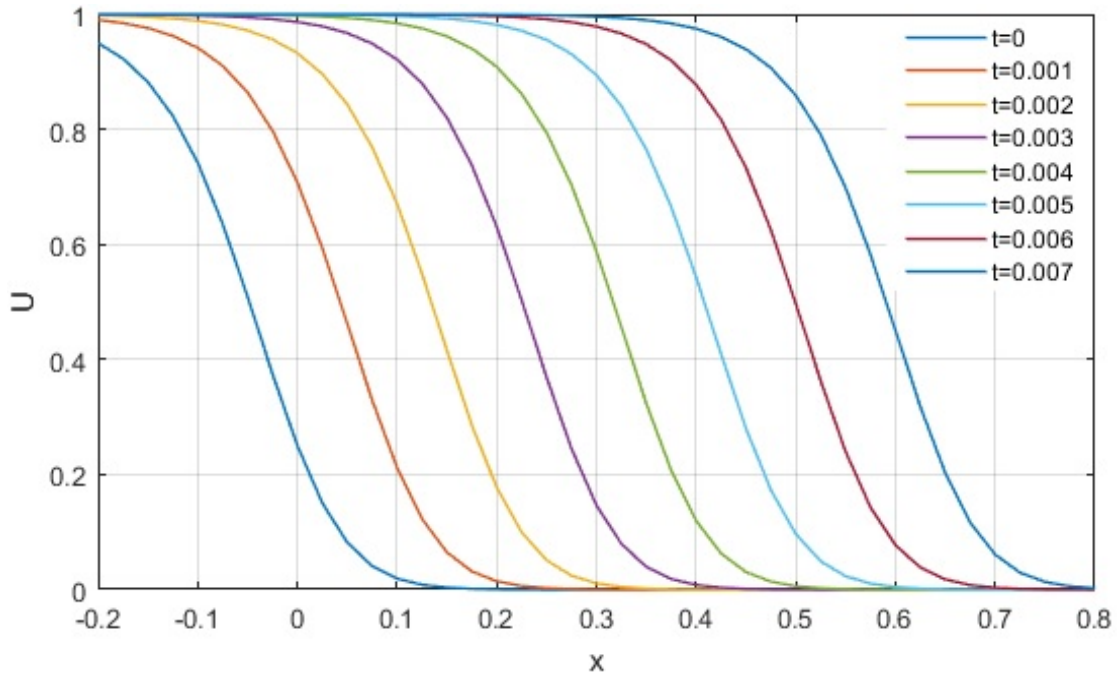
$$U(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0$$

δ^0 başlangıç değerlerini elde etmek için aşağıdaki başlangıç koşulları kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} u_x(a, 0) &= U'(x_0) \\ &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)} \delta_{-1} + 0\delta_0 + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)} \delta_1 \\ &= 0 \\ u_x(b, 0) &= U'(x_N) \\ &= \frac{\rho(1-c)}{2(\rho h c - s)} \delta_{N-1} + 0\delta_N + \frac{\rho(c-1)}{2(\rho h c - s)} \delta_{N+1} \\ &= 0 \\ u(x_m, 0) &= U(x_m) \\ &= \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m-1} + 1\delta_m + \frac{s - \rho h}{2(\rho h c - s)} \delta_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.22)$$

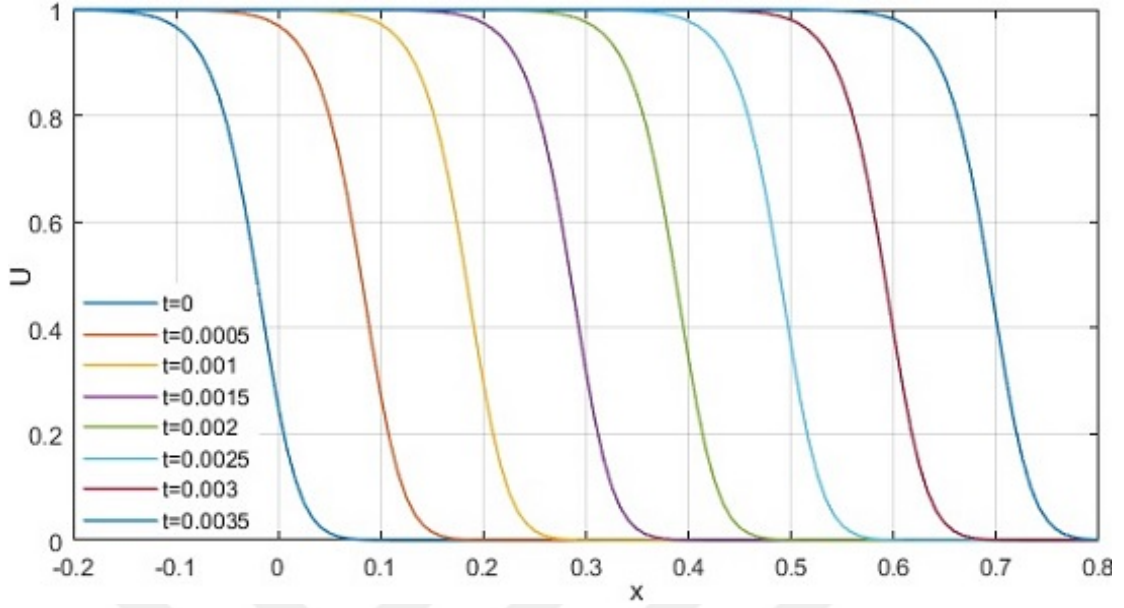
olarak alınmıştır. Mevcut bazı çalışmalarla aynı sonuçları elde edebilmek için hesaplamalar, $-0,2 \leq x \leq 0,8$ ve $0 \leq t \leq 0,007$ aralığı içinde $\lambda = 0,1$ ve $\Delta t = 0,0001$ parametre değerleri kullanılarak yapılmıştır.

Problem(1) için zaman aralığı $0 \leq t \leq 0,007$ ve konum artımı $h = 1/40$ ve $\beta = 2 \times 10^3$ alınarak farklı zamanlardaki sayısal çözüm bulunmuştur. Bu çözümden elde edilen değerlerle Şekil 6.1 grafiği çizilmiştir.



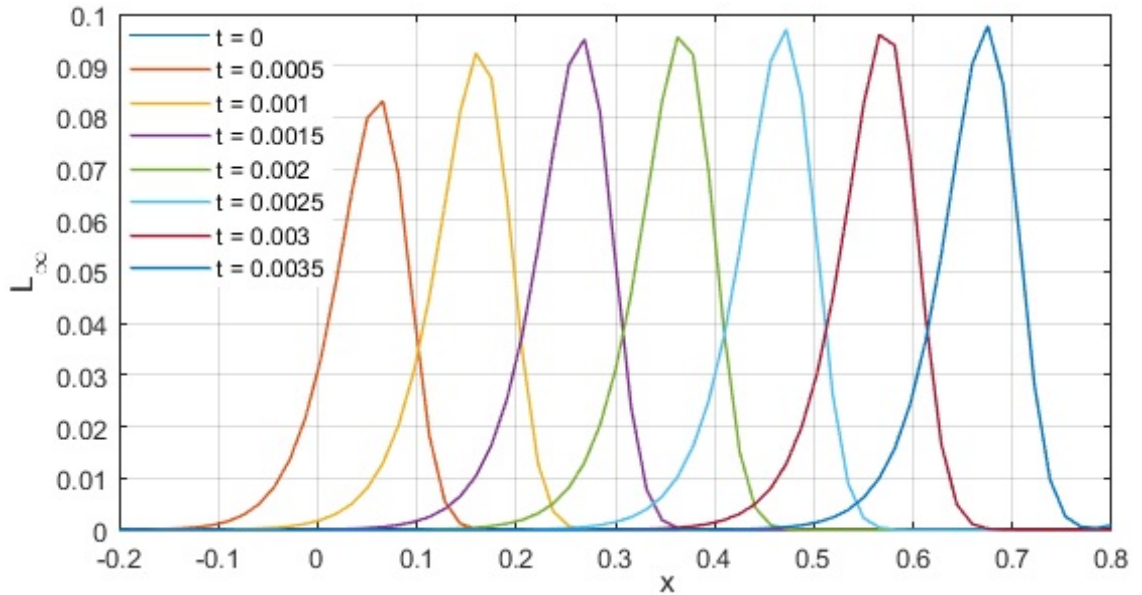
Şekil 6.1. $\rho = 1$, $h = 1/40$ ve $\beta = 2 \times 10^3$ için U

Problem(1) testini daha büyük bir β değerlerindeki sayısal çözümünü resmetmek ve şok dalga eğilimini daha iyi gözlemlemek için $\beta = 10^4$ ve $h = 1/120$ parametre değeriyle bulunan değerler Şekil 6.2'de gösterilmiştir.

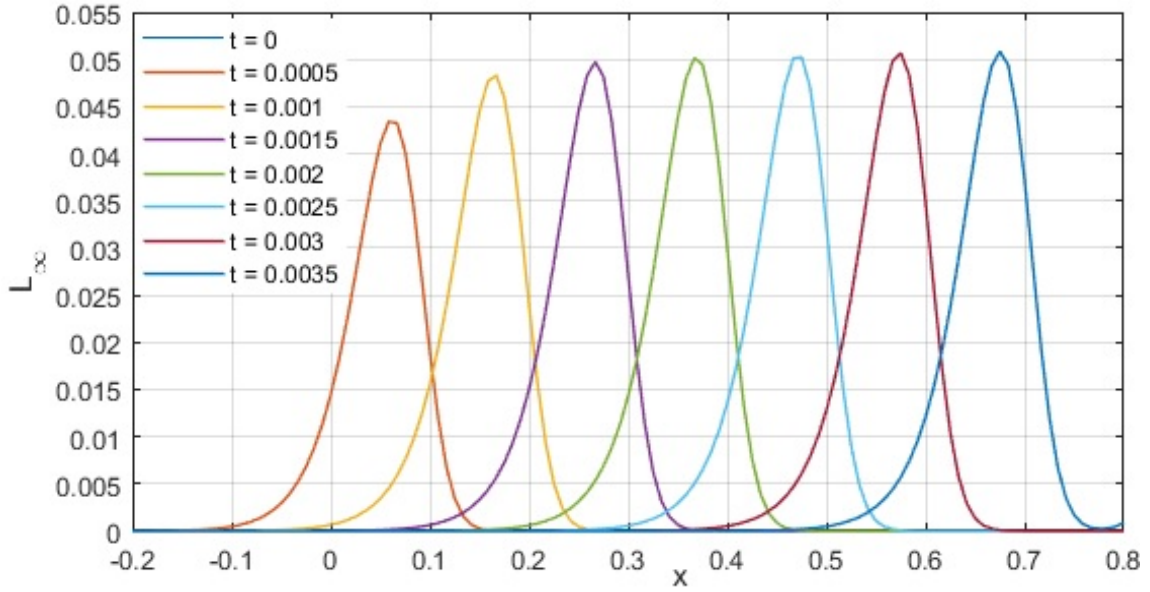


Şekil 6.2. $\rho = 1$, $h = 1/120$ ve $\beta = 10^4$ için U

$\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ alınarak $h = 1/64$, $h = 1/120$ değeri için elde edilen L_∞ hata normlarının grafikleri sırasıyla Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'de çizilmiştir.



Şekil 6.3. $\rho = 1$, $h = 1/64$ ve $\beta = 10^4$ için L_∞



Şekil 6.4. $\rho = 1$, $h = 1/120$ ve $\beta = 10^4$ için L_∞

$\lambda = 1$, $\beta = 10^4$, $-0,2 \leq x \leq 0,8$ ve $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ parametre değerleri kullanılarak Problem(1) için farklı zamanlara ait L_∞ maksimum hata normu ve L_2 ortalama hata normu hesaplanmış elde edilen değerler Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1. Farklı zamanlar için L_∞ ve L_2 hata normları

h	Hata	$t = 0,0005$	$t = 0,0015$	$t = 0,0025$	$t = 0,0035$
1/64					
$(\rho = 1)$	L_∞	$8,313 \times 10^{-2}$	$9,513 \times 10^{-2}$	$9,700 \times 10^{-2}$	$9,770 \times 10^{-2}$
	L_2	$2,116 \times 10^{-2}$	$2,437 \times 10^{-2}$	$2,481 \times 10^{-2}$	$2,496 \times 10^{-2}$
$(\rho = 0,0219)$	L_∞	$7,820 \times 10^{-2}$	$7,045 \times 10^{-2}$	$5,359 \times 10^{-2}$	$3,828 \times 10^{-2}$
	L_2	$1,997 \times 10^{-2}$	$1,787 \times 10^{-2}$	$1,351 \times 10^{-2}$	$1,168 \times 10^{-2}$
1/150					
$(\rho = 1)$	L_∞	$3,397 \times 10^{-2}$	$3,877 \times 10^{-2}$	$3,937 \times 10^{-2}$	$3,957 \times 10^{-2}$
	L_2	$8,407 \times 10^{-3}$	$9,653 \times 10^{-3}$	$9,823 \times 10^{-3}$	$9,884 \times 10^{-3}$
$(\rho = 0,00311)$	L_∞	$3,242 \times 10^{-2}$	$2,913 \times 10^{-2}$	$2,197 \times 10^{-2}$	$1,653 \times 10^{-2}$
	L_2	$7,938 \times 10^{-3}$	$7,085 \times 10^{-3}$	$5,432 \times 10^{-3}$	$4,825 \times 10^{-3}$

6.3.2. Problem(2): Başlangıç titreşim profili

(2.51) denkleminde sınır koşulu olarak (2.53)

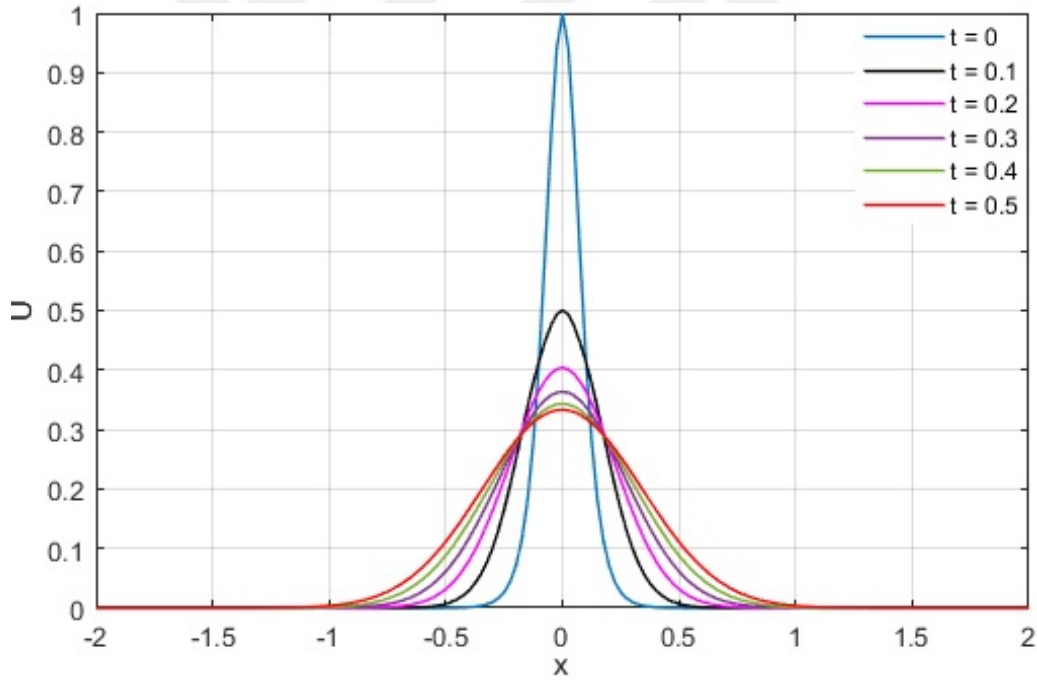
$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (6.26)$$

ve başlangıç koşulu olarak

$$u(x, 0) = \text{sech}^2(10x) \quad (6.27)$$

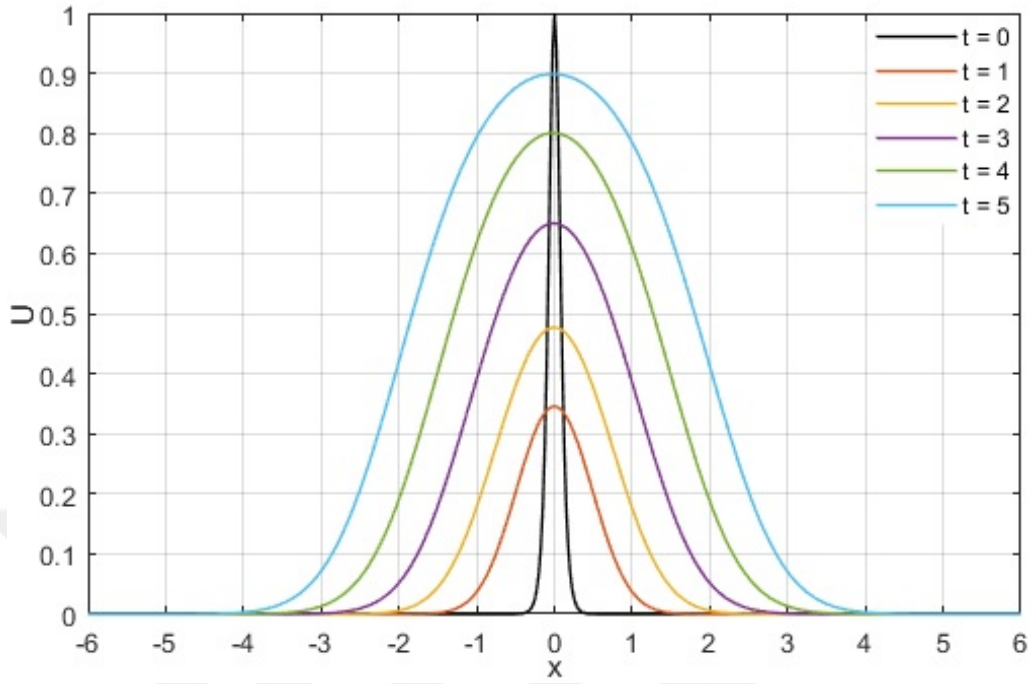
alınacaktır.

Problem(2) için konum aralığı $[a, b] = [-50, 50]$, zaman aralığı $0 \leq t \leq 40$, $\lambda = 0, 1$, $\beta = 1$, $\Delta t = 0,05$ ve konum artımı $h = 0,025$ alınmıştır. Şekil 6.5'de $[a, b] = [-2, 2]$ aralığı ve $[0, 0,5]$ zaman aralığı kullanılmıştır.



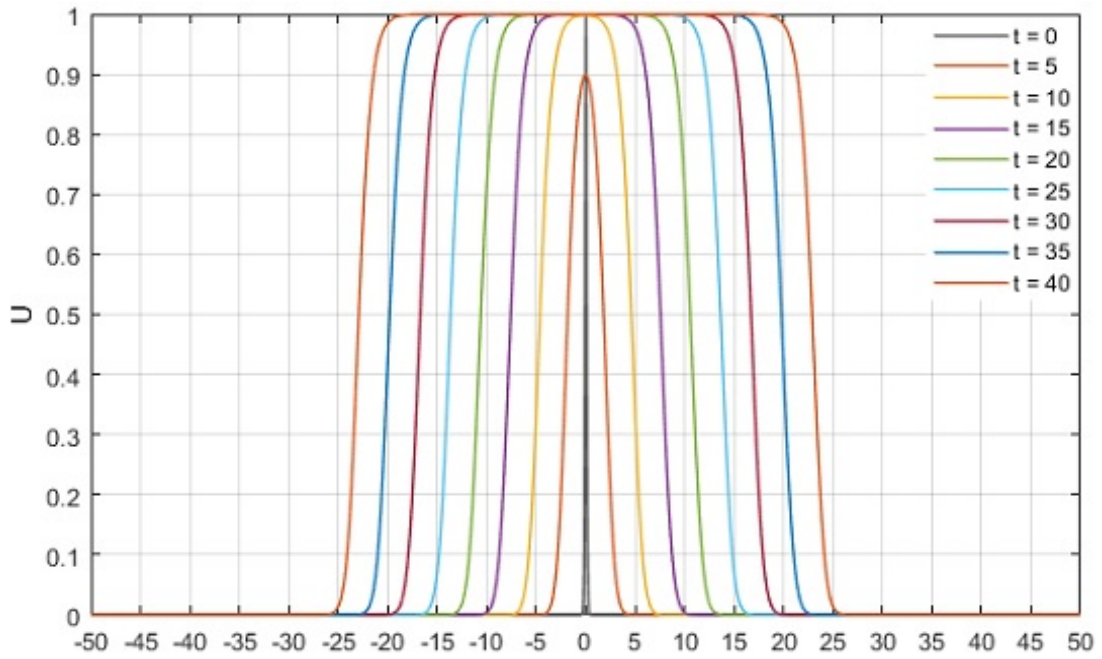
Şekil 6.5. Başlangıç anına yakın zamanlar için çözümler

Şekil 6.6'da $[a, b] = [-6, 6]$ konum aralığı ve $[0, 5]$ zaman aralığı kullanılmıştır.



Şekil 6.6. Kısa zaman aralığı için U

Şekil 6.7'de $[a, b] = [-50, 50]$ konum aralığı ve $[0, 40]$ zaman aralığı kullanılmıştır.



Şekil 6.7. Uzun zaman aralığı için U

Problem(2) için verilen bir analitik çözüm olmadığından elde edilen sayısal değerleri kontrol etmek için *Rel* bağıl hata normu kullanılmıştır. $\lambda = 0,1$, $\beta = 1$, $\Delta t = 0,05$, konum aralığı $[-50, 50]$ ve konum artımı $h = 0,025$ alınarak bazı farklı zaman değerleri için elde edilen *Rel* bağıl hata değerleri Çizelge 6.2’de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Farklı zamanlara için *Rel* hata normu

$\rho = 1$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$	$t = 40$
<i>Rel</i>	$1,385 \times 10^{-2}$	$7,859 \times 10^{-3}$	$6,053 \times 10^{-3}$	$5,089 \times 10^{-3}$	$3,434 \times 10^{-3}$

İncelenen iki test problemine göre, Fisher denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz üstel B-spline en küçük kareler yönteminin tatmin edici sonuçlar verdiği söylenebilir.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılarak sayısal çözümleri araştırılan RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerine uygulanan yöntem ile elde edilen çözümler anlatılmıştır. Ayrıca sayısal çözümlerle analitik çözümleri bilinen test problemlerinin karşılaştırılmasından elde edilen bulgular tartışılmıştır.

Bu çalışmada üstel B-spline en küçük kareler yöntemi ile RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Sayısal çözüm araştırılırken, kullanılan yöntemden dolayı zaman parçalanmasına ihtiyaç olmamıştır. Dolayısıyla sadece konum ayrıştırması yapılmıştır. Konum ayrıştırması içinse üstel B-spline (kübik B-spline ile aynı spline özelliklerine sahip) fonksiyonlar kullanılmıştır. İşlemlerde sonlu elemanlarla uğraşmamak ve en küçük kareler yönteminde kolaylık sağlaması için yerleştirme işlemi yapılmıştır. Yöntemden elde edilecek sayısal sonuçları iyileştirmesi beklenen iç iterasyon kullanıldığında elde edilen değerlerin test problemleri için kayda değer bir etkisi olmadığı görüldüğünden iç iterasyon uygulanmamıştır.

Çalışmada kullanılan üstel B-spline fonksiyonlarının çift fonksiyon olması nedeniyle ρ değerinin sıfırdan büyük değerleri en iyi sayısal çözüm için araştırılmıştır. En iyi ρ değerini belirlemek için bir yöntem verilmemiş olduğundan test probleminde kabul edilebilir hata seviyesine uygun olacak şekilde ρ taraması yapılmıştır. Denklem sistemlerinin çözümü ve ρ taramaları MATLAB paket programı kullanılarak yapılmıştır.

RLW denkleminin sayısal çözümüyle elde edilen veriler sırasıyla Tek dalga çözümü, İki pozitif dalganın girişimi, Ardışık dalgaların gelişimi ve Dalga oluşumu başlıklarıyla incelenmiştir. Tek dalga çözümü için kullanılan test probleminde genlik 0,09 seçildiğinde elde edilen çözümün hata grafiği Şekil 3.2 ve 3.3'de çizildiğinde hatanın $[-40, 60]$ olarak seçilen konum aralığının uç noktalarında olduğu fark edilmiş ve bu hatayı gidermek için konum aralığı genişletilmiştir. Bu işlem sonucunda elde edilen veriler Çizelge 3.2, Şekil 3.4 ve 3.5 incelendiğinde uç noktalardaki hatalarla birlikte hata normlarının da kayda değer bir biçimde küçüldüğü görülmüştür. Genlik 0,3 seçildiğinde

ise hata, konum aralığının ortasında kaldığından iyileştirme işlemi sadece en iyi ρ değeri aranarak yapılmıştır.

İki pozitif dalganın girişimi için seçilen test probleminin, analitik çözümü olmadığından, korunum sabitlerinin değişimleri iki farklı konum ve zaman aralığı için izlenmiştir. Her iki aralık içinde elde edilen sonuçlar kabul edilebilir bulunmuştur. Ayrıca iki pozitif dalganın girişiminde olmasını beklediğimiz gibi hızlı (yüksek genlikli) dalganın yavaş (düşük genlikli) olan dalgayı yakaladığı, geçtiği ve girişim sonrası her iki dalganın da eski genliklerine çok yakın değerlere ulaştıkları Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'da rahatça görülmüştür.

Ardışık dalgaların gelişimi testinde seçilen iki farklı eğim için oluşan ardışık dalgaların grafikleri Şekil 3.11 ve 3.12'de verilmiştir. Bu grafiklerde başlangıç koşulunda yüksek eğim alındığında daha fazla ardışık dalga oluştuğu gözlemlenmiştir. Ayrıca her iki eğim değeri için de en öndeki dalgaların büyüklüklerinin t arttıkça birbirine daha fazla yaklaştığı görülmüştür.

Dalga oluşumu testinde Maxwell başlangıç koşulu kullanılmıştır. Burada oluşan tek dalganın ve arkasındaki salınım dalgalarının boylarının ve yüksekliklerinin seçilen μ değerine bağlı olduğu görülmüştür.

Burgers denkleminin elde edilen sayısal çözümü üç test problemi ile kontrol edilmiştir. Burgers denkleminin sayısal çözümleri bilinmesine rağmen düşük viskoziteli durumlarda sonsuz serilerin yavaş yakınsamasından dolayı analitik çözümlere ulaşmak zorlaşmaktadır. Özellikle bu durum için sayısal yöntemler daha hızlı sonuç vermektedir. Düşük viskoziteli denklemlerin sayısal çözümleri grafikler yardımıyla yorumlanmıştır. Şekil 4.1 ve 4.2 incelendiğinde viskozite katsayısının düşmesiyle dalga grafiğinin beklenildiği gibi şok dalga eğiliminde olduğu görülmüştür. Ayrıca her üç test sonuçları incelendiğinde sayısal çözümlerin analitik çözümlerle ve fiziksel beklentilerle uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

AD denklemi için bulunan sayısal çözüm, sadece adveksiyon hareketi içeren bir test problemi ve hem adveksiyon hem de difüzyon hareketi içeren iki test problemi ile kontrol edilmiştir. Test problemlerinden hata normlarının düşük konum ve zaman değişimleri için elde edildiği görülmüştür.

Fisher denklemi iki test problemi ile çalışılmış ve elde edilen sayısal çözüm, analitik çözüme sahip ilk test problemi için L_∞ ve L_2 hata normları hesaplanarak kontrol edilmiştir. Çalışılan ikinci test problemi içinse Rel (bağıl hata) normu hesaplanmıştır.



8. SONUÇ VE ÖNERİLER

RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemlerinin sayısal çözümlerinin araştırıldığı bu çalışmada üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır. Yöntemin ve yapılan işlemlerin daha rahat anlaşılabilmesi için çalışmaya ait ön bilgiler ve temel kavramlar birinci ve ikinci bölümde açıklanmıştır.

Konum ayrıştırması için üstel B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Konum ayrıştırması için seçilen üstel B-spline fonksiyonlarının içerdiği ρ parametresi her ne kadar önceden belirlenen hata aralığı için istenilen hassasiyette taranabilse de bu işlemin ekstra işlem maliyetine sebep olduğu görülmüştür. Dolayısıyla üstel B-spline en küçük kareler yöntemi teorik olarak uygulanması basit fakat pratikte işlem maliyeti olan bir yöntemdir. Ayrıca bu çalışmada kullanılan yöntemden dolayı zaman ayrıştırmasına gerek kalmamıştır.

İlk olarak RLW denkleminin sayısal çözümü için üstel B-spline en küçük kareler yöntemi kullanılmış ve elde edilen sonuçlar dört test problemi ile kontrol edilmiştir. Test problemlerinde elde edilen veriler var olan analitik çözümlerle karşılaştırılmış, sonuçlar çizelgeler ve şekiller yardımıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçların kabul edilebilir olduğu görülmüştür.

Burgers denkleminin analitik çözümleri olmasına karşın düşük viskozite katsayılı denklemlerde analitik çözüm bulmak (serilerin yavaş yakınsamasından dolayı) zorlaşmaktadır. Dolayısıyla özellikle düşük viskoziteli denklemlerin çözümü için sayısal yöntemler kullanmak çözüm işlemlerini kolaylaştırmaktadır. Kullanılan yöntem ile düşük viskoziteli testler de yapılmış ve sonuçların önceki çalışmalarla uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca elde edilen verilerle çizilen grafiklerde şok dalgası benzer hareketler açıkça görülmüştür.

AD denkleminin sayısal çözümleri araştırılırken taşınmanın sadece adveksiyonla yapıldığı bir test problemi, hem adveksiyon hem de difüzyon ile yapıldığı iki test problemi çalışılmıştır. Üç test problemi için de oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Fisher denkleminin sayısal çözümünü kontrol etmek için kullanılan iki test problemi de yapılmış önceki çalışmalar ile uyumlu sonuçlar vermiştir.

Sonuç olarak sayısal çözümleri araştırılan RLW, Burgers, AD ve Fisher denklemleri uygulanan yöntemle başarılı bir şekilde çözülmüştür. Bu sonuç kullanılan yöntemin diğer denklemlerin çözümleri için de kullanılabilceğini göstermiştir. Yapılacak sonraki çalışmalarda üstel B-spline yerine daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonları kullanılabilir ayrıca sayısal çözümlerin yanı sıra kararlılık testleri de uygulanabilir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ablowitz, M.J., Zeppetella, A., 1979, Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed, *Bulletin of Mathematical Biology*, 41, p.835–840.
- Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1964, *Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables*, Courier Corporation, p.1046.
- Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., 1990, A Galerkin approach to the solution of Burgers' equation, *Mathematics Preprint*, No.90.04.
- Ali, A.H.A., Gardner, G.A., Gardner, L.R.T., 1992, A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100, p.325–337.
- Andersen, S.S.L., Jackson, A.D., Heimburg, T., 2009, Towards a thermodynamic theory of nerve pulse propagation, *Progress in Neurobiology*, 88, p.104–113.
- Arora, G., Joshi, V., 2018. A computational approach using modified trigonometric cubic B-spline for numerical solution of Burgers' equation in one and two dimensions. *Alexandria Engineering Journal* 57, p.1087–1098.
- Bateman, H., 1915, Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, 43, p.163–170.
- Bayarassou, K., Rouatbi, A., Omrani, K., 2019. Uniform error estimates of fourth-order conservative linearized difference scheme for a mathematical model for long wave. *International Journal of Computer Mathematics* 0, p.1–26.
- Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J.J., 1972, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 272, p.47–78.
- Benton, E.R., Platzman, G.W., 1972, A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30, p.195–212.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Birkhoff, G., De Boor, C., 1965, Piecewise polynomial interpolation and approximation, Proc. General Motors Symposium of 1964, Elsevier, p.164-190.
- Boussinesq, J., 1871, Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, 72, p.755–759.
- Burgers, J.M., 1939, Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, Trans. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 17, p.1–53.
- Burgers, J.M., 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, in: Von Mises, R., Von Kármán, T. (Eds.), Advances in Applied Mechanics, Elsevier, 1, p.171–199.
- Chatwin, P.C., Allen, C.M., 1985, Mathematical models of dispersion in rivers and estuaries, Annual Review of Fluid Mechanics, 17, p.119–149.
- Cole, J.D., 1951, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quarterly of Applied Mathematics, 9, p.225–236.
- Crawford, F.S., 1968, Waves, McGraw-Hill, p.634.
- Dağ, I., 2000, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182, p.205–215.
- Dağ, I., Naci Özer, M., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, Applied Mathematical Modelling, 25, p.221–231.
- Dağ, I., Saka, B., Irk, D., 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, Applied Mathematics and Computation, 159, p.373–389.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dağ, I., Irk, D., Saka, B., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, *Applied Mathematics and Computation*, 163, p.199–211.
- Dağ, I., Irk, D., Tombul, M., 2006, Least-squares finite element method for the advection–diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 173, p.554–565.
- Dağ, I., Şahin, A., Korkmaz, A., 2010, Numerical investigation of the solution of fisher's equation via the b-spline galerkin method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, p.1483–1503.
- Dağ, I., Camıvar, A., Şahin, A., 2011, Taylor–Galerkin and Taylor-collocation methods for the numerical solutions of Burgers' equation using B-splines, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, p.2696–2708.
- Dağ, I., Ersoy, O., 2015, Numerical solution of generalized Burgers-Fisher equation by exponential cubic B-spline collocation method, *AIP Conference Proceedings*, 1648, p.370008.
- Dağ, I., Ersoy, O., 2016, The exponential cubic B-spline algorithm for Fisher equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 86, p.101–106.
- Davydov, A.S., 1991, *Solitons in molecular systems*, Springer Netherlands, p.438.
- De Boor, C., 1978, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, p.392.
- Dehghan, M., 2004, Weighted finite difference techniques for the one-dimensional advection–diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 147, p.307–319.
- Döken, F.T., 2002, *İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori*, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 63 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Drazin, P.G., Johnson, R.S., 1989, Solitons: An introduction, Cambridge University Press, p.226.
- Ducros, N., Silva, A.D., Dinten, J.M., Seelamantula, C.S., Unser, M., Peyrin, F., 2009, Time resolved fluorescence diffuse optical tomography using multi-resolution exponential B-splines, Presented at the 2009 IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro, p.157–160.
- Ersoy, O., Korkmaz, A., Dağ, I., 2016, Exponential B-Splines for numerical solutions to some Boussinesq systems for water waves, Mediterranean Journal of Mathematics, 13, p.4975–4994.
- Fisher, R.A., Balmukand, B., 1928, The estimation of linkage from the offspring of selfed heterozygotes, Journal of Genetics, 20, p.79–92.
- Fisher, R.A., 1937, The Wave of Advance of Advantageous Genes., Annals of Eugenics, 7, p.355–369.
- Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: A survey of results, Manchester University Press, p.472.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, Physical Review Letters, 19, p.1095–1097.
- Gardner, L.R.T., Dağ, I., 1994, A numerical solution of the advection-diffusion equation using B-spline finite element, Proceedings International AMSE Conference, Systems Analysis, Control & Design, p.109–116.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Dağ, I., 1995, A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, p.59–68.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Goh, J., Abd. Majid, A., Ismail, A.I.M., 2012, Cubic B-Spline collocation method for one-dimensional heat and advection-diffusion equations, *Journal of Applied Mathematics*, Vol.2012, Article ID 458701, 8 p.
- Görgülü, M.Z., Dağ, I., Irk, D., 2017, Simulations of solitary waves of RLW equation by exponential B-spline Galerkin method, simulations of solitary waves of RLW equation by exponential B-spline Galerkin method, *Chinese Physics B*, 26, p.80202–080202.
- Görgülü, M.Z., Dağ, I., 2018, Exponential B-splines Galerkin Method for the Numerical Solution of the Fisher's Equation, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42, p.2189–2198.
- Görgülü, M.Z., Dağ, I., 2018, Exponential B-splines Galerkin Method for the Numerical Solution of the Fisher's Equation, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42, p.2189–2198.
- Görgülü, M.Z., Dağ, I., Doğan, S., Irk, D., 2018, A numerical solution of the advection-diffusion equation by using extended cubic B-spline functions, *Anadolu Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi A - Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik*, s.1-1.
- Gu, C., 1995, *Soliton theory and its applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, p.415.
- Hasegawa, A., Tappert, F., 1973, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion, *Applied Physics Letters*, 23, p.142–144.
- Hepson, O.E., Korkmaz, A., Dag, I., 2020. Exponential B-spline collocation solutions to the Gardner equation. *International Journal of Computer Mathematics* 97, p.837–850.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hopf, E., 1950, The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$, Communications on Pure and Applied Mathematics, 3, p.201–230.
- Hutomo, G.D., Kusuma, J., Ribal, A., Mahie, A.G., Aris, N., 2019. Numerical solution of 2-d advection-diffusion equation with variable coefficient using du-fort frankel method. J. Phys.: Conf. Ser. 1180, p.012009.
- Irk, D., 2012, Solitary wave solutions for the regularized long-wave equation, Physics of Wave Phenomena, 20, p.174–183.
- Irk, D., Dağ, İ., Tombul, M., 2015, Extended cubic B-spline solution of the advection-diffusion equation, KSCE Journal of Civil Engineering, 19, p.929–934.
- Jain, P.C., Holla, D.N., 1978, Numerical solutions of coupled Burgers' equation, International Journal of Non-Linear Mechanics, 13, p.213–222.
- Jain, P.C., Raja, M., 1979, Splitting-up technique for Burgers' equations, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 10, p.1543–1551.
- Jain, P.C., Shankar, R., Singh, T.V., 1992, Cubic spline technique for solution of Burgers' equation with a semi-linear boundary condition, Communications in Applied Numerical Methods, 8, p.235–242.
- Jain, P.C., Shankar, R., Singh, T.V., 1993, Numerical solution of regularized long-wave equation, Communications in Numerical Methods in Engineering, 9, p.579–586.
- Jiwari, R., Alshomrani, A.S., 2017, A new algorithm based on modified trigonometric cubic B-splines functions for nonlinear Burgers'-type equations, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 27, p.1638–1661.
- Koch, P.E., 1988, Multivariate trigonometric B-splines, Journal of Approximation Theory, 54, p.162–168.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2012, Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 22, p.1021–1036.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2013, Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers' equation, *Engineering Computations*, 30, p.320–344.
- Korteweg, D.J., De Vries, G., 1895, XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39, p.422–443.
- Kumar, R., Dennis, B.H., 2008, A least-squares/Galerkin finite element method for incompressible Navier-Stokes equations, 525–535.
- Kutluay, S., Esen, A., 2006, A finite difference solution of the regularized long-wave equation, *Research article, Mathematical Problems in Engineering*, Vol.2006, Article ID 85743, 14 p.
- Kutluay, S., Esen, A., Dağ, I., 2004, Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167, p.21–33.
- McCartin, B.J., 1981, *Theory, computation, and application of exponential splines*, New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, p.311.
- Mohammadi, R., 2013, Exponential B-Spline solution of convection-diffusion equations, *Applied Mathematics*, 04, p.933–944.
- Mohammadi, R., 2015, Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation, *Chinese Physics B*, 24, p.050206.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Mollenauer, L.F., Stolen, R.H., Gordon, J.P., 1980, Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers, *Physical Review Letters*, 45, p.1095–1098.
- Nguyen, H., Reynen, J., 1982, A space-time finite element approach to Burgers' equation, in: Taylor, C., Hinton, E., Owen, D.R.J., Onate, E. (Eds.), *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, Pineridge Publisher, p.718–728.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85, p.143–160.
- Pepper, D.W., Kern, C.D., Long, P.E., 1979, Modeling the dispersion of atmospheric pollution using cubic splines and chapeau functions, *Atmospheric Environment (1967)*, 13, p.223–237.
- Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, 25, p.321–330.
- Rao, S.C.S., Kumar, M., 2008, Exponential B-spline collocation method for self-adjoint singularly perturbed boundary value problems, *Applied Numerical Mathematics*, 58, p.1572–1581.
- Raslan, K.R., 2003, A collocation solution for Burgers equation using quadratic B-Spline finite elements, *International Journal of Computer Mathematics*, 80, p.931–938.
- Rayleigh, Lord, 1876, On waves, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 5*, 1(4), p.257–279.
- Rayleigh, Lord, 1914, On the theory of long waves and bores, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 90, p.324–328.
- Roache, P.J., 1972, *Computational fluid dynamics*, Hermosa, p.446.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Russell, J.S., 1844, Report on waves, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, p.311–390.
- Saka, B., Dağ, I., 2007, Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, p.1125–1137.
- Saka, B., Dağ, İ., Irk, D., 2008, Quintic B-spline collocation method for numerical solutions of the RLW equation, *The ANZIAM Journal*, 49, p.389–410.
- Saka, B., Şahin, A., Dağ, İ., 2011, B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27, p.581–607.
- Sankaranarayanan, S., Shankar, N.J., Cheong, H.F., 1998, Three-dimensional finite difference model for transport of conservative pollutants, *Ocean Engineering*, 25, p.425–442.
- Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, p.45–99.
- Settles, G.S., 2001, *Schlieren and Shadowgraph techniques: Visualizing phenomena in transparent media*, Springer Science & Business Media, p.376.
- Shukla, H.S., Tamsir, M., 2017, An exponential cubic B-spline algorithm for multi-dimensional convection-diffusion equations, *Alexandria Engineering Journal*, doi:10.1016/j.aej.2017.04.011 (inpress).
- Spalding, D.B., 1972, A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4, p.551–559.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Sun, F., Wang, J., 2017, Interpolating element-free Galerkin method for the regularized long wave equation and its error analysis, *Applied Mathematics and Computation*, 315, p.54–69.
- Szymkiewicz, R., 1993, Solution of the advection–diffusion equation using the splinefunction and finite elements, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, p.197–206.
- Şahin, A., Dağ, İ., Saka, B., 2008, A B-spline algorithm for the numerical solution of Fisher’s equation, *Kybernetes*, 37, p.326–342.
- Tamsir, M., Srivastava, V.K., Jiwari, R., 2016, An algorithm based on exponential modified cubic B-spline differential quadrature method for nonlinear Burgers’ equation, *Applied Mathematics and Computation*, 290, p.111–124.
- Varoğlu, E., Finn, W.D.L., 1980, Space-time finite elements incorporating characteristics for the burgers’ equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 16, p.171–184.
- Yakushevich, L., 2000, DNA as a nonlinear dynamical system, *Macromolecular Symposia*, 160, p.61–68.
- Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., 1965, Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, 15, p.240–243.
- Zhao, S., Wei, G., 2003, Comparison of the Discrete Singular Convolution and Three Other Numerical Schemes for Solving Fisher’s Equation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25, p.127–147.
- Zheng, S., 2004, *Nonlinear evolution equations*, Chemical Rubber Company Press, p.302.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zlatev, Z., Berkowicz, R., Prahm, L.P., 1984, Implementation of a variable stepsize variable formula method in the time-integration part of a code for treatment of long-range transport of air pollutants, *Journal of Computational Physics*, 55, p.278–301.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Sedat Ülker
Uyruğu: T.C.
Doğum Yeri - Tarihi: Alaca - 01.10.1980
Adresi: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik-Bilgisayar Bölümü, 26480 ESKİŞEHİR
E-posta Adresi: cebir98@gmail.com
Eğitim Bilgileri:
Doktora:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2012-2018)
Yüksek Lisans:
Sakarya Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Cebir Bilim Dalı (2010-2012)
Lisans:
Marmara Üniversitesi
Atatürk Eğitim Fakültesi
Matematik Bölümü (1998-2003).
İş Deneyimi: Matematik Öğretmeni, İstanbul, Sakarya
Hitit Üniversitesi, Osmancık Meslek Yüksek Okulu,
Öğretim Görevlisi
Matematik Öğretmeni, Hakkari, Isparta
Milli Eğitim Bakanlığı