Grupların Abelyen Olmayan Tensör Çarpımı

Işınsu Doğanay

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ağustos 2018

Non-Abelian Tensor Product of Groups

Işınsu Doğanay

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

August 2018

Grupların Abelyen Olmayan Tensör Çarpımı

Işınsu Doğanay

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İlker Akça

Ağustos 2018

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Işınsu Doğanay'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Grupların Abelyen Olmayan Tensör Çarpımı**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İlker Akça

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. İlker Akça

Üye : Doç. Dr. Ummuhan Ege Arslan

Üye : Doç. Dr. Sedat Pak

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. İlker Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Grupların Abelyen Olmayan Tensör Çarpımı**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 27/08/2018

Işınsu Doğanay

ÖZET

Tezin ilk bölümünde temel kavramlar verildi. İkinci bölümde grup etkisi özellikleri ile birlikte tanıtıldıktan sonra grupların çaprazlanmış modülleri ve örnekleri incelendi. Üçüncü bölümde iki grubun birbiri üzerine olan uyumlu etkilerinden yararlanarak abelyen olmayan tensor çarpımın özellikleri incelendi. Sonraki bölümde gruplar için çaprazlanmış kare yapısı ele alındı. Ayrıca bu bölümde bir önceki bölümde tanımlanan tensör çarpımı yardımıyla bir çaprazlanmış kare oluşturuldu. Son bölümde ise grupların 2-çaprazlanmış modülleri incelendi. 2-çaprazlanmış modüller ile çaprazlanmış kareler arasındaki ilişki incelendikten sonra sonuç olarak yine grupların tensör çarpımı kullanılarak bir 2-çaprazlanmış modül elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Serbest Gruplar, Grup Etkisi, Çaprazlanmış Modüller, Grupların Abelyan Olmayan Tensör Çarpımı, Çaprazlanmış Kare, 2-Çaprazlanmış Modül

SUMMARY

Basic consepts are given in the thesis first chapter. In the second chapter, after action of groups is introduced with its properties, crossed modules and examples of groups are examined. In the third chapter, non-abelian tensor product of groups defined by taking advantage of the compatible action of two groups an each other and this tensor products properties are examined. In the next chapter, crossed modules of groups structure handled. Also in this chapter, a crossed square created by taking advantage of tensor product which defined in the previous chapter. In the last chapter, 2-crossed module obtained using the tensor product of groups after examining relation between 2- crossed modules and crossed square.

Keywords: Free Groups, Action Of Group, Crossed Modules, The Non-Abelian Tensor Product Of Groups, Crossed Square, 2-Crossed Modul

TEŞEKKÜR

Öncelikle yükseklisans eğitimim boyunca tüm bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren güleryüzü ve hoşgörüsüyle motivasyonumu korumamı sağlayan çok değerli hocam

Doç. Dr. İ. İlker AKÇA'ya

tüm kalbiyle her zaman yanımda olan

Erkan SARMIŞ'a

ayrıca içtenlikle bana yardımcı olan canım arkadaşım

Gizem KAHRIMAN'a

ve dualarını benden esirgemeyen tüm sevdiklerime

TEŞEKKÜRLER.

Eskişehir, 2018
Işınsu Doğanay

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak (Whitehead, 1949) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, çaprazlanmış modüllere, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında yer vermiştir. Çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak ele alınabilir. Çaprazlanmış modüller, homotopi teorisi, cebirsel K-teori, gruplar üzerinde homoloji ve ko-homomloji, kombinatör grup teori ve diferansiyel geometri, devirli homoloji dahil olmak üzere matemetiğin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Whitehead tarafından grup yapısı üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modül kavramı, daha sonra cebir yapısı üzerine de aktarılmıştır. Cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin genel teorisi ile ilgili olarak (Shamnu, 1992) ve (Porter, 1987) ın çalışmaları vardır.

Bir G grubu için abelyen olmayan $G \otimes G$ tensör çarpımı (Dennis, 1976) tarafından tanımlanmıştır. Sonrasında (Brown ve Loday, 1987) bu $G \otimes G$ tensör çarpımı için bir topolojik özellik keşfetmişlerdir, buna göre,

”$K(G, l)$ Eilenberg Mclane uzayının süspansiyonunun üçüncü homoloji grubu için

$$\pi_3 SK(G, l) \cong Ker(G \otimes G \to G) \tag{1.1}$$

sağlanır. ”

(Brown ve Loday, 1987), birbirleri üzerine uyumlu etkileri olan iki grubun tensör çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 1. *G, H birbirleri üzerine uyumlu etkisi olan iki grup olsun. $G \times H$ üzerindeki serbest grubun, $g, g' \in G$ ve $h, h' \in H$ için*

$$\begin{aligned} (gg', h) &= ({}^g g', {}^g h)(g, h) & (1.2) \\ (g, hh') &= (g, h)({}^h g {}^h h') & (1.3) \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlayan elemanları tarafından üretilen normal alt grubuna bölümüne G ile H nin tensör çarpım grubu denir ve $G \otimes H$ ile gösterilir. Elemanları ise $g \otimes h$ olarak ifade edilir.

Buna göre yukarıdaki 1.2 ve 1.3 denklemleri

$$(gg' \otimes h) = ({}^{g}g' \otimes {}^{g}h)(g \otimes h) \quad (1.4)$$

$$(g \otimes hh') = (g \otimes h)({}^{h}g \otimes {}^{h}h') \quad (1.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca bu $G \otimes H$ tensör çarpım grubu yardımıyla yeni çaprazlanmış modül yapıları tanımlanmıştır.

Bu tezde ilk olarak, tanımlanan bu $G \otimes H$ tensör çarpım grubu ve çaprazlanmış modüller (Mc Dermott, 1998) da verildiği gibi ayrıntılı bir şekilde incelendi.

Sonrasında $G \otimes H$ tensör çarpım grubu kullanılarak bir çaprazlanmış kare oluşturulmuştur.

Son olarak çaprazlanmış kare ve 2-çaprazlanmış modül arasındaki bilinen ilişki (Mutlu ve Porter, 2003) kullanılarak $G \otimes H$ tensör çarpım grubu yardımıyla bir 2-çaprazlanmış modül yapısı edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin genelinde kullanılacak iyi bilinen kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2. *G boştan farklı bir küme ve $*$ da G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G, *)$ cebirsel yapısına bir grup denir.*

i) *Her $m, n \in G$ için $m * n \in G$ dir.*

ii) *Her $m, n, p \in G$ için $(m * n) * p = m * (n * p)$ dir.*

iii) *Her $m \in G$ için $m * e = e * m = m$ olacak şekilde bir $e \in G$ birim elemanı vardır ve tektir.*

iv) *Her $m \in G$ için $m * n = n * m = e$ olacak şekilde bir $n \in G$ ters elemanı vardır ve tektir.*

Bu dört şarta ilaveten eğer

v) *Her $m, n \in G$ için $m * n = n * m$ ise bu gruba abelyen grup denir.*

Örnek 1. $(\mathbb{Z}, +)$ *,* $(\mathbb{Q}, +)$ *,* $(\mathbb{R}, +)$ *abelyen grupturlar. Bilinen $+$ işlemine göre sonlu bir grup olan tek küme $\{0\}$ kümesidir. Bilinen çarpma işlemine göre $\{1\}, \{1, -1\}$ kümeleri de gruptur.*

Örnek 2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *bir grup değildir. Çünkü $m \in \mathbb{Z}$ için $m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = 1$ olacak şekilde $\mathbb{Z}$ nin bir m^{-1} elemanı yoktur.*

Örnek 3. *$M \neq \emptyset$ olsun. $P(M) = \{\alpha \mid \alpha : M \longrightarrow M$ birebir ve örten fonksiyonlar$\}$ kümesi bilinen bileşke işlemi ile bir gruptur. Çünkü;*

i) *$\alpha, \alpha' \in P(M)$ olsun. Birebir ve örten iki dönüşümün bileşkesi birebir ve örten olup $\alpha \circ \alpha' \in P(M)$ dir.*

ii) *$\alpha, \alpha', \alpha'' \in P(M)$ ise $\alpha \circ (\alpha' \circ \alpha'') = (\alpha \circ \alpha') \circ \alpha''$ dir.*

iii) *$I_M : M \longrightarrow M$ birim dönüşümü $P(M)$ in birim elemanıdır. Her $\alpha \in P(M)$ için*

$$\alpha \circ I_M = I_M \circ \alpha = \alpha \tag{2.1}$$

dir.

iv) *$f \in P(M)$ ise f ve f^{-1} bağıntıları birebir ve örten bir fonksiyon olup $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_M$ olacak şekilde $f^{-1} \in P(M)$ dir.*

Tanım 3. *G bir grup H de G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. H nin kendisi de G nin işlemiyle birlikte grup oluyor ise H ye G nin alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.*

Teorem 1. *$(G, .)$ bir grup, $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul*

i) *Her $m, n \in H$ için $m.n \in H$*

ii) *Her $m \in H$ için $m^{-1} \in H$ olmasıdır.*

Bu iki şart her $m, n \in H$ için $m.n^{-1} \in H$ şeklinde de ifade edilebilir.

İspat. *$H \leq G$ olsun. Bu durumda H , G deki işleme göre bir grup olacağından her $m, n \in H$, $m.n \in H$ ve her $m \in H$ için $m^{-1} \in H$ olur.*

Diğer taraftan her $m, n \in H$ için $m.n \in H$ ve her $m \in H$ için $m^{-1} \in H$ olduğunda H , G deki işleme göre gruptur. Çünkü;

i) *Yukarıdaki koşul ile zaten her $m, n \in H$ için $m.n \in H$ dir.*

ii) *Her $m, n, p \in H$ için $H \subseteq G$ olduğundan $m, n, p \in G$ ve G grup olduğundan $(m.n).p = m.(n.p)$ dir.*

iii) *Her $m, n \in H$ için $m.n \in H$ olup. $n = m^{-1}$ için $m.m^{-1} = e \in H$ olur.*

iv) *Yukarıdaki koşul ile zaten her $m \in H$ için $m^{-1} \in H$ dir.*

Teorem 2. *G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. G abelyen ise H de abelyendir.*

İspat. *Her $x, y \in H$ için $H \subseteq G$ olduğundan $x, y \in G$ ve G abelyen bir grup olduğundan $x.y = y.x$ dır.*

Tanım 4. *G bir grup ve N, G nin alt grubu olsun. Her $x \in G$ için $x.N = N.x$ ise N ye G nin normal alt grubu denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.*

Örnek 4. *Eğer G abelyen ise ve $H \leq G$ ise her $x \in G$ için $x.H = H.x$ olacağından H, G nin normal alt grubu olur.*

Yani abelyen bir grubun her alt grubu normal alt gruptur.

Tanım 5. $(G, \triangle)$, $(H, *)$ *iki grup olsun.* $\alpha : G \longrightarrow H$ *bir fonksiyon olmak üzere,* α *fonksiyonu grup işlemini koruyor ise yani; her* $x, y \in G$ *için*

$$\alpha(x \triangle y) = \alpha(x) * \alpha(y) \tag{2.2}$$

ise α *fonksiyonuna* G *den* H *ye bir grup homomorfizmi denir.*

Örnek 5.

$$\begin{array}{rcl} \alpha : (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+, .) \\ \alpha(x) & \longmapsto & e^x \end{array} \tag{2.3}$$

fonksiyonu bir grup homomorfizmidir. Çünkü her $x, y \in \mathbb{R}$ *için*

$$\alpha(x + y) = e^{x+y} = e^x.e^y = \alpha(x)\alpha(y) \tag{2.4}$$

dir.

Tanım 6. $\alpha : G \longrightarrow H$ *grup homomorfizmi birebir ve örten ise* α *ya bir izomorfizm denir. Eğer* G *den* H *ye bir izomorfizm varsa* G *ile* H *gruplarına izomorfiktirler denir ve* $G \cong H$ *yazılır.*

Örnek 6.

$$\begin{array}{rcl} \alpha : (\mathbb{R}^+, .) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ x & \longmapsto & \log x \end{array} \tag{2.5}$$

bir homomorfizmdir. Ayrıca 1:1 ve örtendir. O halde izomorfizmdir.

Tanım 7. G, H *iki grup ayrıca* $\alpha : G \longrightarrow H$ *bir homomorfizm ve* H *grubunun birim elemanı* e_0 *olsun.* α *nin çekirdeği*

$$Çek(\alpha) = \{x \in G : \alpha(x) = e_0\} = \alpha^{-1}(e_0) \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 8. G, H *ve* K *gruplar olsun*

$$\xi : G \times H \longrightarrow K \tag{2.7}$$

dönüşümü için

$$\xi(g + g', h) = \xi(g, h) + \xi(g', h) \tag{2.8}$$

ve

$$\xi(g, h + h') = \xi(g, h) + \xi(g, h') \tag{2.9}$$

sağlanıyorsa ξ *ye bilineer dönüşüm denir.*

Tanım 9. *G bir grup ve H, G nin altgrubu olsun. G nin H ye göre sağ eş kümeleri*

$$H/G = \{Ha|a \in G\} \tag{2.10}$$

G nin H ye göre sol eş kümeleri

$$G/H = \{aH|a \in G\} \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3. *G grup ve N, G nin normal alt grubu olsun.*

$$G/N = \{pN|p \in G\} \tag{2.12}$$

kümesi her $pN, qN \in G/N$ için

$$(pN).(qN) = (p.q)N \tag{2.13}$$

işlemine göre bir gruptur. Bu gruba G nin N grubuna göre bölüm grubu denir.

İspat. ***i)*** *Her $pN, qN \in G/N$ için $p, q \in G$ ve G grup olduğundan $p.q \in G$ olup $pN.qN = (p.q)N \in G/N$ olur.*

ii) *Her $p, q, r \in G$ için G grup olduğundan*

$$\begin{aligned}(pNqN).rN &= (pq)NrN && (2.14)\\ &= (pq)rN && (2.15)\\ &= p(qr)N && (2.16)\\ &= pN(qrN) && (2.17)\\ &= pN(qNrN) && (2.18)\end{aligned}$$

olur.

iii) *Her $pN \in G/N$ için $e \in G$ birim eleman olmak üzere*

$$(pN)(eN) = (p.e)N = pN \tag{2.19}$$

olduğundan $eN \in G/N$ birim eleman olur.

iv) *Her $pN \in G/N$ için*

$$(pN)(p^{-1}N) = (pp^{-1})N = eN \tag{2.20}$$

olduğundan $p^{-1}N = (pN)^{-1} \in G/N$ ters eleman olur.

2.1 SERBEST GRUPLAR

Tanım 10. *F bir grup ve X bir küme olsun, $u : X \to F$ fonksiyonu verilsin. Herhangi bir D grubu ve*

$$g : X \longrightarrow D \tag{2.21}$$

fonksiyonu verildiğinde,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$f : F \longrightarrow D \tag{2.22}$$

homomorfizmi varsa F grubuna X tabanlı (veya X kümesi tarafından üretilen) serbest grup denir.

2.1.1 Örnekler

1) $X = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\{e\}$ aşikar grubu, X tabanlı bir serbest gruptur. Çünkü herhangi bir D grubu için,

$$\begin{array}{rccc} f: & \{e\} & \longrightarrow & D \\ & e & \mapsto & e_D \end{array} \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlı bir tek f homomorfizmi var olup,

$$\begin{tikzcd} \phi \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & \{e\} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

2) $X = \{1\}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}$ tamsayılar grubu, X tabanlı bir serbest gruptur. Çünkü herhangi bir D grubu ve

$$\begin{array}{rccc} g: & \{1\} & \longrightarrow & D \\ & 1 & \longmapsto & g(1) \end{array} \tag{2.24}$$

fonksiyonu verildiğinde,

$$\begin{aligned} u:\{1\} &\longrightarrow \mathbb{Z} && (2.25)\\ 1 &\longmapsto 1 && (2.26)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı u ve

$$\begin{aligned} f:\mathbb{Z} &\longrightarrow D && (2.27)\\ p &\longmapsto [g(1)]^p && (2.28)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} f(p+q) &= [g(1)]^{p+q} && (2.29)\\ &= [g(1)]^p[g(1)]^q && (2.30)\\ &= f(p)f(q) && (2.31)\end{aligned}$$

olup f bir homomorfizmdir.

Bu f homomorfizmi ile birlikte,

$$\begin{aligned} (fu)(1) &= f(u(1)) && (2.32)\\ &= f(1) && (2.33)\\ &= g(1) && (2.34)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Ayrıca f' , f ile aynı özellikte ve f den farklı bir diğer homomorfizm ise bu durumda kabul gereği,

$$f'u = g \quad (2.35)$$

dir. O halde her $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned} f'(k) &= f'(1+1+\ldots+1) && \text{(k tane)} && (2.36)\\ &= f'(1)f'(1)\ldots f'(1) && (\because f' \text{ homomorfizm}) && (2.37)\\ &= f'(u(1))f'(u(1))\ldots f'(u(1)) && && (2.38)\\ &= (f'u)(1)(f'u)(1)\ldots(f'u)(1) && && (2.39)\\ &= g(1)g(1)\ldots g(1) && && (2.40)\\ &= [g(1)]^k && && (2.41)\\ &= f(k) && && (2.42)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$f = f' \tag{2.43}$$

olup f bir tektir.

3. GRUP ETKİSİ VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış modüller (Whitehead, 1949) tarafından tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modüller başta homotopi teori olmak üzere, grupların homolojisi ve ko-homolojisi, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatoriyal grup teori, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik de dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli bir role sahiiptir. Bu bölümde ilk olarak iki grubun birbiri üzerine etkisi ele alınacak sonra bu etki yardımıyla tanımlanan yarı direkt çarpım grubu incelenecektir. Daha sonra grupların çaprazlanmış modüllerine yer verilecektir.

Tanım 11. *G, H iki grup olsun,*

$$\phi : G \longrightarrow Aut(H) \tag{3.1}$$

homomorfizmine G nin H üzerine etkisi denir. Bu etki $g \in G$ ve $h \in H$ için

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow Aut(H) && (3.2) \\ g &\longmapsto \phi(g) : H \longrightarrow H && (3.3) \\ h &\longmapsto \phi(g)(h) =^g h && (3.4) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre

1) *$g \in G$, $h_1, h_2 \in H$ için,*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow Aut(H) && (3.5) \\ g &\longmapsto \phi(g) : H \longrightarrow H && (3.6) \\ h_1h_2 &\longmapsto \phi(g)(h_1h_2) = \phi(g)(h_1)\phi(g)(h_2) = ({}^gh_1)({}^gh_2) && (3.7) \end{aligned}$$

olur yani

$${}^g(h_1h_2) = ({}^gh_1)({}^gh_2) \tag{3.8}$$

bulunur.

2) *$g_1, g_2 \in G$ ve $h \in H$ için*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow Aut(H) && (3.9)\\ g_1g_2 &\longmapsto \phi(g_1g_2) : H \longrightarrow H && (3.10)\\ h &\longmapsto \phi(g_1g_2)(h) && (3.11)\\ &= \phi(g_1)\phi(g_2)(h) && (3.12)\\ &= \phi\left[\phi(g_2)(h)\right] && (3.13)\\ &= \phi(g_1)\left[{}^{g_2}h\right] && (3.14)\\ &= {}^{g_1}({}^{g_2}h) && (3.15) \end{aligned}$$

olur yani

$$^{g_1g_2}h =^{g_1} ({}^{g_2}h) \tag{3.16}$$

bulunur.

3) *1_G , G nin birimi ve $h \in H$ için*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow Aut(H) && (3.17)\\ 1_G &\longmapsto \phi(1_G) : H \xrightarrow{I_H} H && (3.18)\\ & \quad h \longmapsto \phi(1_G)(h) = h && (3.19) \end{aligned}$$

olur yani

$$^{1_G}h = h \tag{3.20}$$

dır.

4) *$g \in G$ ve 1_H , H nın birimi olmak üzere*

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow Aut(H) && (3.21)\\ g &\longmapsto \phi(g) : H \longrightarrow H && (3.22)\\ 1_H &\longmapsto \phi(g)(1_H) = 1_H && (3.23) \end{aligned}$$

yani

$$^{g}1_H = 1_H \tag{3.24}$$

olur.

Buna göre genelde bir G grubunun H grubuna etkisi

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow H && (3.25)\\ (g, h) &\longmapsto {}^{g}h && (3.26) \end{aligned}$$

olarak gösterilen bir dönüşümdür ve bu dönüşüm için

1) $g \in G$, $h_1, h_2 \in H$ *için* ${}^{g}(h_1h_2) = ({}^{g}h_1)({}^{g}h_2)$

2) $g_1, g_2 \in G$, $h \in H$ *için* ${}^{g_1}({}^{g_2}h) ={}^{(g_1g_2)}h$

3) $1_G \in G$ *ve* $h \in H$ *için* ${}^{(1_G)}h = h$

4) $g \in G$ *ve* $1_H \in H$ *için* ${}^{g}1_H = 1_H$

şartları sağlanır.

Eğer Φ trivial (aşikar) homomorfizm ise G nin H üzerine trivial etkisi var denir.

$H = G$ ve her $g, g' \in G$ için ${}^{g}g' = gg^1g^{-1}$ ifadesi G üzerinde bir etki belirler. Buna G nin kendi üzerine konjuge etkisi denir.

Bir grubun kendi üzerine etkisi her zaman konjuge etki olarak ele alınabilir.

Tanım 12. $(G, \bullet)$ *ve* $(H, \circ)$ *iki grup olsun.* $G \times H = \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$ *kümesini ele alınsın.*

$$(g, h) \bullet (g', h') = (g \bullet g', h \circ h') \tag{3.27}$$

şeklinde ki $\bullet$ *işlemi* $G \times H$ *kümesini grup yapar. Bu grubun etkisiz elemanı* $(1_G, 1_H)$ *dır ve bir* (g, h) *elemanının* $\bullet$ *işlemine göre tersi ise* (g^{-1}, h^{-1}) *elemanıdır. Bu gruba G ile H nın çarpım grubu denir.*

Tanım 13. *G, C iki grup olsun ve G nin C üzerine bir etkisi*

$$\begin{aligned} G \times C &\longrightarrow C & (3.28)\\ (g, c) &\longmapsto {}^{g}c & (3.29)\end{aligned}$$

tanımlı olsun. Bu etki yardımıyla yeni bir grup oluşturulabilir.

$$C \times G = \{(c, g) : c \in C, g \in G\} \tag{3.30}$$

kümesi üzerinde

$$(c, g).(c', g') = ({}^{cg}c', gg') \tag{3.31}$$

şeklinde bir ikili işlem tanımlansın.

1)

$$
\begin{aligned}
[(c,g).(c',g')].(c'',g'') &= [{}^{cg}c', gg'].(c'',g'') && (3.32)\\
&= ({}^{cg}c', {}^{gg'}c'', gg'g'') && (3.33)\\
&= ({}^{cg}c', {}^{{}^{c}g'}c'', gg'g'') && (3.34)\\
&= ({}^{cg}{}^{c'g'}c'', gg'g'') && (3.35)\\
&= (c,g).[{}^{c'g'}c'', g'g''] && (3.36)\\
&= (c,g).[(c',g').(c'',g'')] && (3.37)
\end{aligned}
$$

olur yani işlem asosyatif olur.

2) $(c,g),(a,b) \in C \times G$ *için* $(c,g).(a,b) = (c,g)$ *yani* $({}^{cg}a, {}^{g}b) = (c,g)$ *olacak şekilde bir* $(a,b) \in C \times G$ *mevcuttur, buradan,*

$$
\begin{aligned}
&{}^{cg}a = c \quad , \quad {}^{g}b = g && (3.38)\\
&{}^{g}a = 1_C \quad , \quad b = 1_G && (3.39)\\
&a = 1_C \quad , \quad b = 1_G && (3.40)\\
&(a,b) = (1_C, 1_G) \in (C \times G) && (3.41)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani işlemin $(1,1)$ *birim elemanı vardır.*

3) $(c,g),(m,n) \in C \times G$ *için* $(c,g).(m,n) = (1,1)$ *olacak şekilde bir,*

$$
\begin{aligned}
&({}^{cg}m, g_n) = (1,1) && (3.42)\\
&{}^{cg}m = 1 \quad , \quad {}^{g}n = 1 && (3.43)\\
&{}^{g}m = c^{-1} \quad , \quad n = g^{-1} && (3.44)\\
&m = {}^{g^{-1}}c^{-1} \quad , \quad n = g^{-1} && (3.45)
\end{aligned}
$$

$(m,n) = (c,g)^{-1} = ({}^{g^{-1}}c^{-1}, g^{-1})$ *ters elemanı vardır. Buna göre bu çarpım ile* $(C \times G)$ *bir grup olur. Bu gruba yarı direkt çarpım grubu denir.*

Tanım 14. *(Mc Dermott, 1998) G ve H iki grup olsun. G nin ve H nin kendileri üzerine konjuge etkileri ve G nin H ve H nin G üzerine her* $g, g' \in G$ *ve her* $h, h' \in H$ *için*

$$
\begin{aligned}
{}^{({}^{g}h)}g' &= {}^{g}({}^{h}({}^{g^{-1}}g')) && (3.46)\\
{}^{({}^{h}g)}h' &= {}^{h}({}^{g}({}^{h^{-1}}h')) && (3.47)
\end{aligned}
$$

şartları sağlanacak şekilde etkileri mevcut olsun . Bu şekildeki etkilere uyumlu etki denir ve G ile H ye birbirleri üzerine uyumlu olarak etki ediyorlar denir.

Burada ${}^{g}({}^{h}g')$ ifadesi kısaca ${}^{gh}g'$ şeklinde gösterilecektir.

NOT: Bu bölüm boyunca G ve H grupları diğeri üzerinde uyumlu etkisi olan gruplar olarak ele alınacaktır.

3.1 ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Tanım 15. *$\partial : C \longrightarrow G$ bir grup homomorfizmi olmak üzere*

$$\begin{aligned} G \times C &\longrightarrow C && (3.48)\\ (g, c) &\longmapsto {}^{g}c && (3.49) \end{aligned}$$

G nin C üzerine etkisiyle beraber her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için

CM1) $\partial({}^{g}c) = g\partial(c)g^{-1}$

CM2) ${}^{(\partial c)}c' = cc'c^{-1}$

şartları sağlanıyorsa C ye çaprazlanmış modül denir ve (C, G, ∂) ile gösterilir.

Eğer sadece CM1) şartı sağlanıyor ise C ye ön çaprazlanmış (pre-crossed) modül denir.

Ayrıca burada CM2) şartına Peiffer koşulu adı verilir ve $c, c' \in C$ için

$$< c, c' >= cc'c^{-1} =^{(\partial c)} c' \tag{3.50}$$

eşitliğine de Peiffer komütatörü denir.

Tanım 16. *(C, G, ∂), (C', G', ∂') iki çaprazlanmış modül olmak üzere, her $c \in C$ ve $g \in G$ için*

$$\varphi({}^{g}c) =^{\psi(g)} \varphi(c) \tag{3.51}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\psi"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif, yani $\psi(\partial(c)) = \partial'(\varphi(c))$ *olacak şekilde* $\varphi : C \longrightarrow C'$, $\psi : G \longrightarrow G'$ *homomorfizmleri varsa*

$$(\varphi, \psi) : (C, G, \partial) \longrightarrow (C', G', \partial') \tag{3.52}$$

ifadesine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.

Örnek 7. *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun,*

$$\dot{I}\text{ç} : N \longrightarrow G \tag{3.53}$$

$$n \longmapsto n \tag{3.54}$$

içine homomorfizmi ve

$$G \times N \longrightarrow N \tag{3.55}$$

$$(g, n) \longmapsto {}^{g}n = gng^{-1} \tag{3.56}$$

şeklindeki etkiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşur.

Yani

$$\textbf{CM1)} \quad \partial({}^{g}n) = \partial(gng^{-1}) \tag{3.57}$$

$$= \partial(g)\partial(n)\partial(g^{-1}) \tag{3.58}$$

$$= g\partial(n)g^{-1} \tag{3.59}$$

$$\textbf{CM2)} \quad {}^{(\partial' n)}n' = n.n' \tag{3.60}$$

$$= nn'n^{-1} \tag{3.61}$$

çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 8. *P grubu için $G = \{{}^{f}p : P \longrightarrow P | {}^{f}p(p') = pp^{1}p^{-1}\}$ kümesi P nin iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere*

$$\partial : C \longrightarrow C \tag{3.62}$$

$$p \longmapsto \partial(p) =^{f} p \tag{3.63}$$

homomorfizmi

$$G \times P \longrightarrow P \tag{3.64}$$

$$({}^{f}p, p) \longmapsto {}^{({}^{f}p)}p' = pp'p^{-1} \tag{3.65}$$

etki fonksiyonuyla çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

$$\textbf{\textit{CM1)}} \quad \partial(({}^{f}p)p') = \partial(pp'p^{-1}) \tag{3.66}$$

$$= \partial(p)\partial(p')\partial(p^{-1}) \tag{3.67}$$

$$=^{f} p\partial(p')\partial(p^{-1}) \tag{3.68}$$

$$=^{f} p\partial(p')({}^{f^{-1}}p) \tag{3.69}$$

$$\textbf{\textit{CM2)}} \quad {}^{(\partial p)}p' =^{({}^{f}p)} p' \tag{3.70}$$

$$= pp'p^{-1} \tag{3.71}$$

Örnek 9. *M bir $\mathbb{Z}G$-modül olmak üzere*

$$\partial = 1 : M \longrightarrow G \tag{3.72}$$

$$m \longmapsto 1_G \tag{3.73}$$

aşikar homomorfizmi ve

$$G \times M \longrightarrow M \tag{3.74}$$

$$(g, m) \longmapsto {}^{g}m = gm \tag{3.75}$$

etki fonksiyonuyla çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

$$\textbf{\textit{CM1)}} \quad \partial({}^{g}m) = \partial(gm) \tag{3.76}$$

$$= 1 \tag{3.77}$$

$$= g1g^{-1} \tag{3.78}$$

$$\textbf{\textit{CM2)}} \quad {}^{(\partial m)}m' = 1_{m'} \tag{3.79}$$

$$= 1m' \tag{3.80}$$

$$= m'mm^{-1} \tag{3.81}$$

$$= mm'm^{-1} \qquad (M\,Abelyen) \tag{3.82}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

4. GRUPLARIN ABELYEN OLMAYAN TENSÖR ÇARPIMI

Bu bölümde (Mc Dermott, 1998) de verilen birbirleri üzerine uyumlu etkileri olan iki grubun tensör çarpımı incelenecektir.

Tanım 17. *G, H birbirleri üzerine uyumlu etkisi olan iki grup olsun. $G \times H$ üzerindeki serbest grubun, $g, g' \in G$ ve $h, h' \in H$ için*

$$
\begin{aligned}
(gg', h) &= ({}^{g}g', {}^{g}h)(g, h) && (4.1)\\
(g, hh') &= (g, h)({}^{h}g {}^{h}h') && (4.2)
\end{aligned}
$$

bağıntılarını sağlayan elemanları tarafından üretilen normal alt grubuna bölümüne G ile H nin tensör çarpım grubu denir ve $G \otimes H$ ile gösterilir. Elemanları ise $g \otimes h$ olarak ifade edilir. Buna göre yukarıdaki 4.1 ve 4.2 denklemleri

$$
\begin{aligned}
(gg' \otimes h) &= ({}^{g}g' \otimes {}^{g}h)(g \otimes h) && (4.3)\\
(g \otimes hh') &= (g \otimes h)({}^{h}g \otimes {}^{h}h') && (4.4)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 18. *(Mc Dermott, 1998) G, H, K gruplar olsun ve G ve H nin birbirleri üzerine etkisi olsun.*

$$\delta : G \times H \longrightarrow K \tag{4.5}$$

fonksiyonu için, $g, g' \in G$ ve $h, h' \in H$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\delta(gg', h) &= \delta({}^{g}g', {}^{g}h)\delta(g, h) && (4.6)\\
\delta(g, hh') &= (g, h)\delta({}^{h}g, {}^{h}h') && (4.7)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanıyorsa δ fonksiyonuna çapraz eşleme denir.

Çapraz eşlemenin tanımındaki eşitlikler ile 4.3 ve 4.4 denklemleri arasında birebir bir ilişki vardır.

Bu ilişki sebebi ile herbir ϕ çapraz eşlemesi

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi} : G \otimes H &\longrightarrow K && (4.8)\\
(g \otimes h) &\mapsto \widehat{\phi}(g \otimes h) = \phi(g, h) && (4.9)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanan biricik bir homomorfizm belirler.

Özel olarak G ve H abelyen gruplar ise ve birbirleri üzerine etkileri aşikar ise çapraz eşleme basit bir bilineer dönüşüm olur. Bu durumda da $G \otimes H$ tensör çarpımı abelyen grupların bilinen tensör çarpımına karşılık gelir.

Teorem 4. *(Mc Dermott, 1998) G ve H birbirleri üzerine etkisi olan iki grup olsun. G ve H nin $G \otimes H$ üzerine etkisi*

her $g, g' \in G$ ve $h, h' \in H$ için

$$
\begin{aligned}
{}^{g}(g' \otimes h) &= (({}^{g}g') \otimes ({}^{g}h)) && (4.10)\\
{}^{h}(g \otimes h') &= (({}^{h}g) \otimes ({}^{h}h')) && (4.11)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat. *(Mc Dermott, 1998) Eşitliklerin doğruluğunun gösterilmesi için etkinin 4.3 ve 4.4 denklemlerine uygulanması gereklidir. $g, g' \in G, h, h' \in H$ ve p de G veya H nin keyfi bir elemanı olmak üzere*

$$
\begin{aligned}
{}^{p}(gg' \otimes h) &= {}^{p}(gg') \otimes ({}^{p}h) && (4.12)\\
&= ({}^{p}g{}^{p}g') \otimes ({}^{p}h) && (4.13)\\
&= [{}^{{}^{p}g}({}^{p}g') \otimes ({}^{{}^{p}g}({}^{p}h))][(({}^{p}g) \otimes ({}^{p}h)) && (4.14)\\
&= [({}^{pgp^{-1}}({}^{p}g')) \otimes ({}^{pgp^{-1}}({}^{p}h))][(({}^{p}g) \otimes ({}^{p}h)) && (4.15)\\
&= [({}^{pg}g') \otimes ({}^{pg}h)][({}^{p}g) \otimes ({}^{p}h)] && (4.16)\\
&= {}^{p}[({}^{g}g') \otimes ({}^{g}h)]^{p}((g \otimes h)) && (4.17)\\
&= {}^{p}[({}^{g}g') \otimes ({}^{g}h)(g \otimes h)] && (4.18)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece yukarıdaki etki ile birlikte 4.3 denklemi sağlanmış olur.

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
{}^{p}(g \otimes hh') &= ({}^{p}g) \otimes ({}^{p}(hh')) && (4.19)\\
&= ({}^{p}g) \otimes ({}^{p}h{}^{p}h') && (4.20)\\
&= ({}^{p}g \otimes{}^{p} h)[{}^{{}^{p}h}({}^{p}g)({}^{{}^{p}h}({}^{p}h'))] && (4.21)\\
&= [({}^{p}g) \otimes ({}^{p}h)][{}^{php^{-1}}({}^{p}g)^{php^{-1}}({}^{p}h')] && (4.22)\\
&= [({}^{p}g) \otimes ({}^{p}h)][({}^{ph}g) \otimes ({}^{ph}h')] && (4.23)\\
&= {}^{p}(g \otimes h)[{}^{p}(({}^{h}g) \otimes ({}^{h}h'))] && (4.24)\\
&= {}^{p}[(g \otimes h)(({}^{h}g) \otimes ({}^{h}h'))] && (4.25)
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre yukarıdaki etkiyle 4.4 denklemi de sağlanır.

Teorem 5. *(Mc Dermott, 1998) $g \in G$ ve $h \in H$ için*

$$G \otimes H \xrightarrow{\cong} H \otimes G \quad (4.26)$$
$$g \otimes h \longmapsto (h \otimes g)^{-1} \quad (4.27)$$

şeklinde bir izomorfizm vardır.

İspat. *(Mc Dermott, 1998)*

$$\phi : G \times H \longrightarrow H \otimes G \quad (4.28)$$
$$(g,h) \longmapsto (h \otimes g)^{-1} \quad (4.29)$$

tanımlansın.

ϕ bir çapraz eşlemedir. Çünkü

$$\begin{aligned} \phi(gg',h) &= (h \otimes gg')^{-1} && (4.30)\\ &= [(h \otimes g)(^{g}(h \otimes g'))]^{-1} && (4.31)\\ &= (^{g}h \otimes (^{g}g'))^{-1}(h \otimes g)^{-1} && (4.32)\\ &= \phi(^{g}g',^{g}h)\phi(g,h) && (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(g,hh') &= (hh' \otimes g)^{-1} && (4.34)\\ &= [^{h}(h' \otimes g)(h \otimes g)]^{-1} && (4.35)\\ &= (h \otimes g)^{-1}(^{h}h' \otimes (^{h}g))^{-1} && (4.36)\\ &= \phi(g,h)\phi(^{h}g,^{h}h') && (4.37) \end{aligned}$$

dir, böylece ϕ dönüşümü

$$\phi^* : G \otimes H \longrightarrow H \otimes G \quad (4.38)$$
$$(g \otimes h) \longmapsto \phi^*(g \otimes h) = (h \otimes g)^{-1} \quad (4.39)$$

şeklinde tanımlanan bir homomorfizm belirler. Bu ϕ^* homomorfizminin örten olduğu açıktır ve G ile H nin rollerinin değişmesi ile

$$\psi^* : H \otimes G \longrightarrow G \otimes H \quad (4.40)$$
$$(h \otimes g) \longmapsto \psi^*(h \otimes g) = (g \otimes h)^{-1} \quad (4.41)$$

şeklinde bir homomorfizm tanımlanabilir. Bu ψ^* morfizmi ϕ^* nın tersidir, böylece ϕ^* istenilen izomorfizm olur.

Teorem 6. *(Mc Dermott, 1998) Her $g, g' \in G$ ve $h, h' \in H$ için $G \otimes H$ üzerinde aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.*

$$1_G \otimes h = 1_{G \otimes H} = g \otimes 1_H \tag{4.42}$$

$$(g \otimes h)^{-1} = ({}^{g}(g^{-1} \otimes h)) = ({}^{h}(g \otimes h^{-1})) \tag{4.43}$$

$$(g \otimes h)(g' \otimes h')(g \otimes h)^{-1} = ({}^{[g,h]}(g' \otimes h')) \tag{4.44}$$

$$(g^{h}g^{-1}) \otimes h' = (g \otimes h)^{h'}(g \otimes h)^{-1} \tag{4.45}$$

$$g' \otimes ({}^{g}hh^{-1}) = ({}^{g'}(g \otimes h))(g \otimes h)^{-1} \tag{4.46}$$

$$[g \otimes h, g' \otimes h'] = (g^{h}g^{-1}) \otimes [{}^{g'}h'(h')^{-1}] \tag{4.47}$$

İspat. ***a)*** *4.3 denkleminde $g = 1_G$ ve $g' = 1_G$ alınırsa;*

$$\begin{aligned} gg' \otimes h &= 1_G 1_G \otimes h && (4.48)\\ &= ({}^{1_G}1_G \otimes ({}^{1_G}h))(1_G \otimes h) && (4.49)\\ &= (1_G \otimes h)(1_G \otimes h) && (4.50)\\ &= (1_G \otimes h) && (4.51) \end{aligned}$$

elde edilir, buradan $1_{G \otimes H} = 1_G \otimes h$ elde edilir.

Benzer şekilde 4.4 denkleminde $h = 1_H$ ve $h' = 1_H$ alınırsa

$$\begin{aligned} g \otimes hh' &= g \otimes 1_H 1_H && (4.52)\\ &= (g \otimes 1_H)({}^{1_H}g \otimes ({}^{1_H}1_H)) && (4.53)\\ &= (g \otimes 1_H)(g \otimes 1_H) && (4.54)\\ &= g \otimes 1_H && (4.55) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $1_{G \otimes H} = g \otimes 1_H$ elde edilir.

Böylece 4.4 denklemi sağlanmış olur.

b) *4.3 denkleminde $g' = g^{-1}$ yazılsın.*

$$gg^{-1} \otimes h = ({}^{g}g^{-1} \otimes ({}^{g}h))(g \otimes h) \tag{4.56}$$

Burada $gg^{-1} = 1_G$ olduğu açıktır. Öyleyse

$$1_G \otimes h =^{g} (g^{-1} \otimes h)(g \otimes h) \tag{4.57}$$

yazılabilir.

Buradan

$$\begin{aligned}(1_G \otimes h)(g \otimes h)^{-1} &= {}^{g}(g^{-1} \otimes h) &(4.58)\\ 1_{G\otimes H}(g \otimes h)^{-1} &= {}^{g}(g^{-1} \otimes h) &(4.59)\\ (g \otimes h)^{-1} &= {}^{g}(g^{-1} \otimes h) &(4.60)\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde 4.4 denkleminde $h' = h^{-1}$ yazarak.

$$\begin{aligned}g \otimes hh^{-1} &= (g \otimes h)({}^{h}g \otimes ({}^{h}h^{-1})) &(4.61)\\ g \otimes 1_H &= (g \otimes h)({}^{h}(g \otimes h^{-1})) &(4.62)\\ (g \otimes 1_H)(g \otimes h)^{-1} &= {}^{h}(g \otimes h^{-1}) &(4.63)\\ 1_{G\otimes H}(g \otimes h)^{-1} &= {}^{h}(g \otimes h^{-1}) &(4.64)\\ (g \otimes h)^{-1} &= {}^{h}(g \otimes h^{-1}) &(4.65)\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece 4.43 denklemi sağlanmış olur.

***c)** $(gg' \otimes hh')$ ifadesini 4.3 ve 4.4 denklemlerinde yazarak.*

$$\begin{aligned}gg' \otimes hh' &= ({}^{g}g' \otimes^{g} (hh'))(g \otimes hh') &(4.66)\\ &= {}^{g}(g' \otimes hh')(g \otimes hh') &(4.67)\\ &= {}^{g}[(g' \otimes h)({}^{h}g' \otimes^{h} h')](g \otimes h)({}^{h}g \otimes^{h} h') &(4.68)\\ &= {}^{g}(g' \otimes h)({}^{gh}(g' \otimes h'))(g \otimes h)({}^{h}(g \otimes h')) &(4.69)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}gg' \otimes hh' &= (gg' \otimes h)[{}^{h}(gg') \otimes ({}^{h}h')] &(4.70)\\ &= ({}^{g}g' \otimes^{g} h)(g \otimes h)^{h}[({}^{g}g' \otimes^{g} h')(g \otimes h')] &(4.71)\\ &= {}^{g}(g' \otimes h)(g \otimes h)^{hg}(g' \otimes h')^{g}(g \otimes h') &(4.72)\end{aligned}$$

bulunur.

Bu iki denklem eşit olacağından

$$^{gh}(g' \otimes h')(g \otimes h) = (g \otimes h)^{hg}(g' \otimes h') \tag{4.73}$$

elde edilir.

Buradan

$$^{gh}(g'\otimes h') = (g\otimes h)^{hg}(g'\otimes h')(g\otimes h)^{-1} \tag{4.74}$$

olur.

Burada $x =^{hg} g'$ *ve* $y =^{hg} h'$ *yazılırsa.*

$$\begin{aligned}
^{gh}({}^{g^{-1}h^{-1}}x \otimes^{g^{-1}h^{-1}} y) &= (g\otimes h)(x\otimes y)(g\otimes h)^{-1} && (4.75)\\
^{ghg^{-1}h^{-1}}(x\otimes y) &= (g\otimes h)(x\otimes y)(g\otimes h)^{-1} && (4.76)\\
^{[g,h]}(x\otimes y) &= (g\otimes h)(x\otimes y)(g\otimes h)^{-1} && (4.77)
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece 4.44 denklemi sağlanmış olur.

d) *4.3 denklemini kullanarak,*

$$\begin{aligned}
(g^hg^{-1})\otimes h' &= {}^g({}^hg^{-1}\otimes h')(g\otimes h') && (4.78)\\
&= {}^g({}^hg^{-1}\otimes^{hh^{-1}} h')(g\otimes h') && (4.79)\\
&= {}^{gh}(g^{-1}\otimes^{h^{-1}} h')(g\otimes h') && (4.80)\\
&= {}^{gh}(g^{-1}\otimes h^{-1}h'h)(g\otimes h') && (4.81)\\
&= {}^{gh}[(g^{-1}\otimes h^{-1})^{h^{-1}}(g^{-1}\otimes h'h)](g\otimes h') && (4.82)\\
&= {}^{gh}(g^{-1}\otimes h^{-1})^{ghh^{-1}}(g^{-1}\otimes h'h)(g\otimes h') && (4.83)\\
&= {}^{g}(g^{-1}\otimes h)^{-1}({}^g(g^{-1}\otimes h'h))(g\otimes h') && (4.84)\\
&= (g\otimes h)^g(g^{-1}\otimes h')^{gh'}(g^{-1}\otimes h)(g\otimes h') && (4.85)\\
&= (g\otimes h)^{h'g}(g^{-1}\otimes h) && (4.86)\\
&= (g\otimes h)^{h'}(g\otimes h)^{-1} && (4.87)
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece 4.45 denklemi ispatlanmış olur.

e) *Eşitlik 4.46 yukarıdaki hesaplamaya benzer şekilde 4.4 denklemi kullanılarak ispatlanır.*

f) *Son olarak 4.45 denkleminde* h' *ifadesinin yerine* $[^{g'}h'(h')^{-1}]$ *ifadesi yazılsın.*

$$\begin{aligned}
(g^hg^{-1})\otimes[^{g'}h'(h')^{-1}] &= (g\otimes h)^{(g'h'(h')^{-1})}(g\otimes h)^{-1} && (4.88)\\
&= (g\otimes h)^{[g',h']}(g\otimes h^{-1}) \quad \textit{(4.44 denk. kullanarak)} && (4.89)\\
&= (g\otimes h)[(g'\otimes h')(g\otimes h)(g'\otimes h')^{-1}]^{-1} && (4.90)\\
&= [g\otimes h, g'\otimes h'] && (4.91)
\end{aligned}$$

olur.

Böylece 4.47 denklemi ispatlanmış olur.

Teorem 7. *(Mc Dermott, 1998) G ve H birbirleri üzerine uyumlu etkisi olan iki grup olsun.*

a)

$$\lambda : G \otimes H \longrightarrow G \tag{4.92}$$
$$\lambda' : G \otimes H \longrightarrow H \tag{4.93}$$

$$\lambda(g \otimes h) = g^h g^{-1} \tag{4.94}$$
$$\lambda'(g \otimes h) = {}^g h h^{-1} \tag{4.95}$$

homomorfizmleri tanımlabilir.

b) *λ, λ' homomorfizmleri, G ve H nin $G \otimes H$ üzerine etkileriyle birlikte birer çaprazlanmış modüldür.*

c) *$x \in G \otimes H$, $g \in G$ ve $h \in H$ için*

$$\lambda(x) \otimes h = x^h x^{-1} \tag{4.96}$$
$$g \otimes \lambda'(x) = {}^g x x^{-1} \tag{4.97}$$

dir.

d) *G nin $Ker\lambda'$ ve H nin $Ker\lambda$ üzerine etkisi trivialdir.*

e) *Her $x, y \in G \otimes H$ için*

$$[x, y] = \lambda(x) \otimes \lambda'(y) \tag{4.98}$$

dir.

İspat. *(Mc Dermott, 1998)* ***a)***

$$\phi : G \times H \longrightarrow G \tag{4.99}$$
$$(g, h) \longmapsto g^h g^{-1} \tag{4.100}$$

tanımlansın. ϕ çapraz eşlemedir. Çünkü

$$\begin{aligned}
\phi(gg',h) &= gg'^{h}(gg')^{-1} && (4.101)\\
&= gg'^{h}(g')^{-1}({}^{h}g^{-1}) && (4.102)\\
&= gg'^{g^{-1}gh}(g')^{-1}({}^{h}g^{-1}) && (4.103)\\
&= gg'g^{-1}({}^{gh}(g')^{-1})g^{h}g^{-1} && (4.104)\\
&= {}^{g}g'^{gh}(g')^{-1}g^{h}g^{-1} && (4.105)\\
&= {}^{g}g'^{{}^{ghg^{-1}}}[{}^{g}(g')^{-1}]g^{h}g^{-1} && (4.106)\\
&= {}^{g}g'^{{}^{gh}}[{}^{g}(g)']^{-1}g^{h}g^{-1} && (4.107)\\
&= \phi({}^{g}g',{}^{g}h)\phi(g,h) && (4.108)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi(g,hh') &= g^{hh'}g^{-1} && (4.109)\\
&= g^{{}^{hh'h^{-1}}}({}^{h}g)^{-1} && (4.110)\\
&= g^{{}^{h}h'}({}^{h}g)^{-1} && (4.111)\\
&= g^{h}g^{-1}({}^{h}g)^{{}^{h}h'}({}^{h}g)^{-1} && (4.112)\\
&= \phi(g,h)\phi({}^{h}g^{h}h') && (4.113)
\end{aligned}$$

dir.

Böylece ϕ dönüşümü

$$\begin{aligned}
\phi^{*}: G\otimes H &\longrightarrow G && (4.114)\\
g\otimes h &\longrightarrow \phi(g,h) && (4.115)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir grup homomorfizmi belirler.

λ yı ϕ^{*} olarak alırsak λ homomorfizmi tanımlanmış olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\psi: G\otimes H &\longrightarrow H && (4.116)\\
(g,h) &\longmapsto {}^{g}hh^{-1} && (4.117)
\end{aligned}$$

tanımlansın. ψ *çapraz eşlemedir. Çünkü*

$$\begin{aligned} \psi(gg',h) &= {}^{gg'}hh^{-1} && (4.118)\\ &= {}^{gg'g^{-1}}({}^{g}h)h^{-1} && (4.119)\\ &= {}^{{}^{g}g'}({}^{g}h)^{g}(h)^{-1}({}^{g}h)h^{-1} && (4.120)\\ &= \psi({}^{g}g',{}^{g}h)\psi(g,h) && (4.121) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(g,h)\psi({}^{h}g,{}^{h}h') &= {}^{g}h(h^{-1})^{hg}({}^{h}h')({}^{h}h')^{-1} && (4.122)\\ &= {}^{g}h(h^{-1})^{hgh^{-1}h}(h')({}^{h}h')^{-1} && (4.123)\\ &= {}^{g}h(h^{-1})^{h}({}^{g}h')({}^{h}h')^{-1} && (4.124)\\ &= {}^{g}h(h^{-1})^{h}({}^{g}h')(hh'h^{-1})^{-1} && (4.125)\\ &= {}^{g}h(h^{-1})^{h}({}^{g}h')hh'h^{-1} && (4.126)\\ &= {}^{g}hh^{-1}h^{g}h'h^{-1}h(h')^{-1}h^{-1} && (4.127)\\ &= {}^{g}h^{g}h'(h')^{-1}h^{-1} && (4.128)\\ &= {}^{g}(hh')(hh')^{-1} && (4.129)\\ &= \psi(g,hh') && (4.130) \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \psi^{*}: G\otimes H &\longrightarrow H && (4.131)\\ (g\otimes h) &\longmapsto \psi^{*}(g\otimes h)=\psi(g,h) && (4.132) \end{aligned}$$

bir grup homomorfizmi belirler. Burada da $\lambda' = \psi^{*}$ *alınırsa* λ' *homomorfizmi tanımlanmış olur.*

b)

$$\begin{aligned} \lambda: G\otimes H &\longrightarrow G && (4.133)\\ (g\otimes h) &\longmapsto \lambda(g\otimes h)=g^{h}g^{-1} && (4.134) \end{aligned}$$

için

ÇM1)

$$\begin{aligned}
\lambda({}^{g}(g' \otimes h)) &= ({}^{g}g')^{{}^{g}h}({}^{g}g')^{-1} && (4.135)\\
&= (gg'g^{-1})^{ghg^{-1}}({}^{g}g')^{-1} && (4.136)\\
&= (gg'g^{-1})^{gh}[(g')^{-1}] && (4.137)\\
&= (gg'g^{-1})g^{h}g^{-1}g^{-1} && (4.138)\\
&= (gg')^{h}[(g')^{-1}]g^{-1} && (4.139)\\
&= g\lambda(g' \otimes h)g^{-1} && (4.140)
\end{aligned}$$

ÇM2)

$$\begin{aligned}
{}^{\lambda(g\otimes h)}(g' \otimes h') &= {}^{g^{h}g^{-1}}(g' \otimes h') && (4.141)\\
&= {}^{ghg^{-1}h^{-1}}(g' \otimes h') && (4.142)\\
&= {}^{[g,h]}(g' \otimes h') && (4.143)
\end{aligned}$$

4.44 denklemini kullanarak

$$= (g \otimes h)(g' \otimes h')(g \otimes h)^{-1} \qquad (4.144)$$

bulunur.

Böylece λ homomorfizminin çaprazlanmış modül olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi λ' nün de çaprazlanmış modül olduğu gösterilsin;

$$\begin{aligned}
\lambda' : G \otimes H &\longrightarrow H && (4.145)\\
(g \otimes h) &\longmapsto \lambda'(g \otimes h) = {}^{g}hh^{-1} && (4.146)
\end{aligned}$$

için

ÇM1)

$$\begin{aligned}
\lambda'({}^{g}(g' \otimes h)) &= \lambda'(({}^{g}g') \otimes ({}^{g}h)) && (4.147)\\
&= {}^{{}^{g}g'}({}^{g}h)^{-1} && (4.148)\\
&= {}^{gg'g^{-1}}({}^{g}h)({}^{g}h)^{-1} && (4.149)\\
&= ({}^{gg'}(h))^{g}h^{-1} && (4.150)\\
&= g({}^{g'}h)g^{-1}gh^{-1}g^{-1} && (4.151)\\
&= g({}^{g'}h)h^{-1}g^{-1} && (4.152)\\
&= g\lambda'(g' \otimes h)g^{-1} && (4.153)
\end{aligned}$$

ÇM2)

$$
\begin{aligned}
{}^{\lambda'(g\otimes h)}(g'\otimes h') &= {}^{ghh^{-1}}(g'\otimes h') && (4.154)\\
&= {}^{ghg^{-1}h^{-1}}(g'\otimes h') && (4.155)\\
&= {}^{[g,h]}(g'\otimes h') \quad \textit{(4.44 denk. kullarak)} && (4.156)\\
&= (g\otimes h)(g'\otimes h')(g\otimes h)^{-1} && (4.157)
\end{aligned}
$$

dir, böylece λ' homomorfizminin çaprazlanmış modül olduğu gösterilmiş olur.

c) *$g' \in G$ ve $h' \in H$ olmak üzere $x = g' \otimes h'$ olsun.*

$$
\begin{aligned}
\lambda(x)\otimes h &= [g'^{h}((g')^{-1})] && (4.158)\\
&= (g'\otimes h')({}^{h}(g'\otimes h'))^{-1} \quad \textit{(4.45denklemi ile)} && (4.159)\\
&= x({}^{h}x^{-1}) && (4.160)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\otimes\lambda'(x) &= g\otimes({}^{g'}h'(h')^{-1}) && (4.161)\\
&= {}^{g}(g'\otimes h')(g'\otimes h')^{-1} \quad \textit{(4.46 denklemi ile)} && (4.162)\\
&= {}^{g}xx^{-1} && (4.163)
\end{aligned}
$$

bulunur.

d) *Yukarıdaki ispattan açıkca anlaşılır.*

e) *4.47 denkleminde $g, g' \in G$ ve $h, h' \in H$ olmak üzere $x = g \otimes h$, $y = g' \otimes h'$ yazılırsa*

$$
\begin{aligned}
[x,y] &= [g\otimes h, g'\otimes h'] && (4.164)\\
&= (g({}^{h})g^{-1})\otimes({}^{g'}h'(h')^{-1}) && (4.165)\\
&= \lambda(x)\otimes\lambda'(y) && (4.166)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

5. ÇAPRAZLANMIŞ KARE (CROSSED SQUARE)

Gruplar için çaprazlanmış kare kavramı ilk kez (Guin-Walery ve Loday, 1981) de tanımlanmıştır. Bir önceki bölümde G ve H gruplarının $G \otimes H$ tensör çarpım grubu tanımlanmıştı. Bu bölümde $G \otimes H$ tensör çarpım grubu kullanılarak bir çaprazlanmış kare oluşturulacaktır.

Tanım 19. *L, M, N ve P grup ve P nin L, M ve N üzerine etkisi mevcut olsun. Ayrıca $\lambda : L \longrightarrow M$, $\lambda' : L \longrightarrow N$, $\mu : M \longrightarrow P$ ve $\psi : N \longrightarrow P$, $\psi\lambda' = \mu\lambda$ olacak şekilde birer grup homomorfizmi olsun. Böylece*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\psi"'] & P \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı çizilebilir. Ayrıca burada M nin L üzerine bir etkisi ve N üzerine de μ morfizmi yardımıyla tanımlanan bir etkisi vardır ve N nin L üzerine bir etkisi ve M üzerine de ψ morfizmi yardımıyla etkisi vardr.

Eğer aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $h : M \times N \longrightarrow L$ dönüşümü mevcutsa, bu dönüşüm ile birlikte yukarıda ki diyagrama çaprazlanmış kare (crossed square) denir.

Her $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $p \in P$ için

CS1) *λ, λ' , P nin etkilerini korur, ayrıca verilen etkiler ile birlikte $\lambda, \lambda', \mu, \psi$ ve $k = \mu\lambda = \psi\lambda'$ birer çaprazlanmış modüldür,*

CS2) $\lambda h(m, n) = m({}^{n}m)^{-1}$, $\lambda' h(m, n) = ({}^{m}n)n^{-1}$,

CS3) $h(\lambda l, n) = l^{n}l^{-1}$, $h(m, \lambda' l) = ({}^{m}l)l^{-1}$,

CS4) $h(mm', n) =^{m} h(m', n)h(m, n)$,

$h(m, nn') = h(m, n)^{n}h(m, n')$

CS5) $h({}^{p}m, {}^{p}n) =^{p} h(m, n)$ *dir.*

Teorem 8. *(G, L, μ) ve (H, L, ψ) birer çaprazlanmış modül olsun. $G \otimes H$ tensör çarpım grubu ve*

$$\lambda : G \otimes H \longrightarrow G \tag{5.1}$$
$$(g \otimes h) \longmapsto g({}^{h}g)^{-1} \tag{5.2}$$

ve

$$\lambda' : G \otimes H \longrightarrow H \tag{5.3}$$
$$(g \otimes h) \longmapsto {}^{g}hh^{-1} \tag{5.4}$$

morfizmleri ile

$$\begin{tikzcd} G \otimes H \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & G \arrow[d, "\mu"] \\ H \arrow[r, "\psi"'] & L \end{tikzcd}$$

şeklinde bir çaprazlanmış kare elde edilebilir.

İspat. *Burada*

$$f : G \times H \longrightarrow G \otimes H \tag{5.5}$$
$$(g, h) \longmapsto g \otimes h \tag{5.6}$$

şeklinde tanımlansın.

Sırasıyla çaprazlanmış kare şartlarının sağlandığı gösterilsin.

CS1)

$$L \times G \otimes H \longrightarrow G \otimes H \tag{5.7}$$
$$(l, g \otimes h) \longmapsto {}^{l}(g \otimes h) = (({}^{l}g) \otimes ({}^{l}h)) \tag{5.8}$$

etkisi için

$$\lambda({}^{l}(g \otimes h)) = \lambda(({}^{l}g) \otimes ({}^{l}h)) \tag{5.9}$$
$$= ({}^{l}g)\,{}^{{}^{l}h}({}^{l}g)^{-1} \tag{5.10}$$
$$= ({}^{l}g)\,{}^{{}^{l}h}({}^{l}g^{-1}) \tag{5.11}$$
$$= ({}^{l}g)^{lhl^{-1}l}(g^{-1}) \tag{5.12}$$
$$= ({}^{l}g)^{lh}(g^{-1}) \tag{5.13}$$
$$= {}^{l}(g^{h}g^{-1}) \tag{5.14}$$
$$= {}^{l}\lambda(g \otimes h) \tag{5.15}$$
$$\tag{5.16}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\lambda'({}^{l}(g\otimes h)) &= \lambda'(({}^{l}g)\otimes({}^{l}h)) && (5.17)\\
&= {}^{{}^{l}g}({}^{l}h)({}^{l}h)^{-1} && (5.18)\\
&= {}^{lgl^{-1}l}(h)({}^{l}h^{-1}) && (5.19)\\
&= {}^{l}({}^{g}hh^{-1}) && (5.20)\\
&= {}^{l}\lambda'(g\otimes h) && (5.21)
\end{aligned}
$$

olur.

Böylece λ,λ' morfizmleri L nin $G\otimes H$ üzerine etkisini korumuş olur. Teorem 7 gereği λ ve λ' birer çaprazlanmış modüldür. Ayrıca $g\otimes h\in G\otimes H$ için

$$
\begin{aligned}
\psi\lambda'(g\otimes h) &= \psi(({}^{g}h)h^{-1}) && (5.22)\\
&= \psi({}^{g}h)\psi(h^{-1}) && (5.23)\\
&= \psi({}^{\mu(g)}h)\psi(h^{-1}) && (5.24)\\
&= \mu(g)\psi(h)\mu(g)^{-1}\psi(h^{-1}) && (5.25)
\end{aligned}
$$

olup, $g\otimes h, g'\otimes h'\in G\otimes H$ için

$$
\begin{aligned}
\textbf{ÇM1)}\quad \psi\lambda'^{l}(g\otimes h) &= \psi(\lambda'^{l}(g\otimes h))\\
&= \psi({}^{{}^{l}g}({}^{l}h)({}^{l}h)^{-1})\\
&= \psi({}^{\mu({}^{l}g)l}h)\psi({}^{l}h^{-1})\\
&= \mu({}^{l}g)\psi({}^{l}h)\mu({}^{l}g)^{-1}\psi({}^{l}h)^{-1}\\
&= l\mu(g)l^{-1}l\psi(h)l^{-1}(l\mu(g)l^{-1})^{-1}(l\psi(h)l^{-1})^{-1} \qquad (5.26)\\
&= l\mu(g)\psi(h)\mu(g)^{-1}\psi(h)^{-1}l^{-1}\\
&= l\psi\lambda'(g\otimes h)l^{-1}\\
\textbf{ÇM2)}\quad {}^{\psi\lambda'(g\otimes h)}(g'\otimes h') &= {}^{\mu(g)\psi(h)\mu(g)^{-1}\psi(h^{-1})}(g'\otimes h')\\
&= {}^{[\mu(g),\psi(h)]}(g'\otimes h')\\
&= (g\otimes h)(g'\otimes h')(g\otimes h)^{-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $(G\otimes H, l, \psi\lambda')$ bir çaprazlanmış modüldür.

Şimdi benzer şekilde $\mu\lambda, g \otimes h \in G \otimes H$ için.

$$\begin{aligned} \mu\lambda(g \otimes h) &= \mu(g^h g^{-1}) && (5.27)\\ &= \mu(g)\mu({}^h g^{-1}) && (5.28)\\ &= \mu(g)\mu({}^{\psi(h)} g^{-1}) && (5.29)\\ &= \mu(g)\psi(h)\mu(g)^{-1}\psi(h)^{-1} && (5.30) \end{aligned}$$

olup, $g \otimes h, g' \otimes h' \in G \otimes H$ için

$$\begin{aligned} \textbf{ÇM1)}\quad \mu\lambda^l(g \otimes h) &= \mu\lambda({}^l g \otimes^l h)\\ &= \mu({}^l g^{{}^l h}({}^l g)^{-1})\\ &= \mu({}^l g)\mu({}^{\psi({}^l h)}({}^l g)^{-1})\\ &= \mu({}^l g)\psi({}^l h)\mu({}^l g)^{-1}\psi({}^l h)^{-1}\\ &= l\mu(g)l^{-1}l\psi(h)l^{-1}(l\mu(g)l^{-1})^{-1}(l\psi(h)l^{-1})^{-1}\\ &= l\mu(g)\psi(h)\mu(g)^{-1}\psi(h)^{-1}l^{-1}\\ &= l\mu\lambda(g \otimes h)l^{-1}\\ \textbf{ÇM2)}\quad {}^{[\mu(g),\psi(h)]}(g' \otimes h') &= (g \otimes h)(g' \otimes h')(g \otimes h)^{-1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

elde edilir. Yani $(G \otimes H, L, \mu\lambda)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Ayrıca 5.25 ve 5.30 denklemlerinin eşitliğinden $\psi\lambda' = \mu\lambda$ eşitliği elde edilir.

CS2)

$$\begin{aligned} \lambda f(g,h) &= \lambda(g \otimes h) = g({}^h g)^{-1} && (5.32)\\ \lambda' f(g,h) &= \lambda'(g \otimes h) = ({}^g h)h^{-1} && (5.33) \end{aligned}$$

olur.

CS3)

$$\begin{aligned} f(\lambda(g \otimes h), h') &= f(g({}^h g)^{-1}, h') && (5.34)\\ &= g({}^h g)^{-1} \otimes h' && (5.35)\\ &= (g \otimes h)({}^{h'}(g \otimes h))^{-1} \quad \textit{(4.45 denklemi ile)} && (5.36)\\ & && (5.37)\\ f(g', \lambda'(g \otimes h)) &= f(g', ({}^g h)h^{-1}) && (5.38)\\ &= (g' \otimes ({}^g h)h^{-1}) && (5.39)\\ &= {}^{g'}(g \otimes h)(g \otimes h)^{-1} \quad \textit{(4.46 denklemi ile)} && (5.40) \end{aligned}$$

elde edilir.

CS4)

$$
\begin{aligned}
f(gg', h) &= gg' \otimes h && (5.41)\\
&= {}^{g}(g' \otimes h)(g \otimes h) && (5.42)\\
&= {}^{g}f(g', h)f(g, h) && (5.43)\\
& && (5.44)\\
f(g, hh') &= g \otimes hh' && (5.45)\\
&= (g \otimes h)({}^{h}(g \otimes h')) && (5.46)\\
&= f(g, h)^{h}f(g, h') && (5.47)
\end{aligned}
$$

olur.

CS5)

$$
\begin{aligned}
f({}^{l}g, {}^{l}h) &= ({}^{l}g) \otimes ({}^{l}h) && (5.48)\\
&= {}^{l}(g \otimes h) && (5.49)\\
&= {}^{l}f(g, h) && (5.50)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece istenilen elde edilir. Yani

$$
\begin{tikzcd}
G \otimes H \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & G \arrow[d, "\mu"] \\
H \arrow[r, "\psi"'] & L
\end{tikzcd}
$$

bir çaprazlanmış karedir.

Teorem 9. *(Brown ve Loday, 1987) $\mu : M \longrightarrow P, \psi : N \longrightarrow P$ çaprazlanmış modüller olsun, böylece M, N üzerine μyardımıyla ve N, M üzerine ψ yardımıyla etki eder. Bu durumda $\lambda(m \otimes n) = m({}^{n}m)^{-1}$, $\lambda'(m \otimes n) = ({}^{m}n)n^{-1}$ ve $h(m, n) = m \otimes n$ olmak üzere*

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\psi"'] & P
\end{tikzcd}
$$

çaprazlanmış karesi vardır. Bu çaprazlanmış kare için aşağıdaki koşulların denkliği sağlanır.

1) Eğer $\begin{pmatrix} L & M \\ N & P \end{pmatrix}$ bir başka çaprazlanmış kare (aynı μ ve ψ ile birlikte) ise biricik bir $\begin{pmatrix} M\otimes N & M \\ N & P \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} L & M \\ N & P \end{pmatrix}$ çaprazlanmış kare morfizmi vardır. Burada bu morfizm M, N, P üzerinde birimdir.

2)
$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & P \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & M \\ 1 & P \end{pmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ N & P \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} M\otimes N & M \\ N & P \end{pmatrix} \end{array}$$

diyagramı çaprazlanmış karelerin kategorisinde bir ileri itme (pushout) dir. Burada 1 ile trival grup gösterilmektedir.

6. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL

Gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modül yapısı ilk kez (Conduche, 1984) tarafından tanımlanmıştır. 2-çaprazlanmış modül $\mathcal{L} = (L \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{d_1} P, \cdot, ,)$ şeklinde P-modüllerin bir normal zincir kompleksi vasıtasıyla tanımlanır.

Tanım 20. *L, M, P grup ve d_1, d_2 grup morfizmleri için*

$$L \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{d_1} P \tag{6.1}$$

bir zincir kompleksi olsun P nin kendi üzerine ve L, M üzerine etkileri mevcut olsun.

Ayrıca Peifter lifting olarak adlandırılan

$$\{.\} : M \times M \longrightarrow L \tag{6.2}$$

dönüşümü için $($$m, m', m'' \in M, l, l' \in L$ ve $p \in P$ olmak üzere$)$

$$\begin{array}{ll}
\textbf{2CM1)} & d_2\{m, m'\} = ({}^{d_1 m}m')mm'^{-1}m^{-1} \\
\textbf{2CM2)} & \{d_2 l, d_2 l'\} = [l', l] = l'll'^{-1}l^{-1} \\
\textbf{2CM3)} & \{mm', m''\} =^{d_1 m} \{m', m''\}\{m, m'm''m'^{-1}\} \\
 & \{m, m'm''\} = \{m, m'\}^{mm'm^{-1}}\{m, m''\} \\
\textbf{2CM4)} & \{d_2 l, m\} =^{m} ll^{-1} \\
 & \{m, d_2 l\} =^{d_1 m} l^m l^{-1} \\
\textbf{2CM5)} & \{m, d_2 l\}\{d_2 l, m\} =^{d_1 m} ll^{-1} \\
\textbf{2CM6)} & {}^p\{m, m'\} = \{{}^p m, {}^p m'\}
\end{array} \tag{6.3}$$

şartları sağlansın. Bu durumda;

$$L \xrightarrow{d_2} M \xrightarrow{d_1} P \tag{6.4}$$

zincir kompleksine grupların 2-çaprazlanmış modulü denir ve kısaca $(L, M, P, d_1, d_2, \{,\})$ şeklinde gösterilir.

Burada $L \xrightarrow{d_2} M$ *morfizmi* ${}^{m}l = \{d_2 l, m\} l$ *etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür. Çünkü;* $m \in M$ *ve* $l, l' \in L$ *için*

$$\begin{array}{llll} \textbf{\textit{CM1)}} & d_2({}^{m}l) & = & d_2(\{d_2 l, m\} l) \\ & & = & d_2\{d_2 l, m\} d_2 l \\ & & = & {}^{d_1 d_2 l} m d_2 l m^{-1} d_2 l^{-1} d_2 l = m d_2 l m^{-1} \\ \textbf{\textit{CM2)}} & {}^{d_2 l} l' & = & \{d_2 l', d_2 l\} l' \\ & & = & [l, l'] l' \\ & & = & l l' l^{-1} l'^{-1} l' = l l' l^{-1} \end{array} \tag{6.5}$$

olur.

Teorem 10. *(Mutlu ve Porter, 2003)*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\psi"'] & P \end{tikzcd}$$

çaprazlanmış karesi için;

$$L \xrightarrow{d_2} M \rtimes N \xrightarrow{d_1} P \tag{6.6}$$

zincir yapısı

$$d_1(m, n) = \mu(m)\psi(n) \tag{6.7}$$

$$d_2(l) = (\lambda(l)^{-1}, \lambda'(l)) \tag{6.8}$$

ve

$$\{(m, n), (m', n')\} = h(m, n n' n^{-1}) \tag{6.9}$$

olacak şekilde bir Peiffer lifting dönüşümü ile 2-çaprazlanmış modüldür.

İspat. d_1 *ve* d_2 *grup homomorfizmleridir. Çünkü;*

$$d_1((m, n).(m', n')) = d_1(m^{\psi(n)} m', n n') \tag{6.10}$$

$$= \mu(m^{\psi(n)} m')\psi(n n') \tag{6.11}$$

$$= \mu(m)\psi(n)\mu(m')\psi(n)^{-1}\psi(n)\psi(n') \tag{6.12}$$

$$= \mu(m)\psi(n)\mu(m')\psi(n') \tag{6.13}$$

$$= d_1(m, n) d_1(m', n') \tag{6.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_2(l)d_2(l') &= (\lambda(l)^{-1},\lambda'(l)').(\lambda(l')^{-1},\lambda'(l')) && (6.15)\\
&= ((\lambda(l)^{-1})^{\lambda'(l)}\lambda(l')^{-1},\lambda'(l)\lambda'(l')) && (6.16)\\
&= (\lambda((l)^{-1})^{\mu\lambda(l)}\lambda(l')^{-1},\lambda'(l)\lambda'(l')) && (6.17)\\
&= (\lambda(l)^{-1}\lambda(l)\lambda(l')^{-1}\lambda(l^{-1}),\lambda'(l)\lambda'(l')) && (6.18)\\
&= (\lambda(l')^{-1}\lambda(l)^{-1},\lambda'(l)\lambda'(l')) && (6.19)\\
&= (\lambda(ll'))^{-1},\lambda'(ll')) = d_2(ll') && (6.20)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$L \xrightarrow{d_2} M \rtimes N \xrightarrow{d_1} P \qquad (6.21)$$

zincirdir çünkü;

$$\begin{aligned}
d_1(d_2(l)) &= d_1(\lambda(l)^{-1},\lambda'(l)) && (6.22)\\
&= \mu(\lambda(l))^{-1}\psi(\lambda'(l)) && (6.23)\\
&= \psi\lambda'(l)^{-1}\psi\lambda'(l) = 1 && (6.24)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi de $\{(m,n),(m',n')\} = h(m,nn'n^{-1})$ *Peiffer lifting dönüşümü için 6.3 de verilen şartların bazılarının sağlandığı gösterilecektir.*

2CM2)

$$\begin{aligned}
\{d_2l,d_2l'\} &= \{(\lambda(l)^{-1},\lambda'(l)),(\lambda(l')^{-1},\lambda'(l'))\} && (6.25)\\
&= h(\lambda(l)^{-1},\lambda'(l)\lambda'(l')\lambda'(l)^{-1}) && (6.26)\\
&= l^{-1(\lambda'(l)\lambda'(l')\lambda'(l)^{-1}}l && (6.27)\\
&= l^{-1(\lambda'(l)\lambda'(l'))}(l^{-1}ll) && (6.28)\\
&= l^{-1(\lambda'(l)\lambda'(l'))}l && (6.29)\\
&= l^{-1\lambda'(l)}(l'l'l'^{-1}) && (6.30)\\
&= l^{-1}ll'll'^{-1} && (6.31)\\
&= l'll'^{-1}l^{-1} && (6.32)\\
&= [l',l] && (6.33)
\end{aligned}$$

2CM3)

$$
\begin{aligned}
\{(m,n)(m',n'),(m'',n'')\} &= \{(m^n m', nn'),(m'',n'')\} && (6.34)\\
&= h(m^n m', nn'n''(nn')^{-1}) && (6.35)\\
&= {}^m h({}^n m', nn'n'(n'^{-1})(n^{-1}))\\
&\quad h(m, nn'n''(n'^{-1})(n^{-1})) && (6.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{d_1(m,n)}\{(m',n'),(m',n')\}\{(m,n),(m',n')(m'',n'')(m',n')^{-1}\} =\\
&= {}^{\mu(m)\psi(n)}h(m', n'n''n'^{-1})\\
&\quad \{(m,n),(m'^{n'})(m'')^{n'n''n'^{-1}}(m'^{-1}), n'n''n'^{-1}\} && (6.37)\\
&= {}^{\mu(m)\psi(n)}(h(m', n'n''n'^{-1}))h(m, nn''(n'^{-1})n^{-1}) && (6.38)\\
&= {}^{\mu}(h({}^n m', nn'n''(n'^{-1})n^{-1}))h(m, nn'n''((n')^{-1})n^{-1}) && (6.39)
\end{aligned}
$$

6.36 ve 6.39 denklemlerinin eşitliğinden aksiyom sağlanır.

2CM6)

$$
\begin{aligned}
{}^p\{(m,n),(m',n')\} &= {}^p(h(m, nn'n^{-1})) && (6.40)\\
&= h({}^p m, {}^p(nn'n^{-1})) && (6.41)\\
\{{}^p(m,n), {}^p(m',n')\} &= h({}^p m, ({}^p n)({}^p n)'({}^p n)^{-1} && (6.42)\\
&= h({}^p m, {}^p(nn'n^{-1}) && (6.43)
\end{aligned}
$$

6.41 ve 6.43 denklemlerinin eşitliğinden aksiyom sağlanır.

Böylece $L \xrightarrow{d_2} M \rtimes N \xrightarrow{d_1} P$ zincirinin bir 2-çaprazlanmış modül olduğu elde edilir.

Sonuç 1. *(G, L, μ) ve (H, L, ψ) çaprazlanmış modülleri için Teorem 8 de elde edilen*

$$
\begin{tikzcd}
G \otimes H \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & G \arrow[d, "\mu"] \\
H \arrow[r, "\psi"'] & L
\end{tikzcd}
$$

çaprazlanmış karesi ele alınsın. Buna göre

$$
G \otimes H \xrightarrow{d_2} G \rtimes H \xrightarrow{d_1} L \qquad (6.44)
$$

için

$$d_1(g,h) = \mu(g)\psi(h) \tag{6.45}$$

$$d_2(g\otimes h) = (\lambda(g\otimes h)^{-1}, \lambda'(g\otimes h)) \tag{6.46}$$

morfizmleri ve

$$\{(g,h),(g',h')\} = h(g, hh'h^{-1})$$

Peiffer liftingi ile birlikte 2-çaprazlanmış modül elde edilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde birbirleri üzerine uyumlu etkileri olan G ve H gruplarının $G \otimes H$ tensör çarpım grubu incelendi. Bu $G \otimes H$ tensör çarpım grubu ile çaprazlanmış modül yapıları elde edildi ve bunlar yardımıyla bir çaprazlanmış kare oluşturuldu.

Son olarak çaprazlanmış kare ve 2-çaprazlanmış modül arasındaki bilinen ilişki kullanılarak $G \otimes H$ tensör çarpım grubu yardımıyla bir 2-çaprazlanmış modül yapısı elde edildi.

İki grubun tensör çarpımı kullanılarak tanımlanabilen dış (exterior) çarpım gibi farklı birçok yapı mevcuttur. Bu yapılar ve özellikleri incelenerek farklı ve dikkate değer sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Brown, R. ve J. L. Loday (1987). "Van Kampen Theorems For Diagrams of Space". İn: *Topology*.

Conduche, D. (1984). "Modules Croises Generalises De Longuer 2". İn: *J. Pure Applied Algebra* 34, pp. 155–178.

Dennis, R.K. (1976). "In Search Of New Homology Functors Having A Close Relationship To K-Theory". İn: *Cornell University*.

Guin-Walery, D. ve J.L. Loday (1981). "Obstructions Alexcision En K-Theorie Algebrique". İn: *Springer Lecture Notes In Mathematics*, p. 854.

Mc Dermott, A. (1998). "The Nonabelian Tensor Product of Groups: Computations and Structural Results". Ph.D. Dep. Math. Fac. Art. National University of İreland Galway.

Mutlu, A. ve T. Porter (2003). *Crossed Squares And 2-Crossed Modules*.

Porter, T. (1987). "Homology Of Commutative Algebras And An Invariant Of Simis And Vasconceles". İn: *J. Algebra* 2, p. 99.

Shamnu, N.M. (1992). "Algebraic And Categorical Structure Of Category Of Crossed Modules Of Algebras". Ph.D.

Whitehead, J.H.C. (1949). "Combinatorial Homotopy II." İn: *Bull. Amer. Soc.* Pp. 453–496.