Lokal ve Eş Formlu Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri

Muammer Topsakal

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Nisan 2019

Solutions of Fractional Local and Conformable Differential Equations

Muammer Topsakal

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Marhematics- Computer

April 2019

Lokal ve Eş Formlu Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri

Muammer Topsakal

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

Nisan 2019

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Muammer Topsakal' ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı ''Lokal ve Eş Formlu Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri'' başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili madderleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

İkinci Danışman : ---

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

Üye : Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

Üye : Doç. Dr. Adem Cengiz Çevikel

Üye : Doç. Dr. Emrullah Yaşar

Üye : Dr. Öğr. Üy. Ömer Ünsal

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …………………………. tarih ve ………………… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım klavuzuna göre, Prof. Dr. Filiz Taşcan danışmanlığında hazırlamış olduğum ‘‘Lokal ve Eş Formlu Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri’’ başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi , belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/04/2019

Muammer Topsakal
İmza

ÖZET

Kesir türevli diferensiyel denklemler matematikde, fizikte, biyolojide, sinyal işlemede, kontrol teoride, sistem tanımlamasında ve birçok lineer olmayan olayların matematiksel modellenmesinde kullanılır. Bunun yanısıra besin takviyesi, iklimlendirme, finans ve ekonomi gibi sosyal bilimlerde de kullanılmaktadır. Uygulamalı matematik ve birçok fizik problemlerinde karşımıza çıkan lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesi son zamanlarda büyük önem kazanmıştır. Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin doğrudan çözülmesi mümkün olmadığı için, bir takım metotlar geliştirilmiştir. Bu bağlamda tanh, sinüs-kosinüs, üstel fonksiyon, ilk integral, Kudyrashov, basit denklem, (G'/G)-açılım ve yardımcı denklem vb. yöntemler bu tür denklemlere uygulanmıştır.

Bu tezin ilk aşamasında, kesir türevli diferensiyel denklemlerin ortaya çıkışı, günümüze kadar kullanılan kesir türevli diferensiyel denklemlerin tanımları ve kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde ortaya çıkan temel kavramlar ele alınmıştır. İkinci aşamada ise son yıllarda en çok kullanılan kesir türevli diferensiyel denklemlerden olan lokal kesir türevli diferensiyel denklemler ve eş formlu kesir türevli diferensiyel denklemler incelenmiştir. Ardından lineer olmayan diferensiyel denklemlerin, diferensiyel denklem sistemlerinin, ve kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözülebilmesi için kesirsel dönüşümden daha etkili ve yeni bir metot olan, lokal ve eş formlu kesir türevlerin tanım özelliklerinin kullanıldığı, hareketli dalga dönüşümler yolu ile adi diferensiyel denkleme dönüştürülmeleri verilmiştir. Adi kesir türevli diferensiyel denkleme indirgenen kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi için dengelenme sayısını bulma ve çok kullanılan tam çözüm yöntemlerinden bazıları basitten başlayarak belirli bir sırada verilmiştir. Son olarak, lokal ve eş formlu kesir türevli diferensiyel denklem tanımları ve özellikleri kullanılarak, kesir türevli diferensiyel denklemlerden bazılarının tam çözümleri yeni yöntem ve metotlara göre elde edilip, sonuçları tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Lokal kesirli türev, eş formlu kesirli türev, hareketli dalga dönüşümü, dengelenme sayısı, tam çözüm yöntemleri.

SUMMARY

Fractional differential equations are used in mathematics, physics, biology, signal processing, control theory, system identification and mathematical modeling of many nonlinear events. It is also used in social sciences such as nutritional supplements, air conditioning, finance and economics. It has recently gained great importance to obtain exact solutions of nonlinear fractional equations which are faced in applied mathematics and many physics problems. Since it is not possible to directly solve nonlinear fractional differential equations, a number of methods have been developed and the methods which are tanh, sine-cosine, exponential function, first integral, Kudyrashov, simple equation, (G'/G) -expantion and auxiliary equation and so on. , have been applied to such equations.

In the first stage of this thesis, how to discover fractional differential equations, the definitions of fractional differential equations used to until today and the basic concepts in the solution of fractional differential equations are given. In the second stage, local fractional differential equations and conformable fractional differential equations which are the most commonly used fractional differential equation definition in recent years are examined. Then, in order to solve non-linear differential equations, and fractional-order differential equations, they should be transformed into fractıonal ordinary differential equations by means of new travelling wave transformations using local and conformable fractional definition properties, which is more effective method than fractional transform method. Later how to find balance number of an fractıonal ordinary diferential equation and the most commonly used solution methods for ordinary diferential equations are determined in a specific order. Finally, the exact solutions of some of the fractional differential equations are obtained according to new methods by using the definitions and properties of local and conformable fractional differential equations and the conclusion are discussed.

Keywords: Local fractional derivative, conformable fractional derivative, travelling wave transformation, balance number, exact solution methods.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca, benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın danışman hocam Prof. Dr. Filiz TAŞCAN'a; ders aşamasında bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ders hocalarıma; tezin geliştirilmesi konusunda yardımlarını aldığım jüri üyelerime; her zaman yanımda olan ve beni destekleyen sevgili eşim ve çocuklarıma teşekkürlerimi sunarım.

Muammer Topsakal

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
CDGSK	Caudrey Dodd Gibbon Sawada Kotera
EW	Equal Width Wave
mKDVZK	modified Korteweg-De Vries-Zakharov-Kuznetsov
SCI	The Science Citation Index
mBBM	modified Bejamin Bona Mahoney

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Doğa bilimleri ve mühendislikte önemli bir yere sahip olan ve fiziksel olayların bir modellenmesi olarak elde edilen lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması 1900'lü yılların sonlarından, günümüze kadar uygulamalı matematiğin temel konularından biri olmuştur. Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesi her zaman mümkün olamamaktadır. Bu zorluktan dolayı öncelikli olarak bu tip denklemlerin hangi yöntem ile çözülebileceği üzerinde çalışılmıştır. Bununla birlikte lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Son yıllarda bu yöntemler daha da geliştirilerek uygulama alanları arttırılmıştır. Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri temelde yarı-analitik ve tam çözümler olarak sınıflandırılabilir.

Kesir türevli diferensiyel denklemler matematikte, fizikte, biyolojide, sinyal işlemede, kontrol teoride, sistem tanımlamasında ve birçok lineer olmayan olayların matematiksel modellenmesinde kullanılır (Oldman ve Spanier, 1974; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999 ;Kilbas vd., 2006). Bunun yanısıra besin takviyesi, iklimlendirme, finans ve ekonomi gibi sosyal bilimlerde de kullanılmaktadır. Uygulamalı matematik ve birçok fizik problemlerinde karşımıza çıkan lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesi son zamanlarda büyük önem kazanmıştır. Bu bağlamda (G'/G)-açılım (Zheng, 2012; Gepreel ve Omran, 2012), ilk integral (Lu, 2012), alt denklem (Zhang, 2011; Guo vd., 2012), deneme (Bulut vd., 2013), Kudyrashov (Ege ve Mısırlı, 2014) ve üstel fonksiyon (Zhang, 2010; Guner vd., 2015) yöntemleri bu tür denklemlere uygulanmıştır.

Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar son çeyrek asırda büyük önem kazanmıştır. Bu bağlamda Caputo anlamında kesirli türev (Caputo, 1967), Grünwald-Letnikov anlamında kesirli türev (Samko vd., 1993), Riemann-Liouville anlamında kesirli türev (Samko vd., 1993) ve Jumarie'nin modifiye Riemann-Liouville anlamında türevidir (Jumarie,2006; Jumarie 2009). Bu türevlerin özellikleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Son yıllarda yeni kesirsel türev çeşitleri elde edilmiştir. Khalil vd.

tarafından tanımlanan eş formlu (conformable) kesirli türev için birçok özellik ve teorem geliştirilmiştir (Khalil vd., 2014; Abdeljewad, 2015). Benzer şekilde Yang vd. tarafından tanımlanan lokal kesirli türev kavramı geliştirilmiştir (Yang vd., 2016; Yang vd., 2017).

Bu tezde, lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemler sınıfından kısmi diferensiyel denklemler, kısmi diferensiyel denklem sistemleri, oluşum denklemleri, diferensiyel fark denklemleri, kesir türevli diferensiyel denklemler, vb. denklemlerin çözümlerinin bulunması amaçlanmaktadır. Bu çözümler periyodik, hiperbolik, hareketli, soliter ve soliton çözümleri içermektedir. Tam çözümler için uygulanan farklı yöntemlerle, bulunan çözümlerin benzerlikleri ve bu yöntemlerden bazılarının birbirine denk oldukları gösterilecektir.

Çalışmamızda kullanılan yöntemler, güncel bir konu olan ve pek çok alanda karşımıza çıkan kesirsel analizde farklı matematiksel yöntemlerin doğmasına ve bu yöntemlerin etkilerinin ve kullanabilirliğinin kıyaslanmasında önemli bir ölçüt oluşturacaktır. Ayrıca tezde uygulanan yöntem ve çıktılar doğrultusunda kesirsel fark denklemlerinin çözüme kavuşmasına ilişkin yol gösterici bir araştırma çalışması olacaktır.

Son zamanlarda uygulamalı matematik alanlarında bilgisayar destekli sembolik hesaplamalar oldukça önem kazanmaya başlamıştır. Yaygın olarak kullanılan sembolik hesaplama paket programları; Maple, Mathematica, Matlab, Reduce, vb.dir. Bu paket programlarla, elle hesaplanması uzun süren işlemlerin daha kısa sürede ve daha hassas yapılması sağlanmaktadır. Bu bağlamda sembolik hesaplamaların kullanım alanları oldukça genişletilmiştir. Bu tezde intagrallenebilen lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmakta kullanılan yöntemler için Maple komutları yardımıyla alt programlar yazılacaktır. Yazılan bu programlarla ele alınan denklemlerin çözülebilirliği kontrol edilecektir.

20. yüzyılın başlarında lineer olmayan kesir türevli denklemler için bazı çözüm yöntemleri geliştirilmişti. Bu yöntemlerin kullanımındaki zorluk ve uzunluk nedeniyle yeni yöntemler geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Son yıllarda ise daha kullanışlı ve pratik çözümler veren yöntemler geliştirilmiştir. Burada uygulamalı matematik alanındaki lineer olmayan kısmi türevli denklemler (2-boyutlu, 3-boyutlu, 4-boyutlu,…), denklem sistemleri

ve kesir türevli diferensiyel denklemler için çözümler bulunacaktır. Ayrıca yapılan işlemler bilgisayar ortamında yapılacağından buna yönelik paket programlar geliştirilecektir. Bu çözüm yöntemleri ve uygulamalarını içeren bilimsel araştırmalar yaparak, SCI(The Science Citation Index) kapsamında uluslararası yayın yapılması amaçlanmaktadır. Tez kapsamında belirlenen hedefler ana başlıklar halinde aşağıda verilmiştir;

- Kesirli analizin ortaya çıkışı ve günümüze kadar kullanılan kesirli türev tanım ve yöntemleri hakkında kısa bir bilgi vermek.
- Kesirli türevlerin çözümlerinde karşılaşılan ifade ve fonksiyonların tanımlarını vermek.
- Lineer olmayan kısmi kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için, lokal ve eş formlu kesir türevli diferensiyel denklem tanımlarını kullanarak, adi diferensiyel denkleme dönüştürmek ve tam çözüm yöntemlerini bu denklemlere uygulamak.
- Lineer olmayan kesir türevli kısmi diferensiyel denklemler için yeni çözüm yöntemlerini kullanmak,
- Farklı türdeki denklemlerin çözümlerinin bulunmasında uygun yöntemler belirleyecek paket programları yazabilmek,
- Elde edilen çözüm yöntemleri ve uygulamalarını içeren bir kaynak oluşturmak,
- Tezden elde edilen kesir türevli diferensiyel denklem çözümlerinin uluslararası makale, uluslararası veya ulusal bildiri sunularak bu alanlarda çalışmak isteyen akademisyenlere, çalışmalarımızın ulaşmasını sağlamak

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

2.1. Giriş

Kesirli analiz kavramı ilk olarak 1695 yılında G.W. Leibnitz tarafından L'Hospital'a sorduğu "Tamsayı mertebeli $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ türevi, tamsayı mertebeli olmayan türevler için genelleştirilebilir mi?" sorusuyla başlamıştır. L'Hospital bu soruya "$n = \frac{1}{2}$ olduğu zaman ne olacak" sorusuyla karşılık vermiştir. G.W. Leibnitz bu soruya sonrasında çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran "$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{n}}$" cevabını verir.(Podlubny, 1999; Miller ve Ross, 1993). Leibnitz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Leibnitz'in yanısıra 17. Yüzyıldan itibaren Euler, Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü matematikçiler de bu konu üzerine çalışmışlardır (Loverro, 2004; Güner, 2014).

1730 yılında L. Euler Gamma fonksiyonunu tanımladı. 1819 yılında S.F. Lacroix m pozitif tamsayı olmak üzere, $y = x^m$ ifadesini Gamma fonksiyonunu kullanarak n. mertebeden türevini

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{2.1}$$

olarak buldu.

Bir fonksiyonun kesirli türevini hesaplamak zordur. Bunun için çok farklı kesirli türev tanımları vardır. Bu tanımların zaman içinde eksikliklerini gidermek ve daha kısa yollardan sonuca ulaşmak için yeni tanımlara ihtiyaç duyulmuştur. $y = f(x) = e^{mx}$ fonksiyonu tamsayı mertebeli türev alma metodunu kullanarak kesirli türevi şöyle bulunabilir;

$y = f(x) = e^{mx}$ fonksiyonunun n. mertebeden türevi

$$\frac{d^n(e^{mx})}{dx^n} = m^n e^{mx} \tag{2.2}$$

olarak bulunur. Bu türevde $n = \frac{1}{2}$ yazılarak

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}(e^{mx})}{dx^{\frac{1}{2}}} = m^{\frac{1}{2}} e^{mx} \tag{2.3}$$

elde edilir. Şimdi bir kez daha $\frac{1}{2}$. mertebeden türev alındığında,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}(m^{\frac{1}{2}} e^{mx})}{dx^{\frac{1}{2}}} = m^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} e^{mx} = m e^{mx} = \frac{d(e^{mx})}{dx}, \tag{2.4}$$

1. mertebeden türeve ulaşılır. Aynı şekilde $y = f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $n = \frac{1}{3}$. mertebeden türevi,

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}(\sin x)}{dx^{\frac{1}{3}}} = \frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right) = \frac{i^{\frac{1}{3}} e^{ix} - (-i)^{\frac{1}{3}} e^{-ix}}{2}, \tag{2.5}$$

olur ve tekrardan $n = \frac{2}{3}$. mertebeden türevi alınırsa,

$$\frac{d^{\frac{2}{3}}}{dx^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{i^{\frac{1}{3}} e^{ix} - (-i)^{\frac{1}{3}} e^{-ix}}{2}\right) = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2} = \cos x = \frac{d(\sin x)}{dx}, \tag{2.6}$$

1. mertebeden türev elde edilir.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü üzere bir fonksiyonun kesirli türevi değişik yöntemlerle bulunabilir. Kesirli türevleri bulmak normal türev bulmaya göre daha zordur, buyüzden birçok kesirli türev tanımı geliştirilmiştir. Bunlardan zaman içinde en çok kullanılanlar; Kolwankar-Gangal türevi (Kolwankar ve Gangal, 1996) Chen's fraktal türevi (Sun ve Chen, 2009; Chen ve Sun, 2009), Cresson's türevi (Cresson, 2003; Cresson, 2005), Grünwald-Letnikov kesirli türevi (Samko vd., 1993), Caputo kesirli türevi (Caputo, 1967), Riemann-Liouville kesirli türevi (Samko vd., 1993), Modifiye Riemann-Liouville kesirli türevi (Jumarie, 2006; Jumarie,2009), Lokal kesirli türev (Yang vd., 2016; Yang vd., 2017) ve Eş Formlu kesirli türevdir (Khalil vd., 2014; Abdeljewad, 2015). Bu tanımlardan bazılarını aşağıda vereceğiz.

2.2. L. Euler Kesirli Türevi

1730 yılında L. Euler Gamma fonksiyonunu tanımladı. 1819 yılında S.F. Lacroix m pozitif tamsayı olmak üzere, $y = f(x) = x^m$ ifadesini Gamma fonksiyonunu ve

$$\frac{d^n x^m}{x^n} = (m)(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}\,, \tag{2.7}$$

formülünü kullanarak n. mertebeden türevini,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}, \tag{2.8}$$

olarak buldu.

Bu denklemde $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ alarak $y = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}f(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.9}$$

olarak bulunur (Güner, 2014).

2.3. Grünwald-Letnikov Kesirli Türrev

f; $[a, b] \subset R$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere α. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türev,

$$ {}^{GL}_{\alpha}D_t^{\alpha}f(t) = \lim_{n\to\infty} h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(t-kh), \qquad nh = t-a, \qquad (2.10) $$

şeklinde tanımlanır.

Bu türev, m; $m \leq \alpha < m+1$ olacak şekilde bir tamsayı, $f(t)$ sürekli bir fonksiyon, $f^{(k)}(t)$, $(k = 1,2,3,\dots,m+1)$ türevleri de $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunun α. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$ {}^{GL}_{\alpha}D_t^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)}\int_{\alpha}^{t}(t-)^{m-\xi}f^{(m+1)}(\xi)d\xi, \qquad (2.11) $$

şeklinde tanımlanır (Podlubny I.,1999).

2.4. Riemann-Liouville Kesirli Türev

f; $[a,t] \subset$ R aralığında sürekli ve integrallenebilen zaman değişkenli bir fonksiyon olsun. n; $n-1 \leq \alpha < n$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı olmak üzere, $t > \alpha$ için α. Mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$ D_t^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{\alpha}^{t}\frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}d\xi, \qquad (2.12) $$

şeklinde tanımlanır (Podlubny I.,1999).

2.5. Caputo Kesirli Türev

n, $n-1 \leq \alpha < n$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, α herhangi bir pozitif tamsayı ve f fonksiyonu da n defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda f fonksiyonunun α. mertebeden Caputo kesirli türevi,

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\alpha}^{t}\frac{f^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}d\xi, \qquad (2.14) $$

şeklinde tanımlanır (Podlubny I.,1999).

2.6. Kesir Türevli Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

2.6.1. Kesir türevli adi diferensiyel denklemler

Bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesir türevli adi diferensiyel denklemler denir (Podlubny I.,1999).

Örnek 2.1:

- $D^{\frac{1}{2}}y(x) - 5D^{\frac{5}{2}}y(x) + y(x) = 0,$
- $D^{\frac{5}{3}}y(x) - D^{3}y(x) - 4y(x) = 0,$
- $D^{\frac{7}{8}}y(x) + 5D^{\frac{5}{6}}y(x) - 8y^{2}(x) = 0,$

denklemleri birer kesir türevli adi diferensiyel denklemdir.

2.6.2. Kesir türevli kısmi diferensiyel denklemler

Bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli türevlerini içeren denklemlere kesir türevli kısmi diferensiyel denklemler denir (Podlubny I.,1999).

Örnek 2.2:

- $D_x^{\frac{1}{2}}y(x,t) - 5D_t^{\frac{5}{2}}y(x,t) + 7y(x,t) = 0,$
- $D_t^{\frac{3}{2}}y(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - 4y(x,t) = 0,$

- $5\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) - 8\frac{\partial^{\frac{3}{2}}}{\partial t^{\frac{3}{2}}}y(x,t) + 3y(x,t) = 0,$

denklemleri birer kesir türevli kısmi diferensiyel denklemdir.

2.6.3. Kesir türevli lineer diferensiyel denklemler

x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere,

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \cdots + a_1(x)D^{\alpha_1}y(x) + a_0(x)D^{\alpha_0}y(x) = f(x), \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilen denklemlere kesir türevli lineer diferensiyel denklem denir. Bu denklemin lineer olması için; bağımlı değişken olan y ve onun bütün kesirli türevlerinin derecesi 1 olmalı ve $a(x)$ katsayıları yalnızca x bağımsız değişkenine bağlı olmalıdır (Küçük, 2014).

Örnek 2.3:

- $xD^{\frac{1}{2}}y(x) - 5D^{\frac{5}{2}}y(x) + x^2y(x) = 0,$
- $D^{\frac{5}{3}}y(x) - x^5D^3y(x) - 4xy(x) = 0,$
- $xD^{\frac{7}{8}}y(x) + 5xD^{\frac{5}{6}}y(x) - 8x^4y^2(x) = 0,$

denklemleri birer kesir türevli lineer diferensiyel denklemdir.

2.6.4. Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemler

Kesir türevli lineer diferensiyel denklem tanımına uymayan kesir türevli diferensiyel denklemlere lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemler denir (Küçük, 2014).

Örnek 2.4:

- $u_t^\alpha + u_x^\alpha - vu^2u_t^\alpha + 30uu_{xxx} + u_{xxx}^\alpha = 0, \quad x > 0,\ t > 0, 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan uzay-zaman mBBM(modified Bejamin Bona Mahoney) denklemi),
- $u_t^\alpha + u_{xxxxx} + 30uu_{xxx} + 30u_xu_{xx} + 180u^2u_x = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan zaman kesir türevli CDGSK(Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera) denklemi),
- $\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial t^{2\alpha}}\left(\frac{u_{xy}}{u}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{u_{xy}}{u}\right) + 2\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(u^2)_x = 0,\ 0 < \alpha \leq 1$ (Lineer olmayan (2+1) zaman kesir türevli Zoomeron denklemi),

denklemleri birer lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerdir.

2.6.5 Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel-fark denklemler

Lineer olmayan hem kesir türevli diferensiyel denklem hem de fark denklemi bulunduran denklemlere lineer olmayan kesir türevli diferensiyel-fark denklemi denir.

Örnek 2.5:

- $D_t^\gamma u_n = (1 + \alpha u_n + \beta u_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1}),\ \ 0 < \gamma \leq 1$ (Lineer olmayan zaman kesir türevli diferensiyel-fark denklemi),
- $D_t^\gamma u_n = (1 + \alpha u_n)(u_n - u_{n-1}),$
- $D_t^\gamma u_n = u_n(1 + \alpha u_n)(u_{n+1} - u_n + \alpha u_{n+1} - \alpha u_{n-1}), \quad 0 < \gamma \leq 1$ (Lineer olmayan zaman kesir türevli diferensiyel-fark denklem sistemi) (Güner, 2014).

2.7. Kesir Türevli Adi Diferensiyel Denklemin Mertebesi

Bir kesir türevli adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin mertebesine o kesir türevli adi diferensiyel denklemin mertebesi denir (Küçük, 2014).

Örnek 2.6:

- $D^{\frac{1}{2}}y(x) - 5D^{\frac{5}{2}}y(x) + y(x) = 0$ denklemi $\frac{5}{2}$. mertebeden lineer adi diferensiyel denklemdir,
- $D^{\frac{5}{3}}y(x) - D^{3}y(x) - 4y(x) = 0$ denklemi 3. mertebeden lineer adi diferensiyel denklemdir,
- $D^{\frac{7}{8}}y(x) + 5D^{\frac{5}{6}}y(x) - 8y^{2}(x) = 0$ denklemi $\frac{7}{8}$. mertebeden lineer adi diferensiyel denklemdir.

2.8. Kesir Türevli Adi Diferensiyel Denklemin Derecesi

Bir kesir türevli adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin kuvvetine o kesir türevli adi diferensiyel denklemin derecesi denir (Güner, 2014).

Örnek 2.7:

- $D^{\frac{1}{2}}y(x) - 5D^{\frac{5}{2}}y(x) + y(x) = 0$ denklemi $\frac{5}{2}$. mertebeden ve 1.dereceden lineer adi diferensiyel denklemdir,
- $D^{\frac{5}{3}}y(x) - \left(D^{3}y(x)\right)^{2} - 4y(x) = 0$ denklemi 3. mertebeden ve 2. dereceden lineer adi diferensiyel denklemdir,
- $\left(D^{\frac{7}{8}}y(x)\right)^{5} + 5D^{\frac{5}{6}}y(x) - 8y^{2}(x) = 0$ denklemi $\frac{7}{8}$. mertebeden ve 5. dereceden lineer adi diferensiyel denklemdir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(.): \mathbb{C} - \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ve Re(z) > 0 olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Gamma fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir (Podlubny I.,1999; Kareem, 2017).

$$\begin{gathered} \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \\ \Gamma(z+1) = z!, \quad z \in N, \\ \Gamma(z) = \lim_{x \to 0} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}, \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \qquad 0 < z < 1. \end{gathered} \tag{3.2}$$

3.2. Beta Fonksiyonu

B: $\mathbb{C}x\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt\,, \qquad (\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0), \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Beta fonksiyonunun diğer bir ifadesi,

$$B(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta, \tag{3.4}$$

şeklindedir. Beta fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir (Podlubny I.,1999; Kareem, 2017).

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
$$B(x,y)=B(y,x) \tag{3.5}$$

3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. $|z|<1$ ve özel α değerleri için bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1)}=\frac{1}{1-z}$$
$$E_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=e^z$$
$$E_2(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\cosh(z)$$
$$E_2(-z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-2k}}{\Gamma(2k+1)}=\cosh(z) \tag{3.7}$$

olarak bulunur (Podlubny I.,1999; Kareem, 2017).

İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},(\alpha>0,\beta>0), \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Özel değerler için bazı $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonları şu şekilde bulunur;

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{e^z - z - 1}{z^2}. \tag{3.9}$$

Bu ifadeler genelleştirilirse;

$$E_{1,n}(z) = \frac{1}{z^{n-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right\}, \tag{3.10}$$

olur ve

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sinh(z)}{z}, \tag{3.11}$$

elde edilir. Ayrıca $\beta = 1$ için,

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z), \tag{3.12}$$

bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilir (Podlubny I.,1999; Kareem, 2017).

4. YÖNTEM

Bu bölümde tezde kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilecektir. Bu yöntemler lokal kesirli türev ve eş formlu kesirli türev özellikleri kullanılarak oluşturulduğu için, öncelikle lokal kesirli türev ve eş formlu kesirli türev tanım ve özellikleri verilecektir.

4.1. Lokal Kesirli Türev

4.1.1. Lokal kesir türevli diferensiyel fonksiyonun sürekliliği

Tanım 4.1 : $f(x)$, x_0 civarındaki bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon olsun. Her pozitif ε ve bazı pozitif k sabitleri, bazı pozitif δ değerlerine karşılık gelir, şöyleki;

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(x_0)| < k\varepsilon^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \\ &|x - x_0| < \delta, \qquad \delta > 0 \text{ ve } \varepsilon, \delta \in R. \end{aligned} \tag{4.1}$$

özelliklerini sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna lokal kesir mertebeden sürekli denir ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{4.2}$$

şeklinde gösterilir. Lokal kesir türevli $f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığındaki sürekliliği, α bir fraktal boyut ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$f(x) \in C_{\alpha}(a, b) \tag{4.3}$$

şeklinde gösterilir (Sohail vd., 2017; Tariq vd., 2017).

Tanım 4.2 : Bir $f(x): R \to R, x \to f(x)$ fonksiyonu $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α mertebeli Hölder fonksıyonunu sağlarsa α mertebeli diferensiyellenemez olarak adlandırılır ve $x, y \in X$ için (Sohail vd., 2017; Tariq vd., 2017),

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \tag{4.4}$$

dır.

Tanım 4.3 : Bir $f(x): R \to R, x \to f(x)$ fonksiyonu $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α kesir mertebeli süreklidir denir veya kısaca α-lokal kesir sürekli denir,

Not : Bir f(x) fonksiyonu,

$$f(x) - f(x_0) = O((x - x_0)^{\alpha}), \tag{4.5}$$

şeklinde yazılıyorsa $x_0 \in [a, b]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $C_{\alpha}[a, b]$ uzayındadır denir (Sohail vd., 2017; Tariq vd., 2017).

4.1.2 Lokal kesir türevli türevin tanımı

$f(x) \in C_{\alpha}[a, b]$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere. $0 < |x - x_0| < \delta$ için

$$D^{(\alpha)} f(x_0) = \left. \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta^{\alpha}(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^{\alpha}}, \tag{4.6}$$

limiti var ve sonlu ise $D^{(\alpha)} f(x)$ ifadesi f(x) fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında α mertebeli lokal kesirli türevi olarak adlandırılır. Burada

$$\Delta^{\alpha}\big(f(x) - f(x_0)\big) \cong \Gamma(1 + \alpha)\big(f(x) - f(x_0)\big). \tag{4.7}$$

Eğer f(x) fonksiyonu $[x, b)$ aralığında tanımlı ve

$$\left. \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} \right|_{x={x_0}^{-}} = \lim_{x \to {x_0}^{-}} \frac{\Delta^{\alpha}(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^{\alpha}}, \tag{4.8}$$

limiti var ise (4.8) ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında α mertebeli soldan lokal kesirli türevi denir ve burada,

$$\Delta^{\alpha}\big(f(x) - f(x_0)\big) \cong \Gamma(1+\alpha)\Delta\big(f(x) - f(x_0)\big). \tag{4.9}$$

dır. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $(a, x]$aralığında tanımlı ve

$$\left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{+}} = \lim_{x \to {x_0}^{+}} \frac{\Delta^{\alpha}(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^{\alpha}}, \tag{4.10}$$

limiti var ise (4.10) ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında α mertebeli sağdan lokal kesirli türevi denir ve burada,

$$\Delta^{\alpha}\big(f(x) - f(x_0)\big) \cong \Gamma(1+\alpha)\big(f(x) - f(x_0)\big). \tag{4.11}$$

$$\left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{+}} \text{ ve } \left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{-}} \tag{4.12}$$

türevleri var ve

$$\left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{+}} = \left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{-}} \tag{4.13}$$

eşit ise

$$\left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{+}} = \left.\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}}\right|_{x={x_0}^{-}} \tag{4.14}$$

olur (Yang vd., 2016).

$D_{\alpha}(a, b)$ lokal kesirli türev kümesi ve $f(x), g(x) \in D_{\alpha}(a, b)$ olmak üzere, lokal kesirli türev kuralları aşağıdaki şekilde olur (Yang vd., 2016);

i. $D^{(\alpha)}[f(x) \pm g(x)] = D^{(\alpha)}f(x) \pm D^{(\alpha)}f(x),$

ii. $D^{(\alpha)}[f(x)g(x)] = \left[D^{(\alpha)}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[D^{(\alpha)}g(x)\right],$

iii. $D^{(\alpha)}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left[D^{(\alpha)}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[D^{(\alpha)}g(x)\right]}{g^2(x)}, g(x) \neq 0.$ (4.15)

$y(x) = (fog)(x)$, $f^{(\alpha)}(g(x))$ ve $g^{(1)}(x)$ türevleri var olmak üzere, lokal kesirli zincir kuralı,

$$\frac{d^\alpha y(x)}{dx^\alpha} = f^{(\alpha)}\big(g(x)\big)\left(g^{(1)}(x)\right)^\alpha \tag{4.16}$$

ve

$$\frac{d^\alpha y(x)}{dx^\alpha} = f^{(1)}\big(g(x)\big)\left(g^{(\alpha)}(x)\right)^\alpha \tag{4.17}$$

şeklinde olur (Sohail vd., 2017; Tariq vd., 2017).

4.1.3 Bazı fonksiyonların lokal kesirli türevleri

Bu kısımda kesirli analizde sık karşılaşılan bazı fonksiyonların lokal kesirli türevleri, çizelge şeklinde verilmiştir (Çizelge 4.1).

Bu türevleri bulmak için,

$$\binom{n\alpha}{i\alpha} = \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(1+i\alpha)\Gamma(1+(n-1)\alpha)}. \tag{4.18}$$

olmak üzere yeni bir seri açılımı,

$$(f+g)^{n\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n\alpha}{i\alpha} f^{(n-i)\alpha}g^{i\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n\alpha}{i\alpha} f^{i\alpha}g^{(n-i)\alpha}, \tag{4.19}$$

şeklinde olur. Bu durumda üç seri açılımı aşağıdaki gibi olur:

$$n = 0 \text{ ise } (f + g)^{n\alpha} = 1,$$
$$n = 1 \text{ ise } (f + g)^{n\alpha} = f^{\alpha} + g^{\alpha},$$
$$f = g \text{ ise } (f + g)^{\alpha} = (2f)^{\alpha} = (2g)^{\alpha}, \tag{4.20}$$

Çizelge 4.1. Bazı fonksiyonların eş formlu kesirli türevleri

	Fonksiyon	Lokal Türevi
1.	$c \in \mathbb{R}$	0
2.	$\dfrac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}$	$\dfrac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}$
3.	$E_{\alpha}(x^{\alpha})$	$E_{\alpha}(x^{\alpha})$,
4.	$E_{\alpha}(cx^{\alpha})$	$cE_{\alpha}(cx^{\alpha})$
5.	$E_{\alpha}(-x^{\alpha})$	$-E_{\alpha}(-x^{\alpha})$
6.	$E_{\alpha}(x^{2\alpha})$	$(2x)^{\alpha}E_{\alpha}(x^{2\alpha})$
7.	$E_{\alpha}(cx^{2\alpha})$	$(2x)^{\alpha}cE_{\alpha}(cx^{2\alpha})$
8.	$E_{\alpha}(-x^{2\alpha})$	$-(2x)^{\alpha}E_{\alpha}(-x^{2\alpha})$
9.	$\sin_{\alpha}(x^{\alpha})$	$\cos_{\alpha}(x^{\alpha})$
10.	$\sin_{\alpha}(cx^{\alpha})$	$c\cos_{\alpha}(cx^{\alpha})$
11.	$\cos_{\alpha}(x^{\alpha})$	$-c\sin_{\alpha}(x^{\alpha})$
12.	$\cos_{\alpha}(cx^{\alpha})$	$-c\sin_{\alpha}(cx^{\alpha})$
13.	$\sinh_{\alpha}(x^{\alpha})$	$\cosh_{\alpha}(x^{\alpha})$
14.	$\sinh_{\alpha}(cx^{\alpha})$	$c\cosh_{\alpha}(cx^{\alpha})$
15.	$\cosh_{\alpha}(x^{\alpha})$	$-\sinh_{\alpha}(x^{\alpha})$
16.	$\cosh_{\alpha}(cx^{\alpha})$	$-c\sinh_{\alpha}(cx^{\alpha})$

$$\binom{\sigma}{i} = \frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+i)\Gamma(1+\sigma-i)} \tag{4.21}$$

olmak üzere, $n\alpha = \sigma$ bir reel sayı ise kesirli seri açılımı,

$$(f + g)^{\sigma} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\sigma}{i} f^{\sigma-i}g^{\sigma} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\sigma}{i} f^{k}g^{\sigma-i}, \tag{4.22}$$

(4.19) yardımıyla aşağıdaki fark elde edilir,

$$\Delta^{\alpha}\big(f(x)-f(x_0)\big)=\Gamma(1+\alpha)\Delta^{\alpha}f(x_0)\cong\ \Gamma(1+\alpha)\big(f(x)-f(x_0)\big),\qquad (4.23)$$

burada

$$\Delta^{\alpha}f(x_0)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{\alpha}{i\alpha}f(x-i\rho),\qquad \rho=x-\ x_0.\qquad (4.24)$$

(4.23) kullanarak aşağıdaki türevleri örnek olarak verebiliriz,

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{\Gamma(1+\alpha)[(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}]}{(\Delta x)^{\alpha}}=1.\qquad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+k\alpha)}\frac{\left[(x+\Delta x)^{k\alpha}-x^{k\alpha}\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\right\}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+k\alpha)}\frac{\left[x^{k\alpha}+\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+(k-1)\alpha)}x^{(k-1)\alpha}(\Delta x)^{\alpha}+\cdots-x^{k\alpha}\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\right\}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+k\alpha)}\frac{\left[\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+(k-1)\alpha)}x^{(k-1)\alpha}(\Delta x)^{\alpha}\right]}{(\Delta x)^{\alpha}}\right\}\\&=\frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}.\end{aligned}\qquad (4.26)$$

Bu durumda (4.26) denkleminden,

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}E_{\alpha}(x^{\alpha})=\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}\,,\qquad (4.27)$$

bulunur.

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \tag{4.28}$$

olacağından,

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} E_{\alpha}(x^{\alpha}) = E_{\alpha}(x^{\alpha}), \tag{4.29}$$

olur (Yang vd., 2016).

4.1.4 Lokal kesirli türev teoremleri

Teorem 4.1 (Rolle teoremi) : $f(x) \in C_{\alpha}[a, b]$, $f(x) \in D_{\alpha}(a, b)$ ve $f(a) = f(b)$ olmak üzere, öyle bir $x_0 \in (a, b)$ ve $\alpha \in (0,1]$ vardır ki (Yang vd., 2016).,

$$f^{(\alpha)}(x_0) = 0. \tag{4.30}$$

İspat 4.1 : (Yang vd., 2016),

a) $[a, b]$ aralığında $f(x) = 0$ ise $\forall x_0 \in (a, b)$ için $f^{(\alpha)}(x_0) = 0$ olur.

b) $[a, b]$ aralığında $f(x) \neq 0$ olsun.

f(x) fonksiyonu $C_{\alpha}[a, b]$ de tanımlı olduğundan lokal süreklidir ve f(x) fonkiyonun bu aralıkta K ve M gibi sırasıyla bir minimum ve maksimum değerleri vardır. $f(x) \neq 0$ olduğundan K ve M değerlerinin en az bir tanesi sıfırdan farklıdır. $M \neq 0$ ve $f(x_0) = M$ olsun. Bu durumda,

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0). \tag{4.31}$$

$\Delta x > 0$ kabul edersek,

$$\frac{\Delta^{\alpha}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]}{(\Delta x)^{\alpha}} \leq 0, \tag{4.32}$$

ve

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^{\alpha}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]}{(\Delta x)^{\alpha}}\leq 0. \tag{4.33}$$

Aynı şekilde $\Delta x < 0$ için de gösterilir.

$f(x) \in D_{\alpha}(a,b)$ gözönüne alınır ve (4.19) uygulanırsa $f^{\alpha}(x_0) = 0$ olur. M=0 ve $K \neq 0$ aynı yol ile bulunur ve

$$f^{(\alpha)}(x_0) = 0. \tag{4.34}$$

Teorem 4.2 : $f(x) \in C_{\alpha}[a,b]$, $f(x) \in D_{\alpha}(a,b)$ olsun.Öyle bir $x_0 \in (a,b)$ ve $\alpha \in (0,1]$ vardır ki,

$$f(b)-f(a) = f^{(\alpha)}(x_0)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{4.35}$$

olur (Yang vd., 2016).

İspat 4.2 : $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere diferensiyellenemeyen bir fonksiyon tanımlayalım (Yang vd., 2016),

$$T(x) = \Gamma(1+\alpha)\left\{[f(x)-f(a)]-[f(b)-f(a)]\frac{(x-a)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}\right\}. \tag{4.36}$$

$T(a) = 0$ ve $T(b) = 0$ olur. Bu durumda $x_0 \in (a,b)$ için aşağıdaki özellik vardır,

$$T(x) = \Gamma(1+\alpha)\left\{[f(x)-f(a)]-[f(b)-f(a)]\frac{(x-a)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}}\right\}. \tag{4.37}$$

Teorem 4.3 : $f(x) \in C_{\alpha}[a,b]$, $f(x) \in D_{\alpha}(a,b)$ olduğunu kabul edelim. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, L bir reel sayı yada $-\infty, \infty$ lardan herhangi biri olsun. $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(\alpha)}(x)}{g^{(\alpha)}(x)} = L$ olmak üzere (Yang vd., 2016),

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{4.38}$$

İspat 4.3 : $f(x) \in C_\alpha[a,b]$, $f(x) \in D_\alpha(a,b)$ olsun. $f(x_0) = 0$ ve $g(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a,b)$ olsun (Yang vd., 2016).
$z \in (x_0, x)$ olacak şekilde

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f^{(\alpha)}(z)}{g^{(\alpha)}(z)}. \tag{4.39}$$

$x \to x_0^+$ yaklaştığında,

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{g^{(\alpha)}(x_0)} = L \tag{4.40}$$

olur. Aynı şekilde $x \to x_0^-$ yaklaştığında,

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{g^{(\alpha)}(x_0)} = L. \tag{4.41}$$

Böylece sonuca ulaşmış oluruz.

Yukarıdaki işlem metodunu kullanarak şu örnekleri verebiliriz:
(4.39) kullanılarak, $x \to 0$ giderken,

$$E_\alpha(x^\alpha) - 1 \approx \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{4.42}$$

olur şöyle ki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{E_\alpha(x^\alpha) - 1}{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right]}{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right]} = 1. \tag{4.43}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin_\alpha(x^\alpha)}{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[\sin_\alpha(x^\alpha)]}{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right]}=\lim_{x\to 0}\cos_\alpha(x^\alpha)=1. \tag{4.44}$$

Aynı şekilde, $x \to 0$ giderken,

$$1-\cos_\alpha(x^\alpha)\approx\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \tag{4.45}$$

şöyle ki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos_\alpha(x^\alpha)}{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]}{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]}=1. \tag{4.46}$$

4.1.5 Lokal kesirli integral tanımı

$f(x)\in C_\alpha(a,b)$ ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere, lokal kesirli integral,

$${}_aI_b^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(x)(dx)^\alpha=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} f(x)(\Delta x)^\alpha \tag{4.47}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Delta x=x_{i+1}-x_i, i=0,\ldots,N-1, x_0=a$ ve $x_N=b$ dir ve aşağıdaki iki özelliği sağlar (Yang vd.,2019);

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x \left(D^\alpha f(x)\right)(dx)^\alpha=f(x)-f(a) \tag{4.48}$$

ve

$$D^\alpha\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x f(x)(dx)^\alpha\right]=f(x). \tag{4.49}$$

4.2 Eş Formlu Kesirli Türev

4.2.1 Eş formlu kesirli türev tanımı

Tanım 4.2.1. : $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\forall\, t > 0$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$T_\alpha(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{4.50}$$

eş formlu kesirli türev olarak adlandırılır ve $T_\alpha(f)$ eş formlu kesirli türevi $f^{(\alpha)}(t)$ şeklinde de gösterilir (Cenesiz ve Kurt, 2015; Chen ve Jiang 2018).

Tanım 4.2.2. : $\alpha \in (n, n+1)$, f fonksiyonu $t > 0$ noktasında n -mertebeden diferensiyellenebilir ve $\lceil\alpha\rceil$, α dan büyük veya eşit en küçük tamsayı olmak üzere,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}\left(t+\varepsilon t^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\right) - f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{\varepsilon}, \tag{4.51}$$

f nin α mertebeden eş formlu kesirli türevi denir (Cenesiz ve Kurt, 2015; Chen ve Jiang 2018).

$\alpha \in (0,1)$ ve f, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α-mertebeden eş formlu kesirli türevlenebilir olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır (Cenesiz ve Kurt, 2015; Chen ve Jiang 2018) ,

1. f fonksiyonu diferensiyellenebilir olmak üzere $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$.
2. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için, $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$.
3. Her $p \in \mathbb{R}$ için, $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$.
4. Her $f(t) = \lambda \in \mathbb{R}$ sabit fonksiyonu için, $T_\alpha(\lambda) = 0$.
5. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
6. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ (4.52)

Bu özelliklerin doğruluğunu şu şekilde gösterebiliriz (Zhao ve Luo, 2017; Al-Tarawneh, 2017):

1. (4.2.1.) tanımında $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ alınırsa $\varepsilon = ht^{\alpha-1}$ olur.

$$
\begin{aligned}
T_\alpha(f) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{\alpha-1}}\\
&= t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\\
&= t^{1-\alpha}f'(t).
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
T_\alpha(af+bg) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(af+bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-(af+bg)(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+bg(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-af(t)-bg(t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} a\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0} b\left(\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\right)\\
&= aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g).
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
T_\alpha(t^p) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^p-t^p}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^p+\binom{p}{1}t^{p-1}(\varepsilon t^{1-\alpha})+\cdots+\binom{p}{p}\varepsilon^p(t^{1-\alpha})^p-t^p}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{pt^{p-1}t^{1-\alpha}+\cdots+\varepsilon^{p-1}(t^{1-\alpha})^p}{\varepsilon}\\
&= pt^{p-1}t^{1-\alpha}\\
&= pt^{p-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

4.
$$T_\alpha(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} = \frac{\lambda-\lambda}{\varepsilon} = 0. \tag{4.56}$$

5.
$$T_\alpha(fg) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}$$

$$= T_\alpha\big(f(t)\big)\lim_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}$$

$$= f(t)T_\alpha\big(g(t)\big)+g(t)T_\alpha\big(f(t)\big). \tag{4.57}$$

6. $$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-\frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-\frac{f(t)}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}+\frac{f(t)}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-\frac{f(t)}{g(t)}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}+f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}\right)-\frac{1}{\varepsilon g(t)}\right)$$

$$= T_\alpha(f)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}\right)$$

$$= T_\alpha(f)\frac{1}{g(t)}-f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}\right)$$

$$= \frac{T_\alpha(f)}{g(t)}-f(t)T_\alpha\big(g(t)\big)\frac{1}{g^2(t)}$$

$$= \frac{g(t)T_\alpha(f)-f(t)T_\alpha\big(g(t)\big)}{g^2(t)} \tag{4.58}$$

olarak bulunur.

4.2.2 Bazı fonksiyonların eş formlu kesirli türevleri

Çizelge 4.2 de en çok karşılaşabileceğimiz bazı fonksiyonların eş formlu kesirli türevleri verilmiştir. Bu fonksiyonlardan bazılarını doğruluğunu şu şekilde gösterebiliriz (Al-Tarawneh, 2016):

1. $$T_\alpha(e^{ct})=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{c(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}-e^{ct}}{\varepsilon}$$

$$= e^{ct}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}}-1}{\varepsilon}$$
$$= e^{ct}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^{1-\alpha}e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}}-t^{1-\alpha}}{\varepsilon t^{1-\alpha}}$$
$$= t^{1-\alpha}e^{ct}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}}-1}{\varepsilon t^{1-\alpha}},$$

$h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ olmak üzere L'Hospital kuralını uygulanırsa,

$$= t^{1-\alpha}e^{ct}\lim_{h\to 0}\frac{e^{ch}-1}{h}$$
$$= ct^{1-\alpha}e^{ct}\lim_{h\to 0}\frac{e^{ch}}{1}$$
$$= ct^{1-\alpha}e^{ct} \text{ (Kareem, 2017).} \tag{4.59}$$

Çizelge 4.2 Bazı fonksiyonların eş formlu kesirli türevleri

	Fonksiyon	Eş Formlu Türev
1.	e^{ct}	$ct^{1-\alpha}e^{ct}, c \in R$
2.	$\sin(at)$	$at^{1-\alpha}\cos(at), a \in R$
3.	$\cos(at)$	$-at^{1-\alpha}\sin(at), a \in R$
4.	$\tan(at)$	$at^{1-\alpha}\sec^2(at), a \in R$
5.	$\cot(at)$	$-at^{1-\alpha}\csc^2(at), a \in R$
6.	$\sec(at)$	$at^{1-\alpha}\sec(at)\tan(at), a \in R$
7.	$\csc(at)$	$-at^{1-\alpha}\csc(at)\cot(at), a \in R$
8.	$\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$	1
9.	$\sin\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)$	$\cos\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)$
10.	$\cos\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)$	$-\sin\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)$
11.	$e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$	$e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$

2. $$T_\alpha(\sin(at)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin a(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - \sin(at)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(at)\cos(a\varepsilon t^{1-\alpha}) + \cos(at)\sin(a\varepsilon t^{1-\alpha}) - \sin(at)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sin(at)\frac{\cos(a\varepsilon t^{1-\alpha}) - 1}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(at)\sin(a\varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon}$$
$$= t^{1-\alpha}\sin(at)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(a\varepsilon t^{1-\alpha}) - 1}{\varepsilon t^{1-\alpha}} + t^{1-\alpha}\cos(at)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(at)\sin(a\varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon t^{1-\alpha}}$$

$h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ olmak üzere L'Hospital kuralını uygulanırsa,

$$= t^{1-\alpha}\sin(at)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(ah) - 1}{h} + t^{1-\alpha}\cos(at)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(ah)}{h}$$
$$= t^{1-\alpha}\sin(at)\lim_{h\to 0}\frac{-a\sin(ah)}{1} + t^{1-\alpha}\cos(at)a$$
$$= at^{1-\alpha}\cos(at). \tag{4.60}$$

3. 2 eşitliğine benzer şekilde gösterilebilir.

4. $$T_\alpha(\tan(at)) = T_\alpha\left(\frac{\sin(at)}{\cos(at)}\right)$$
$$= \frac{\cos(at)\,T_\alpha(\sin(at)) - \sin(at)\,T_\alpha(\cos(at))}{\cos^2(at)}$$
$$= \frac{\cos(at)\left(at^{1-\alpha}\cos(at)\right) - \sin(at)\left(-at^{1-\alpha}\sin(at)\right)}{\cos^2(at)}$$
$$= \frac{at^{1-\alpha}\cos^2(at) + at^{1-\alpha}\sin^2(at)}{\cos^2(at)}$$
$$= at^{1-\alpha}(1+\tan^2(at))$$
$$= at^{1-\alpha}\sec^2(at). \tag{4.61}$$

5. 4 eşitliğine benzer şekilde gösterilir.

6. $$T_\alpha(\sec(at)) = T_\alpha\left(\frac{1}{\cos(at)}\right)$$

$$= \frac{(-1)\left(T_\alpha\left(\cos(at)\right)\right)}{\cos^2(at)}$$
$$= \frac{(-1)\left(-at^{1-\alpha}\sin(at)\right)}{\cos^2(at)}$$
$$= at^{1-\alpha}\frac{\sin(at)}{\cos(at)}\frac{1}{\cos(at)}$$
$$= at^{1-\alpha}\tan(at)\sec(at). \tag{4.62}$$

7. 6 eşitliğine benzer şekilde gösterilir.

8. $$T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^\alpha - \frac{1}{\alpha}t^\alpha}{\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha}{\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^\alpha + \binom{\alpha}{1}t^{\alpha-1}\varepsilon t^{1-\alpha} + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}\varepsilon^{\alpha-1}t^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}\varepsilon^\alpha(t^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha}{\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\left(\binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2}\varepsilon^{\alpha-2}t^\alpha + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1}(t^{1-\alpha})^\alpha\right)}{\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\alpha$$
$$= 1. \tag{4.63}$$

elde edilir . Diğer eş formlu kesirli türevler de benzer şekilde doğrulukları gösterilebilir.

4.2.3. Eş formlu kesirli türev teoremleri

Teorem 4.4 (Zincir Kuralı): $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, α-mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ve $h(t) = f\big(g(t)\big)$ olsun (Abdeljawad, 2014; Zhao ve Luo, 2017),

$$(T_\alpha h)(t) = (T_\alpha f)\big(g(t)\big).(T_\alpha g)(t).g(t)^{\alpha-1}. \tag{4.64}$$

Burada $h(t)$ α-mertebeden türevlenebilir ve her t için $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ dır.

İspat 4.4: Tanımda, $u = t + \varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}$ alınırsa ve g fonksiyonunun sürekliliğini kullanarak (Abdeljawad, 2014; Zhao ve Luo, 2017),

$$\begin{aligned}(T_\alpha h)(t) &= \lim_{u\to t}\frac{f\big(g(u)\big)-f\big(g(t)\big)}{u-t}t^{1-\alpha}\\ &= \lim_{u\to t}\frac{f\big(g(u)\big)-f\big(g(t)\big)}{\big(g(u)-g(t)\big)}\lim_{u\to t}\frac{g(u)-g(t)}{u-t}t^{1-\alpha}\\ &= \lim_{g(u)\to g(t)}\frac{f\big(g(u)\big)-f\big(g(t)\big)}{\big(g(u)-g(t)\big)}.g(t)^{1-\alpha}.T_\alpha g(t).g(t)^{\alpha-1}\\ &= (T_\alpha f)\big(g(t)\big).(T_\alpha g)(t).g(t)^{\alpha-1} \qquad (4.65)\end{aligned}$$

Teorem 4.5 (Rolle Teoremi): $a > 0$ ve $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu verilsin (Katugampola, 2014),

i. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında eş formlu kesirli süreklidir,
ii. f fonksiyonu $\alpha \in (0,1)$ aralığında α- mertebeden eş formlu kesirli türevlenebilir,
iii. $f(a) = f(b)$

özelliklerini sağlıyorsa, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

İspat 4.5 : f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında eş formlu kesirli sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için bir $c \in (a,b)$ lokal maksimum noktası vardır. Genelliği bozmayacak şekilde c nin lokal minimum noktası olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon}, \qquad (4.66)$$

fakat birinci limit negatif ve ikinci limit de pozitif olmayacağından,

$$f^{(\alpha)}(c) = 0 \qquad (4.67)$$

bulunur (Katugampola, 2014).

Teorem 4.6 (Ortalama Değer Teoremi) : $a > 0$ ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ aşagıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olmak üzere (Katugampola, 2014),

i. f, $[a,b]$ aralığında eş formlu kesirli sürekli.

ii. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere f, α-mertebeden eş formlu kesirli türevlenebilen fonksiyon.

$$f^{(\alpha)} = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}, \tag{4.68}$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır (Katugampola, 2014).

İspat 4.6 : $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen kesenin denklemi,

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right) \tag{4.69}$$

olur ve

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right) + f(a) \tag{4.70}$$

şeklinde yazılabilir ve aşağıdaki

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right) + f(a)\right], \tag{4.71}$$

fonksiyonunu alalım. $g(a) = g(b) = 0$, g; $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında eş formlu kesirli türevlenebilir olduğundan, Roll teoremine göre $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (a,b)$ vardır. Fakat

$$g^{\alpha}(x) = f^{\alpha}(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\right] \tag{4.72}$$

olduğundan

$$g^{\alpha}(c) = f^{\alpha}(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\right] = 0 \tag{4.73}$$

olur ve buradan,

$$f^{\alpha}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}} \tag{4.74}$$

olarak bulunur (Katugampola, 2014).

Şimdi eş formlu kesirli türev tanımını kullanarak bazı denklem çözüm örnekleri verelim;

Örnek 4.1 $y(0) = 0$ başlangıç değeri ile verilen

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} + y = x^3 + 3x^{\frac{5}{2}} \tag{4.75}$$

eş formlu kesirli türev problemini gözönüne alalım, homojen denklem

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} + y = 0 \tag{4.76}$$

olur ve homojen denklemin çözümleri

$$y_h = e^{r\sqrt{x}} \tag{4.77}$$

olmak üzere,

$$\frac{r}{2}e^{r\sqrt{x}} + e^{r\sqrt{x}} = 0 \;\Rightarrow\; e^{r\sqrt{x}}\left(\frac{r}{2} + 1\right) = 0 \;\Rightarrow r = -2 \tag{4.78}$$

bulunur ve

$$y_h = e^{-2\sqrt{x}} \tag{4.79}$$

elde edilir. Özel çözüm

$$y_p = x^3 \tag{4.80}$$

olur. Başlangıç değeri kullanılırsa A=0 bulunur ve

$$y(x) = y_h + y_p = e^{-2\sqrt{x}} + x^3 \tag{4.81}$$

genel çözümü elde edilir (Kareem, 2017).

Örnek 4.2 Aşağıda verilen

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{x}y = xe^{-x} \tag{4.82}$$

eş formlu kesirli türev denkleminin çözümünü bulmak için eşitliğin her iki tarafını e^x ile çarparsak,

$$e^x y^{\frac{1}{2}} + e^x\sqrt{x}y = x \Rightarrow (e^x y)^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow e^x y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \tag{4.83}$$

buradan,

$$y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}e^{-x} + Ce^{-x} \tag{4.84}$$

çözümü çarpma kuralı kullanılarak kolayca elde edilir (Kareem, 2017).

Örnek 4.3. Aşağıda verilen

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(y - 2\sqrt{x}\right)^2 + 1, \qquad y_1 = 2\sqrt{x}; \quad y(0) = 1 \tag{4.85}$$

eş formlu kesirli türev denkleminin çözümünü bulmak için öncelikle,

$$y_1 = 2\sqrt{x}, \tag{4.86}$$

denklemin bir çözümü olduğu görülür ve

$$y = v + 2\sqrt{x}, \tag{4.87}$$

değişken değişikliği yaparak,

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} = v^{\left(\frac{1}{2}\right)} + 1, \tag{4.88}$$

ve

$$v^{\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 = \left(v + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right)^2 + 1 \tag{4.89}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem

$$x^{\frac{1}{2}}v' = v^2 \tag{4.90}$$

ve

$$v' = x^{-\frac{1}{2}}v^2 \tag{4.91}$$

Bernoulli denklemine dönüşür. Şimdi Bernoulli denklemini çözmek için

$$u = v^{-1} \tag{4.92}$$

dönüşümü yaparak,

$$u' = -v^{-2}v' \tag{4.93}$$

elde edilir. Denklemi, $-v^{-2}$ ile çarparsak,

$$-v^{-2}v' = -x^{-\frac{1}{2}}v^{-2}v^{2},$$
$$u' = -x^{-\frac{1}{2}},$$
$$du = -\frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$
$$u = -2\sqrt{x} + c,$$
$$\frac{1}{v} = -2\sqrt{x} + c,$$
$$v = \frac{1}{-2\sqrt{x} + c}, \tag{4.94}$$

bulunur ve (4.87) yerine yazılarak,

$$y = \frac{1}{-2\sqrt{x} + c} - 2\sqrt{x}. \tag{4.95}$$

$y(0) = 1$ başlangıç koşulu kullanılarak c=1 bulunarak,

$$y = \frac{3}{-4\sqrt{x^3} + 1} - \frac{x^2}{2} \tag{4.96}$$

genel çözümü elde edilir (Al-Tarawneh, 2016).

4.2.4 Eş formlu kesirli integral tanımı

$0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq a < b$, olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)d_\alpha x = \int_a^b f(x)x^{\alpha-1}dx \tag{4.97}$$

integrali var ve sonlu ise $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında α-kesirli eş formlu integrali denir ve aşağıdaki özelliği sağlar,

$$I_{\alpha}^{a}(f)(t) = I_{1}^{\alpha}(t^{\alpha-1}) = \int_{a}^{t} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx. \tag{4.98}$$

Bu integral normal Riemann integralidir ve $\alpha \in (0.1]$ dir (Usta ve Sarıkaya, 2017).

4.3. Kesir Türevli Diferensiyel Denklemlerin Dönüşüm Yöntemleri

4.3.1. Giriş

Bu kısımda önce lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin adi diferensiyel denkleme dönüştürülmesi gösterilecektir. Sonra adi diferensiyel denkleme indirgenen diferensiyel denklemin dengelenme sayısının bulunması anlatılacaktır. Daha sonra adi diferensiyel denkleme dönüştürülen bu diferensiyel denklemlerin tam çözümünü bulmak için kullanılan tam çözüm yöntemlerinden literatürde en çok kullanılan tam çözüm yöntemleri verilecektir.

Matematikte birçok çözülemeyen veya çözümü zor olan problemler dönüşümlerle daha kolay çözülebilen problemlere indirgenebilmektedir. Bu dönüşümler Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümü, Bäcklund dönüşümü, İntegral dönüşümü, hareketli dalga dönüşümü, kesirsel karmaşık dönüşüm vb. dönüşümlerdir. Tezin bu kısmında kesirsel karmaşık dönüşüm, lokal ve eş formlu lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemler için kullanılan yeni bir hareketli dalga dönüşümü gösterilecektir.

4.3.2. Kesirsel karmaşık dönüşüm

Kesirsel karmaşık dönüşüm, Li ve He tarafından ilk olarak 2010 yılında önerilmiştir (Li ve He, 2010). Bu yöntem ile birçok kesir türevli diferensiyel denklem adi diferensiyel denkleme dönüştürülmüştür. Böylece ileri analizin tüm metotları kesirsel analize uygulanabilir hale gelmiştir.

Kesirsel karmaşık dönüşüm ; $k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ sonra belirlenecek olan sıfırdan farklı bilinmeyen sabitler ve $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} \leq 1$, olmak üzere,

$$\xi = \frac{kt^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)} + \frac{c_1 x_1^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} + \frac{c_2 x_2^{\alpha_3}}{\Gamma(1+\alpha_3)} + \cdots + \frac{c_n x_n^{\alpha_{n+1}}}{\Gamma(1+\alpha_{n+1})} \tag{4.99}$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n+1} = 1$ olduğunda dönüşüm

$$\xi = kt + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{4.100}$$

standart hareketli dalga dönüşümüne dönüşür. Sonuç olarak, kesirsel karmaşık dönüşüm hareketli dalga dönüşümünün doğal açılımıdır(Güner, 2014).

Örnek 4.4.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + 2u\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + 3\frac{\partial^{3\beta} u}{\partial x^{3\beta}} + 4\frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} + 5\frac{\partial^\lambda u}{\partial z^\lambda} = 0 \tag{4.101}$$

kesir türevli diferensiyel denkleminde p, q, k ve l ler bilinmeyen sabitler ve $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \gamma \leq 1$ ve $0 < \lambda \leq 1$, olmak üzere kesirsel karmaşık dönüşüm

$$\begin{aligned} T &= \frac{qt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\ X &= \frac{px^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \\ Y &= \frac{ky^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \\ Z &= \frac{lz^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)} \end{aligned} \tag{4.102}$$

olarak alınır. Kesirli türevlerin özellikleri kullanılarak (4.102) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= q\frac{\partial u}{\partial T} \\ \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} &= p\frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} &= k\frac{\partial u}{\partial Y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{\lambda} u}{\partial z^{\lambda}} = l\frac{\partial u}{\partial Z} \tag{4.103}$$

şeklinde klasik türeve dönüşür. Böylece (4.101) denklemi

$$q\frac{\partial u}{\partial T} + 2pu\frac{\partial u}{\partial X} + 3p^3\frac{\partial^3 u}{\partial X^3} + 4k\frac{\partial u}{\partial Y} + 5l\frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \tag{4.104}$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. Bu yöntem farklı tam yöntemler ile örneğin üstel fonksiyon yöntemiyle çözülebilir (Güner, 2014).

Örnek4 5. İki boyutlu zaman kesir türevli homojen ısı iletimi denklemi,

$$\frac{\partial^{\alpha} T}{\partial t^{\alpha}} = C\left(T_{xx} + T_{yy}\right), t > 0, 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < \alpha \leq 1 \tag{4.105}$$

şeklinde verilir. Denklem iki boyutlu ve zaman kesir türevli olduğu için kesirsel karmaşık dönüşüm

$$\xi = \frac{qt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + px + ky \tag{4.106}$$

şeklinde seçilir. (4.106) denklemi (4.105) denkleminde yerine yazılarak

$$C(p^2 + k^2)T_{\xi\xi} - qT_{\xi} = 0 \tag{4.107}$$

denklemine dönüşür. (4.107) denklemi çözüldüğünde, c_1 ve c_2 integral sabiti olmak üzere

$$T(\xi) = c_1 + c_2 \exp\left(\frac{q\xi}{C(p^2 + k^2)}\right) \tag{4.108}$$

veya

$$T(x,y,t) = c_1 + c_2 \exp\left(\frac{qpx}{C(p^2+k^2)} + \frac{qky}{C(p^2+k^2)} + \frac{q^2 t^\alpha}{C(p^2+k^2)\Gamma(1+\alpha)}\right) \quad (4.109)$$

çözümü elde edilir. Şu özellikle belirtilmelidir ki, kesirli analizde başlangıç sınır koşulları ve hangi yolla elde edildikleri hayati öneme sahiptir. Eğer bunlarda uygunluk yoksa alakasız bir problem ortaya çıkabilir ya da çözüm bulunamayabilir. a, b, c, d sabitler olmak üzere yukarıdaki denklem için başlangıç şartı

$$T(x,y,0) = a + b\exp(cx+dy) \quad (4.110)$$

dır.

$$T(x,y,0) = \exp\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \quad (4.111)$$

şeklinde başlangıç şartı için (4.109) denkleminden

$$T(x,y,0) = c_1 + c_2 \exp\left(\frac{qpx}{C(p^2+k^2)} + \frac{qky}{C(p^2+k^2)} + \right) \quad (4.112)$$

elde edilir. (4.111) ve (4.112) denklemleri $c_1 = 0, c_2 = 1, p = 1, k = 2$ ve $q = \frac{5D}{3}$ olarak alındığında

$$T(x,y,t) = \exp\left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{5Ct^\alpha}{9\Gamma(1+\alpha)}\right) \quad (4.113)$$

çözümü elde edilir (Güner, 2014).

He ve çalışma arkadaşları 2012 yılında (He, vd., 2012) yazdıkları makalede kesirli türevlerde zincir kuralının farklı olduğunu ifade etmiş ve bu durumu şu örnekle açıklamışlardır. $\beta > 0$ olmak üzere,

$$U(t) = t^2$$

$$s(x) = x^{\beta} \tag{4.114}$$

olsun Bu durumda modifiye Riemann-Liouville kesirli türevine göre;

$$D_x^{\alpha}u(s(x)) = D_x^{\alpha}u\left(x^{\beta}\right) = D_x^{\alpha}x^{2\beta} = \frac{x^{2\beta-\alpha}\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma(2\beta-\alpha+1)} \tag{4.115}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$u'(s(x)) = 2x^{\beta}$$

$$\left(s(x)\right)D_x^{\alpha}s(x) = 2x^{\beta}\frac{x^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} = 2\frac{x^{2\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \tag{4.116}$$

elde edilir ki bu da

$$\neq \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^{\alpha}s}{\partial s\,\partial t^{\alpha}} \tag{4.117}$$

olduğu anlamına gelir. Yani bu tutarsızlık, kesirli hesaplamanın değişme özelliğinin (aşağıdaki özellik) olmadığını gösterir.

$$D^{\alpha+\beta} \neq D^{\alpha}D^{\beta} \neq D^{\beta}D^{\alpha}. \tag{4.118}$$

Buradan hareketle , He ve çalışma arkadaşları kesirsel karmaşık dönüşümü şu şekilde modifiye etmişlerdir.

$0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \gamma \leq 1$ ve $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel hali

$$f\left(u, u_t^{(\alpha)}, u_x^{(\beta)}, u_y^{(\gamma)}, u_z^{(\lambda)}, u_t^{(2\alpha)}, u_x^{(2\beta)}, u_y^{(2\gamma)}, u_z^{(2\lambda)}, \ldots\right), \tag{4.119}$$

şeklinde gösterilir. Yine $u_t^{(\alpha)} = D_t^{\alpha} u = \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}$ Jumarie'nin kesirli türevini göstermek ve u sürekli (fakat türevlenebilir olması gerekmeyen) fonksiyon olmak üzere, modifiye Riemann-Liouville türevi

$$D_t^{\alpha} u(t,x,y,z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{t} \frac{[u(\xi,x,y,z) - u(0,x,y,z)]}{(t-\xi)^{\alpha}} d\xi \tag{4.120}$$

şeklinde tanımlanır. Modifiye kesirsel karmaşık dönüşüm

$$T = \frac{qt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$
$$X = \frac{px^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}$$
$$Y = \frac{ky^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)}$$
$$Z = \frac{lz^{\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)} \tag{4.121}$$

şeklinde yazılsın. Bu dönüşüm, sürekli uzay-zamanı bir fraktal uzay-zamana dönüştürmektedir. He (He, 2008) önceki çalışmasında, kesir türevli diferensiyel denklemlerin en iyi süreksiz ortamda tanımlanabilir olduğunu ve kesir mertebenin kesir boyutla aynı anlama geldiğini göstermiştir.

Şekil 4.1 de fraktal yapıya sahip bir düzlem düşünülsün. İki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir doğru değildir ve ds_E; A ve B noktaları arasındaki (şekilde kesikli kırmızı eğri) gerçek uzaklığı, ds; (şekilde siyah doğru) iki nokta arasındaki mesafeyi, α kesir boyutu ve k sayısı da sabiti göstermek üzere

$$ds_E = kds^{\alpha} \tag{4.122}$$

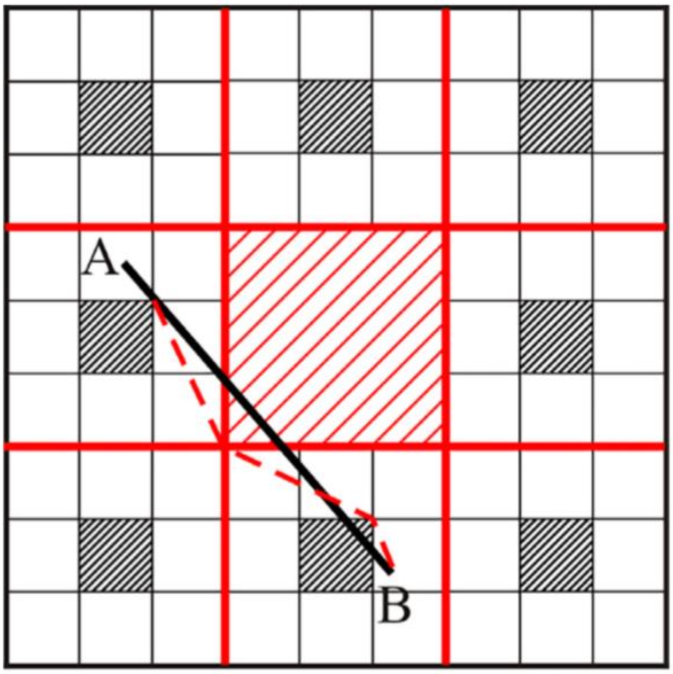
yazılabilir (He vd., 2010). Yatay yönde ds_E (kırmızı eğri) nin yansıması Cantor benzeri kümeleri verir. Yatay doğrultuda, α_x Cantor benzeri kümelerin kesin boyutu ve k_x sabit olmak üzere bu durum

$$\Delta_x AB = k_x dx^{\alpha_x} \tag{4.123}$$

şeklinde uzunluk olarak ifade edilir. (4.122) denkleminin anlamı

$$s_E = ks^{\alpha} \tag{4.124}$$

demektir. Bu fikir (4.121) deki kesirsel karmaşık dönüşüme yol açar (Güner, 2014).



Şekil 4.1. Süreksiz uzayda iki nokta arasındaki uzaklık

Aslında zincir kuralı burada fraktal uzayı değiştirir. Örneğin, Şekil 4.1 deki AB fraktal eğrisini, yatay doğrultudaki Cantor benzeri kümelere dönüştürmektedir. Şekil 4.1 den

$$\Delta_x AB = \cos\theta ds_E \tag{4.125}$$

veya

$$\Delta_x AB = \frac{dx}{ds} ds_E \tag{4.126}$$

dır. Burada θ, AB doğrusal çizgisinin eğim açısıdır. (4.122) ve (4.123) denklemlerinin ilişkilerinden;

$$k_x dx^{\alpha_x} = k\frac{dx}{ds}ds^{\alpha} \tag{4.127}$$

veya $\sigma' = \frac{k}{k_x}$ olmak üzere

$$dx^{\alpha_x} = \frac{k}{k_x}\frac{dx}{ds}ds^{\alpha} = \sigma\frac{dx}{ds}ds^{\alpha} \tag{4.128}$$

yazılır. Kesirli hesaplamalar için zincir kuralı

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} = \sigma'\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^{\alpha}s}{\partial t^{\alpha}} \tag{4.129}$$

olarak verilir. $\sigma_S, \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ fraktal indeksler olmak üzere, aşağıdaki dönüşümler kullanılarak,

$$\begin{gathered}
s = t^{\alpha} \\
X = x^{\beta} \\
Y = y^{\gamma} \\
Z = z^{\lambda} \\
\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^{\alpha}s}{\partial t^{\alpha}} = \sigma_S\frac{\partial u}{\partial s} \\
\frac{\partial^{\beta}u}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial^{\beta}X}{\partial x^{\beta}} = \sigma_X\frac{\partial u}{\partial X} \\
\frac{\partial^{\gamma}u}{\partial y^{\gamma}} = \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial^{\gamma}Y}{\partial y^{\gamma}} = \sigma_Y\frac{\partial u}{\partial Y} \\
\frac{\partial^{\lambda}u}{\partial z^{\lambda}} = \frac{\partial u}{\partial Z}\frac{\partial^{\lambda}Z}{\partial z^{\lambda}} = \sigma_Z\frac{\partial u}{\partial Z}
\end{gathered} \tag{4.130}$$

elde edilir. Böylece, kesir türevli diferensiyel denklemler kolay bir şekilde adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Bu hesaplama herkesin yapabileceği zor olmayan işlemlerdir (Güner,2014).

σ_s yi belirlemek için özel olarak $s = t^{\alpha}$ ve $u = s^m$ olarak alınırsa

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\Gamma(1+m\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} t^{m\alpha-\alpha} = \sigma \frac{\partial u}{\partial s} = \sigma m t^{m\alpha-\alpha} \qquad (4.131)$$

olur. Bu durumda σ_s,

$$= \frac{\Gamma(1+m\alpha)}{m\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} \qquad (4.132)$$

olarak belirlenir. Diğer fraktal indeksleri de benzer şekilde bulunabilir (Güner,2014).

Görüldüğü üzere kesir türevli diferensiyel denklemleri kesirsel karmaşık dönüşüm kullanarak adi diferensiyel denkleme çevirmek oldukça kolay bir yaklaşım metodudur. Böylece matematiksel anlizin tüm analitik metotları kolayca kesirli analize uygulanabilir. Kesirsel karmaşık dönüşümü şu şekilde genelleyebiliriz (Güner,2014);

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere ; F, u nun kısmi kesirli türevlerinden oluşan bir polinom olmak üzere zaman kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi

$$F\left(u, D_t^{\alpha} u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_m}, D_t^{2\alpha} u, u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2}, u_{x_3 x_3}, \dots\right) = 0 \qquad (4.133)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, l_i $(i = 1,2,3, \dots, m)$ ve k sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere,

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t), \xi = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m + k \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (4.134)$$

kesirsel karmaşık dönüşüm yardımıyla (4.133) denklemi $U' = \frac{dU}{d\xi}$, $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots$ olmak üzere,

$$P(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \qquad (4.135)$$

adi diferensiyel denklemine dönüştürülür.

Benzer şekilde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere ; F, u nun kısmi kesirli türevlerinden oluşan bir polinom olmak üzere uzay kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi

$$F\left(u, u_t, D_{x_1}^{\beta}u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_m}, D_{x_1}^{2\beta}u, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, u_{x_3x_3}, \dots\right) = 0 \qquad (4.136)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, l_i $(i = 1,2,3, \dots, m)$ ve k sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$(\xi) = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t), \xi = k\frac{x_1^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)} + l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_mx_m \qquad (4.137)$$

kesirsel karmaşık dönüşüm yardımıyla (4.136) denklemi (4.135) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür.

Son olarak her iki denklemi de içeren; $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1} \leq 1$ olmak üzere ; F, u nun kısmi kesirli türevlerinden oluşan bir polinom olmak üzere uzay-zaman kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi

$$F\left(u, D_t^{\alpha_1}u, D_{x_1}^{\alpha_2}u, D_{x_2}^{\alpha_3}u, \dots, D_{x_m}^{\alpha_{m+1}}u, D_t^{\alpha_1}D_t^{\alpha_1}u, D_t^{\alpha_1}D_{x_1}^{\alpha_2}u, \dots\right) = 0 \qquad (4.138)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, k_i $(i = 1,2,3,\dots,m)$ ve c sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$\xi = c\frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)} + k_1\frac{x_1^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} + k_2\frac{x_2^{\alpha_3}}{\Gamma(1+\alpha_3)} + \dots + k_m\frac{x_m^{\alpha_{m+1}}}{\Gamma(1+\alpha_{m+1})}, \quad (4.139)$$

kesirsel karmaşık dönüşüm yardımıyla (4.138) denklemi (4.135) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. Eğer imkan varsa (4.135) denkleminin terim terim bir veya daha fazla integrali alınabilir. Böyle bir dönüşüm sadece kesir türevli diferensiyel denklemlerin ‘‘dalga’’ çözümleri için geçerlidir. Ancak her kesirli diferensiyel denklemler için ‘‘dalga’’ çözümü yoktur. Bundan dolayı uygulamaları sınırlıdır (Güner, 2014).

4.3.3. Lokal kesirli diferensiyel denklemlerin hareketli dalga dönüşümü

Kesirsel karmaşık dönüşümde zincir kuralının uygulanmasında meydana gelen fraktal indekslerin bulunması gibi bitakım zorluklardan dolayı Yang ve arkadaşları daha kesin sonuçlar veren yeni bir hareketli dalga dönüşümünü geliştirdiler (Yang vd., 2017). Bu dönüşüm metoduyla daha sade ve etkili bir şekilde Lokal kesir türevli diferensiyel deklemler lokal kesir türevli adi diferensiyel denklemlere dönüştürülmüş ve daha sağlıklı sonuçlar elde edilmiştir. Yötemin açıklaması aşağıda verilmiştir:

Lineer olmayan lokal kesir türevli aşağıdaki denklemi gözönüne alalım;

$$F_\alpha\left(u_\alpha, \frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial {x_1}^\alpha}, \frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial {x_2}^\alpha}, \dots, \frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial {x_m}^\alpha}, \frac{\partial^{2\alpha} u_\alpha}{\partial t^{2\alpha}}, \frac{\partial^{2\alpha} u_\alpha}{\partial {x_1}^{2\alpha}}, \frac{\partial^{2\alpha} u_\alpha}{\partial {x_2}^{2\alpha}}, \dots\right) = 0. \quad (4.140)$$

Burada $F_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ lineer olmayan lokal kesirli operatördür. l_i^α $(i = 1,2,3,\dots,m)$ ve k^α sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$\xi^\alpha = l_1^\alpha x_1^\alpha + l_1^\alpha x_2^\alpha + \dots + l_m^\alpha x_m^\alpha + k^\alpha t^\alpha \quad (4.141)$$

hareketli dalga dönüşümü alınır, burada

$$\lim_{\alpha\to 1}\xi^{\alpha} = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_mx_m + kt \tag{4.142}$$

olur. (4.141) ve (4.142) denklemleri yardımıyla

$$F_{\alpha}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, t) = F_{\alpha}(\xi) \tag{4.143}$$

elde edilir. Lokal kesirli türevlerde ki zincir kuralını kullanarak,

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}\left(\frac{\partial\xi}{t}\right)^{\alpha} = k^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial {x_1}^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}\left(\frac{\partial\xi}{x_1}\right)^{\alpha} = l_1^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial {x_2}^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}\left(\frac{\partial\xi}{x_2}\right)^{\alpha} = l_2^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial {x_m}^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}\left(\frac{\partial\xi}{x_m}\right)^{\alpha} = l_m^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} \tag{4.144}$$

elde edilir. (4.144) denklemleri kullanılarak (4.143) denklemi,

$$F_{\alpha}\left(u_{\alpha}(\xi), \frac{d^{\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{d\xi^{\alpha}}, \frac{d^{2\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{d\xi^{2\alpha}}, \frac{d^{3\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{d\xi^{3\alpha}}, \ldots\right) = 0 \tag{4.145}$$

lokal kesir türevli adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Burada ki türevler α fraktal mertebeli ξ ye göre türevlerdir.

Örnek 4.6. İki boyutlu uzay fraktal lokal kesir türevli denklemi aşağıdaki şekilde alalım;

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} = 0. \tag{4.146}$$

Hareketli dalga dönüşümü,

$$\xi^{\alpha} = a^{\alpha}x^{\alpha} + b^{\alpha}y^{\alpha} + c^{\alpha}t^{\alpha} \tag{4.147}$$

şeklinde alınırsa,

$$\lim_{\alpha\to 1} \xi^{\alpha} = ax + by + ct \tag{4.148}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} &= c^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \\
\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} &= a^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \\
\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} &= b^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} \\
\frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} &= a^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{2\alpha}} \\
\frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} &= b^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{2\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.149}$$

elde edilir. (4.149) denklemleri (4.146) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} + \frac{(a^{\alpha}+b^{\alpha})}{c^{\alpha}} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} + \frac{\left(a^{2\alpha} + b^{2\alpha}\right)}{c^{\alpha}} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{2\alpha}} = 0. \tag{4.150}$$

lokal kesir türevli ξ ye göre adi diferensiyel denkleme dönüşür. Tam çözüm yöntemleri kullanılarak bu denklemin çözümleri bulunabilir.

Örnek 4.7. Üç boyutlu uzay fraktal lokal kesir türevli denklemi aşağıdaki şekilde alalım;

$$\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} + u_{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + u_{\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial z^{2\alpha}} = 0. \tag{4.151}$$

Hareketli dalga dönüşümü

$$\xi^{\alpha} = a^{\alpha} x^{\alpha} + b^{\alpha} y^{\alpha} + c^{\alpha} z^{\alpha} + k^{\alpha} t^{\alpha} \tag{4.153}$$

olacak şekilde alalım, burada

$$\lim_{\alpha\to 1} \xi^{\alpha} = ax + by + cz + kt \tag{4.154}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} &= k^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \\
\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} &= a^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \\
\frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} &= b^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{2\alpha}} \\
\frac{\partial^{3\alpha} u_{\alpha}}{\partial z^{3\alpha}} &= c^{3\alpha} \frac{\partial^{3\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{3\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.155}$$

(4.155) denklemleri (4.151) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} + \frac{a^{\alpha}}{k^{\alpha}} u_{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} + \frac{b^{2\alpha}}{k^{\alpha}} u_{\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{2\alpha}} + \frac{c^{3\alpha}}{k^{\alpha}} \frac{\partial^{3\alpha} u_{\alpha}}{\partial \xi^{3\alpha}} = 0. \tag{4.156}$$

lokal kesir türevli ξ ye göre adi diferensiyel denkleme dönüşür. Tam çözüm yöntemleri kullanılarak bu denklemin çözümleri bulunabilir.

Örnek 4.8. Lokal kesir türevli iki boyutlu uzay-fraktal denklemini k ve l sabitler olmak üzere aşağıdaki şekilde göz önüne alalım,

$$\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} + k \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial^{\alpha} u_{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} \right) + l u_{\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u_{\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} = 0. \tag{4.157}$$

Hareketli dalga dönüşümü

$$\xi^{\alpha} = a^{\alpha} x^{\alpha} + b^{\alpha} y^{\alpha} + c^{\alpha} t^{\alpha} \tag{4.158}$$

olacak şekilde alalım, burada

$$\lim_{\alpha\to1}\xi^{\alpha}=ax+by+ct \tag{4.159}$$

olur ve

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}=c^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}},\\
\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial y^{\alpha}}\right)=a^{\alpha}b^{\alpha}\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial\xi^{2\alpha}},\\
\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial y^{2\alpha}}=b^{2\alpha}\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial\xi^{2\alpha}}
\end{gathered} \tag{4.160}$$

(4.160) denklemleri (4.157) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}+k\left(\frac{a^{\alpha}b^{\alpha}}{c^{\alpha}}\right)\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial\xi^{2\alpha}}+\frac{b^{2\alpha}}{k^{\alpha}}u_{\alpha}\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}}{\partial\xi^{2\alpha}}=0. \tag{4.161}$$

lokal kesir türevli ξ ye göre adi diferensiyel denkleme dönüşür. Tam çözüm yöntemleri kullanılarak bu denklemin çözümleri bulunabilir.

4.3.4. Eş formlu kesirli diferensiyel denklemlerin hareketli dalga dönüşümü

Eş formlu türev tanımı kesirli analizde birçok problemi klasik analizdeki gibi kolay anlaşılır ve çözülür hale getirmiştir. Bunlardan biri de Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin adi diferensiyel denkleme dönüştürülmesidir. Lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin adi diferensiyel denkleme dönüştürülmesi kolay bir iş değilken, Khalil ve arkadaşlarının geliştirdiği eş formlu türev tanımı yardımıyla kesir türevli diferensiyel denklemler çok etkili bir şekilde adi diferensiyel denkleme dönüştürülmeye başlanmıştır. Bu yeni yöntemin açıklaması şu şekildedir:

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere ; F, u nun kısmi kesirli türevlerinden oluşan bir polinom olmak üzere zaman kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi,

$$F\left(u, D_t^{\alpha}u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_m}, D_t^{2\alpha}u, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, u_{x_3x_3}, \dots\right) = 0 \qquad (4.162)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, l_i $(i = 1,2,3, \dots, m)$ ve k sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t), \quad \xi = l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_mx_m + k\frac{t^{\alpha}}{\alpha}, \qquad (4.163)$$

hareketli dalga dönüşümü yardımıyla (4.162) denklemi $U' = \frac{dU}{d\xi}$, $U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots$ olmak üzere,

$$P(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \qquad (4.164)$$

adi diferensiyel denklemine dönüştürülür.

Benzer şekilde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere ; F, u nun kısmi kesirli türevlerinden oluşan bir polinom olmak üzere uzay kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi

$$F\left(u, u_t, D_{x_1}^{\beta}u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}, \dots, u_{x_m}, D_{x_1}^{2\beta}u, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, u_{x_3x_3}, \dots\right) = 0 \qquad (4.165)$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, l_i $(i = 1,2,3, \dots, m)$ ve k sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t), \quad \xi = k\frac{x_1^{\beta}}{\beta} + l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_mx_m, \qquad (4.166)$$

hareketli dalga dönüşüm yardımıyla (4.165) denklemi,

$$P(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \tag{4.167}$$

adi diferensiyel denklemine dönüştürülür.

Son olarak her iki denklemi de içeren; $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t)$ bağımsız değişken, u bağımlı değişken ve $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1} \leq 1$ olmak üzere ; F, u nun kısmi kesirli türevlerinden oluşan bir polinom olmak üzere uzay-zaman kesir türevli diferensiyel denklemlerin genel gösterimi

$$F\left(u, D_t^{\alpha_1}u, D_{x_1}^{\alpha_2}u, D_{x_2}^{\alpha_3}u, \dots, D_{x_m}^{\alpha_{m+1}}u, D_t^{\alpha_1}D_t^{\alpha_1}u, D_t^{\alpha_1}D_{x_1}^{\alpha_2}u, \dots\right) = 0 \tag{4.168}$$

şeklindedir. ξ kompleks bir değişken, k_i $(i = 1,2,3, \dots, m)$ ve c sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, t), d\xi = c\frac{t^{\alpha_1}}{\alpha_1} + k_1\frac{x_1^{\alpha_2}}{\alpha_2} + k_2\frac{x_2^{\alpha_3}}{\alpha_3} + \dots + k_m\frac{x_m^{\alpha_{m+1}}}{\alpha_{m+1}} \tag{4.169}$$

hareketli dalga dönüşüm yardımıyla (4.168) denklemi

$$P(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \tag{4.170}$$

adi diferensiyel denklemine dönüştürülür.

Görüldüğü üzere lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemler bu yeni teknikle çok kolay bir şekilde adi diferensiyel denklemlere dönüştürülebilir ve tam çözüm yöntemlerinden uygun olan bir metot ile lineer olmayan kesir türevli denklemlerin çözümleri bulunur. Şimdi bu yeni yöntemi örneklerle açıklayalım:

Örnek 4.9. Uzay zaman- kesir türevli Klein-Gordon denklemini (Hosseini vd., 2017)

$$\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \lambda\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} + \mu u(x,t) + vu^2(x,t) = 0, t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \tag{4.171}$$

alalım.

$$u(x,t) = f(\varepsilon), \qquad \varepsilon = x - l\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \qquad (4.172)$$

dönüşümü yapılarak (4.171) denklemi

$$(l^2 + \lambda)f'' + \mu f + vf^2 = 0 \qquad (4.173)$$

ε a göre adi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin çözümleri tam çözüm yöntemlerinden biriyle bulunabilir.

Örnek 4.10. Uzay-zaman kesir türevli EW(Equal Width Wave) denklemini (Kaplan vd.,2017)

$$D_t^{\alpha}u(x,t) + aD_x^{\alpha}u^2(x,t) - cD_{xxt}^{3\alpha}u(x,t) = 0 \qquad (4.174)$$

gözönüne alalım,

$$u(x,t) = u(\xi), \qquad \xi = k\frac{x^{\alpha}}{\alpha} - l\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \qquad (4.175)$$

dönüşümü yapılarak, ξ ye göre bir defa integrali alınırsa, (4.174) denklemi

$$-lu + aku^2 + clk^2u'' = 0 \qquad (4.176)$$

ξ ye göre adi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin çözümleri tam çözüm yöntemlerinden biriyle bulunabilir.

Örnek 4.11. (3+1) boyutlu kesir türevli mKDVZK(modified Korteweg-De Vries-Zakharov-Kuznetsov) (Çenesiz vd.,2017)

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}+\lambda u^2\frac{\partial u}{\partial x}++\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}=0 \qquad (4.177)$$

denklemini alalım.

$$u(x,t)=U(\xi),\qquad \xi=mx+ny+rz+p\frac{t^\alpha}{\alpha} \qquad (4.178)$$

yeni eş formlu dönüşüm kullanılarak (4.177) denklemi

$$pU_\xi+m\lambda U^2U_\xi+m^3U_{\xi\xi\xi}+mn^2U_{\xi\xi\xi}+mr^2U_{\xi\xi\xi}=0 \qquad (4.179)$$

ξ ye göre adi diferensiyel denkleme dönüşür. (4.179) denklemi bir defa ξ ye göre integrallenir ve integral sabiti sıfır alınırsa, aşağıdaki adi diferensiyel denklem elde edilir.

$$pU+m\lambda\frac{U^3}{3}+(m^3+mn^2+mr^2)U''=0. \qquad (4.180)$$

4.4. Dengelenme Sayısı

Dengelenme sayısı, toplam şeklinde verilen tam çözüm fonksiyonunun üst sınırını temsil etmektedir. Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen sabit bir sayıdır. Herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim $u^p\left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$ ile verilsin. Burada $u=\tau^n$ dönüşümü yapılırsa, p, q, r, s pozitif tamsayılar ve n dengelenme terimi olmak üzere dengelenme bağıntısı n+q = np+s(n+r) olarak yazılır ve bu denklemin çözümünden n pozitif dengelenme sayısı bulunur (Güner, 2014).

4.5. Tam Çözüm Yöntemleri

4.5.1. Tanh yöntemi

Tanh yöntemi ilk olarak Malfliet (Malfliet, 1992) tarafından tanımlanmıştır.Wazwaz tarafından son tanımı aşağıdaki şekilde yapılmıştır.(Wazwaz, 2004):

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm yöntemleri kullanılarak

$$P(U(\xi), U'(\xi), U''(\xi), \dots) = 0 \tag{4.181}$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir. $Y' = \frac{dY}{d\xi}$ olmak üzere,

$$Y' = 1 - Y^2 \tag{4.182}$$

Ricatti denkleminin çözümleri

$$Y = \tanh(\xi) \text{ ve } Y = \coth(\xi) \tag{4.183}$$

dir. Bu çözümler kullanılarak

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \xi} = (1 - Y^2)\frac{d}{dY} \\
\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = (1 - Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right) \\
\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = (1 - Y^2)\left((6Y^2 - 2)\frac{d}{dY} - 6Y(1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)\frac{d^3}{dY^3}\right)
\end{gathered} \tag{4.184}$$

türevleri bulunur. Ayrıca (4.182) Ricatti denkleminin çözümleri Senthilvelan tarafından (Senthilvelan, 2001),

$$\mathrm{Y} = \tan(\xi) \text{ ve } \mathrm{Y} = -\cot(\xi) \qquad (4.185)$$

şeklinde alınarak,

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = (1+\mathrm{Y}^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dY}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} = (1+\mathrm{Y}^2)\left(2\mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dY}} + (1+\mathrm{Y}^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dY}^2}\right)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} = (1+\mathrm{Y}^2)\left((6\mathrm{Y}^2+2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dY}} + 6\mathrm{Y}(1+\mathrm{Y}^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dY}^2} + (1+\mathrm{Y}^2)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dY}^3}\right) \qquad (4.186)$$

türevlerinin kullanılabileceğini göstermiştir. (4.181) adi diferensiyel denkleminin çözümlerini

$$\mathrm{U}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{Y}^k(\xi) \qquad (4.187)$$

şeklinde araştıralım. Burada n dengeleme sayısı olan pozitif bir tamsayı ve a_k lar sonradan bulunacak olan katsayılardır.

Bu çözüm (4.184) ve (4.186) denklemlerinde yerine yazılarak Y nin kuvvetlerine göre bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemindeki bilinmeyen katsayılar bulunur. Bulunan bu katsayılar denklemlerde yerine yazılarak lineer olmayan diferensiyel denkleminin tam çözümleri bulunmuş olur.

4.5.2. Genelleştirilmiş tanh yöntemi

Bu yöntem tanh yönteminin geliştirilmesiyle ilk olarak Wazwaz tarafından tanımlanmıştır (Wazwaz, 2007; Wazwaz 2007). Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm yöntemleri kullanılarak (4.181) adi diferensiyel denklemi elde edilir. $\mathrm{Y}' = \frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{d}\xi}$ olmak üzere,

$$Y' = 1 - Y^2 \tag{4.188}$$

Ricatti denkleminin çözümleri

$$Y = \tanh(\xi) \text{ ve } Y = \coth(\xi) \tag{4.189}$$

olur. Bu çözümler kullanılarak

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \xi} = (1 - Y^2)\frac{d}{dY} \\
\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = (1 - Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right) \\
\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = (1 - Y^2)\left((6Y^2 - 2)\frac{d}{dY} - 6Y(1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)\frac{d^3}{dY^3}\right)
\end{gathered} \tag{4.190}$$

türevleri elde edilir ve n dengelenme sayısı bulunur ve

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{k=0}^{n}\left(a_k Y^k(\xi) + a_{-k}Y^{-k}(\xi)\right) \tag{4.191}$$

şeklinde çözümler araştırılır. Bu çözüm (4.181) denkleminde yerine yazılarak Y nin kuvvetlerine göre bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemindeki bilinmeyen katsayılar bulunur. Bulunan bu katsayılar denklemlerde yerine yazılarak lineer olmayan diferensiyel denkleminin tam çözümleri bulunmuş olur.

4.5.3. Sinüs-kosinüs yöntemi

Bu yöntem ilk olarak Wazwaz tarafından bulunmuştur (Wazwaz, 2004; Wazwaz, 2004). Lineer olmayan bir diferensiyel denklem, (4.181) şeklinde adi diferensiyel denkleme dönüştürüldükten sonra,

$$U(\xi) = \lambda \sin^{\beta}(\mu\xi) \tag{4.192}$$

veya

$$U(\xi) = \lambda\cos^{\beta}(\mu\xi) \tag{4.193}$$

şeklinde çözümler aranır. (4.192) ve (4.193) denklemlerinin türevleri,

$$U(\xi) = \lambda\sin^{\beta}(\mu\xi)$$
$$U^{n}(\xi) = \lambda^{n}\sin^{n\beta}(\mu\xi)$$
$$(U^{n})'(\xi) = n\mu\beta\lambda^{n}\cos(\mu\xi)\sin^{n\beta-1}(\mu\xi)$$
$$(U^{n})''(\xi) = -n^{2}\mu^{2}\beta^{2}\lambda^{n}\sin^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^{2}\lambda^{n}\beta(n\beta-1)\sin^{n\beta-2}(\mu\xi) \tag{4.194}$$

ve

$$U(\xi) = \lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)$$
$$U^{n}(\xi) = \lambda^{n}\cos^{n\beta}(\mu\xi)$$
$$(U^{n})'(\xi) = -n\mu\beta\lambda^{n}\sin(\mu\xi)\cos^{n\beta-1}(\mu\xi)$$
$$(U^{n})''(\xi) = -n^{2}\mu^{2}\beta^{2}\lambda^{n}\cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^{2}\lambda^{n}\beta(n\beta-1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi) \tag{4.195}$$

olarak bulunur. (4.194) ve (4.195) türevleri (4.181) adi denkleminde yazılarak; (4.195) türevleri kullanılırsa kosinüslü terimler, (4.194) türevleri kullanılırsa sinüslü terimler dengelenir. Sonra elde edilen cebirsel denklemler çözülerek λ, β, μ değerleri bulunur. Bulunan bu değerler yerlerine yazılarak lineer olmayan diferensiyel denkleminin tam çözümleri bulunmuş olur.

4.5.4. Üstel fonksiyon yöntemi

Üstel fonksiyon yöntemi ilk defa He ve Wu tarafından (He and Wu, 2006) tanımlanmıştır. İlk olarak lineer olmayan bir diferensiyel denklem (4.181) şeklinde adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Üstel fonksiyon yönteminde c, d, p ve q pozitif tamsayılar ve a_n, b_m daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere;

$$U(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n e^{n\xi}}{\sum_{m=-p}^{q} b_m\, e^{n\xi}} \tag{4.196}$$

şeklinde çözüm aranır. Lineer olmayan en yüksek dereceden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesinden c=p ve d=q elde edilir. c, d, p ve q nun durumlarına göre tam çözümler elde edilebilir. Örneğin, kolaylık olsun diye p=c=1 ve q=d=1 alınırsa çözüm,

$$U(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1 e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + b_1 e^{\xi}} \tag{4.197}$$

şeklinde bulunur. Burada $u(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = U(\xi)$ ifadesi indirgenmiş denklemde yerine yazılarak, $e^{\xi n}$ $(n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ nin kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden a_n, ve b_m değerleri bulunarak lineer olmayan kesir türevli denklemin tam çözümleri bulunur (Zang, 2007; Ebaid, 2007).

4.5.5. Birinci integral yöntemi

Bu yöntem ilk olarak Feng (Feng, 2002) tarafından tanımlanmıştır. Bu tam çözüm metodu dört adımda uygulanır:

Adım 1: Lineer olmayan bir diferensiyel denklem (4.181) gibi bir adi diferensiyel denkleme dönüştürülür.

Adım 2: (4.181) denkleminin çözümleri

$$u(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = f(\xi) \tag{4.198}$$

formunda yazılabilir.

Adım 3: Yeni bağımsız değişkenlerle

$$X(\xi) = f(\xi), \qquad Y(\xi) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}, \tag{4.199}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = Y(\xi),$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = F\big(X(\xi), Y(\xi)\big) \qquad (4.200)$$

denklem sistemi elde edilir.

Adım 4: Adi diferensiyel denklemlerin teorisine göre; (4.200) denklem sisteminin integrali bulunabiliyorsa, genel çözüm direk olarak bulunabilir. (4.181) denklemini birinci mertebeden integrallenebilir adi diferensiyel denkleme indirgemek için Bölüm (Division) teoremi uygulanırsa, (4.200) denkleminin birinci integrali elde edilebilir. İndirgenen bu denklem çözüldüğünde lineer olmayan diferensiyel denkleminin tam çözümü elde edilir.(Taşcan ve Bekir, 2009; Taghizadeh vd., 2012)

Bölüm (Bölüm) Teoremi: $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$; $\mathbb{C}(x, y)$ kompleks uzayında iki polinom olmak üzere ve $P(x, y), \mathbb{C}(x, y)$ uzayında indirgenemez bir polinom olmak üzere, eğer $P(x, y)$ polinomunun tüm sıfırları aynı zamanda $Q(x, y)$ polinomunun da sıfırları ise $\mathbb{C}(x, y)$ kompleks uzayında

$$Q(x, y) = P(x, y)G(x, y) \qquad (4.201)$$

olacak şekilde bir $G(x, y)$ polinomu vardır (Aslan, 2011; Zhang vd., 2013).

4.5.6. (G´/G) açılım yöntemi

Bu yöntem ilk olarak Wang tarafından tanımlanmıştır (Wang vd., 2008) ve dört adımda uygulanır:

Adım 1: Lineer olmayan bir diferensiyel denklem (4.181) adi diferensiyel denkleme dönüştürülür.

Adım 2: $G(\xi)$;

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \qquad (4.202)$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemi sağlayan fonksiyon olsun. Bu denklemin $\lambda^2 - 4\mu < 0$ (periyodik çözümler), $\lambda^2 - 4\mu > 0$ (soliton çözümler) ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ (rasyonel çözümler) olmak üzere üç farklı genel çözümü vardır. Bu çözümler aşağıda şöyle gösterilmiştir:

$$G(\xi) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}\left(C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right), & \lambda^2 - 4\mu > 0, \\ e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}(C_1 + C_2\xi), & \lambda^2 - 4\mu = 0 \\ e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}\left(C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}i\xi} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}i\xi}\right), & \lambda^2 - 4\mu < 0. \end{cases} \tag{4.203}$$

(G´/G) açılım metoduna göre çözümler,

$$U(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{G'}{G}\right)^k \tag{4.204}$$

şeklindedir. Burada $a_k = (k = 0, 1, 2, \dots, n), \lambda, \mu$ sonradan belirlenecek olan katsayılar ve n en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin dengelenmesi ile elde edilen pozitif bir sayıdır.

Adım 3: (4.204) çözümü (4.181) diferensiyel denkleminde (4.202) lineer denklemi kullanılarak yerine yazıldığında, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ nin artan kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek $a_k = (k = 0, 1, 2, \dots, n), \lambda, \mu$ ve dönüşüm denklemindeki katsayılar bulunur.

Adım 4: Bulunan bu değerler (4.202) lineer denkleminin çözümleri göz önünde bulundurularak (4.204) denkleminde yerine yazıldığında lineer olmayan diferensiyel denklemin tam çözümleri periyodik, soliton ve rasyonel çözümler olarak bulunur (Elghareb vd., 2013; Zang vd. 2008; Bekir, 2008).

4.5.7. Yardımcı denklem yöntemi

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm metotları kullanılarak (4.181) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. Tanh-fonksiyon metoduna göre (4.181) adi diferensiyel denkleminin çözümleri

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i(\xi) \qquad (4.205)$$

şeklindedir. burada $a_i \ (i = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ ler katsayılardır. n sayısı (4.181) adi diferensiyel denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimden elde edilen dengelenme sayısıdır ve $z(\xi)$ ise aşağıdaki gibi bir yardımcı denklemin çözümüdür.

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \qquad (4.206)$$

a, b, c ler reel sayı olmak üzere (4.206) denkleminin çözümleri bulunur:

Denklem (4.205) ve denklem (4.206), denklem (4.181) de yerine yazılırak $z(\xi)$ ye göre cebirsel bir denklem bulunur. Bulunan bu cebirsel denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek a, b, c, a_i (i=1,2,3,….,n) ve dönüşüm denklemindeki katsayılara bağlı bir denklem sistemi oluşturulur. Denklem sisteminin çözümünden elde edilen katsayılar yerine yazılarak lineer olmayan diferensiyel denklemin tam çözümleri elde edilir (Akbulut ve Kaplan 20018; Sirendaoreji ve Jiong, 2003).

4.5.8. Genişletilmiş basit denklem yöntemi

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm metotları kullanılarak (4.181) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. $\vartheta(\xi)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$U(\xi) = \sum_{n=0}^{m} a_n \left[\frac{\vartheta'(\xi)}{\vartheta(\xi)}\right]^n, \quad a_m \neq 0. \tag{4.207}$$

şeklindedir. Burada $a_n \; (n = 0, 1, 2, 3, \ldots, m)$ ler katsayılardır. n sayısı (4.181) adi diferensiyel denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimden elde edilen dengelenme sayısıdır. (4.207) denklemi (4.181) denkleminde yerine yazılırak $\left[\frac{\vartheta'(\xi)}{\vartheta(\xi)}\right]^n$ ye göre cebirsel bir denklem bulunur. Bulunan bu cebirsel denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek $a_n \; (n = 0, 1, 2, 3, \ldots, m)$ ve dönüşüm denklemindeki katsayılara bağlı bir denklem sistemi oluşturulur. Denklem sisteminin çözümünden elde edilen katsayılar yerine yazılarak lineer olmayan diferensiyel denklemin tam çözümleri elde edilir. Burada $\vartheta(\xi)$ önceden belirlenmiş bir denklem veya denklemin çözümlerinden biri değildir. Modifiye basit denklem metodunun bir yardımcı denklemi olduğuna dikkat edilmelidir. Bu yüzden basit denklem metodu daha fazla yeni çözüm elde edilmesini sağlar (Kaplan vd.,.2017).

4.5.9. Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm metotları kullanılarak aşağıdaki adi diferensiyel denklemine dönüştürülür.

$$G(f(\varepsilon), f'(\varepsilon), f''(\varepsilon), \ldots) = 0. \tag{4.208}$$

Tanh-fonksiyon metoduna göre (4.208) adi diferensiyel denkleminin çözümleri

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n Q^n(\varepsilon) \tag{4.209}$$

şeklindedir. Burada $a_n \; (n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N), (a_N \neq 0)$ ler sonradan hesaplanacak olan katsayılardır. N sayısı (4.208) adi diferensiyel denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimden elde edilen dengelenme sayısıdır ve $Q(\varepsilon)$ ise aşağıdaki

$$Q(\varepsilon) = \frac{1}{1 + da^{\varepsilon}}, \tag{4.210}$$

fonksiyondur ve

$$Q'(\varepsilon) = Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)\ln a \tag{4.211}$$

birinci derece diferensiyel denklemini sağlar. (4.209) açılımı ve gerekli türevleri (4.208) denkleminde yazılılarak $Q(\varepsilon)$ a bağlı

$$P\big(Q(\varepsilon)\big) = 0, \tag{4.212}$$

polinomu elde edilir. Bu polinomdaki $Q(\varepsilon)$ nun herbir kuvvetinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek gerekli olan katsayılar bulunur ve yerlerine yazılırak lineer olmayan denklemin tam çözümleri bulunur. N=1 için $f(\varepsilon)$ nun birkaç türevi aşağıdaki gibi bulunur (Hosseini vd., 2017):

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon) &= a_1 Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)\ln a \\ f''(\varepsilon) &= a_1 Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)^2(\ln a)^2 + a_1 Q^2(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)(\ln a)^2 \\ f'''(\varepsilon) &= a_1 Q(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)^3(\ln a)^3 + 4a_1 Q^2(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)^2(\ln a)^3 \\ &\quad + a_1 Q^3(\varepsilon)(Q(\varepsilon) - 1)(\ln a)^3. \end{aligned} \tag{4.213}$$

4.5.10. (G´/G, 1/G) açılım yöntemi

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm yöntemleri kullanılarak (4.181) adi diferensiyel denklemi elde edilir.

$$G''(\xi) + \lambda G(\xi) = \mu \tag{4.214}$$

ve

$$\phi = \frac{G'}{G}, \qquad \psi = \frac{1}{G} \tag{4.215}$$

beraber düşünüldüğünde,

$$\phi' = -\phi^2 + \mu\psi - \lambda, \;\; \psi' = -\phi\psi, \tag{4.216}$$

denklemi elde edilir. A_1 ve A_2 sabit sayılar olmak üzere (4.214) ikinci mertebeden lineer diferensiyel denkleminin üç farklı genel çözümü vardır:

$\lambda < 0$ için

$$G(\xi) = A_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right) + \frac{\mu}{\lambda}, \tag{4.217}$$

olmak üzere,

$$\psi^2 = \frac{-\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}(\phi^2 - 1\mu\psi + \lambda), \qquad \sigma = A_1^2 - A_2^2\,. \tag{4.218}$$

$\lambda > 0$ için

$$G(\xi) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + \frac{\mu}{\lambda}, \tag{4.219}$$

olmak üzere,

$$\psi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}(\phi^2 - 1\mu\psi + \lambda), \qquad \sigma = A_1^2 + A_2^2. \tag{4.220}$$

$\lambda = 0$ için

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2, \tag{4.221}$$

olmak üzere,

$$\psi^2 = \frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2}(\phi^2 - 2\mu\psi). \qquad (4.222)$$

(4.181) adi diferensiyel denkleminin çözümleri,

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i\phi^i + \sum_{i=1}^{N} b_i\phi^{i-1}\psi, \qquad (4.223)$$

olacak şekilde araştırılır. $G = G(\xi)$, (4.214) ikinci derece lineer adi denklemin çözümüdür, a_i, $b_i(i = 1, \dots, N)$, λ, μ sabit sayılar ve pozitif tamsayı N, (4.181) adi diferensiyel denkleminin dengelenme sayısıdır. (4.216), (4.218), (4.220), (4.222) denklemleri kullanılarak, (4.223) denklemi (4.181) denkleminde yerine yazılır. ψ nin kuvvetleri 1 den büyük olmayacak şakilde ϕ ve ψ ye göre bir cebirsel denklem bulunur ve bu denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülmesiyle a_i, b_i, λ, μ, A_1, A_2 katsayıları bulunur ve (4.223) denkleminde yazılarak; $\lambda < 0$ için hiperbolik, $\lambda > 0$ için trigonometrik ve $\lambda = 0$ için rasyonel çözümler elde edilir (Ling-Xiao vd.,2010; Demiray vd.,2014).

4.5.11. Exp$(-\phi)$ yöntemi

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm metotları kullanılarak (4.181) adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. (4.181) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimden elde edilen dengelenme sayısı N bulunur ve

$$U(\xi) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\exp(-\phi(\xi))\right)^n \qquad (4.224)$$

şeklinde çözümler aranır. Burada $a_n(n = 0, 1, 2, 3, \dots, N), a_N \neq 0$ sonradan belirlenecek katsayılar ve $\phi(\xi)$ aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\phi'(\xi) = \exp(-\phi(\xi)) + \mu\exp\phi(\xi) + \lambda \qquad (4.225)$$

(4.225) denkleminin farklı çözümleri C integral sabiti olmak üzere aşağıdaki şekilde olur:

Durum1 (Hiperbolik fonksiyon çözümler): $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere,

$$\phi_1(\xi) = \ln\left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi + C)\right) - \lambda}{2\mu}\right). \tag{4.226}$$

Durum2 (Trigonometrik fonksiyon çözümler): $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere,

$$\phi_2(\xi) = \ln\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\tan\left(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}2(\xi + C)\right) - \lambda}{2\mu}\right). \tag{4.227}$$

Durum3 (Hiperbolik fonksiyon çözümler): $\lambda^2 - 4\mu > 0,\ \mu = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$\phi_3(\xi) = -\ln\left(\frac{\lambda}{\cosh(\lambda(\xi + C)) + \sinh(\lambda(\xi + C)) - 1}\right). \tag{4.228}$$

Durum4 (Rasyonel fonksiyon çözümler): $\lambda^2 - 4\mu = 0,\ \mu \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere,

$$\phi_4(\xi) = \ln\left(-\frac{2(\lambda(\xi + C) + 2)}{\lambda^2(\xi + C)}\right). \tag{4.229}$$

Durum5 : $\lambda^2 - 4\mu = 0,\ \mu = 0$ ve $\lambda = 0$ olmak üzere,

$$\phi_5(\xi) = \ln(\xi + C). \tag{4.230}$$

(4.224) denklemini (4.181) denkleminde yazarak $(-\phi(\xi)^n), (n = 0, 1, 2, 3, \dots, N)$ nin kuvvetlerine göre bir denklem elde edilir ve bu denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek bulunan sistemin çözümünden katsayılar bulunarak lineer olmayan diferensiyel denklemin tam çözümleri bulunur. (Kaplan ve Bekir, 2017)

4.5.12. Fonksiyonel değişken yöntemi:

Lineer olmayan bir diferensiyel denklem dönüşüm metotları kullanılarak,

$$Q\left(U_{\xi}, U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi} \dots\right) = 0, \tag{4.231}$$

adi diferensiyel denklemine dönüştürülür. Aşağıdaki şekilde bir fonksiyonel değişken alınır,

$$U_{\xi} = F(U), \tag{4.232}$$

ve bilinmeyen U fonksiyonu dönüşümünü yapmak için ‘‘ $´ = \frac{d}{du}$ ’’ olmak üzere aşağıdaki şekilde türevler alınarak,

$$\begin{gathered} U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)´, \\ U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)´´\sqrt{F^2} \\ U_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}[(F^2)´´´F^2 + (F^2)´´(F^2)´] \end{gathered} \tag{4.233}$$

(4.231) denkleminde yazılır. Böylece (4.231) denklemi şağıdaki F fonksiyonu ve türevlerine bağlı aşağıdaki adi diferensiyel denkleme indirgenir

$$R(U, F, F´, F´´, F´´´) = 0. \tag{4.234}$$

(4.234) denkleminin integralinin alınmasıyla F fonksiyonu bulunur. (4.232) denklemi kullanılarak lineer olmayan diferensiyel denklemin tam çözümleri elde edilmiş olur.(Çenesiz vd., 2017)

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Fraktal Boussinesq Denkleminin Hareketli Dalga Çözümleri

s_1, s_2, s sabitler olmak üzere lokal kesir tanımlı fraktal Boussinesq denklemi

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial t^{\alpha}}+s_1u_{\alpha}(x,t)\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{\alpha}}+s_2\frac{\partial^{3\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}\right)+s\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}=0 \quad (5.1)$$

şeklindedir(Yang vd., 2017). Bu denklem integral sabiti sıfır olmak üzere x' e göre integrali alınırsa,

$$\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial t^{\alpha}}+s_1u_{\alpha}(x,t)\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{\alpha}}+s_2\frac{\partial^{3\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}+s\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{\alpha}}=0 \quad (5.2)$$

denklemi elde edilir(Yang vd., 2017).

$$\xi^{\alpha}=x^{\alpha}-k^{\alpha}t^{\alpha} \quad (5.3)$$

hareketli dalga dönüşümü yapılırsa,

$$\lim_{\alpha\to 1}\xi^{\alpha}=x-kt \quad (5.4)$$

olur ve

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=-k^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^{\alpha}},\\ \frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^{\alpha}},\\ \frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}=\frac{\partial^{2\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^{2\alpha}},\\ \frac{\partial^{3\alpha}u_{\alpha}(x,t)}{\partial x^{3\alpha}}=\frac{\partial^{3\alpha}u_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^{3\alpha}},\end{gathered} \quad (5.5)$$

eşitlikleri (5.2) denkleminde yazılırsa $s_3 = s - k^\alpha$ olmak üzere,

$$s_1 u_\alpha(\xi)\frac{d^\alpha u_\alpha(\xi)}{d\xi^\alpha} + s_2\frac{d^{3\alpha} u_\alpha(\xi)}{d\xi^{3\alpha}} + s_3\frac{d^\alpha u_\alpha(\xi)}{d\xi^\alpha} = 0 \tag{5.6}$$

denklemi bulunur. Lokal kesirli türevin zincir kuralı kullanılarak,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{s_1}{2}u_\alpha^2(\xi) + s_2\frac{d^{2\alpha} u_\alpha(\xi)}{d\xi^{2\alpha}} + s_3 u_\alpha(\xi)\right) = 0 \tag{5.7}$$

denklemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır olmak üzere (5.7) denkleminin ξ'ye göre lokal kesirli integralinin alınmasıyla

$$\frac{s_1}{2}u_\alpha^2(\xi) + s_2\frac{d^{2\alpha} u_\alpha(\xi)}{d\xi^{2\alpha}} + s_3 u_\alpha(\xi) = 0 \tag{5.8}$$

kesir türevli adi diferensiyel denklemi elde edilir (Yang vd., 2019). (5.8) kesir türevli adi diferensiyel denklemini yardımcı denklem yöntemine göre çözmek istediğimizde dengelenme sayısı 2 bulunur.

$$\left(\frac{dz_\alpha(\xi)}{d\xi}\right)^2 = az_\alpha^2(\xi) + bz_\alpha^3(\xi) + cz_\alpha^4(\xi) \tag{5.9}$$

yardımcı denklem olmak üzere

$$u_\alpha(\xi) = a_0 + a_1 z_\alpha(\xi) + a_2 z_\alpha^2(\xi) \tag{5.10}$$

şeklinde çözümler aranır. (5.9) denklemi ve (5.10) denkleminden gerekli türevler alınarak (5.8) kesir türevli adi diferensiyel denkleminde yerine yazılıp katsayılar sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$z_\alpha^0(\xi)\ :\ \frac{1}{2}s_1 a_0^2 + s_3 a_0 = 0,$

$z_\alpha^1(\xi)\ :\ s_1 a_0 a_1 + s_2 a_1\, a + s_3 a_1 = 0,$

$$z_\alpha^2(\xi)\ :\ s_1a_0a_2+\frac{1}{2}s_1a_1^2+\frac{3}{2}s_2a_1b+4s_2a_2a+s_3a_2=0,$$

$$z_\alpha^3(\xi)\ :\ s_1a_1a_2+2s_2a_1c+5s_2a_2b=0,$$

$$z_\alpha^4(\xi)\ :\ \frac{1}{2}s_1a_2^2+6s_2a_2c=0. \qquad (5.11)$$

denklem sisteminin çözülmesiyle altı farklı tipte aşağıdaki katsayılar ve çözümler bulunur.

Tip 1.

$$a_0=0,\quad a_1=-3\frac{s_2b}{s_1},\quad a_2=0,\quad a=-\frac{s_3}{s_2},\quad b=b,\quad c=0$$

çözümleri (5.9) ve (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$s_3=s-k^\alpha$ ve $\xi^\alpha=x^\alpha-k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi)=\frac{4s_3\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_2\left(2b\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)-b^2\exp\left(2\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)-1\right)} \qquad (5.12)$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi)=\frac{12bs_3\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1\left(2b\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)-b^2\exp\left(2\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)-1\right)} \qquad (5.13)$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{4s_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_2\left(2b \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) - \exp\left(2\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) - b^2\right)} \tag{5.14}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = \frac{12bs_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1\left(2b \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) - \exp\left(2\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) - b^2\right)} \tag{5.15}$$

çözümü elde edilir.

Tip 2.

$$a_0 = -2\frac{s_3}{s_1}, \quad a_1 = -3\frac{s_2 b}{s_1}, \quad a_2 = 0 \quad a = \frac{s_3}{s_2}, \quad b = b, \quad c = 0$$

çözümleri (5.9) ve (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{4s_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_2\left(-1 + 2b \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - b^2 \exp\left(2\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)} \tag{5.16}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = -\frac{2s_3}{s_1} + \frac{12bs_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1\left(-1 + 2b\exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - b^2 \exp\left(2\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)} \tag{5.17}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = -\frac{4s_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_2\left(2b\exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - \exp\left(2\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - b^2\right)} \tag{5.18}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = -\frac{2s_3}{s_1} + \frac{12bs_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1\left(2b\exp\left(\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - \exp\left(2\xi^\alpha \sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - b^2\right)} \tag{5.19}$$

çözümü elde edilir.

Tip 3.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_2 \quad a = -\frac{s_3}{4s_2}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{s_1 a_2}{12 s_2}$$

çözümleri (5.9) ve (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12s_3 \exp\left(\frac{1}{2}\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1 s_3 a_2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) - 12s_2^2} \tag{5.20}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = \frac{144a_2 s_3^2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{\left(s_1 s_3 a_2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) - 12s_2^2\right)^2} \tag{5.21}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12s_3 \exp\left(\frac{1}{2}\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{-s_1 s_3 a_2 + 12s_2^2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)} \tag{5.22}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = \frac{144a_2 s_3^2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{\left(-s_1 s_3 a_2 + 12s_2^2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)^2} \tag{5.23}$$

çözümü elde edilir.

Tip 4.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = \frac{s_1 a_1^2}{12 s_3} \quad a = -\frac{s_3}{s_2}, \quad b = -\frac{s_1 a_1}{6 s_2}, \quad c = -\frac{s_1^2 a_1^2}{144 s_3 s_2}$$

çözümleri (5.9) ve (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12 s_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{3 s_2 + s_1 a_1 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)} \tag{5.24}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = -\frac{36 a_1 s_3 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{\left(3 s_2 + s_1 a_1 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)^2} \tag{5.25}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12 s_3}{3 s_2 \exp\left(\xi^\alpha \sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right) + s_1 a_1} \tag{5.26}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = -\frac{36a_1s_3\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)}{\left(3s_2\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)+s_1a_1\right)^2} \tag{5.27}$$

çözümü elde edilir.

Tip 5.

$$a_0 = -2\frac{s_3}{s_1}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = a_2 \quad a = \frac{s_3}{4s_2}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{s_1a_2}{12s_2}$$

çözümleri (5.9) ve (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12s_3\exp\left(\frac{1}{2}\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1s_3a_2\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)+12s_2^2} \tag{5.28}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = \frac{2s_3\left(48s_1s_2^2s_3a_2\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)-s_1^2s_3^2a_2^2\exp\left(2\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)-144s_2^4\right)}{s_1\left(s_1s_3a_2\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)+12s_2^2\right)^2} \tag{5.29}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12s_2\, s_3 \exp\left(\frac{1}{2}\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{s_1 s_3 a_2 + 12s_2^2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)} \tag{5.30}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = \frac{2s_3\left(48s_1 s_2^2 s_3 a_2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right) - s_1^2 s_3^2 a_2^2 - 144s_2^4 \exp\left(2\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)}{s_1\left(s_1 s_3 a_2 + 12s_2^2 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)^2} \tag{5.31}$$

çözümü elde edilir.

Tip 6.

$$a_0 = -\frac{2s_3}{s_1}, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = -\frac{s_1 a_1^2}{12s_3} \quad a = \frac{s_3}{s_2}, \quad b = -\frac{s_1 a_1}{6s_2}, \quad c = \frac{s_1^2 a_1^2}{144 s_3 s_2}$$

çözümleri (5.9) ve (5.10) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$s_3 = s - k^\alpha$ ve $\xi^\alpha = x^\alpha - k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12s_3 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)}{3s_2 + s_1 a_1 \exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)} \tag{5.32}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi)=\frac{2s_3\left(12s_1s_2\,a_1\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)-s_1^2a_1^2\exp\left(2\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)-9s_2^2\right)}{s_1\left(3s_2+s_1a_1\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)^2} \tag{5.33}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

$s_3=s-k^\alpha$ ve $\xi^\alpha=x^\alpha-k^\alpha t^\alpha$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi)=\frac{12s_3}{3s_2\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)+s_1a_1} \tag{5.35}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi)=\frac{2s_3\left(12s_1s_2\,a_1\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)-s_1^2a_1^2-9s_2^2\exp\left(2\xi^\alpha\sqrt{\frac{s_3}{s_2}}\right)\right)}{s_1\left(3s_2\exp\left(\xi^\alpha\sqrt{-\frac{s_3}{s_2}}\right)+s_1a_1\right)^2} \tag{5.36}$$

çözümü elde edilir.

5.2. Uzay-Zaman Kesir Türevli mBBM Denklemi

v sabit olmak üzere lokal kesir tanımlı mBBM Denklemi,

$$\frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial t^\alpha}+\frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial x^\alpha}-vu_\alpha^2\frac{\partial^\alpha u_\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial^{3\alpha}u_\alpha}{\partial x^{3\alpha}}=0,\quad 0<\alpha\le 1,\quad x>0,\quad t>0, \tag{5.37}$$

şeklindedir(Javeed vd., 2018).

$$\xi^{\alpha} = k^{\alpha}x^{\alpha} + l^{\alpha}t^{\alpha} \tag{5.38}$$

hareketli dalga dönüşümü alınırsa,

$$\lim_{\alpha\to 1} \xi^{\alpha} = kx + lt \tag{5.39}$$

olur ve

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} = l^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \\
\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = k^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}}, \\
\frac{\partial^{3\alpha}u_{\alpha}}{\partial x^{3\alpha}} = k^{3\alpha}\frac{\partial^{3\alpha}u_{\alpha}}{\partial \xi^{3\alpha}}.
\end{gathered} \tag{5.40}$$

eşitlikleri (5.37) denkleminde yazılırsa ,

$$l^{\alpha}\frac{d^{\alpha}u_{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} + k^{\alpha}\frac{d^{\alpha}u_{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} - k^{\alpha}vu^{2}\frac{d^{\alpha}u_{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} + k^{3\alpha}\frac{d^{3\alpha}u_{\alpha}}{d\xi^{3\alpha}} = 0 \tag{5.50}$$

denklemi bulunur. Lokal kesirli türevin zincir kuralı kullanılarak,

$$\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}}\left((k^{\alpha} + l^{\alpha})u_{\alpha} - \frac{1}{3}k^{\alpha}vu_{\alpha}^{3} + k^{3\alpha}\frac{d^{2\alpha}u_{\alpha}}{d\xi^{2\alpha}}\right) = 0 \tag{5.51}$$

denklemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır olmak üzere (5.51) denkleminin ξ'ye göre lokal kesirli integralinin alınmasıyla

$$(k^{\alpha} + l^{\alpha})u_{\alpha} - \frac{1}{3}k^{\alpha}vu_{\alpha}^{3} + k^{3\alpha}\frac{d^{2\alpha}u_{\alpha}}{d\xi^{2\alpha}} = 0 \tag{5.52}$$

kesir türevli adi diferensiyel denklemi elde edilir. (5.52) kesir türevli adi diferensiyel denklemini yardımcı denklem yöntemine göre çözmek istersek dengelenme sayısı 1 bulunur.

$$\left(\frac{dz_\alpha(\xi)}{d\xi}\right)^2 = az_\alpha^2(\xi) + bz_\alpha^3(\xi) + cz_\alpha^4(\xi) \tag{5.53}$$

yardımcı denklem olmak üzere

$$u_\alpha(\xi) = a_0 + a_1 z_\alpha(\xi) \tag{5.54}$$

şeklinde çözümler aranır. (5.53) denklemi ve (5.54) denkleminden gerekli türevler alınarak (5.52) kesir türevli adi diferensiyel denkleminde yerine yazılıp katsayılar sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$\begin{aligned}
z_\alpha^0(\xi) &: (k^\alpha + l^\alpha)a_0 - \frac{1}{3}vk^\alpha a_0^3 = 0,\\
z_\alpha^1(\xi) &: (k^\alpha + l^\alpha)a_1 - vk^\alpha a_0^2 a_1 + ak^{3\alpha}a_1 = 0,\\
z_\alpha^2(\xi) &: \frac{3}{2}bk^{3\alpha}a_1 - vk^\alpha a_0 a_1^2 = 0,\\
z_\alpha^3(\xi) &: 2ck^{3\alpha}a_1 - \frac{1}{3}vk^\alpha a_1^3 = 0.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

denklem sisteminin çözülmesiyle iki farklı tipte aşağıdaki katsayılar ve çözümler bulunur:

Tip 1.

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = a_1, \qquad a = -\frac{k^\alpha + l^\alpha}{k^{3\alpha}}, \qquad b = 0, \qquad c = \frac{va_1^2}{6k^{2\alpha}},$$

çözümleri (5.53) ve (5.54) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$\xi^\alpha = k^\alpha x^\alpha + l^\alpha t^\alpha$ ve $\mu = \sqrt{-\frac{k^\alpha + l^\alpha}{k^{3\alpha}}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12(k^\alpha + l^\alpha)\exp(\xi^\alpha\mu)}{2(k^\alpha + l^\alpha)va_1^2 + 3k^{5\alpha}\exp(2\xi^\alpha\mu)} \tag{5.56}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = -\frac{12(k^\alpha + l^\alpha)k^{2\alpha}a_1\exp(\xi^\alpha\mu)}{2(k^\alpha + l^\alpha)va_1^2 + 3k^{5\alpha}\exp(2\xi^\alpha\mu)} \tag{5.57}$$

tam çözümü elde edilir.

Durum 2.

$\xi^\alpha = k^\alpha x^\alpha + l^\alpha t^\alpha$ ve $\mu = \sqrt{-\frac{k^\alpha+l^\alpha}{k^{3\alpha}}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_\alpha(\xi) = \frac{12(k^\alpha + l^\alpha)k^{2\alpha}\exp(\xi^\alpha\mu)}{2(k^\alpha + l^\alpha)va_1^2\exp(2\xi^\alpha\mu) + 3k^{5\alpha}} \tag{5.58}$$

olarak bulunur ve

$$u_\alpha(\xi) = \frac{12(k^\alpha + l^\alpha)k^{2\alpha}a_1\exp(\xi^\alpha\mu)}{2(k^\alpha + l^\alpha)va_1^2\exp(2\xi^\alpha\mu) + 3k^{5\alpha}} \tag{5.59}$$

tam çözümü elde edilir.

Tip 2.

$$a_0 = \pm\sqrt{\frac{3(k^\alpha + l^\alpha)}{vk^\alpha}},\quad a_1 = a_1,\quad a = \frac{2(k^\alpha + l^\alpha)}{k^{3\alpha}},\quad b = \pm\frac{2a_1\sqrt{3(k^\alpha + l^\alpha)}}{3k^{2\alpha}\sqrt{vk^\alpha}},\quad c = \frac{va_1^2}{6k^{2\alpha}}$$

çözümleri (5.53) ve (5.54) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki iki farklı durumda çözümler bulunur.

Durum 1.

$\xi^{\alpha} = k^{\alpha}x^{\alpha} + l^{\alpha}t^{\alpha}$ ve $\rho = \sqrt{\frac{k^{\alpha}+l^{\alpha}}{k^{3\alpha}}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_{\alpha}(\xi) = \frac{24(k^{\alpha} + l^{\alpha})}{k^{\alpha}\left(3k^{2\alpha}\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho) - 4v\sqrt{\frac{3(k^{\alpha}+l^{\alpha})}{vk^{\alpha}}}a_1\right)} \tag{5.60}$$

olarak bulunur ve

$$u_{\alpha}(\xi) = \frac{3\left(\sqrt{\frac{3(k^{\alpha}+l^{\alpha})}{vk^{\alpha}}}k^{3\alpha}\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho) + 4(k^{\alpha} + l^{\alpha})a_1\right)}{k^{\alpha}\left(3k^{2\alpha}\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho) - 4v\sqrt{\frac{3(k^{\alpha}+l^{\alpha})}{vk^{\alpha}}}a_1\right)} \tag{5.61}$$

tam çözümü elde edilir.

Durum 2.

$\xi^{\alpha} = k^{\alpha}x^{\alpha} + l^{\alpha}t^{\alpha}$ ve $\rho = \sqrt{\frac{k^{\alpha}+l^{\alpha}}{k^{3\alpha}}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_{\alpha}(\xi) = \frac{24(k^{\alpha} + l^{\alpha})\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho)}{k^{\alpha}\left(3k^{2\alpha} - 4v\sqrt{\frac{3(k^{\alpha}+l^{\alpha})}{vk^{\alpha}}}a_1\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho)\right)} \tag{5.62}$$

olarak bulunur ve

$$u_{\alpha}(\xi) = \frac{3\left(\sqrt{\frac{3(k^{\alpha}+l^{\alpha})}{vk^{\alpha}}}k^{3\alpha} + 4(k^{\alpha} + l^{\alpha})a_1\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho)\right)}{k^{\alpha}\left(3k^{2\alpha} - 4v\sqrt{\frac{3(k^{\alpha}+l^{\alpha})}{vk^{\alpha}}}a_1\exp(\sqrt{2}\xi^{\alpha}\rho)\right)} \tag{5.63}$$

tam çözümü elde edilir.

5.3. (2+1) Zaman Kesir Türevli Zomeron Denklemi

Boomeronlar ve trapponlarla bağlantılı (Calogero ve Degasperis, 1982) (2+1) zaman kesir türevli Zomeron denklemi,

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}}\left[\frac{u_{xy}}{u}\right]-\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left[\frac{u_{xy}}{u}\right]+2\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}[u^2]_x=0, \qquad 0<\alpha\leq 1, \tag{5.63}$$

şeklindedir (Aksoy vd., 2016; Abulut ve Kaplan, 2018). h, k, l sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$u(x,y,t)=u(\xi)\,, \qquad \xi=lx+hy-k\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \tag{5.64}$$

dönüşümü yapılırsa

$$hk^2l\left(\frac{u''}{u}\right)''-l^3h\left(\frac{u''}{u}\right)''-2kl(u^2)''=0 \tag{5.65}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. ζ intagral sabiti olmak üzere ξ ye göre iki kez integralini alırsak,

$$kh(k^2-l^2)u''-2klu^3-\zeta u=0 \tag{5.66}$$

denklemi elde edilir ve (5.66) adi diferensiyel denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimden dengelenme sayısı 1 bulunur.

5.3.1. Yardımcı denklem yöntemine göre çözümler

Yardımcı denklem metoduna göre çözümleri bulmak için $z(\xi)$,

$$\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=az^2(\xi)+bz^3(\xi)+cz^4(\xi) \tag{5.67}$$

yardımcı denkleminin çözümleri olmak üzere,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) \tag{5.68}$$

şeklinde çözümler aranır. (5.67) denklemi ve (5.68) denkleminden gerekli türevler alınarak (5.66) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılıp katsayılar sıfıra eşitlenirek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
&z^0(\xi): \quad -2kla_0^3 - \zeta a_0 = 0 \\
&z^1(\xi): \quad alhk^2a_1^2 - al^3ha_1 - 6kla_0^2a_1 - \zeta a_1 = 0 \\
&z^2(\xi): \quad \frac{3}{2}blhk^2a_1 - \frac{3}{2}bl^3ha_1 - 6kla_0a_1^2 = 0 \\
&z^3(\xi): \quad 2clhk^2a_1 - 2cl^3ha_1 - 2kla_1^3 = 0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

denklem sisteminin çözülmesiyle iki farklı tipte aşağıdaki katsayılar ve çözümler bulunur:

Tip 1.

$$a_0 = \pm\frac{\sqrt{-\zeta k}}{\sqrt{2}k}, \qquad a_1 = \pm\sqrt{-\frac{1}{8\zeta k}(k^2-1)hb},$$

$$a = -\frac{2\zeta}{lh(k^2-l^2)}, \qquad b = b, \qquad c = -\frac{(k^2-l^2)hlb^2}{8\zeta}$$

katsayıları (5.67) ve (5.68) denklemlerinde yerine yazılarak iki farklı durumda çözümler aşağıdaki şekilde bulunur:

Durum 1.

$\xi = lx + hy - k\frac{t^\alpha}{\alpha}$ ve $\omega = \sqrt{-\frac{2\zeta}{lh(k^2-l^2)}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_1(\xi) = \frac{8\zeta\exp(\xi\omega)}{lh(k^2-l^2)(2b\exp(\xi\omega)-1)} \tag{5.70}$$

olur ve

$$u_1(\xi) = \frac{\sqrt{-\zeta k}}{\sqrt{2}k} + \frac{\sqrt{2}(k^2 - l^2)\zeta b\exp(\xi\omega)}{\sqrt{-\zeta k}(k^2 - l^2)l(2b\exp(\xi\omega) - 1)} \tag{5.71}$$

tam çözümü elde edilir.

Durum 2.

$\xi = lx + hy - k\frac{t^\alpha}{\alpha}$ ve $\omega = \sqrt{-\frac{2\zeta}{lh(k^2-l^2)}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_2(\xi) = \frac{8\zeta\exp(\xi\omega)}{lh(k^2 - l^2)(2b\exp(\xi\omega) - \exp(2\xi\omega))} \tag{5.72}$$

olur ve

$$u_2(\xi) = \frac{\sqrt{-\zeta k}}{\sqrt{2}k} + \frac{\sqrt{2}(k^2 - l^2)\zeta b\exp(\xi\omega)}{\sqrt{-\zeta k}(k^2 - l^2)l(2b\exp(\xi\omega) - \exp(2\xi\omega))} \tag{5.73}$$

tam çözümü elde edilir.

Tip 2.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a = -\frac{\zeta}{lh(k^2 - l^2)}, \quad b = 0, \quad c = \frac{ka_1^2}{h(k^2 - l^2)}$$

katsayıları (5.67) ve (5.68) denklemlerinde yerine yazılarak iki farklı durumda çözümler aşağıdaki şekilde bulunur:

Durum 1.

$\xi = lx + hy - k\frac{t^\alpha}{\alpha}$ ve $\gamma = \sqrt{\frac{\zeta}{lh(k^2-l^2)}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_3(\xi) = \frac{4(k^2 - l^2)\zeta h\exp(\xi\gamma)}{4\zeta k a_1^2 \exp(2\xi\gamma) - lh^2k^4 + 2l^3h^2k^2 - l^5h^2} \tag{5.75}$$

olur ve

$$u_3(\xi) = \frac{4(k^2 - l^2)h\zeta a_1\exp(\xi\gamma)}{4\zeta k a_1^2 \exp(2\xi\gamma) - lh^2k^4 + 2l^3h^2k^2 - l^5h^2} \tag{5.76}$$

tam çözümü elde edilir.

Durum 2.

$\xi = lx + hy - k\frac{t^\alpha}{\alpha}$ ve $\gamma = \sqrt{\frac{\zeta}{lh(k^2-l^2)}}$ olmak üzere; yardımcı denklem,

$$z_4(\xi) = \frac{4(k^2 - l^2)\zeta h\exp(\xi\gamma)}{lh^2k^4\exp(2\xi\gamma) - 2l^3h^2k^2\exp(2\xi\gamma) + l^5h^2\exp(2\xi\gamma) - 4\zeta k a_1^2} \tag{5.77}$$

olur ve

$$u_4(\xi) = \frac{4(k^2 - l^2)h\zeta a_1\exp(\xi\gamma)}{lh^2k^4\exp(2\xi\gamma) - 2l^3h^2k^2\exp(2\xi\gamma) + l^5h^2\exp(2\xi\gamma) - 4\zeta k a_1^2} \tag{5.78}$$

tam çözümü elde edilir.

5.3.2. Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemine göre çözümler

$$z(\xi) = \frac{1}{1 + da^\xi} \quad \text{ve } z'(\xi) = z(\xi)(z(\xi) - 1)\ln a \tag{5.79}$$

olmak üzere, dengelenme sayısı 1 olduğundan (5.68) şeklindeki çözümleri, (5.79) ile birlikte, (5.66) denkleminde yerine yazılarak,

$$z^0(\xi): \quad -2kla_0^3 - \zeta a_0 = 0$$
$$z^1(\xi): \quad lhk^2(\ln a)^2 a_1 - hl^3(\ln a)^2 a_1 - 6kla_0^2 a_1 - \zeta a_1 = 0$$
$$z^2(\xi): \quad 3hl^3(\ln a)^2 a_1 - 3hlk^2(\ln a)^2 a_1 + -6kla_0 a_1^2 = 0$$
$$z^3(\xi): \quad 2lhk^2(\ln a)^2 a_1 - 2hl^3(\ln a)^2 a_1 - 2kla_1^3 = 0 \tag{5.80}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple paket programı ile çözülmesiyle, aşağıdaki durumlar elde edilir.

Durum 1.

$$a_0 = \frac{\sqrt{-2\zeta kl}}{2kl}, \quad a_1 = \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta kl}}, \quad h = -\frac{2\zeta}{l(k^2 - l^2)(\ln a)^2}$$

katsayılarının yerine yazılmasıyla d sabit bir sayı olmak üzere,

$$u_5(x, y, t) = \frac{\sqrt{-2\zeta kl}}{2kl} + \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta kl}}\left(\frac{1}{1 + da^{kx - \frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\ln a)^2}y - k\frac{t^\alpha}{\alpha}}}\right) \tag{5.81}$$

çözümü elde edilir.

Durum 2.

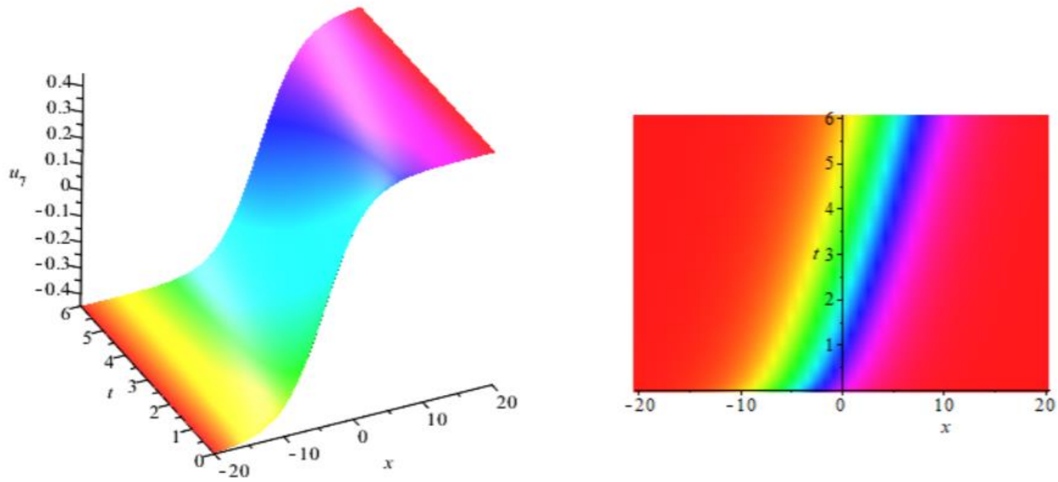
$$a_0 = -\frac{\sqrt{-2\zeta kl}}{2kl}, \quad a_1 = -\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta kl}}, \quad h = -\frac{2\zeta}{l(k^2 - l^2)(\ln a)^2}$$

katsayılarının yerine yazılmasıyla d sabit bir sayı olmak üzere,

$$u_6(x, y, t) = -\frac{\sqrt{-2\zeta kl}}{2kl} + \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta kl}}\left(\frac{1}{1 + da^{kx - \frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\ln a)^2}y - k\frac{t^\alpha}{\alpha}}}\right) \tag{5.81}$$

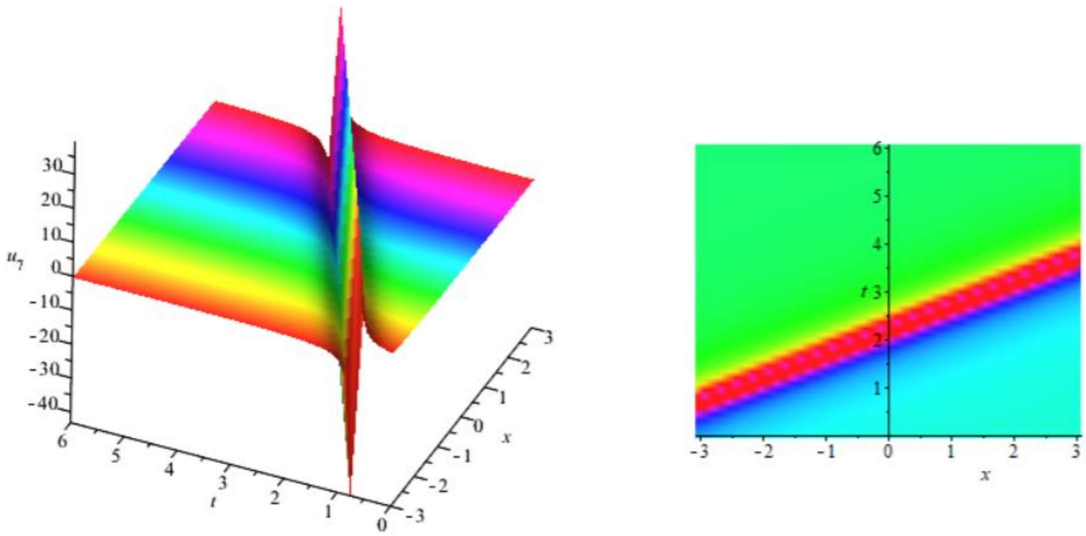
çözümü elde edilir.

(a): (b):



Şekil 5.1. $\zeta = -0.2,\ l = 0.5,\ k = 1,\ a = 2,\ d = 1, y = 1\ ,\ \alpha = 0.7$ alındığında $u_5(x, y, t)$ çözümünün üç boyutlu ve yoğunluk grafiği.

(a): (b):



Şekil 5.2. $\zeta = -0.2,\quad l = 0.5,\quad k = 1,\quad a = 2,\quad d = -1,\quad y = 1\ ,\quad \alpha = 1$ alındığında $u_5(x, y, t)$ çözümünün üç boyutlu ve yoğunluk grafiği.

5.3.3. $\mathbf{Exp(-\phi)}$ yöntemine göre çözümler

Dengelenme sayısı 1 olduğundan,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \exp\big(-\phi(\xi)\big) \tag{5.82}$$

şeklinde çözümler aranır. (5.82) deklemi, (5.66) denkleminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
&z^0(\xi):\quad hl\zeta\mu k^2 a_1 - 2kla_0^3 - \zeta a_0 - h\zeta\mu l^3 a_1 = 0\\
&z^1(\xi):\quad lhk^2\lambda^2 a_1 - hl^3\lambda^2 a_1 - 2h\mu l^3 + 2hl\mu k^2 - 6kla_0^2 a_1 - \zeta a_1 = 0\\
&z^2(\xi):\quad 3hlk^2\lambda a_1 - 3hl^3\lambda a_1 - 6kla_0 a_1^2 = 0\\
&z^3(\xi):\quad 2lhk^2 a_1 - 2hl^3 a_1 - 2kla_1^3 = 0
\end{aligned} \tag{5.83}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple paket programı ile çözülmesiyle, aşağıdaki durumlar elde edilir.

Durum 1.

$$a_0 = -\frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}},\quad a_1 = \frac{\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}}{kl(\lambda^2-4\mu)},\quad h = -\frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\lambda^2-4\mu)}$$

katsayıları yerlerine yazılarak,

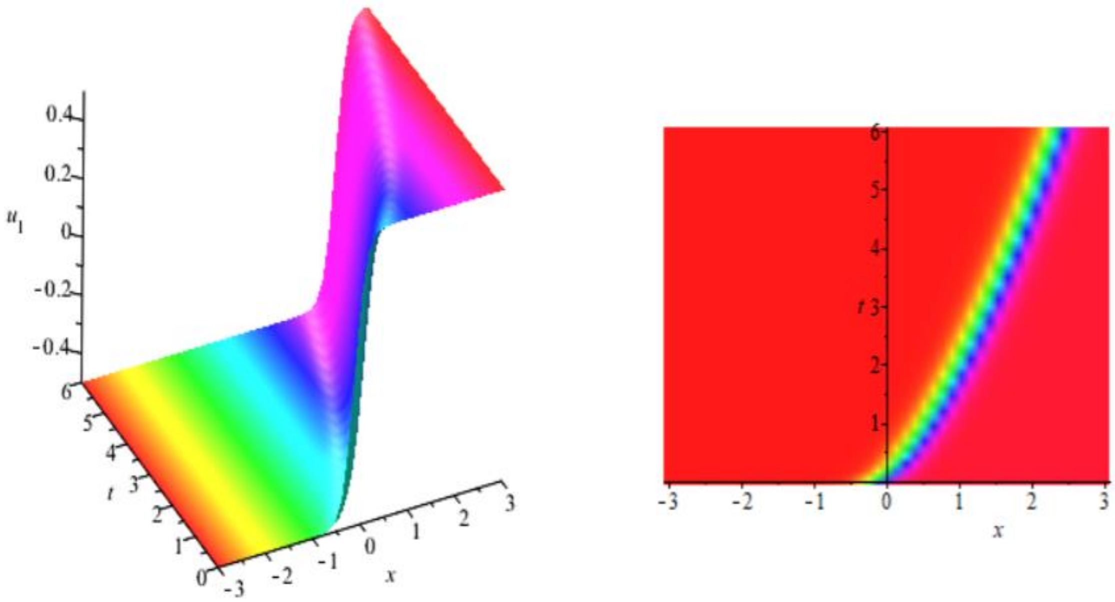
i. $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\mu > 0}$ **ve** $\boldsymbol{\mu \neq 0}$ için

$$u_7(x,y,t) = -\frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}} - \frac{2\mu\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}}{kl(\lambda^2-4\mu)\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(lx-\frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\lambda^2-4\mu)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)+\lambda\right)}. \tag{5.84}$$

ii. $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\mu > 0}$, $\boldsymbol{\mu = 0}$ **ve** $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ için

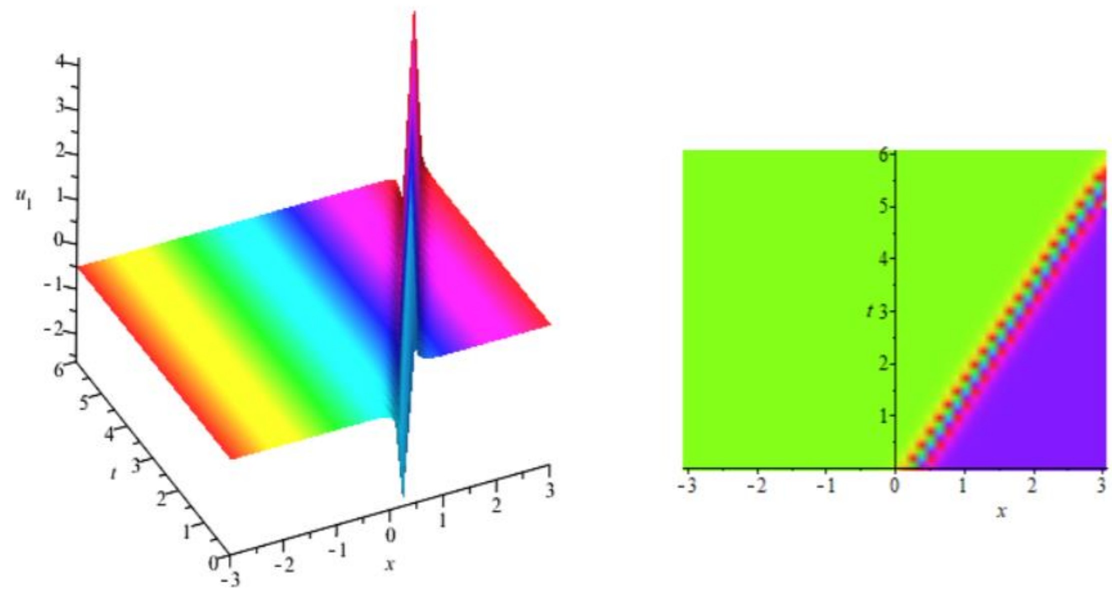
$$u_8(x,y,t) = -\frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl\lambda^2}} + \frac{\sqrt{-2\zeta kl\lambda^2}}{kl\lambda\left(\cosh\left(\lambda\left(lx-\frac{2\zeta}{l\lambda^2(k^2-l^2)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)+\sinh\left(\lambda\left(lx-\frac{2\zeta}{l\lambda^2(k^2-l^2)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)-1\right)}. \tag{5.85}$$

iii. $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\mu < 0}$ ***ve*** $\boldsymbol{\mu \neq 0}$ için (a): (b)



Şekil 5.3. $\zeta = -1,\ \ \lambda = -5,\ \ l = 2,\ \ k = 1,\ \ \mu = 1,\ \ C = 1,\ \ y = 1\ ,\ \ \alpha = 0.7$ alındığında $u_7(x, y, t)$ çözümünün üç boyutlu ve yoğunluk grafiği.

(a): (b):



Şekil 5.4. $\zeta = -1, \lambda = -5,\ \ l = 2,\ \ k = 1,\ \ \mu = -0.01,\ \ C = 1, y = 1\ ,\ \ \alpha = 1$ alındığında $u_7(x, y, t)$ çözümünün üç boyutlu ve yoğunluk grafiği.

$$u_9(x,y,t) = -\frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl(4\mu-\lambda^2)}} - \frac{2\mu\sqrt{-2\zeta kl(4\mu-\lambda^2)}}{kl(\lambda^2-4\mu)\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\,tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(lx-\frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\lambda^2-4\mu)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)+\lambda\right)}$$

(5.86)

Durum 2.

$$a_0 = \frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}}, \quad a_1 = -\frac{\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}}{kl(\lambda^2-4\mu)}, \quad h = -\frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\lambda^2-4\mu)}$$

***i*.** $\boldsymbol{\lambda^2-4\mu>0\ ve\ \mu\neq 0}$ için

$$u_{10}(x,y,t) = \frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}} + \frac{2\mu\sqrt{-2\zeta kl(\lambda^2-4\mu)}}{kl(\lambda^2-4\mu)\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu}\,tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(lx-\frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\lambda^2-4\mu)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)+\lambda\right)}.$$

(5.87)

***ii*.** $\boldsymbol{\lambda^2-4\mu>0,\ \mu=0\ ve\ \lambda\neq 0}$ için

$$u_{11}(x,y,t) = \frac{\zeta\lambda}{\sqrt{-2\zeta kl\lambda^2}} - \frac{\sqrt{-2\zeta kl\lambda^2}}{kl\lambda\left(cosh\left(\lambda\left(lx-\frac{2\zeta}{l\lambda^2(k^2-l^2)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)+sinh\left(\lambda\left(lx-\frac{2\zeta}{l\lambda^2(k^2-l^2)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)-1\right)}.$$

(5.88)

***iii*.** $\boldsymbol{\lambda^2-4\mu<0\ ve\ \mu\neq 0}$ için

$$u_{12}(x,y,t) = \frac{\zeta\lambda}{\sqrt{2\zeta kl(4\mu-\lambda^2)}} + \frac{2\mu\sqrt{2\zeta kl(4\mu-\lambda^2)}}{kl(\lambda^2-4\mu)\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}\,tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(lx-\frac{2\zeta}{l(k^2-l^2)(\lambda^2-4\mu)}y-k\frac{t^\alpha}{\alpha}+C\right)\right)+\lambda\right)}$$

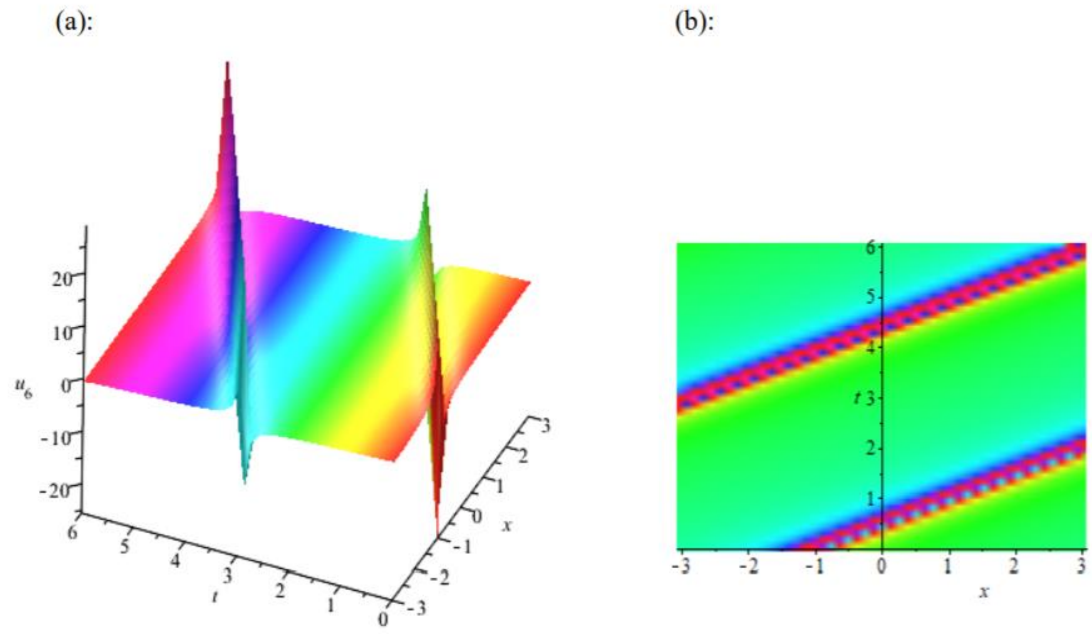
(5.89)

5.4. Uzay-Zaman Kesir Türevli mBBM Denklemi

Uzay-zaman kesir türevli mBBM denklemini (Ege; Mısırlı,2014),

$$D_t^{\alpha}u + D_x^{\alpha}u - vu^2 D_x^{\alpha}u + D_x^{3\alpha}u = 0, \qquad (5.90)$$

şeklinde ele alarak (G’/G) açılım yöntemi ve (G’/G,1/G) açılım yöntemi ile tam çözümlerini arayalım. k ve c sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,



Şekil 5.5. $\zeta = 0.2,\ \lambda = -1,\ l = 0.5,\ k = 1,\ \mu = 0.9,\ C = 0.8,\ y = 1\ ,\ \alpha = 1$ alındığında $u_{12}(x, y, t)$ çözümünün üç boyutlu ve yoğunluk grafiği.

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = k\frac{x^{\alpha}}{\alpha} - c\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \qquad (5.91)$$

eş formlu dalga dönüşümüyle (5.90) denklemi ξ_0 integral sabiti olmak üzere,

$$(c+k)U - vk\frac{U^3}{3} + k^3U'' + \xi_0 = 0 \qquad (5.92)$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür.

5.4.1. (G'/G) açılım yöntemine göre çözümler

Homojen dengelenme kuralına göre (5.92) denkleminin dengelenme sayısı 1 bulunur ve (5.92) denkleminin çözümleri,

$$G''(\xi)+\lambda G'(\xi)+\mu G(\xi)=0 \tag{5.93}$$

olmak üzere,

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G}\right), a_1\neq 0 \tag{5.94}$$

şeklinde aranır. (5.93) denklemini (5.92) denkleminde yazıp, (G'/G) ye göre oluşan denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle aşağıdaki açılım elde edilir:

$$U(\xi)=\pm\frac{3k\lambda}{\sqrt{6v}}\pm k\sqrt{\frac{6}{v}}\left(\frac{G'}{G}\right). \tag{5.95}$$

Bu açılımdan mBBM denkleminin üç durumda çözümleri,

$$\xi=k\frac{x^{\alpha}}{\alpha}-\frac{(k^3\lambda^2-2k)t^{\alpha}}{2\alpha}, \tag{5.96}$$

olmak üzere şöyle oluşur:

i. $\boldsymbol{\lambda^2-4\mu>0}$ için

$$U_{1,2}(\xi)=\pm\frac{k}{2}\sqrt{\frac{6\lambda^2-24\mu}{v}}\left(\frac{C_1\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi+C_2\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{C_1\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi+C_2\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}\right). \tag{5.97}$$

ii. $\boldsymbol{\lambda^2-4\mu<0}$ için

$$U_{3,4}(\xi)=\pm\frac{k}{2}\sqrt{\frac{24\mu-6\lambda^2}{v}}\left(\frac{-C_1\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi+C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi+C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}\right). \quad (5.98)$$

iii. $\boldsymbol{\lambda^2-4\mu=0}$ için

$$U_{5,6}(\xi)=\pm k\sqrt{\frac{6}{v}}\frac{C_2}{C_1+C_2}. \quad (5.99)$$

5.4.2. (G’/G,1/G) açılım yöntemine göre çözümler

Homojen dengelenme kuralına göre (5.92) denkleminin dengelenme sayısı 1 bulunur ve (5.92) denkleminin çözümleri,

$$u(\xi)=a_0+a_1\phi+b_1\psi \quad (5.100)$$

şeklinde olur.

$$G''(\xi)+\lambda G(\xi)=\mu \quad (5.101)$$

ve

$$\phi=\frac{G'}{G},\qquad \psi=\frac{1}{G} \quad (5.102)$$

beraber düşünüldüğünde,

$$\phi'=-\phi^2+\mu\psi-\lambda,\ \ \psi'=-\phi\psi, \quad (5.103)$$

denklemi elde edilir. A_1 ve A_2 sabit sayılar olmak üzere (5.101) ikinci mertebeden lineer diferensiyel denkleminin üç farklı genel çözümü vardır:

$\lambda<0$ için hiperbolik çözüm,

$$G(\xi) = A_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\xi\right) + \frac{\mu}{\lambda}, \tag{5.104}$$

olmak üzere,

$$\psi^2 = \frac{-\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}(\phi^2 - 1\mu\psi + \lambda), \qquad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \,. \tag{5.105}$$

$\lambda > 0$ için trigonometrik çözüm,

$$G(\xi) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + \frac{\mu}{\lambda}, \tag{5.106}$$

olmak üzere,

$$\psi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2\sigma + \mu^2}(\phi^2 - 1\mu\psi + \lambda), \qquad \sigma = A_1^2 + A_2^2. \tag{5.107}$$

$\lambda = 0$ için rasyonel çözüm,

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2, \tag{5.108}$$

olmak üzere,

$$\psi^2 = \frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2}(\phi^2 - 2\mu\psi). \tag{5.109}$$

(5.103), (5.105), (5.107), (5.109) denklemleri beraber düşünülerek, (5.100) denklemi (5.92) denkleminde yazılır. a_0, a_1, b_1, k, c, σ, μ, ξ_0 ve λ katsayılarına bağlı bir denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümler:

$$\xi = k\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{k(2 + k^2\lambda)t^\alpha}{2\alpha}, \qquad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \tag{5.110}$$

olmak üzere,

$$u(\xi)=\sqrt{\frac{3}{2v}}\frac{k\left(A_1\cosh\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)\sqrt{-\lambda}+A_2\sinh\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)\sqrt{-\lambda}\right)}{A_1\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+A_2\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}}$$
$$+\frac{\sqrt{-\frac{3\lambda^2\sigma+3\mu^2}{2v\lambda}}k}{A_1\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+A_2\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}}. \tag{5.111}$$

ve

$$\xi=k\frac{x^\alpha}{\alpha}-\frac{k(2+k^2\lambda)t^\alpha}{2\alpha},\qquad \sigma=A_1^2+A_2^2 \tag{5.112}$$

olmak üzere,

$$u(\xi)=\sqrt{\frac{3}{2v}}\frac{k\left(A_1\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)\sqrt{-\lambda}+A_2\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)\sqrt{-\lambda}\right)}{A_1\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+A_2\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}}$$
$$+\frac{\sqrt{-\frac{3\lambda^2\sigma+3\mu^2}{2v\lambda}}k}{A_1\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+A_2\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}}. \tag{5.113}$$

ve

$$\xi=k\frac{x^\alpha}{\alpha}-k\frac{t^\alpha}{\alpha}, \tag{5.114}$$

olmak üzere,

$$u(\xi)=\sqrt{\frac{3}{2v}}\frac{k(\mu\xi+A_1)}{\frac{\mu\xi^2}{2}+A_1\xi+A_2}+\frac{\sqrt{-\frac{-3A_1^2+6\mu A_2}{2v}}k}{\frac{\mu\xi^2}{2}+A_1\xi+A_2}. \tag{5.115}$$

şeklinde bulunur.

5.5. Zaman Kesir Türevli Lineer Olmayan Modifiye Kawahara Denklemi

Zaman kesir türevli lineer olmayan modifiye Kawahara denklemi (Atangana,2014),

$$D_t^{\alpha}u + u^2u_x + pu_{xx} + qu_{xxx} = 0 \tag{5.116}$$

şeklindedir. (5.100) denkleminde, k ve c sıfırdan farklı sabitler ve ξ_0 integral sabiti olmak üzere,

$$u(x,t) = U(\xi), \qquad \xi = kx - c\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \tag{5.117}$$

eş formlu dalga dönüşümü yapılarak ,

$$-cU + k\frac{U^3}{3} + pk^2U' + qk^3U'' + \xi_0 = 0 \tag{5.118}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir.

5.5.1. (G'/G) açılım yöntemine göre çözümler

Homojen dengelenme kuralına göre (5.118) denkleminin dengelenme sayısı 1 bulunur ve (5.118) denkleminin çözümleri,

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \tag{5.119}$$

olmak üzere,

$$U(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right), a_1 \neq 0 \tag{5.120}$$

şeklinde olur. (5.120) denklemini (5.118) denkleminde yazıp, (G'/G) ye göre oluşan denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle aşağıdaki açılım elde edilir:

$$U(\xi) = \pm\frac{p-3qk\lambda}{\sqrt{-6q}} \pm k\sqrt{-6q}\left(\frac{G'}{G}\right). \tag{5.121}$$

Bu açılımdan kesir türevli lineer olmayan Kawahara denkleminin üç durumda çözümleri,

$$\xi = kx - \frac{(12q^2k^3\mu - kp^2 - 3q^2k^3\lambda^2)t^\alpha}{6q\alpha}, \tag{5.122}$$

olmak üzere şöyle oluşur:

i. $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\mu > 0}$ için

$$U_{1,2}(\xi) = \pm\frac{p}{\sqrt{-6q}} \pm \frac{k\sqrt{24\mu q - 6q\lambda^2}}{2}\left(\frac{C_1\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi + C_2\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{C_1\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi + C_2\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}\right). \tag{5.123}$$

ii. $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\mu < 0}$ için

$$U_{3,4}(\xi) = \pm\frac{p}{\sqrt{-6q}} \pm \frac{k\sqrt{6q\lambda^2 - 24\mu q}}{2}\left(\frac{-C_1\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi + C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi + C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}\right). \tag{5.124}$$

iii. $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\mu = 0}$ için

$$U_{5,6}(x,t) = \pm\frac{p}{\sqrt{-6q}} \pm \frac{k\sqrt{-6q}C_2}{C_1 + C_2\left(kx + \frac{kp^2t^\alpha}{6q\alpha}\right)} \tag{5.125}$$

5.5.2. (G’/G,1/G) açılım yöntemine göre çözümler

Dengelenme sayısı 1 olduğundan, (5.92) denkleminin çözümleri,

$$u(\xi) = a_0 + a_1\phi + b_1\psi \tag{5.126}$$

şeklindedir. (5.103), (5.105), (5.107), (5.109) denklemleri beraber düşünülerek, (5.126) denklemi (5.118) denkleminde yazılır. $a_0,\ a_1,\ b_1,\ k,\ c,\ \sigma,\ \mu,\ \xi_0$ ve λ katsayılarına bağlı bir denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümler:

$$\xi = kx - \frac{k(3a_0^2\mu^2 + 3\lambda^2\sigma a_0^2 + b_1^2\lambda^2)t^\alpha}{3(\lambda^2\sigma + \mu^2)\alpha}, \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \tag{5.127}$$

olmak üzere,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{\sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda^2\sigma+\mu^2}}\, b_1\left(A_1\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)\sqrt{-\lambda} + A_2\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right)\sqrt{-\lambda}\right)}{A_1\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right) + A_2\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda}}$$
$$+ \frac{b_1}{A_1\sinh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right) + A_2\cosh\left(\xi\sqrt{-\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda}}. \tag{5.128}$$

ve

$$\xi = kx - \frac{k(3a_0^2\mu^2 - 3\lambda^2\sigma a_0^2 + b_1^2\lambda^2)t^\alpha}{3(-\lambda^2\sigma + \mu^2)\alpha}, \quad \sigma = A_1^2 + A_2^2 \tag{5.129}$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{\sqrt{-\frac{\lambda}{-\lambda^2\sigma+\mu^2}}\, b_1\left(A_1\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)\sqrt{\lambda} + A_2\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right)\sqrt{\lambda}\right)}{A_1\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right) + A_2\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda}}$$
$$+ \frac{b_1}{A_1\sin\left(\xi\sqrt{\lambda}\right) + A_2\cos\left(\xi\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda}}. \tag{5.130}$$

ve

$$\xi = kx - \frac{a_0^2 k t^{\alpha}}{\alpha} \tag{5.131}$$

olmak üzere,

$$u(\xi) = \sqrt{\frac{3}{2v}} \frac{\sqrt{\frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2}}\, b_1(\mu\xi + A_1)}{\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2} + \frac{b_1}{\frac{\mu\xi^2}{2} + A_1\xi + A_2}. \tag{5.132}$$

formundadır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; birinci bölümde, kesir türevli diferensiyel denklemelerin kullanım alanları ve tezde ele alınan kesir türevli diferensiyel denklem tanımlarından bahsedilerek, tezde amaçlanan hedefler verilmiştir. İkinci bölümde, kısaca kesirli analizin tarihsel gelişimi ve lokal ve eş formlu kesir türev tanımlarından önce kullanılan tanımlar verilerek, kesir türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmanın kolay olmadığını gösteren örnekler verilmiş ve ayrıca kesir türevli diferensiyel denklem tanımı ve çeşitlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli analizde sıkça kullanılan ve kesir türevli denklemlerin çözümlerinde karşılaşılan çeşitli tanım ve özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, son zamanlarda yaygın kullanımı olan lokal ve eş formlu kesirli türev tanım ve özellikleri verilmiştir. Kesir türevli diferensiyel denklemlerle yapılan önceki çalışmaların çoğunda kesirsel dönüşüm kullanılmıştır, bu tez çalışmasında kesirsel dönüşümden daha kullanışlı ve uygulaması daha kolay olan lokal fraktal dalga dönüşümü ve eş formlu dalga dönüşümü verilerek örneklerle lineer olmayan denklemlerin, adi diferensiyel denkleme dönüştürülmesi gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde tam çözüm yöntemleri en basitten başlanarak, literatürde en çok kullanılan tam çözüm yöntemleri verilmiştir. Bu yöntemlerden; yardımcı denklem yöntemi, (G’/G)-açılım yöntemi, (G’/G, 1/G)-açılım yöntemi, genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi ve $\exp(-\phi)$ yöntemi bu tezde kullanılmıştır.

Beşinci bölümde; Fraktal Boussinesq denklemi lokal fraktal dönüşümü yapılarak, yardımcı denklem yöntemiyle yeni tam çözümlere ulaşılmıştır. Uzay-zaman kesir türevli mBBM denklemi hem lokal fraktal dönüşümü kullanılarak kesir türevli adi diferensiyel denkleme indirgenip yardımcı denklem yöntemiyle yeni çözümler elde edilmiş, hem de eş formlu dalga dönüşümüyle adi diferensıyel denkleme dönüştürülüp (G’/G)-açılım yöntemi ve (G’/G, 1/G)-açılım yöntemleri ile yeni tam çözümler elde edilmiştir. (2+1) zaman kesir türevli Zomeron denklemi ise eş formlu dalga dönüşümü yardımıyla adi diferensiyel denkleme dönüştürüldükten sonra, yardımcı denklem yöntemi, genelleştirilmiş Kudryashov ve $\exp(-\phi)$ yöntemleri kullanılarak yeni tam çözümler elde edilmiştir. Son olarak zaman kesir türevli lineer olmayan modifiye Kawahara denkleminin, eş formlu dalga dönüşümü kullanılarak, (G’/G)-açılım yöntemi ve (G’/G, 1/G)-açılım yöntemleri yardımıyla yeni tam çözümleri elde edilmiştir.

Kesir türevli diferensiyel denklemlerin tam çözüm yöntemleri bu tez çalışmasında verilenlerle sınırlı değildir. Başka yöntemlerle de bu denklemlerin tam çözümleri incelenebilir. Bulunan çözümler arasındaki farklar belirlenip sonuçlar tartışılabilir. Ayrıca lokal kesirli türev, lokal kesirli integral, eş formlu kesirli türev ve eş formlu kesirli integral üzerine daha geniş bir çalışma yapılarak bu tezde verilen teoremlerin dışında normal analizdeki diğer teorem ve dönüşümler incelenip yeni çalışmalar yapılabilir. Bu bağlamda, kesirli analiz ile ilgili çalışma yapacak akademisyenlere bu tez çalışması yol gösterici bir kaynak olacaktır.

Yeni kesirli türev tanımlarının (Lokal ve eş formlu) daha önceki tanımlara göre daha kullanışlı ve etkili olduğu ve aşağıda diğer tanımlara göre üstünlüklerini ve farklarını maddeler halinde şöyle verebiliriz [Kareem,2017; Abdeljawad, 2014]:

- Riemann-Livouille türevinde sabitin türevi sıfır değildir.
- Riemann-Livouille ve Caputo türevleri tamsayı mertebeli türevlerde olan çarpma, bölme, zincir kuralı gibi temel bazı kuralları sağlamaz.
- Eş formlu türevlerde çarpma, bölme, zincir kuralı gibi kurallar tamsayı mertebeli türevlerdeki gibi bulunur.
- Bazı fonksiyonların normal analizde belli bir noktada Taylor seri açılımları yok iken eşformlu kesir teorisinde vardır.
- Örneklerde de görüldüğü üzere eş formlu kesir türev sonuca ulaşmada daha kolay ve etkilidir. Bu yeni tanım ile normal türev gibi sonuca ulaşılabilmektedir. Riemann-Liouville veya Caputo tanımı ile aynı sonuca ulaşmak için Laplace dönüşümü veya kesir kuvvet seri açılımı kullanılmalıdır.
- Yeni tanıma göre $T_\alpha\left(\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$ olur ama klasik tanıma göre bu sonuca ulaşmak kolay değildir.

Bu tezde ele alınan lineer olmayan kesir türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri, denklemlerin bilinen çözümlerinden farklıdır. Ayrıca tezde ele alınan denklemlerle ilgili tam çözümlerden elde edilen çalışmalar ile bir adet uluslararası tam metin bildiri üretilmiş ve çeşitli uluslararası dergilerde yayımlanmak üzere makale formatında gönderilmiştir. Yayımlanan bir bildiri ve iki makale aşağıda verilmiştir.

M. Topsakal, Ö. Güner, A. Bekir, Ö. Ünsal, Exact solutions of some fractional differential equations by various expansion methods, International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016), Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 27 Mayıs 2016, Eskişehir-Türkiye.

M. Topsakal, Ö. Güner, A. Bekir, Ö. Ünsal, Exact solutions of some fractional differential equations by various expansion methods. Journal of Physics: Conference Series, 766(1), (2016) 012035, Doi: 10.1088/1742-6596/766/1/012035.

K, Hosseini, A. Korkmaz, A. Bekir. F. Samadani, A. Zabihi, M. Topsakal, New wave form solutions of nonlinear conformable time fractional Zoomeron equation in (2+1)-dimensions, Waves in Random and Complex Media, DOI: 10.1080/17455030.2019. 1579393.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abdeljawad, T., 2015, On conformable fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57–66

Abdeljawad , T., 2014, On conformable fractional calulus, 1402.6892vl [Math.DS].

Akbulut, A., Kaplan, M., 2018, Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative, Computers and Mathematics with Applications, 75, 876–882.

Aksoy, E., Cevikel, A.C., Bekir, A., 2016, Soliton solutions of (2+1)-dimensional time fractional Zoomeron equation, Optik-Int. J. Light Electron Opt., 127, 6933–6942.

Al-Tarawneh, S. A., 2016, Solving Fractional Differential Equations by Using Conformable Fractional Derivatives Definition, Zarqa University.

Atangana, A., Bildik, N., Noutchie, S.C.O., 2014, New Iteration Methods for Time-Fractional Modified Nonlinear Kawahara Equation, Abstract and Applied Analysis, 2014, 740248.

Bekir, A., 2008, Applications of the (G’/G)-expansion method for nonlinear evolution equations, 372, 19, 3400-3406

Bulut, H., Baskonus, H.M., Pandir, Y., 2013, The Modified Trial Equation Method forFractional Wave Equation and Time Fractional Generalized Burgers Equation, Abstract and Applied Analysis, 2013, 636802.

Calogero F., Degasperis , 1982, Spectral transform and solitons I, North Holland Publishing Company.

Caputo, M., 1967, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II, Geophys. J. Royal Astronom. Soc, 13, 529-539.

Chen, C., Jiang, Y.-L., 2018, Simplest Equation Method for some Time-Fractional Partial Differential Equations with Conformable Derivative, Computers and Mathematics with Applications, 75, 2978–2988.

Chen, W., Sun, H.G., 2009, Multiscale statistical model of fullydeveloped turbulence particle accelerations, Modern Physics Letters B, 23, 3, 449452.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Cresson, J., 2003, Scale calculus and the Schrdinger equation, Journal of Mathematical Physics, 44, 11, 49074938.

Cresson, J., 2005, Non-diferentiable variational principles, J. Math. Anal. Appl., 307, 1, 4864.

Cenesiz, Y., Kurt, A., 2015, The new Solution of Time Fractional Wave Equation with Conformable Fractional Derivative Definition, 7, 79-85.

Çenesiz, Y., Tasbozan, O., Kurt, A., 2017, Functional Variable Method for conformable fractional modified KdV-ZK equation and Maccari system, DOI 10.1515/tmj, 0010.

Demiray, S., Unsal, O., Bekir, A., 2014, New Exact Solutions for Boussinesq Type Equations by Using (G/G, 1/G) and (1/ G)-Expansion Methods, Acta Physica Polonica A, 125, 5, 1093-1098.

Ebaid, A., 2007, Exact solitary wave solutions for some nonlinear evolution equations via Exp-function method, Phys. Lett. A, 365, 3, 213-219.

Ege, S.M., Mısırlı, E., 2014, The modified Kudryashov method for solving some fractional-order nonlinear equations, Advances in Difference Equations, 2014, 135.

Elghareb, T., Elagan, S.K., Hamed, Y.S., Sayed, M., 2013, An Exact Solutions for the Generalized Fractional Kolmogrove-Petrovskii Piskunov Equation by Using the Generalized (G’/G)-expansion Method, Int. Journal of Basic and Applied Sciences, 13, 01, 19–22.

Exact and explicit solutions to nonlinear evolution equations using the division theorem _ Ismail Aslan Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 8134–8139.

Feng, Z.S., 2002, The first integral method to study the Burger-KdV equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, 35, 343.

Gepreel, K.A., Omran, S., 2012, Exact solutions for nonlinear partial fractional differential equations, Chin. Phys. B, 21, 11, 110204.

Guo, S., Mei, L., Li, Y., Sun, Y., 2012, The improved fractional sub-equation method and its applications to the spacetime fractional differential equations in uid mechanics, Physics Letters A, 376, 407411.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Güner, Ö., 2014, Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi.

Güner, Ö., Bekir, A., Bilgil, H., 2015, A note on exp-function method combined with complex transform method applied to fractional differential equations, Advances in Nonlinear Analysis, 4, 3, 201–208.

Güner Ö., Bekir A., 2016, Bright and dark soliton solutions for some non linear fractional differential equations, Chin.Phys.B, 25, 3, 030203.

He, J.H., Wu, X.H., 2006, Exp-function method for nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals, 30, 3, 700-708.

Hosseinia, K., Bekir, A., Ansari, R., 2017, New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method, Optik, 132, 203–209.

Islam, T., Akbar, M. A., Azad, A. K., 2018, Traveling wave solutions to some nonlinear fractional partial differential equations through the rational (G'/G)-expansion method, Journal of Ocean Engineering and Science, 3, 76–81.

Javeed, S., Saif, S., Waheed, A., Baleanu, D., 2018, Exact solutions of fractional mBBM equation and coupled system of fractional Boussinesq-Burgers, Results in Physics, 9, 1275–1281.

Jumarie, G., 2006, Modied Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results, Comput. Math. Appl., 51, 1367-1376.

Jumarie, G., 2009, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modied Riemann-Liouvillie derivative for nondifferentiable functions. Appl. Maths. Lett., 22, 378-385.

Kaplan, M., Bekir A., Özer, M. N., 2017, A simple technique for constructing exact solutions to nonlinear differential equations with conformable fractional derivative Opt Quant Electron, 49,266.

Kaplan, M., Bekir A., 2017, Construction of exact solutions to the space–time fractional differential equations via new approach, Optik, 132, 1–8.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kareem, A. M., 2017, Conformable Fractional Derivatives and It Is Applications for Solving Fractional Differential Equations, IOSR Journal of Mathematics, 13, 2, 81-87

Katugampola, U., 2014, A New Fractional Derivative With Classical Properties, Journal of The American Mathematical Society, S 0894-0347(XX)0000-0.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65–70.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo. J.J., 2006, Theory and Applications of Fractional Diferential Equations, Elsevier, Amsterdam.

Kolwankar, K.M., Gangal, A.D., 1996, Fractional diferentiability of nowhere diferentiable functions and dimensions, Chaos, 6, 505-513.

Küçük, G.D., 2014, Kesirli Mertebeden Kismi Diferansiyel Cebirsel Denklemlerin Farklı Metotlarla Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ling-Xiao, L., Er-Qiang, L., Ming-Liang, W., 2010, The (G’/G,1/G) -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, Appl. Math. J. Chinese Univ., 25, 4, 454-462.

Loverro, A., 2004, Fractional Calculus: History, Denation and Aplications for the Engineer, Depertment of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA.

Lu, B., 2012, The first integral method for some time fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 395, 684693.

Malfliet, W., 1992, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Am. J. Phys., 60, 650-654.

Miller, K.S., Ross, B., 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York.

Oldman, K.B., Spanier, J., 1974, The Fractional Calculus, Akademic Press, New York.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, California.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland.

Senthilvelan, M., 2001, On the extented applications of homogeneous balance method, Appl. Math. Comput., 123, 381-388.

Sirendaoreji, S. Jiong, 2003, Auxiliary Equation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations, Physics Letters A, 309, 387-396.

Sohail, A., Siddiqui, A.M., Iftikhar, M., 2017, Travelling wave solutions for fractional order KdV-like equations using G′/G-expansion method, Nonlinear Sci. Lett. A,.8, 2, 228-235.

Sun, H.G., Chen, W., 2009, Fractal derivative multi-scale model of uid particle transverse accelerations in fully developed turbulence, Science in China Series E: Technological Sciences, 52, 3, 680-683.

Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., F. Tascan, 2012, The first-integral method applied to the Eckhaus equation, Applied Mathematics Letters, 25, 5, 798-802.

Tariq, H., Akram, G., 2017, New approach for exact solutions of time fractional Cahn–Allen equation and time fractional Phi-4equation, PhysicaA4, 73, 352–362.

Taşcan, F., Bekir, A., 2009, Travelling wave solutions of the Cahn-Allen equation by using frst integral method, Appl. Math. Comput., 207, 279-282.

Usta, F., Sarıkaya, M. Z., 2017, Some Improvements of Conformable Fractional Integral Inequalities, International Journal of Analysis and Applications, 14, 2, 162-166

Wang, M., Li, X., Zhang, J., 2008, The (G’/G)-expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, Phys. Lett. A, 372, 4, 417-423.

Wazwaz, A.M., 2004, A Sine-Cosine method for handling nonlinear wave equations, Math. Comput. Model., 40, 499-508.

Wazwaz, A. M., 2004, The sine cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures, Applied Mathematics and Computation, 159, 2, 559576.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Wazwaz, A. M., 2004, The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 154, 713-723.

Wazwaz, A. M, 2007, The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fth-order KdV equations, Applied Mathematics and Computation, 184, 2, 1002-1014.

Wazwaz, A. M, 2007, The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Applied Mathematics and Computation, 187, 1131.

Yang, X.-J., Baleanu, D., Srivastava, H.M., 2016, Local Fractional Integral Transforms and their Applications, Academic Press (Elsevier Science Publishers), Amsterdam, Heidelberg, London, New York.

Yang, X.-J., Gao, F., Srivastava, H.M., 2017, Exact travelling wave solutions for the local fractional two-dimensional Burgers-type equations, Computers and Mathematics with Applications, 73, 203-210.

Zheng, B., 2012 , (G'/G)-expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics, Commun. Theor. Phys., 58, 623-630.

Zhang, S., 2007, Application of Exp-function method to a KdV equation with variable coefficients, Physics Letters A, 365, 5-6, 448-453.

Zhang, S., Tong, J-L, Wang, W., 2008, A generalized (G'/G)-expansion method for the mKdV equation with variable coe¢ cients, Physics Letters A, 372, 13, 22542257.

Zhang, S., Zong, Q-A., Liu, D., Gao, Q., 2010, A Generalized Exp-Function Method for Fractional Riccati Differential Equations, Communications in Fractional Calculus, 1, 1, 48-51.

Zhang, S., Zhang, H-Q., 2011, Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs, Physics Letters A, 375, 1069-1073.

Zhang Z.-Y., Zhong J., Dou S. S., Liu J., Peng D., Gao T., 2013, First Integral Method and Exact Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, Romanian Reports in Physics, 65, 4, 1155–1169.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zhao, D., Luo, M., 2017, General conformable fractional derivative and its physical interpretation, Calcolo, 54, 3, 903–917.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Muammer Topsakal
Uyruğu:	T.C.
Doğum Yeri-Tarihi:	Aydın-20.01.1974
Adresi:	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-BilgisayarBölümü, Meşelik Kampüsü, 26480, Odunpazarı, ESKİŞEHİR
E-posta Adresi:	mtpskl@yahoo.com
Eğitim Bilgileri:	**Doktora:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2015-2019)
	Yüksek Lisans: Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı (2012-2014)
	Lisans: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü (1992-1996)