Hirota Bilineer Metot ve Uygulamaları

Melike Kaplan Yalçın

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2018

Hirota Bilinear Method and Applications

Melike Kaplan Yalçın

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

September 2018

Hirota Bilineer Metot ve Uygulamaları

Melike Kaplan Yalçın

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

“Bu Tez, ESOGÜ BAP “2016-1179” no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir”

Eylül 2018

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Melike Kaplan Yalçın'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Hirota Bilineer Metot ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

İkinci Danışman **:** ---

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

Üye : Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

Üye : Doç. Dr. Yusuf Gürefe

Üye : Doç. Dr. Yusuf Pandır

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sait San

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Mehmet Naci Özer danışmanlığında hazırlamış olduğum “HirotaBilineer Metot ve Uygulamaları” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.26/09/2018

Melike Kaplan Yalçın

İmza

ÖZET

Uygulamalı matematik ve fizikte önemli bir yere sahip olan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin, özellikle soliter dalga ve soliton çözümleri içeren çoklu-soliton çözümlerininin elde edilmesi, denklemin modellediği sistemin nitel ve nicel yapısı hakkında bilgi vereceğinden büyük önem taşımaktadır.

Bu tez kapsamında, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu-soliton çözümlerini içeren çeşitli tipte çözümleri elde edilerek bu çözümlerin birbiriyle ve literatürde var olan çözümlerle karşılaştırılmalarına yer verilmiş ve bir sınıflandırma yapılmıştır. Bu amaçla Hirota bilineer metot, sadeleştirilmiş Hirota bilineer metot, Hirota bilineer denklemlere uygulanan lineer üst üste bindirme prensibi, çoklu üstel fonksiyon metodu ve genişletilmiş homojen denge metodu kullanılmıştır.

Hirota bilineer metot, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu-soliton çözümlerini elde etmede kullanılan pratik bir yöntemdir. Sadeleştirilmiş Hirota bilineer metot ise Hirota bilineer formlar kullanılmadan yardımcı fonksiyonun elde edilmesini sağlayan daha basit bir algoritma kullanmaktadır. Lineer üst üste bindirme prensibinin Hirota bilineer denklemlere uygulanabilirliği araştırılmış ve üstel hareketli dalgaların lineer kombinasyonlarından oluşan N-soliton çözümlerin özel bir alt sınıfı oluşturulmuştur. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin, genişletilmiş homojen denge metoduyla Auto-Bäcklund dönüşümleri bulunmuş ve bu dönüşümler yardımıyla üstel, rasyonel ve periyodik dalga çözümlerini içeren tam çözümler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hirota bilineer metot, sadeleştirilmiş Hirota bilineer metot, lineer üst üste bindirme prensibi, genişletilmiş homojen denge yöntemi, Auto- Bäcklund dönüşümü, soliter dalga, soliton.

SUMMARY

Nonlinear partial differential equations have a significant place in applied mathematics and physics to obtain multi-wave solutions, including solitary wave solutions and soliton solutions of these equations and they play a vital role in understanding various qualitative and quantitative features of nonlinear phenomena.

In this thesis, different types of solitary wave solutions consisting of multi-soliton solutions for various nonlinear partial differential equations were obtained and classifications were done by comparing the solutions with the existing ones in the literature and within each other. For this purpose, Hirota's bilinear method, simplified Hirota's bilinear method and linear superposition principle applying Hirota bilinear equations, multiple exp-function method and extended homogeneous balance method were used.

The Hirota's method is a practical method to construct multiple-soliton solutions of nonlinear partial differential equations. However, the simplified Hirota method uses a simplified algorithm to derive the auxiliary functions without using the bilinear forms. The applicability of the linear superposition principle for Hirota bilinear equations linear differential equations was studied and a particular sub-class of N-soliton solutions was formed by linear combinations of exponential traveling waves. The Auto-Bäcklund transformations for the nonlinear partial differential equations were found and then using these transformations the exact solutions including exponential, rational function, and periodic wave solutions for the mentioned equations were obtained.

Keywords: Hirota bilinear method, simplified Hirota bilinear method, linear superposition principle, extended homogeneous balance method, auto-Bäcklund transformation, solitary wave, soliton.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca, benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın danışman hocam Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER'e; tezin geliştirilmesi konusunda yardımlarını gördüğüm jüri üyelerime; her koşulda yanımda olan ve beni destekleyen sevgili eşim Ali YALÇIN'a ve aileme; doktora sürecimi "TÜBİTAK-BİDEB 2211/A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a; son olarak "2016-1179" no'lu proje çerçevesinde tez çalışmamı desteklemiş olan ESOGÜ BAP'a teşekkürlerimi sunarım.

Melike KAPLAN YALÇIN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vi
SUMMARY vii
TEŞEKKÜR viii
İÇİNDEKİLER ix
ŞEKİLLER DİZİNİ xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xiii
1. GİRİŞ VE AMAÇ 1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 4
3. TEMEL KAVRAMLAR 8
3.1. Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemler 8
3.2. Bir Fizik Terimi Olarak Dalga 8
3.3. Soliter Dalgalar ve Solitonlar 11
3.4. İntegrallenebilirlik Neden Önemlidir? 16
4. YÖNTEM 19
4.1. Hirota D-Operatörü 19
4.2. Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Bilineer Formu 22
4.3. Hirota Bilineer Metodun Uygulanması 24
4.4. Sadeleştirilmiş Hirota Bilineer Metot 29
4.5. Lineer Üst Üste Bindirme Prensibinin Hirota Bilineer Denklemlere Uygulanması 32
4.6. Çoklu Üstel Fonksiyon Metodu 35
5. BULGULAR VE TARTIŞMA 37
5.1. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Hirota Bilineer Formu 37
5.1.1. Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 37
5.1.2. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi 38
5.1.3. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi 39
5.1.4. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi 39
5.1.5. (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 40

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5.1.6. Bir (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 41
5.1.7. (3+1)-Boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 41
5.1.8. (3+1)-Boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 42
5.1.9. (3+1)-Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemi 42
5.1.10. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Sığ Su Denklemi 43
5.1.11.(3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi.......................................43
5.2.Hirota Bilineer Metodunun Kadomtsev-Petviashvili DenklemineUygulanması...44
5.3.Sadeleştirilmiş Hirota Bilineer Metodunun Uygulamaları......................................48
5.3.1. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi................................48
5.3.2. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi..50
5.3.3. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi 51
5.3.4. (3+1)-Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemi 53
5.3.5.(3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Sığ Su Denklemi 54
5.3.6. (3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi..56
5.3.7.(3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denkleminin Bazı Çoklu-Soliton Çözüm Kümeleri...58
5.4. Lineer Üst Üste Bindirme Prensibinin Hirota Bilineer Denklemlere Uygulamaları...64
5.4.1.Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 64
5.4.2. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi 66
5.4.3. (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 66
5.4.4. (3+1)-Boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 67
5.4.5. (3+1)-Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemi 68
5.4.6. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Sığ Su Denklemine Uygulanması 68
5.4.7. (3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemine Uygulanması................69
5.5. Çoklu Üstel Fonksiyon Metodunun Bazı Denklemlere Uygulamaları.....................71
5.5.1. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi 71
5.5.2. Genelleştirilmiş (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili Denklemi................74

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5.5.3. Genelleştirilmiş (3+1)-Boyutlu B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi 77
5.6. Auto-Bäcklund Dönüşümlerinin Bulunması 79
5.6.1. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denkleminin Auto-Bäcklund Dönüşümleri 79
5.6.2. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denkleminin Yeni Soliter Dalga Çözümleri....82
5.6.3. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denkleminin Auto-Bäcklund Dönüşümleri 85
5.6.4. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denkleminin Yeni Soliter Dalga Çözümleri 88
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 93
KAYNAKLAR DİZİNİ 96
ÖZGEÇMİŞ 108

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1. Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga.. 9
3.2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi....................................... 10
3.3. Dikleşen bir soliter dalga.. 14
3.4. Tepesinde ve tabanında soliter bir dalgaya yakınsama 14
5.1. $u_1(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü 89
5.2. $u_2(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü 90
5.3. $u_3(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü 91
5.4. $u_4(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü 92

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
D	Hirota D-operatörü

Kısaltmalar	**Açıklama**
KdV	Korteweg-de Vries
KP	Kadomtsev-Petviashvili
BLMP	Boiti-Leon-Manna-Pempinelli
CBS	Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff
BKP	B-tipi Kadomtsev-Petviashvili
JM	Jimbo-Miwa

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Mühendislik, fen ve uygulamalı bilimlerde karşılaşılan hemen hemen her olgu, fizik kuralları yardımıyla matematiksel modeller, adi veya kısmi diferensiyel denklemler ve bunlardan oluşan denklem sistemleri ile tanımlanır. Kısmi diferensiyel denklemler; akışkanlar dinamiği, plazma fiziği, katı hal fiziği, fiber optik, mekanik, biyoloji ve matematiksel finans gibi uygulamalı bilimlerdeki çeşitli lineer olmayan olayları ifade etmek için kullanılır. Bu denklemlerin çözüm uzayları sonsuz boyutludur ve çeşitli tipte çözümler içerir (Solin, 2006).

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi, denklemin modellediği fiziksel yapının mekanizması hakkında bilgi vereceğinden, hem teorik hem de uygulama açısından büyük önem taşır. Bu bağlamda, son yıllarda bu konu hakkında yürütülen çalışmalarla gerek analitik gerekse nümerik çözümleri elde etmek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Analitik yöntemlerden bazıları, ters saçılım yöntemi (Ablowitz ve Clarkson, 1991), Hirota bilineer metot (Hirota, 1971), Bäcklund dönüşümü (Hirota ve Satsuma, 1977), Cole-Hopf dönüşümü (Wazwaz, 2009), Darboux dönüşümü (Matveev, 1979), Painlevé yöntemi (Conte ve Musette, 1989), benzerlik indirgeme yöntemi (Fan, 2002), Wronskian tekniği (Ma ve You, 2005), Miura dönüşümü (Miura, 1978), homojen denge yöntemi (Fan ve Zhang, 1998), Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi (Liu vd., 2001), çoklu üstel fonksiyon yöntemi (Ma vd., 2010), lineer üst üste bindirme prensibi (Ma ve Fan, 2011), eşleme yöntemi (Peng, 2003), ilk integral yöntemi (Liu, 2012), Kudryashov yöntemi (Pandir vd. 2013), trial denklem yöntemi (Tandogan vd. 2013), modifiye basit denklem yöntemi (Zayed, 2011) ve sine-Gordon açılım yöntemidir (Hosseini, 2017).

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmak her zaman mümkün değildir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilir. Ancak yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümünün bulunması için belirli bir yöntem yoktur. Bu nedenle bu denklemleri sağlayan çözümler "tam çözümler" olarak adlandırılır. Tam çözüm yöntemlerinin bir çoğu, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin lineer olmayan adi diferensiyel denklemlere hareketli dalga dönüşümü uygulanması yoluyla indirgenmesine dayanır. Daha sonra, belirlenmiş olan bir diferensiyel denklemin genel çözümünden yola çıkılarak, hareketli dalga çözümleri bulunur.

Solitonlar, hareketli dalga çözümleri arasından en önemli olanlardır. Çoklu-soliton çözümlerin, özellikle iki-soliton çözümlerin varlığı, bilgi teknolojisi açısından büyük önem taşır. Bu çözümler, iletilen sinyallerin her iki yönde de bozulmadan, eş zamanlı ilerleyişini mümkün kılar. Solitonlar arasındaki lineer olmayan etkileşim elastiktir. Fakat lineer üst üste bindirme prensibi solitonlar için geçerli değildir. Bilineer denklemler lineer denklemlere çok yakındır ve bu denklemlere benzer özelliklere sahip olmaları beklenir. Örneğin, lineer üst üste bindirme prensibi, Hirota bilineer denklemlere uygulanabilir (Ma ve Fan, 2011).

Hirota bilineer metot, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu-soliton çözümlerini elde etmede kullanılan önemli bir metottur. Ele alınan denklemi, Hirota bilineer forma dönüştüren bir dönüşüme dayanır. Böyle bir dönüşümün bulunması kolay değildir. Bazen bağımlı bazen de bağımsız yeni bir değişkene ihtiyaç duyulur.

Genişletilmiş homojen denge yöntemi ile Auto-Bäcklund dönüşümleri bulunurken, denklemin bir çözümü ile yardımcı bir fonksiyonun kombinasyonu formunda oluşturulan yeni çözümün, denklemde yerine yazılması ve benzerlik indirgemelerinin bulunması esas alınır. Elde edilen Auto-Bäcklund dönüşümleri kullanılarak, ilgili denklemin hareketli dalga çözümleri elde edilebilir. Homojen denge prensibinin temeli, denklemdeki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin dengelenmesi üzerine kuruludur (Wang vd., 1996).

Bu tez çalışmasında, Hirota bilineer metot ve bu metodun sadeleştirilmiş hali ve tanıtılmış ve ardından lineer üst üste bindirme prensibinin Hirota bilineer denklemlere uygulanışı ve çoklu üstel fonksiyon metodu hakkında tanımlar verilmiştir. Tezin uygulama aşamasında, Hirota bilineer metot ve sadeleştirilmiş hali çeşitli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmış, ayrıca lineer üst üste bindirme prensibinin Hirota bilineer denklemlere uygulanışından hareketle bazı denklemlerin $N-$dalga çözümleri oluşturulmuştur. Sonraki bölümde çoklu üstel fonksiyon metodu kullanılarak bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin $N-$dalga çözümleri bulunmuştur. Çalışmanın son aşamasında ise, genişletilmiş homojen denge yöntemi ile lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin Auto-Bäcklund dönüşümleri bulunmuş ve bu dönüşümler yardımıyla hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, öncelikle soliter dalga ve solitonlar, Hirota bilineer metot, Hereman ve Nuseir tarafından geliştirilen sadeleştirilmiş Hirota bilineer metot, genişletilmiş homojen denge yöntemi ile lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin Auto-Bäcklund dönüşümlerinin bulunması ve çoklu üstel fonksiyon metodu ile ilgili literatürdeki çalışmalardan bahsedilecektir. Sonrasında tezde incelenen konu hakkında bilgi alt yapısı oluşturmak için bazı temel kavramlar açıklanacaktır.

Soliter dalgalar, ilk olarak İskoçyalı mühendis John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlenmiştir (Russell, 1838; Russell, 1844). Russell, Edinburg-Glasgow kanalında dalganın yapısında herhangi bir değişiklik olmaksızın yavaş bir şekilde hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. Soliter dalgalarının özellikleri hakkında Russell aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır:

(a) Soliter dalgalar, $d\sec h^2(k(x-vt))$ formundadır. Burada k dalga sayısını, d dalganın genliğini, v dalganın hızını, t zamanı, x ise dalganın yayılım yönündeki uzay koordinatını gösterir.

(b) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız soliter dalga üretir.

(c) Normal dalgaların aksine soliter dalgalar asla birleşmezler. Bu nedenle küçük genlikli bir soliter dalga ile büyük genlikli bir soliter dalga çarpıştıktan sonra, bu iki soliter dalga birbirlerinden ayrılarak ve şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederken, soliter dalgalar kararlıdır ve daha uzun mesafede yol alabilirler.

(d) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve bir kanalda hareket eden d genliğindeki bir soliter dalga, $v=\sqrt{g(d+h)}$ hızına sahiptir. Başka bir deyişle dalganın hızı; genliğine, suyun yüksekliğine ve derinliğine bağlıdır.

Önceki yıllarda sonuçlar deneysel olarak kalmış ve denklem çözümleri için soliter dalgalar elde edilememiştir. Bununla birlikte bir denklemin çözümünü veren soliter dalga problemleri araştırma konusu olmuştur. Soliter dalgaların varlığı ilk olarak, Dierderik Johannes Korteweg ve Gustav de Vries (Korteweg ve Vries, 1895) tarafından oluşturulan, şu an KdV denklemi olarak bilinen, sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem ile doğrulanmıştır.

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial \eta^2}{\partial \xi}\right), \quad \sigma = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{(\rho g)}. \tag{2.1}$$

Burada, η, h, denge seviyesinin üzerindeki yüzey yüksekliğini, α sıvının düzgün hareketi ile ilişkili küçük bir keyfi sabiti, g yerçekimi sabitini, T yüzey gerilimini ve ρ yoğunluğu gösterir. (2.1) denklemi,

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}\tau, \quad x = -\sigma^{-\frac{1}{2}\xi}, \quad u = \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{3}\alpha, \tag{2.2}$$

dönüşümü kullanılarak, bilinen

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{2.3}$$

formuna dönüştürülür. Böylece soliter dalgaların varlığı Korteweg de Vries tarafından kanıtlanmıştır. Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki soliter dalganın çarpışma sonrası şekillerinin değişip değişmediği konusu netlik kazanmamıştır. Bu konu Kruskal ve Zabusky tarafından incelenmiş (Zabusky ve Kruskal, 1965), KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, soliter dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara soliton adı verilmiştir.

KdV denkleminin ilk tam çözümü, Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından 1967 yılında bulunmuştur (Gardner vd., 1967). Bu bilim insanları, lineer olmayan problemi Sturm-Liouville özdeğer problemine indirgemiş ve daha sonra KdV denkleminin başlangıç-değer problemini çözmek için ters saçılım dönüşümü olarak bilinen yeni bir yöntem geliştirmiştirler. Ancak, bu yöntem etkili bir yöntem olmasına karşın, lineer olmayan bir oluşum denklemi için sonsuz sayıda bağımsız korunum kanunun varlığına bağlı olarak uygun bir ters saçılım dönüşümü bulmak hiç de kolay değildir. 1968 yılında, Lax bu sonuçları genelleştirerek Lax çiftleri kavramını ortaya atmıştır (Lax, 1968).

1971 yılında Hirota, ağır işlem yüküne gerek kalmadan, integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu-soliton çözümlerinin kolaylıkla bulunabileceğini göstermiştir. Bu yöntem, incelenecek olan kısmi diferensiyel denklemin bağımlı değişken dönüşümü kullanılarak, bilineer forma dönüştürülmesi esasına dayanır. Diğer yandan, bu tipte birçok denklemin hareketli dalga çözümü, kısmi diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme indirgeyen basit bir yerine koyma işlemiyle elde edilebilir. Hirota bilineer yöntem bu iki ayrı uca dayanır. Yöntemi uygularken ilk olarak denkleme uygun bir değişken dönüşümü yapılmalıdır. Bu dönüşümü tespit etmek her denklem için çok da kolay olmayıp bazen birden fazla bağımsız değişken kullanmak gerekebilir. Daha sonra denklemi bilineer forma dönüştürebilmek için, Hirota $D-$türev operatörü olarak adlandırılan özel bir türev operatörü tanımlanır ve bu sayede denklem, $D-$operatörlerinin polinomları olarak yazılabilir. Son olarak pertürbasyon tekniği kulanılarak denklemin soliton çözümleri elde edilir (Hirota, 1971). Sonraki yıllarda Hirota çalışmalarına devam ederek, çeşitli denklemlere Hirota bilineer metodu uygulamıştır (Hirota, 1972 a; Hirota, 1972 b; Hirota, 1973 a; Hirota, 1973 b; Hirota, 1973 c; Hirota, 1974)

Hirota bilineer metot, integrallenebilen sistemler için önemli bir rol oynar. Bilineer forma sahip çoğu denklem için bir ve iki soliton çözümler genelde var olup, ele alınan denklem için, üç soliton çözüm bulunabilirse, bu durumda bu denklemin integrallenebilirliğinden bahsedilebilir. Ayrıca dikkat edilmesi gereken bir başka husus da tamamen integrallenebilen (tam integrallenebilen), lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklem ya da fark denkleminin, mutlaka bilineer formunun olduğudur. Ancak tersi doğru olmayabilir. Yani bilineer formda yazılıp, integrallenemeyen bazı denklemler de mevcuttur.

Lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemin lineerleştirilmesi, denklemin tam çözümlerinin bulunmasını oldukça kolaylaştırır. Lineerleştirme esasına dayanan bu yöntemde, incelenen denklemin bilineer formunun mutlaka biliniyor olması gerekir. Yani bu yöntem tek bir bilineer denklem veya birleştirilmiş lineer denklem sistemleri formunda yazılabilen herhangi bir kısmi diferensiyel denkleme uygulanabilir. Lineer olmayan oluşum denklemlerinin yanısıra fark denklemleri ve integro-diferensiyel denklemlere de uygulanabilen Hirota bilineer metot, soliton çözümlerin, üstel fonksiyonlar cinsinden yazılabileceği esasına dayanır.

Hirota bilineer metot kullanışlı bir yöntem olmasına rağmen, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bilineer formlarını elde etmek kolay değildir. Hereman ve

Nuseir tarafından 1997 yılında yayınlanan bir makalede (Hereman ve Nuseir, 1997) sadeleştirilmiş Hirota metodu ile bilineer formlara gerek duyulmaksızın denklemlerin çoklu-soliton çözümleri ve hareketli dalga çözümleri elde edilebilmektedir. Bu yöntemde, bilineer formu bilinmeyen ya da var olmayan denklemlerin çözümlerinde, yardımcı denklemleri oluşturan bir algoritma tanıtılmıştır. Hereman ve Nuseir, bu çalışmalarında sadeleştirilmiş metodun integrallenebilir olmayan kısmi diferensiyel denklemlere de uygulanabileceğini konveksiyon terimi içeren ve içermeyen Fisher denklemini çözerek göstermişlerdir. Fakat burada her iki denklem için de elde edilen çözümler hareketli dalga çözümü olup soliton çözüm değildir.

Wang, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmede etkili bir yöntem olan homojen denge yöntemini bulmuştur (Wang, 1996). Homojen denge yönteminin temeli, denklemdeki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin dengelenmesi üzerine kuruludur. Birçok tam çözüm yöntemi de homojen denge esasına dayanır (Senthilvelan, 2001). Fan ve Zhang da daha sonra, genişletilmiş homojen denge yöntemini geliştirmişlerdir. Böylelikle lineer olmayan oluşum denklemlerinin Auto-Bäcklund dönüşümlerini elde etmek için yol göstermişlerdir (Fan ve Zhang, 1988). Auto-Bäcklund dönüşümleri bulunurken; denklemin bir çözümü ve yardımcı bir fonksiyonun kombinasyonu şeklinde oluşturulan çözümün denklemde yerine yazılması ve benzerlik indirgemelerinin bulunması esas alınır. Auto-Bäcklund dönüşümlerinin lineer olmayan iteratif (yinelemeli) işleyiş biçimi sayesinde problem, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin çözülmesinden, açık cebirsel bir hesaplamaya dönüşür. Elde edilen Auto-Bäcklund dönüşümleri ile de denklemin soliter dalga ve tam çözümleri elde edilebilir (Li vd., 2002).

2010 yılında Hirota'nın pertürbasyon metodunun kısmen bir genelleştirmesi olarak tanıtılan (Ma vd., 2010) çoklu üstel fonksiyon metodu, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin geniş kapsamlı çoklu-dalga çözümlerini bulmak için kullanılan yeni bir yöntemdir. Bu yöntemin kullanılmasıyla Darboux dönüşümleri (Ma, 1997) ve sadeleştirilmiş Hirota metodu (Hereman ve Nuseir, 1997) ile elde edilen çözümleri içeren özel çoklu-dalga çözümleri elde edilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin ilerleyen konularına altyapı oluşturması açısından bazı temel kavramlar hakkında bilgi verilecektir.

3.1. Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemler

u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, ...) = 0, \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ... \tag{3.2}$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel hali $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $u = u(x)$ olmak üzere,

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, ...) = 0, \tag{3.3}$$

biçimindedir. Burada $x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenleri; u ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ u_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j},\ i, j = 1, 2, ..., n, \tag{3.4}$$

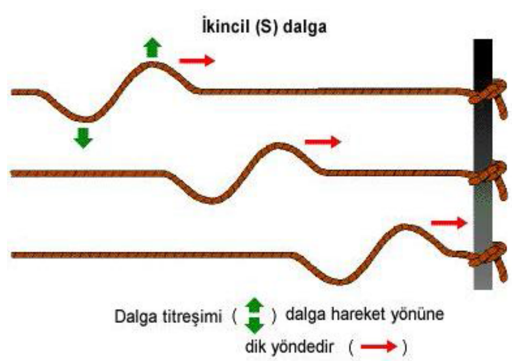
dir.

3.2. Bir Fizik Terimi Olarak Dalga

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özellikleri gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar.

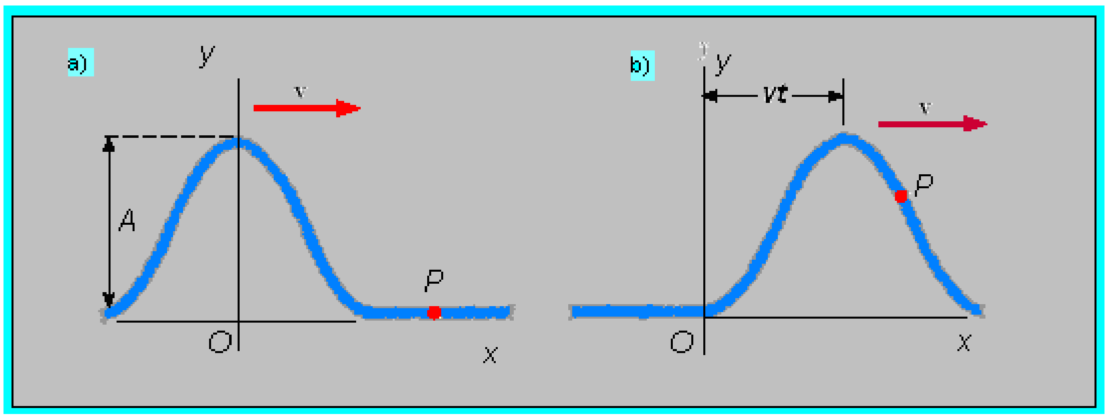
Bir müzik aletinden çıkan nağmeler, deprem esnasında yeryüzündeki hareketler ve bu hareketlenme ile okyanuslarda meydana gelen büyük su dalgaları (tsunami), yüksek ve alçak basıncın meydana getirdiği rüzgarların etki alanında bulunan tüm elastik maddelerin hareketi, radyo, televizyon, cep telefonları gibi elektronik cihazların doğasında bulunan elektromanyetik dalgalar, insanlar ve diğer canlılar ile iletişim kurmak için var olan ses dalgaları gibi içinde bulunduğumuz dünyada yaşantımızı etkileyen ve yaşamımıza yön veren birçok fiziksel olay, dalga (soliter dalga) kavramı ile açıklanır. Bu nedenle dalga kavramı, bilim dünyasında çok geniş bir ilgi yelpazesine sahiptir.

Dalga kavramı oldukça soyut bir kavram olarak karşımıza çıkar. Elastik bir cisim üzerine bırakılan enerji, elastik cisim üzerinde bir hareketlenme meydana getirir. Bu hareketlilik elastik cismin hareketiymiş gibi görünmesine rağmen elastik cisim üzerine bırakılan enerjinin taşınışıdır. Bu harekete dalga ismi verilir. Örneğin, durgun suda yüzen bir cisme belli frekanslarla dalga oluşturulursa, yüzen cisim yukarı aşağı doğru salınım hareketi yapar. Cismin konumunda hiçbir değişiklik olmaz. Bu da ortamın hareket etmediğini ve en önemlisi dalganın enerjiyi taşıdığını gösterir. Dalganın enerji taşıma özelliğinden yararlanılarak büyük okyanuslarda dalga türbinleri ile elektrik enerjisi elde edilmiştir.



Şekil 3.1 Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga

Dalga hareketini göstermenin bir yolu Şekil 3.1 de görüldüğü gibi; gerilmiş ve bir ucu bir yere sabitlenmiş uzun bir ipin diğer ucunu ani olarak hareket ettirmektir. Bu hareket ipe bir enerji kazandıracaktır. Bu enerji sayesinde tek bir dalga atması meydana gelir ve bu dalga atması belli bir hızla sağa doğru ilerler. Dalga atması ip boyunca ilerlerken sarsılan ipin her parçası dalga hareketine dik doğrultuda basit harmonik hareket yapar. Ortamın sarsılan parçacıkları, dalga hızına dik olarak hareket ettiğinde, bu tip ilerleyen dalgaya enine dalga denir. Dalgaların başka bir tipine ise boyuna dalgalar denir. Bu tip dalgalarda ortam parçacıkları, dalganın hareket doğrultusuna paralel bir doğrultuda yer değiştirme yapar.



Şekil 3.2 Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi

(a) $t = 0$ da atmanın ifadesi

(b) t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir.

Şekil 3.2 de görüldüğü gibi gerilmiş bir ipin üzerinde sabit v hızı ile sağa doğru ilerleyen bir dalga göz önüne alındığında, atma x ekseni boyunca hareket eder ve ipin enine yer değiştirmesi y koordinatı ile ölçülür. Şekil 3.2 (a) da $t = 0$ anında atmanın konumu ve şekli gösterilmektedir. Bu anda, atmanın şekli ne olursa olsun $y = f(x)$ ifadesi ile temsil edilir. Maksimum yer değiştirme $A = y_m$, dalganın genliği adını alır. Dalga atmasının hızı v olduğundan; $t = 0$ anından herhangi bir t zamanına kadar sağa doğru vt uzunluğunda yol alır (Şekil 3.2(b)).

Dalga atmasının şekli zamanla değişmiyorsa, orijini O da olan durgun bir referans sisteminde ölçülen yer değiştirme, bütün zamanlar için y ile gösterilir. Yani $y = f(x - vt)$ olur. Benzer şekilde, dalga atması sola doğru ilerler ise, yer değiştirme $y = f(x + vt)$ şeklinde yazılır. Bazen dalga fonksiyonu adı verilen y yer değiştirmesi x ve t gibi iki değişkene bağlıdır. Bu nedenle çoğu kez $y(x,t)$ şeklinde yazılır (Serway ve Jewett, 2004).

Bir kısmi diferensiyel denklemde bulunan bağımlı u değişkeninin fiziksel bir niceliğe karşılık geldiği bilinir. Bu nedenle u bağımlı değişkeninin özelliklerini veya üretimini çalışmak oldukça önemlidir. Bu durum, dalga denklemlerinin analitik olarak çözülmesi için yöntemlerin çalışılmasına yol açmıştır. Bu çalışmanın temel amacı hareketli dalga çözümlerini bulmaktır.

Dalgalar durağan ve hareketli dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Durağan dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiriyle zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. Hareketli (travelling) dalgalar ise, bir noktadan bir noktaya madde taşınması olmadan enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Tezin bu kısmında, hareketli dalgalardan soliter dalgalar ve solitonlar hakkında bilgi verilecektir:

3.3. Soliter Dalga ve Solitonlar

Solitonlar aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir:

(1) Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.

(2) Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, soliter dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelir.

Büyük genlikli bir soliter dalga, küçük genlikli bir soliter dalgaya göre daha hızlı hareket eder. Bir soliter dalganın hızı genliği ile orantılı olduğundan, soliter dalgalar normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulak her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında soliter dalgalar kullanılsaydı, yüksek sesin daha önce duyulması gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalarla yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağı ele alındığında sıcaklık kademeli olarak hissedilirken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırına el yaklaştırıldığında, sıcaklık hemen hissedilir ve el geriye çekilir. Dolayısıyla sinirler bir tür soliter dalga oluşturarak beyne bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletir.

Soliton çözümler hem analitik hem de sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerinde çalışmalar hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen soliter dalga soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanında kullanılmaktadır. Solitonlar uzun mesafelerde yol alabildiği için, teorik olarak fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde kayıp olmaksızın büyük miktarda bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Solitonlar, çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller fiber optikler boyunca her iki yönde iletilebilmektedir. Böylece sinyaller, gideceği yere orjinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir. Yakın gelecekte ilerleyen çalışmalar neticesinde radar ve iletişim sektörü gibi birçok alanda solitonların kullanılması beklenmektedir. Olayların tam olarak anlaşılabilmesi için teorik bilgisayar ve deneysel bilim arasındaki sinerji, yeni araştırmaları beraberinde getirecektir. Böylelikle elektromanyetik dalgaları otomatik olarak yineleyen aletlere ihtiyaç kalmayacaktır (Irk, 2007).

$u(x,t)$ dalganın genliğini v_0 ise hızını göstermek üzere, dalga hareketini veren en basit denklem

$$u_{tt} = v_0^2 u_{xx}, \tag{3.5}$$

biçimindedir. Bu denklemin genel d'Alembert çözümü, f ve g sırasıyla sağa ve sola hareket eden dalgaları göstermek üzere,

$$u(x,t) = f(x - v_0 t) + g(x + v_0 t), \tag{3.6}$$

şeklindedir. Bir boyutlu dalga denklemi,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0, \tag{3.7}$$

biçiminde çarpanlara ayrılabildiğinden,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0, \tag{3.8}$$

olarak daha basit formda ele alınabilir. Bu ifade de sağa doğru ilerleyen

$$u(x,t) = f(x - v_0 t), \tag{3.9}$$

dalga çözümüne sahiptir. u nun periyodik olduğu varsayılırsa, en temel çözüm

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - kx)}, \tag{3.10}$$

düzlemsel dalga çözümüdür. Bu çözümün (3.5) basit dalga denkleminde yerine konulmasıyla k dalga sayısı ve ω açısal hızı arasındaki bağıntı $\omega = v_0 k$ olarak elde edilir. Bu ifadeye dispersiyon (yayılma) bağıntısı denir. Burada elde edilen dispersiyon bağıntısı lineerdir. Bu şekilde lineer dispersiyon bağıntısı tarafından üretilen dalgalara dispersive olmayan dalgalar denir. Bu dalgaların şekli dalga hareketi boyunca değişmez.

(3.5) denklemine, dispersiyon terimi olan üçüncü mertebeden uzay değişkenine göre türevli terimin eklenmesiyle

$$u_{tt} + v_0^2 u_{xx} + u_{xxx} = 0, \tag{3.11}$$

lineer dispersiyon denklemi elde edilir. (3.11) denkleminin (3.10) düzlemsel dalga çözümünün olduğunu varsayalım. Bu durumda dispersiyon bağıntısı, k dalga sayısına göre lineer olmayan

$$\omega = v_0 k - k^3, \tag{3.12}$$

denklemi ile verilir. Böylelikle dalga

$$v_f(k) = \frac{\omega}{k} = v_0 - k^2, \tag{3.13}$$

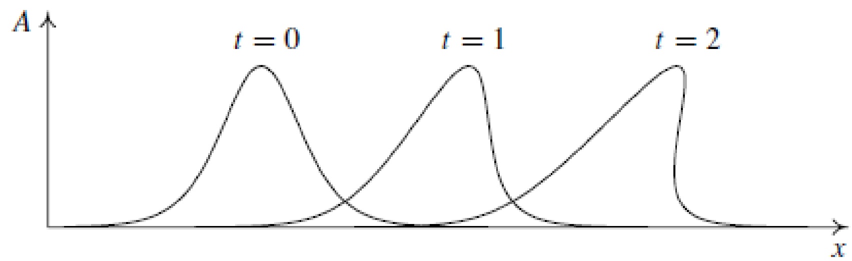
hızıyla hareket eder. Hız k değişkenine göre değiştiğinden, dalga hareket ettikçe yayılır. Bu da lineer dispersive dalgaların orijinal şekillerini korumadıklarını gösterir.

$$u_t + v(u)u_x = 0, \tag{3.14}$$

lineer olmayan ve dispersive olmayan dalga denklemi ele alındığında bu denklem $v(u)$ hızı u genliğine bağlı olarak değişen bir denklemdir. Bu denkleminin çözümü

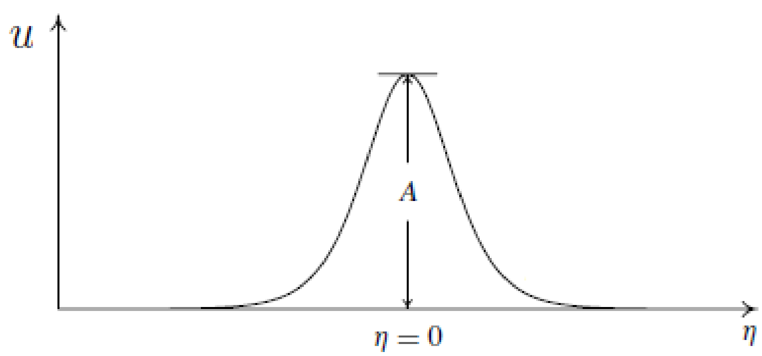
$$u(x,t) = f(x - v(u)t),$$

şeklindedir. Burada $v = v(u)$ artan bir fonksiyon ise bu formül, dalganın genliği arttıkça daha hızlı hareket edeceğini gösterir. Bu da dalganın tepe noktasının tabanından daha yüksek hızda hareket ettiği, giderek dikleştiği ve en sonunda kırıldığı anlamına gelir. Bu sebeple, lineer olmayan ve dispersive olmayan bir dalga giderek yükselir ve soliton gibi değişmeden kalmaz. (Bkz. Şekil 3.3)



Şekil 3.3 Dikleşen bir soliter dalga. $t = 0$ da simetrik olan bir dalga dikleşir ve kırılır. Çünkü dalganın hızı genliğine bağlıdır.

Şimdi, lineer olmama ve dispersive olmanın dalga üzerindeki etkisini araştırmak için standart formdaki KdV denklemi için, Şekil 3.4 de gösterilen, A maksimum genliği civarında simetrik olan soliter dalga varsayılsın.



Şekil 3.4 Tepesinde ve tabanında soliter bir dalgaya yakınsama

u fonksiyonuna $\eta = 0$ komşuluğunda yakınsak olan, η nin kuadratik bir fonksiyonu olan ve u_{xxx} dispersive terimi sıfır olan u_{tepe} fonksiyonu ile yaklaşılabilir. Bu durumda u_{tepe} fonksiyonu, $v(u) = 6u$ olmak üzere, (3.14) denklemini sağlar. Yani,

$$u_t + 6uu_x = 0. \tag{3.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan, dalganın tabanında lineer olmayan terim ihmal edilebilir. Çünkü u çok küçüktür ve bu yüzden u_{taban} ile gösterilen, dalganın tabanındaki çözüme yakınsama

$$u_t + u_{xxx} = 0, \tag{3.16}$$

lineer diferensiyel denklemini sağlar. Buradan faz hızı

$$v_f(k) = \frac{\omega}{k} = -k^2, \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Böylelikle, dalganın tepe noktasındaki ve tabanındaki hızı aynı olmaz. Fakat bu durum yukarıdaki dalganın soliter dalga olması varsayımı ile çelişir. Bu çelişki KdV denkleminin lineer olmamasından kaynaklanır ve dalgaların lineer üst üste bindirme prensibi geçerliliğini kaybetmiş olur. Bu yüzden, dalganın tabanındaki çözümler, üstel olarak azalan fonksiyonlar cinsinden ifade edilmelidir:

$$u(x,t) = e^{\pm\eta}, \eta = px - \Omega t. \tag{3.18}$$

Ayrıca (3.16) denkleminden

$$\Omega = p^3, \tag{3.19}$$

lineer olmayan dispersiyon bağıntısı elde edilir. Tepe ve taban noktalarındaki v_{tepe} ve v_{taban} hızları

$$v_{tepe} = 6A, v_{taban} = \frac{\Omega}{p} = p^2, \tag{3.20}$$

olarak bulunur. Böylelikle, hızını değiştirmeden hareket eden bir soliter dalga elde etmek için, asgari şart bu iki hızın aynı olmasıdır. Buradan hareketle

$$6A = p^2, \tag{3.21}$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Sonuç olarak, soliton çözümlere sahip olan bir dalga denkleminin lineer olmadığı ve dispersive olduğu söylenebilir.

Şimdi KdV denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için, $u = u(x,t)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $|x| \to \infty$ iken $u(x,t)$ türevleriyle birlikte sıfıra yakınsak olmak üzere, $f(x-\gamma t)$ formunda bir çözüm aranacaktır. Bu çözümün KdV denkleminde yerine yazılıp, $2f'$ ile çarpılıp integrali alınırsa,

$$(f')^2 = \gamma f^2 + 2f^3, \tag{3.22}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $z = x - \gamma t$ olmak üzere, (3.22) denklemi

$$f(z) = \frac{\gamma}{2} \sec h^2 \frac{\sqrt{\gamma}}{2} z, \tag{3.23}$$

açık çözümüne sahiptir. Buradan KdV denkleminin bir-soliton çözümü

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{\gamma}{2}\sec h^2 \tfrac{\sqrt{\gamma}}{2}(x-\gamma t), \\ &= 2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+e^{\sqrt{\gamma}(x-\gamma t)}), \end{aligned} \tag{3.24}$$

olarak elde edilir (Ablowitz ve Clarkson, 1991).

3.4. İntegrallenebilirlik Neden Önemlidir?

En genel anlamda, integrallenebilirlik terimi oluşumun zamanla düzenliliği anlamına gelir. İntegrallenebilirliğin varlığı ve önemi birçok korunumlu niceliğin varlığından kaynaklanır. Dinamik sistemlerin çoğu, enerji ya da toplam momentum gibi bazı korunumlu niceliklere sahipken integrallenebilir sistemler bunlardan daha fazlasına sahiptir. Fakat iki sistem arasındaki korunumlu nicelik miktarının farkı ele alınan integrallenebilir sisteme bağlı olarak değişir. Örneğin, N koordinatlı ve N momentumlu bir Hamiltoniyen sistem, N tane korumumlu niceliğe sahip, analitik ve Poisson braket altında karşılıklı değişmeli ise Liouville integrallenebilirdir denir. Prensipte sistem daha sonra kareye tamamlama ile çözülebilir.

Böyle çok sayıda korunumlu niceliğin varlığı sistem için özel bir şarttır ve bu yüzden integrallenebilir sistemler nadirdir. 1880 lerde Poincare, bütün dinamik sistemler uzayında integrallenebilir sistemlerin ölçüsünün 0 olduğunu söylemiştir. İntegrallenebilir sistemler ile ilgili böyle bir karmaşık karşılaştırma reel sayılar ile asal sayıların karşılaştırılmasına benzer ve asal sayılar az rastlanır olmalarına rağmen kimse onların önemini sorgulamaz.

İntegrallenebilir sistemler bu kadar az rastlanır olmalarına rağmen, neden onlarla ilgileniriz?

1. Düzenlilik iyi bir özelliktir. Korunumlu niceliklerin varlığı uzun zaman öngörülebilirlik anlamına gelmektedir, yani araştırılacak birşey vardır. Solitonun var olması, fiber optik gibi ticari amaçlı uygulamaları olan çeşitli alanlarda korunumlu dalgaların var olduğu anlamına gelir. Güneş sistemindeki gezegen hareketi tam olarak integrallenebilir değildir, fakat beşeri zaman çizelgelerindeki dinamiği göz önüne alındığında yeterince yakındır. Bu yüzden yıldız navigasyonu için tam takvimler ve tablolar oluşturmak mümkündür.

2. İntegrallenebilirlik baskın bir özelliktir. Tam olarak, matematiksel integrallenebilirlik nadirdir. Fakat integrallenebilir bir sistem yakınındaki sistemlerin dinamiğini bastırır. Örneğin, solitonlar deneysel olarak araştırılmıştır. Doğal sistemler asla tam olarak integrallenebilir değildir. Çünkü tam olarak integrallenebilen bir sistem her zaman çeşitli idealleştirmelerle sonuçlanır. Yine de soliton-tipi davranış sığ kanallardaki yüzey dalgaları, okyanuslardaki iç dalgalar, fiber optiklerdeki ışık titreşimleri gibi birçok doğal sistemde gözlemlenmiştir. Bu yüzden integrallenebilir sistemler pertürbatif açılımlar için yeni başlangıç noktaları sağlar. Fakat birçok integrallenebilen sisteme ihtiyaç olduğundan başlangıç noktası çok uzak değildir. Örneğin, uzayda serbest hareket integrallenebilirdir fakat bu güneş sistemindeki dinamiğin tanımı için iyi bir başlangıç noktası değildir. Bu amaçla hem integrallenebilir olan hem de sorudaki probleme daha yakın olan Kepler'in iki cisimli sistemi kullanılabilir.

3. Bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler geniş uygulama alanına sahip olmakla birlikte aynı zamanda hem de integrallenebilir olması nasıl açıklanabilir? Bu soru F. Calogero tarafından sorulmuştur. Calogero, oldukça genel bir kısmi diferensiyel denklemle başlayarak bu sistem için zayıfça yayılan bir dalga üretmiş ve integrallenebilir lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen bir davranış ortaya çıkmıştır. Bu durum yukarıda tartışılan baskınlık özelliğinin farklı bir ortaya çıkış biçimidir.

4. İntegrallenebilir sistemler ilgi çekici matematiksel özellikler içerir. Bunlardan ilki, integrallenebilirlik bir ölçüde çözülebilirlik içerdiğinden sistem detaylı bir şekilde analitik olarak çalışılabilir. Bu çalışmalarda birçok ilginç matematiksel yapı keşfedilmiştir (Hietarinta, 2005).

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin integrallenebilirliğini test etmek için Painlevé analizi ya da Painlevé testi kullanılabilir. Son yıllarda, Painlevé özelliği hakkında çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Conte, 1999).

Bir modelin integrallenebilir olduğunu söylediğimizde, hangi özel anlam ya da anlamlar altında integrallenebilir olduğu da belirtilmelidir. Örneğin bir model, Painlevé özelliğini taşıyorsa, "Painlevé integrallenebilirdir" denir. Eğer bir modelin Lax çifti varsa ve ardından da ters saçılım dönüşümü yaklaşımıyla çözülebiliyorsa, bu durumda bu model Lax ya da ters saçılım dönüşümü integrallenebilirdir. Bazı özel anlamlar altında integrallenebilir olan bir model, diğer anlamlarda integrallenebilir olmayabilir. Örneğin, bazı Lax integrallenebilir modeller Painlevé integrallenebilir olmayabilir (Calogero ve Nucci, 1991). Diğer yandan, birçok bilim insanı Painlevé özelliğinin integrallenebilirlik için yeterli şart olduğunu (Weiss, 1992) ve Lax çiftlerinin Painlevé analizinden bulunabileceğini söylemiştir (Musette ve Conte, 1991). Çeşitli Painlevé integrallenebilir modelin Lax çiftleri henüz bulunamamıştır. Diğer bir deyişle, Painlevé özelliğine sahip olmanın Lax ve/veya ters saçılım dönüşümü integrallenebiliği için yeterli şart olup olmadığı hala bilinmemektedir (Zhang vd., 2012).

4. YÖNTEM

Bu bölümde tezde kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilecektir.

4.1. Hirota D-Operatörü

Tanım 4.1. S diferensiyellenebilir fonksiyonlar uzayı ve $M\ \epsilon\mathbb{N}$ olsun. Bu durumda Hirota $D-$operatör, $D: S \times S \to S$, $n_1, ...n_M$ negatif olmayan keyfi tam sayılar ve $x_1..., x_M$ bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&[D_{x_1}^{m_1} D_{x_2}^{m_2} ... D_{x_M}^{m_M}] f(x_1, ...x_M) \cdot g(x_1', ..., x_M') \\
&= (\partial_{x_1} - \partial_{x_1'})^{n_1} ... (\partial_{x_M} - \partial_{x_M'})^{n_M} f(x_1, ...x_M) g(x_1', ..., x_M') \mid_{x_1'=x_1,...,x_M=x_M'} \\
&= \partial_{x_1'}^{n_1} ... \partial_{x_M'}^{n_M} f(x_1 + x_1', ...x_M + x_M')_{x_1'=x_1,...,x_M=x_M'=0},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır (Hirota, 1974).

Hirota $D-$operatörün uygulanışına yönelik aşağıda bazı kurallar verilmiştir:

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x, \tag{4.2}$$

$$D_x D_t f \cdot g = f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt}, \tag{4.3}$$

$$D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2 f_x g_x + f g_{xx} \tag{4.4}$$

$$D_x^3 f \cdot g = f_{xxx} g - 3 f_{xx} g_x + 3 f_x g_{xx} - f g_{xxx} \tag{4.5}$$

$$...$$

$$D_x^n f \cdot g = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{\partial^{(n-k)} f}{\partial x^{(n-k)}} \frac{\partial^k g}{\partial x^k}. \tag{4.6}$$

$D-$operatörün türev terimlerinin neredeyse çarpımın türeviyle aynı olduğunu belirtmek gerekir. Tek fark, ikinci fonksiyonda tek mertebeden türevlere sahip olan terimlerin önündeki işaretin negatif olmasıdır.

Tanım 4.1. den $D-$operatörün aşağıdaki özellikleri türetilebilir.

$$D_x^n D_t^m f \cdot g = D_t^m D_x^n f \cdot g = D_x^{n-1} D_t^m D_x f \cdot g, \tag{4.7}$$

$$D_x^n f \cdot 1 = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \tag{4.8}$$

$$D_x^n f \cdot g = (-1)^n D_x^n g \cdot f, \tag{4.9}$$

$$n \text{ tek ise} \qquad D_x^n f \cdot f = 0, \tag{4.10}$$

$$D_x(D_x f \cdot g) \cdot h + D_x(D_x h \cdot f) \cdot g + D_x(D_x g \cdot h) \cdot f = 0. \tag{4.11}$$

Not 4.1. $D_x f \cdot g$ nin $[f, g]$ biçiminde yazılmasıyla (4.11) ifadesi Jacobi özdeşliği olarak

$$[[f, g], h] + [[h, f], g] + [[g, h], f] = 0, \tag{4.12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu da $D-$operatörü ile Lie cebiri arasındaki ilişkiyi veren bir ifadedir. $D-$operatörünün terimleri cinsinden yazılan bilineer denklemler ve Lie cebiri arasındaki önemli ilişki Sato, Date, Kashiwara, Jimbo ve Miwa tarafından bulunmuştur (Kashiwara vd., 1981; Kashiwara vd., 1982; Michio ve Tetuji, 1983).

$a(x)$ ve $b(x)$, x değişkenine göre her mertebeden diferensiyellenebilen iki keyfi fonksiyon ve δ bir parametre olsun. Bu durumda, δ ya göre $a(x+\delta)$ ve $b(x-\delta)$ Taylor açılımlarından

$$\begin{aligned} a(x+\delta)b(x-\delta) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(x)\delta^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^{(j)}(x)(-\delta)^j}{j!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \frac{a^{(n-i)}(x)b^{(n-i)}(x)\delta^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} D_x^n a(x) \cdot b(x) \\ &= e^{\delta D_x} a(x) \cdot b(x), \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece,

$$e^{\delta D_x} a(x) \cdot b(x) = e^{\delta \partial_{x'}} a(x+x') \cdot b(x-x') \,|_{x'=0}, \tag{4.14}$$

$$e^{\delta D_x} a(x) \cdot b(x) = a(x+\delta)b(x-\delta). \tag{4.15}$$

üstel özdeşlikleri kullanılarak $D-$operatörü tanımlanabilir. Üstel bir fonksiyon için, p_1 ve p_2 reel sayılar olmak üzere,

$$D_x^n e^{p_1 x} \cdot e^{p_2 x} = (p_1 - p_2)^n e^{(p_1+p_2)x}, \tag{4.16}$$

bağıntısı geçerlidir. Normal türev operatörünün uygulanışı

$$\partial_x^n (e^{p_1 x} e^{p_2 x}) = (p_1 + p_2)^n e^{(p_1+p_2)x}, \tag{4.17}$$

iken, Hirota türev operatörünün uygulanışı

$$D_x^n e^{p_1 x} \cdot e^{p_2 x} = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right) \partial_x^n (e^{p_1 x} e^{p_2 x}), \tag{4.18}$$

biçimindedir.

P, $D_{x_1}, ..., D_{x_M}$, in bir polinomu olsun. $i = 1, 2$ için $\eta_i = p_{i_1} x_1 + ... + p_{i_M} x_M$ olmak üzere,

$$P(D_{x_1}, ..., D_{x_M}) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = \frac{P(p_{11} - p_{21}, ..., p_{1M} - p_{2M})}{P(p_{11} + p_{21}, ..., p_{1M} + p_{2M})} P(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_M}) e^{\eta_1 + \eta_2}, \tag{4.19}$$

özelliği verilebilir. Bu formül

$$P(D_{x_1}, ..., D_{x_M}) f \cdot f = 0, \tag{4.20}$$

bilineer denklemlerin iki soliton çözümlerinde oldukça kullanışlıdır.

Şimdi iki diferensiyel denklem arasındaki Bäcklund dönüşümlerini bulmada kullanışlı olan "değişim formülü" adı verilen önemli bir özdeşlik verilecektir.

Önerme 4.1. a, b, c ve d, x in diferensiyellenebilir fonksiyonları ve α, β ve γ keyfi parametreler olsun. Bu durumda aşağıdaki özdeşlik geçerlidir:

$$e^{\alpha D_x} \left[e^{\beta D_x} a \cdot b\right] \cdot \left[e^{\gamma D_x} c \cdot d\right] = e^{(\frac{\beta - \gamma}{2}) D_x} \left[e^{(\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}) D_x} a \cdot d\right] \cdot \left[e^{(-\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}) D_x} c \cdot b\right]. \tag{4.21}$$

Özellikle

$$\begin{aligned} e^{\delta D_x} ab \cdot cd &= (e^{\delta D_x} a \cdot c)(e^{\delta D_x} b \cdot d), \\ &= (e^{\delta D_x} a \cdot d)(e^{\delta D_x} b \cdot c). \end{aligned} \tag{4.22}$$

özdeşliği geçerlidir. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafında δ nın aynı dereceden terimlerinin eşitlenmesiyle aşağıdaki formüller elde edilebilir (Hirota, 1974; Hirota, 2004):

$$D_x ab \cdot c = a_x bc + a D_x b \cdot c, \tag{4.23}$$

$$D_x^2 ab \cdot cd = bd D_x^2 a \cdot c + 2(D_x a \cdot c)(D_x b \cdot d) + ac D_x^2 b \cdot d, \tag{4.24}$$

$$D_x^3 ac \cdot bc = c^2 D_x^3 a \cdot c + 3(D_x a \cdot b)(D_x c \cdot c), \tag{4.25}$$

$$D_x^n e^{p(x)} a(x) \cdot e^{p(x)} b(x) = e^{2px} D_x^n a(x) \cdot b(x), \ p \text{ sabit bir parametre.} \tag{4.26}$$

4.2. Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Bilineer Formu

Bu kısımda, Hirota bilineer metodunun ilk adımı olan, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemleri bilineer formlara dönüştüren değişik tipteki dönüşümler incelenecektir. Örnek olarak KdV denkleminin bilineer formu elde edilecektir.

Tanım 4.2.1. n, r pozitif tam sayılar ve $P_{ij}^{m}(D)$ lineer operatör olmak üzere,

$$\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}^{m}(D) f_i \cdot f_j = 0 \quad m = 1, ..., r, \tag{4.27}$$

formunda yazılabilen lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleme "bilineer forma sahiptir" denir. Burada f_k lar yeni bağımlı değişkenler ve D Hirota operatörlerin bir vektörüdür.

Ayrıca, $D-$operatörünün önceki bölümde verilen özellikleri kullanılarak aşağıdaki önerme kolaylıkla ispatlanabilir:

Önerme 4.2.1 P, D Hirota operatörünün bir polinomu, f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) P(D) f \cdot g = P(-D) g \cdot f, \tag{4.28}$$

$$b) P(D) f \cdot 1 = P(\partial) f, \tag{4.29}$$

$c)$ a sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $P(D)a \cdot a = 0$ ise $P(0, ..., 0) = 0$ dır. (4.30)

Uyarı 4.2.1

$$\sum_{i=1}^{M} m_i \text{ tek sayı ise } \left[D_{x_1}^{m_1} D_{x_2}^{m_2} ... D_{x_M}^{m_M} \right] f \cdot f = 0, \tag{4.31}$$

olduğundan P polinomu çift olarak ele alınabilir.

Burada, kısmi diferensiyel denklemleri bilineer denklemlere dönüştüren dönüşümleri tanımlamak için standart formdaki KdV denklemi ele alınacaktır.

İlk dönüşüm

$$u = \frac{a}{b}, \tag{4.32}$$

rasyonel dönüşümüdür. (4.22) eşitliğinden

$$e^{\delta \frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{e^{\delta D_x} a \cdot b}{\cosh(\delta D_x) b \cdot b}, \tag{4.33}$$

özdeşliği elde edilebilir. (4.33) ifadesinin her iki tarafının δ parametresine göre açılıp, elde edilen ifadenin δ nın kuvvetlerine göre toplanmasıyla, $u = a/b$ nin türevlerini, $D-$operatörü cinsinden ifade eden

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{b} = \frac{D_x a \cdot b}{b^2}, \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{a}{b} = \frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2} - \frac{a}{b}\frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2}, \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{a}{b} = \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3\frac{D_x a \cdot b}{b^2}\frac{D_x a \cdot b}{b^2}, \tag{4.36}$$

$$\ldots$$

formülleri elde edilir.

$u = G/F$ seçilip yukarıdaki formülde yerine yazılmasıyla KdV denklemi

$$\frac{D_t G \cdot F}{F^2} + 6\frac{G}{F}\frac{D_x G \cdot F}{F^2} + \frac{D_x^3 G \cdot F}{F^2} - 3\frac{D_x G \cdot F}{F^2}\frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2} = 0, \tag{4.37}$$

biçiminde yazılabilir. Her iki taraf F^4 ile çarpılıp terimleri düzenlenirse

$$\left[\left(D_t + D_x^3\right) G \cdot F\right] F^2 + 3[D_x G \cdot F][2GF - D_x^2 F \cdot F] = 0, \tag{4.38}$$

bulunur. Böylelikle, keyfi bir λ fonksiyonunun tanımlanmasıyla, yukarıdaki denklem bilineer formda

$$(D_t + D_x^3) G \cdot F = 3\lambda D_x G \cdot F, \tag{4.39}$$

$$D_x^2 F \cdot F - 2GF = \lambda F^2. \tag{4.40}$$

iki denklem bulunur. Bir diğer dönüşüm de

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \tag{4.41}$$

logaritmik dönüşümüdür. Bu dönüşümle ilgili temel formül

$$2\cosh\left(\delta \frac{\partial}{\partial x}\right) \ln f(x) = \ln[\cosh(\delta D_x) f(x) \cdot f(x)], \tag{4.42}$$

olarak verilir. Yukarıdaki formülün δ parametresine göre açılıp, elde edilen ifadenin δ nın kuvvetlerine göre eşitlenmesiyle

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f = \frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}, \tag{4.43}$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ln f = \frac{D_x D_t f\cdot f}{f^2}, \tag{4.44}$$

$$2\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ln f = \frac{D_x^4 f\cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)^2, \tag{4.45}$$

$$\ldots$$

elde edilir. $u = \omega_x$ ve c integral sabiti olmak üzere, KdV denklemi bir kez integre edilirse

$$\omega_t + 3\omega_x^2 + \omega_{xxx} = c, \tag{4.46}$$

bulunur. Daha sonra (4.41) den

$$\omega = 2\ln f_x,\ \text{yani}\ (u = 2\ln(f)_{xx}), \tag{4.47}$$

bağımsız değişken dönüşümünün kullanılmasıyla ve yukarıdaki özdeşliklerden, KdV denklemi

$$\frac{D_x D_t f\cdot f}{f^2} + 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)^2 + \frac{D_x^4 f\cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)^2 = c, \tag{4.48}$$

haline gelir. Böylece KdV denkleminin bilineer formu

$$D_x(D_t + D_x^3)f\cdot f = cf^2, \tag{4.49}$$

olarak bulunur. Burada $D_t + D_x^3$ operatörü, KdV denkleminin $\partial_t + \partial_x^3$ lineer kısmına karşılık gelir (Hirota, 2004).

4.3. Hirota Bilineer Metodun Uygulanması

Hirota bilineer metodu (4.49) ile verilen bilineerleştirilmiş KdV denklemi için uygulayalım. KdV denkleminin bilineer formunda c integrasyon sabitinin sıfır alınmasıyla

$$D_x(D_t + D_x^3)f\cdot f = 0,$$

elde edilir. Soliton çözümleri bulabilmek için f fonksiyonunun

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\epsilon^n,$$

şeklinde küçük bir ϵ parametresine göre açılımının yapıldığı pertürbasyon metodu kullanılır. Genellikle bu metot uygulanırken parametrenin uygun bir sonlu mertebesinde açılım kesilir. Bu ifadenin elde edilen bilineer denklemde yerine yazılmasıyla bulunan sonucun ϵ nun kuvvetlerine göre düzenlenip herbirinin sıfıra eşitlenmesiyle

$$\epsilon : D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1) = 0,$$

$$\epsilon^2 : D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot 1 + f_1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2) = 0,$$

$$\epsilon^3 : D_x(D_t + D_x^3)(f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3) = 0,$$

$$\ldots$$

bulunur. Burada, ϵ' a karşılık gelen denklem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_1 = 0, \tag{4.50}$$

lineer diferensiyel denklemine denktir. Bu denklemin çözümü soliter bir dalga (bir-soliton) tanımlayan

$$f_1 = e^{\eta_1},$$

üstel fonksiyonudur. Burada η_1^0 sabit olmak üzere $\eta_1 = k_1 x + \omega_1 t + \eta_1^0$ dır ve dispersiyon bağıntısı $\omega_1(k_1) = -k_1^3$ olarak bulunur.

ϵ^2 nin katsayısı ele alındığında

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_2 = -D_x(D_t + D_x^3) f_1 \cdot f_1,$$

bulunur. $D-$operatörünün özellikleri göz önüne alındığında, (4.8) özelliği gereğince, denklemin sağ tarafı sıfır olduğundan $f_2 = 0$ seçilebilir. Bu durumda $f = 1 + \epsilon f_1$ şeklinde kesilebilir. ϵ parametresi de faz değişkeni olarak η_1^0 faz sabiti içerisinde alınabileceğinden, KdV denkleminin bilineerleştirilmiş halinin çözümü

$$f = 1 + e^{\eta_1},$$

biçiminde bulunur.

İki tekil soliton arasındaki ilişkiyi tanımlayan iki-soliton çözümü bulmak için (4.50) denkleminin çözümü f_1 için lineer üst üste bindirme prensibinin uygulanmasıyla,

$$f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \tag{4.51}$$

biçiminde aranmalıdır. Burada $i = 1, 2$ için η_i^0 sabit olmak üzere $\eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^0$ ve dispersiyon (dağılma) bağıntısı $i = 1, 2$ için $\omega_i(k_i) = -k_i^3$ şeklindedir.

Ayrıca (4.8) özelliğinden

$$D_x^m D_t^n e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = (k_1 - k_2)^m (\omega_1 - \omega_2)^n e^{\eta_1 + \eta_2}, \tag{4.52}$$

biçiminde bir sonuç çıkarmak mümkündür.

ϵ^2 nin katsayısından

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_2 = -D_x(D_t + D_x^3) f_1 \cdot f_1,$$

denkleminde (4.51) iki-soliton çözümünün yerine yazılmasıyla ve (4.52) özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) &= D_x(D_t + D_x^3)\left(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}\right) \cdot \left(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}\right), \\ &= 2D_x(D_t + D_x^3) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2}, \\ &= 2(k_1 - k_2)\left[\omega_1 - \omega_2 + (k_1 - k_2)^3\right] e^{\eta_1 + \eta_2}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

olduğundan

$$f_2 = a_{12} e^{\eta_1 + \eta_2},$$

dır. Burada (4.53) gereğince

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\tfrac{2(k_1 - k_2)\left[\omega_1 - \omega_2 + (k_1 - k_2)^3\right]}{2(k_1 + k_2)\left[\omega_1 + \omega_2 + (k_1 + k_2)^3\right]}, \\ &= \left(\tfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \end{aligned}$$

dır. ϵ^3 nin katsayısından elde edilen denklemde f_1 ve f_2 nin yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} 2\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial}{\partial t} + \tfrac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_3 &= -D_x(D_t + D_x^3)(+f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2, \\ &= -2k_2(\omega_2 + k_2^3) e^{2\eta_1 + \eta_2} - 2k_1(\omega_1 + k_1^3) e^{\eta_1 + 2\eta_2}, \end{aligned}$$

bulunur. Dispersiyon bağıntısından $i = 1, 2$ için $\omega_i(k_i) = -k_i^3$ olduğundan dolayı denklemin sağ tarafı sıfır olur. O halde aşikar çözüm olan $f_3 = 0$ seçilebilir.

ϵ^4 nin katsayısından elde edilen

$$\epsilon^4 : D_x(D_t + D_x^3)(f_4 \cdot 1 + f_3 \cdot f_1 + f_2 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4) = 0,$$

denkleminde $f_3 = 0$ ve

$$D_x(D_t + D_x^3) f_2 \cdot f_2 = 0,$$

olduğu kullanırsa, bu denklem

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_4 \cdot 1 + 1 \cdot f_4) = 0,$$

halini alır. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right) f_4 = 0,$$

olur. O halde aşikar çözüm olan $f_4 = 0$ seçilebilir. Elde edilen tüm bu sonuçlar f'nin pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa

$$f = 1 + \epsilon(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \epsilon^2 a_{12} e^{\eta_1+\eta_2},$$

elde edilir. Yine ϵ parametresi η_i^0 faz sabitlerinin içerisinde alınabileceğinden, KdV denkleminin bilineerleştirilmiş halinin çözümü

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + a_{12} e^{\eta_1+\eta_2},$$

iki-soliton çözümü şeklinde bulunur. Bu çözüm, pozitif yönde ilerleyen iki solitonu ifade eder. Uzun olan soliton bir süre sonra kısa olan solitondan daha hızlı bir şekilde ilerleyerek onu geçer ve çözüm farklı t zamanlarında incelendiğinde, dalgaların etkileşim sonrasında da şekillerini korudukları görülür. Buradaki a_{12} katsayısı ise iki solitonun etkileşimi sonrasındaki faz değişimini göstermektedir.

Genel olarak, P, $D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M}$ nın $P(0) = 0$ şartını sağlayan bir polinomu olmak üzere

$$P(D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M}) f \cdot f = 0, \tag{4.54}$$

formundaki bilineer denklemi için vektör notasyonlarını tanımlayalım:

$$\mathbf{D} = D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M},$$

$$x = x_1, x_2, ..., x_M,$$

$$\mathbf{k}_i = (k_{i1}, k_{i2}, ...k_{iM}),$$

olmak üzere (4.54) polinomu

$$P(\mathbf{D}) f \cdot f = 0, \tag{4.55}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre P polinomu ve iki soliton çözüm için, $\eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^0$ olmak üzere,

$$P(\mathbf{D})e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = \frac{P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)} P(\partial) e^{\eta_1 + \eta_2},$$

şeklinde genel bir sonuç çıkarılabilir. Burada

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}_1 + \mathbf{k_2} = (\omega_1 \pm \omega_2, k_1 + k_2, ...), \\ &\partial = (\partial_t, \partial_x, ...), \end{aligned}$$

dir. Lineer olmayan dispersiyon bağıntısı ise

$$P(\mathbf{k}_i) = 0, \;\; i = 1, 2,$$

ve a_{12} faz kayması

$$a_{12} = -\frac{P(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{P(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)},$$

şeklindedir. Benzer şekilde KdV denkleminin üç-soliton çözümü pertürbasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} \\ &\quad + a_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} + a_{13} e^{\eta_1 + \eta_3} + a_{23} e^{\eta_2 + \eta_3} \\ &\quad + a_{123} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}, \end{aligned} \tag{4.56}$$

biçiminde elde edilir. Burada $i, j = 1, 2, 3$ için $\eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^0$ ve lineer olmayan dispersiyon bağıntısı $\omega_i = -k_i^3$ şeklindedir. Ayrıca

$$a_{ij} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2,$$

olup (4.56) denklemindeki $a_{123} = a_{12} a_{13} a_{23}$ şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde devam edildiğinde, herhangi bir $N-$soliton için formülü oluşturmak için

$$a_{ij} = e^{A_{ij}} \qquad\qquad (i, j = 1, 2, 3, ...),$$

olmak üzere f açılımı

$$f = \sum e^{\sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i + \sum\limits_{i<j}^{N} A_{ij} \mu_i \mu_j}, \tag{4.57}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\sum$ sembolü $\mu_1 = 0, 1,\ \mu_2 = 0, 1, ... \mu_N = 0, 1$ için olası bütün kombinasyonlarının toplamını, $\sum\limits_{i<j}^{N}$ ise $\{1, 2, ..., N\}$ kümesinden seçilen tüm olası (i, j) ikilileri için $i < j$ şartını sağlayan toplamı ifade etmek için kullanılmaktadır.

(4.55) formunda yazılabilen denklemlere KdV-tipi bilineer denklemler denir. KdV-tipi bilineer denklemlerin belirleyici özelliği sadece bir tek f değişkenine sahip olmasıdır.

KDV-tipi bütün bilineer denklemler, f (4.57) formunda olmak üzere $N-$soliton çözüme sahiptir. Burada

$$\eta_i = \mathbf{k}_i x + \eta_i^0,\ \eta_i^0 \text{ sabit},$$

$$P(\mathbf{k}_i) = 0,$$

ve a_{ij} faz kayması

$$a_{ij} = e^{A_{ij}} = -\frac{P(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)}{P(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j)},$$

şeklinde olup

$$\sum P\left(\sum_{i=!}^{N} \rho_i \mathbf{k}_i\right) \prod_{i<j}^{N} P(\rho_i \mathbf{k}_i - (\rho_j \mathbf{k}_j)\rho_i \rho_j = 0,$$

şartının sağlanması gerekmektedir. Ayrıca, ilk $\sum\ \rho_1 = 0, 1, ..., \rho_N = 0, 1$ için olası bütün kombinasyonlarının toplamını gösterir. Bu şarta "Hirota şartı" denir (Hieranta, 1987; Hieranta, 1988; Hirota ve Satsuma, 1976; Hirota, 1980).

4.4. Sadeleştirilmiş Hirota Bilineer Metot

Bu kısımda, Hereman ve Nuseir tarafından geliştirilen Hirota'nın yönteminin sadeleştirilmişi tanıtılacak ve bu yöntemin uygulamalarına yer verilecektir. Hereman ve Nuseir, yöntemlerini tanımlamak için ilk olarak KdV denklemini ele almışlardır (Hereman ve Nuseir, 1997).

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2 \ln f(x,t)}{\partial x^2} = 2\frac{(f f_{xx} - f_x^2)}{f^2}, \tag{4.58}$$

bağımlı değişken dönüşümünün kullanılmasıyla KdV denklemi f ve türevlerine göre

$$f[f_{xt} + f_{xxx}] - f_x f_t - 4 f_x f_{xxx} + 3 f_{xx}^2 = 0, \tag{4.59}$$

şeklinde kuadratik bir denklemine dönüşür. Hirota metotu, bilineer form bilinmeden uygulayabilmek için, Hirota operatörü dahil etmeden (4.59) denklemi basit olarak

$$f\mathcal{L}(f) + \aleph(f,f) = 0, \tag{4.60}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\mathcal{L}$ ile

$$\mathcal{L}\cdot = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \tag{4.61}$$

lineer diferensiyel operatörü ve $\aleph$ ile

$$\aleph(f,g) = -f_x g_t - 4f_x g_{xxx} + 3f_{xx}g_{xx}, \tag{4.62}$$

lineer olmayan diferensiyel denklemi gösterilmektedir. Daha sonra, ϵ bir parametre olmak üzere,

$$f(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f^n(x,t), \tag{4.63}$$

formunda çözümler aranacaktır. Hirota bilineer yöntemde olduğu gibi, (4.63) denkleminin (4.60) denkleminde yerine yazılıp, ϵ parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenip, katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle,

$$O(\epsilon^1) \ : \ \mathcal{L}f^{(1)} = 0, \tag{4.64}$$

$$O(\epsilon^2) \ : \ \mathcal{L}f^{(2)} = -\aleph(f^{(1)}, f^{(1)}), \tag{4.65}$$

$$O(\epsilon^3) \ : \ \mathcal{L}f^{(3)} = -f^{(1)}\mathcal{L}f^{(2)} - \aleph(f^{(1)}, f^{(2)}) - \aleph(f^{(2)}, f^{(1)}), \tag{4.66}$$

$$\cdots$$

$$O(\epsilon^n) \ : \ \mathcal{L}f^{(n)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \left[f^{(j)}\mathcal{L}f^{(n-j)} + \aleph(f^{(j)}, f^{(n-j)}) \right], \tag{4.67}$$

denklem sistemi elde edilir. Böylece KdV denkleminin $N-$soliton çözümü, k_i, ω_i ve δ_i sabitler olmak üzere

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i} = \sum_{i=1}^{N} e^{(k_i x - \omega_i t + \delta_i)}, \tag{4.68}$$

biçiminde elde edilir. (4.68) denkleminin (4.64) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$P(k_i, \omega_i) = -\omega_i k_i + k_i^4, \quad i = 1, 2, ...N, \tag{4.69}$$

olmak üzere $P(k_i, \omega_i) = 0$ elde edilir. Böylece dispersiyon bağıntısı $\omega_i = k_i^3$ olarak bulunmuş olur. (4.68) denkleminin kullanılmasıyla (4.65) denkleminin sağ tarafından

$$-\sum_{i,j=1}^{N} 3k_i k_j^2 (k_i - k_j) e^{\theta_i + \theta_j} = \sum_{1 \le i < j \le N}^{N} 3k_i k_j (k_i - k_j)^2 e^{\theta_i + \theta_j}, \tag{4.70}$$

bulunur. Soliton çözümleri içeren f nin kuadratik denklemleri için karakteristik olan $e^{2\theta_i}$ terimlerinin ihmal edildiğine dikkat ediniz. Ayrıca (4.70) denkleminden,

$$f^{(2)} = \sum_{1 \le i < j \le N}^{N} a_{ij} e^{\theta_i + \theta_j} = \sum_{1 \le i < j \le N}^{N} a_{ij} e^{[(k_i + k_j)x - (\omega_i + \omega_j)t + (\delta_i + \delta_j)]}, \tag{4.71}$$

bulunur. (4.61), (4.69) ve (4.71) yardımıyla (4.65) denkleminin sol tarafından

$$\mathcal{L}f^{(2)} = \sum_{1\leq i\leq j\leq N}^{N} P(k_i + k_j, \omega_i + \omega_j)e^{\theta_i+\theta_j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq N}^{N} 3k_ik_j(k_i + k_j)^2 a_{ij}e^{\theta_i+\theta_j}, \quad (4.72)$$

olduğundan, (4.70) ve (4.72) denklemlerinin birbirine eşitlenmesiyle,

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, 1 \leq i < j \leq N, \quad (4.73)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, (4.66) denklemi yardımıyla $f^{(3)}$ kapalı formda hesaplanabilir. Örneğin, $N = 3$ için,

$$\begin{aligned} f^{(3)} &= b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \\ &= b_{123}e^{[(k_1+k_2+k_3)x-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t+(\delta_1+\delta_2+\delta_3)]} \end{aligned} \quad (4.74)$$

dir. Burada

$$b_{123} = a_{12}a_{13}a_{23} = \frac{(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^2(k_2 + k_3)^2} \quad (4.75)$$

olarak elde edilir. $N = 3$ için, hesaplama yapıldığı takdirde $n > 3$ iken $f^{(n)} = 0$ olacağı görülür. Bu sebeple, (4.66) deki açılım kesilir ve $\epsilon = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} \\ &\quad + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \end{aligned} \quad (4.76)$$

bulunur. Burada f nin $e^{2\theta_1}, e^{2\theta_2}, e^{2\theta_1+\theta_2}$ ve $e^{\theta_1+2\theta_2}$ terimlerini içermediğine dikkat ediniz. (4.76) denkleminin (4.58) denkleminde yerine yazılmasıyla, KdV denkleminin, Hirota bilineer metot ile elde edilmiş olan üç-soliton çözümleri bulunur. $N > 3$ için de $N-$soliton çözümler benzer şekilde hesaplanabilir. Ancak, bu hesaplamalar çok uzundur ve bu sebeple $N-$soliton çözümleri matematiksel tümevarım ile bulmak daha uygun olacaktır (Hereman ve Nuseir, 1997).

Hereman ve Nuseir tarafından tanıtılan sadeleştirilmiş metot, günümüzde sıklıkla kullanılmaktadır. Maple ve Mathematica gibi cebirsel hesaplama paket programları yardımıyla çözümler kolaylıkla ve daha kısa sürede elde edilmektedir. Son yıllarda, özellikle Wazwaz tarafından bu metot kullanılarak birçok lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin hareketli dalga çözümleri ve soliton çözümleri elde edilmiştir (Wazwaz, 2007; Wazwaz, 2008). Sadeleştirilmiş Hirota bilineer metot, Wazwaz tarafından daha kısa olarak aşağıdaki gibi özetlenmiştir (Wazwaz, 2008):

İlk olarak, k ve ω arasındaki dispersiyon bağıntısını belirlemek için, ele alınan denklemin lineer terimlerinde

$$u(x,t) = e^{kx-\omega t},$$

ifadesi yerine yazılır. Daha sonra,

$$u = R(\ln f)_x = R\frac{f_x}{f},$$

Cole-Hopf dönüşümü ele alınan denklemde yerine yazılır. Burada f, yardımcı fonksiyonu, bir soliton çözüm için

$$f(x,t) = 1 + f_1(x,t) = 1 + e^{\theta_1},$$

şeklindedir. Hirota'nın yönteminin adımları için,

$$u(x,t) = e^{\theta_i}, \theta_i = k_i x - \omega_i t,$$

kullanılır.

(i) bir soliton çözüm için, R yi belirlemek için

$$f = 1 + e^{\theta_1},$$

kullanılır.

(ii) iki-soliton çözümler için, a_{12} faz kayması katsayısını belirlemek için

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2},$$

kullanılır ve böylelikle a_{ij}, $1 \leq i < j \leq 3$ için genelleştirilebilir.

(iii) üç-soliton çözümler için, b_{123} ü belirlemek için

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3},$$

kullanılır. $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ ise, denklemin üç-soliton çözüm vereceği ispatlanmıştır. Üç-soliton çözümlerin belirlenmesi, her mertebeden denklem için $N-$soliton çözümlerin varlığını teyit eder ve dolayısıyla incelenen denklem tam integrallenebilirdir.

4.5. Lineer Üst Üste Bindirme Prensibinin Hirota Bilineer Denklemlere Uygulanması

Lineer kısmi diferensiyel denklemler için kullanışlı bir özellik olan lineer üst üste bindirme prensibi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler için geçerli değildir.

Hirota bilineer denklemler, lineer denklemlere yakın olduklarından, bazı ortak özelliklere sahip olmaları beklenir. Bu kısımda, Ma ve Fan (Ma ve Fan, 2011) tarafından Hirota bilineer denklemlere uygulanan lineer üst üste bindirme prensibi hakkında bilgi verilecektir. Daha özel olarak, lineer üst üste bindirme kuralının Hirota bilineer denklemlerin üstel hareketli dalgalarına uygulanabileceğinin ispatına yer verilecektir. Uygulamalarla, sunulan lineer üst üste bindirme kuralının soliton denklemlere, özellikle daha yüksek boyutlarda, $N-$ dalga çözümlerini üretmede faydalı olacağı gösterilecektir. Daha sonra bu yöntemle, bazı Hirota bilineer denklemlerin çözümleri elde edilecektir.

$$P(D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M})f \cdot f = 0 \tag{4.77}$$

formunda bir Hirota bilineer denklem ele alınsın. Burada P belirtilen değişkenler için

$$P\underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{M} = 0, \tag{4.78}$$

denklemini sağlayan bir polinomdur ve $D_{xi}, 1 \leq i \leq M$,

$$D_y^p f(y) \cdot g(y) = (\partial_y - \partial_{y'})^p f(y)g(y') \mid_{y'=y} = \partial_{y'}^p f(y + y')g(y + y') \mid_{y'=0}, p \geq 1,$$

ile tanımlanan Hirota'nın türev operatörüdür.

N dalga değişkeni

$$\eta_i = k_{1,i}x_1 + k_{2,i}x_2 + ... + k_{M,i}x_M, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{4.79}$$

ve $k_{i,j}$ ler sabit olmak üzere, $N-$ üstel dalga fonksiyonu

$$f_i = e^{\eta_i} = e^{k_{1,i}x_1 + k_{2,i}x_2 + ... + k_{M,i}x_M}, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{4.80}$$

biçiminde tanımlanır ve

$$P(D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M})e^{\eta_i} \cdot e^{\eta_j} = P(k_{1,i} - k_{1,j}, k_{2,i} - k_{2,j}, ..., k_{M,i} - k_{M,j})e^{\eta_i + \eta_j}, \tag{4.81}$$

bilineer özdeşliği sağlanır. (4.78) gereğince, bütün üstel $f_i, 1 \leq i \leq N$ dalgaları (4.77) Hirota bilineer denklemini sağlar.

Şimdi, $\varepsilon_i, 1 \leq i \leq N$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$f = \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + ...\varepsilon_N f_N = \varepsilon_1 e^{\eta_1} + \varepsilon_2 e^{\eta_2} + ...\varepsilon_N e^{\eta_N}, \tag{4.82}$$

$N-$dalga test fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon, N üstel hareketli dalgalarının genel bir lineer birleşimidir. Akla gelen ilk soru, bu çözümün hala (4.77) Hirota bilineer denkleminin çözümü olup olmadığıdır. (4.81) ifadesinden hareketle,

$$\begin{aligned} P(D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M}) f \cdot f &= \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i \varepsilon_j P(D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_M}) e^{\eta_i} \cdot e^{\eta_j}, \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i \varepsilon_j P(k_{1,i} - k_{1,j}, k_{2,i} - k_{2,j}, ..., k_{M,i} - k_{M,j}) e^{\eta_i + \eta_j}, \end{aligned} \tag{4.83}$$

elde edilir. Bu bilineer özellik, $e^{\eta_i}, 1 \leq i \leq N$ üstel dalgaları için lineer üst üste bindirme prensibinin oluşturulmasında öne çıkan bir role sahiptir.

(4.83) gereğince $e^{\eta_i}, 1 \leq i \leq N$ üstel dalgalarının tüm lineer birleşiminin (4.77) Hirota bilineer denkleminin bir çözümü olması için

$$P(k_{1,i} - k_{1,j}, k_{2,i} - k_{2,j}, ..., k_{M,i} - k_{M,j}) = 0, 1 \leq i \neq j \leq N, \tag{4.84}$$

şartının sağlanması gerekir. Bu şartta $i = j$ durumunun çıkarılmasının sebebi, bu durumun sadece (4.78) nin bir sonucu olmasıdır. P sabit olduğunda, (4.84) şartı $k_{i,j}$ lere bağlı lineer olmayan bir denklem sistemi verir. Daha yüksek boyutlu sistemlerde $k_{i,j}$ değişkenlerinin çözümlerini elde etmek için daha fazla olasılık bulunur. Bunun sebebi, elde edilen cebirsel denklem sistemini çözmek için daha fazla değişken olmasıdır.

$\eta_i, 1 \leq i \leq N$ değişkenlerinden birinin sabit olarak seçilmesiyle, örneğin $1 \leq i_0 \leq N$ sabit olmak üzere,

$$\eta_{i_0} = \varepsilon_{i_0}, \text{ yani } k_{i,i_0} = 0, 1 \leq i \leq M, \tag{4.85}$$

seçilmesiyle, (4.84) $N-$dalga şartı diğer bütün dalgaların

$$P(k_{1,i}, k_{2,i}, ..., k_{M,i}) = 0, 1 \leq i \leq N, i \neq i_0, \tag{4.86}$$

dispersiyon bağıntısını sağlamasını gerektirir.

Bu da, Hirota pertürbasyon ile $N-$soliton çözümlerin, ikinci dereceden pertürbasyon teriminde kesilen özel bir haline karşılık gelir. Fakat genel olarak, dispersiyon bağıntısının sağlanmasının zorunlu olmadığını belirtmekte fayda vardır.

Yukarıdaki analizler aşağıdaki teoremle sonuçlandırılmıştır:

Teorem: (Lineer Üst Üste Bindirme Prensibi) $P(x_1, x_2, ..., x_M)$, (4.78) denklemini sağlayan çok değişkenli bir polinom ve $\eta_i, 1 \leq i \leq N$ dalga değişkeni olmak üzere, e^{η_i},$1 \leq i \leq N$ üstel dalgalarının her lineer birleşiminin (4.77) Hirota bilineer denklemini sağlaması için (4.84) şartının sağlanması gerekir (Ma ve Fan, 2011).

4.6. Çoklu Üstel Fonksiyon Metodu

Bu kısımda, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bir-soliton, iki-soliton ve üç-soliton tipi çözümleri içeren bir-dalga, iki-dalga, ve üç-dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan çoklu üstel fonksiyon metodu tanıtılacaktır.

İlk olarak, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, ...) = 0, \tag{4.87}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi bu denklemi çözmek için çoklu üstel fonksiyon yönteminin temel adımlarını verelim.

1. Adım: k_i açısal dalga sayısı ve ω_i dalga sıklığı, c_i pozitif ya da negatif keyfi sabitler olmak üzere, dalga değişkenleri $\eta_i = \eta_i(x,t)$, $(i = 1, 2, ..., n)$

$$u(x,t) = U(\eta_i), \eta_i = c_i e^{\xi_i}, \xi_i = k_i x - \omega_i t, \tag{4.88}$$

olarak seçilir.

2. Adım: p ve q, yeni $\eta_i = \eta_i(x,t), (i = 1, 2, ..., n)$ değişkenlerinin $n-$inci dereceden iki polinomu olmak üzere, (4.87) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(\eta_i) = \frac{p(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)}{q(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)}, \tag{4.89}$$

olsun.

3. Adım: (4.89) denkleminin (4.88) ile birlikte (4.87) de yerine yazılmasıyla, $R(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{Q(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)}{R(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)} = 0, \tag{4.90}$$

formunda yazılabilen rasyonel bir denklem elde edilir.

4. Adım: (4.90) denkleminin payının sıfıra eşitlenmesiyle, p,q polinomları ve $\xi_i, (i = 1, 2, ..., n)$ üslerini belirlemek Maple cebirsel hesaplama paket programı yardımıyla çözülebilen bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak, (4.87) denkleminin bir-soliton, iki-soliton ve üç-soliton tipi çözümleri içeren bir-dalga, iki-dalga, ve üç-dalga çözümleri elde edilebilir. Burada $N \geq 4$ için $N-$ dalga çözümleride benzer şekilde elde edilebilir (Ma, vd. 2010).

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, dördüncü bölümde tanıtılan yöntemlerin çeşitli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmasına ve elde edilen sonuçların birbiri ve literatürde var olanlarla kıyaslanmasına yer verilecektir.

5.1. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Hirota Bilineer Formu

Bu kısımda tezde çalışılacak bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bilineer formları verilecektir. Bu denklemler sırasıyla Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi, (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi, (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denklemi ve (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemidir.

5.1.1. Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

KdV denkleminin bir genelleştirmesi olan

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x \pm u_{yy} = 0, \tag{5.1}$$

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi tam integrallenebilirdir. Kadomtsev ve Petviashvili, KdV denklemini (1+1) boyuttan (2+1) boyuta genelleştirmiştir (Kadomtsev ve Petviashvili, 1970). KP denklemi lineer olmayan zayıf bir geri çağırıcı güce sahip, sığ su dalgalarını ve yüksek mıknatıs gücü olan ortamdaki dalgaları modellemek için kullanılır. Denklemdeki ± 1 katsayıları sırasıyla zayıf ve güçlü yüzey gerilimini gösterir. Bu da ± 1 için iki KP denkleminin farklı fiziksel yapı ve özellikte olduğu anlamına gelir. KP denkleminde

$$u(x, y, t) = 2\left[\ln f(x, y, t)\right]_{xx}, \tag{5.2}$$

bağımlı değişken dönüşümünün kullanılmasıyla KP denkleminin Hirota bilineer formu,

$$(D_x^4 + D_x D_t \pm D_y^2) f \cdot f = 0, \tag{5.3}$$

olarak elde edilir (Wazwaz, 2007).

5.1.2. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi

Gilson ve çalışma arkadaşları (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklemini üretmişlerdir (Gilson vd., 1993):

$$u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_x u_{xy} = 0. \tag{5.4}$$

Bu denklem, AKNS sığ su dalgası denkleminin bilineer yaklaşım yardımıyla (2+1)-boyutlu bir genelleştirilmesidir. Ayrıca bu denklem (2+1)-boyutlu $x-$ekseni boyunca ilerleyen uzun dalgalar ile $y-$ekseni boyunca ilerleyen Riemann dalgalarının etkileşimini modellemek için kullanılmıştır. Son yıllarda bir çok araştırmacı, (5.4) denkleminin özellikle soliton, quasi-periodic dalga ve bilineer Bäcklund dönüşümü anlamında çeşitli tam çözümleri üzerine odaklanmıştır (Luo, 2010; Luo, 2011).

Bu denklemin Hirota bilineer formunu elde etmek için

$$u(x, y, t) = -2\left[\ln f(x, y, t)\right]_x, \tag{5.5}$$

bağımlı değişken dönüşümünü uygulayalım. Sonra x e göre bir defa integralini alıp integrasyon sabitinin sıfır alınmasıyla bulunan ifadede $D-$operatörünün özelliklerinin kullanılmasıyla,

$$\frac{D_yD_tf\cdot f}{f^2}+\frac{D_x^3D_yf\cdot f}{f^2}+3\left(\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}\right)\left(\frac{D_xD_yf\cdot f}{f^2}\right)-3\left(\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2}\right)\left(\frac{D_xD_yf\cdot f}{f^2}\right)=0,$$

bulunur. Son olarak, f^2 ile çarpılarak, (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_tD_y + D_x^3D_y)f\cdot f = 0, \tag{5.6}$$

olarak elde edilir (Najafi vd., 2013).

5.1.3. (2+1)-boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi

$$u_{xxxy} + 3u_y u_{xx} + 3u_x u_{xy} + 2u_{yt} = 0, \tag{5.7}$$

biçiminde verilen (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemine Painlevé testi uygulanmıştır (Bekir, 2007). Bu denklemin Painlevé testini geçtiği görülmüştür ve integrallenebilir olduğu düşünülmektedir. Bu denklemin Hirota bilineer formunu elde etmek için,

$$u(x,y,t) = 2\left[\ln f(x,y,t)\right]_x, \tag{5.8}$$

bağımlı değişken dönüşümü uygulanacaktır. Daha sonra x e göre bir defa integre edilip integrasyon sabitinin sıfır alınmasıyla elde edilen ifadede $D-$operatörünün özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{D_x^3 D_y f\cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)\left(\frac{D_x D_y f\cdot f}{f^2}\right) + 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)\left(\frac{D_x D_y f\cdot f}{f^2}\right) + 2\frac{D_y D_t}{f^2} = 0,$$

bulunur. Son olarak, f^2 ile çarpılarak, (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_t D_y + D_x^3 D_y) f\cdot f = 0, \tag{5.9}$$

olarak elde edilir (Bekir, 2007).

5.1.4. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi

(2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) denklemi,

$$v_t + \phi(v) v_z = 0, \quad \phi(v) = \partial_x^2 + 4v + 2v_x \partial_x^{-1}, \tag{5.10}$$

ya da

$$v_t + v_{xxz} + 4v v_z + 2v_x \partial_x^{-1} v_z = 0, \tag{5.11}$$

biçimindedir. Burada ∂_x^{-1} operatörü

$$\partial_x^{-1} f = \int f dx,$$

biçimindedir. $\partial_x = \partial_z$ boyutsal indirgemesi ile (5.11) denklemi $v = v(x,t)$ için standart formda bilinen

$$v_t + 6v v_x + v_{xxx} = 0,$$

KdV denklemine dönüşür. $v = u_x$ potansiyelinin kullanılmasıyla (5.11) (2+1)-boyutlu CBS denklemi

$$u_{xt} + u_{xxxz} + 4u_x u_{xz} vuv + 2u_{xx} u_{xz} = 0, \tag{5.12}$$

olarak yazılabilir. CBS denklemi ilk olarak, Bogoyavlenskii ve Schiff tarafından farklı şekillerde oluşturulmuştur. Bogoyavlenskii modifiye Lax formalizmini kullanırken, Schiff aynı denklemi self-dual Yang-Mills denklemini indirgeyerek elde etmiştir (Peng, 2006).

$$u(x, z, t) = 2[\ln(1 + f(x, z, t)]_x, \tag{5.13}$$

değişken dönüşümünün kullanılmasıyla (5.12) potansiyel CBS denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_x^3 D_z + D_x D_t) f \cdot f = 0, \tag{5.14}$$

olarak elde edilir (Zayed ve Al-Nowehy, 2015).

5.1.5. (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

Plazma fiziği ve akışkanlar mekaniğinde önemli uygulama alanına sahip olan (3+1)-boyutlu KP denklemi

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} + 3u_{zz} = 0, \tag{5.15}$$

formundadır. Bu denklem çöken ses dalgaları ve hızlı manyetik alanda kendinden odaklı sinyal dalgaları gibi kendiliğinden oluşan üç boyutlu dalgaların hareketini modellemek için kullanılır (Dorizzi vd., 1986). İntegrallenebilir bir denklem olmayan bu denklemin çeşitli tam çözümleri elde edilmiştir (El-Sayed ve Kaya, 2004; Lv vd., 2011).

$$u(x, y, z, t) = -2[\ln f(x, y, z, t)]_{xx}, \tag{5.16}$$

değişken dönüşümünün kullanılmasıyla (5.15) (3+1)-boyutlu KP denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_x^4 + D_t D_x + 3D_y^2 + 3D_z^2) f \cdot f = 0, \tag{5.17}$$

olarak elde edilir (Ma ve Fan, 2011).

5.1.6. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denklemi

$$u_{xxxy} + 3(u_x u_y)_x + u_{tx} + u_{ty} - u_{zz} = 0, \tag{5.18}$$

formundadır. Bu denklem, KP ve Boussinesq denklem sınıfının bir üyesi değildir (Ma ve Pekcan, 2011). KP denklemi için birçok benzer ya da değişken katsayılı genelleştirme bulunmaktadır (Zhu, 1993; You vd., 2008; Wazwaz, 2010).

(5.16) değişken dönüşümünün kullanılmasıyla (5.18) (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_x^3 D_y + D_t D_x + D_t D_y - D_z^2) f \cdot f = 0, \tag{5.19}$$

olarak elde edilir (Ma ve Zhu, 2012).

5.1.7. (3+1)-Boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili (BKP) denklemi

$$u_{zt} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xx} = 0, \tag{5.20}$$

formundadır. Bu denklem A-tipi Lie cebirinden oluşan KP denklemine karşıt olarak B-tipi cebirinden doğmuştur (Kashiwara vd., 1981; Jimbo ve Miwa, 1983). Bu denklemde $z = y$ alınırsa (2+1)-boyutlu BKP denklemi

$$u_{yt} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xx} = 0, \tag{5.21}$$

BKP denklemine indirgenir. (5.20) denkleminde

$$u(x, y, z, t) = 2[\ln f(x, y, z, t)]_x, \tag{5.22}$$

değişken dönüşümünün kullanılmasıyla (5.21) (3+1) boyutlu BKP denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_t D_z - D_x^3 D_y + 3D_x^2) f \cdot f = 0, \tag{5.23}$$

olarak elde edilir (Ma ve Fan, 2011).

5.1.8. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş B-tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(3+1)-boyutlu BKP denkleminin bir genelleştirilmesi

$$u_{yt} - u_{xxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xz} = 0, \tag{5.24}$$

formundadır. (5.24) denkleminde (5.22) değişken dönüşümünün kullanılmasıyla (5.24) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş BKP denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_t D_y - D_x^3 D_y + 3D_x D_z) f \cdot f = 0, \tag{5.25}$$

olarak elde edilir (Ma ve Zhu, 2012).

5.1.9. (3+1)-Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemi

$$u_{xxxy} + 3(u_x u_y)_x + 2u_{yt} - 3u_{zz} = 0, \tag{5.26}$$

formundaki (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa (JM) denklemi, fizikteki bazı (3+1)-boyutlu dalgaları modellemektedir. İlk olarak Jimbo ve Miwa tarafından Kadomtsev-Petviashvili hiyerarşisinin ikinci üyesi olarak tanıtılmıştır (Jimbo ve Miwa, 1983). Bu denklemin çözümlerinin sadece bir altsınıfının Painlevé testini geçtiği bilinmektedir (Xu ve Li, 2005). İntegrallenebilir bir denklem olmamasına rağmen çeşitli tipte tam çözümleri birçok farklı yöntemle elde edilmiştir (Li vd., 2013; Eslami, 2014).

Bu denkleme (5.22) bağımlı değişken dönüşümünün uygulanacaktır. Daha sonra x e göre bir defa integre edilip integrasyon sabitinin sıfır alınmasıyla elde edilen ifadede $D-$operatörünün özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} &\tfrac{D_x^3 D_y f \cdot f}{f^2} - 3\left(\tfrac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)\left(\tfrac{D_x D_y f \cdot f}{f^2}\right) + 3\left(\tfrac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)\left(\tfrac{D_x D_y f \cdot f}{f^2}\right) \\ &+2\tfrac{D_y D_t f \cdot f}{f^2} - 3\tfrac{D_z^2 f \cdot f}{f^2} = 0, \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, f^2 ile çarpılarak, JM denkleminin Hirota bilineer formu

$$D_x^3 D_y f \cdot f + 2D_y D_t f \cdot f - 3D_z^2 f \cdot f = 0, \tag{5.27}$$

olarak elde edilir (Ma ve Fan, 2011).

5.1.10. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Sığ Su Denklemi

(3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denklemi

$$u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_x u_{xy} + u_{yt} - u_{xz} = 0, \tag{5.28}$$

formundadır. Okyanuslardaki uzun su dalgalarının ilerleyişini tanımlayan bu denklem, hava simülasyonları, gelgit dalgaları, nehir ve sulama akışları, tsunami tahmini gibi alanlarda uygulamalara sahiptir (Tian ve Gao, 1996). (5.28) denklemi $x \to -x$ dönüşümü altında

$$u_{xxxy} + 3u_{xx}u_y + 3u_x u_{xy} - u_{yt} - u_{xz} = 0, \tag{5.29}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemin Hirota bilineer formunu bulmak için (5.22) bağımlı değişken dönüşümü uygulanacaktır. Daha sonra x e göre bir defa integrali alınıp integrasyon sabitinin sıfır alınmasıyla elde edilen ifadede $D-$operatörünün özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} &\tfrac{D_x^3 D_y f\cdot f}{f^2} - 3\left(\tfrac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)\left(\tfrac{D_x D_y f\cdot f}{f^2}\right) + 3\left(\tfrac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)\left(\tfrac{D_x D_y f\cdot f}{f^2}\right) \\ &-\tfrac{D_y D_t f\cdot f}{f^2} - \tfrac{D_x D_z f\cdot f}{f^2} = 0, \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, f^2 ile çarpılarak, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin Hirota bilineer formu

$$(D_x^3 D_y - D_y D_t - D_x D_z) f \cdot f = 0, \tag{5.30}$$

olarak elde edilir (Tang vd., 2012).

5.1.11. (3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi

(3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi

$$3w_{xz} - (2w_t + w_{xxx} - 2ww_x)_y + 2(w_x \partial_x^{-1} w_y)_x = 0, \tag{5.31}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada, ∂^{-1} operatörü, sonsuzda azalma şartı ile

$$(\partial_x^{-1} f)(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\partial_x^{-1}\partial_x = \partial_x \partial_x^{-1} = 1$ olduğununa dikkat ediniz. Bu denklem, cebirsel geometrik çözümleri bulunarak yeni bir integrallenebilir denklem olarak tanıtılmıştır. (5.31) denklemi ile KdV denklemi arasındaki kuvvetli ilişki kolaylıkla görülebilir. (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin $2w_t + w_{xxx} - 2ww_x$ ana teriminde

$$\begin{aligned} &w(x,t) \to u(x',t'),\\ &x' \to \tfrac{1}{\sqrt{3}}x,\\ &t' \to \tfrac{1}{6\sqrt{3}}t, \end{aligned}$$

dönüşümünün yapılmasıyla

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

KdV denklemi elde edilir. Buradan hareketle, (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi, lineer olmayan dispersive modellerde sığ su dalgaları ve kısa dalgaları çalışmak için kullanılabilir. (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi, (1+1)-boyutlu AKNS denklemi yardımıyla çözülebilir adi diferensiyel denklem sistemlerine parçalanmıştır. Ayrıca birçok farklı yöntemle N-soliton çözümleri elde edilmiştir (Wazwaz, 2013; Geng ve Ma, 2007).

$$w(x,y,z,t) = -[2\ln f(x,y,z,t)]_{xx}, \tag{5.32}$$

bağımlı değişken dönüşümü uygulanacaktır. Daha sonra x e göre bir defa integral alınıp integrasyon sabitinin sıfır alınmasıyla elde edilen ifadede $D-$operatörünün özelliklerinin kullanılmasıyla, (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin Hirota bilineer formu

$$(3D_xD_z - 2D_yD_t - D_yD_x^3)f \cdot f = 0, \tag{5.33}$$

olarak elde edilir (Shi ve Zhang, 2017).

5.2. Hirota Bilineer Metodun Kadomtsev-Petviashvili Denklemine Uygulanması

Bu kısımda, üçüncü bölümde açıklanan Hirota bilineer metot Kadomtsev-Petviashvili denklemine uygulanacak ve bu denklemin çoklu-soliton çözümleri elde edilecektir. Bu metoda kıyasla sadeleştirilmiş Hirota bilineer metot daha pratik ve tercih edilen bir metot olduğundan, Hirota bilineer metodun uygulanması bu tez çalışmasında sadece KP denklemi ile sınırlandırılmştır.

(5.1) KP denkleminin (5.3) ile verilen Hirota bilineer formu

$$[f(f_{xt} + f_{xxxx} \pm f_{yy})] - [f_xf_t + 4f_xf_{xxx} - 3f_{xx}^2 \pm f_y^2] = 0, \tag{5.34}$$

denklemine denktir. Bu denkleme Hirota biliner metodun uygulanması için, önce (5.34) denklemini,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \pm \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \aleph(f,f) &= -f_x f_t - 4 f_x f_{xxx} + 3 f_{xx} f_{xx} \pm f_y f_y, \end{aligned} \tag{5.35}$$

olmak üzere; $\mathcal{L}$ lineer operatörü ve $\aleph$ lineer olmayan operatörüne parçalayalım. Burada ϵ çok küçük olmayan açılım parametresi olmak üzere,

$$f(x,y,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f_n(x,y,t), \tag{5.36}$$

olduğunu varsayalım. (5.36) açılımının (5.35) de yerine yazılıp ϵ nun kuvvetlerinin sıfıra eşitlenmesiyle

$$O(\epsilon^1) \quad : \quad \mathcal{L} f^{(1)} = 0, \tag{5.37}$$

$$O(\epsilon^2) \quad : \quad \mathcal{L} f^{(2)} = -\aleph(f^{(1)}, f^{(1)}), \tag{5.38}$$

$$O(\epsilon^3) \quad : \quad \mathcal{L} f^{(3)} = -f^{(1)} \mathcal{L} f^{(2)} - \aleph(f^{(1)}, f^{(2)}) - \aleph(f^{(2)}, f^{(1)}), \tag{5.39}$$

$$\cdots$$

$$O(\epsilon^n) \quad : \quad \mathcal{L} f^{(n)} = -\sum_{j=1}^{n-1} \left[f^{(j)} \mathcal{L} f^{(n-j)} + \aleph(f^{(j)}, f^{(n-j)}) \right], \tag{5.40}$$

denklemleri bulunur. k_i, l_i ve ω_i keyfi sabitler ve $\theta_i = k_i x + l_i y - \omega_i t$ olmak üzere, $N-$soliton çözümü

$$f_1(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}, \tag{5.41}$$

formunda seçelim. (5.41) denkleminin (5.37) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\omega_i = \frac{k_i^4 \pm l_i^2}{k_i},$$

dispersiyon bağıntısı elde edilir. Böylece, dispersiyon değişkeni

$$\theta_i = k_i x + l_i y - \frac{k_i^4 \pm l_i^2}{k_i} t \tag{5.42}$$

olarak bulunur. $N = 1$ alınarak

$$f_1 = e^{\theta_1} = e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_i^2}{k_1} t},$$

bulunur. O halde bir-soliton çözüm, $\epsilon = 1$ seçilmesiyle

$$f = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1} t},$$

biçimindedir. $u(x,y,t) = 2[\ln f(x,y,t)]_{xx}$ olduğundan KP denkleminin bir-soliton çözümü

$$u(x,y,t) = \frac{2k_1^2 e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1} t}}{1 + e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1} t}},$$

ya da bu ifadeye eşit olan

$$u(x,y,t) = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \left(k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^4 \pm l_1^2}{k_1} t \right) \right],$$

biçiminde elde edilir. İki-soliton çözümü bulmak için (5.41) denkleminde $N = 2$ seçilir. Böylece

$$f_1(x,y,t) = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \tag{5.43}$$

ve

$$f(x,y,t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + f_2(x,y,t) \tag{5.44}$$

bulunur. (5.44) denkleminin (5.38) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$f_2(x,y,t) = \sum_{1 \le i < j \le 2} a_{ij} e^{\theta_1 + \theta_2}, \tag{5.45}$$

hesaplanır. Burada

$$a_{12} = \frac{3k_1^2 k_2^2 (k_1 - k_2)^2 - (k_1 l_2 - k_2 l_1)^2}{3k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^2 - (k_1 l_2 - k_2 l_1)^2}, \tag{5.46}$$

θ_1 ve θ_2 (5.42) denkleminde verildiği gibidir. $1 \le i < j \le 2$ kullanılır ve böylece

$$f(x,y,t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \tag{5.47}$$

olarak elde edilir. $u(x,y,t) = 2[\ln f(x,y,t)]_{xx}$ değişken dönüşümü kullanılarak KP denkleminin iki-soliton çözümü bulunur. f_3 ifadesi de benzer şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} f_1(x,y,t) &= e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}, \\ f_2(x,y,t) &= a_{12} e^{\theta_1+\theta_2} + a_{23} e^{\theta_2+\theta_3} a_{13} e^{\theta_1+\theta_3} \end{aligned} \tag{5.48}$$

seçilerek

$$\begin{aligned} f(x,y,t) \quad = \quad & 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12} e^{\theta_1+\theta_2} \\ & + a_{23} e^{\theta_2+\theta_3} + a_{13} e^{\theta_1+\theta_3} + f_3(x,y,t) \end{aligned} \tag{5.49}$$

bulunur. (5.49) denkleminin (5.39) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$a_{ij} = \frac{3k_i^2 k_j^2 (k_i - k_j)^2 - (k_i l_j - k_j l_i)^2}{3k_i^2 k_j^2 (k_i + k_j)^2 - (k_i l_j - k_j l_i)^2}, 1 \le i < j \le 3 \tag{5.50}$$

ve

$$b_{123} = a_{12}a_{13}a_{23}, \tag{5.51}$$

olmak üzere

$$f_3(x,y,t) = b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}, \tag{5.52}$$

bulunur. Burada θ_1, $\theta_2$ve θ_3 (5.42) denkleminde verildiği gibidir. Üç-soliton çözümü elde etmek için $1 \leq i < j \leq 3$ kullanılarak

$$\begin{aligned} f(x,y,t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2 +} a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} \\ &\quad + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}, \end{aligned} \tag{5.53}$$

bulunur. $u(x,y,t) = 2[\ln f(x,y,t)]_{xx}$ değişken dönüşümü kullanılarak KP denkleminin üç-soliton çözümü bulunur. f_4 ifadesi

$$f_4(x,y,t) = c_{1234}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}, \tag{5.54}$$

olarak benzer şekilde hesaplanabilir. Burada θ_1, θ_2, θ_3 ve θ_4 (5.42) denkleminde verildiği gibi ve $c_{1234} = a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34}$ dir. Dört-soliton çözümleri elde etmek için $1 \leq i < j \leq 4$ kullanılarak

$$\begin{aligned} f(x,y,t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} \\ &\quad + a_{14}e^{\theta_1+\theta_4} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + a_{24}e^{\theta_2+\theta_4} + a_{34}e^{\theta_3+\theta_4} \\ &\quad + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + b_{124}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4} + b_{134}e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4} \\ &\quad + b_{234}e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4} + c_{1234}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}, \end{aligned} \tag{5.55}$$

bulunur. $u(x,y,t) = 2[\ln f(x,y,t)]_{xx}$ değişken dönüşümü kullanılarak KP denkleminin dört-soliton çözümü bulunur. Burada

$$a_{ij} = \frac{3k_i^2k_j^2(k_i-k_j)^2 - (k_il_j - k_jl_i)^2}{3k_i^2k_j^2(k_i+k_j)^2 - (k_il_j - k_jl_i)^2}, 1 \leq i < j \leq 4, \tag{5.56}$$

$$b_{ijr} = a_{ij}a_{ir}a_{jr,} 1 \leq i < j < r \leq 4,$$

$$c_{1234} = a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34},$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde beş-soliton çözüm

$$
\begin{aligned}
f(x,y,t) &= 1+e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+e^{\theta_4}+e^{\theta_5}+a_{12}e^{\theta_1+\theta_2}+a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} \\
&\quad +a_{14}e^{\theta_1+\theta_4}+a_{15}e^{\theta_1+\theta_5}+a_{23}e^{\theta_2+\theta_3}+a_{24}e^{\theta_2+\theta_4}+a_{25}e^{\theta_2+\theta_5} \\
&\quad +a_{34}e^{\theta_3+\theta_4}+a_{35}e^{\theta_3+\theta_5}+a_{45}e^{\theta_4+\theta_5}+b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}+b_{124}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4} \\
&\quad +b_{125}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_5}+b_{134}e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4}+b_{135}e^{\theta_1+\theta_3+\theta_5}+b_{145}e^{\theta_1+\theta_4+\theta_5} \\
&\quad +b_{234}e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4}+b_{235}e^{\theta_2+\theta_3+\theta_5}+b_{245}e^{\theta_2+\theta_4+\theta_5}+b_{345}e^{\theta_3+\theta_4+\theta_5} \\
&\quad +c_{1234}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}+c_{1235}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_5}+c_{1245}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4+\theta_5} \\
&\quad +c_{1345}e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4+\theta_5}+c_{2345}e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5}+d_{12345}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5},
\end{aligned}
$$

biçimindedir. $u(x,y,t) = 2[\ln f(x,y,t)]_{xx}$ değişken dönüşümü kullanılarak KP denkleminin beş-soliton çözümü bulunur. Burada Burada θ_1, θ_2, θ_3 θ_4 ve θ_5 (5.42) denkleminde verildiği gibidir ve

$$a_{ij} = \frac{3k_i^2k_j^2(k_i-k_j)^2-(k_il_j-k_jl_i)^2}{3k_i^2k_j^2(k_i+k_j)^2-(k_il_j-k_jl_i)^2}, 1 \leq i < j \leq 5,$$

$$b_{ijr} = a_{ij}a_{ir}a_{jr,} 1 \leq i < j < r \leq 5,$$

$$c_{ijrs} = a_{ij}a_{ir}a_{is}a_{jr}a_{js}a_{rs,} 1 \leq i < j < r < s \leq 5,$$

$$d_{12345} = a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{23}a_{24}a_{25}a_{34}a_{35}a_{45},$$

eşitlikleri geçerlidir (Wazwaz, 2007).

5.3. Sadeleştirilmiş Hirota Bilineer Metodun Uygulamaları

Bu kısımda, sadeleştirilmiş Hirota metot kullanılarak çeşitli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu-soliton çözümleri elde edilecektir. Ele alınacak denklemler sırasıyla (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi, (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi, (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, (3+1)-boyutlu sığ su denklemi ve (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemidir.

5.3.1. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi

(5.4) BLMP denkleminin dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle bu denklemin lineer terimlerinde

$$u(x,y,t) = e^{k_ix+l_iy-\omega_it}, \tag{5.57}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$\omega_i = k_i^3, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x, y, t) = k_i x + l_i y - k_i^3 t, \tag{5.58}$$

olarak bulunur. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, aşağıdaki dönüşüm kullanılır.

$$u(x, y, t) = R(\ln f(x, y, t))_x. \tag{5.59}$$

Burada $f(x, y, t)$

$$f(x, y, t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t}, \tag{5.60}$$

biçimindedir. (5.59) denklemininin (5.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = -2, \tag{5.61}$$

bulunur. Böylece (5.4) denkleminin bir-soliton çözümü

$$u(x, y, t) = -\frac{2k_1 e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t}}{1 + e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t}}, \tag{5.62}$$

olarak bulunur. Bu çözüm bir şok dalgası tanımlamaktadır. Ardından iki-soliton çözüm için,

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \\ &= 1 + e^{k_1 x + l_1 y - k_1^3 t} + e^{k_2 x + l_2 y - k_2^3 t} \\ &\quad + a_{12} e^{(k_1 + k_2) x + (l_1 + l_2) y - (k_1^3 + k_2^3) t}, \end{aligned} \tag{5.63}$$

ifadesi kullanılır. (5.63) ve (5.59) denklemlerinin (5.4) denkleminde yerine yazılmasıyla, ve elde edilen ifadenin a_{12} faz kayması için çözülmesiyle,

$$a_{12} = \frac{(k_2 - k_1)(l_2 - l_1)}{(k_1 + k_2)(l_1 + l_2)} \tag{5.64}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{(k_j - k_i)(l_j - l_i)}{(k_i + k_{2j})(l_i + l_j)}, 1 \leq i < j \leq N \tag{5.65}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Üç-soliton çözüm için,

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \\ &\quad + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} + a_{13} e^{\theta_1 + \theta_3} + a_{23} e^{\theta_2 + \theta_3} \\ &\quad + b_{123} e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \end{aligned} \tag{5.66}$$

seçilir. Benzer şekilde

$$b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13} \tag{5.67}$$

bulunur. Bu da üç-soliton çözümün elde edilebilir olduğunu gösterir. Üç-soliton çözümlerin varlığı genellikle inceleme altında denklemin tam integrallenebilirliğinin göstergesidir. $n \succeq 4$ için daha yüksek mertebeden soliton çözümlerde benzer şekilde elde edilebilir. Bu da her mertebeden çoklu-soliton çözümlerin varlığına olanak sağlayan (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denkleminin tam integrallenebilir olduğunu gösterir. Aynı zamanda integrallenebilirlik, denklemlerin Lax çiftleri gibi diğer tekniklerle de tasdik edilmelidir.

5.3.2. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi

(5.7) (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle bu denklemin lineer terimlerinde

$$u(x,y,t) = e^{k_i x + l_i y - \omega_i t}, \tag{5.68}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$\omega_i = \frac{k_i^3}{2}, i = 1,2,...,N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,y,t) = k_i x + l_i y - \frac{k_i^3}{2}t, \tag{5.69}$$

olarak elde edilir. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, (5.59) dönüşümü kullanılır. Burada $f(x,y,t)$

$$f(x,y,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^3}{2}t}, \tag{5.70}$$

biçimindedir. (5.70) denklemininin (5.7) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = 2, \tag{5.71}$$

bulunur. Böylece (5.7) (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin bir-soliton çözümü

$$u(x,y,t) = \frac{2k_1 e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^3}{2}t}}{1 + e^{k_1 x + l_1 y - \frac{k_1^3}{2}t}}, \tag{5.72}$$

olarak bulunur. Bu çözüm bir şok dalgası tanımlamaktadır. Ardından iki-soliton çözüm için,

$$\begin{aligned} f(x,y,t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2}, \\ &= 1 + e^{k_1x+l_1y-\frac{k_1^3}{2}t} + e^{k_2x+l_2y-\frac{k_2^3}{2}t} \\ &\quad + a_{12}e^{(k_1+k_2)x+(l_1+l_2)y-(\frac{k_1^3}{2}+\frac{k_2^3}{2})t}, \end{aligned} \tag{5.73}$$

ifadesi kullanılır. (5.73) ve (5.59) denklemlerinin (5.7) denkleminde yerine yazılmasıyla, ve elde edilen ifadenin a_{12} faz kayması için çözülmesiyle,

$$a_{12} = \frac{(k_2-k_1)(l_2-l_1)}{(k_1+k_2)(l_1+l_2)}, \tag{5.74}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{(k_j-k_i)(l_j-l_i)}{(k_i+k_{2j})(l_i+l_j)}, 1 \leq i < j \leq N, \tag{5.75}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Üç-soliton çözümler için (5.66) seçilir. Benzer şekilde, $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ bulunur. Bu da üç-soliton çözümlerin elde edilebilir olduğunu gösterir. Üç-soliton çözümlerin varlığı genellikle inceleme altında denklemin tam integrallenebilirliğinin göstergesidir. $n \succeq 4$ için daha yüksek mertebeden soliton çözümlerde benzer şekilde elde edilebilir. Bu da her mertebeden çoklu-soliton çözümlerin varlığına olanak sağlayan (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin tam integrallenebilir olduğunu gösterir. Aynı zamanda integrallenebilirlik, denklemlerin Lax çiftleri gibi diğer tekniklerle de tasdik edilmelidir.

5.3.3. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi

(2+1)-boyutlu potansiyel CBS denkleminin dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle bu denklemin lineer terimlerinde

$$u(x,z,t) = e^{k_ix+m_iz-\omega_it}, \tag{5.76}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$\omega_i = k_i^2 m_i, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,z,t) = k_ix + m_iz - k_i^2 m_i t, \tag{5.77}$$

olarak bulunur. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, aşağıdaki dönüşüm kullanılır:

$$u(x,z,t) = R(\ln f(x,z,t))_x. \tag{5.78}$$

Burada $f(x,z,t)$

$$f(x,z,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1x+m_1z-k_1^2m_1t}, \tag{5.79}$$

biçimindedir. (5.78) denklemininin (5.12) denkleminde yerine yazılmasıyla, $R = 2$ bulunur. Böylece (5.12) (2+1)-boyutlu potansiyel CBS denkleminin bir-soliton çözümü

$$u(x,z,t) = \frac{2k_1e^{k_1x+m_1z-k_1^2m_1t}}{1+e^{k_1x+m_1z-k_1^2m_1t}}, \tag{5.80}$$

olarak bulunur. $v = u_x$ potansiyelinin kullanılmasıyla (2+1)-boyutlu CBS denkleminin bir-soliton çözümü elde edilir. Ardından iki-soliton çözüm için,

$$\begin{aligned} f(x,z,t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2}, \\ &= 1 + e^{k_1x+m_1z-k_1^2m_1t} + e^{k_2x+m_2z-k_2^2m_2t} \\ &\quad + a_{12}e^{(k_1+k_2)x+(m_1+m_2)z-(k_1^2m_1+k_2^2m_2)t}, \end{aligned} \tag{5.81}$$

ifadesi kullanılır. (5.78) ve (5.81) denklemlerinin (5.12) denkleminde yerine yazılmasıyla ve elde edilen ifadenin a_{12} faz kayması için çözülmesiyle,

$$a_{12} = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}, \tag{5.82}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{(k_i-k_j)^2}{(k_i+k_j)^2}, 1 \leq i < j \leq N, \tag{5.83}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Üç soliton çözümler için,

$$\begin{aligned} f(x,z,t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \\ &\quad + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} \\ &\quad + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}, \end{aligned} \tag{5.84}$$

seçilir. Benzer şekilde, $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ bulunur. Daha yüksek mertebeden soliton çözümler de benzer şekilde hesaplanabilir (Wazwaz, 2008).

5.3.4. (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa Denklemi

(5.26) (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denkleminde, dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle (5.26) denkleminin lineer terimlerinde

$$u(x,y,z,t) = e^{\theta_i}, \theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t, \tag{5.85}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$\omega_i = \frac{k_i(k_i^2 l_i - 3m_i)}{2l_i}, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,y,z,t) = k_i x + l_i y + m_i z - \frac{k_i(k_i^2 l_i - 3m_i)}{2l_i}t, \tag{5.86}$$

olarak bulunur. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, aşağıdaki dönüşüm kullanılır:

$$u(x,y,z,t) = R(\ln f(x,y,z,t))_x. \tag{5.87}$$

Burada $f(x,y,z,t)$

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + l_1 y + m_1 z - \frac{k_1(k_1^2 l_1 - 3m_1)}{2l_1}t}, \tag{5.88}$$

biçimindedir. (5.87) denklemininin (5.26) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = 2, \tag{5.89}$$

bulunur. Böylece (5.26) (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin bir-soliton çözümü

$$u(x,y,z,t) = \frac{2k_1 e^{k_1 x + l_1 y + m_1 z - \frac{k_1(k_1^2 l_1 - 3m_1)}{2l_1}t}}{1 + e^{k_1 x + l_1 y + m_1 z - \frac{k_1(k_1^2 l_1 - 3m_1)}{2l_1}t}}, \tag{5.90}$$

biçiminde elde edilir. Ardından iki-soliton çözüm için, θ_i (5.86) denkleminde verildiği gibi ve

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} \tag{5.91}$$

olmak üzere,

$$u(x,y,z,t) = \frac{2[f(x,y,z,t)]_x}{f(x,y,z,t)}, \tag{5.92}$$

(5.92) denklemi (5.26) denkleminde yerine yazılır. Buradan a_{12} faz kayması,

$$a_{12} = \frac{k_1 k_2 l_1 l_2 (k_1 - k_2)(l_1 - l_2) - (k_1 l_2 - k_2 l_1)(m_2 l_1 - m_1 l_2)}{k_1 k_2 l_1 l_2 (k_1 + k_2)(l_1 + l_2) - (k_1 l_2 - k_2 l_1)(m_2 l_1 - m_1 l_2)}, \tag{5.93}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{k_i k_j m_i m_{2j}(k_i - k_j)(m_i - m_j) - (k_i m_j - k_j m_i)(r_j m_i - r_i m_j)}{k_i k_j m_i m_{2j}(k_i + k_j)(m_i + m_j) - (k_i m_j - k_j m_i)(r_j m_i - r_i m_j)}, 1 \leq i < j \leq N, \tag{5.94}$$

şeklinde genelleştirilebilir. $m_s = r_s = k_s, s = 1, 2, 3$ olduğundan, a_{12} faz kayması,

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, 1 \leq i < j \leq N \tag{5.95}$$

biçiminde indirgenir. Burada

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) = \quad & 1 + e^{k_1 x + m_1 y + r_1 z - \frac{k_1(k_1^2 m_1 - 3r_1)}{2m_1} t} + e^{k_2 x + m_2 y + r_2 z - \frac{k_2(k_2^2 m_2 - 3r_2)}{2m_2} t} \\ & + \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} e^{(k_1+k_2)x + (m_1+m_2)y + (r_1+r_2)z - \left(\frac{k_1(k_1^2 m_1 - 3r_1)}{2m_1} + e^{k_1 x + m_1 y + r_1 z - \frac{k_2(k_2^2 m_2 - 3r_2)}{2m_2} t} \right) t} \end{aligned} \tag{5.96}$$

biçimindedir. (5.96) denkleminin (5.87) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.26) (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin iki-soliton çözümleri elde edilir. Üç soliton çözümler için,

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} \\ &\quad + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} + a_{13} e^{\theta_1 + \theta_3} + a_{23} e^{\theta_2 + \theta_3} \\ &\quad + b_{123} e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \end{aligned} \tag{5.97}$$

seçilir. Benzer şekilde

$$b_{123} = a_{12} a_{23} a_{13} \tag{5.98}$$

bulunur. (5.97) denkleminin (5.92) denkleminde yerine yazılmasıyla (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin üç-soliton çözümleri elde edilir. $N \geq 4$ için daha yüksek mertebeden çözümler de benzer biçimde bulunur (Wazwaz, 2008).

5.3.5. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Sığ Su Denklemi

(5.28) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle bu denklemin lineer terimlerinde (5.85) ifadesi yerine yazılır. Böylelikle

$$\omega_i = \frac{k_i^3 l_i - k_i mi}{l_i}, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,y,z,t) = k_i x + l_i y + m_i z - \frac{k_i^3 l_i - k_i mi}{l_i} t, \tag{5.99}$$

olarak elde edilir. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, (5.87) dönüşümü kullanılır. Burada $f(x,y,z,t)$

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1x+l_1y+m_1z-\frac{k_1^3l_1-k_1m_1}{l_1}t}, \tag{5.100}$$

biçimindedir. (5.87) denklemininin (5.28) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = -2, \tag{5.101}$$

bulunur. Böylece (5.28) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin bir-soliton çözümü

$$u(x,y,z,t) = \frac{-2k_1 e^{k_1x+l_1y+m_1z-\frac{k_1^3l_1-k_1m_1}{l_1}t}}{1+e^{k_1x+l_1y+m_1z-\frac{k_1^3l_1-k_1m_1}{l_1}t}}, \tag{5.102}$$

biçiminde elde edilir. Ardından iki-soliton çözüm için, θ_i (5.99) denkleminde verildiği gibi ve

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2}, \tag{5.103}$$

olmak üzere,

$$u(x,y,z,t) = -\frac{2[f(x,y,z,t)]_x}{f(x,y,z,t)}, \tag{5.104}$$

(5.104) denklemi (5.28) denkleminde yerine yazılır. Buradan a_{12} faz kayması,

$$a_{12} = \frac{l_2[3k_1k_2l_1(k_1-k_2)(l_1-l_2)+m_1(k_1l_2-k_2l_1)]+l_1m_2(k_2l_1-k_1l_2)}{l_2[3k_1k_2l_1(k_1+k_2)(l_1+l_2)+m_1(k_1l_2-k_2l_1)]+l_1m_2(k_2l_1-k_1l_2)}, \tag{5.105}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{l_j[3k_ik_jl_i(k_i-k_j)(l_i-l_j)+m_i(k_il_j-k_jl_i)]+l_im_j(k_jl_i-k_il_j)}{l_j[3k_ik_jl_i(k_i+k_j)(l_i+l_j)+m_i(k_il_j-k_jl_i)]+l_im_j(k_jl_i-k_il_j)}, 1 \le i < j \le N, \tag{5.106}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) = \; & 1 + e^{k_1x+l_1y+m_1z-\frac{k_1^3l_1-k_1m_1}{l_1}t} + e^{k_2x+l_2y+m_2z-\frac{k_2^3l_2-k_2m_2}{l_2}t} \\ & + \left(\frac{l_2[3k_1k_2l_1(k_1-k_2)(l_1-l_2)+m_1(k_1l_2-k_2l_1)]+l_1m_2(k_2l_1-k_1l_2)}{l_2[3k_1k_2l_1(k_1+k_2)(l_1+l_2)+m_1(k_1l_2-k_2l_1)]+l_1m_2(k_2l_1-k_1l_2)}\right) \\ & \times e^{(k_1+k_2)x+(l_1+l_2)y+(m_1+m_2)z-\left(\frac{k_1^3l_1-k_1m_1}{l_1}+\frac{k_2^3l_2-k_2m_2}{l_2}\right)t}, \end{aligned} \tag{5.107}$$

biçimindedir. (5.107) denkleminin (5.104) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.28) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin iki-soliton çözümleri elde edilir. Üç-soliton çözümler için (5.97) seçilir. Benzer şekilde $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ bulunur. (5.97) denkleminin (5.104) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.28) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin üç-soliton çözümleri elde edilir. $N \geq 4$ için daha yüksek mertebeden çözümler de benzer biçimde bulunur (Zeng vd., 2016).

5.3.6. (3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi

(5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminde ilk olarak integral terimini yok etmek için

$$w(x,y,z,t) = u_x(x,y,z,t), \tag{5.108}$$

değişken değişiminin yapılmasıyla

$$3u_{xxz} - (2u_{xt} + u_{xxxx} - 2u_x u_{xx})_y + 2(u_{xx}u_y)_x = 0, \tag{5.109}$$

elde edilir. Dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle (5.109) denkleminin lineer terimlerinde

$$u(x,y,z,t) = e^{\theta_i}, \theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t, \tag{5.110}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$c_i = \frac{k_i^3 l_i - 3k_i m_i}{2l_i}, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,y,t) = k_i x + l_i y + m_i z - \left(\frac{k_i^3 l_i - 3k_i m_i}{2l_i}\right) t, \tag{5.111}$$

olarak elde edilir. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, (5.87) dönüşümü kullanılır. Burada $f(x,y,z,t)$

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + l_1 y + m_1 z - \left(\frac{k_1^3 l_1 - 3k_1 m_1}{2l_1}\right)t}, \tag{5.112}$$

biçimindedir. (5.87) denklemininin (5.109) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = -3, \tag{5.113}$$

ve a ve b keyfi parametreler olmak üzere,

$$\begin{aligned} l_i &= a k_i, 1 \leq i \leq 3, \\ m_i &= b k_i^n, n \geq 1, \end{aligned} \tag{5.114}$$

bulunur. Böylece dispersiyon bağıntısı

$$\omega_i = \frac{ak_i^3 - 3m_i}{2a}, i = 1, 2, ..., N, \tag{5.115}$$

formuna indirgenir. Buradan $f(x, y, z, t)$ yardımcı denklemi

$$f(x, y, z, t) = 1 + e^{k_1 x + ak_1 y + m_1 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3m_1}{2a}\right)t}, \tag{5.116}$$

olarak elde edilir. (5.116) denkleminin (5.87) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$u(x, y, z, t) = -\frac{3k_1 e^{k_1 x + ak_1 y + m_1 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3m_1}{2a}\right)t}}{1 + e^{k_1 x + ak_1 y + m_1 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3m_1}{2a}\right)t}}, \tag{5.117}$$

bulunur. Böylece (5.108) denkleminin kullanılmasıyla, (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin bir-soliton çözümü

$$w(x, y, z, t) = -\frac{3k_1^2 e^{k_1 x + ak_1 y + m_1 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3m_1}{2a}\right)t}}{\left(1 + e^{k_1 x + ak_1 y + m_1 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3m_1}{2a}\right)t}\right)^2}, \tag{5.118}$$

biçiminde elde edilir. Ardından iki-soliton çözüm için, θ_i (5.111) denkleminde verildiği gibi ve

$$f(x, y, z, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \tag{5.119}$$

olmak üzere,

$$u(x, y, z, t) = -\frac{3[f(x, y, z, t)]_x}{f(x, y, z, t)}, \tag{5.120}$$

(5.120) denklemi (5.109) denkleminde yerine yazılır. Buradan a_{12} faz kayması,

$$a_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \tag{5.121}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.122}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada faz kaymasının a ve b değişkenlerine bağlı olmadığı görülür. Ayrıca, $|k_1| \neq |k_2|$ için a_{12} faz kayması 0 ya da ∞ olamadığından, (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi herhangi bir rezonant (yankılanan) olay göstermez. Burada

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) = \quad & 1 + e^{k_1 x + ak_1 y + m_1 z - \left(\frac{ak_1^3 - m_1}{2a}\right)t} + e^{k_2 x + ak_2 y + s_2 z - \left(\frac{ak_2^3 - 3m_2}{2a}\right)t} \\ & + \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{(k_1 + k_2)x + a(k_1 + k_2)y + (m_1 + m_2)z - \left(\frac{ak_1^3 - 3m_1}{2a} + \frac{ak_2^3 - 3m_2}{2a}\right)t}, \end{aligned} \tag{5.123}$$

biçimindedir. (5.108), (5.109) ve (5.123) denklemlerinin kullanılmasıyla iki-soliton çözümler elde edilir. Üç-soliton çözümler için (5.97) seçilir. Benzer şekilde $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ bulunur. (5.108), (5.109) ve (5.97) denklemlerinin kullanılmasıyla üç-soliton çözümler elde edilir. $N \geq 4$ için daha yüksek mertebeden çözümler de benzer biçimde bulunur.

1. 5.3.7. (3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denkleminin Bazı Çoklu-Soliton Çözüm Kümeleri

Bu kısımda, (5.108) denkleminin kullanılmasıyla elde edilen (5.109) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin iki yeni çoklu-soliton çözüm kümesine yer verilecektir.

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^n, \\ m_i &= bk_i^n, n \geq 1, \end{aligned} \tag{5.124}$$

(5.124) denklem sisteminde n çift ya da tek olduğunda farklı fiziksel yapıda çözümler elde edilir. İlk olarak n in çift olma durumu ele alınacaktır.

(i) n çift olsun

Sırasıyla $n = 2, 4, 6$ ve 8 durumları ele elınacaktır. Daha sonra bütün çift n değerleri için geçerli olacak şekilde bir genelleştirme yapılacaktır.

$n = 2$ için

İlk olarak, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^2, \\ m_i &= bk_i^2, \end{aligned} \tag{5.125}$$

olsun. Yukarıdakine benzer şekilde, dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle (5.108) denkleminin lineer terimlerinde

$$u(x, y, z, t) = e^{\theta_i}, \theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t, \tag{5.126}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$\omega_i = \frac{ak_i^3 - 3bk_i}{2a}, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,y,z,t) = k_i x + a k_i^2 y + b k_i^2 z - \left(\frac{a k_i^3 - 3 b k_i}{2a} \right) t, \tag{5.127}$$

olarak elde edilir. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, (5.87) dönüşümü kullanılır. Burada $f(x,y,z,t)$

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + a k_1^2 y + b k_1^2 z - \left(\frac{a k_1^3 - 3 b k_1}{2a} \right) t}, \tag{5.128}$$

biçimindedir. (5.87) denkleminin (5.109) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = -3, \tag{5.129}$$

bulunur. (5.87) denkleminin (5.128) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$u(x,y,z,t) = -\frac{3 k_1 e^{k_1 x + a k_1^2 y + b k_1^2 z - \left(\frac{a k_1^3 - 3 b k_1}{2a} \right) t}}{1 + e^{k_1 x + a k_1^2 y + b k_1^2 z - \left(\frac{a k_1^3 - 3 b k_1}{2a} \right) t}}, \tag{5.130}$$

bulunur. (5.108) dönüşümünün kullanılmasıyla, (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin bir-soliton çözümü bulunur.

Ardından iki-soliton çözüm için, θ_i (5.127) denkleminde verildiği gibi ve

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \tag{5.131}$$

olmak üzere,

$$u(x,y,z,t) = -\frac{3[f(x,y,z,t)]_x}{f(x,y,z,t)}, \tag{5.132}$$

(5.132) denklemi (5.109) denkleminde yerine yazılır. Buradan a_{12} faz kayması,

$$a_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1^2 + {k_2}^2}, \tag{5.133}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{k_i^2 + {k_j}^2}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.134}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada faz kaymasının a ve b değişkenlerine bağlı olmadığı görülür. Ayrıca, $|k_1| \neq |k_2|$ için a_{12} faz kayması 0 ya da ∞ olamadığından (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi herhangi bir rezonant (yankılanan) olay göstermez. Burada

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) = \quad & 1 + e^{k_1 x + a k_1^2 y + b k_1^2 z - \left(\frac{a k_1^3 - 3 b k_1}{2a} \right) t} + e^{k_2 x + a k_2^2 y + b k_2^2 z - \left(\frac{a k_2^3 - 3 b k_2}{2a} \right) t} \\ & + \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{(k_1 + k_2) x + a(k_1^2 + k_2^2) y + b(k_1^2 + k_2^2) z - \left(\frac{a k_1^3 - 3 s_1}{2a} + \frac{a k_2^3 - 3 s_2}{2a} \right) t}, \end{aligned} \tag{5.135}$$

biçimindedir. (5.108), (5.132) ve (5.135) denklemlerinin kullanılmasıyla iki-soliton çözümler elde edilir. Üç-soliton çözümler için (5.97) seçilir. Benzer şekilde $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ bulunur. (5.97), (5.108) ve (5.132) denklemlerinin kullanılmasıyla üç-soliton çözümler elde edilir. $N \geq 4$ için daha yüksek mertebeden çözümler de benzer biçimde bulunur.

$n = 4$ için, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^4, \\ m_i &= bk_i^4, \end{aligned} \tag{5.136}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon değişkeni (5.127) ile aynı elde edilir. Fakat genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2(k_i^2 + k_j^2)}{k_i^4 + k_j^4}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.137}$$

olarak bulunur.

$n = 6$ için, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^6, \\ m_i &= bk_i^6, \end{aligned} \tag{5.138}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon bağıntısı (5.127) ile aynı elde edilir. Fakat genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2(k_i^2 + k_ik_j + k_j^2)(k_i^2 - k_ik_j + k_j^2)}{k_i^6 + k_j^6}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.139}$$

olarak bulunur.

$n = 8$ için, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^8, \\ m_i &= bk_i^8, \end{aligned} \tag{5.140}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon bağıntısı (5.127) ile aynı elde edilir. Fakat genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2(k_i + k_j)^2(k_i^4 + k_j^4)}{k_i^8 + k_j^8}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.141}$$

olarak bulunur.

Bu durum bütün çift n değerleri için genelleştirilecek olursa, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^n, \\ m_i &= bk_i^n, \end{aligned} \tag{5.142}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon bağıntısı (5.127) ile aynı elde edilir. Genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{k_1^n + 2\sum\limits_{r=1}^{n-1}(-1)^r k_i^{n-r}k_j^r + k_2^n}{k_i^n + k_j^n}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.143}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, farklı n değerleri için farklı fiziksel özelliklere sahip çoklu solitonlar elde edilmiştir. Dispersiyon bağıntısı bütün durumlar için aynı kalırken, faz kayması ve y ve z uzay değişkenlerinin katsayıları farklı olmaktadır. Ayrıca, $|k_1| \neq |k_2|$ için a_{12} faz kayması 0 ya da ∞ olamadığından (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi herhangi bir rezonant (yankılanan) olay göstermez.

(ii) n tek olsun

$n = 1$ durumu ilk olarak ele alınmıştı. Sırasıyla $n = 3, 5$ ve 7 durumları ele elınacaktır. Daha sonra bütün tek n değerleri için geçerli olacak şekilde bir genelleştirme yapılacaktır.

$n = 3$ için, ilk olarak, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^3, \\ m_i &= bk_i^3, \end{aligned} \tag{5.144}$$

olsun. Yukarıdakine benzer şekilde, dispersiyon bağıntısını bulmak için, öncelikle (5.109) denkleminin lineer terimlerinde

$$u(x, y, z, t) = e^{\theta_i}, \theta_i = k_i x + ak_i^3 y + bk_i^3 z - \omega_i t, \tag{5.145}$$

ifadesi yerine yazılır. Böylece

$$\omega_i = \frac{ak_i^3 - 3bk_i}{2a}, i = 1, 2, ..., N,$$

elde edilir ve dispersiyon değişkeni

$$\theta_i(x,y,z,t) = k_i x + ak_i^3 y + bk_i^3 z - \left(\frac{ak_i^3 - 3bk_i}{2a}\right)t, \tag{5.146}$$

olarak elde edilir. Bir-soliton çözümleri elde etmek için, (5.87) dönüşümü kullanılır. Burada $f(x,y,z,t)$

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1 x + ak_1^3 y + bk_1^3 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3bk_1}{2a}\right)t}, \tag{5.147}$$

biçimindedir. (5.147) denklemininin (5.109) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$R = -3, \tag{5.148}$$

bulunur. (5.87) denkleminin (5.109) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$u(x,y,z,t) = -\frac{3k_1 e^{k_1 x + ak_1^3 y + bk_1^3 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3bk_1}{2a}\right)t}}{1 + e^{k_1 x + ak_1^3 y + bk_1^3 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3bk_1}{2a}\right)t}}, \tag{5.149}$$

bulunur. (5.108) dönüşümünün kullanılmasıyla, (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin bir-soliton çözümü bulunur.

Ardından iki-soliton çözüm için, θ_i (5.146) denkleminde verildiği gibi ve

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \tag{5.150}$$

olmak üzere,

$$u(x,y,z,t) = -\frac{3[f(x,y,z,t)]_x}{f(x,y,z,t)}, \tag{5.151}$$

(5.151) denklemi (5.109) denkleminde yerine yazılır. Buradan a_{12} faz kayması,

$$a_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2 (k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2)}{(k_1 + k_2)^2 (k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)}, \tag{5.152}$$

bulunur ve bu ifade

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2 (k_i^2 + k_i k_j + k_j^2)}{(k_i + k_j)^2 (k_i^2 - k_i k_j + k_j^2)}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.153}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada faz kaymasının a ve b değişkenlerine bağlı olmadığı görülür. Ayrıca, $|k_1| \neq |k_2|$ için a_{12} faz kayması 0 ya da ∞ olamadığından (5.31)

(3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi herhangi bir rezonant (yankılanan) olay göstermez. Burada

$$f(x,y,z,t) = 1 + e^{k_1 x + ak_1^3 y + bk_1^3 z - \left(\frac{ak_1^3 - 3bk_1}{2a}\right)t} + e^{k_2 x + ak_2^3 y + bk_2^3 z - \left(\frac{ak_2^3 - 3bk_2}{2a}\right)t} + \frac{(k_1-k_2)^2(k_1^2+k_1k_2+k_2^2)}{(k_1+k_2)^2(k_1^2-k_1k_2+k_2^2)} e^{(k_1+k_2)x + a(k_1^3+k_2^3)y + b(k_1^3+k_2^3)z - \left(\frac{ak_1^3-3bk_1}{2a} + \frac{ak_2^3-3bk_2}{2a}\right)t} \tag{5.154}$$

biçimindedir. (5.108), (5.109) ve (5.151) denklemlerinin kullanılmasıyla iki-soliton çözümler elde edilir. Üç soliton çözümler için (5.97) seçilir. Benzer şekilde $b_{123} = a_{12}a_{23}a_{13}$ bulunur. (5.97), (5.108) ve (5.109) denklemlerinin kullanılmasıyla üç-soliton çözümler elde edilir. $N \geq 4$ için daha yüksek mertebeden çözümler de benzer biçimde bulunur.

$n = 5$ için, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^5, \\ m_i &= bk_i^5, \end{aligned} \tag{5.155}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon bağıntısı (5.146) ile aynı elde edilir. Fakat genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2(k_i^4 + k_ik_j(k_j^2 + k_ik_j + k_j^2) + k_j^4)}{(k_i + k_j)^2(k_i^4 - k_ik_j(k_j^2 - k_ik_j + k_j^2) + k_j^4)}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.156}$$

olarak bulunur.

$n = 7$ için, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} l_i &= ak_i^7, \\ m_i &= bk_i^7, \end{aligned} \tag{5.157}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon bağıntısı (5.146) ile aynı elde edilir. Fakat genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2(k_i^2 + k_ik_j + k_j^2)(k_i^2 - k_ik_j + k_j^2)}{k_i^6 + k_j^6}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.158}$$

olarak bulunur.

Bu durum bütün tek n değerleri için genelleştirilecek olursa, a ve b keyfi parametreler olmak üzere

$$l_i = ak_i^n,$$
$$m_i = bk_i^n, \tag{5.159}$$

olsun. Bu durumda dispersiyon bağıntısı (5.146) ile aynı elde edilir. Genelleştirilmiş faz kayması

$$a_{ij} = \frac{k_i^{n+1} - (k_i^n k_j + k_i k_j^n) + k_j^{n+1}}{k_i^{n+1} + (k_i^n k_j + k_i k_j^n) + k_j^{n+1}}, 1 \leq i < j \leq 3, \tag{5.160}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, farklı n değerleri için farklı fiziksel özelliklere sahip çoklu solitonlar elde edilmiştir. Dispersiyon bağıntısı bütün durumlar için aynı kalırken, faz kayması ve y ve z uzay değişkenlerinin katsayıları farklı olmaktadır. Ayrıca, $|k_1| \neq |k_2|$ için a_{12} faz kayması 0 ya da ∞ olamadığından (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi herhangi bir rezonant (yankılanan) olay göstermez (Wazwaz, 2013).

5.4. Lineer Üst Üste Bindirme Prensibinin Hirota Bilineer Denklemlere Uygulamaları

Bu bölümde, lineer üst üste bindirme prensibi çeşitli Hirota bilineer denklemlere uygulanarak bu denklemlerin $N-$dalga çözümleri elde edilecektir. Bu denklemler sırasıyla Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denklemi ve (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemidir.

5.4.1. Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

KP denkleminin Hirota bilineer formlarından

$$(D_x^4 + D_x D_t + D_y^2) f \cdot f = 0, \tag{5.161}$$

olanı ele alınacaktır. (4.79) $N-$dalga değişkeni

$$\eta_i = k_i x + l_i y + \omega_i t, 1 \leq i \leq N, \tag{5.162}$$

olarak alınsın. N üstel dalga fonksiyonunun (5.161) denkleminde yerine yazılmasıyla, $N-$çözüm şartı

$$\begin{aligned} P(k_i-k_j,l_i-l_j,\omega_i-\omega_j) &= (k_i-k_j)^4+(k_i-k_j)(\omega_i-\omega_j)+(l_i-l_j)^2 \\ &= k_i^4-4k_i^3k_j+6k_i^2k_j^2-4k_ik_j^3+k_j^4 \\ &\quad +k_i\omega_i-k_i\omega_j-k_j\omega_i+k_j\omega_j+l_i^2 \\ &\quad -2l_il_j+l_j^2=0, 1\leq i\neq j\leq N, \end{aligned} \tag{5.163}$$

biçiminde elde edilir.

$$P(k_i,l_i,\omega_i)=0, \quad P(k_j,l_j,\omega_j)=0, \tag{5.164}$$

dispersiyon bağıntısının uygulanmasıyla

$$-4k_i^3k_j+6k_i^2k_j^2-4k_ik_j^3-k_i\omega_j-k_j\omega_i-2l_il_j=0, \tag{5.165}$$

bulunur. $i=j$ için

$$k_i^4+k_i\omega_i+l_i^2=0. \tag{5.166}$$

Böylece

$$\eta_m=k_mx+b_1k_m^2y+b_2k_m^3t,\ 1\leq i\leq N, \tag{5.167}$$

elde edilir. (5.167) $N-$dalga değişkeninin (5.166) ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{gathered} (k_m-k_j)[(k_m-k_j)^3+b_2(k_m^3-k_j^3)] \\ +b_1(k_m^2-k_j^2)^2=0,\ 1\leq j<m\leq N, \end{gathered} \tag{5.168}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{gathered} b_1^2+b_2+1=0, \\ -b_2-4=0, \end{gathered} \tag{5.169}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$b_1=\pm\sqrt{3}, b_2=-4, \tag{5.170}$$

elde edilir. O halde KP denkleminin $N-$dalga çözümü

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= 2\ln[f(x,y,t)]_{xx}, \\ f(x,y,t) &= \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_if_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ie^{k_ix\pm\sqrt{3}k_i^2y-4k_i^3t}, \end{aligned} \tag{5.171}$$

biçiminde elde edilir (Zhou ve Ma, 2017).

5.4.2. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi

(5.10) (2+1)-boyutlu CBS denkleminin Hirota bilineer formu (5.14) olarak elde edilmişti. Bu ifade aynı zamanda

$$\begin{aligned}&(f_{xxxz}+f_{xt})f-f_{xxx}f_z-3f_{xxz}f_x\\&+3f_{xz}f_{xx}-f_xf_t=0,\end{aligned} \tag{5.172}$$

denklemine denktir. (4.79) $N-$dalga değişkeni

$$\eta_i=k_ix+m_iz-\omega_it, 1\leq i\leq N \tag{5.173}$$

olarak alınsın. Bu durumda, (4.84) $N-$dalga şartı

$$\begin{aligned}&k_i^3m_i-k_i^3m_j-k_j^3m_i+k_j^3m_j-3k_i^2k_jm_i\\&+3k_i^2k_jm_j+3k_ik_j^2m_i-3k_ik_j^2m_j\\&+k_i\omega_i+k_i\omega_j+k_j\omega_i-k_j\omega_j=0, 1\leq i\neq j\leq N,\end{aligned} \tag{5.174}$$

formunu alacaktır. k keyfi bir sabit olmak üzere, (5.174) denkleminin bir çözümü

$$k_i=k, \omega_i=k^2m_i, 1\leq i\leq N \tag{5.175}$$

olarak alınabilir. Böylece, (5.10) (2+1)-boyutlu CBS denkleminin $N-$dalga çözümü, m_i ve ε_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}&u(x,z,t)=2[\ln(1+f(x,z,t)]_x,\\&f(x,z,t)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_if_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ie^{kx+m_iz-k^2m_it},\end{aligned} \tag{5.176}$$

olarak elde edilir (Zayed ve Al-Nowehy, 2015).

5.4.3. (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(5.15) (3+1)-boyutlu KP denkleminin Hirota bilineer formu (5.17) olarak elde edilmişti. Bu ifade aynı zamanda

$$\begin{aligned}&f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}^2+f_{tx}f-f_tf_x\\&+3(f_{yy}f-f_y^2+f_{zz}f-f_z^2)=0,\end{aligned} \tag{5.177}$$

denklemine denktir. (4.79) $N-$dalga değişkeni

$$\eta_i=k_ix+l_iy+m_iz+\omega_it, 1\leq i\leq N, \tag{5.178}$$

olarak alınsın. Bu durumda, (4.84) $N-$dalga şartı

$$
\begin{aligned}
&k_i^4-4k_i^3k_j-6k_i^2k_j^2-4k_ik_j^3+k_j^4+k_i\omega_i\\
&-k_i\omega_j-k_j\omega_i+k_j\omega_j+3l_i^2-6l_il_j+3l_j^2+3m_i^2\\
&-6m_im_j+3m_j^2=0,
\end{aligned}
\tag{5.179}
$$

formunu alacaktır. a ve b keyfi sabitler olmak üzere, (5.179) denkleminin bir çözümü

$$
l_i=ak_i^2, m_i=bk_i^2, \omega_i=-4k_i^3, a^2+b^2=1, 1\leq i\leq N \tag{5.180}
$$

olarak alınabilir. Böylece, (5.15) (3+1)-boyutlu KP denkleminin $N-$dalga çözümü, $a^2+b^2=1$ ve k_i,ε_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z,t)=-2[\ln f(x,y,z,t)]_{xx},\\
&f(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_if_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ie^{k_ix+ak_i^2y+bk_i^2z-4k_i^3t},
\end{aligned}
\tag{5.181}
$$

olarak elde edilir (Ma ve Fan, 2011).

5.4.4. (3+1)-Boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(5.21) (3+1)-boyutlu BKP denkleminin Hirota bilineer formu (5.23) olarak elde edilmişti. Bu ifade aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
&(f_{tz}-f_{xxxy}+3f_{xx})f-f_tf_z+f_{xxx}f_y\\
&+3f_{xxy}f_x-3f_{xx}f_{xy}-3f_x^2=0,
\end{aligned}
\tag{5.182}
$$

denklemine denktir. (4.79) $N-$dalga değişkeni (5.178) olarak alınsın. Bu durumda, (4.84) $N-$dalga şartı

$$
\begin{aligned}
&\omega_im_i-\omega_im_j-\omega_jm_i+\omega_jm_j-k_i^3l_i+k_i^3l_j\\
&+3k_i^2k_jl_i-3k_i^2k_jl_j-3k_ik_j^2l_i+3k_ik_j^2l_j\\
&+k_j^3l_i-k_j^3l_j+3k_i^2-6k_ik_j+3k_j^2=0,
\end{aligned}
\tag{5.183}
$$

formunu alacaktır. a bir sabit olmak üzere, (5.183) denkleminin bir çözümü

$$
l_i=k_i^{-1}, m_i=ak_i^{-1}, \omega_i=\frac{1}{a}k_i^3, a\neq 0, \tag{5.184}
$$

olarak alınabilir. Böylece, (5.21) (3+1)-boyutlu BKP denkleminin $N-$dalga çözümü, k_i,ε_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&u(x,y,z,t)=2[\ln f(x,y,z,t)]_x,\\
&f(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_if_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ie^{k_ix+k_i^{-1}y+ak_i^{-1}z-\frac{1}{a}k_i^3t},
\end{aligned}
\tag{5.185}
$$

olarak elde edilir (Ma ve Fan, 2011).

5.4.5. (3+1)-Boyutlu Jimbo-Miwa Denklemi

(5.26) Jimbo-Miwa denkleminin Hirota bilineer formu (5.27) olarak elde edilmişti. Bu ifade aynı zamanda

$$\begin{aligned}&(f_{xxxy}+2f_{ty}-3f_{zz})f-3f_{xxy}f_x+3f_{xy}f_{xx}\\&-f_yf_{xxx}-2f_tf_y+3f_z^2=0,\end{aligned}\tag{5.186}$$

denklemine denktir. (4.79) $N-$dalga değişkeni (5.178) olarak alınsın. Bu durumda, (4.84) $N-$dalga şartı

$$\begin{aligned}&k_i^3l_i-k_i^3l_j-3k_i^2k_jl_i+3k_i^2k_jl_j+3k_ik_j^2l_i-3k_ik_j^2l_j\\&-k_j^3l_i+k_j^3l_j+2\omega_il_i-2\omega_il_j-2\omega_jl_i+2\omega_jl_j\\&-3m_i^2+6m_im_j-3m_j^2=0, 1\leq i\neq j\leq N,\end{aligned}\tag{5.187}$$

formunu alacaktır. a keyfi bir sabit olmak üzere, (5.187) denkleminin bir çözümü

$$l_i=-a^2k_i, m_i=ak_i^2, \omega_i=-2k_i^3, 1\leq i\leq N\tag{5.188}$$

olarak alınabilir. Böylece, (5.26) (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denkleminin $N-$dalga çözümü, k_i ve ε_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}&u(x,y,z,t)=2[\ln f(x,y,z,t)]_x,\\&f(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_if_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ie^{k_ix-a^2k_iy+ak_i^2z-2k_i^3t},\end{aligned}\tag{5.189}$$

olarak elde edilir (Ma ve Fan, 2011).

5.4.6. (3+1)-boyutlu Genelleştirilmiş Sığ Su Denklemi

(5.29) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin Hirota bilineer formu (5.30) olarak elde edilmişti. (4.79) $N-$dalga değişkeni (5.178) olarak alınsın.(5.178) N-dalga fonksiyonunun (5.30) denkleminde yerine yazılmasıyla, $N-$çözüm şartı

$$\begin{aligned}&P(k_i-k_j,l_i-l_j,m_i-m_j,\omega_i-\omega_j)\\&=(k_i-k_j)^3(l_i-l_j)-(l_i-l_j)(\omega_i-\omega_j)-(k_i-k_j)(m_i-m_j)\\&=k_i^3l_i-k_i^3l_j-3k_i^2k_jl_i+3k_i^2k_jl_j+3k_ik_j^2l_i-3k_ik_j^2l_j\\&-k_j^3l_i+k_j^3l_j-l_i\omega_i+l_i\omega_j+l_j\omega_i-l_j\omega_j-k_im_i+k_im_j\\&+k_jm_i-k_jm_j=0, 1\leq i\neq j\leq N,\end{aligned}\tag{5.190}$$

biçiminde elde edilir.

$$P(k_i, l_i, m_i, \omega_i) = 0, \quad P(k_j, l_j, m_j, \omega_j) = 0, \tag{5.191}$$

dispersiyon bağıntısının uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} &-k_i^3 l_j - 3k_i^2 k_j l_i + 3k_i^2 k_j l_j + 3k_i k_j^2 l_i \\ &-3k_i k_j^2 l_j - k_j^3 l_i + k_j^3 l_j + l_i \omega_j + l_j \omega_i \\ &-l_j \omega_j + k_i m_j + k_j m_i = 0, \end{aligned} \tag{5.192}$$

bulunur. $i = j$ için

$$k_i^3 l_i - l_i \omega_i - k_i m_i = 0. \tag{5.193}$$

Böylece

$$\eta_m = k_m x + b_1 k_m^{-1} y + b_2 k_m z + b_3 k_m^3 t \tag{5.194}$$

elde edilir. (5.194) $N-$dalga değişkeninin (5.193) ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} &b_1 (k_m - k_j)^3 (k_m^{-1} - k_j^{-1}) - b_1 b_3 (k_m^{-1} - k_j^{-1})(k_m^3 - k_j^3) \\ &-b_2 (k_m - k_j)^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.195}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} &4b_1 - b_1 b_3 - b_2 = 0, \\ &-b_1 + b_1 b_3 = 0, \\ &-6b_1 + 2b_2 = 0, \end{aligned} \tag{5.196}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. a bir keyfi sabit olmak üzere, bu denklem sisteminin bir çözümü

$$l_i = a k_i^{-1}, m_i = 3a k_i, \omega_i = k_i^3, \tag{5.197}$$

olarak alınabilir. O halde (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denkleminin $N-$dalga çözümü, k_i ve ε_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} &u(x, y, z, t) = 2[\ln f(x, y, z, t)]_x, \\ &f(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i e^{k_i x + a k_i^{-1} y + 3a k_i z + k_i^3 t}, \end{aligned} \tag{5.198}$$

biçiminde elde edilir.

5.4.7. (3+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denklemi

(5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin Hirota bilineer formu (5.33) olarak elde edilmişti. (4.79) $N-$dalga değişkeni (5.178) olarak alınsın. (5.178) N-dalga fonksiyonunun (5.33) denkleminde yerine yazılmasıyla, $N-$çözüm şartı

$$\begin{aligned}&3(k_i - k_j)(m_i - m_j) - 2(l_i - l_j)(\omega_i - \omega_j)\\&-(l_i - l_j)(k_i - k_j)^3 = 0,\end{aligned} \tag{5.199}$$

olarak bulunur. (5.191) dispersiyon bağıntısının uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}&3k_i m_i - 3k_i m_j - 3k_j m_i + 3k_j m_j - 2l_i\omega_i + 2l_i\omega_j\\&+2l_j\omega_i - 2l_j\omega_j - k_i^3 l_i + 3k_i^2 k_j l_i - 3k_i k_j^2 l_i + l_i k_j^3\\&+k_i^3 l_j - 3k_i^2 k_j l_j + 3k_i k_j^2 l_j - k_j^3 l_j = 0,\end{aligned} \tag{5.200}$$

elde edilir. $i = j$ için

$$6k_i m_i - 4l_i\omega_i - 2k_i^3 l_i = 0, \tag{5.201}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\eta_m = k_m x + b_1 k_m^{-1} y + b_2 k_m z + b_3 k_m^3 t, \tag{5.202}$$

elde edilir. (5.202) $N-$dalga değişkeninin (5.201) ifadesinde yerine yazılmasıyla elde edilen

$$\begin{aligned}&3b_2(k_m - k_j)^2 - 2b_1 b_3(k_m^{-1} - k_j^{-1})(k_m^3 - k_j^3)\\&-b_1(k_m^{-1} - k_j^{-1})(k_m - k_j)^3 = 0,\end{aligned} \tag{5.203}$$

denklemi

$$\begin{aligned}&3b_2 - 2b_1 b_3 - 4b_1 = 0,\\&-6b_2 + 6b_1 = 0,\\&2b_1 b_3 + b_1 = 0,\end{aligned} \tag{5.204}$$

cebirsel denklem sistemini verecektir. Bu cebirsel denklem sisteminin bir çözümü, a bir keyfi sabit olmak üzere,

$$l_i = ak_i^{-1}, m_i = ak_i, \omega_i = -\frac{1}{2}k_i^3, \tag{5.205}$$

olarak alınabilir. Böylelikle (5.31) (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin $N-$dalga çözümü, k_i ve ε_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}&u(x,y,z,t) = -2[\ln f(x,y,z,t)]_{xx},\\&f(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i e^{k_i x + ak_i^{-1}y + ak_i z - \frac{1}{2}k_i^3 t},\end{aligned} \tag{5.206}$$

biçiminde elde edilmiş olur.

5.5. Çoklu Üstel Fonksiyon Metodunun Bazı Denklemlere Uygulamaları

Bu kısımda çoklu üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu soliton çözümleri içeren $N-$ dalga çözümleri elde edilecektir. Ele alınan denklemler sırasıyla (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denklemi ve (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemidir.

5.5.1. (2+1)-Boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi

(5.12) (2+1)-boyutlu potansiyel CBS denkleminin çoklu-dalga çözümlerini oluşturmak için p ve q polinomlarının üç farklı durumu ele alınacaktır.

Durum 1: Bir-Dalga Çözümleri

$a_0, a_1, b_0, b_1, c_1, k_1, m_1, \lambda_1$ daha sonra belirlenecek sabitler, $\eta_1 = c_1 e^{\xi_1}$, $\xi_1 = k_1 x + m_1 z - \omega_1 t$ olmak üzere, (5.12) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü

$$p(\eta_1) = a_0 + a_1\eta_1, q(\eta_1) = b_0 + b_1\eta_1, \tag{5.207}$$

biçiminde birinci dereceden iki çift $p(\eta_1)$ ve $q(\eta_1)$ polinomları alınsın. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre,

$$u(x,z,t) = U(\eta_1) = \frac{a_0 + a_1\eta_1}{b_0 + b_1\eta_1}, \tag{5.208}$$

olsun. (5.208) denkleminin (5.12) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
C_1 &= -k_1(a_1\omega_1 b_0^4 - a_1 k_1^2 m_1 b_0^4 + b_1 k_1^2 m_1 b_0^3 - b_1\omega_1 a_0 b_0^3) = 0,\\
C_2 &= -k_1(-b_1^2\omega_1 a_0 b_0^2 - 6k_1 m_1 a_1^2 b_0^3 - 6k_1 m_1 b_1^2 a_0^2 b_0 + a_1\omega_1 b_0^3 b_1\\
&\quad +12k_1 m_1 a_1 b_0^2 b_1 a_0 + 11k_1^2 m_1 b_0^3 b_1 - 11b_1^2 k_1^2 m_1 a_0 b_0^2) = 0,\\
C_3 &= -k_1(-a_1\omega_1 b_0^2 b_1^2 - 12k_1 m_1 a_1 b_0 b_1^2 a_0 - 11a_1 k_1^2 m_1 b_0^2 b_1^2\\
&\quad +b_1^3\omega_1 a_0 b_0 + 11b_1^3 k_1^2 m_1 a_0 b_0 + 6k_1 m_1 b_1^3 a_0^2 + 6k_1 m_1 a_1^2 b_0^2 b_1) = 0,\\
C_4 &= -k_1(-a_1\omega_1 b_0 b_1^3 + b_1^4\omega_1 a_0 - b_1^4 k_1^2 m_1 a_0 + a_1 k_1^2 m_1 b_0 b_1^3) = 0,
\end{aligned} \tag{5.209}$$

olmak üzere,

$$C_1\eta_1 + C_2\eta_1^2 + C_3\eta_1^3 + C_4\eta_1^4 = 0, \tag{5.210}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Yukarıdaki cebirsel denklem sisteminin Maple 14 yardımıyla çözülmesiyle aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$a_0 = -\frac{b_0(2b_1k_1 - a_1)}{b_1}, \omega_1 = k_1^2 m_1. \tag{5.211}$$

Böylece, c_1, a_1, m_1, b_0, b_1 ve k_1 keyfi sabitler, $\xi_1 = k_1x + m_1z - k_1^2 m_1 t$ olmak üzere (5.12) denkleminin bir-dalga çözümü,

$$u(x, z, t) = \frac{-b_0(2b_1k_1 - a_1) + b_1a_1c_1e^{\xi_1}}{b_1(b_0 + b_1c_1e^{\xi_1})}, \tag{5.212}$$

şeklindedir. $v = u_x$ potansiyelinin kullanılmasıyla (5.10) (2+1)-boyutlu CBS denkleminin bir-dalga çözümü elde edilir. Bu sonucun Bölüm 5.1.4 de elde edilenler ile karşılaştırılmasıyla $b_0 = b_1 = c_1 = 1$ ve $a_1 = 2k_1$ için aynı olduğu görülür.

Durum 2: İki-Dalga Çözümleri

$c_i, k_i, m_i, \omega_i, a_{12}$ daha sonra belirlenecek sabitler, $\eta_i = c_i e^{\xi_i}$, $\xi_i = k_i x + m_i z - \omega_i t$ olmak üzere, (5.12) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü

$$\begin{aligned} p(\eta_1, \eta_2) &= 2[k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + a_{12}(k_1 + k_2)\eta_1\eta_2], \\ q(\eta_1, \eta_2) &= 1 + \eta_1 + \eta_2 + a_{12}\eta_1\eta_2, \end{aligned} \tag{5.213}$$

biçiminde ikinci dereceden iki çift $p(\eta_1)$ ve $q(\eta_1)$ polinomları alınsın. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre,

$$u(x, z, t) = U(\eta_1, \eta_2) = \frac{p(\eta_1, \eta_2)}{q(\eta_1, \eta_2)}, \tag{5.214}$$

olsun. (5.214) denkleminin (5.12) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} &C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + C_3\eta_1^2 + C_4\eta_2^2 + C_5\eta_1\eta_2 \\ &+C_6\eta_1^2\eta_2 + C_7\eta_1\eta_2^2 + C_8\eta_1^2\eta_2^2 + C_9\eta_1\eta_2^3 \\ &+C_{10}\eta_2\eta_1^3 + C_{11}\eta_1^2\eta_2^3 + C_{12}\eta_1^3\eta_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{5.215}$$

elde edilir. (5.215) cebirsel denklem sisteminin $C_i(i = 1, 2, ..., 12)$ katsayıları, η_1, η_2 nin terimleri cinsinden olup, burada basitleştirmek amacıyla bu şekilde yazılmıştır. Katsayıların sıfır seçilmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle

$$\omega_1 = k_1^2 m_1, \omega_2 = k_2^2 m_2, a_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \tag{5.216}$$

bulunur. Böylece (5.12) denkleminin iki-dalga çözümü

$$u(x,z,t)=\frac{2[k_1\eta_1+k_2\eta_2+a_{12}(k_1+k_2)\eta_1\eta_2]}{1+\eta_1+\eta_2+a_{12}\eta_1\eta_2}, \tag{5.217}$$

formundadır. Burada, $a_{12}=(k_1-k_2)^2/(k_1+k_2)^2, \eta_i=c_ie^{\xi_i}, \xi_i=k_ix+m_iz-k_i^2m_it, (i=1,2)$ dır. $v=u_x$ potansiyelinin kullanılmasıyla (5.10) (2+1)-boyutlu CBS denkleminin iki-dalga çözümü elde edilir.

Durum 3: Üç-Dalga Çözümleri

$c_i, k_i, m_i, \omega_i, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ daha sonra belirlenecek sabitler, $\eta_i=c_ie^{\xi_i}$, $\xi_i=k_ix+m_iz-\omega_it$ olmak üzere, (5.12) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü

$$\begin{aligned}p(\eta_1,\eta_2,\eta_3)&=2[k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3+a_{12}(k_1+k_2)\eta_1\eta_2\\&+a_{13}(k_1+k_3)\eta_1\eta_3+a_{23}(k_2+k_3)\eta_2\eta_3\\&a_{12}a_{13}a_{23}\eta_1\eta_2\eta_3],\end{aligned} \tag{5.218}$$

ve

$$\begin{aligned}q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)&=1+\eta_1+\eta_2+\eta_3+a_{12}\eta_1\eta_2+a_{13}\eta_1\eta_3+a_{23}\eta_2\eta_3\\&+a_{12}a_{13}a_{23}\eta_1\eta_2\eta_3,\end{aligned} \tag{5.219}$$

biçiminde üçüncü dereceden iki çift $p(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ ve $q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ polinomları alınsın. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre,

$$u(x,z,t)=U(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{p(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}, \tag{5.220}$$

olsun. (5.220) denkleminin (5.12) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}&C_1\eta_1+C_2\eta_2+C_3\eta_3+C_4\eta_1^2+C_5\eta_2^2+C_6\eta_3^2+C_7\eta_1\eta_2+C_8\eta_1\eta_3\\&+C_9\eta_2\eta_3+C_{10}\eta_1\eta_2^2+C_{11}\eta_1\eta_3^2+C_{12}\eta_2\eta_3^2+C_{13}\eta_1^2\eta_2+C_{14}\eta_1^2\eta_3\\&+C_{15}\eta_2^2\eta_3+C_{16}\eta_1^2\eta_2^2+C_{17}\eta_1^2\eta_3^2+C_{18}\eta_2^2\eta_3^2+C_{19}\eta_1\eta_2^3+C_{20}\eta_1\eta_3^3\\&+C_{21}\eta_2\eta_1^3+C_{22}\eta_2\eta_3^3+C_{23}\eta_3\eta_1^3+C_{24}\eta_3\eta_2^3+C_{25}\eta_1^2\eta_2^3+C_{26}\eta_1^2\eta_3^3\\&+C_{27}\eta_2^2\eta_1^3+C_{28}\eta_2^2\eta_3^3+C_{29}\eta_3^2\eta_1^3+C_{30}\eta_3^2\eta_2^3+C_{31}\eta_1\eta_2\eta_3\\&+C_{32}\eta_1\eta_2\eta_3^2+C_{33}\eta_1\eta_2^2\eta_3+C_{34}\eta_1^2\eta_2\eta_3+C_{35}\eta_1\eta_2^2\eta_3^2+C_{36}\eta_1^2\eta_2\eta_3^2\\&+C_{37}\eta_1^2\eta_2\eta_3^2+C_{38}\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2+C_{39}\eta_1\eta_2\eta_3^3+C_{40}\eta_1\eta_2^3\eta_3+C_{41}\eta_1^3\eta_2\eta_3\\&+C_{42}\eta_1\eta_2^2\eta_3^3+C_{43}\eta_1\eta_2^3\eta_3^2+C_{44}\eta_1^3\eta_2\eta_3^2+C_{45}\eta_1^3\eta_2^2\eta_3+C_{46}\eta_1^2\eta_2\eta_3^3\\&+C_{47}\eta_1^2\eta_2^3\eta_3+C_{48}\eta_1\eta_2^3\eta_3^3+C_{49}\eta_1^3\eta_2\eta_3^3+C_{50}\eta_1^3\eta_2^3\eta_3+C_{51}\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^3\\&+C_{52}\eta_1^2\eta_2^3\eta_3^2+C_{53}\eta_1^3\eta_2^2\eta_3^2+C_{54}\eta_1^2\eta_2^3\eta_3^3+C_{55}\eta_1^3\eta_2^2\eta_3^3+C_{55}\eta_1^3\eta_2^3\eta_3^2=0,\end{aligned} \tag{5.221}$$

elde edilir. (5.221) cebirsel denklem sisteminin $C_i(i = 1, 2..., 57)$ katsayıları, η_1, η_2, η_3 nin terimleri cinsinden olup, burada basitleştirmek amacıyla bu şekilde yazılmıştır. Katsayıların sıfır seçilmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülerek

$$\omega_i = k_i^2 m_i, a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, 1 \leq i \prec j \leq 3, \tag{5.222}$$

bulunur. Böylece (5.12) denkleminin üç-dalga çözümü

$$\begin{aligned} p(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= 2[k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 + a_{12}(k_1 + k_2)\eta_1\eta_2 \\ &+ a_{13}(k_1 + k_3)\eta_1\eta_3 + a_{23}(k_2 + k_3)\eta_2\eta_3 \\ &+ a_{12}a_{13}a_{23}(k_1 + k_2 + k_3)\eta_1\eta_2\eta_3], \end{aligned} \tag{5.223}$$

$$\begin{aligned} q(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= 1 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + a_{12}\eta_1\eta_2 + a_{13}\eta_1\eta_3 + a_{23}\eta_2\eta_3 \\ &+ a_{12}a_{13}a_{23}\eta_1\eta_2\eta_3, \end{aligned} \tag{5.224}$$

olmak üzere (5.220) formundadır. Burada $\eta_i = c_i e^{\xi_i}, \xi_i = k_i x + m_i z - k_i^2 m_i t, a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}, 1 \leq i \leq j \leq 3$ dır. $v = u_x$ potansiyelinin kullanılmasıyla (5.10) (2+1)-boyutlu CBS denkleminin üç-dalga çözümü elde edilir (Zayed, Elsayed M.E. ve Al-Nowehy, Abdul-G. 2015).

5.5.2. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(5.18) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin çoklu-dalga çözümlerini oluşturmak için p ve q polinomlarının üç farklı durumu ele alınacaktır.

Durum 1: Bir-Dalga Çözümleri

a_1, a_2 ve ε_1 sabitler olmak üzere, (5.18) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü

$$\begin{aligned} &u(x, y, z, t) = U(\eta_1) = \tfrac{p(\eta_1)}{q(\eta_1)}, \eta_1 = \varepsilon_1 k_1, \\ &p(\eta_1) = a_1 + a_2\eta_1 e^{\theta_1}, q(\eta_1) = 1 + \tfrac{\eta_1}{k_1} e^{\theta_1}, \end{aligned} \tag{5.225}$$

formunda aranacaktır. Burada

$$\theta_1 = k_1 x + l_1 y + m_1 z - \omega_1 t, \tag{5.226}$$

olmak üzere, dispersiyon bağıntısı

$$\omega_1 = \frac{k_1^3 l_1 - m_1^2}{k_1 + l_1}, \tag{5.227}$$

biçimindedir. Burada çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle

$$a_1 = (a_2 - 1)k_1, \tag{5.228}$$

elde edilir. Böylelikle (5.18) (3+1) genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin bir-dalga çözümü

$$u(x,y,z,t) = \frac{2(a_2-1)k_1 + 2a_2\varepsilon_1 k_1 e^{k_1x+l_1y+m_1z-\omega_1 t}}{1+\varepsilon_1 e^{k_1x+l_1y+m_1z-\omega_1 t}}, \tag{5.229}$$

olarak bulunur.

Durum 2: İki-Dalga Çözümleri

(5.18) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin iki-dalga çözümü

$$\begin{aligned} &u(x,y,z,t) = U(\eta_1,\eta_2) = \tfrac{p(\eta_1,\eta_2)}{q(\eta_1,\eta_2)} = \tfrac{2f_x}{f}, \\ &\eta_1 = k_1\varepsilon_1, \eta_2 = k_2\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{5.230}$$

formunda aranacaktır. Burada ε_1 ve ε_2 keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{cases} p(\eta_1,\eta_2) = 2f_x = 2[\eta_1 e^{\theta_1} + \eta_2 e^{\theta_2} + a_{12}(\eta_1\varepsilon_2 + \eta_2\varepsilon_1)e^{\theta_1+\theta_2}], \\ q(\eta_1,\eta_2) = f = 1 + \tfrac{\eta_1}{k_1}e^{\theta_1} + \tfrac{\eta_2}{k_2}e^{\theta_2} + \tfrac{\eta_1\eta_2}{k_1k_2}a_{12}e^{\theta_1+\theta_2}, \end{cases} \tag{5.231}$$

biçiminde tanımlıdır. Dispersiyon değişkeni

$$\theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t, \quad i = 1,2, \tag{5.232}$$

eşitliği ile verilir. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle

$$\omega_i = \tfrac{k_i^3 l_i - m_i^2}{k_i + l_i}, \quad i = 1,2, \quad a_{12} = \tfrac{b_{12}}{c_{12}},$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} b_{12} &= (k_1+l_1)^2 l_2^4 + (k_2+l_2)^2 l_1^4 - 2(k_1+l_1)(k_2+l_2)l_1l_2(2l_1^2 - 3l_1l_2 + 2l_2^2) \\ &\quad + (k_1+l_1)(k_2+l_2)(k_1-k_2+l_1-l_2)(k_1^2l_2 + 2k_1k_2l_1 - 2k_1k_2l_2 \\ &\quad - 2k_1l_1l_2 + k_1l_2^2 - k_2^2l_1 - k_2l_1^2 + 2k_2l_1l_2 + 3l_1^2l_2 - 3l_1l_2^2) \\ &\quad + [(k_1+l_1)m_2 - (k_2+l_2)m_1]^2, \end{aligned} \tag{5.233}$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_{12} \;=\; & (k_1+l_1)^2 l_2^4 + (k_2+l_2)^2 l_1^4 - 2(k_1+l_1)(k_2+l_2) l_1 l_2 (2l_1^2 + 3l_1 l_2 + 2l_2^2) \\
& +(k_1+l_1)(k_2+l_2)(k_1+k_2+l_1+l_2)(k_1^2 l_2 + 2k_1 k_2 l_1 + 2k_1 k_2 l_2 \\
& -2k_1 l_1 l_2 - k_1 l_2^2 + k_2^2 l_1 - k_2 l_1^2 - 2k_2 l_1 l_2 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2) \\
& +[(k_1+l_1)m_2 - (k_2+l_2)m_1]^2,
\end{aligned} \tag{5.234}
$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sonuçların (5.230) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.18) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin iki-dalga çözümü bulunur.

Durum 3: Üç-Dalga Çözümleri

$$
\begin{aligned}
& u(x,y,z,t) = U(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \tfrac{p(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)} = \tfrac{2f_x}{f}, \\
& \eta_1 = k_1\varepsilon_1, \eta_2 = k_2\varepsilon_2,
\end{aligned} \tag{5.235}
$$

$$
\begin{aligned}
f \;=\; & 1 + \varepsilon_1 e^{\theta_1} + \varepsilon_2 e^{\theta_2} + \varepsilon_3 e^{\theta_3} + \varepsilon_1\varepsilon_2 a_{12} e^{\theta_1+\theta_2} \\
& +\varepsilon_1\varepsilon_3 a_{13} e^{\theta_1+\theta_3} + \varepsilon_2\varepsilon_3 a_{23} e^{\theta_2+\theta_3} \\
& +\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 a_{123} e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3},
\end{aligned} \tag{5.236}
$$

ve

$$
a_{123} = a_{12} a_{13} a_{23},
$$

olmak üzere (5.18) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin üç-dalga çözümü (5.230) formunda aranacaktır. Dispersiyon değişkeni

$$
\theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t, \quad 1 \le i \le 3, \tag{5.237}
$$

eşitliği ile verilir. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle

$$
\omega_i = \tfrac{k_i^3 l_i - m_i^2}{k_i + l_i}, \quad 1 \le i \le 3, \quad a_{ij} = \tfrac{b_{ij}}{cij}, \quad 1 \le i < j \le 3, \tag{5.238}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
b_{ij} \;=\; & (k_i+l_i)^2 l_j^4 + (k_j+l_j)^2 l_i^4 - 2(k_i+l_i)(k_j+l_j) l_i l_j (2l_i^2 - 3l_i l_j + 2l_j^2) \\
& +(k_i+l_i)(k_j+l_j)(k_i-k_j+l_i-l_j)(k_i^2 l_j + 2k_i k_j l_i - 2k_i k_j l_j \\
& -2k_i l_i l_j + k_i l_j^2 - k_j^2 l_i - k_j l_i^2 + 2k_j l_i l_j + 3l_i^2 l_j - 3l_i l_j^2) \\
& +[(k_i+l_i)m_j - (k_j+l_j)m_i]^2,
\end{aligned} \tag{5.239}
$$

ve

$$\begin{aligned} c_{ij} \;=\;& (k_i+l_i)^2 l_j^4+(k_j+l_j)^2 l_i^4-2(k_i+l_i)(k_j+l_j)l_il_j(2l_i^2+3l_il_j+2l_j^2) \\ &+(k_i+l_i)(k_j+l_j)(k_i+k_j+l_i+l_j)(k_i^2l_j+2k_ik_jl_i+2k_ik_jl_j \\ &-2k_il_il_j-k_il_j^2+k_j^2l_i-k_jl_i^2-2k_jl_il_j+3l_i^2l_j+3l_il_j^2) \\ &+[(k_i+l_i)m_j-(k_j+l_j)m_i]^2, \end{aligned} \tag{5.240}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sonuçların (5.230) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.18) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denkleminin üç-dalga çözümü bulunur.

Burada faz değişkeninin Hirota'nın pertürbasyon metodunda elde edilen tipte olmadığı görülmektedir. Elde edilen $N-$ dalga çözümler soliton çözümleri içermektedir. (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denklemi kısmen integrallenebilen bir denklem olup, bulunan çözümlerin hangi durumda soliton tipi çözüme dönüşecekleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Ma ve Zhu, 2012).

5.5.3. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş B-Tipi Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

(5.24) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denkleminin çoklu-dalga çözümlerini oluşturmak için p ve q polinomlarının üç farklı durumu ele alınacaktır.

Durum 1: Bir-Dalga Çözümleri

a_1, a_2 ve ε_1 sabitler olmak üzere, (5.24) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü (5.225) formunda aranacaktır. Burada dispersiyon değişkeni (5.226) biçiminde olmak üzere, dispersiyon bağıntısı

$$\omega_1=-k_1^3+\frac{3k_1m_1}{l_1}, \tag{5.241}$$

biçimindedir. Burada çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle

$$a_1=(a_2-1)k_1, \tag{5.242}$$

elde edilir. Böylelikle (5.24) (3+1) genelleştirilmiş BKP denkleminin bir-dalga çözümü

$$u(x,y,z,t)=\frac{2(a_2-1)k_1+2a_2\varepsilon_1k_1e^{k_1x+l_1y+m_1z-\omega_1t}}{1+\varepsilon_1e^{k_1x+l_1y+m_1z-\omega_1t}}, \tag{5.243}$$

olarak bulunur.

Durum 2: İki-Dalga Çözümleri

(5.24) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş BKP denkleminin iki-dalga çözümü (5.230) formunda aranacaktır. Burada $p(\eta_1, \eta_2)$ ve $q(\eta_1, \eta_2)$ (5.231) ile verilen eşitlikteki ile aynıdır. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle

$$\omega_i = -k_i^3 + \frac{3k_i m_i}{l_i},\ i = 1, 2, \tag{5.244}$$

elde edilir. Burada

$$a_{12} = \frac{k_1 k_2 l_1 l_2 (k_1 - k_2)(l_1 - l_2) - (k_1 l_2 - k_2 l_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1)}{k_1 k_2 l_1 l_2 (k_1 + k_2)(l_1 + l_2) - (k_1 l_2 - k_2 l_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1)}, \tag{5.245}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sonuçların (5.230) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.24) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş BKP denkleminin iki-dalga çözümü bulunur.

Durum 3: Üç-Dalga Çözümleri

(5.24) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş BKP denkleminin üç-dalga çözümü (5.235) formunda aranacaktır. Burada f ise (5.236) formundadır. Çoklu üstel fonksiyon yöntemine göre elde edilen cebirsel denklem sisteminin Maple paket programı yardımıyla çözülmesiyle, $1 \leq i \leq 3$, olmak üzere,

$$\omega_i = -k_i^3 + \frac{3k_i m_i}{l_i}, \tag{5.246}$$

ve

$$a_{ij} = \frac{k_i k_j l_i l_j (k_i - k_j)(l_i - l_j) - (k_i l_j - k_j l_i)(l_i m_j - l_j m_i)}{k_i k_j l_i l_j (k_i + k_j)(l_i + l_j) - (k_i l_j - k_j l_i)(l_i m_j - l_j m_i)}, \tag{5.247}$$

bulunur. Elde edilen sonuçların (5.235) denkleminde yerine yazılmasıyla (5.24) (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş BKP denkleminin üç-dalga çözümü bulunur.

Benzer şekilde, burada da faz değişkeninin Hirota'nın pertürbasyon metodunda elde edilen tipte olmadığı görülmektedir. Elde edilen $N-$ dalga çözümler soliton çözümleri içermektedir. (3+1) genelleştirilmiş BKP denklemi tam integrallenebilir bir denklem olmadığından bulunan çözümlerin hangi durumda soliton tipi çözüme dönüşecekleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Ma ve Zhu, 2012).

5.6. Auto-Bäcklund Dönüşümlerinin Bulunması

Bu kısımda, genişletilmiş homojen denge yöntemi ile lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin Auto-Bäcklund dönüşümlerinin bulunması ve bu dönüşümler yardımıyla çözümlerin elde edilmesi ile ilgili uygulamalara yer verilecektir. Ele alınacak denklemler sırasıyla (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi ve (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemidir.

5.6.1. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denkleminin Auto-Bäcklund Dönüşümleri

Genişletilmiş homojen denge yöntemine göre, (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin çözümünün, f, w daha sonra belirlenecek iki fonksiyon ve $u_0(x,y,t)$ (5.4) denkleminin bir çözümü olmak üzere,

$$u(x,y,t) = f'(w)w_x + u_0(x,y,t), \tag{5.248}$$

formunda olduğu varsayılır. Burada (5.248) denkleminin (5.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
&[(f^{(5)} - 6f'''f'')w_y w_x^4] + [(4w_x^3 w_{xy} + 6w_y w_x^2 w_{xx})f^{(4)} \\
&+(-12w_x^2 w_{xx} w_y - 6w_x^3 w_{xy})(f'')^2 - 3(w_x^3 w_{xy} + w_{xx} w_y w_x^2) f''' f'] \\
&+[(w_t w_y w_x + 12 w_x w_{xx} w_{xy} + 4 w_y w_x w_{xxx} \\
&-3u_{0x} w_y w_x^2 + 6 w_y w_x^2 w_{xx} + 3 w_y w_{xx}^2 - 3 w_x^3 u_{0y}) f''' \\
&-3(w_{xxx} w_y w_x + 5 w_x w_{xx} w_{xy} + w_{xx}^2 w_y + w_x^2 w_{xxy}) f' f''] \\
&-[f''(-9 w_x w_{xx} u_{0y} - 3u_{0xx} w_y w_x - 6u_{0x} w_x w_{xy} - 3u_{0x} w_y w_{xx} + 4 w_x w_{xxxy} \\
&+w_{yt} w_x + w_y w_{xt} + w_t w_{xy} + 6 w_{xx} w_{xxy} + 4 w_{xy} w_{xxx} + w_y w_{xxxx} - 3w_x^2 u_{0xy}) \\
&+3(w_{xxx} w_{xy} + w_{xx} w_{xxy})(f')^2] \\
&+[f'(w_{xyt} + w_{xxxxy} - 3u_{0xx} u_{0y} - 3 w_{xx} u_{0xy} - 3 w_{xxx} u_{0y} - 3u_{0x} w_{xxy})] \\
&[+u_{0yt} + u_{0xxxy} - 3u_{0xx} u_{0y} - 3u_{0x} u_{0xy}] = 0,
\end{aligned} \tag{5.249}$$

bulunur. Bu ifadeyi sadeleştirmek için, c keyfi bir sabit olmak üzere

$$f = c \ln w, \tag{5.250}$$

olduğu varsayılsın. Böylelikle denklemde yerine yazılacak olan gerekli türevli terimler

$$\begin{aligned}
&(f')^2 = -cf'', (f'')^2 = -\tfrac{c}{6} f^{(4)}, \\
&f' f''' = -\tfrac{c}{3} f^{(4)}, f' f'' = -\tfrac{c}{2} f''', \\
&f'' f''' = -\tfrac{c}{12} f^{(5)},
\end{aligned} \tag{5.251}$$

şeklinde elde edilir: (5.251) eşitliklerinin kullanılmasıyla, (5.249) denklemi $f^{(0)} f', f'', f'', f^{(4)}$ ve $f^{(5)}$ terimlerinin cinsinden yeniden yazılabilir. Elde edilen denklemde katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
f^{(5)} \quad &: \quad \left(\tfrac{c}{2} + 1\right) w_y w_x^4 = 0, \\
f^{(4)} \quad &: \quad 6 w_y w_x^2 w_{xx} + c w_x^3 w_{xy} + 2c w_x^2 w_{xx} w_y \\
&\qquad + c w_{xx} w_y w_x^2 + 4 w_x^3 w_{xy} + c w_x^3 w_{xy} = 0, \\
f''' \quad &: \quad w_t w_y w_x + 12 w_x w_{xx} w_{xy} + 4 w_y w_x w_{xxx} - 3 u_{0x} w_y w_x^2 \\
&\qquad + \tfrac{3}{2} c w_x^2 w_{yxx} + \tfrac{3}{2} c w_{xx}^2 w_y + \tfrac{15}{2} c w_x w_{xx} w_{xy} + \tfrac{3}{2} c w_{xxx} w_y w_x \\
&\qquad + 6 w_x^2 w_{xxy} + 3 w_y w_{xx}^2 - 3 w_x^3 u_{0y} = 0, \\
f'' \quad &: \quad -9 w_x w_{xx} u_{0y} - 3 u_{0xx} w_y w_x - 6 u_{0x} w_x w_{xy} - 3 u_{0x} w_y w_{xx} \\
&\qquad + 4 w_x w_{xxxy} + w_{yt} w_x + w_y w_{xt} + w_t w_{xy} + 6 w_{xx} w_{xxy} + 4 w_{xy} w_{xxx} \\
&\qquad + w_y w_{xxxx} - 3 w_x^2 u_{0xy} + 3c w_{xxx} w_{xy} + 3c w_{xx} w_{xxy} = 0, \\
f' \quad &: \quad w_{xyt} + w_{xxxxy} - 3 u_{0xx} w_{xy} - 3 w_{xx} u_{0xy} - 3 w_{xxx} u_{0y} - 3 u_{0x} w_{xxy} = 0, \\
f^{(0)} \quad &: \quad u_{0yt} + u_{0xxxy} - 3 u_{0xx} u_{0y} - 3 u_{0x} u_{0xy} = 0.
\end{aligned} \tag{5.252}$$

Bu denklem sisteminin ilk denkleminden,

$$c = -2, \tag{5.253}$$

olarak bulunur. Burada dikkat çekilmesi gereken nokta, bulunan c değerinin (5.250) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilen ifade (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin Hirota bilineer formunun bulunması için kullanılan değişken dönüşümü ile aynı olduğudur. Elde edilen bu değerin denklem sisteminin geri kalan denklemlerinde yerine yazılmasıyla, (5.252) denklem sistemi

$$\begin{aligned}
&w_y w_t + 3 w_x w_{xxy} - 3 w_{xx} w_{xy} + w_y w_{xxx} \\
&-3 u_{0x} w_y w_x - 3 w_x^2 u_{0y} = 0,
\end{aligned} \tag{5.254}$$

$$\begin{aligned}
&(-9 w_{xx} u_{0y} - 3 u_{0xx} w_y - 6 u_{0x} w_{xy} + 4 w_{xxxy} + w_{yt} - 3 w_x u_{0xy}) w_x \\
&-3 u_{0x} w_y w_{xx} + w_y w_{xt} + w_t w_{xy} - 2 w_{xy} w_{xxx} + w_y w_{xxxx} = 0,
\end{aligned} \tag{5.255}$$

$$\begin{aligned} & w_{xyt} + w_{xxxxy} - 3u_{0xx}w_{xy} - 3w_{xx}u_{0xy} \\ & -3w_{xxx}u_{0y} - 3u_{0x}w_{xxy} = 0, \end{aligned} \tag{5.256}$$

$$u_{0yt} + u_{0xxxy} - 3u_{0xx}u_{0y} - 3u_{0x}u_{0xy} = 0, \tag{5.257}$$

denklemlerine indirgenir. (5.255) denkleminin yeniden düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} & (w_y w_t + 3w_x w_{xxy} - 3w_{xx}w_{xy} + w_y w_{xxx} - 3u_{0x}w_y w_x - 3w_x^2 u_{0y})_x \\ & +w_x(w_{yt} + w_{xxxy} - 3u_{0x}w_{xy} - 3w_{xx}u_{0y}) = 0, \end{aligned} \tag{5.258}$$

bulunur. Böylece yukarıdaki şartların

$$\begin{aligned} & w_y w_t + 3w_x w_{xxy} - 3w_{xx}w_{xy} \\ & +w_y w_{xxx} - 3u_{0x}w_y w_x - 3w_x^2 u_{0y} = 0, \end{aligned} \tag{5.259}$$

$$w_{yt} + w_{xxxy} - 3u_{0x}w_{xy} - 3w_{xx}u_{0y} = 0, \tag{5.260}$$

$$u_{0yt} + u_{0xxxy} - 3u_{0xx}u_{0y} - 3u_{0x}u_{0xy} = 0, \tag{5.261}$$

iken sağlandığı görülür. (5.250) denkleminde (5.253) değerinin yazılmasıyla

$$f = -2\ln w(x, y, t), \tag{5.262}$$

elde edilir. (5.262) ifadesinin (5.248) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.4) (2+1)-boyutlu BLMP denklemi için bir Auto-Bäcklund dönüşümü

$$u(x, y, t) = -2\frac{w_x}{w} + u_0(x, y, t), \tag{5.263}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada $w(x, y, t)$ ve $u_0(x, y, t)$ (5.259), (5.260) ve (5.261) denklemlerini sağlar.

Bu durumda, (5.263) denkleminin kullanılmasıyla, (5.4) denkleminin verilen herhangi bir u_0 çözümü için, (5.259) ve (5.260) denklemlerinin çözülmesiyle (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin yeni soliter dalga çözümleri bulunabilir.

(i) (5.263) denkleminde $u_0 = c$ seçilmesiyle,

$$u(x, y, t) = -2\frac{w_x}{w} + c, \tag{5.264}$$

elde edilir. Burada $w(x,y,t)$

$$w_y w_t + 3w_x w_{xxy} - 3w_{xx} w_{xy} + w_y w_{xxx} = 0, \tag{5.265}$$

$$w_{yt} + w_{xxxy} = 0, \tag{5.266}$$

denklemlerinin çözümüdür.

(ii) (5.263) denkleminde $u_0 = 0$ seçilmesiyle,

$$u(x,y,t) = -2\frac{w_x}{w}, \tag{5.267}$$

Cole-Hopf dönüşümü elde edilir. Burada $w(x,y,t)$ (5.265) ve (5.266) denklemlerinin çözümüdür.

5.6.2. (2+1)-Boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denkleminin Yeni Soliter Dalga Çözümleri

Şimdi, önceki kısımda elde edilen Auto-Bäcklund dönüşümlerinin kullanılması ve Maple paket programı yardımıyla, (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin çeşitli soliter dalga çözümleri oluşturulacaktır.

İlk olarak, (5.263) Auto-Bäcklund dönüşümü ve (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin u_0 sabit çözümüyle başlanacaktır.

(i) $w\left(x,y,t\right)$ nın

$$w\left(x,y,t\right) = a\cosh\left(kx + my + \omega t + a_0\right) + b\sinh\left(kx + my + \omega t + a_0\right) + r, \tag{5.268}$$

formunda olduğu varsayılsın. Burada a, b, k, m, ω ve r belirlenecek sabitler ve a_0 keyfi bir sabittir. (5.268) denkleminin (5.265) ve (5.266) denklemlerinde yerine yazılmasıyla, aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&a^2 m\omega + 4a^2k^3m - 3b^2k^3m = 0,\\
&2abm\omega + 2ak^3bm = 0,\\
&b^2m\omega + 4b^2k^3m - 3a^2k^3m = 0,\\
&am\omega + amk^3 = 0,\\
&bm\omega + bmk^3 = 0.
\end{aligned}$$

Bu sistemin çözümünden iki farklı durum meydana gelir.

Durum 1: b, k, a_0, m sıfırdan farklı parametreler olmak üzere

$$a = b,\ \omega = -k^3,$$

dir. Böylece

$$w_1(x, y, t) = b\cosh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + b\sinh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + r, \quad (5.269)$$

olur. (5.269) denkleminin (5.264) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.4) (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_1(x, y, t) = -\frac{2\left(bk\sinh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + bk\cosh\left(kx + my - k^3t + a_0\right)\right)}{\left(b\cosh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + b\sinh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + r\right)} + c, \quad (5.270)$$

biçiminde elde edilir.

Durum 2: b, k, a_0, m sıfırdan farklı parametreler olmak üzere

$$a = -b,\ \omega = -k^3,$$

dir. Böylece

$$w_2(x, y, t) = -b\cosh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + b\sinh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + r, \quad (5.271)$$

olur. (5.171) denkleminin (5.264) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.4) (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_2(x, y, t) = -\frac{2\left(-bk\sinh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + bk\cosh\left(kx + my - k^3t + a_0\right)\right)}{\left(b\cosh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + b\sinh\left(kx + my - k^3t + a_0\right) + r\right)} + c, \quad (5.272)$$

olarak elde edilir.

(ii) Şimdi de $w(x, y, t)$ nın

$$w(x, y, t) = C + A\exp\left(k_1x + m_1y + \omega_1t + a_1\right) + B\exp\left(k_2x + m_2y + \omega_2t + a_2\right), \quad (5.273)$$

formunda olduğu durum ele alınacaktır. (5.273) denkleminin (5.265) ve (5.266) denklemlerinde yerine yazılmasıyla, aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&A^2 m_1 \omega_1 + A^2 k_1^3 m_1 = 0, \\
&B^2 m_2 \omega_2 + B^2 k_2^3 m_2 = 0, \\
&A \omega_1 m_1 + A k_1^3 m_1 = 0, \\
&B \omega_2 m_2 + B k_2^3 m_2 = 0, \\
&ABm_1\omega_2 + ABm_2\omega_1 + 3ABk_1k_2^2m_2 \\
&-3ABk_1^2k_2m_2 - 3ABk_2^2k_1m_1 \\
&+ABm_1k_2^3 + ABm_2k_1^3 + 3ABk_2k_1^2m_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Bu sistemin çözümlerinden üç farklı durum ile karşılaşılacaktır.

Durum 1: $A = 0,\ \omega_2 = -k_2^3$ iken,

$$w_3(x, y, t) = C + B\exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right), \tag{5.274}$$

dir. (5.274) denkleminin (5.264) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.4) BLMP denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_3(x, y, t) = -\frac{2Bk_2 \exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right)}{C + B\exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right)} + c, \tag{5.275}$$

olarak elde edilir.

Durum 2: $m_1 = m_2,\ \omega_1 = -k_1^3,\ \omega_2 = -k_2^3$ iken

$$w_4(x, y, t) = C + A\exp\left(k_1 x + m_2 y - k_1^3 t + a_1\right) + B\exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right), \tag{5.276}$$

elde edilir. (5.276) denkleminin (5.264) denkleminde yerine yazılmasıyla, (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_4(x, y, t) = -\frac{2\left(Ak_1 \exp\left(k_1 x + m_2 y - k_1^3 t + a_1\right) + Bk_2 \exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right)\right)}{\left(C + A\exp\left(k_1 x + m_2 y - k_1^3 t + a_1\right) + B\exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right)\right)} + c, \tag{5.277}$$

biçiminde elde edilimiş olur.

Durum 3: $k_1 = k_2,\ \omega_1 = -k_2^3,\ \omega_2 = -k_2^3$ iken,

$$w_5(x, y, t) = C + A\exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_1\right) + B\exp\left(k_2 x + m_2 y - k_2^3 t + a_2\right), \tag{5.278}$$

elde edilir. Böylece (5.278) denkleminin (5.264) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.4) (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_5(x,y,t) = -\frac{2\left(Ak_2\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_1\right)+Bk_2\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_2\right)\right)}{\left(C+A\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_1\right)+B\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_2\right)\right)}+c, \tag{5.279}$$

bulunur. Özel olarak, (5.278) denkleminde $a_1 = a_2$ seçilmesiyle,

$$w_6(x,y,t) = C + (A+B)\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_1\right), \tag{5.280}$$

elde edilir. Böylece (5.4) (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_6(x,y,t) = -\frac{2(A+B)k_2\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_1\right)}{\left(C+(A+B)\exp\left(k_2x+m_2y-k_2^3t+a_1\right)\right)}+c, \tag{5.281}$$

formunu alır. Elde edilen çözümlerde c keyfi sabitinin sıfır seçilmesiyle (5.4) (2+1)-boyutlu BLMP denkleminin soliter (5.267) Cole-Hopf dönüşümü için bulunur.

5.6.3. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denkleminin Auto-Bäcklund Dönüşümleri

Genişletilmiş homojen denge yöntemine göre (5.7) denkleminin çözümü

$$u(x,y,t) = f'(w)w_x + u_0(x,y,t). \tag{5.282}$$

biçiminde alınabilir. Burada f, w sonradan belirlenecek iki fonsiyon ve $u_0(x,y,t)$ (5.7) denkleminin bir çözümüdür. (5.282) denkleminin (5.7) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
&[f^{(5)}+6f''f''']w_yw_x^4+[(4w_x^3w_{xy}+6w_yw_x^2w_{xx})f^{(4)}+(6w_x^3w_{xy}\\
&+12w_yw_x^2w_{xx})(f'')^2+(3w_{xy}w_x^3+3w_{xx}w_yw_x^2)f'f''']\\
&+[(6w_x^2w_{xxy}+3w_y(w_{xx})^2+3u_{0y}w_x^3+2w_tw_yw_x+4w_yw_xw_{xxx}\\
&+12w_xw_{xx}w_{xy}+3u_{0x}w_yw_x^2)f'''+(3w_yw_xw_{xxx}+15w_{xy}w_xw_{xx}\\
&+3w_x^2w_{xxy}+3w_{xx}^2w_y)f''f']+[(3w_{xy}w_{xxx}+3w_{xx}w_{xxy})(f')^2\\
&+(6w_{xx}w_{xxy}+4w_{xy}w_{xxx}+4w_xw_{xxxy}+w_yw_{xxxx}+2w_{yt}w_x\\
&+2w_yw_{xt}+2w_tw_{xy}+3w_x^2u_{0xy}+3w_yw_xu_{0xx}+9u_{0y}w_xw_{xx}\\
&+6u_{0x}w_xw_{xy}+3u_{0x}w_yw_{xx})f'']+[w_{xxxxy}+2w_{xyt}+3w_{xy}u'_{0xx}\\
&+3u_{0y}w_{xxx}+3w_{xx}u_{0xy}+3u_{0x}w_{xxy}]f+[3u_{0y}u_{0xx}+3u_{0x}u_{0xy}\\
&+u_{0xxxy}+2u_{0yt}]=0.
\end{aligned} \tag{5.283}$$

elde edilir. Bu ifadenin sadeleştirilmesi için, c keyfi bir sabit olmak üzere (5.250) olarak alınsın. Böylelikle (5.7) denkleminde yerine yazılması gereken gerekli türevli terimler (5.251) biçiminde elde edilebilir. (5.251) eşitliklerinin kullanılmasıyla, (5.283) denklemi $f^{(0)}f', f'', f'', f^{(4)}$ ve $f^{(5)}$ terimlerinin toplamı olarak yeniden yazılabilir. Elde edilen denklemde katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle

$$
\begin{aligned}
f^{(5)} &: 1-\tfrac{c}{2}=0,\\
f^{(4)} &: 4w_x^3w_{xy}+6w_yw_x^2w_{xx}-2cw_yw_x^2w_{xx}\\
&\quad -cw_x^3w_{xy}-cw_{xy}w_x^3-cw_{xx}w_yw_x^2=0,\\
f''' &: (6w_x^2w_{xxy}+3w_y(w_{xx})^2+3u_{0y}w_x^3+2w_tw_yw_x\\
&\quad +4w_yw_xw_{xxx}+12w_xw_{xx}w_{xy}+3u_{0x}w_yw_x^2)+(3w_yw_xw_{xxx}\\
&\quad +15w_{xy}w_xw_{xx}+3w_x^2w_{xxy}+3w_{xx}^2w_y)(-\tfrac{c}{2})=0,\\
f'' &: -3cw_{xy}w_{xxx}-3cw_{xx}w_{xxy}+6w_{xx}w_{xxy}+4w_{xy}w_{xxx}+4w_xw_{xxxy}\\
&\quad +w_yw_{xxxx}+2w_{yt}w_x+2w_yw_{xt}+2w_tw_{xy}+3w_x^2u_{0xy}+3w_yw_xu_{0xx}\\
&\quad +9u_{0y}w_xw_{xx}+6u_{0x}w_xw_{xy}+3u_{0x}w_yw_{xx}=0,\\
f' &: w_{xxxxy}+2w_{xyt}+3w_{xy}u_{0xx}+3u_{0y}w_{xxx}+3w_{xx}u_{0xy}+3u_{0x}w_{xxy}=0,\\
f^{(0)} &: u_{0xxxy}+3u_{0y}u_{0xx}+3u_{0x}u_{0xy}+2u_{0yt}=0.
\end{aligned}
\tag{5.284}
$$

denklem sistemi elde edilir. Yukarıdaki sistemin ilk denkleminden

$$c=2 \tag{5.285}$$

olarak bulunur. Burada dikkat çekilmesi gereken nokta, bulunan c denkleminin (5.250) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilen ifade (5.7) (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin Hirota bilineer formunun bulunması için kullanılan değişken dönüşümü ile aynı olduğudur. Bu değerin denklem sisteminin kalan denklemlerinde yerine yazılmasıyla aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemler elde edilir:

$$w_x(3w_xw_{xxy}-3w_{xy}w_{xx}+3u_{0y}w_x^2+2w_tw_y+w_yw_{xxx}+3u_{0x}w_yw_x)=0 \tag{5.286}$$

$$
\begin{aligned}
&w_yw_{xxxx}-2w_{xy}w_{xxx}+4w_xw_{xxxy}+2w_{yt}w_x+2w_yw_{xt}+2w_tw_{xy}\\
&+3w_x^2u_{0xy}+3w_yw_xu_{0xx}+9u_{0y}w_xw_{xx}+6u_{0x}w_xw_{xy}+3u_{0x}w_yw_{xx}=0
\end{aligned}
\tag{5.287}
$$

$$w_{xxxxy}+2w_{xyt}+3w_{xy}u_{0xx}+3u_{0y}w_{xxx}+3w_{xx}u_{0xy}+3u_{0x}w_{xxy}=0 \tag{5.288}$$

$$u_{0xxxy}+3u_{0y}u_{0xx}+3u_{0x}u_{0xy}+2u_{0yt}=0 \tag{5.289}$$

(5.286) denkleminin x e göre bir kez türevinin alınmasıyla, (5.286), (5.287) ve (5.288) denklemleri arasındaki bağıntının

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial x}(3w_xw_{xxy}-3w_{xy}w_{xx}+3u_{0y}w_x^2+2w_tw_y+w_yw_{xxx}+3u_{0x}w_yw_x)\\
&+w_x\tfrac{\partial}{\partial x}(w_{xxxy}+3w_{xx}u_{0y}+3w_{xy}u_{0x}+2w_{yt})=\\
&w_yw_{xxxx}-2w_{xy}w_{xxx}+4w_xw_{xxxy}+2w_{yt}w_x+2w_yw_{xt}+2w_tw_{xy}\\
&+3w_x^2u_{0xy}+3w_yw_xu_{0xx}+9u_{0y}w_xw_{xx}+6u_{0x}w_xw_{xy}+3u_{0x}w_yw_{xx}
\end{aligned} \tag{5.290}$$

biçiminde olduğu görülecektir. Böylelikle yukarıdaki koşulların aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemlerin sağlanmasıyla mümkün olduğu görülür.

$$w_{xxxy}+3w_{xx}u_{0y}+3w_{xy}u_{0x}+2w_{yt}=0, \tag{5.291}$$

$$3w_xw_{xxy}-3w_{xy}w_{xx}+3u_{0y}w_x^2+2w_tw_y+w_yw_{xxx}+3u_{0x}w_yw_x=0, \tag{5.292}$$

$$u_{0xxxy}+3u_{0y}u_{0xx}+3u_{0x}u_{0xy}+2u_{0yt}=0. \tag{5.293}$$

(5.7) (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi için Auto-Bäcklund dönüşümü, $w(x,y,t)$ ve $u_0(x,y,t)$ (5.291), (5.292) ve (5.293).denklemlerini sağlamak üzere,

$$u(x,y,t)=2\frac{w_x}{w}+u_{0,} \tag{5.294}$$

şeklindedir.

Böylelikle (5.7) denklemin soliter dalga çözümleri (5.294) denklemi yardımıyla, (5.7) denkleminin verilen herhangi bir u_0 çözümü için (5.291) ve (5.292) denklemlerinin çözülmesiyle bulunabilir.

(i) (5.294) denkleminde $u_0=c$ alınmasıyla (5.7) denkleminin Auto-Bäcklund dönüşümü

$$u(x,y,t)=2\frac{w_x}{w}+c, \tag{5.295}$$

şeklinde elde edilir. Burada $w(x,y,t)$

$$w_{xxxy}+2w_{yt}=0, \tag{5.296}$$

$$3w_xw_{xxy} - 3w_{xy}w_{xx} + 2w_tw_y + w_yw_{xxx} = 0. \tag{5.297}$$

denklemlerinin çözümüdür.

(ii) (5.296) denkleminde $u_0 = 0$ alınmasıyla, $w(x, y, t)$ (5.296) ve (5.297).denklemlerinin çözümü olmak üzere, Cole-Hopf dönüşümü elde edilir:

$$u(x, y, t) = 2\frac{w_x}{w}. \tag{5.298}$$

5.6.4. (2+1)-Boyutlu Lineer Olmayan Oluşum Denkleminin Yeni Soliter Dalga Çözümlerinin Bulunması

Bu bölümde, önceki kısımda bulunan Auto-Bäcklund dönüşümlerinin kullanılması ve Maple 14 paket programı yardımıyla (5.7) denkleminin çeşitli çözümleri elde edilecektir. Bulunan bu çözümlerde, parametrelere özel değerler verilerek elde edilen hareketli dalgaların grafiklerine yer verilecektir.

Bu sebeple, ilk olarak, (5.295) Auto-Bäcklund dönüşümü ve (5.7). denkleminin sabit u_0 çözümü ele alınacaktır.

(i) a, b, k, l, ω ve p daha sonra belirlenecek olan sabitler ve ξ_0 keyfi bir sabit olmak üzere, $w(x, y, t)$

$$w(x, y, t) = a\cosh(kx + my + \omega t + \xi_0) + b\sinh(kx + my + \omega t + \xi_0) + p, \tag{5.299}$$

olsun. (5.299) denkleminin (5.296) ve (5.297) denklemlerinde yerine yazılmasıyla cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümlerinden aşağıdaki iki durum elde edilir.

Durum 1:

$$a = b, \omega = -\frac{k^3}{2}.$$

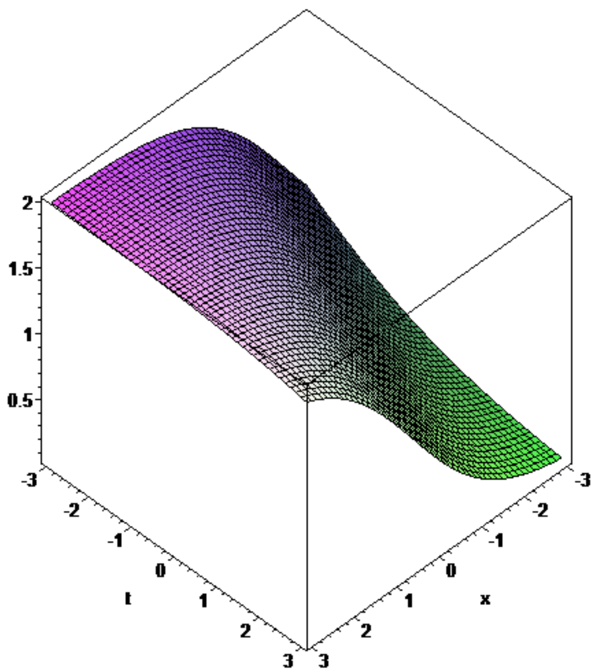
Burada b ve k sıfırdan farklı keyfi parametrelerdir. Böylece

$$w_1(x, y, t) = b\cosh\left(-kx - my + \frac{k^3}{2}t - \xi_0\right) - b\sinh\left(-kx - my + \frac{k^3}{2}t - \xi_0\right) + p, \tag{5.300}$$

bulunur. (5.300) denkleminin (5.295) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.7) lineer olmayan (2+1) boyutlu oluşum denkleminin soliter dalga çözümleri

$$u_1(x,y,t) = 2bk\frac{\cosh\left(-kx-my+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)-\sinh\left(-kx-my+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)}{b\left(\cosh\left(-kx-my+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)-\sinh\left(-kx-my+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)\right)+p}+c, \tag{5.301}$$

olarak elde edilir. (5.301) denkleminde $b=2, c=0, k=1, l=3, \xi_0=1, p=2$ seçilerek ve $y=0$ alınarak Maple paket programı yardımıyla aşağıdaki grafik bulunur.



Şekil 5.1 $u_1(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü

Durum 2

$$a=-b, \omega=-\frac{k^3}{2},$$

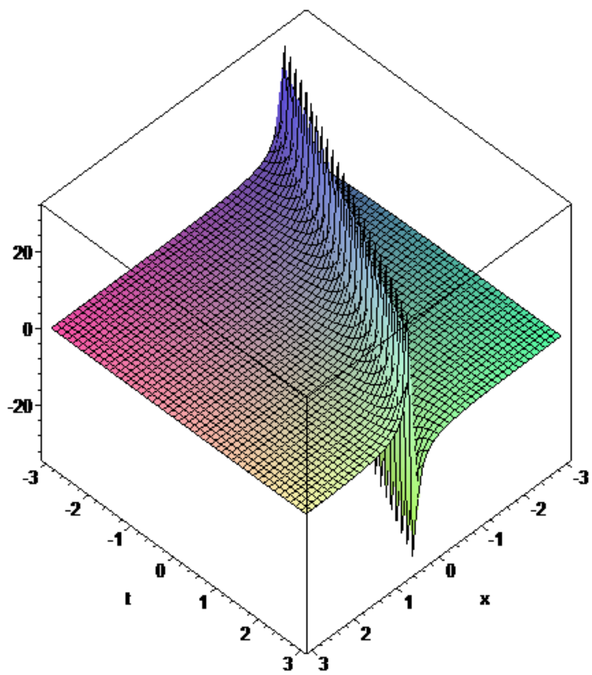
Burada b ve k sıfırdan farklı keyfi parametrelerdir. Böylece

$$w_2(x,y,t) = -b\cosh\left(-kx-my+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)-b\sinh\left(-kx-my+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)+p, \tag{5.302}$$

bulunur. (5.302) denkleminin (5.295) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.7) lineer olmayan oluşum denklemi için soliter dalga çözümleri

$$u_2(x,y,t) = 2bk\frac{\sinh\left(-kx-ly+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)+\cosh\left(-kx-ly+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)}{-b\left(\cosh\left(-kx-ly+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)+\sinh\left(-kx-ly+\frac{k^3}{2}t-\xi_0\right)\right)+p}+c, \tag{5.303}$$

olarak elde edilir. (5.303) denkleminde $b=2, c=0, k=1, l=3, \xi_0=1, p=2$ seçilerek ve $y=0$ alınarak Maple paket programı yardımıyla aşağıdaki grafik bulunur.



Şekil 5.2 $u_2(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü

(ii) İkinci olarak $w(x,y,t)$

$$w(x,y,t) = a\cos(kx+my+\omega t+\xi_0)+b\sin(kx+my+\omega t+\xi_0)+p, \tag{5.304}$$

biçiminde olsun. Burada $a, b, k, m, \omega, \xi_0$ ve p daha sonra belirlenecek olan parametreler ve ξ_0 keyfi bir sabittir. (5.304) denkleminin (5.296) ve (5.297) denklemlerinde yerine yazılmasıyla cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümlerinden, b ve k sıfırdan farklı keyfi parametreler olmak üzere,

$$a = bi, \omega = \frac{k^3}{2},$$

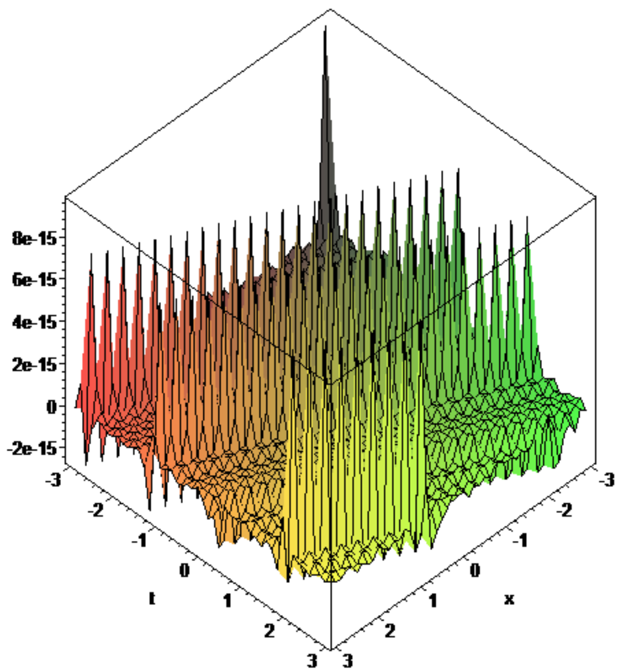
bulunur. Böylece

$$w_3(x,y,t) = bi\cos(kx+my+\frac{k^3t}{2}+\xi_0)+b\sin(kx+my+\frac{k^3t}{2}+\xi_0)+p, \tag{5.305}$$

olur. (5.305) denkleminin (5.298) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.7) lineer olmayan oluşum denkleminin periyodik dalga çözümü

$$u_3\left(x,y,t\right)=\frac{2bk\left(-\sin(kx+ly+\frac{k^3t}{2}+\xi_0)i+\cos(kx+ly+\frac{k^3t}{2}+\xi_0)\right)}{bi\cos(kx+ly+\frac{k^3t}{2}+\xi_0)+b\sin(kx+ly+\frac{k^3t}{2}+\xi_0)+p}+c, \quad (5.306)$$

biçiminde elde edilir. (5.306) denkleminde $b=2, c=0, k=1, l=3, \xi_0=1, p=2$ seçilerek ve $y=0$ alınarak Maple paket programı yardımıyla aşağıdaki grafik bulunur.



Şekil 5.3 $u_3(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü

(iii) (5.7) denkleminin $w\left(x,y,t\right)$ çözümü

$$w\left(x,y,t\right)=A\exp\left(k_1x+m_1y+\omega_1t+\xi_{1_0}\right)+B\exp\left(k_2x+m_2y+\omega_2t+\xi_{2_0}\right)+C, \quad (5.307)$$

formunda aranacaktır. Burada A,B,C,k_i,m_i,ω_i $(i=1,2)$ daha sonra belirlenecek sabitler ve ξ_{i_0} $(i=1,2)$ keyfi sabitlerdir. (5.307) denkleminin (5.296) ve (5.297) denklemlerinde yerine yazılmasıyla

$$k_1=k_2,\omega_1=-\frac{k_2^3}{2},\omega_2=-\frac{k_2^3}{2},$$

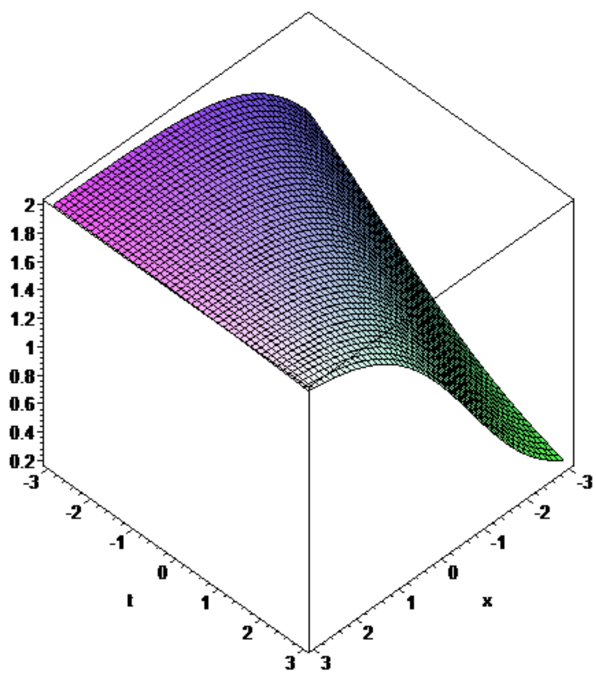
elde edilir. Burada k_1 ve k_2 sıfırdan farklı parametrelerdir. Böylece

$$w_4(x,y,t) = A\exp\left(k_2x + m_2y - \frac{k_2^3}{2}t + \xi_{1_0}\right) + B\exp\left(k_2x + m_2y - \frac{k_2^3}{2}t + \xi_{2_0}\right) + C, \tag{5.308}$$

bulunur. (5.308) denkleminin (5.298) denkleminde yerine yazılmasıyla, (5.7) (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin soliter dalga çözümü

$$u_4(x,y,t) = 2k_2\frac{A\exp\left(k_2x + m_2y - \frac{k_2^3}{2}t + \xi_{1_0}\right) + B\exp\left(k_2x + m_2y - \frac{k_2^3}{2}t + \xi_{2_0}\right)}{A\exp\left(k_2x + m_2y - \frac{k_2^3}{2}t + \xi_{1_0}\right) + B\exp\left(k_2x + m_2y - \frac{k_2^3}{2}t + \xi_{2_0}\right) + C} + c, \tag{5.309}$$

bulunur. Elde edilen çözümlerde c keyfi sabitinin sıfır seçilmesiyle (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin soliter dalga çözümlerinin (5.298) Cole-Hopf dönüşümü için bulunur. (5.309) denkleminde $b = 2, c = 0, k = 1, l = 3, \xi_0 = 1, p = 2$ seçilerek ve $y = 0$ alınarak Maple paket programı yardımıyla aşağıdaki grafik bulunur.



Şekil 5.4 $u_4(x,y,t)$ çözümüne karşılık gelen hareketli dalga çözümü

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu-soliton çözümlerini elde etmede önemli bir yöntem olan Hirota bilineer metot ve uygulamaları detaylı bir şekilde anlatılarak, bu yöntemlerin çeşitli denklemlere uygulamalarına yer verilmiştir. Ayrıca genişletilmiş homojen denge yöntemi ile çeşitli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin Auto-Bäcklund dönüşümleri elde edilerek, bu dönüşümler kullanılarak ilgili denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir. Bulunan bu çözümlerde, parametrelere özel değerler verilerek elde edilen hareketli dalgaların grafiklerine yer verilmiştir.

Bilineerleştirme esasına dayanan Hirota bilineer metotun uygulanabilmesi için öncelikle ele alınan denklemin bilineer formunun biliniyor olması gerekir. Bu nedenle tezde incelenecek olan kısmi diferensiyel denklemlerin literatürde bilinen bilineer formları verilmiştir. Her ne kadar Hirota bilineer metot yaygın bir şekilde kullanılsa da, çoklu-soliton çözümü elde edilecek lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi bilineer forma dönüştürecek dönüşümü bulmak kolay değildir. Ayrıca bilineer formların elde edilmesi de bir o kadar zordur. Bu sebeple, Hereman ve Nuseir tarafından geliştirilen Hirota bilineer metodun sadeleştirilmişi bilineer formlara gerek duyulmaksızın uygulanabildiğinden daha pratik bir yöntemdir. Bu tez çalışmasında, ilgili yöntemin (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi, (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemi, (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1)-boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, (3+1)-boyutlu sığ su denklemi ve (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemine uygulamalarına yer verilmiştir. Bu sonuçlardan, (2+1)-boyutlu Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi ve (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denklemine uygulanması ile elde edilen çözümler daha önce literatürde yer almamaktadır.

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanamayan lineer üst üste bindirme prensibinin Hirota bilineer denklemlere uygulanması için gerekli şart verilmiştir. Buradan hareketle Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemi, (3+1)-boyutlu

Jimbo-Miwa denklemi, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denklemi ve (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin $N-$dalga çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu çözümlerden (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş sığ su denklemi ve (3+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin $N-$dalga çözümleri yeni çözümler olup, literatürde daha önce bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasının kapsamı bununla sınırlandırılmıştır. Fakat, lineer altuzayları verilen $N-$dalga çözümlerinin yeni Hirota bilineer denklemleri oluşturdukları ispatlanmıştır. Ağırlıkları kullanan bir algoritmanın uygulanması ile istenen Hirota bilineer denklemi hesaplamak için bir parametre kullanarak, dalga sayıları ve sıklıklarının parametrizasyonu gösterilmiştir (Ma ve Fan, 2011; Ma vd., 2012) Böylelikle yeni Hirota bilineer denklemler elde edilmiştir. İlerleyen zamanlarda, bu konu üzerine çalışmalar devam ettirilerek belirtilen özelliklere sahip yeni Hirota bilineer denklemler üretilmesi planlanmaktadır.

Ayrıca, bu çalışma kapsamında, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin $N-$dalga çözümlerini bulmada kullanılan bir diğer yöntem olan çoklu üstel fonksiyon metodunun (2+1)-boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi, (3+1) genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili denklemi ve (3+1) genelleştirilmiş B-tipi Kadomtsev-Petviashvili denklemine uygulamalarına yer verilmiştir.

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin $N-$dalga çözümleri çoklu soliton çözümleri de içermektedir. Bazı kısıtlamalar ile $N-$dalga çözümlerinden çoklu-soliton çözümleri elde edilebilir.

Bu çalışmada ele alınan yöntemlerin literatürdeki birçok farklı lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleme uygulanması ile yeni soliter dalga ve soliton çözümler sonuçlar elde edilebilir (Ma ve Zhu, 2012).

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin soliton çözümlerini elde etmede sıklıkla kullanılan yöntemlerden biri Hirota bilineer metotdur. Fakat yöntemler tezde verilenlerle sınırlı değildir. Örneğin $N-$soliton çözümleri elde etmek için Wronskiyan tekniği de birçok bilim adamı tarafından kullanılmıştır. İlerleyen zamanlarda, tezde ele alınan denklemlerin farklı $N-$soliton çözümlerinin bu teknik kullanılarak elde edilmesi planlanmaktadır.

Ayrıca, genişletilmiş homojen denge yönteminin kullanılmasıyla (2+1)-boyutlu

Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denkleminin ve (2+1)-boyutlu lineer olmayan oluşum denkleminin yeni Auto-Bäcklund dönüşümleri elde edilmiştir. Daha sonra bu dönüşümlerin kullanılmasıyla bu denklemin çeşitli yeni hareketli dalga çözümleri bulunmuştur. Elde edilen çözümler soliton, rasyonel fonksiyon, double-soliton ve periyodik dalga çözümler içerir.

Homojen denge esasına dayanan birçok tam çözüm yöntemi var olmasına rağmen her geçen gün bilim insanları yeni yöntemler keşfetmeye devam etmektedirler. Bu yeni keşfedilen yöntemlerle tezde ele alınan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin yeni soliter dalga çözümleri elde edilebilir.

Ayrıca literatürde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bilineerleştirilmesinde kullanılan, bu çalışmada yer alan dönüşümlerden başka dönüşümler de bulunmaktadır. İlerleyen zamanlarda bu dönüşümlerle ilgili çalışmalara yer verilebilir.

Bu çalışma boyunca, sembolik hesaplama programı Maple 14 kullanılarak, hesaplamalar kolaylıkla ve hızlı bir şekilde yapılmıştır. Ayrıca bu program yardımıyla elde edilen çözümlerin denklemleri sağladığı, denklemlerde yerine yazılarak doğrulanmıştır. Bu çalışmada elde edilen çözümlerin lineer olmayan bilimlerin uygulamalarında kullanışlı olması beklenmektedir.

Bu tez, BAP “2016-1179” no’lu proje çerçevesinde desteklenmiş olup tezin Bulgular ve Tartışma bölümünde yer alan sonuçlarla iki adet uluslararası makale ve bir adet uluslarararası tam metin bildiri üretilmiştir. Bu çalışmalar sırasıyla aşağıda sıralanmıştır:

• M. Kaplan, A. Akbulut, A. Bekir, The Auto-Bäcklund Transformations for the (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation, AIP Conference Proceedings 1798 (1) 020071 (2017).

• M. Kaplan, M. N. Ozer, Auto-Bäcklund transformations and solitary wave solutions for the nonlinear evolution equation, Optical and Quantum Electronics, 50 (2018) 33.

• M. Kaplan, M. N. Ozer, Multiple-soliton solutions and analytical solutions to a nonlinear evolution equation, Optical and Quantum Electronics, 50 (2018) 2.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ablowitz, M. J., Clarkson, P.A., 1991, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press.

Alrazi, A., 2012, Wronskian, Grammian and Pfaffian Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations, PhD thesis, University of South Florida.

Bekir, A., 2007, Painlevé test for some (2+1)-dimensional nonlinear equations, Chaos, Solitons&Fractals, 32, 2, 449-455.

Calogero F., Nucci M.C., 1991, Lax pairs galore, Journal of Mathematical Physics, 32, 72.

Conte, R.M., Musette, M., 1989, Painlevé analysis and Bäcklund transformation in the Kuramoto-Sivashinsky equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, 22, 2, 169-177.

Dorizzi, B., Grammaticos, B., Ramani, A., Winternitz, P., 1986, Are all the equations of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy integrable?, Journal of Mathematical Physics, 27, 2848-2852.

El-Sayed, S.M., Kaya, D., 2004, The decomposition method for solving (2+1)-dimensional Boussinesq equation and (3+1)-dimensional KP equation, Applied Mathematics and Computation, 157, 523-534.

Eslami, M., 2014, Solitary Wave solutions to the (3+1)-dimensional Jimbo Miwa equation, Computational Methods for Differential Equations, 2, 2, 115-122.

Fan, E., Zhang, H., 1998, A note on the homogeneous balance method, Physics Letters A, 246, 5, 403-406.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Fan, E., Zhang, H., 2001, On the extented applications of homogeneous balance method, Applied Mathematics and Computation, 19, 7, 381-388.

Fan, E., 2002, Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for general variable coefficient KdV equations, Physics Letters A, 294, 1, 26-39.

Gardner, C.S., Green, J. M., Kruskal, M. D. ve Miura, R. M., 1967, Method for Solving Kortweg-de Vries Equation, Physical Review Letters, 19, 1095-1097.

Geng, X., Ma, Y., 2007, N-soliton solution and its Wronsian form of a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation, Physics Letters A, 369, 4, 285-289.

Gilson, C.R. , Nimmo, J.J.C., Willox, R.,1993, A (2+1)-dimensional generalization of the AKNS shallow water wave equation, Physics Letters A, 180, 337-345.

Hereman, W., Nuseir, A., 1997, Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations, Mathematics and Computers in Simulation, 43, 1, 13-27.

Hirota, R., 1971, Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons, Physical Review Letters, 27, 1192-1194.

Hirota, R., 1972 a, Exact Solution of the Modified Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons, Journal of the Physical Society of Japan, 33, 1456-1478.

Hirota, R., 1972 b, Exact Solution of the Sine-Gordon Equation for Multiple Collisions of Solitons, Journal of the Physical Society of Japan, 33, 1459-1463.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hirota, R., 1973 a, Exact Envelope-Soliton Solutions of a Nonlinear Wave Equation, Journal of Mathematical Physics, 14, 805-809.

Hirota, R., 1973 b, Exact N-Soliton Solution of a Nonlinear Lumped Network Equation, Journal of the Physical Society of Japan, 35, 286-288.

Hirota, R., 1973 c, Exact Three-Soliton Solution of the Two-Dimensional Sine-Gordon Equation, Journal of the Physical Society of Japan, 35, 1566-1569.

Hirota, R., 1974, A New Form of Bäcklund Transformations and Its Relation to the Inverse Scattering Problem, Progress of Theoretical Physics, 52, 5, 1498-1512.

Hirota, R., 1980, Direct methods in Soliton Theory, in Solitons, eds. R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Topics in Current Physics, Springer-Verlag, 17, Berlin, s. 1980.

Hirota, R., Satsuma, J., 1976, A Variety of Nonlinear Network Equations Generated From the Bäcklund Transformation for the Toda Lattice, Progress of Theoretical Physics, 29, 64-100.

Hirota, R., Satsuma, J., 1977, Nonlinear Evolution Equations Generated from the Bäcklund Transformation for the Boussinesq Equation, Progress of Theoretical Physics, 57, 3, 797-807.

Hirota, R., 1982, Bilinearization of Soliton Equations, Journal of the Physical Society of Japan, 51, 323-331.

Hirota, R., 2004, The Direct Method in Soliton Theory, Cambridge University Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hietarinta, J., 1987, A Search for Bilinear Equations Passing Hirota's Three-soliton Condition. I. KdV-type Bilinear Equations, Journal of Mathematical Physics, 28, 1732-1742.

Hietarinta, J., 1988, A Search for Bilinear Equations Passing Hirota's Three-soliton Condition. IV. Complex Bilinear Equation, Journal of Mathematical Physics, 29, 628-635.

Hietarinta, J., 2005, Hirota's bilinear method and soliton solutions, Physics AUC, 15, 1, 31-37.

Hosseini, K., Kumar, D., Kaplan, M., Yazdani, E. B., 2017, New Exact Traveling Wave Solutions of the Unstable Nonlinear Schrodinger Equations, Communications in Theoretical Physics, 68, 6, 761-767.

Irk, D., 2007, Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kadomtsev, B., Petviashvili, V., 1970, On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersive Media, Soviet Physics-Doklady, 31, 719-721.

Kashiwara, M., Jimbo, M., Date, E., Miwa, T., 1981, Soliton Equations as Dynamical Systems on an Infinite Dimensional Grassmann Manifold, RIMS Kokyuroku, 439, 30-46.

Kashiwara, M., Jimbo, M., Date, E., Miwa, T., 1982, Kac-Moody Lie Algebras and Soliton Equations, Sugaku (in Japanese), 34.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Korteweg, D.J., Vries, G., 1895, On the Change of the Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, Philos.Mag. Ser., 5, 39, 422-443.

Lax, P. D., 1968, Integrals of Non-Linear Equations of Evolution and Solitary Waves, Communications Pure Applied Mathematics, 21, 467-490.

Li, B., Chen, Y., Zhang, H., 2002, Auto-Bäcklund transformation and exact solutions for compound KdV-type and compound KdV-Burgers-type equations with nonlinear terms of any order, Physics Letters A, 305, 6, 377-382.

Li, Z., Dai, Z., Liu, J., 2011, Exact three-wave solutions for the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation, Computers & Mathematics with Applications, 61, 8, 2062-2066.

Liu, B., 2012, The first integral method for some time fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 395, 2, 684-693.

Liu, S., Fu, Z., Liua, S., Zhao, Q., 2001, Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, Physics Letters A, 289, 1-2, 69-74.

Luo, L., 2010, Quasi-Periodic Waves and Asymptotic Property for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation, Communications in Theoritical Physics, 54, 208-214.

Luo, L., 2011, New exact solutions and Backlund transformation for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation, Physics Letters A, 375, 1059-1063.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Lü, Z., Su, J., Xie, F., 2013, Construction of exact solutions to the Jimbo-Miwa equation through Bäcklund transformation and symbolic computation, Computers & Mathematics with Applications, 65, 4, 648-656.

Lv, N., Mei, J., Zhang, H., 2011, New Explicit Solutions for (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili (KP) Equation, International Journal of Nonlinear Science, 11, 4, 506-512.

Ma, W.-X., 1997, Darboux transformations for a Lax integrable system in 2n dimensions, Letters in Mathematical Physics, 39, 33-49.

Ma, W.-X., 2005, Integrability A. Scott (Ed.), Encyclopedia of Nonlinear Science, 450-453.

Ma, W.-X., You, Y., 2005, Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions, Transactions of the American Society, 357, 1753-1778.

Ma, W.-X., Huang, T., Zhang, Y., 2010, A multiple exp-function method for nonlinear differential equations and its application, Physica Scripta, 82, 6, 69-74.

Ma, W.-X., Fan, E., 2011, Linear superposition principle applying to Hirota bilinear equations, Computers & Mathematics with Applications, 61, 4, 950-959.

Ma, W.-X., Pekcan, A., 2011, Uniqueness of the Kadomtsev-Petviashvili and Boussinesq equations, Z. Naturforsch A, 66, 282-377.

Ma, W.-X., Zhang, Y., Tang, Y., Tu, J., 2012, Hirota bilinear equations with linear subspaces of solutions, Applied Mathematics and Computation, 218, 13, 7174-7183.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ma, W.-X., Zhu, Z., 2012, Solving the (3+1)-dimensional generalized KP and BKP equations by the multiple exp-function algorithm, Applied Mathematics and Computation, 218, 11871-11879.

Matveev, V.B., 1979, Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation, depending on functional parameters, Letters in Mathematical Physics, 3, 3, 213-216.

Miura, R.M., 1978, Bäcklund Transformation, Springer.

Michio, J., Tetuji, M., 1983, Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras, RIMS, Kyoto University, 19, 943-1001.

Murugaian, S., 1998, A new approach to Bäcklund transformations of nonlinear evolution equations, Applied Mathematics and Computation, 123, 3, 645-650.

Musette, M., Conte R., 1991, Algorithmic method for deriving Lax pairs from the invariant Painlevé analysis of nonlinear partial differential equations, Journal of Mathematical Physics, 32, 1450.

Najafi, M., Arbabi, S., Najafi, M., 2013, Wronskian determinant solutions of the (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation, International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 1, 1, 8-11.

Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E., 2013, Solutions of the nonlinear differential equations by use of modified Kudryashov method, AIP Conference Proceedings, 1558, 1927.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Peng, Y.-Z., 2003, A mapping method for obtaining exact travelling wave solutions to nonlinear evolution equations, Chinese Journal of Physics, 41, 3, 103-110.

Peng, Y.-Z., 2006, New types of localized coherent structures in the Bogoyavlenskii-Schiff equation, International Journal of Theoritical Physics, 45, 9, 1779-1783.

Serway, R.A., Jewett, J. W., 2004, Physics for Scientists and Engineers, 6th Edition, Thomson, USA.

Senthilvelan, M., 2001, On the extented applications of homogeneous balance method, Applied Mathematics and Computation 123, 381-388.

Shang, Y., Huang, Y., Yua, W., 2011, Bäcklund transformations and abundant exact explicit solutions of the Sharma-Tasso-Olver equation, Applied Mathematics and Computation, 217, 17, 7172-7183.

Shi, Y.-B., Zhang, Y., 2017, Rogue waves of a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 44, 120-129.

Scott, R., J., 1838, Report of the Committee on Waves, Report of the 7th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Liverpool, 417-496.

Scott, Russell, J. (1844). "Report on Waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, London, 311-390.

Solin, P., 2006, Partial differential equations and finite element method, John Wiley and Sons publication, s.1.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tandogan, Y.A., Pandir, Y., Gurefe, Y., 2013, A Multiple extended trial equation method for the fractional Sharma-Tasso-Olver Equation, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 20130021.

Tang, Y.-N., Ma, W.-X., Xu, W., 2012, Grammian and Pfaffian solutions as well as Pfaffianization for a (3+1)-dimensional generalized shallow water equation, Chinese Physics B, 21, 7, 070212.

Tang, Y., Zai, W., 2015, New periodic-wave solutions for (2+1)- and (3+1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equations, Nonlinear Dynamics, 81, 1-2, 249-255.

Tasso, H., 1976, Cole's ansatz and extension of Burgers equation, Ber. MPI fur Plasmaphysik (Garching)., Report IPP, 6, 142.

Tian, B., Gao, Y.T., 1996, Beyond travelling waves: a new algorithm for solving nonlinear evolution equations, Computer Physics Communications, 95, 139-142.

Xu G., Li Z., 2005, The Painlevé Test of Nonlinear Partial Differential Equations and Its Implementation Using Maple, Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications, 3519, 179-190.

Wang, M., 1996, Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation, Physics Letters A, 213, 5-6, 279-287.

Wang, M., Zhou, Y., Li, Z., 1996, Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 216, 1-5, 67-75.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Wazwaz, A.-M., 2007, Multiple-soliton solutions for the KP equation by Hirota's bilinear method and by the tanh-coth method, Applied Mathematics and Computation, 190, 633-640.

Wazwaz, A.-M., 2008, Multiple-soliton solutions for the Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff, Jimbo-Miwa and YTSF equations, Applied Mathematics and Computation 203, 592-597.

Wazwaz, A.-M., 2009, The Cole-Hopf transformation and multiple soliton solutions for the integrable sixth-order Drinfeld-Sokolov-Satsuma-Hirota equation, Applied Mathematics and Computation, 207, 1, 248-255.

Wazwaz., A.-M., 2010, Four (2+1)-dimensional integrable extensions of the Kadomtsev-Petviashvili equation", Applied Mathematics and Computation 215, 3631-3644.

Wazwaz, A.-M., 2013, A variety of distinct kinds of multiple soliton solutions for a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation, Mathematical Methods in Applied Sciences, 36, 349–357.

Wazwaz, A.-M., 2016, Multiple soliton solutions and multiple complex soliton solutions for two distinct Boussinesq equations, Nonlinear Dynamics, 85, 2, 731-737.

Wazwaz, A.-M., Xu, G., 2016, An extended modified KdV equation and its Painlevé integrability, Nonlinear Dynamics, 86, 3, 1455-1460.

Weiss, J., 1992, The singular manifold methods, In: Levi D, Winternitz P, editors. Painlevé transcedents, their asymptotics and physical applications, NATO advanced science institutes series B: physics, New York: Plenum Press, 278, 225-247.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Weiss, J., 1992, The singular manifold methods. In: Levi D, Winternitz P, editors. Painlevé transcedents, their asymptotics and physical applications, NATO advanced science institutes series B: physics, New York: Plenum Press, 278, 225-247.

You, F.C. , Xia, T.C., Chen, D.Y., 2008, Decomposition of the generalized KP, cKP and mKP and their exact solutions, Physics Letters A, 372, 3184-3194.

Zabusky, N.J. ,Kruskal, M. D., 1965, Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Physical Review Letters, 15, 240-243.

Zhang, S.L ,Wu, B., Lou, S.Y., 2002, Painlevé analysis and special solutions of generalized Broer-Kaup equations, Physics Letters A, 300, 40-48.

Zayed, E.M.E., 2011, A note on the modified simple equation method applied to Sharma-Tasso-Olver equation, Applied Mathematics and Computation, 218, 7, 3962-3964.

Zayed, E.M.E., 2011, A note on the modified simple equation method applied to Sharma-Tasso-Olver equation, Applied Mathematics and Computation, 218, 7, 3962-3964.

Zayed, E.M.E., Al-Nowehy, Abdul-G., 2015, The Multiple Exp-Function Method and the Linear Superposition Principle for Solving the (2+1)-Dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation, Z. Naturforsch, 70, 9a, 775-779.

Zeng, Z-F., Liu, J.-G., Nie, B., 2016, Multiple-soliton solutions, soliton-type solutions and rational solutions for the (3+1)-dimensional generalized shallow water equation in oceans, estuaries and impoundments, Nonlinear Dynamics, 86, 667-675.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zhoua, Y., Ma, W.-X., 2017, Applications of linear superposition principle to resonant solitons and complexitons, Computers and Mathematics with Application, 73, 1697-1706.

Zhu, Z.N., 1993, Painlevé property, Bäcklund transformation, Lax pair and soliton-like solution for a variable coefficient KP equation, Physics Letters A, 182, 277-281.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Melike Kaplan Yalçın
Uyruğu:	T. C.
Doğum Yeri- Tarihi:	Ankara- 12.09.1988
Adresi:	Kastamonu Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bölümü, 37150-KASTAMONU
E-posta Adresi:	mkaplan@kastamonu.edu.tr melike.kaplan2105@gmail.com
Eğitim Bilgileri:	**Doktora:** Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2013-2018)
	Yüksek Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2010-2013)
	Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2006-2010)
İş Deneyimi:	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Araştırma Görevlisi (2012-2017) Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2017-…)