İzoperimetrik Eşitsizlikler Üzerine

Şermin Coşkun

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Nisan 2019

On the Isoperimetric Inequalities

Şermin Coşkun

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

April 2019

İzoperimetrik Eşitsizlikler Üzerine

Şermin Coşkun

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Nisan 2019

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Şermin Coşkun'un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**İzoperimetrik Eşitsizlikler Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ayşe Bayar

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**İzoperimetrik Eşitsizlikler Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 30/04/2019

Şermin Coşkun

ÖZET

Bu tezde, bazı Minkowski geometrilerinde izoperimetrik eşitsizlikler ile ilgili özellikler incelenmiştir.

İlk bölümde, Öklidyen düzlem aksiyomları ile Taksi, Çin-dama ve α-düzlemi ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, düzlemde izoperimetrik problemin tarihçesi ve çözümünde kullanılan bazı metodlar ve konveks figürler verilmiştir.

Son bölümde, Taksi ve α-düzlemlerinde izoperimetrik eşitsizlikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Taksi düzlem, Çin-dama düzlemi, α-düzlemi, izoperimetrik eşitsizlik.

SUMMARY

This thesis deals with some properties related with isoperimetric inequalities in some Minkowski geometries.

In the first chapter, Euclid's axioms and some basic notions related with Taxicab, Chinese Checkers and α-geometries are given.

In the second chapter, history of isoperimetric problem, some methods used to solve isoperimetric problem in the Euclidean plane and convex figures are given.

In the last chapter, isoperimetric inequalities in the taxicab and α-plane are presented.

Keywords: Taxicab plane, Chinese chekers plane, α-plane, isoperimetric inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca tüm bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren çok değerli hocam **Prof. Dr. Ayşe Bayar**'a, her zaman yanımda olan başta değerli annem **Cihangül Coşkun**'a, babam **Şakip Coşkun**'a ve tüm aileme teşekkürler.

Eskişehir, 2019
Şermin Coşkun

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğrularıdır. Açı ölçümü Öklidyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnız uzaklık tüm yönlerde aynı değildir. Bu farklılık ele alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır.

İzoperimetrik problem eski Yunanlılara dayanmaktadır. Virgil' in Aeneid (Virgil, 1697) kitabında Dido efsanesinden bahseder ve bu problemin çözümü Yunanlılar tarafından bilinir. İzoperimetrik teorem, Öklidyen geometride düzlemsel şekiller arasında düzlemin en iyi şeklinin çember olduğunun ifade eder.

Bu çalışmada amaç taksi ve α-uzaklık fonksiyonları ile donatılmış düzlemlerde izoperimetrik problemleri tartışmak ve örneklerle zenginleştirmektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklidyen, taksi, Çin-dama ve α-düzlem geometri ile ilgili temel kavramlar özetlenmiştir.

2.1 Geometrik Yapılar

Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğrularıdır, açı ölçümü Ökliyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnız uzaklık tüm yönlerde aynı değildir. Bu farklılık ele alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Bu geometrilere örnek olarak Taksi geometri, Çin-dama geometrisi ve α-geometrisi verilebilir.

P : noktalar kümesi,

L : P nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesi,

m : açı ölçüm fonksiyonu,

d_E: uzaklık fonksiyonu
olmak üzere aşağıda verilen on üç aksiyomu $(E1-E13)$ sağlayan $[P, L, d_E, m]$ matematiksel yapısı Öklidyen düzlem olarak düşünülebilir.

$[E1]$ Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

$[E2]$ Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

$[E1]$ ve $[E2]$ aksiyomları üzerinde olma aksiyomları olarak bilinir.

Bunları izleyen dört aksiyom uzaklık fonksiyonunun sırayla pozitif tanımlılık, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağlamasıyla ilgilidir. Ayrıca cetvel aksiyomu denilen aksiyomu da sağlar. d_E için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir:

$[E3]$ Her sıralı (A, B) nokta çifti için d_E negatif olmayan bir $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_E(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

$[E4]$ $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dır.

$[E5]$ $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir.

$[E6]$ Verilen bir l doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm A, B noktaları için;

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d_E(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom düzlem ayırma aksiyomudur.

$[E7]$ Verilen bir l doğrusu için P nin H_1 ve H_2 gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır öyleki,

$i)H_1$ ve H_2 konvekstir.

$ii)H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$($\mathbb{P}$ den l nin atılmışı demektir).

$iii)A \in H_1$ve $B \in H_2$ ise $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$ olur.

Şimdi vereceğimiz dört özelik açı ölçüm aksiyomu diye anılır:

$[E8]$ m, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

$[E9]$ H yarı düzlemin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\angle ABD$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

$[E10]$ Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

$[E11]$ Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overrightarrow{AC}$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

olur.

Sıradaki aksiyom $[P, L, d_E, m]$ sisteminin "kenar-açı-kenar" aksiyomudur.

$[E12]$ İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

Son olarak $[\mathbb{P}, L, d_E, m]$ sistemi için ünlü paralellik aksiyomunu ifade edelim:

$[E13]$ l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Şimdi Minkowski geometrisine geçişi sağlayan bilgiler (Martin, 1998) ve (Milmann ve Parker, 1991) den özetle verilmektedir.

Tanım 1. *P elemanları noktalar olan bir küme ve L de P nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $A = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemine soyut geometri adı verilir.*

$i)$ *Her $A, B \in \mathbb{P}$ için $A \in l$ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in \mathbb{L}$ doğrusu vardır.*

$ii)$ *Her doğru en az iki noktaya sahiptir.*

Tanım 2. *$\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ soyut geometri olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A sistemine incidence geometri denir.*

$i)$ $\mathbb{L}$ *deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.*

$ii)$ *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Buna göre bir $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sisteminin incidence geometri olması için aşağıdaki üç aksiyomu sağlamalıdır:

$i)$ Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

$ii)$ Her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

$iii)$ Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Öklid geometrisine metrik yaklaşım (Birkhoff, 1932) çalısmasıyla Amerikan matematikçisi George David Birkhoff'a dayanır. Yukarıdaki $E1 - E13$ aksiyomları düzlemsel Öklid geometrisini metrik yaklaşımla düzenlemektedir. Bir incidence geometrinin metrik yaklaşımla incelenebilir olması için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç vardır:

Tanım 3. *$\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir metriktir denir. Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için,*

$i)$ $d(P,Q) = 0$ *ve* $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

$ii)$ $d(P,Q) = d(Q,P)$

$iii) d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

Tanım 4. *l, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometrinin bir doğrusu olsun. d de $\mathbb{P}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa $f : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu l için cetveldir denir.*

$i)$ *f fonksiyonu $1:1$ ve örtendir.*

$ii)$ *l üzerindeki her P, Q nokta çifti için,*

$$|f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$$

dir. $ii)$ şıkkındaki eşitliğe cetvel denklemi ve $f(P)$ ye de P nin f ye bağlı koordinatı denir.

Tanım 5. *$[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ incidence geometri olmak üzere d uzaklık fonksiyonu cetvel aksiyomunu sağlarsa ve her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ sistemine metrik geometri denir. Minkowski geometrisi, $\mathbb{P}$ Öklid geometrisindeki noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ Öklid geometrisindeki doğrular kümesi ve d herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisidir. O halde Minkowski geometrileri Öklidyen nokta ve doğrularla inşa edilen metrik geometrilerdir. Ancak açı ölçüm fonksiyonu ilavesi ve sağladıkları aksiyomlar ile aşağıdaki tanımları verilen geometrilerle de ilişkilendirilebilirler.*

Tanım 6. *Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye bir Pasch geometrisi denir.*

Tanım 7. *$[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ Pasch geometrisi ile birlikte m açı ölçüm fonksiyonu ile oluşturulan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ sistemine Protractor geometri denir. Kenar-Açı-Kenar aksiyomunu sağlayan Protractor geometriye Absolute (mutlak) geometri denir.*

2.2 Düzlem Taksi Geometri

20. yüzyılın başlarında H. Minkowski Taksi metriğini de kapsayan bir metrik ailesi vermiştir (Minkowski, 1967). Daha sonra K. Menger analitik düzlemde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık için iyi bilinen Öklidyen metrik yerine Taksi metriğini kullanarak Taksi düzlem geometri ile tanıştırmıştır (Menger, 1952). Sonrasında E. F. Krause düzlem Taksi geometrideki temel kavramları işleyen bir kitap yayınlamıştır (Krause, 1975). Taksi geometri pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları (Akça, 1997), (Akça, 2004a), (Akça, 2004b), (Bayar, 2006), (Ho ve Liu, 1996), (Kaya, 2000), (Kaya, 2006b), (Laatsch, 1982), (Özcan, 2002a), (Özcan, 2002b), (Reynolds, 1980), (Schattschneider, 1984), (So ve Al-Maskari, 1995), (So, 2002), (Thompson ve Dray, 2000) ve (Tian ve Chen, 1997) kaynaklarıdır.

Tanım 8. *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Taksi uzaklık fonksiyonu adı verilir.

Taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken K. Menger ve E. F. Krause bu noktalar arasındaki uzaklık için H. Minkowski tarafından tanımlanan

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlemsel taksi geometriyi geliştirdiler.

Tanımlanan $d_T -$uzaklık fonksiyonu analitik düzlemde bir metrik belirtir.

Önerme 1. *Analitik düzlemde tanımlanan taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat. *Metrik tanımı gereğince taksi uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.*

$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$*olsun. Mutlak değer tanımından dolayı*

$$|x_1 - x_2| \geq 0$$

ve

$$|y_1 - y_2| \geq 0$$

olduğundan

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$$

olup $d_T(P_1, P_2) \geq 0$ *dır. Ayrıca*

$$d_T(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

olması gerektiğinden

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P_1 = P_2$ *dir. Açıkca* $P_1 = P_2$ *ise* $d_T(P_1, P_2) = 0$ *dır. O halde*

$$d_T(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$$

dir. Yani d_T *-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.*

Üstelik mutlak değer tanımı gereğince

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

ve

$$|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

olduğundan

$$d_T(P_1, P_2) = d_T(P_2, P_1)$$

dir. Bu nedenle d_T*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.*

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$*olsun. Mutlak değer özelliği gereğince*

$$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$$

$$|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} d_T(P_1, P_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_T(P_1, P_3) + d_T(P_3, P_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde d_T *uzaklık fonksiyonu metrik özelliklerini sağladığından bir metriktir.*

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 2.1a da görüldüğü üzere her biri bir koordinat eksenine paralel olan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye gitmek için sadece Şekil 2.1a daki yol değil aynı zamanda koordinat eksenlerine paralel hareket etmek üzere P_1P_2 köşegenli dikdörtgensel bölgede istenilen yol izlenebilir. (Şekil 2.1b)

(a) Öklid Uzaklık

(b) Taksi Uzaklık

Şekil 2.1: Öklid ve Taksi uzaklık

Taksi geometri ve Öklidyen geometri arasındaki farklardan bazıları şunlardır:

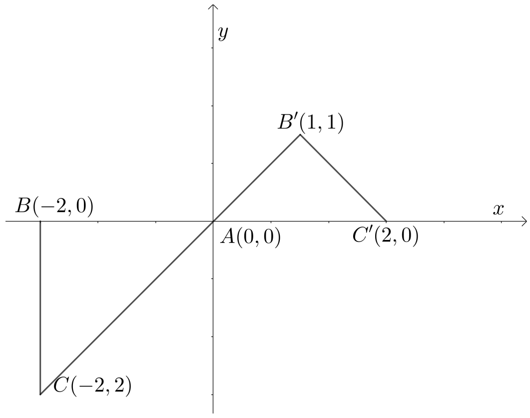
1) Öklidyen geometrideki kenar-açı-kenar aksiyomu taksi geometride geçerli değildir.

Öklid düzleminde iki üçgen arasında yapılan eşlemede iki kenar ve bu iki kenarın arasındaki açı eşit ise bu iki üçgen birbirine benzerdir.' şeklinde ifade edilen kenar-açı-kenar aksiyomu taksi düzleminde sağlanmaz.

Örnek 1. *Köşeleri $A(0,0), B(-2,0), C(-2,-2)$ olan ABC ve köşeleri $A(0,0), B'(1,1), C'(2,0)$ olan $AB'C'$ üçgenlerini göz önüne alalım. Bu üçgenlerin karşılıklı açıları birbirine eşittir. Diğer taraftan Öklid düzleminde kenar uzunlukları*

$$\begin{aligned}
d_E(A,B) &= \sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2} = 2\\
d_E(A,B') &= \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}\\
d_E(B,C) &= \sqrt{(-2-(-2))^2+(-2-0)^2} = 2\\
d_E(B',C') &= \sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2}\\
d_E(A,C) &= \sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}\\
d_E(A',C') &= \sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2} = 2
\end{aligned}$$

olup



Şekil 2.2: Örnek 1

$$\frac{|AB|}{AB'} = \frac{|AC|}{AC'} = \frac{|BC|}{BC'} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

olduğundan ABC üçgeni $AB'C'$ üçgenine benzerdir.

Taksi düzlemde ise kenar uzunlukları

$$\begin{aligned}
d_T(A,B) &= |-2-0| + |0-0| = 2 \\
d_T(A,B') &= |1-0| + |1-0| = 2 \\
d_T(B,C) &= |-2-(-2)| + |-2-0| = 2 \\
d_T(B',C') &= |2-1| + |0-1| = 2 \\
d_T(A,C) &= |-2-0| + |-2-0| = 4 \\
d_T(A,C') &= |2-0| + |0-0| = 2
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{|AB|}{AB'} = \frac{2}{2} = 1 \neq \frac{|AC|}{AC'} = \frac{4}{2} = 2$$

olduğundan kenar-açı-kenar aksiyomu sağlanmamaktadır.

$2)$ Öklidyen geometri doğal dünyanın iyi bir modeliyken taksi geometri insanlığın inşa ettiği kentsel dünyanın en iyi modelidir.

$3)$ Öklidyen geometride $\pi_E = 3,14285$ iken taksi geometride $\pi_T = 4$ tür.

Taksi geometride birim çemberin denklemi $|x| + |y| = 1$ dir. Birim çemberin alanı $= \pi_T r^2 = \pi_T = 4$ dür.

$4)$ Genellikle şekiller farklıdır.

Örnek 2. *İki doğru parçası taksi uzunlukları eşitken Öklidyen uzaklıkları eşit olmayabilir.*

$A = (-4, 3), B = (3, 2), C = (3, 1), D = (-2, 4)$ *için*

$$d_T(A, B) = d_T(C, D) = 8$$

ve

$$d_E(A, B) = 5\sqrt{2} \neq d_E(C, D) = \sqrt{34}$$

olduğundan AB doğru parçası ile CD doğru parçasının taksi uzunlukları eşit iken Öklidyen uzunlukları eşit değildir.

Örnek 3. *$A = (-4, 3), B = (3, 2), C = (-4, 3), D = (1, -2)$ için AB doğru parçasının ve CD doğru parçasının Öklidyen uzunlukları*

$$d_E(A, B) = d_E(C, D) = 5\sqrt{2}$$

eşit iken taksi uzunlukları

$$d_T(A, B) = 8 \neq d_T(C, D) = 10$$

farklıdır.

Taksi düzlemin uzaklık koruyan dönüşümleri, Öklidyen düzlemin $y = x, y = -x, y = 0, x = 0$ doğrularına göre yansımalarından ve $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ açılı dönmelerinden oluşur. İzometri grubu ötelemeler grubu ile karenin simetri grubunun yarıdirekt çarpımından oluşur. (Schattschneider, 1984)

Aşağıdaki teorem analitik düzlemde farklı iki nokta arasındaki Öklidyen ve taksi uzaklıklar arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 1. *Analitik düzlemde farklı $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru l olsun ve d_E ile Öklidyen metrik gösterilsin. m, l doğrusunun eğimi ise*

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

dir (Kaya, 2006b).

İspat. *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_1 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde farklı herhangi iki nokta olmak üzere $d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$ olacak şekilde bir λ parametresi vardır. Ayrıca P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ dir.*

$$d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$$

$$\Rightarrow \quad |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = \lambda \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\lambda = \frac{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

olup $P_1 \neq P_2$ olduğundan $x_1 - x_2$ veya $y_1 - y_2$ den en az biri sıfırdan farklıdır. Buna göre,

$$d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2) \Rightarrow \lambda = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan ise

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

olarak verilebilir. Burada P_1 ile P_2 noktaları yatay veya dikey bir doğru üzerinde iseler taksi ve Öklidyen uzaklıklar eşittir.

Bu teoreme göre herhangi bir doğru boyunca olan taksi uzaklığı, aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığının sabit bir pozitif katıdır. Bu teorem kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 1. *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç nokta olsun. Bu taktirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ olmasıdır.*

İspat. *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde doğrudaş olan üç nokta olsun. Önceki yardımcı teoremden dolayı $\lambda = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$ olmak üzere*

$$d_T(P_1, X) = \lambda d_E(P_1, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_1, X)$$

$$d_T(P_2, X) = \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_2, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2, X)$$

dir.

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$$

ise

$$\frac{1}{\lambda} d_T(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2, X) \Rightarrow d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$$

dir. Eğer

$$d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$$

ise

$$\lambda d_E(P_1, X) = \lambda d_E(P_2, X) \Rightarrow d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$$

olur.

Sonuç 2. *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_T(P_1,X)}{d_T(P_2,X)} = \frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve Taksi uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat. *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Önceki yardımcı teroemden dolayı $\lambda = \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere*

$$d_T(P_1,X) = \lambda d_E(P_1,X) \Rightarrow d_E(P_1,X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_1,X)$$

$$d_T(P_2,X) = \lambda d_E(P_2,X) \Rightarrow d_E(P_2,X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2,X)$$

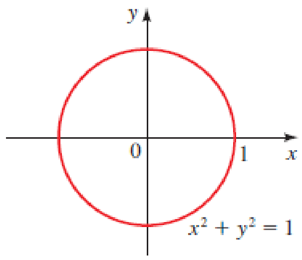
dir. O halde

$$\frac{d_T(P_1,X)}{d_T(P_2,X)} = \lambda \frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)} = \frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)}$$

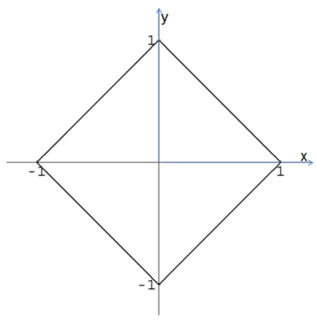
olur.

2.3 Taksi Geometride Alan

Taksi geometride alan hesabı birim kareye dayanır. Orijin merkezli Öklid ve taksi birim çemberleri Şekil 2.3 de verilmiştir.



(a) Öklid Birim Çemberi

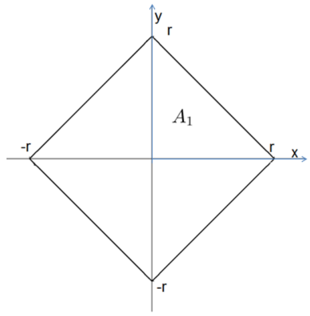


(b) Taksi Birim Çemberi

Şekil 2.3: Öklid ve Taksi Birim Çemberleri

r-yarıçaplı taksi çemberin alanının $\frac{1}{2}\pi_T \cdot r^2$ olduğunu görelim. Şekil 2.4 de merkezi orijin olan r-yarıçaplı taksi çember resmedilmiştir.

$$A_1 = \frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}$$



Şekil 2.4: r-yarıçaplı taksi çember

Şekilden A_1 *üçgeninin alanı* r *kenarlı karenin alanının yarısıdır. Taksi çemberin alanı* A_c *ise* A_1 *alanının 4 katıdır.*

$$A_c = 4A_1 = 4(\frac{1}{2}r^2)$$

ve $\pi_T = 4$ *olduğundan*

$$A_c = \frac{1}{2}\pi_T r^2$$

elde edilir.

$n \geq 3$ *olmak üzere* $n-$*boyutlu Taksi uzayları da, Taksi düzlemi ile benzer şekilde oluşturulur.* $n-$*boyutlu Taksi uzaylarında noktalar ve doğrular,* $n-$*boyutlu Öklid uzaylarındaki noktalar ve doğruların aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen durumdaki ile aynıdır. Üç boyutlu uzayda* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *noktaları arasındaki Öklid ve taksi uzaklıkları sırayla,*

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

dir.

n-boyutlu uzayda $P_1 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *ve* $P_2 = (y_1, y_2, ..., n_n)$ *noktaları arasındaki Öklid ve taksi uzaklıkları sırayla,*

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2},$$

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$$

dir.

2.4 Çin-dama Düzlemi

Çin-dama oyununda yapılan hareketi taklit eden bir metrik G. Chen (Chen, 1992) tarafından verildi.

Çin-dama (CC) düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılır. Analitik düzlemde alınan

$$P_1 = (x_1, y_1) \quad \text{ve} \quad P_2 = (x_2, y_2)$$

noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dir.

Tanım 9. $P_1 = (x_1, y_1) \quad ve \quad P_2 = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_c = (P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_c : R^2 \times R^2 \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna analitik düzlemde* P_1 *ve* P_2 *noktaları arasındaki Çin-dama uzaklık fonksiyonu adı verilir.*

Çin-dama uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlem Çin-dama geometrisi oluşturulur.

Çin-dama uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri 1 veya -1 eğimli olan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye olan yolların birleşimi, yani P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile $45°$ lik açı yapan paralelkenardır.

Tanım 10. *Çin-dama düzleminde sabit bir noktadan sabit bir CC-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine Çin-dama (CC) çemberi denir. Sabit noktaya CC çemberinin merkezi, sabit CC-uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.*

Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r birim CC-uzaklığında bulunan bütün noktalar

$$C = \{X = (x, y) : d_c(M, X) = r\}$$

yani

$$C = \{X = (x, y) : \max\{|x - m_1|, |y - m_2|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x - m_1|, |y - m_2|\} = r\}$$

kümesini oluşturur. Buna göre C kümesi M merkezli, r yarıçaplı CC-çemberidir (Uymaz, 2002).

Geometrik araştırmalardaki temel problemlerden biri d metriği ile donatılmış olarak verilen bir S uzayının G izometriler grubunu tespit etmektir. Eğer S alışılmış metrikle verilmiş Öklid düzlemi ise G izometriler grubunun düzlemin tüm ötelemeler, dönmeler, yansımalar ve kayma-yansımalarından oluştuğu bilinmektedir. Öklidyen düzlem için iyi bilinmektedir ki, $G = E(2)$, kendisinin iki altgrubu olan $O(2)$ ortagonal grup ve $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımıdır. Burada $O(2)$ birim çemberin simetriler grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur. (Kaya, 2006a)

Çin-dama düzlem geometrisinde Öklidyen düzlem geometrideki pek çok kavram incelenmiştir. Bunlar arasında konikler, üçgenler için Heron formülü, inversiyonlar, izometriler ile 3-boyutlu Çin-dama uzayında bir noktanın bir düzleme ve bir doğruya olan uzaklığı sayılabilir. (Kaya, 2006a), (Turan, 2004), (Gelişgen, 2007)

2.5 Düzlem α-Geometrisi

$\alpha-$uzaklığı, Taksi ve Çin-dama uzaklıklarının bir genelleştirilmişi olan bir metrik ailesidir ve Tian tarafından geliştirilmiştir (Tian, 2005).

Tanım 11. *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$\triangle_{P_1P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

ve

$$\delta_{P_1P_2} = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$*olmak üzere*

$$d_\alpha : R^2 \times R^2 \to [0, \infty)$$

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \triangle_{P_1P_2} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\delta_{P_1P_2}$$

olarak tanımlanan fonksiyona analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki α-uzaklık fonksiyonu denir.

Analitik düzlemde, α-uzaklık fonksiyonu metrik belirtir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 ve P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan paralelkenardır.

Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen bazı özeliklerin $\alpha-$düzlem geometrisindeki karşılıkları (Gelişgen, 2007) de verilmektedir.

3. İZOPERİMETRİK EŞİTSİZLİKLER

İzoperimetrik problem eski Yunanlılara dayanmaktadır. Virgil' in Aeneid (Virgil, 1697) kitabında Dido efsanesinden bahseder ve bu problemin çözümü Yunanlılar tarafından bilinir.

M.Ö.800 lü yıllarda geçen efsaneye göre Prenses Dido Fenike vatanının surlarında yaşamaktadır. Kral olan erkek kardeşinin ölümcül zulmünden kendini kurtararak Akdeniz e geçer ve Kuzey Afrika nın kıyıları üzerinde kendisine uygun bir arazi araştırır. Yerliler tarafından önyargı ve kuşkuyla karşılaştığı için ona sadece bir boğanın derisi tarafından çevrelenen arazinin satın alınmasına izin verilir. O da şartları kabul eder ve çevresi sabit kalmak şartıyla pek çok küçük derilere çıkarmalar ve eklemelerle maksimum alanlı arazisini oluşturur. Böylelikle verdiği paraya karşılık maksimal alanlı bir yerin sahibi olur.

Sonuç olarak onun bu minimum ücrete satın aldığı parça büyük bir ev inşa etmek için yeterli olur. Bu efsanenin Charthage şehrinin başlangıcı olduğu söylenir.

Bu efsaneye göre Prenses Dido, ünlü bir izoperimetrik problemlerden biri olan: **Aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller içinde hangisi en büyük alana sahiptir?** olan problemi çözer. Bu problem belki de diferansiyel geometrinin en eski problemidir.

Birçok Yunanlı İzoperimetri teoremi ispatlama girişiminde bulunmuştur. Biliyoruz ki hem Archimedes hem de Zenodorus bu teoremi ispatlamaya çalışmıştır. Fakat ikisi de ispatı tamamlayamamıştır.

İzoperimetrik problemi, izoperimetrik şekiller hakkında yazıldığı kaybolmuş eserinde ele alan ve ispatlayan ilk matemetikçi Zenodorus'tur. Ancak hem matemetiği hem kozmografyayı ilgilendiren yanlarından dolayı bu problem matematikçi ve astronomların, hatta felsefecilerin ilgisini çekmiş ve üzerine İskenderiyeli Heron, Batlamyus, Pappus, İskenderiyeli Theon gibi pek çok kişi çalışmıştır. İslam matematiğinde bu konuya eğilen ilk kişi Ya'kub B. İshak el-Kindi' dir. Theon' un etkisinin açık bir şekilde hissedildiği *Risale fi'ş-şınaati'l-uzma* adlı eserinde problemi inceleyip sonucunu vermiştir.

Zenodorus, izoperimetrik problemini ortaya atan çoğu önemli ifadeyi kanıtlamayı başarabildi ama o zamanın matematiği problemin kendisini ispatlayabilecek kadar gelişmiş değildi. Bu kısıtlamalara rağmen Zenodorus aşağıdaki ifadeleri kanıtladı:

1. En büyük iç açıya sahip düzgün çokgenin alanı en büyüktür.

2. Dairenin alanı, eşit çevre uzunluğu olan düzgün çokgenin alanından daha fazladır.

3. Aynı çevre uzunluğuna ve aynı kenar sayısına sahip çokgenler içinde düzgün çokgenin alanı en fazladır.

Zenodorus aynı zamanda 3-boyutlu uzayda aynı hacme sahip cisimler içinde kürenin en büyük yüzey alanına sahip olduğunu göstermiştir.

Bir uzaydaki kapalı eğriler için:

(A) Sabit çevre uzunluğundaki bütün eğrilerden, çember en büyük alanı çevreler.

(B) Aynı alanı çevreleyen eğriler içinde çemberin çevre uzunluğu en küçüktür.

Yani, çevre sabitken alanı maksimum olan dairedir ve alan sabit iken çevresi minimum olan çemberdir.

Pappus da modern matematik standartlarına uygun olmayan bir ispat vermiştir. Yunanlılar, aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller içinde maksimum alana sahip şeklin daire olduğuna inanmaktadır. İzoperimetrik problemin ispatı için uğraşılmasına rağmen 19.yy sonlarına kadar iyi bir ispat verilmemiştir. 1938 de Steiner bugün Steiner simetrileştirilmesi olarak bilinen teknikle bu problemi ispatlayan birçok çalışma yayınlamıştır.

Steiner'in ispatı iki gerçeğe dayanır ki bu gerçeklere kolaylıkla ulaşılabilir.

(1) Hipotenüsü çap olan çemberdeki herhangi bir tanımlanmış üçgenin dik kenarları arasında dik açısı vardır.

(2) İki kenarı aynı uzunluğa sahip üçgenler içinde bu iki kenarı dik olan üçgenin alanı daha büyüktür.

Öklidyen düzlemde iki kenar uzunluğu x ve y olan bir üçgenin alanı, bu kenarlar arasındaki açı θ olmak üzere

$$A = \frac{1}{2}xy\sin\theta$$

ile verilir. $\sin\theta = 1$ iken $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Yani, kenarlar dik iken oluşan dik üçgenin alanı en büyüktür.

Aynı dönemde Dirichlet Steiner'in ispatının minimal bir şekil üzerinde kurulduğunu vurgulamıştı. Bu problem için en iyi ispat Wierstrass tarafından verilmiştir. Blaske minimal bir şeklin her zaman var olduğunu göstermiştir. Bu problemin çözümüne katkısı olan diğer bilim adamları arasında Edler de bulunmaktadır. 1901 yılında Hurwitz Fourier serilerini ve Green teoremini kullanarak analitik önermelerle İzoperimetri Teoremini ispatlayan ilk bilim adamı olmuştur.

Bundan sonra izoperimetrik teoremin matematikçiler tarafından çok sayıda ispatı verilmiştir ve bunların en basiti P.D.Lax' ın verdiği ispattır. Aynı zamanda analiz kullanılmayan ispatlar da vardır. Örneğin, Yaglom' un ispatı yalnızca temel geometriyi kullanır ve çok karmaşıktır. Bir diğer basit ispat ise integral geometrisini ve cebir işlemini kullanan Benson'un ispatıdır.

Birçok bilim adamı İzoperimetri teoreminin daha genelleştirilmiş şekli olan İzoperimetrik eşitsizliği ispatlamıştır. Gerçekte İzoperimetri teoremi, İzoperimetrik eşitsizliğin bir sonucudur.

3.1 İzoperimetrik Problemin Çözümünde Kullanılan Metodlar

İzoperimetrik problemin ispatlandığı çok fazla metod vardır. 2-boyutlu versiyonunu çözen metodlar çeşitlidir. 2-boyutlu için başarıya ulaşan birkaç metod: Steiner'in dört esas metodu, simetrileştirme, varyasyonel hesap, polihidral yaklaşımlar, trigonometrik dönüşümlerin serileri, integral geometrik eşitsizliklerdir.

3-boyutlu ve n-boyutlu genellemesi için izleyen metodlar: Varyasyonel hesap, Brunn-Minkowski eşitsizliği ve dışbükeyliktir. Daha fazla boyuttaki genelleme için kullanılan metod sayısı 2-boyuta göre önemli ölçüde daha azdır.

3.1.1 Düzlemi Boşluksuz Dolduran Şekiller

Pappus yaklaşık MS. 290-350 de antik çağın son büyük Yunan matematikçilerinden biridir. Pappus, en çok arı kavramındaki bal peteğinin yapısının altıgen yapısının analizi ve onun ”Arıların Bilgeliği” başlığıyla adlandırılan izoperimetrik problem olan ilişkisiyle ünlüdür.

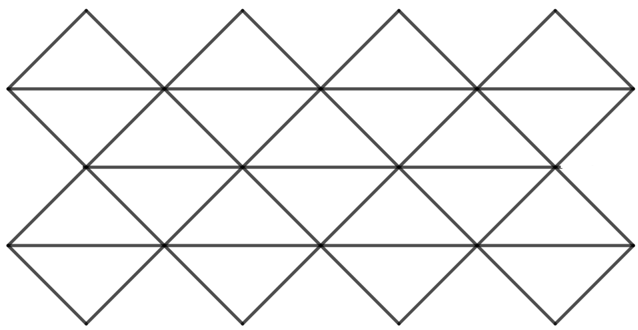
Düzlem sadece üç düzgün çokgen şekilleriyle döşenebilir. Bunlar: Eşkenar üçgen, kare ve altıgendir. Çünkü sadece bu üç şekil için bir dış açı iç açısının tamsayı katıdır.

n kenarlı çokgenin iç açılarının toplamı $(n-2)180°$ dir. Zenodorus' a göre, aynı çevre uzunluğuna ve aynı kenar sayısına sahip çokgenler içinde düzgün çokgenin alanı en fazladır.

n	Toplam İç Açı	Dış Açı	İç Açı	Dış Açı/İç Açı
3^*	180	300	60	5^*
4^*	360	270	90	3^*
5	540	252	108	2.333
6^*	720	240	120	2^*
7	900	231.429	128.571	1.8
8	1080	225	135	1.667

Şekil 3.1: İç-Dış Açı

Ancak bir dış açısı ile bir iç açısının oranı tamsayı olan çokgenler düzleme yerleştirilebilir.(Şekil 3.2)



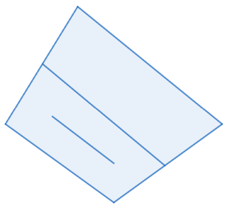
Şekil 3.2: Düzlem Döşeme

Eşkenar üçgen, kare ve altıgen düzlemi hepsi boşluk olmadan doldurur ama Zenodorus'un gösterdiği gibi iç açısı en büyük olan düzgün çokgenin alanı en büyüktür. Bu düzgün çokgenlerden, altıgenin açısı en büyüktür ve böylece sabit çevre uzunluğuyla en fazla alana sahip olandır. Buradan şu sonuca ulaşılabiliriz: Düzlemin yüzeyini boşluksuz döşemek için en uygun şekil altıgendir.

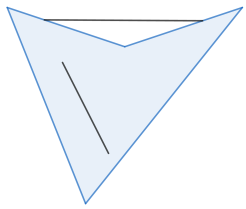
Pappus’un da belirttiği gibi bu optimizasyonu arılar açığa çıkarmıştır. Zenodorus gözlemlediği gibi düzlemi boşluksuz dolduran bu üç düzgün çokgen yani eşkenar üçgen, kare ve düzgün altıgen içinde en büyük alanı sınırlayan altıgendir.

3.1.2 Konveks Şekiller

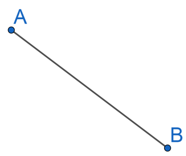
S Öklidyen düzlemde bir küme olsun. S nin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası S nin içinde kalıyorsa konveks küme olarak adlandırılır.



(a) Konveks



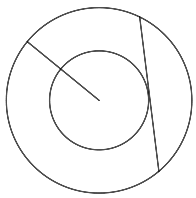
(b) Konveks değil



(c) Konveks

Şekil 3.3: Konvekslik

Bir yarıçaplı bir çemberin sınırladığı $S = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ bölgesi konveks bir şekildir.

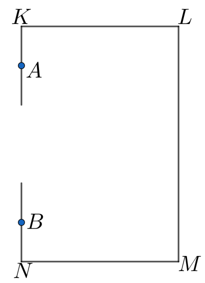


Şekil 3.4: Açık Küme

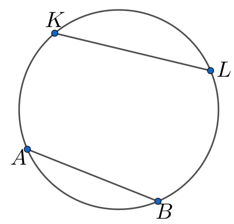
Bir dairesel bölgenin sınırladığı sınır eğrisinin bir kısmı olmasa bile bölge hala konveks bir şekildir fakat bir dikdörtgenin sınırlarının bir kısmı yoksa o artık konveks bir şekil değildir.

Şekil 3.5 de A, B noktalarını aldığımızda bunu birleştiren doğru parçası $KLMN$ dikdörtgeninde olmadığı için küme konveks değildir.

Şekil 3.6 da görüldüğü gibi keyfi alınan KL ve AB doğru parçaları çember içinde kaldığından küme konveksdir.



Şekil 3.5: Konveks değil



Şekil 3.6: Konveks

Konveks şekiller toplama olarak isimlendirilen bir özelliğe sahiptir.

Öklidyen düzlemde A ve B iki konveks şekil olsun. O halde $+$ vektör toplamı olmak üzere

$$A + B = \{x | x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in A, \quad x_2 \in B\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.1.3 Konveks Şekillerde İzoperimetrik Problem

Aynı çevreli tüm konveks şekiller arasında maksimum alanlı olanını bulmak en önemli izoperimetrik problemlerden biridir ve bunu sağlayan konveks şekil K ise K nın çevre uzunluğunun K nın alanına oranının minimum olmalıdır.

Teorem 2. *Aynı çevreli tüm n kenarlı poligonlar arasında düzgün poligonun alanı maksimumdur.*

İspat. *İlk olarak üçgenler için ispatlanacaktır. Eşkenar üçgenin bu problemin çözümü olduğu görülecektir. Sonra dörtgenler için ispatlanacaktır. Bu problemin çözümünün bir kare olduğunu görüldükten sonra tümevarım ile $N + 1$ poligonları için ispatlanacaktır.*

(i)**Üçgenler**

Sabit çevreli bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c iken $a > b$ ve $a > c$ olsun. Bu üçgenden ikizkenar bir ADB üçgeni inşaa edilebilir. (Şekil 3.7)

Heron' un teoreminden

$$(ABD)_{Alan} = \sqrt{p \cdot (p - \frac{b+c}{2}) \cdot (p-a) \cdot (p - \frac{b+c}{2})}$$

$$(ABC)_{Alan} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

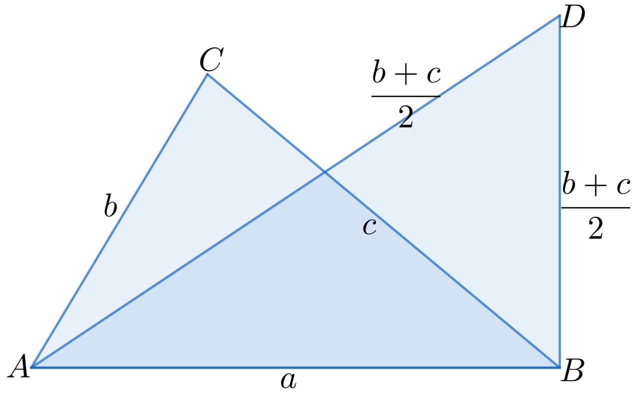
$$a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$$

olduğundan

$$\frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a-c+b}{2} \leq \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$(p-b) \cdot (p-c) \leq (p - \frac{b+c}{2}) \cdot (p - \frac{b+c}{2})$$

böylece $(ABC)_{Alan} \leq (ABD)_{Alan}$. Görülüyor ki ikizkenar üçgen orijinal üçgenden daha büyük alana sahiptir. Yani $(ABC)_{Alan} \leq (ABD)_{Alan}$.

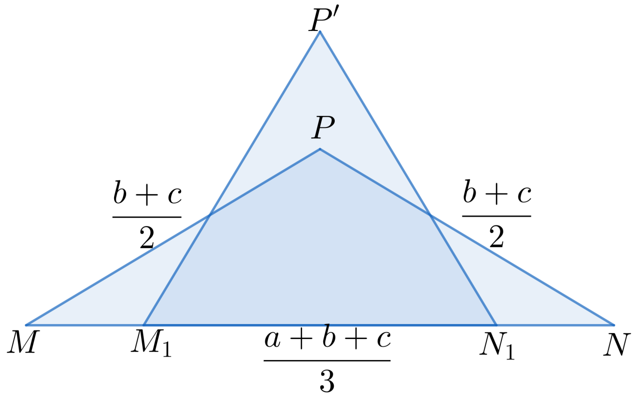


Şekil 3.7: $(ABC)_{Alan} \leq (ABD)_{Alan}$

Bu ikizkenar üçgenden bir $M_1N_1P_1$ eşkenar üçgeni oluşturulabilir ve bu eşkenar üçgenin alanının en büyük olduğu gösterilebilir: (Şekil 3.8)

$a > b$ ve $a > c$ olduğu zaman $(a-b)(a-c) > 0$

$$bc > a(c + b - a)$$



Şekil 3.8: $S_{M_1N_1P_1} \geq S_{MNP}$

dir. Yine Heron formülünden MNP üçgeninin alanı

$$S_{MNP} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p - \frac{b+c}{2})^2} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (\frac{a}{2})^2}$$

ve $M_1N_1P_1$ üçgeninin alanı

$$S_{M_1N_1P_1} = \sqrt{p \cdot (p - \frac{a+b+c}{3})^3}$$

olarak hesaplanır.

$$(\frac{a+b+c}{6})^3 > \frac{a^2}{8} \cdot (b+c-a)$$

ve

$$(\frac{a+b+c}{6})^3 > a^2(b+c-a)$$

dir.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

kullanarak

$$(\frac{a+b+c}{3}) \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow (\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc$$

ve

$$a(bc) > a^2(b+c-a)$$

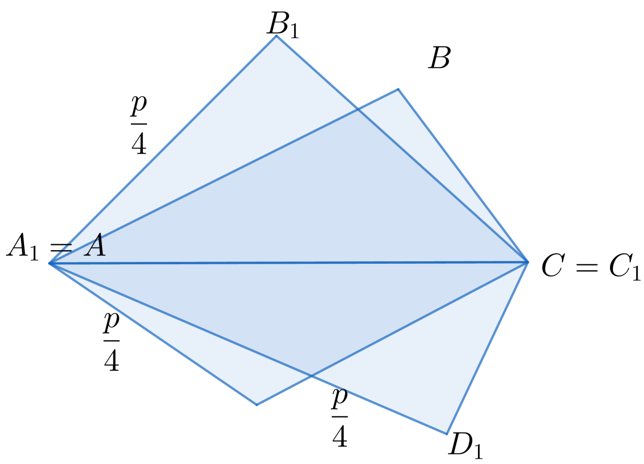
olduğundan $M_1N_1P_1$ in alanının MNP nin alanından büyüklüğü

$$S_{M_1N_1P_1} \geq S_{MNP}$$

elde edilir. Yani eşkenar üçgenin alanı aynı çevreye sahip üçgenler içinde en büyüktür.

(ii) ***Dörtgenler***

En uzun köşegeni AC ve çevresi P olan bir konveks dörtgen olan $ABCD$ dörtgeni alalım. Bu dörtgenden $AB_1C_1D_1$ eşkenar dörtgeni inşaa edelim. Sonra karenin tüm dörtgenler arasında en büyük alana sahip olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Bu durumda $f(Q) = (\frac{P}{4})^2 \sin Q$ yı maximuma çıkarmaya ihtiyacımız var. (Q dörtgenin iki tarafı arasındaki açı) (Şekil 3.9)



Şekil 3.9: Konveks Dörtgen

(iii)***N-genler***

Aynı çevreye sahip n kenarlı poligonlar içinde maksimum alana sahip olanların düzgün poligonlar olduğunu ispatlayalım. Varsayalım ki bu ifade N için doğru olsun. En küçük tarafı AB, en büyük tarafı BC, çevresi P olan bir $N+1$ poligonu olan ABC alalım. Poligonların alanı azalmadan iki kenarı bitişik olacak şekilde kenarları düzenlenebilir.

$$|AB| \leq \frac{P}{N+1}, \quad |BC| \geq \frac{P}{N+1}, \quad |B_1C| = \frac{P}{N+1}$$

alarak aynı P çevreli diğer poligonlar için N-gen inşaa edilebilir. İzoperimetrik eşitsizliğin N-gen için doğruluğu kabul edilip $N+1$gen için geçerliliği ispatlanabilir.

$$(AB_1C)_{Alan} \geq (ABC)_{Alan}$$

Bu inşaa $N+1$-gen veya düzgün alabiliriz. Varsayımımız bir düzgün $N+1$ poligonu aynı çevreli bir N düzgün poligonundan daha büyük bir alana sahip olduğu zaman tümevarımdan doğru olur.

Sonuç olarak, n *sonsuz için aynı çevreli tüm konveks kümeler arasında izoperimetrik problemin çözümünün cevabı çemberdir.*

Bu kısımda Öklidyen düzlemde bazı İzoperimetrik problem örneklerine yer verilmektedir.

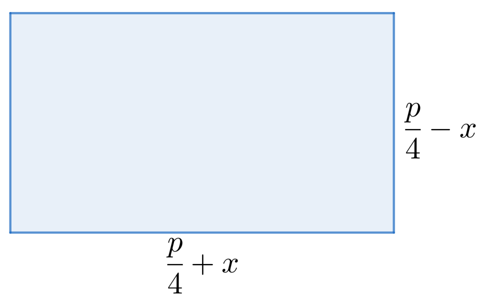
Örnek 4. *Aynı çevreye sahip tüm dikdörtgenler içinde en büyük alana sahip olan şekil karedir.*

Dikdörtgenin çevre uzunluğu P *olsun.* $x \in R$ *ve* $0 \leq \frac{P}{4}$ *için dikdörtgenin kenar uzunlukları* $\frac{P}{4} - x$ *ve* $\frac{P}{4} + x$ *olarak yazılabilir. Böyle bir dikdörtgenin alanı*

$$A = (\frac{P}{4} + x)(\frac{P}{4} - x)$$

dir.

$A(x) = (\frac{P^2}{16} - x^2)$ *nin en büyük değeri* $x = 0$ *için sağlanır.*



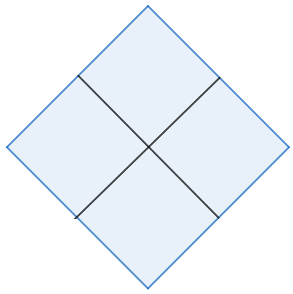
Şekil 3.10: Örnek 4

O zaman aynı P *çevreye sahip olan dikdörtgenler içinde maksimum alanlı şekil karedir.*

Örnek 5. *Verilen iki tane eşit uzunlukta ip ile bir dikdörtgen nasıl oluşturulabilir?*

Bu iki parça ip orta noktasından bağlanır ve ipler gergin olarak çekilip uç noktaları işaretlenirse oluşan bu dört nokta bu dikdörtgenin köşeleridir. Hatta marangozlar verilen şeklin dikdörtgen olup olmadığına köşegen uzunluklarının eşit olup olmadığına göre karar verirler.

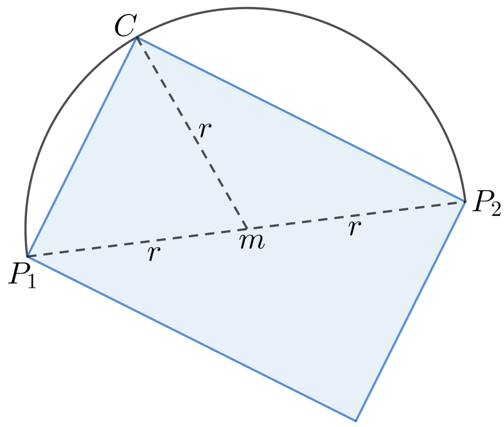
Örnek 6. *Bir kağıt parçasının bitişik iki kenarı iki raptiye ile duvara tutturulduğunda bu iki raptiye arasında kalan köşelerin geometrik yeri ne belirtir?*



Şekil 3.11: Örnek 6

Bitişik kenar arasında kalan köşe $90°$ *lik açı ile iki raptiyenin belirttiği çapı görür. Böylece 4. köşe iki raptiyeleri birleştiren doğru parçasını çap kabul eden yarım dairenin çevresi üzerinde gezer.*

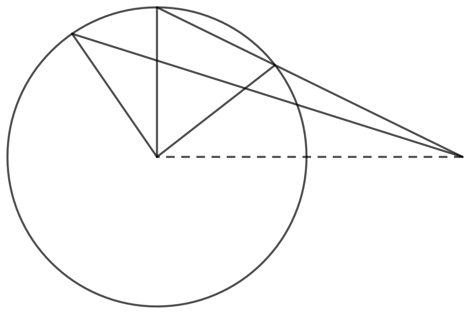
Eğer P_1 *ve* P_2 *karşılıklı iki köşe üzerinden çakılırsa diğer köşeleri* P_1P_2 *doğru parçasını çap kabul eden çember üzerindedir.*



Şekil 3.12: Örnek 6

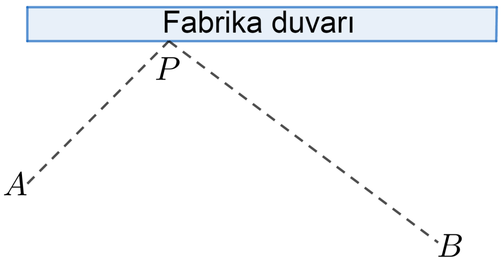
Örnek 7. *Eşit uzunlukta olması gerekmeyen iki çubuğu bir üçgenin bitişik iki kenarını oluşturacak şekilde bağlansın. Oluşan üçgenler içinde maksimum alanlı olanı elde etmek için çubuklar hangi pozisyonda olmalıdır?*

Bir çubuk üçgenin tabanı olarak alınırsa üçgenin alanı, taban ile yüksekliğin çarpımının yarısı olduğundan, maksimal alanlı üçgen maksimal yüksekliğe sahip olanlardan biridir. Bu durumda parçalar birbirine dik açıyla bağlanırsa alan maksimum olur. (Şekil 3.13)



Şekil 3.13: Örnek 7

Örnek 8. *Bir köpek, fabrika duvarına bitişik olan otoparkta durmaktadır ve A pozisyonundan B pozisyonuna duvara dokunarak geçmek zorundadır.Bu durumda A ile B arasındaki en kısa yol nasıl belirlenebilir?*



Şekil 3.14: Örnek 8

Köpek duvara P noktasında değsin. (Şekil 3.14) B noktasının duvarın diğer tarafındaki ayna yansıması olan nokta B' olsun. (Şekil 3.15) A dan P noktasına olan ve sonra B ye olan herhangi bir yol A dan P ye ve P den B' ye olan yol toplamına eşittir.

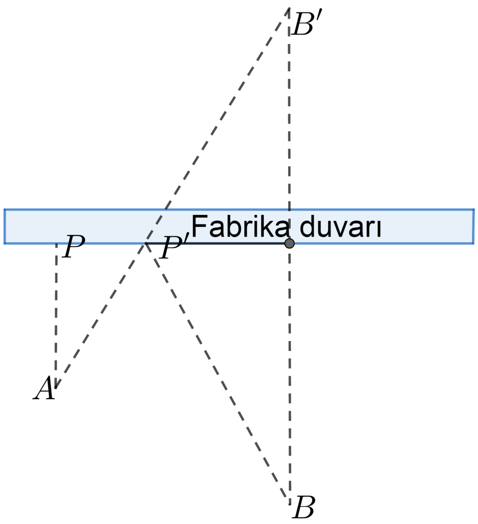
AB' doğrusunun duvarı kestiği nokta P' olsun. Bu yüzden A dan B ye en kısa yol A dan P' ile P' den B ye olan yolun toplamıdır. Çünkü AP' ile BP' lerin duvarla yaptığı açılar eşittir.

$$|PB| \geq |PB'|$$

olduğundan A ile P' ve P' ile B yi birleştiren yol en kısa yoldur.

$$|AP'| + |P'B|$$

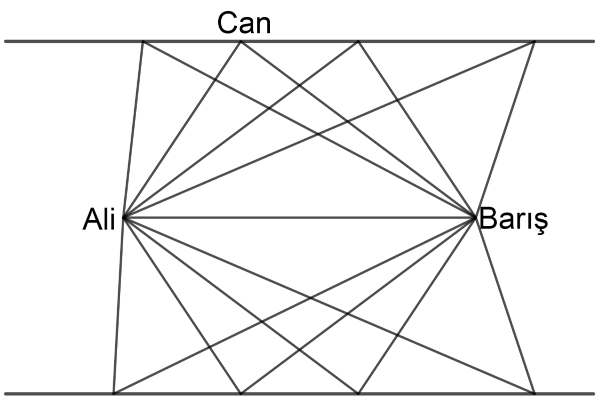
en küçüktür.



Şekil 3.15: Örnek 8

Örnek 9. *Ali ve Barış birbirinden* $10m$ *sabit uzaklıkta durmaktadır. Can'ın yeri sabit olmamak üzere Can, Ali ve Barış la birlikte* $50m^2$ *alana sahip bir üçgensel bölge oluşturmak istemektedir. Can'ın bekleyebileceği en uygun geometrik yer neresidir?*

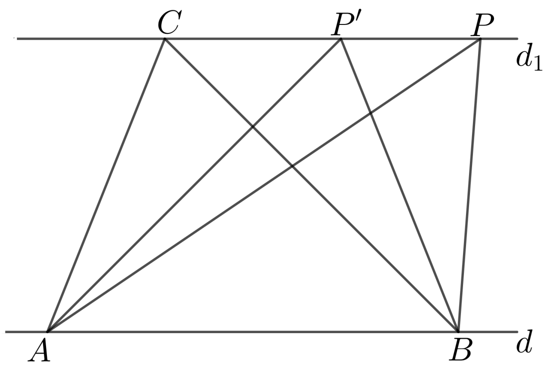
Üçgenin alanı tabanla yüksekliğinin çarpımının yarısı olduğundan aynı tabanlı ve aynı alanlı bütün üçgenler aynı yüksekliğe sahiptir. Bu durumda Can, Ali ve Barış tarfından tanımlanan üçgenin, tabanı Ali ve Barış ın oluşturduğu doğru parçasıdır. Bu üçgenlerin alanları sabit $50m^2$ *ve tabanı sabit* $10m$ *olduğundan yükseklikleri* $10m$ *dir. Bu durumda Can ın durduğu noktaların geometrik yeri Ali ve Barış'ın bulunduğu doğruya paralel karşılıklı iki doğru üzerindedir.*



Şekil 3.16: Örnek 9

Örnek 10. *Aynı tabana ve eşit alana sahip üçgenler içinde çevre uzunluğu en az olan hangisidir?*

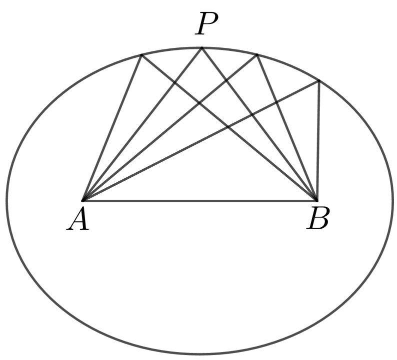
Aynı tabana sahip eşit alanlı üçgenlerin yükseklikleri de eşittir. Böylece üçgenin tabanına paralel doğru üzerinde diğer köşe noktaları bulunmaktadır. AB taban ve P gezici nokta olsun. $|PA| = |PB|$ olduğunda minimum çevreyi elde edilir. Oluşan ikizkenar üçgen en az çevreye sahip olandır. (Şekil 3.17)



Şekil 3.17: Örnek 10

Örnek 11. (a) *Aynı taban aynı çevre uzunluğuna sahip üçgenler içinde alanı en büyük olan hangisidir?*

AB doğru parçasını taban kabul eden aynı çevre uzunluğuna sahip üçgenler içinde alanı en büyük olanı belirleyeceğiz. Üçgenin üçüncü köşesi A ve B yi odak kabul eden elipsin yörüngesi üzerindedir. (Şekil 3.18)



Şekil 3.18: Örnek 11

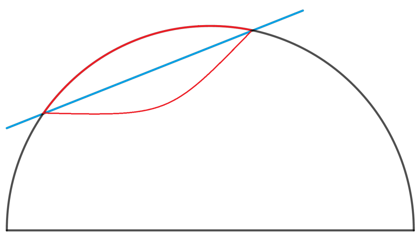
ABP üçgeninin alanının en büyük olması için yüksekliğinin en büyük olması gerekir. Odakların orta noktasından çizilen yüksekliğin elipsi kestiği nokta P iken oluşan PAB üçgeninin alanı maksimal alana sahip olur. Yani aynı sabit uzunluklu tabana ve çevre uzunluğuna sahip üçgenler içinde ikizkenar üçgen maksimum alana sahiptir.

(b) *Genelde aynı çevre uzunluğuna sahip üçgenlerin hangisinin alanı en büyüktür?*

İki köşesi odak olan ve diğer köşesi bu odaklara sahip elips üzerinde gezen üçgenler içinde ikizkenar üçgenin yüksekliği en büyük olduğundan alanı da en büyüktür.

Örnek 12. *Bir kenarı düz bir doğru parçası olan kapalı ve çevre uzunluğu sabit olan şekiller içerisinde alanı maksimum olan hangisidir?*

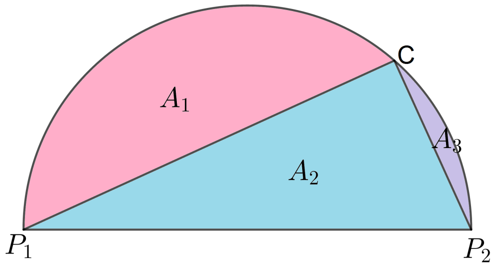
Şeklin konveks olmadığını varsayılırsa aynı çevreye sahip ve alanı daha büyük olan şekilden çukur kısmı tümseğe dönüştürerek konveks bir şekil elde edilebilir. (Şekil 3.19)



Şekil 3.19: Örnek 12

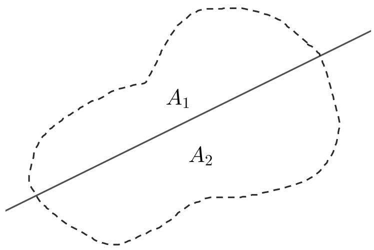
Maksimum alanı çevreleyen bu eğri üzerinde bir C noktası seçilir. P_1 ve P_2 de düz kenar boyunca bu eğrinin uç noktalarını belirtirse şekil konveks olduğundan CP_1 ve CP_2 şeklin iç bölgesinde kalır. O zaman bölgeyi Şekil 3.20 deki gibi A_1, A_2, A_3 bölgelerine ayırır. Bu şeklin maksimum alana sahip olması için A_2 üçgeninin alanının maksimum olması gerekir. Bu da ancak C açısı dik olan P_1P_2 yi taban kabul eden üçgen iken mümkündür. Bu durumda C noktası çapı P_1P_2 olan yarı dairenin çevresi üzerindedir.

Bu durumda yarım daire çevresi sabit olanlar içinde maksimum alana sahiptir.



Şekil 3.20: Örnek 12

Örnek 13. *Kapalı bir eğriyle sınırlı çevresi aynı olan şekiller içinde alanı maksimum olan hangisidir?*



Şekil 3.21: Örnek 13

Şekli çevre uzunluğunun yarısını veren şeklin sınırı üzerinde olan P_1 ve P_2 noktalarını birleştiren doğru boyunca bölelim. Böylece şekil A_1 ve A_2 gibi iki bölgeye ayrılır. Bir önceki problemden her iki parçayı da konveks hale getirilirse P_1 ve P_2 yi çap kabul eden iki yarım daireyi birleştiren bölge yani P_1P_2 çaplı daire maksimum alana sahip olan şekildir.

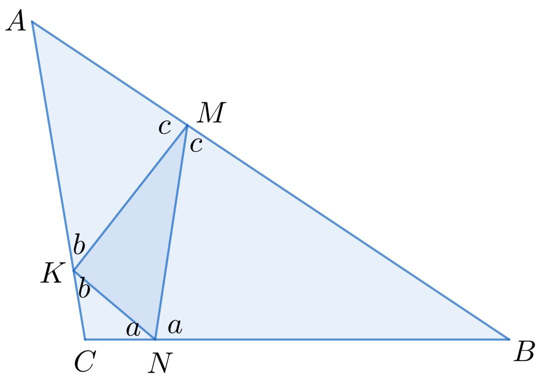
Örnek 14. *Aynı çevre uzunluğuna sahip olan şekiller içerisinde alanı en büyük olan hangisidir?*

Maksimum alanlı şeklin konveks olduğunu ve çevresinin P ve alanının A olduğunu varsayalım. Çevre üzerinde herhangi iki nokta çevre uzunluğunu eşit iki parçaya bölecek şekilde seçilsin.

Şekil konveks olduğu için P_1P_2 doğru parçası bölgenin içindedir ve böylece Örnek 13 deki problemden şekil tam olarak eşit iki alana ayrılır. Bu yüzden şeklin yarı alanı $\frac{A}{2}$ dir. P_1P_2 dik kenarına karşılık gelen çevresi $\frac{P}{2}$ olan bütün şekiller içinde maksimal alandır. Örnek 12 den şeklin her yarısı yarı çember olmak zorundadır. Böylece maksimal alana sahip şekil çevre uzunluğu P olan bir çemberdir.

Örnek 15. *Köşeleri geniş açılı bir üçgenin kenarları üzerinde olan herhangi bir üçgeni çevreleyen geniş açılı üçgenlerin içinde çevresi en az olan hangisidir?*

ABC, C *açısı geniş açı olan bir üçgen ve* KMN *de her köşesi* ABC *üçgeninin bir kenarı üzerinde olan yani* ABC *üçgeniyle çevrelenen bir üçgen olsun.* KMN *nin en az çevreye sahip iç teğet üçgen olduğunu varsayalım.* K *dan* M *ye ve* M *den* N *ye en kısa yol,* AB *duvarına dokunan* K *dan* N *ye en kısa yol olmak durumundadır.*



Şekil 3.22: Örnek 15

Sonuç olarak, 8. örnekte , yukarıdaki diyagrama C *olarak gösterilen iki açı eşittir. Varsayalım ki bu açıların her biri* $90°$ *den az olmak zorundadır. Benzer şekilde ,* a *olarak gösterilen iki açı eşittir,* b *olarak gösterilen çift gibi.* KMN *üçgeninde açılar toplamı* $180°$ *dir ve böylece* $a + b + c = 180°$ *dir.* ABC *üçgeninde* C *geniş açı olduğu için,* $a + b < 90°$.

Sonuç olarak, $c < 90°$. *Bu çelişkidir. Böyle bir çevre uzunluğuna sahip üçgen yoktur.*

4. TAKSİ VE α-DÜZLEMDE İZOPERİMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde $\mathbb{R}^2$ deki bazı izoperimetrik problemlerin taksi ve α-düzlemdeki karşılıkları incelenmiştir.

4.1 Taksi Düzlemde İzoperimetrik Eşitsizlik

İzoperimetrik teorem, Öklidyen geometride düzlemsel şekiller arasında düzlemin en iyi şeklinin çember olduğunun ifade eder. Taksi metrikle donatılmış düzlemde de bu durum aynıdır. Yani, bütün düzlemsel şekiller içinde en iyi şekil taksi çemberlerdir.

Aynı alanlı bütün düzlemsel şekiller arasında çember en kısa çevre uzunluğuna sahiptir. Aynı çevre uzunluğuna sahip bütün düzlemsel şekiller arasında çember en büyük alana sahiptir. r yarıçaplı çemberin çevresi $2\pi r$ dir, alanı ise πr^2 dir. $2\pi r = L$ olsun. $r = \dfrac{L}{2\pi}$ dir. Alan formülünde r yi yerine yazarsak

$$\pi r^2 = \pi \frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{4\pi}$$

$$Alan \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

$$L^2 \geq 4\pi A \tag{4.1}$$

eşitsizliği elde edilir. 4.1 deki eşitsizlik izoperimetrik eşitsizliktir.

Teorem 3. *Taksi geometride izoperimetrik teorem: R_T^2 taksi düzlemindeki aynı alanlı bütün düzlemsel şekiller arasında taksi kare en küçük çevre uzunluğuna sahiptir.*

İspat. *1. adım: a kenarlı S karesinin çevresi L_S ve alanı A_S olsun. $L_S = 4a$ ve $A_S = a^2$ dir. $L_S = 4a$ ise $\dfrac{L_S}{4} = a$ bulunur. $A_S = a^2$ denkleminde a yı yerine yazarsak*

$$A_S = \frac{L_S^2}{16}, \quad \frac{L_S^2}{A_S} = 16 = 4\pi r$$

2. adım: a ve b kenar uzunluklu R dikdörtgeninin çevresi L_R ve alanı A_R olsun.

$$L_R = 2(a+b), \quad A_r = a \cdot b, \quad (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\begin{aligned} \frac{L_R^2}{A_r} &= \frac{4(a+b)^2}{a \cdot b} \\ &\geq \frac{4 \cdot 4ab}{ab} = \frac{16ab}{ab} = 16 \\ &\geq 4\pi_T \quad (\pi_T = 4) \end{aligned}$$

3. adım: γ düzlemsel bölgesinin alanı A_γ, çevresi L_γ olsun. γ nın içinde kalabileceği gibi bir dikdörtgen her zaman seçebiliriz. Açıktır ki $L_R \leq L_\gamma$ ve $A_R \geq A_\gamma$

$$L_R \leq L_\gamma, \quad A_R \leq A_R$$

olduğundan

$$\frac{L_\gamma^2}{A_\gamma} \geq \frac{L_R^2}{A_R}$$

dir. Çünkü

$$L_\gamma^2 A_R \geq L_R^2 A_\gamma$$

dir. Sonuç olarak

$$\frac{L_\gamma^2}{A_\gamma} \geq \frac{L_R^2}{A_R} \geq \frac{L_S^2}{A_S} = 4\pi_T$$

tanımlanır.

Teorem 4. *r yarıçaplı bir taksi çemberinin alanı a kenar uzunluklu taksi karesinin alanına eşit olsun. O zaman taksi karesinin çevresi taksi çemberinin çevresinden daha küçüktür.*

İspat.

$$A_s = a^2, \quad A_c = \frac{1}{2}\pi_T r^2$$

$$A_s = A_c \quad ise \quad \frac{1}{2}\pi_T r^2 = a^2$$

$$\pi_T = 4$$

olduğundan yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r^2 = a^2$$

$$2r^2 = a^2 \quad den \quad a = \sqrt{2}r$$

dir. Taksi karesinin ve taksi çemberinin çevresinde yerine yazılırsa

$$L_S = 4 \cdot a = 4 \cdot \sqrt{2}r = 4\sqrt{2}r$$

,

$$L_C = 2\pi_T r = 2 \cdot 4 \cdot r = 8r$$

elde edillir.

$$4\sqrt{2}r < 8r$$

olduğundan

$$L_S < L_C$$

elde edilir.

Not 1. *a yarıçaplı taksi çemberi için $L_C = 8a$ ve $A_c = \frac{1}{2}\pi_T a^2 = 2a^2$ olduğu yukarıdaki teoremlerden açıktır. Bu yüzden*

$$\frac{L_C^2}{A_c} = \frac{(8a)^2}{2a^2} = 32 > 4\pi_T$$

dir.

Not 2. *İzoperimetrik teorem R_T^2 taksi düzlemdeki aynı çevre uzunluğuna sahip bütün düzlemsel şekiller arasında karenin en büyük alana sahip olduğunu ifade eder.*

Not 3. *Taksi çemberi ve taksi karsinin çevreleri eşit olduğunda taksi karesinin alanı taksi çemberinin alanından daha büyüktür. Böylece bu şekiller taksi karedir ya da taksi dikdörtgen şeklindedir.*

Taksi geometride izoperimetrik eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul eğrinin kare olmasıdır (Kocayusufoğlu, 2006). α-düzlemde izoperimetrik eşitsizlik eğri, düzgün sekizgen ise sağlanır.

Teorem 5. *Taksi düzlemde aynı çevreye sahip dikdörtgenler içinde en büyük alana sahip şekil karedir.*

İspat. *Dikdörtgenlerin kenarları x ve y eksenlerine paralel olsun. Dikdörtgenlerin çevre uzunluğu p olsun. Kenar uzunlukları $\frac{p}{4} - x$ ve $\frac{p}{4} + x$ olarak yazılabilir. Böyle bir dikdörtgenin alanı*

$$A = (\frac{p}{4} + x)(\frac{p}{4} - x)$$

dir. Bunu $x \in \mathbb{R}^+$ nın bir fonksiyonu olarak yazılabilir. $A(x)$ in en büyük değeri $A'(x) = 0$ dan elde edilir.

O zaman aynı p çevreye sahip dikdörtgenler içinde maksimum alanlı şekil Öklidyen düzlemde olduğu gibi Taksi düzlemde de karedir.

Örnek 16. *Taksi düzlemde şekilde A noktasında bırakılan köpek $x - ekseni$ üzerindeki bir duvarın dibindeki yiyeceğini yiyip en az yolla B noktasındaki kulübesine gidebilmesi için yem nereye konulmalıdır?*

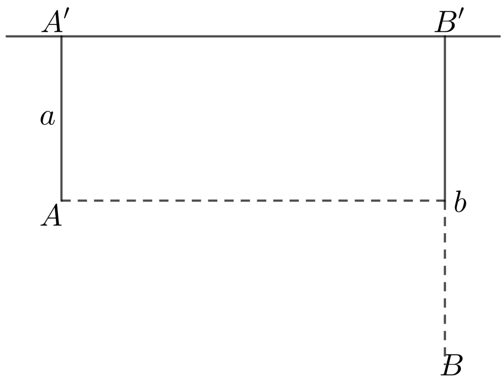
Probleme uygun şekil aşağıda verilmiştir. Köpek yatay ve dikey yolları kullanarak hareket edecektir. Yani, bu durumda A nın x-ekseni üzerindeki dik izdüşümü A', B nin x-ekseni üzerindeki dik izdüşümü B' olsun. Varsayalım ki A, x-eksenine daha yakın olsun ve x-eksenine uzaklığı $a \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda en kısa yol

$$AA' + A'B' + B'B$$

taksi yoludur. Yani

$$\text{En kısa uzaklık} = 2a + d_T(A, B)$$

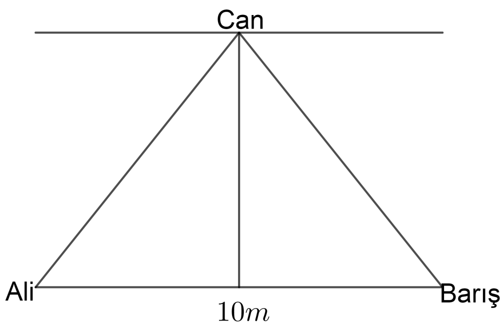
dir.



Şekil 4.1: Örnek 16

Örnek 17. *Taksi düzlemde Ali ve Barış birbirlerinden x-ekseniyle paralel doğru üzerinde $10m$ sabit uzaklıkta dururlar. Can' ın yeri sabit olmamak üzere Ali ve Barış la birlikte $50m^2$ alana sahip bir üçgensel bölge oluşturmak istiyorlarsa Can' ın bekleyebileceği en uygun geometrik yeri belirleyelim.*

Can, Ali ve Barış ile bir üçgen belirteceğinden tabanları eşit üçgenlerden alanlarının eşit olması için yükseklikleri 10 birim olacağından Can, Ali ve Barış ın bulunduğu doğruya karşılıklı paralel iki doğru üzerinde herhangi bir noktada durabilir. (Şekil 4.2)

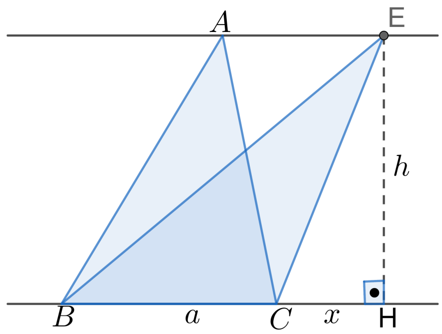


Şekil 4.2: Örnek 17

Şimdi bu durumun taksi düzlemde farklı olduğunu gösterecek bir önerme verelim.

Önerme 2. *Taksi düzlemde koordinat eksenlerine paralel tabanlı eşit alanlara sahip üçgenler içinde çevre uzunluğu en az olan üçgenler dar açılı üçgenlerdir.*

İspat. *x-ekseninde taksi uzunluğu a yüksekliği h olan bütün üçgenler aynı alana sahiptir. Üçgenlerin tepe noktaları x-eksenine paralel doğru üzerindedir. BEC üçgeninin çevresi,*



Şekil 4.3: Ortak tabanlı eşit alanlı üçgenler

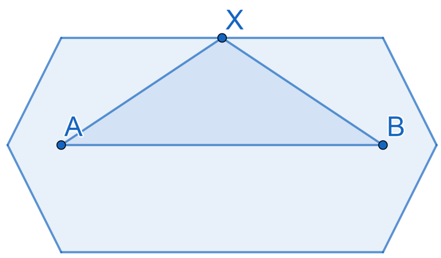
$$Ç_T(BEC) = d_T(B,E) + d_T(B,C) + d_T(E,C) = a + x + h + a + x + h = 2a + 2x + 2h$$

Minimum çevre olması için yukarıdaki bağıntıda $x = 0$ olmalıdır. $x = 0$ ise taban açıları dar olmalıdır. Dar açılı ABC üçgenlerinin çevreleri $2a+2h$ olduğundan tabanları koordinat eksenlerine paralel ve ortak tabana sahip tüm dar açılı üçgenler en az çevre uzunluğuna sahip olur.

Önceki bölümde öklidyen düzlemde aynı çevre uzunluğuna sahip üçgenlerin içinde alanı en büyük olan ikizkenar üçgen iken bu durumun taksideki karşılığı aşağıdaki önermeyle inceleyelim.

Önerme 3. *Taksi düzlemde tabanları koordinat eksenlerine paralel olan ortak tabanlı aynı çevre uzunluğuna sahip üçgenler dar açılı üçgenlerdir.*

İspat. *Taksi düzlemde ABX üçgenlerinin AB tabanı koordinat eksenlerine paralel ve çevre uzunlukları eşit olsun.Bu üçgenlerin X köşeleri A ve B yi odak kabul eden taksi elipsi üzerine olmak zorundadır (Kaya, 2000). Köşesi elips üzerinde olup AB tabanlı üçgenler içinde en*



Şekil 4.4: Taksi elips

büyük yüksekliğe sahip olanlar X köşesi elipsin AB ye paralel kenarları üzerinde olanlardır. Bu yüzden alanı maximum olan üçgenler AB tabanlı dar açılı üçgenlerdir.

4.2 α-Uzayında İzoperimetrik Eşitsizlik

Taksi ve Çin-dama düzlem geometri Öklidyen olmayan geometrilerdir ve gerçel yaşamda pek çok uygulama alanına sahiptir. α-uzaklık fonksiyonu taksi ve Çin-dama uzaklıklarını bir genellemesidir. α-uzaklık ilk olarak Songlin Tian tarafından sunulmuştur (Tian ve Chen, 1997). $\mathbb{R}^2$ de $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki α-uzaklık $d_\alpha(A, B)$ ile gösterilir ve

$$\triangle_{AB} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

ve

$$\delta_{AB} = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

olmak üzere

$$d_\alpha(A, B) = \triangle_{AB} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\delta_{AB}, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

biçiminde tanımlanır. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Çin-dama uzaklığı elde edilir. Düzlemde A ve B gibi iki nokta arasında Öklidyen, taksi, Çin-dama ve α-uzaklıkları arasında

$$d_T(A,B) \geq d_\alpha(A,B) \geq d_C(A,B) \geq d_E(A,B)$$

ilişkisi vardır.

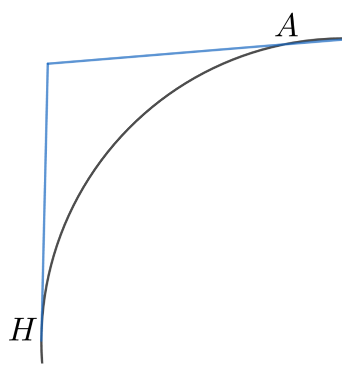
α-düzlem, α-uzaklık fonksiyonu ile donatılmış bir düzlemdir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık bu iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 ve P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan paralelkenardır.

İzoperimetrik eşitsizlik geometride temel kavramlardan biridir. Öklidyen düzlemde izoperimetrik eşitsizliği sağlayan eğri, çember taksi düzlemde ise karedir. α-uzaklık fonksiyonu ile donatılmış α-düzleminde izoperimetrik eşitsizliği sağlayan eğri düzgün sekizgendir (Kim vd. 2013).

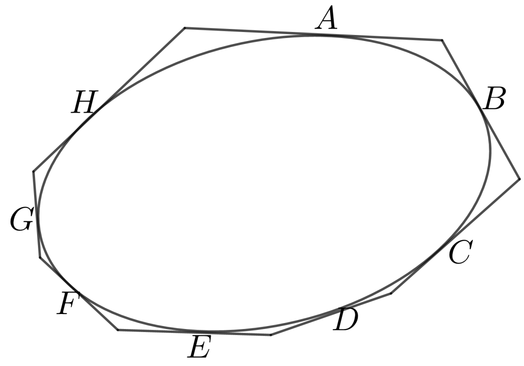
Teorem 6. *α-düzlemde izoperimetrik eşitsizliğin eşitlik halini sağlayan şekil düzgün sekizgendir.*

İspat. *Eğri üzerinde A ve H gibi iki noktayı birleştiren eğri ile A ile H arasındaki en kısa α-yolu yer değiştirilebilir. Çevre aynı kalmak üzere Şekil 4.5 deki gibi α yolunun belirlediği çizginin sınırladığı alan daha büyüktür.*



Şekil 4.5: A ile H arasındaki eğri değişimi

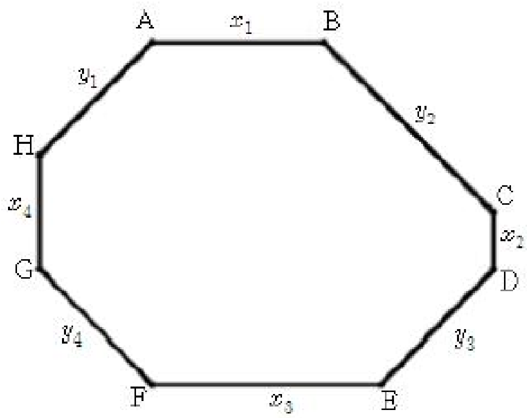
Benzer olarak bütün eğri Şekil 4.6 deki gibi sekizgen ile değiştirilebilir. Bütün açıları $\frac{3\pi}{4}$ olan düzgün sekizgenin alanı Şekil 4.6 deki düzgün olmayan sekizgenin *alanından daha büyük olduğu gösterilebilir. Bu yüzden aynı L çevreye sahip sekizgenler*



Şekil 4.6: Değişen Eğri

içinde düzgün sekizgen en büyük alana sahiptir.

Bütün açıları $\frac{3\pi}{4}$ olan bir sekizgenin ardışık kenarlarının α-uzunlukları $y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, y_4, x_4$, çevre uzunluğu L, alanı S olsun.



Şekil 4.7: α-düzlemde oktagon

$a = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $b = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ve $k = sec\alpha - tan\alpha + 1$ olmak üzere α-düzleminde izoperimetrik eşitsizlik aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 7. *α-düzlemde izoperimetrik eşitsizlik*

$$L^2 \geq 8(-k^2+4k-2)S$$

ile verilebilir (Kim vd. 2013).

İspat. *Sekizgenin genişliği ve yüksekliğinin sabit olması gerektiğinden,*

$$\frac{y_1+y_2}{k}+x_1=\frac{y_3+y_4}{k}+x_3 \tag{4.2}$$

ve

$$\frac{y_1+y_4}{k}+x_4=\frac{y_2+y_3}{k}+x_2 \tag{4.3}$$

eşitlikleri elde edilir. 4.2 ve 4.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
S &= (x_1+\frac{y_1+y_2}{k})(x_4+\frac{y_1+y_4}{k})-\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2y_4^2}{2k^2}\\
&= \frac{(a+k(x_1+x_3))(a+k(x_2+x_4))}{4k^2}-\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2y_4^2}{2k^2}\\
&\leq \frac{1}{4k^2}(a+\frac{kb}{2})^2-\frac{a^2}{8k^2}\\
&= \frac{2-4k+k^2}{16k^2}((a-\frac{2Lk-Lk^2}{-k^2+4k-2})^2+\frac{L^2k^2}{2-4k+k^2}-(\frac{2Lk-Lk^2}{2-4k+k^2})^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. $k\in[\sqrt{2},2)$ *olduğundan*

$$2-4k+k^2<0$$

ve

$$2Lk-k^2>0$$

dır.

$$a=\frac{2Lk-Lk^2}{-k^2+4k-2}$$

iken S *maksimum olur. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
S &\leq \frac{2-4k+k^2}{16k^2}(\frac{lk^2}{2-4k+k^2}-(\frac{2lk-lk^2}{2-4k+k^2})^2)\\
&= \frac{l^2}{8(-k^2+4k-2)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$x_1+x_3=x_2+x_4=\frac{b}{2}$$

$$y_1=y_2=y_3=y_4=\frac{a}{4}$$

$$a = \frac{2Lk - Lk^2}{-k^2 + 4k - 2}$$

şartlarının sağlanmasıdır. Yukarıdaki sonuçlardan ve 4.2 ve 4.3 den x_1, x_2, x_3, x_4 *değerleri*

$$\frac{2Lk - 2L}{4(-k^2 + 4k - 2)}$$

ve y_1, y_2, y_3, y_4 *değerleri*

$$\frac{2Lk - Lk^2}{k(-k^2 + 4k - 2)}$$

eşit olmalıdır. Bundan dolayı ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Öklidyen, Taksi ve Çin dama ve α-düzleminde izoperimetrik problemler incelenerek aralarındaki benzerlik ve farklılıklar ortaya konulmuştur.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar diğer metrik geometrilerdeki izoperimetrik problemlere ışık tutacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça Z. ve Kaya, R. (1997). “On the Taxicab Trigonometry”. İn: *Journal of Inst. of Math. Comp. Sci.* 10,3, pp. 151–159.

— (2004a). “On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space”. İn: *Hadronic Journal*, pp. 521–532.

— (2004b). “On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces”. İn: *Hadronic Journal Supplement*, pp. 491–501.

Bayar A. ve Ekmekçi, S. (2006). “On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions”. İn: *Internationnal Journal of Mathematics and Analysis*, pp. 249–259.

Birkhoff, G. (1932). “A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor”. İn: *Annals of Mathematics* 33, pp. 329–345.

Chen, G. (1992). “Lines and Circles in Taxicab Geometry”. MS. Centered Missouri State University: Department of Mathematics and Computer Science, p. 43.

Gelişgen, Ö. (2007). “Minkowski Geometrileri Üzerine: Taksi, Çin Dama ve α-Geometrileri Hakkında Genel Bir Analiz”. DR. Esk. Osmangazi Üni. Fen Bil. Ens.

Ho, Y.P. ve Y. Liu (1996). “Parabolas in Taxicab Geometry”. İn: *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, pp. 63–72.

Kaya R., Akça Z. Günaltılı İ. ve Özcan M. (2000). “General Equation for Taxicab Conics and their Classification”. İn: *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, pp. 135–148.

Kaya R., Gelişgen Ö. Ekmekçi S. ve Bayar A. (2006a). “Group of Isometries of CC-Plane”. İn: *Missouri J. of Math. Sci.* 18, pp. 221–233.

Kaya R. ve Çolakoglu, H.B. (2006b). “Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems”. İn: *International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM)*, pp. 69–81.

Kim, M., I. Ko ve B. Kim (2013). “Isoperimetric Inequality in α-Plane”. İn: *J. Appl. Math. İnformatics* 31.1-2, pp. 79–86.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kocayusufoğlu, İ. (2006). “Isoperimetric Inequlity in Taxicab Geometry”. İn: *MİA* 9.2, pp. 269–272.

Krause, E.F. (1975). *Taxicab Geometry*. Menlo Park, CA: Wesley Publishing Company, p. 88.

Laatsch, R. (1982). “Pyramidal Sections in Taxicab Geometry”. İn: *Mitt. Mathematics Magazine*, pp. 205–212.

Martin, G.E. (1998). “The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane”. İn: *Springer*, p. 509.

Menger, K. (1952). *You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit*. Chicago: Museum of Science and Industry.

Milmann, R.S. ve G.D. Parker (1991). “Geometry aMetric Approach withModels”. İn: *Springer*, p. 370.

Minkowski, H. (1967). “Gesammelte Abhandlungen”. İn: *Chelsa Publishing Co.* P. 836.

Reynolds, B.E. (1980). “Taxicab Geometry”. İn: *Pi Mu Epsilon Journal*, pp. 77–88.

Schattschneider, D.J. (1984). “The Taxicab Group”. İn: *Amer. Math. Monthly* 91, pp. 423–428.

So, S.S. (2002). “Recent Developments in Taxicab Geometry”. İn: *Cubo Matematica Educational* 4, pp. 79–96.

So, S.S. ve Z.S. Al-Maskari (1995). “Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry”. İn: *Kansas Science Teacher (J. of Math. and Sciece Teaching)* 11, pp. 14–18.

Thompson, K. ve T. Dray (2000). “Taxicab Angles and Trigonometry”. İn: *Pi Mu Epsilon* 11, pp. 87–96.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tian S., So S.S. ve G. Chen (1997). “Concerning Circles in Taxicab Geometry”. İn: *J.Math. Educ. Sci. Technol.* 28, pp. 727–733.

Turan, M. (2004). “Çin Dama Konikleri Üzerine”. YL. Esk. Osmangazi Üni. Fen. Bil. Ens.

Uymaz, A.Ç. (2002). “Çin Dama Çemberi ve Özellikleri”. YL. Esk. Osmangazi Üni. Fen Bil. Ens.

Virgil (1697). *Aeneid*.

Özcan M., Ekmekçi S. ve Bayar A. (2002a). “The Taxicab Lengths Under Rotations”. İn: *The Pi Mu Epsilon Journal*, pp. 381–384.

Özcan M. ve Kaya, R. (2002b). “On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties”. İn: *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, pp. 107–117.