Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin (Ko)Homolojisi

Elif Ilgaz Çağlayan

**DOKTORA TEZİ**

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Temmuz 2018

# (Co)Homology of Crossed Modules of Algebras

Elif Ilgaz Çağlayan

**DOCTORAL DISSERTATION**

Mathematics - Computer Science Department

July 2018

Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin (Ko)Homolojisi

Elif Ilgaz Çağlayan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Bu Tez ESOGÜ BAP tarafından “2015-744” no’lu proje çerçevesinde ve
TÜBİTAK/2211-E Doğrudan Yurtiçi Doktora Burs programı kapsamında desteklenmiştir

Temmuz 2018

# ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Elif Ilgaz Çağlayan'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin (Ko)Homolojisi**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

**İkinci Danışman** : –

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

**Üye :** Prof. Dr. Erdal ULUALAN

**Üye :** Dr. Öğr. Üy. Ahmet Faruk ASLAN

**Üye :** Doç. Dr. İlker AKÇA

**Üye :** Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ........................ tarih ve .................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin (Ko)Homolojisi**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05/07/2018

Elif Ilgaz Çağlayan

# ÖZET

Tezde öncelikle $\overline{W}$ ile DiagN funktorları tanımlanmıştır. Daha sonra E bir simplisel R-cebir olmak üzere simplisel homotopi tanımları kullanılarak DiagNE ile $\overline{W}$E nin simplisel homotopi denk olduğu hatta $\overline{W}$E nin DiagNE nin bir güçlü simplisel deformasyon geriçekimi olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bir simplisel R-cebirin simplisel R-modül sınıflandırması tanımlanarak simplisel R-cebirin (ko)homolojisi tanımlarına yer verilmiştir.

Daha sonra çaprazlanmış modül kavramı ve örnekleri ile kategoriksel R-cebir kavramı ifade edilerek çaprazlanmış modül kategorisi **XMod** ile kategoriksel R-cebir kategorisi $\mathbf{cAlg}_R$ nin denkliği gösterilmiştir.

Son olarak bir çaprazlanmış R-modülün simplisel R-modül sınıflandırması tanımlanarak çaprazlanmış R-modülün (ko)homoloji tanımları ifade edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Simplisel Obje, Kategori Obje, Monoid Obje, Simplisel Homotopi, Simplisel Modül Sınıflandırması, Çaprazlanmış Modül, Kategoriksel R-cebir, (Ko)Homoloji.

# SUMMARY

In this thesis, firstly we define the functors $\overline{W}$ and DiagN using definitions about simplicial homotopy. Then, we also prove that DiagNE and $\overline{W}$E are simplicial homotopy equivalent, and also $\overline{W}$E is strong simplicial deformation retract of DiagNE where E is simplicial R-algebra. However, we obtain a definition called (co)homology of simplicial R-algebra by defining classifying simplicial R-module of any simplicial R-algebra. On the other hand, we show that the category of crossed modules **XMod** and the category of categorical R-algebras $\mathbf{cAlg}_R$ are categorical equivalent.

Finally, we obtain (co)homology of a crossed R-module by defining classifying simplisel R-module of a crossed R-module.

**Keywords:** Simplicial Object, Category Object, Monoid Object, Simplicial Homotopy, Classifying Simplicial Module, Crossed Module, Categorical R-algebra, (Co)Homology.

# TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarımın her aşamasında her türlü emeğini ve ilgisini üzerimden hiç eksik etmeyerek karşılaştığım her zorlukta beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan değerli danışman hocam, sayın

**Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ'ye**

ve her zaman yanımda olup beni destekleyen,

**sevgili eşim ve değerli aileme**

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu Tez 2015-744 no'lu "Çaprazlanmış Modüller Üzerine" adlı proje kapsamında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu ve TÜBİTAK/2211-E Doğrudan Yurtiçi Doktora Burs programı ile desteklenmiştir.

# İÇİNDEKİLER

# İÇİNDEKİLER (devam)

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Çaprazlanmış modüller, ideal ve modüllerin genelleştirmesidir. Hatta herhangi bir cebirde bir çaprazlanmış modül olarak düşünülebilir. Dolayısıyla cebirler üzerinde tanımlanmış tüm kavramların çaprazlanmış modüllerde incelenerek genelleştirilmesi mümkündür. Bizim de öncelikle amacımız homoloji ve kohomoloji kavramlarını genelleştirmektir.

Eilenberg ve MacLane [Eilenberg ve MacLane, 1947a, Eilenberg ve MacLane, 1947b] bir grubun (ko)homolojisi ile bu grubun simplisel küme sınıflandırmasının (ko)homolojisinin izomorf olduğunu ispatlamışlardır. Bu durum Sebastian [Thomas, 2007 ] tarafından genelleştirilerek bir simplisel grubun (ko)homolojisi ve gruplar üzerinde çapralanmış modülün (ko)homolojisi tanımları

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{XMod} \arrow[r, "Cosk"] & \mathbf{sGrp} \arrow[rr, "\overline{W}"] \arrow[dr, "N"'] & & \mathbf{sSet} \arrow[r, "C"] & \mathbf{Comp} \arrow[r, "H"] & \mathbf{Ab.Grp} \\
& & \mathbf{s^2Set} \arrow[ur, "DiagN"'] & & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı yardımıyla elde edilmiştir.

Eilenberg ve MacLane [Eilenberg ve MacLane, 1947a, Eilenberg ve MacLane, 1947b] tarafından ifade edilen izomorfluğun herhangi bir küçük kategoriye genelleştirilebildiği Quillen ve Baues [Quillen, 1973, Baues ve Wirsching, 1985] tarafından ifade edilmiştir. Dolayısıyla bir grubun (ko)homolojisinin, simplisel küme sınıflandırmasının (ko)homolojisiyle izomorfluğuna benzer olarak bizde bir cebirin (ko)homolojisinin, simplisel modül sınıflandırmasının (ko)homolojisiyle izomorf olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca buradan da bir simplisel cebirin (ko)homolojisini ve cebirler üzerinde tanımlı bir çaprazlanmış modülün (ko)homolojisini yukarıdaki diyagramın

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{XMod} \arrow[r, "Cosk"] & \mathbf{sAlg_R} \arrow[rr, "\overline{W}"] \arrow[dr, "N"'] & & \mathbf{sMod_R} \arrow[r, "C"] & \mathbf{Comp} \arrow[r, "H"] & \mathbf{Mod_R} \\
& & \mathbf{s^2Mod_R} \arrow[ur, "DiagN"'] & & &
\end{tikzcd}$$

biçiminde cebir versiyonu ile ifade edebiliriz. Bu amaca yönelik olarak tezin bölümlerinde izlediğimiz yol şu şekildedir:

1. Bölümde: Simplisel obje, kategori obje ve monoid obje; $\mathbf{s}(\mathcal{C})$, $\mathbf{Cat}(\mathcal{C})$, $Mon(\mathcal{C})$ kategorileri; Nerve ve Diag funktorlar; Simplisel homotopi ve simplisel homoloji; Bir R-cebirin simplisel R-modül sınıflandırması; Bir R-cebirin homoloji ve kohomolojisinin simplisel tanımı

2.Bölümde: $\overline{W}$ ve DiagN funktorları; E bir R-cebir olmak üzere $\overline{W}$E ile DiagNE nin simplisel homotopi denkliği; $\overline{W}$E nin DiagNE nin güçlü simplisel deformasyon geriçekimi olduğu; Bir simplisel R-cebirin simplisel R-modül sınıflandırması; Bir simplisel R-cebirin (ko)homoloji tanımları

3.Bölümde: Çaprazlanmış R-modül ve kategoriksel R-cebir; **XMod** ve $\mathbf{cAlg}_R$ kategorileri; **XMod** ve $\mathbf{cAlg}_R$ arasındaki denklik; Bir kategoriksel R-cebirin nerve'ü(kategoriksel nerve); $Cosk$ Funktoru; Bir çaprazlanmış R-modülün simplisel R-modül sınıflandırması; Bir çaprazlanmış R-modülün (ko)homoloji tanımları

ifade edilerek gerekli ispatlar yapılmıştır.

**Kabüller ve Notasyonlar**

Bu tezde aşağıdaki kabüller ve notasyonlar kullanılacaktır:

(1) $X \xrightarrow{f} Y$ ve $Y \xrightarrow{g} Z$ morfizmlerinin kompozisyonu $X \xrightarrow{fg} Z$ biçiminde gösterilirken $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ve $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ funktorlarının kompozisyonu $\mathcal{C} \xrightarrow{G\circ F} \mathcal{E}$ biçiminde gösterilir.

(2) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ve $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ dır.

(3) $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a$ ile $b$ arasındaki tamsayıların kümesi $[a, b] := \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}$, $a$ dan $b$ ye azalan aralık $\lceil a, b\rceil := (z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b)$ ve $a$ dan $b$ ye artan aralık $\lfloor a, b\rfloor := (z \in \mathbb{Z} \mid a \geq z \geq b)$ biçiminde gösterilecektir. Örneğin; $\sum\limits_{i\in\lceil 1,3\rceil} e_i = e_1 + e_2 + e_3$, $\sum\limits_{i\in\lfloor 3,1\rfloor} e_i = e_3 + e_2 + e_1$ ve $(e_i)_{i\in\lfloor 3,1\rfloor} = e_3 \otimes e_2 \otimes e_1$ dir.

(4) $I$ bir indeks kümesi olmak üzere $(E_i)_{i\in I}$ ve $(F_i)_{i\in I}$ cebir aileleri verilsin. Her $i \in I$ için $\varphi_i : E_i \longrightarrow F_i$ olmak üzere $(\varphi_i)_{i\in I}$ cebir homomorfizmleri ailesi olsun. Bu durumda cebirlerin tensör çarpımı $\bigotimes\limits_{i\in I} E_i$ ile cebir homomorfizmlerinin tensör çarpımı ise $\bigotimes\limits_{i\in I}\varphi_i : \bigotimes\limits_{i\in I} E_i \longrightarrow \bigotimes\limits_{i\in I} F_i$, $(e_i)_{i\in I} \longmapsto (\varphi_i(e_i))_{i\in I}$ biçiminde ifade edilecektir..

# 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

1940'lı yıllarda Eilenberg ve MacLane [Eilenberg ve MacLane, 1947a, Eilenberg ve MacLane, 1947b] tarafından gruplar için homoloji teori ortaya konmuştur. Bilindiği üzere bir G grubunun homolojisi; G nin sınıflandırılmış uzayı olarak adlandırılan bağlantılı CW-uzayının, T, homolojisidir. Bu sınıflandırılmış uzay ise temel grubu, $\pi_1(T)$, G grubu ile izomorf iken $n \geq 2$ için $\pi_n(T)$ homotopi grupları aşikar olan uzaydır. Eilenberg ve MacLane topolojik uzaylardan kaçınarak grupların homolojisine cebirsel bir yaklaşımda bulunmuşlardır. Topolojik uzaylar için kombinatoriyel bir model kullanarak G grubunun simplisel küme sınıflandırması olarak adlandırılan BG'yi tanımlamışlardır. Buradan bir grubun (ko)homolojisi ile bu grubun simplisel küme sınıflandırmasının (ko)homolojisinin izomorf olduğunu ispatlamışlardır.

Diğer taraftan Whitehead [Whitehead, 1949] tarafından çaprazlanmış modül kavramı tanmlanmış ve böylece T, CW-uzayı için bir cebirsel model elde edilmiştir. Bu cebirsel model kullanılarak Sebastian [Thomas, 2007] tarafından T nin (ko)homolojisi cebirsel olarak hesaplanmak istenmiştir. Bunun için öncelikle T ye karşılık gelen bir V çaprazlanmış modülünün simplisel küme sınıflandırması $BV := DiagN(CoskV)$ tanımlanmıştır. Buradan Eilenberg ve MacLane tarafından ifade edilen izomorfluk genelleştirilerek bir simplisel grubun (ko)homolojisi ve gruplar üzerinde tanımlı bir çaprazlanmış modülün (ko)homolojisi tanımları elde edilmiştir.

Çaprazlanmış modüllerin (ko)homolojisiyle ilgili birtakım çalışmalar mevcuttur. Ellis [Ellis, 1992] tarafından kuadratik modüller yardımıyla çaprazlanmış modüllerin (ko)homolojisi ifade edilmiştir. Carrasco ve Cegarra [Carrasco ve Cegarra, 2002] ise başka bir yöntemle çaprazlanmış modüllerin (ko)homolojisini tanımlamış ve Grandjean, Ladra ve Pirashvili ise bu homoloji ile ilgili tam dizi tanımlarını kurmuşlardır.

Bizim bu tezdeki amacımız ise Sebastian tarafından ortaya konulan gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin (ko)homoloji tanımını; cebirler üzerindeki çaprazlanmış modüller için ortaya koymaktır.

# 3. SİMPLİSEL OBJELER

## 3.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak herhangi bir kategoride tanımlı simplisel obje kavramı hatırlatılacak ve tezin ileri bölümlerinde kullanılacak olan $Nerve$ ve $Diag$ funktorlarının nasıl tanımlandığından bahsedilecektir. Ayrıca $T$ ve $U$ topolojik uzayları arasında tanımlı $f, g : T \longrightarrow U$ sürekli fonksiyonlarının homotopik olması için $H(-, 0) = f$ ve $H(-, 1) = g$ olacak şekilde $H : T \times [0, 1] \longrightarrow U$ sürekli fonksiyonunun varolması gerektiğini biliyoruz. Benzer durum simplisel objeler için de geçerlidir. Burada öncelikle simplisel homotopi tanımı ve bu kavramla ilgili diğer tanımlar verilecektir. Daha sonrada simplisel homoloji tanımlanarak herhangi bir $R$-cebirin $n$.homotopi modülü ile $n$. homoloji modülü arasındaki ilişki ifade edilecektir.

Bu bölümle ilgili detaylı bilgi için [Goerss ve Jardine, 2009, May, 1992, Weibel, 1995, Arvasi ve Porter, 1997, Curtis, 1971] referanslarına bakılabilir.

## 3.2 Delta Kategorisi

Objeleri; $\{[n] : n \in \mathbb{N}_0\} = \{[n] : 0 < 1 < \ldots < n\}$

Morfizmleri; $\{[n] \longrightarrow [m] : f$ monoton fonksiyon$\}$
biçiminde belirli olan kategoriye **delta kategorisi** denir ve $\Delta$ ile gösterilir.

Herhangi bir $\Delta$ kategorisi için $n \in \mathbb{N}$, $k \in [0, n]$ olmak üzere

$$\delta^k(i) := \begin{cases} i, & i \in [0, k-1] \text{ ise} \\ i+1, & i \in [k, n-1] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\delta^k : [n-1] \longrightarrow [n]$ morfizmine $[n]$ nin $k$-ıncı eşyüzü (coface) ve
$n \in \mathbb{N}_0$, $k \in [0, n]$ olmak üzere

$$\sigma^k(i) := \begin{cases} i, & i \in [0, k] \text{ ise} \\ i-1, & i \in [k+1, n+1] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\sigma^k : [n+1] \longrightarrow [n]$ morfizmine $[n]$ nin $k$-ıncı eşdejeneresi (codegeneracy) olarak tanımlanır. Ayrıca eşyüzler ve eşdejenereler

$$
\begin{array}{ll}
0 \leq k < l \leq n+1 \text{ için} & \delta^k \delta^l = \delta^{l-1} \delta^k \\
0 \leq k \leq l \leq n-1 \text{ için} & \sigma^k \sigma^l = \sigma^{l+1} \sigma^k \\
k \in [0,n],\ l \in [0,n-1] \text{ için} & \delta^k \sigma^l = \begin{cases} \sigma^{l-1}\delta^k & k < l \text{ ise} \\ id & l \leq k \leq l+1 \text{ ise} \\ \sigma^l \delta^{k-1} & k > l+1 \text{ ise} \end{cases}
\end{array}
$$

eşitliklerini sağlar.

## 3.3 Simplisel Objeler

**Tanım 1.** *$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\mathcal{C}$ nin objelerinin kolleksiyonu olsun. $\mathcal{C}$ nin*

$$
\begin{array}{lcl}
d_k & : & X_n \longrightarrow X_{n-1}\ (k \in [0,n],\ n \in \mathbb{N}) \\
s_k & : & X_n \longrightarrow X_{n+1}\ (k \in [0,n],\ n \in \mathbb{N}_0)
\end{array}
$$

*morfizmleri*

$$
\begin{array}{ll}
0 \leq k < l \leq n+1 \textit{ için} & d_l d_k = d_k d_{l-1} \\
0 \leq k \leq l \leq n-1 \textit{ için} & s_l s_k = s_k s_{l+1} \\
k \in [0,n],\ l \in [0,n-1] \textit{ için} & s_l d_k = \begin{cases} d_k s_{l-1} & k < l \textit{ ise} \\ id & l \leq k \leq l+1 \textit{ ise} \\ d_{k-1} s_l & k > l+1 \textit{ ise} \end{cases}
\end{array}
$$

*eşitliklerini sağlıyorsa*

$$\mathbf{X} = ((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, d_k \ \&\ s_k)$$

*sistemine $\mathcal{C}$ kategorisi için bir **simplisel obje** denir. Buradaki $d_k$ ve $s_k$ morfizmleri sırasıyla yüz (face) ve dejenere (degeneracy) morfizmleri olarak adlandırılır. Kısaca, $\mathbf{X}$ simplisel objesi diyagramatik olarak*

$$\mathbf{X} = \ \cdots \ \cdots \ X_2 \underset{s_0,\ s_1}{\overset{d_0,\ d_1,\ d_2}{\rightrightarrows}} X_1 \underset{s_0}{\overset{d_0,\ d_1}{\rightrightarrows}} X_0$$

*biçiminde gösterilebilir.*

Bununla birlikte bir $\mathcal{C}$ kategorisi için simplisel obje, alternatif olarak

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta^{op} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
[n] & \longmapsto & X_{[n]} \\
\delta^k & \longmapsto & d_k \\
\sigma^k & \longmapsto & s_k
\end{array}
$$

şeklinde bir funktor olarak da düşünülebilir. (Bknz [Arvasi ve Porter, 1997])

**X** ve **Y**, simplisel objeler olsun.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[d, "f"] & = & X_n \arrow[d, "f_n"] & \cdots & X_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[l, bend left] & X_0 \arrow[d, "f_0"] \arrow[l, bend left] \\
\mathbf{Y} & = & Y_n & \cdots & Y_2 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & Y_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[l, bend left] & Y_0 \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\begin{aligned}
f_n d_k &= d_{k-1} f_{n-1} \ (k \in [0,n], n \in \mathbb{N}) \\
f_n s_k &= s_k f_{n+1} \ (k \in [0,n], n \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ morfizmleri gözönüne alınırsa $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ morfizmi bir **simplisel morfizm** olarak adlandırılır.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi için simplisel objeler kategorisi $\mathbf{s}(\mathcal{C})$ ile gösterilir.

**Örnek 1.** *$\mathcal{C}$= **Küme**, **Grp**, $\mathbf{Mod}_R$, $\boldsymbol{Alg}_R$ kategorileri için simplisel objeler sırasıyla simplisel küme, simplisel grup, simplisel $R$-modül ve simplisel $R$-cebirdir.*

## 3.4 $Nerve$ Funktoru

Bu kısımda $\mathcal{C}$, geri çekme (pullback) ve varış (terminal) objeye sahip herhangi bir kategori olarak kabul edilecektir. $\mathcal{C}$ nin varış (terminal) objesi $T$ ile gösterilecek ve herhangi bir $X$ objesinden $T$ ye giden biricik morfizm $X \xrightarrow{*} T$ olarak ifade edilecektir.

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. $O, M \in Ob(\mathcal{C})$ objelerine ve

(i)

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "t"] & M_t\Pi_s M \arrow[l, "Pr_2"'] \arrow[r, "Pr_1"] \arrow[d, "c"] & M \arrow[d, "s"] \\
O & M \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & O
\end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd}
O & O \arrow[l, "id_O"'] \arrow[r, "id_O"] \arrow[d, "e"] & O \\
& M \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii)

$$\begin{tikzcd}
M_t\Pi_s M_t\Pi_s M \arrow[r, "c_t\Pi_s id_M"] \arrow[d, "id_{M\,t}\Pi_s c"'] & M_t\Pi_s M \arrow[d, "c"] \\
M_t\Pi_s M \arrow[r, "c"'] & M
\end{tikzcd}$$

(iv)

$$\begin{tikzcd}
O_{id_O}\Pi_s M \arrow[r, "e\Pi id_M"] \arrow[dr, "Pr_2"'] & M_t\Pi_s M \arrow[d, "c"] & M_t\Pi_s O \arrow[l, "id_M\Pi e"'] \arrow[dl, "Pr_1"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapan $\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & O \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd}$ ile $M_t\Pi_s M \xrightarrow{c} M$ ($M_t\Pi_s M$; $s$ ve $t$ morfizmlerinin geri çekmesi (pullback)) morfizmlerine sahip olan $C$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisi için bir **kategori obje (veya internal kategori**) denir. Bir kategori objede $O$; objelerin objesi, $M$; morfizmlerin objesi ve $s, t, e, c$ morfizmleride sırasıyla kaynak (source), hedef (target), birim (identity) ve kompozisyon (composition) olarak adlandırılır. Kısaca bir $C$ kategori objesi

$$\left(O, M,\ \begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & O \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd},\ M_t\Pi_s M \xrightarrow{c} M\right)$$

biçimindedir.

$C$ ve $D$; kategori objeler olsun. Bu durumda $C$ den $D$ ye bir **funktor**

$$\begin{tikzcd}
M^C \arrow[r, shift left, "s^C"] \arrow[r, shift right, "t^C"'] \arrow[d, "m"'] & O^C \arrow[l, bend left, "e^C"] \arrow[d, "o"] \\
M^D \arrow[r, shift left, "s^D"] \arrow[r, shift right, "t^D"'] & O^D \arrow[l, bend left, "e^D"]
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} M^C{}_t\Pi_s M^C & \xrightarrow{\quad c^C \quad} & M^C \\ {\scriptstyle m\Pi m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ M^D{}_t\Pi_s M^D & \xrightarrow[\quad c^D \quad]{} & M^D \end{array}$$

diyagramlarını değişmeli yapan $O^C \xrightarrow{o} O^D$ ve $M^C \xrightarrow{m} M^D$ morfizmlerinden oluşur. Burada $o$; objeler üzerinde morfizm ve $m$; morfizmler üzerinde morfizm olarak adlandırılır.

Objeleri $\mathcal{C}$ kategorisi için kategori objeler, morfizmleri de funktorlar olan kategoriye kategori objelerin kategorisi denir ve **Cat**$(\mathcal{C})$ ile gösterilir.

**Örnek 2.** *$\mathcal{C}$ =$Küme$ kategorisi için* **Cat**$(Küme)$ *bir küçük (small) kategoridir.*

Şimdi bir kategori objenin nerve'ünü tanımlayacağız. Öncelikle bunun için gerekli bazı tanımları verelim:

$C, D$; kategori objeler ve $C \xrightarrow{f} D$ bir funktor olsun. Bu durumda

$$(MorC)^{{}_t\Pi_s n} := \begin{cases} ObC & n = 0 \text{ ise} \\ MorC & n = 1 \text{ ise} \\ MorC_t\Pi_s(MorC)^{{}_t\Pi_s(n-1)} & n > 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

ve benzer şekilde

$$(Morf)^{{}_t\Pi_s n} := \begin{cases} Obf & n = 0 \text{ ise} \\ Morf & n = 1 \text{ ise} \\ Morf_t\Pi_s(Morf)^{{}_t\Pi_s(n-1)} & n > 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

kümeleri tanımlanabilir. Ayrıca $(MorC)^{{}_t\Pi_s n} \xrightarrow{t_j} ObC$ ve $(MorC)^{{}_t\Pi_s n} \xrightarrow{c_{\lfloor j_1, j_0 \rfloor}} MorC$ morfizmleri $j \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_j := \begin{cases} pr_j t & j < n \text{ ise} \\ pr_{n-1} s & j = n \text{ ise,} \end{cases}$$

ve $n = 0$ için $t_0 := id_{ObC}$ iken $j_1 \geq j_0$ olmak üzere $j_0, j_1 \in [0, n]$ için

$$c_{\lfloor j_1, j_0 \rfloor} := \begin{cases} t_{j_0} e & j_1 = j_0 \text{ ise} \\ (pr_{j-1}, c_{\lfloor j_1 - 1, j_0 \rfloor})c & j_1 > j_0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanabilir. $C$; bir kategori obje olsun. Bu durumda $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ için

$$d_k = \begin{cases} (pr_j)_{j \in \lfloor n-1, 1 \rfloor} & if\ k = 0 \\ (pr_j)_{j \in \lfloor n-1, k+1 \rfloor} \cup c_{\lfloor k, k-1 \rfloor} \cup (pr_j)_{j \in \lfloor k-2, 0 \rfloor} & if\ k \in [1, n-1] \\ (pr_j)_{j \in \lfloor n-2, 0 \rfloor} & if\ k = n \end{cases}$$

$$n = 1 \text{ için } d_0 = s,\ d_1 = t$$

ve $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$s_k = (pr_j)_{j \in \lfloor n-1,k \rfloor} \cup (t_k e) \cup (pr_j)_{j \in \lfloor k-1,0 \rfloor}$$

biçiminde ifade edilen yüz morfizmlerine $N_n C \xrightarrow{d_k} N_{n-1} C$ ve dejenere morfizmlerine $N_n C \xrightarrow{s_k} N_{n+1} C$ sahip

$$(NC)_n = N_n C = (MorC)^{t \Pi_s n} \text{ for all } n \in \mathbb{N}_0$$

simplisel objesine $C$ kategori objesinin **nerve**'ü denir. Ayrıca $C, D$; kategori objeler ve $f : C \longrightarrow D$ bir funktor olmak üzere $NC \xrightarrow{Nf} ND$ morfizmi $N_n f = (Morf)^{\sqcap n}$ biçiminde alınırsa $N$ : **Cat**$(\mathcal{C}) \longrightarrow$ **s**$(\mathcal{C})$ funktoru elde edilir. Yani nerve bir funktor olarak düşünülebilir. Şöyle ki; $C, D, E$ kategori objeleri ve $C \xrightarrow{f} D$, $D \xrightarrow{g} E$ funktorları için

$$\begin{aligned} (N_n f)(N_n g) &= (Morf)^{\Pi n}(Morg)^{\Pi n} \\ &= ((Morf)(Morg))^{\Pi n} \\ &= (Mor(fg))^{\Pi n} \\ &= N_n(fg) \end{aligned}$$

ve

$$N_n id_C = (Morid_C)^{\Pi n} = id_{(MorC)^{\Pi n}} = id_{N_n C} = (id_{NC})_n$$

olup $(Nf)(Ng) = N(fg)$ ve $Nid_C = id_{NC}$ dir.

**Örnek 3.** *Örnek 2 de belirtildiği üzere $K\ddot{u}me$ kategorisinde kategori obje bir $\mathcal{C}$ küçük (small) kategorisi olup nerve'ü*

$$\begin{aligned} &(N\mathcal{C})_0 = Ob\mathcal{C}, \\ &(N\mathcal{C})_1 = Mor\mathcal{C}, \\ &n \geq 2 \text{ için } (N\mathcal{C})_n = \{(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0) \mid f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_0 \in Mor\mathcal{C}\} \end{aligned}$$

*biçiminde kompozisyonu varolan morfizm $n$'lileri ve yüz ile dejenere morfizmleri de*

$$\begin{aligned} &d_0(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0) = (f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_1) \\ &d_i(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0) = (f_{n-1}, \ldots, f_{i-1} f_i, \ldots, f_0)\ i = 1, \ldots, n-2 \\ &d_n(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0) = (f_{n-2}, f_{n-3}, \ldots, f_0) \end{aligned}$$

*ve $n = 1$ için $d_0 = s$, $d_1 = t$ olup*

$$\begin{aligned} &s_0(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0) = (f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0, id_{d_0 f_0}) \\ &s_j(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0) = (f_{n-1}, \ldots, f_j, id_{d_1 f_j}, \ldots, f_0)\ j = 1, \ldots, n \\ &d_0 f_0 = t(f_0),\ d_1 f_0 = s(f_0) \end{aligned}$$

*biçiminde bir simplisel kümedir.*

## 3.5 Monoid Obje

Bu kısımda bir monoidal kategoride tanımlı monoid obje kavramını ifade edeceğiz. Dolayısıyla öncelikle monoidal kategori tanımı hatırlatılarak monoidal kategori örnekleri ifade edilecektir. Daha sonra bir monoidal kategori olan $R$-modüller kategorisi, $\mathbf{Mod}_R$, için monoid objenin bir $R$-cebir olduğundan bahsedilecektir.

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere monoidal çarpım olarak adlandırılan $\otimes : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ bifunktoru, birim obje denilen $I$ objesi ve $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$ için

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$

$$\lambda_A : I \otimes A \longrightarrow A \text{ ve } \rho_A : A \otimes I \longrightarrow A$$

doğal izomorfizmleri ile birlikte

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "1\otimes\alpha"']
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho\otimes 1"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1\otimes\lambda"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli ise $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ ya (veya kısaca $(\mathcal{C}, \otimes, I)$) bir **monoidal kategori** denir.

**Örnekler 1.** *(i) $\mathcal{C}=$* **Küme***, monoidal çarpım yerine kartezyen çarpım $(\times)$ ve birim obje yerine tek elemanlı küme $(\{*\})$ alınırsa $(\mathcal{C}, \times, \{*\})$ bir monoidal kategoridir.*
*(ii) $\mathcal{C}=$* **Cat***, monoidal çarpım yerine çarpım kategorisi $(\times)$ ve birim obje yerine tek obje ve bu obje üzerindeki birim morfizmden oluşan kategori $(\mathcal{C}^{\times 0})$ alınırsa $(\mathcal{C}, \times, \mathcal{C}^{\times 0})$ bir monoidal kategoridir.*
*(iii) $\mathcal{C} =$***AbGrp***, monoidal çarpım yerine tensör çarpım $(\otimes)$ ve birim obje yerine $\mathbb{Z}$ alınırsa $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{Z})$ bir monoidal kategoridir. Burada $A, B, C$ abelyan grupları için $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ ve $\mathbb{Z} \otimes A \cong A$, $A \otimes \mathbb{Z} \cong A$ olduğu tensör çarpımın özelliklerinden açıktır.*
*(iv) $\mathcal{C}=$* $\mathbf{Mod}_R$*, monoidal çarpım yerine tensör çarpımı $(\otimes_R)$ ve birim obje yerine de $R$ halkası alınırsa $(\mathcal{C}, \otimes, R)$ bir monoidal kategoridir.*
*(v) Benzer şekilde $\mathcal{C} =$***Alg***$_R$, monoidal çarpım yerine tensör çarpımı $(\otimes_R)$ ve birim obje yerine de $R$ halkası alınırsa $(\mathcal{C}, \otimes, R)$ bir monoidal kategoridir.*

$(\mathcal{C},\otimes,I)$ bir monoidal kategori ve $E,\mathcal{C}$ nin bir objesi olmak üzere

(i)

$$\begin{tikzcd}
(E\otimes E)\otimes E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mu\otimes 1"'] & E\otimes(E\otimes E) \arrow[r, "1\otimes\mu"] & E\otimes E \arrow[d, "\mu"] \\
E\otimes E \arrow[rr, "\mu"'] & & E
\end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd}
I\otimes E \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[dr, "\lambda"'] & E\otimes E \arrow[d, "\mu"] & E\otimes I \arrow[l, "1\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

diyagramlarını değişmeli yapan

$$\begin{array}{rccc}
\mu: & E\otimes E & \longrightarrow & E \\
\eta: & I & \longrightarrow & E
\end{array}$$

morfizmleri ile birlikte $E$ ye bir **monoid obje** denir. Burada $\mu$ morfizmi çarpım, $\eta$ morfizmi de birim morfizm olarak adlandırılır. Ayrıca $\alpha,\lambda,\rho$ doğal izomorfizmleri de monoidal kategori tanımındaki gibidir.

**Örnekler 2.** *(a) $\mathcal{C}=$* **Küme** *kategorisinde monoid obje monoid'tir.*
*(b) $\mathcal{C}=$***Cat** *kategorisinde monoid obje $\mu:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ ve $\eta:\mathcal{C}^{\times 0}\longrightarrow\mathcal{C}$ funktorları ile birlikte bir $\mathcal{C}$ küçük kategorisidir. Burada $\mathcal{C}^{\times 0}$; tek obje ve morfizmden oluşan birim objedir.*
*(c) $\mathcal{C}=$***AbGrp** *kategorisinde monoid obje halkadır.*
*(d) $\mathcal{C}=$***Mod**$_R$ *kategorisinde monoid obje $R$-cebirdir. ( Bknz. Teorem 1)*
*(e) $\mathcal{C}=$***sMod**$_R$ *kategorisinde monoid obje simplisel $R$-cebirdir.*

Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $C$ ve $D$ monoid objeleri verilsin. Bu durumda $C\xrightarrow{\varphi}D$ morfizmine

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C \arrow[r, "\mu^C"] \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"'] & C \arrow[d, "\varphi"] \\
D\otimes D \arrow[r, "\mu^D"'] & D
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta^C"] \arrow[dr, "\eta^D"'] & C \arrow[d, "\varphi"] \\
& D
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli olacak şekilde (yani $\mu^C\varphi = (\varphi \otimes \varphi)\mu^D$ and $\eta^C\varphi = \eta^D$) varsa $\varphi$ ye **monoid morfizmi** denir.

$\varphi$ nin monoid homomorfizmi olduğunu göstermek için sadece birinci diyagramın değişmeli olduğu gösterilebilir.

$\mathcal{C}$ kategorisindeki monoid objelerin kategorisi $Mon(\mathcal{C})$ ile gösterilecektir.

Diğer taraftan bir monoid objenin nerve'ü şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{tikzcd} Mon(\mathcal{C}) \arrow[rr, "NCat"] \arrow[dr, "Cat"'] & & s(\mathcal{C}) \\ & Cat(\mathcal{C}) \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

Burada $E, \mathcal{C}$ de herhangi bir monoid obje olmak üzere $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$N_nE = E^{\otimes n}$$

ve $N_nE \xrightarrow{d_k} N_{n-1}E$ yüz morfizmleri ile $N_nE \xrightarrow{s_k} N_{n+1}E$ dejenere morfizmleri $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için

$$d_k = \begin{cases} (pr_i)_{i \in \lfloor n-1,1 \rfloor} & if\ k = 0 \\ (pr_i)_{i \in \lfloor n-1,k+1 \rfloor} \cup ((pr_k \otimes pr_{k-1})\mu) \cup (pr_i)_{i \in \lfloor k-2,0 \rfloor} & if\ k \in [1, n-1] \\ (pr_i)_{i \in \lfloor n-2,0 \rfloor} & if\ k = n \end{cases}$$

$$n = 1 \text{ için } d_0 = d_1 = 0$$

ve $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$s_k = (pr_i)_{i \in \lfloor n-1,k \rfloor} \cup (0\eta) \cup (pr_i)_{i \in \lfloor k-1,0 \rfloor}$$

biçiminde tanımlı bir simplisel obje elde edilir. Burada $E^{\otimes n} \xrightarrow{0} I$ biçimindedir.

**Teorem 1.** *$R$ birimli değişmeli halka ve $M$ bir $R$-modül olsun. $M$ nin bir $R$ cebir olması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{tikzcd} M \otimes M \otimes M \arrow[r, "\mu \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes \mu"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli olacak şekilde $\mu : M \otimes M \longrightarrow M$, $R$-modül homomorfizminin varolmasıdır. Ayrıca $M$ bir $R$-cebir olmak üzere $M$ nin birimli olması için gerek ve yeter* *şart*

$$\begin{tikzcd} R\otimes M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta\otimes 1"'] & M \arrow[d, "1"] & M\otimes R \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d, "1\otimes\eta"] \\ M\otimes M \arrow[r, "\pi"'] & M & M\otimes M \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli olacak şekilde $\eta : R \longrightarrow M$, $R$-modül homomorfizminin varolmasıdır.*

**İspat 1.** *Bknz. [Hungerford, 2012].*

$M$ ve $N$ birer $R$-cebir olmak üzere $M \xrightarrow{\varphi} N$, $R$-cebir homomorfizmi $\mathcal{C}$ =$\mathbf{Mod}_R$ kategorisindeki monoid homomorfizmidir. Yani $\mu^M\varphi = (\varphi\otimes\varphi)\mu^N$ özelliğindeki $\varphi$ morfizmine bir $R$**-cebir homomorfizmi** denir.

## 3.6 Bisimplisel Obje

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

$$\Delta^{op}\times\Delta^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$$

funktoruna $\mathcal{C}$ de bir **bisimplisel obje** denir. Yani $X$ bir bisimplisel obje olmak üzere $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$ ve $\Delta$ kategorisindeki $[m] \xrightarrow{\theta} [p]$, $[n] \xrightarrow{\rho} [q]$ morfizmleri için

$$X_{m,n} := X_{[m],[n]} \text{ ve } X_{\theta,\rho} := X_{(\theta,\rho)}$$

biçimindedir. Bir $X$ bisimplisel objesi için yatay-dikey yüz morfizmleri ve yatay-dikey dejenere morfizmleri şu şekilde tanımlanır:

$$X_{p,q} \xrightarrow{d_k^h} X_{p-1,q} \text{ ve } X_{p,q} \xrightarrow{d_k^v} X_{p,q-1}$$

olmak üzere $k\in[0,p]$, $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_0$ için $d_k^h := X_{\delta^k,q}$ ve $k\in[0,q]$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}_0$ için $d_k^v := X_{p,\delta^k}$ iken

$$X_{p,q} \xrightarrow{s_k^h} X_{p+1,q} \text{ ve } X_{p,q} \xrightarrow{s_k^v} X_{p,q+1}$$

olmak üzere $k\in[0,p]$, $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_0$ için $s_k^h := X_{\sigma^k,q}$ ve $k\in[0,q]$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}_0$ için $s_k^v := X_{p,\sigma^k}$ biçimindedir.

**Örnek 4.** *$\mathcal{C}$ =**Alg**$_R$ alınırsa bir simplisel $R$-cebir* **E**, *simplisel özdeşlikleri sağlayan $d_i = d_i^n : E_n \longrightarrow E_{n-1}, 0\le i\le n\ (n\ne 0)$ ve $s_i = s_i^n : E_n \longrightarrow E_{n+1}, 0\le i\le n$ yüz ve dejenere dönüşümleri ile beraber $\{E_n\}$, $R$-cebir ailelerinden oluşur. Ayrıca bir simplisel $R$-cebir, $\Delta$; delta kategorisi olmak üzere, $\Delta^{op}$ $\longrightarrow$**Alg**$_R$ biçiminde bir funktor olarakta düşünülebilir ve* *simplisel $R$-cebirlerin kategorisi s**Alg**$_R$ ile gösterilir. Diğer taraftan $\Delta\times\Delta$ çarpım kategorisi için $(\Delta\times\Delta)^{op} \longrightarrow Alg_R$ funktoruna bisimplisel $R$-cebir denir. Yani bisimplisel $R$-cebir*

$$\begin{array}{ll} d_i^h : E_{p,q} \to E_{p-1,q} & \\ s_i^h : E_{p,q} \to E_{p+1,q} & i : 0,\ldots,p \\ d_j^v : E_{p,q} \to E_{p,q-1} & \\ s_j^v : E_{p,q} \to E_{p,q+1} & j : 0,\ldots,q \end{array}$$

*homomorfizmleri ile birlikte $E_{p,q}$ $R$-cebiridir. Ayrıca bisimplisel $R$-cebirlerin kategorisi $s^2$**Alg**$_R$ ile gösterilir.*

## 3.7 Bisimplisel Objeden Simplisel Objeye Geçiş ($Diag$ Funktor)

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun.

$$\mathbf{s}^2\mathcal{C}\stackrel{Diag}{\longrightarrow}\mathbf{s}\mathcal{C}$$

funktoru şu şekilde tanımlıdır: $X$, $\mathcal{C}$ kategorisinde bisimplisel obje olmak üzere **DiagX**,

$$\begin{tikzcd} & \Delta^{op}\times\Delta^{op} \arrow[d, "X"] \\ \Delta^{op} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "DiagX"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$Diag_nX := X_{n,n}$, $d_k := d_k^h d_k^v = d_k^v d_k^h$ ve $s_k := s_k^h s_k^v = s_k^v s_k^h$ biçiminde bir simplisel objedir.

$X$ ve $Y$, $\mathcal{C}$ kategorisinde bisimplisel objeler olmak üzere $X \longrightarrow Y$ morfizmi için $DiagX \stackrel{Diagf}{\longrightarrow} DiagY$ morfizmi

$$(Diagf)_n = f_{n,n}$$

biçimindedir. Dolayısıyla $Diag$ : $\mathbf{s}^2\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{s}\mathcal{C}$ funktoru bir bisimplisel objeyi simplisel objeye taşır.

**Notasyon:** Yüz ve dejenere dönüşümlerinin kompozisyonları için tez boyunca $d_{\lfloor j,i\rfloor} = d_j d_{j-1}\ldots d_i$, $s_{\lceil i,j\rceil} = s_i s_{i+1}\ldots s_j$ notasyonu kullanılacaktır. Bununla birlikte $\mathbf{s}^2\mathcal{C}$ notasyonu ile $\mathbf{ss}\mathcal{C}$ notasyonu aynı anlama sahiptir.

## 3.8 Simplisel Homotopi ve Homoloji

**Tanım 2.** *$\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ simplisel objeler ve $\mathbf{X} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbf{Y}$ simplisel morfizmler olsun. Eğer $ins_0 H = f$, $ins_1 H = g$ olacak şekilde bir $H : \mathbf{X} \times \mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow \mathbf{Y}$ simplisel morfizmi varsa $f$ ile $g$ ye* ***simplisel homotopik*** *denir ve $H$ ya $f$ den $g$ ye bir* ***simplisel homotopi*** *adı verilir. $f \sim g$ ile gösterilir.*

Burada $\mathbf{X}$ bir simplisel obje olmak üzere $ins_0$ ve $ins_1$ morfizmleri

$$\mathbf{X} \overset{\cong}{\longrightarrow} \mathbf{X}\times\mathbf{\Delta}^0 \overset{id\times d^1}{\longrightarrow} \mathbf{X}\times\mathbf{\Delta}^1 \text{ ve } \mathbf{X} \overset{\cong}{\longrightarrow} \mathbf{X}\times\mathbf{\Delta}^0 \overset{id\times d^0}{\longrightarrow} \mathbf{X}\times\mathbf{\Delta}^1$$

biçimindedir. Diğer taraftan $l \in [0,1]$ için $d^l = \Delta^{\delta^l}$ ve $k \in [0, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için $\tau^k \in \Delta^1_n =_{\mathcal{C}} ([n],[1])$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \tau^k : & [n] & \longrightarrow & [1] \\ & i & \longmapsto & \begin{cases} 0 & i \in [0, n-k] \text{ ise} \\ 1 & i \in [n-k+1, n] \text{ ise} \end{cases} \end{array}$$

biçiminde bir funktor vardır. Bu funktorun yüz ve dejenere morfizmleri ile ilişkisi şu şekilde verilebilir:

**Önerme 1.** *$[n-1] \overset{\delta^k}{\longrightarrow} [n] \overset{\tau^l}{\longrightarrow} [1]$ ve $[n+1] \overset{\sigma^k}{\longrightarrow} [n] \overset{\tau^l}{\longrightarrow} [1]$ kompozisyonları $k \in [0,n]$, $l \in [0, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\delta^k \tau^l = \begin{cases} \tau^l & k \leq n-l \text{ ise} \\ \tau^{l-1} & k > n-l \text{ ise} \end{cases}$$

*ve $k \in [0,n]$, $l \in [0,n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için*

$$\sigma^k \tau^l = \begin{cases} \tau^l & k \leq n-l \text{ ise} \\ \tau^{l+1} & k > n-l \text{ ise} \end{cases}$$

*biçimindedir.*

**İspat 2.** *Eğer $k \leq n-l$ ise*

$$\begin{aligned} \delta^k \tau^l(i) &= \left\{ \begin{array}{ll} \tau^l(i) & i \in [0,k-1], \\ \tau^l(i+1) & i \in [k, n-1] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & i \in [0,k-1], \\ 0 & i \in [k, n-1-l], \\ 1 & i \in [n-l, n-1] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & i \in [0, n-1-l] \\ 1 & i \in [n-1-l, n-1] \end{array} \right\} = \tau^l(i) \end{aligned}$$

*olup* $k > n - l$ *ise*

$$
\begin{aligned}
\delta^k\tau^l(i) &= \left\{\begin{array}{ll} \tau^l(i) & i \in [0, k-1], \\ \tau^l(i+1) & i \in [k, n-1] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & i \in [0, n-l], \\ 0 & i \in [n-l+1, k-1], \\ 1 & i \in [k, n-1] \end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 0 & i \in [0, n-l] \\ 1 & i \in [n-l+1, n-1] \end{array}\right\} = \tau^{l-1}(i)
\end{aligned}
$$

*dir. Diğer taraftan eğer* $k \leq n - l$ *ise*

$$
\begin{aligned}
\sigma^k\tau^l(i) &= \left\{\begin{array}{ll} \tau^l(i) & i \in [0, k], \\ \tau^l(i-1) & i \in [k+1, n+1] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & i \in [0, k], \\ 0 & i \in [k, n+1-l], \\ 1 & i \in [n+2-l, n+1] \end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 0 & i \in [0, n+1-l] \\ 1 & i \in [n+2-l, n+1] \end{array}\right\} = \tau^l(i)
\end{aligned}
$$

*ve* $k > n - l$ *ise*

$$
\begin{aligned}
\sigma^k\tau^l(i) &= \left\{\begin{array}{ll} \tau^l(i) & i \in [0, k], \\ \tau^l(i-1) & i \in [k+1, n+1] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & i \in [0, n-l], \\ 0 & i \in [n+1-l, k], \\ 1 & i \in [k+1, n+1] \end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 0 & i \in [0, n-l] \\ 1 & i \in [n+1-l, n+1] \end{array}\right\} = \tau^l(i)
\end{aligned}
$$

*dir.*

Bu funktor yardımıyla $ins_0$ ve $ins_1$ morfizmleri

$$
\begin{aligned}
(ins_0)_n(x_n) &= (x_n, \tau^0) \text{ ve} \\
(ins_1)_n(x_n) &= (x_n, \tau^{n+1})
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilebilir.

**Hatırlatma 1.** *Tanım 2 deki* $1$*-simpleks* $\mathbf{\Delta}^1$*, topolojik uzaylar kategorisindeki* $[0, 1]$ *aralığına karşılık gelir.*

Morfizmler üzerindeki simplisel homotopik olma özelliği funktor altında korunan bir özelliktir. Yani $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri için $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru alınırsa $\mathcal{C}$ kategorisinde simplisel homotopik olan $\mathbf{X} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathbf{Y}$ morfizmleri için $F\mathbf{X} \underset{Fg}{\overset{Ff}{\rightrightarrows}} F\mathbf{Y}$ morfizmleri de simplisel homotopiktir.

Şimdi de simplisel homotopi ile ilgili ilerideki bölümlerde kullanacağımız bazı önemli tanımları verelim:

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere $fg \sim id_X$ ve $gf \sim id_Y$ olacak şekilde $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Y} \xrightarrow{g} \mathbf{X}$ simplisel morfizmleri varsa **X** ve **Y** simplisel objelerine **simplisel homotopi denktirler** denir. $\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$ ile gösterilir. **X**, **Y** simplisel $R$-modüller ve $i : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ birebir (injective) simplisel modül homomorfizmi olsun.
(a) Eğer $ir = id_Y$ ve $ri \sim id_X$ olacak şekilde $\mathbf{X} \xrightarrow{r} \mathbf{Y}$ simplisel modül homomorfizmi varsa **Y** ye **X** in **simplisel deformasyon geriçekimi** ve $r$ ye de **simplisel deformasyon geriçekilmesi** denir.
(b) **X**, **Y** simplisel $R$-modüller, $\mathbf{X} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathbf{Y}$ simplisel modül homomorfizmleri ve $f \xrightarrow{H} g$ simplisel homotopi olsun. Bu durumda tüm $y_n \in Y_n$, $k \in [0, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$H_n(i_n(y_n), \tau^k) = i_n f_n(y_n) = i_n g_n(y_n)$$

oluyorsa $H$ ya $i$ **boyunca sabittir** denir.
(c) Eğer $ri \xrightarrow{H} id_X$ homotopisi $i$ boyunca sabitse **Y** ye **X** in **güçlü simplisel deformasyon geriçekimi** denir.

**Örnek 5.** *$S^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ çemberi $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ silindirinin simplisel deformasyon geriçekimidir. Çünkü $i : S^1 \hookrightarrow C$ ve $r : C \longrightarrow S^1$, $r(x,y,z) = (x,y,0)$ olmak üzere $ir = id_{S^1}$ ve $H((x,y,z),t) = (x,y,tz)$ homotopisi kullanılırsa $ri \sim id_C$ elde edilir.*

## 3.9 Simplisel Homoloji ve Moore Kompleks

Hatırlarsak, $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere

(i) $\mathcal{C}$ nin bir sıfır objesi vardır,

(ii) $\mathcal{C}$ sonlu limitlere sahiptir,

(iii) Her morfizm kümesi ${}_{\mathcal{C}}(A, B)$ bir toplamsal Abelyan gruptur,

(iv) Tüm $A, B, C$ objeleri için

$${}_{\mathcal{C}}(A,B) \times {}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow {}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

bilineer dönüşümü vardır. Yani $f$, $f' \in {}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g$, $g' \in {}_{\mathcal{C}}(B,C)$ morfizmleri için

$$\begin{aligned} (f+f') \circ g &= f \circ g + f' \circ g \\ f \circ (g+g') &= f \circ g + f \circ g' \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır,

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{C}$ kategorisine **toplamsal (additive) kategori** denir.

Bu kısımda herhangi bir toplamsal kategori için bir simplisel objenin simplisel homolojisi ile Moore kompleksi ifade edilerek simplisel $R$-cebirler için karşılıkları belirlenecektir. Burada $\mathcal{A}$ nın bir toplamsal kategori olduğu kabul edilecektir.

**A**, $\mathcal{A}$ nın bir simplisel objesi olmak üzere

$$\partial := \sum_{k\in[0,n]} (-1)^k d_k$$

biçiminde tanımlı $A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1}$ morfizmleri için

$$\cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\partial} A_1 \xrightarrow{\partial} A_0$$

dizisi bir kompleksdir. Çünkü;

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\partial_n &= \left(\sum_{l\in[0,n+1]} (-1)^l d_l\right)\left(\sum_{k\in[0,n]} (-1)^k d_k\right) \\
&= \sum_{l\in[0,n+1]}\sum_{k\in[0,n]} (-1)^{l+k} d_l d_k \\
&= \sum_{l\in[0,n+1]}\sum_{k\in[0,l-1]} (-1)^{l+k} d_l d_k + \sum_{l\in[0,n+1]}\sum_{k\in[l,n]} (-1)^{l+k} d_l d_k \\
&= \sum_{k\in[0,n+1]}\sum_{l\in[0,k-1]} (-1)^{l+k} d_k d_l + \sum_{k\in[0,n]}\sum_{l\in[0,k]} (-1)^{l+k} d_l d_k \\
&= \sum_{k\in[1,n+1]}\sum_{l\in[0,k-1]} (-1)^{l+k} d_l d_k + \sum_{k\in[1,n+1]}\sum_{l\in[0,k-1]} (-1)^{l+k-1} d_l d_{k-1} \\
&= \sum_{k\in[1,n+1]}\sum_{l\in[0,k-1]} (-1)^{l+k} (d_k d_l - d_l d_{k-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ elde edilir. Bir **A** simplisel objesi için

$$C\mathbf{A} : (\cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\partial} A_1 \xrightarrow{\partial} A_0)$$

kompleksine **A ile ilişkili kompleks (associated complex)** denir. $\mathcal{A}$ için **A** ve **B** simplisel objeleri ile $\mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B}$ simplisel morfizmi verilsin. Bu durumda $C_n\varphi := (C\varphi)_n = \varphi_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ olacak şekilde $C\mathbf{A} \xrightarrow{C\varphi} C\mathbf{B}$ kompleks morfizmi vardır. Böylece $\mathbf{s}\mathcal{A} \xrightarrow{C} \mathbf{C}\mathcal{A}$ biçiminde bir funktor elde edilir. Çünkü **A**, **B**, **C** simplisel objeleri ile $\mathbf{A} \xrightarrow{f} \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \xrightarrow{g} \mathbf{C}$ simplisel morfizmleri için

$$(C_n f)(C_n g) = f_n g_n = (fg)_n = C_n(fg)$$

ve

$$C_n id_A = (id_A)_n = id_{A_n} = id_{C_n A} = (id_{C\mathbf{A}})_n$$

dir. Burada $\mathbf{s}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ kategorisi için simplisel objelerin kategorisi iken $\mathbf{C}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ kategorisindeki objelerin oluşturduğu komplekslerin kategorisidir.

**Hatırlatma 2.** *Herhangi bir funktor altında simplisel homotopik olma özelliği korunduğu için $C$ funktoru altında da bu özellik korunur.*

Herhangi bir **A** simplisel objesinin simplisel homolojisi, $C\mathbf{A}$ kompleksi yardımıyla, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için

$$H_n(\mathbf{A}) = \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}} \tag{3.1}$$

bölüm modülü ile hesaplanır. Özel olarak **E** simplisel $R$-cebiri için $\partial_n = \sum\limits_{k\in[0,n]} (-1)^k d_k$ olmak üzere

$$C\mathbf{E} : (\cdots \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\partial} E_1 \xrightarrow{\partial} E_0)$$

kompleksine **E ile ilişkili kompleks** denir. **E** nin $n$. **homoloji modülü** ise

$$H_n(\mathbf{E}) = \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}}$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde **E** nin $n$. **kohomoloji modülü**

$$H^n(\mathbf{E}) = \frac{Ker\partial_{n+1}}{Im\partial_n}$$

şeklindedir. Diğer taraftan $k$ bir değişmeli halka, $M$ bir $k$-modül ve **E** bir simplisel $R$-cebir olsun. **E** nin $k$ üzerindeki $M$ değişkenli (coefficient) $n$. homoloji modülü

$$H_n(\mathbf{E}, M; k) := H_n(C(\mathbf{E}; k) \otimes_k M)$$

şeklinde olup burada $C(\mathbf{E}; k)$, **E** ile ilişkili kompleks olup

$$C(\mathbf{E}; k) \otimes_k M : (\cdots \longrightarrow E_2 \otimes_k M \longrightarrow E_1 \otimes_k M \longrightarrow E_0 \otimes_k M)$$

biçimindedir. Benzer şekilde **E** nin $k$ üzerindeki $M$ değişkenli (coefficient) $n$. kohomoloji modülü

$$H^n(\mathbf{E}, M, k) := H^n({}_k(C(\mathbf{E}; k), M))$$

dir. Herhangi bir $k$-modül $A$ için $A \otimes_k k \cong A$ ve ${}_k(A, k) \cong A$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $H_n(\mathbf{E}, M; k)$ ve $H^n(\mathbf{E}, M; k)$ tanımları şu şekilde kısaltılabilir:

$$\begin{aligned}
H_n(\mathbf{E}, k; k) \ &: \ = H_n(C(E; k) \otimes_k k) := H_n(E; k) \\
H_n(\mathbf{E}, M; \mathbb{Z}) \ &: \ = H_n(C(E; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M) := H_n(E, M) \\
H_n(\mathbf{E}, \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \ &: \ = H_n(C(E; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) := H_n(E)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} H^n(\mathbf{E}, k; k) &: = H^n({}_k(C(E;k), k)) := H^n(\mathbf{E}; k) \\ H^n(\mathbf{E}, M; \mathbb{Z}) &: = H^n({}_{\mathbb{Z}}(C(E;\mathbb{Z}), M)) := H^n(\mathbf{E}, M) \\ H^n(\mathbf{E}, \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) &: = H^n({}_{\mathbb{Z}}(C(E;\mathbb{Z}), \mathbb{Z})) := H^n(E) \end{aligned}$$

dir. Bir **A** simplisel objesi için $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$M_n\mathbf{A} := \bigcap_{k\in[1,n]} Kerd_k$$

ve

$$\partial : M_n\mathbf{A} \longrightarrow M_{n-1}\mathbf{A},\ \partial = d_n|_{M_n\mathbf{A}}$$

olarak alınırsa

$$M\mathbf{A} := (\cdots \longrightarrow M_2\mathbf{A} \xrightarrow{\partial} M_1\mathbf{A} \xrightarrow{\partial} M_0\mathbf{A})$$

kompleksine **A** nın **Moore kompleksi** denir.

**Hatırlatma 3.** *$\mathbf{A}$ nın $M\mathbf{A}$ Moore kompleksi için $Z_n(M\mathbf{A}) := Ker(M_n\mathbf{A} \xrightarrow{\partial} M_{n-1}\mathbf{A})$ ve $B_n(M\mathbf{A}) := Im(M_{n+1}\mathbf{A} \longrightarrow M_n\mathbf{A})$ olmak üzere $H_n(M\mathbf{A}) = Z_n(M\mathbf{A})/B_n(M\mathbf{A})$ dır.*

Yukarıdaki tanıma göre bir **E** simplisel $R$-cebiri içinde $M_n\mathbf{E} := \bigcap_{k\in[1,n]} Kerd_k$ ve $\partial : M_n\mathbf{E} \longrightarrow M_{n-1}\mathbf{E}$, $\partial = d_n|_{M_n\mathbf{E}}$ olmak üzere

$$M\mathbf{E} := (\cdots \longrightarrow M_2\mathbf{E} \xrightarrow{\partial} M_1\mathbf{E} \xrightarrow{\partial} M_0\mathbf{E})$$

Moore kompleksi vardır. Ayrıca $n \geq 2$ için $(M\mathbf{E})_n \cong 0$ olacak şekilde **E** simplisel $R$-cebirlerini obje kabul eden, $\mathbf{sAlg_R}$ nin bir dolu alt kategorisi $\mathbf{sAlg}_{\lfloor \mathbf{1},\mathbf{0} \rfloor}$ ile gösterilir.

**E** bir simplisel $R$-cebir olmak üzere **E** nin $n$. homotopi modülü ile $n$. homoloji modülü arasında

$$\pi_n\mathbf{E} \cong H_n(M\mathbf{E})$$

ilişkisi mevcuttur. (Bknz Curtis, 1971)

## 3.10 Simplisel $R$-modül Sınıflandırması

$E$ bir $R$-cebir olsun. Bu durumda $E$, $\mathcal{C}$ =$Mod_R$ kategorisinde bir monoid obje olup

$$\begin{tikzcd} Mon(\mathcal{C}) \arrow[rr, "NCat"] \arrow[dr, "Cat"'] & & s(\mathcal{C}) \\ & Cat(\mathcal{C}) \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramına göre $E$ nin nerve'ü bir simplisel $R$-modül olarak elde edilir. Bu simplisel $R$-modüle $E$ nin **simplisel $R$-modül sınıflandırması** denir.

**Teorem 2.** *(Bir $R$-cebirin homoloji ve kohomolojisinin simplisel tanımı) $k$ değişmeli halka ve $M \sim k$-modül olmak üzere*

$$\begin{aligned} H_n(BE, M; k) &\cong H_n(E, M; k) \text{ ve} \\ H^n(BE, M; k) &\cong H^n(E, M; k) \end{aligned}$$

*dır.*

**İspat 3.** *[Quillen, 1973] ve [Baues ve Wirsching, 1985] da ifade edildiği gibi $\mathcal{C}$ bir küçük (small) kategori olmak üzere*

$$H_*(\mathcal{C}, M) \cong H_*(B\mathcal{C}, M)$$

*dir. Dolayısıyla*

$$H_n(BE, M; k) \cong H_n(E, M; k)$$

*yazılabilir. Benzer şekilde $H^n(BE, M; k) \cong H^n(E, M; k)$ olduğu da açıktır.*

# 4. $\overline{W}$ VE $DIAGN$ FUNKTORLARININ SİMPLİSEL DENKLİĞİ

## 4.1 Giriş

Eilenberg ve MacLane [Eilenberg ve MacLane, 1947a, Eilenberg ve MacLane, 1947b] tarafından, bir grubun (ko) homoloji grubu ile bu grubun simplisel küme sınıflandırmasının (ko) homoloji grubunun izomorf olduğu ifade edilmiştir. Bu duruma paralel olarak Sebastian [Thomas, 2007] tarafından bir simplisel grubun (ko) homoloji grubunun bu simplisel grubun simplisel küme sınıflandırmasının (ko) homoloji grubuyla izomorf olduğu elde edilmiştir. Yani $G$ bir simplisel grup, $R$ bir değişmeli halka ve $M$ bir $R$-modül olmak üzere

$$\begin{aligned} H_n(G,M;R) &\cong H_n(BG,M;R) \text{ ve} \\ H^n(G,M;R) &\cong H^n(BG,M;R) \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $BG := DiagNG$, $G$ nin bir simplisel küme sınıflandırmasıdır. Diğer taraftan Sebastian, $DiagNG$ ile simplisel homotopi denk olan $\overline{W}G$ simplisel kümesini elde ederek $G$ nin (ko) homoloji grubunu

$$\begin{aligned} H_n(G,M;R) &\cong H_n(\overline{W}G,M;R) \text{ ve} \\ H^n(G,M;R) &\cong H^n(\overline{W}G,M;R) \end{aligned}$$

olarak elde etmiştir. Eilenberg ve MacLane tarafından ortaya konulan izomorfluğun, herhangi bir küçük kategori için genelleştirilebildiği [Quillen, 1973, Baues ve Wirsching, 1985] da ifade edilmiştir. O halde bu bölümde de benzer yol izlenerek $DiagN$ funktoru ile $\overline{W}$ funktorunun bir **E** simplisel cebirini nasıl bir simplisel modüle dönüştürdüğü ifade edilerek $DiagN$**E** ile $\overline{W}\boldsymbol{E}$ nin simplisel homotopi denk olduğu gösterilecektir.

## 4.2 $\overline{W}$ ve $DiagN$ Funktorları

Teorem 1 gereğince $\mathbf{sMod}_R$ kategorisindeki monoid obje bir simplisel $R$- cebir olup bu simplisel cebirin nerve'ü

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sAlg}_R & \xrightarrow{N} & \mathbf{s}^2\mathbf{Mod}_R \\ \cong\ \downarrow & & \downarrow\ \cong \\ \mathbf{Mon}(\mathbf{sMod}_R) & \xrightarrow{N} & \mathbf{s}(\mathbf{sMod}_R) \end{array}$$

biçiminde bir bisimplisel $R$- modüldür. Diğer taraftan

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sAlg_R} & \xrightarrow{DiagN} & \mathbf{sMod_R} \\ N \searrow & & \nearrow Diag \\ & \mathbf{s^2Mod}_{\boldsymbol{R}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} DiagN: & \mathbf{sAlg_R} & \longrightarrow & \mathbf{sMod_R} \\ & \mathbf{E} & \longmapsto & (DiagN\mathbf{E})_n := E_n^{\otimes n} \end{array}$$

olmak üzere yüz ve dejenere morfizmleri sırasıyla

$$d_k((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (x_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor} = \begin{cases} d_k(e_{i+1}) & i\in\lfloor n-2,k\rfloor \\ d_k(e_k)+d_k(e_{k-1}) & i=k-1 \\ d_k(e_i) & i\in\lfloor k-2,0\rfloor \end{cases}$$

ve

$$s_k((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (z_i)_{i\in\lfloor n,0\rfloor} = \begin{cases} s_k(e_{i-1}) & i\in\lfloor n,k+1\rfloor \\ 0 & i=k \\ s_k(e_i) & i\in\lfloor k-1,0\rfloor \end{cases}$$

biçimindedir. Yani

$$DiagN\mathbf{E} := \; \cdots E_2\otimes E_2 \underset{\underset{s_1}{\longleftarrow}\,\underset{s_0}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{d_0}{\longrightarrow}\,\overset{d_1}{\longrightarrow}}{\xrightarrow{d_2}}} E_1 \underset{\underset{s_0}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{d_0}{\longrightarrow}}{\xrightarrow{d_1}}} E_0$$

olarak ifade edilebilir. Örneğin; $n=2$ için $e_0,e_1\in E_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_0(e_1\otimes e_0) &= x_0 = d_0(e_1) \\ d_1(e_1\otimes e_0) &= x_0 = d_1(e_1)+d_1(e_0) \\ d_2(e_1\otimes e_0) &= x_0 = d_2(e_0) \end{aligned}$$

ve $n=1$ için $e_0\in E_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s_0(e_0) &= z_1\otimes z_0 = s_0(e_0)\otimes 0 \\ s_1(e_0) &= z_1\otimes z_0 = 0\otimes s_0(e_0) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sAlg_R} & \xrightarrow{\overline{W}} & \mathbf{sMod_R} \\ N \searrow & & \nearrow Diag \\ & \mathbf{s^2Mod}_{\boldsymbol{R}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \overline{W}: & \mathbf{sAlg_R} & \longrightarrow & \mathbf{sMod_R} \\ & \mathbf{E} & \longmapsto & (\overline{W}\mathbf{E})_n := \bigotimes\limits_{j\in\lfloor n-1,0\rfloor} E_j \end{array}$$

olmak üzere yüz ve dejenere morfizmleri sırasıyla

$$d_k((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (f_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor} = \begin{cases} d_k(e_{i+1}) & i \in \lfloor n-2,k\rfloor \\ d_k(e_k)+e_{k-1} & i = k-1 \\ e_i & i\in\lfloor k-2,0\rfloor \end{cases}$$

ve

$$s_k((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (h_i)_{i\in\lfloor n,0\rfloor} = \begin{cases} s_k(e_{i-1}) & i \in \lfloor n,k+1\rfloor \\ 0 & i = k \\ e_i & i\in\lfloor k-1,0\rfloor \end{cases}$$

biçimindedir. Yani

$$\begin{tikzcd} \overline{W}\mathbf{E} := \cdots E_1\otimes E_0 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & E_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=50, "s_1"'] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & * \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

olarak ifade edilebilir. Örneğin; $n=2$ için $e_0\in E_1$, $e_1\in E_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_0(e_1\otimes e_0) &= f_0 = d_0(e_1) \\ d_1(e_1\otimes e_0) &= f_0 = d_1(e_1)+e_0 \\ d_2(e_1\otimes e_0) &= f_0 = e_0 \end{aligned}$$

ve $n=1$ için $e_0\in E_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s_0(e_0) &= h_1\otimes h_0 = s_0(e_0)\otimes 0 \\ s_1(e_0) &= h_1\otimes h_0 = 0\otimes e_0 \end{aligned}$$

olur.

## 4.3 $\overline{W}$ ve $DiagN$ Funktorlarının Simplisel Denkliği

Bu kısımda $\overline{W}$ ve $DiagN$ funktorlarının simplisel denkliği ifade edilerek bir simplisel cebirin (ko) homoloji modülü tanımı elde edilecektir.

**Önerme 2.** *(a)* **E** *bir simplisel $R$-cebir olmak üzere $n\in\mathbb{N}_0$ için*

$$(D_{\mathbf{E}})_n = \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor} : E_n^{\otimes n} \longrightarrow \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} E_i$$

*biçiminde tanımlı $D : DiagN \longrightarrow \overline{W}$ doğal transformasyonu vardır.*
*(b) $D$ doğal transformasyonu bir geriçekilmedir. Yani $n\in\mathbb{N}_0$ için*

$$y_i := \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_j) \in E_n$$

*olmak üzere*

$$(S_{\mathbf{E}})_n : \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} E_i \longrightarrow E_n^{\otimes n}, (e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \longmapsto (y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}$$

*biçiminde tanımlı $S : \overline{W} \longrightarrow DiagN$ doğal transformasyonu vardır.*

**İspat 4.** *(a) Öncelikle* $\mathbf{E}$ *simplisel* $R$*-cebiri için* $(D_{\mathbf{E}})_n$ *morfizmlerinin yüz ve dejenere morfizmleriyle uyumluluğunu gösterelim:* $k \in [0,n]$, $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned}
d_k(D_{\mathbf{E}})_{n-1} &= \left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} d_k \otimes (d_k \otimes d_k)\mu \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-2,0\rfloor} d_k\right)\left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor} d_{\lfloor n-1,i+1\rfloor}\right)\\
&= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} d_k d_{\lfloor n-1,i\rfloor} \otimes (d_k \otimes d_k)\mu d_{\lfloor n-1,k\rfloor} \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-2,0\rfloor} d_k d_{\lfloor n-1,i+1\rfloor}\\
&= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} d_k d_{\lfloor n-1,i\rfloor} \otimes (d_k \otimes d_k) d_{\lfloor n-1,k\rfloor}\mu \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-2,0\rfloor} d_k d_{\lfloor n-1,i+1\rfloor}\\
&= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor} d_k \otimes (d_{\lfloor n,k+1\rfloor} d_k \otimes d_{\lfloor n,k\rfloor})\mu \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-2,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\\
&= \left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\right)\left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} d_k \otimes (d_k \otimes id)\mu \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-2,0\rfloor} id\right)\\
&= (D_{\mathbf{E}})_n d_k
\end{aligned}$$

*ve* $k \in [0,n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ *için*

$$\begin{aligned}
s_k(D_{\mathbf{E}})_{n+1} &= \left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k\rfloor} s_k \otimes \eta \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-1,0\rfloor} s_k\right)\left(\bigotimes_{i\in\lfloor n,0\rfloor} d_{\lfloor n+1,i+1\rfloor}\right)\\
&= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k\rfloor} s_k d_{\lfloor n+1,i+2\rfloor} \otimes \eta \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-1,0\rfloor} s_k d_{\lfloor n+1,i+1\rfloor}\\
&= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor} s_k \otimes \eta \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\\
&= \left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\right)\left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,k\rfloor} s_k \otimes \eta \otimes \bigotimes_{i\in\lfloor k-1,0\rfloor} id\right)\\
&= (D_{\mathbf{E}})_n s_k
\end{aligned}$$

*olup*

$$DiagN\mathbf{E} \xrightarrow{D_{\mathbf{E}}} \overline{W}\mathbf{E}$$

*bir simplisel morfizmdir. Burada,* $(D_{\mathbf{E}})_n = \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}$ *morfizmlerinin modül homomorfizmi olduğu açıktır.*

$$\begin{tikzcd}
Diag_{n+1}N\mathbf{E} \arrow[d, "(D_{\mathbf{E}})_{n+1}"'] & Diag_nN\mathbf{E} \arrow[l, "s_k"'] \arrow[r, "d_k"] \arrow[d, "(D_{\mathbf{E}})_n"] & Diag_{n-1}N\mathbf{E} \arrow[d, "(D_{\mathbf{E}})_{n-1}"] \\
\overline{W}_{n+1}\mathbf{E} & \overline{W}_n\mathbf{E} \arrow[l, "s_k"] \arrow[r, "d_k"'] & \overline{W}_{n-1}\mathbf{E}
\end{tikzcd}$$

*Diğer taraftan* **E** *ve* **F** *birer simplisel $R$-cebir ve $\varphi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ bir simplisel $R$-cebir homomorfizmi olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}_0$ için*

$$\begin{aligned}(D_{\mathbf{E}})_n(\overline{W}_n\varphi) &= \left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\right)\left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \varphi_i\right)\\ &= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\varphi_i\\ &= \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \varphi_n d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\\ &= \varphi_n^{\otimes n}\left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\right)\\ &= (Diag_n N\varphi)(D_{\mathbf{F}})_n\end{aligned}$$

*elde edilir. Yani*

$$\begin{tikzcd} DiagN\mathbf{E} \arrow[r, "D_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "DiagN\varphi"'] & \overline{W}\mathbf{E} \arrow[d, "\overline{W}\varphi"] \\ DiagN\mathbf{F} \arrow[r, "D_{\mathbf{F}}"'] & \overline{W}\mathbf{F} \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli olup, $(D_{\mathbf{E}})_{\mathbf{E}\in Ob\mathbf{sA}\lg_R}$;* **E** *de doğaldır dolayısıyla $DiagN \xrightarrow{D} \overline{W}$ bir doğal transformasyondur.*

*(b) Şimdi de* **E** *simplisel $R$-cebiri için $(S_{\mathbf{E}})_n$ morfizmlerinin yüz ve dejenere morfizmleriyle uyumluluğunu gösterelim:*

*$n \in \mathbb{N}$ ve $k \in [0, n]$ olmak üzere $(e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in \bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} E_i$ için*

$$d_k(S_{\mathbf{E}})_{n-1}((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (S_{\mathbf{E}})_{n-1}((f_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor}) = (x_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor}$$

*olup burada $i \in \lfloor n-2, 0\rfloor$ için*

$$f_i := \begin{cases} d_k(e_{i+1}) & i \in \lfloor n-2, k\rfloor \text{ için} \\ d_k(e_k) + e_{k-1} & i = k-1 \text{ için} \\ e_i & i \in \lfloor k-2, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*ve*

$$x_i := \sum_{j\in\lceil i+1,n-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-x_j) + \sum_{j\in\lfloor n-2,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-2\rceil}(f_j)$$

*biçimindedir.*

*Diğer taraftan*

$$(S_{\mathbf{E}})_n d_k((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = d_k((y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (x'_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor}$$

*olup burada $i \in \lfloor n-1, 0\rfloor$ için*

$$y_i := \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_j)$$

*ve*

$$x'_i := \begin{cases} d_k(y_{i+1}) & i \in \lfloor n-2, k \rfloor \textit{ için} \\ d_k(y_k) + d_k(y_{k-1}) & i = k-1 \textit{ için} \\ d_k(y_i) & i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor \textit{ için} \end{cases}$$

*dir. Şimdi* $i \in \lfloor n-2, 0 \rfloor$ *için* $x_i = x'_i$ *olduğunu gösterelim: (Bunun için* $i$ *üzerinden tümevarım metodu kullanılacaktır)*

*(A)* $i \in \lfloor n-2, k \rfloor$ *için* $x_i = d_k(y_{i+1})$ *dir. (Bknz Ek A)*

*(B)* $i = k-1$ *için* $x_i = d_k(y_k) + d_k(y_{k-1})$ *dir. (Bknz Ek A)*

*(C) Son olarak,* $i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor$ *için* $x_i = d_k(y_i)$ *dir. (Bknz Ek A)*

*Dolayısıyla* $i \in \lfloor n-2, 0 \rfloor$ *için*

$$x_i = \left\{ \begin{array}{ll} d_k(y_{i+1}) & i \in \lfloor n-2, k \rfloor \textit{ için} \\ d_k(y_k) + d_k(y_{k-1}) & i = k-1 \textit{ için} \\ d_k(y_i) & i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor \textit{ için} \end{array} \right\} = x'_i$$

*olup*

$$d_k(S_{\mathbf{E}})_{n-1}(e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor} = (S_{\mathbf{E}})_n d_k(e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}$$

*biçimindedir. Böylece* $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ *için* $d_k(S_{\mathbf{E}})_{n-1} = (S_{\mathbf{E}})_n d_k$ *dır.*

*Şimdi de dejenere morfizmleri için bakalım:* $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in [0, n]$ *ve* $(e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor} \in \bigotimes_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor} E_i$ *olmak üzere*

$$s_k(S_{\mathbf{E}})_{n+1}((e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}) = (S_{\mathbf{E}})_{n+1}((h_i)_{i \in \lfloor n, 0 \rfloor}) = (z_i)_{i \in \lfloor n, 0 \rfloor},$$

*olup burada* $i \in \lfloor n, 0 \rfloor$ *için*

$$h_i := \begin{cases} s_k(e_{i-1}) & i \in \lfloor n, k+1 \rfloor \textit{ için} \\ 0 & i = k \textit{ için} \\ e_i & i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor \textit{ için} \end{cases}$$

*ve*

$$z_i := \sum_{j \in \lceil i+1, n \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-z_j) + \sum_{j \in \lfloor n, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n \rceil}(h_j)$$

*dir. Diğer taraftan*

$$(S_{\mathbf{E}})_n s_k((e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}) = s_k((y_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}) = (z'_i)_{i \in \lfloor n, 0 \rfloor}$$

*olup burada* $i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor$ *için*

$$y_i := \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(e_j)$$

*ve*

$$z'_i := \begin{cases} s_k(y_{i-1}) & i \in \lfloor n, k+1 \rfloor \textit{ için} \\ 0 & i = k \textit{ için} \\ s_k(y_i) & i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor \textit{ için} \end{cases}$$

*dir. Dolayısıyla $i \in \lfloor n, 0 \rfloor$ için $z_i = z_i'$ olduğunu göstermeliyiz. (Bunun için $i$ üzerinden tümevarım metodu kullanılacaktır)*
*(A) $i \in \lfloor n, k+1 \rfloor$ için $z_i = s_k(y_{i-1})$ dir. (Bknz Ek B)*
*(B) $i = k$ için $z_i = 0$ dır. (Bknz Ek B)*
*(C) Son olarak, $i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor$ için $z_i = s_k(y_i)$ dir. (Bknz Ek B)*

*Böylece $i \in \lfloor n, 0 \rfloor$ için*

$$z_i = \left\{ \begin{array}{ll} s_k(y_{i-1}) & i \in \lfloor n, k+1 \rfloor \text{ için} \\ 0 & i = k \text{ için} \\ s_k(y_i) & i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor \text{ için} \end{array} \right\} = z_i'$$

*olup*

$$s_k(S_{\mathbf{E}})_{n+1}((e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}) = (S_{\mathbf{E}})_n s_k((e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}).$$

*elde edilir. Dolayısıyla $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için $s_k(S_{\mathbf{E}})_{n+1} = (S_{\mathbf{E}})_n s_k$ dir.*

*Sonuç olarak, $(S_{\mathbf{E}})_n$ modül homomorfizmleri*

$$\overline{W}\mathbf{E} \xrightarrow{S_{\mathbf{E}}} DiagN\mathbf{E}$$

*biçiminde bir simplisel modül homomorfizmi sağlar. Diğer taraftan **E** ve **F** birer simplisel $R$-cebir ve $\varphi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ bir simplisel $R$-cebir homomorfizmi olsun. Bu durumda $(e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor} \in \overline{W}_n\mathbf{E}$ elemanlarının $(S_{\mathbf{E}})_n$ morfizmi altındaki görüntüsü $(y_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}$ ve $(\varphi_i(e_i))_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor} = (\overline{W}_n\varphi)((e_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}) \in \overline{W}_n\mathbf{F}$ elemanlarının $(S_{\mathbf{F}})_n$ morfizmi altındaki görüntüsü $(z_i)_{i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor}$ olmak üzere $i \in \lfloor n-1, 0 \rfloor$ üzerinden tümevarım gereği*

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-z_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(\varphi_j(e_j)) \\ &= \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} \varphi_n d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} \varphi_j d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(e_j) \\ &= \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil} \varphi_n(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil} \varphi_n(e_j) \\ &= \varphi_n \left( \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(e_j) \right) \\ &= \varphi_n(y_i) \end{aligned}$$

*elde edilir. Böylece*

$$\begin{aligned}(\overline{W}_n\varphi)(S_{\mathbf{F}})_n((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) &= (S_F)_n(\varphi_i(e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\\ &= (z_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}\\ &= (\varphi_n(y_i))_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}\\ &= Diag_nN\varphi((y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\\ &= (S_{\mathbf{E}})_n(Diag_nN\varphi)((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\end{aligned}$$

*elde edilir. Yani*

$$\begin{tikzcd} \overline{W}\mathbf{E} \arrow[r, "S_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "\overline{W}\varphi"'] & DiagN\mathbf{E} \arrow[d, "DiagN\varphi"] \\ \overline{W}\mathbf{F} \arrow[r, "S_{\mathbf{F}}"] & DiagN\mathbf{F} \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli olup* $(\overline{W}\mathbf{E})_{\mathbf{E}\in Obs\boldsymbol{Alg}_R}$; $\mathbf{E}$ *de doğaldır dolayısıyla* $S:\overline{W}\longrightarrow DiagN$ *bir doğal transformasyondur.*

*Son olarak,* $n\in\mathbb{N}_0$ *için*

$$(S_{\mathbf{E}})_n(D_{\mathbf{E}})_n = id_{\overline{W}_nE}$$

*olduğunu göstermeliyiz.*

$(y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}$; $(e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}\in\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}E_i$ *elemanının* $(S_{\mathbf{E}})_n$ *altındaki görüntüsü olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}(S_{\mathbf{E}})_n(D_{\mathbf{E}})_n((e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) &= (D_{\mathbf{E}})_n((y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\\ &= \left(\bigotimes_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\right)((y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\\ &= (d_{\lfloor n,i+1\rfloor}(y_i))_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}\end{aligned}$$

*olup* $i\in\lfloor n-1,0\rfloor$ *üzerinde tümevarım gereğince*

$$\begin{aligned}d_{\lfloor n,i+1\rfloor}(y_i) &= d_{\lfloor n,i+1\rfloor}\left(\sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j)+\sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_j)\right)\\ &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}d_{\lfloor n,i+1\rfloor}(-y_j)+\sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,n-1\rceil}d_{\lfloor n,i+1\rfloor}(e_j)\\ &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor n,i+1\rfloor}(-y_j)+\sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}(e_j)\\ &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}(-e_j)+\sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}(e_j)\\ &= e_i\end{aligned}$$

*elde edilir. Yani $n \in \mathbb{N}_0$ için $(S_{\mathbf{E}})_n(D_{\mathbf{E}})_n = id_{\overline{W}_n E}$ dir.*

**Teorem 3.** $\mathbf{E}$ *bir simplisel $R$-cebir olsun. $\overline{W}\mathbf{E}$, $DiagN\mathbf{E}$ nin bir güçlü simplisel deformasyon geriçekimidir.*

**İspat 5.** *Bir önceki önermedeki $\overline{W} \xrightarrow{S} DiagN$ funktoru verilsin. $D_{\mathbf{E}}S_{\mathbf{E}} \sim id_{DiagN\mathbf{E}}$ olduğunu $S_{\mathbf{E}}$ üzerinde sabit bir simplisel homotopi tanımlayarak göstereceğiz. Bu simplisel homotopi $H : D_{\mathbf{E}}S_{\mathbf{E}} \longrightarrow id_{DiagN\mathbf{E}}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}_0$ ve $k \in [0, n+1]$ için*

$$H_n : Diag_nN\mathbf{E} \times \Delta^1_n \longrightarrow Diag_nN\mathbf{E},\ ((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-k}) \longmapsto (y_i^{(n+1-k)})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}$$

*ve*

$$y_i^{(n+1-k)} := \begin{cases} e_{n,i} & i \in \lfloor n-1, k-1\rfloor \cap \mathbb{N}_0 \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1,k-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j^{(n+1-k)}) + \sum\limits_{j\in\lfloor k-2,i\rfloor} d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-2\rceil}(e_{n,j}) & i \in \lfloor k-2, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*biçimindedir. İşlemlerde karışıklık olmaması adına $k \in [0, n]$ için $\widetilde{y_i} := y_i^{(n+1-k)}$ biçiminde notasyon edilecektir.*

*Öncelikle $H_n$ morfizmlerinin yüz ve dejenere morfizmleriyle uyumluluğunu gösterelim: $k \in [0, n]$, $l \in [0, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $(e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in Diag_nNE$ için*

$$\begin{aligned} d_kH_{n-1}((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-l}) &= H_{n-1}(d_k(e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, d_k\tau^{n+1-l}) \\ &= H_{n-1}((f_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor}, \delta^k\tau^{n+1-l}) \\ &= \begin{cases} H_{n-1}((f_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor}, \tau^{n-l}) & k \geq l \text{ için} \\ H_{n-1}((f_i)_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor}, \tau^{n+1-l}) & k < l \text{ için} \end{cases} \\ &= (\widetilde{x_i})_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor} \end{aligned}$$

*olup burada $i \in \lfloor n-2, 0\rfloor$ için*

$$f_i := \begin{cases} d_k(e_{n,i+1}) & i \in \lfloor n-2, k\rfloor \text{ için} \\ d_k(e_{n,k}) + d_k(e_{n,k-1}) & i = k-1 \text{ için} \\ d_k(e_{n,i}) & i \in \lfloor k-2, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*ve $i \in \lfloor n-2, 0\rfloor$ için*

$$\widetilde{x_i} := \begin{cases} \left.\begin{cases} f_i & i \in \lfloor n-2, l-1\rfloor \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum\limits_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(f_j) & i \in \lfloor l-2, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}\right\} k \geq l \\ \left.\begin{cases} f_i & i \in \lfloor n-2, l-2\rfloor \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1,l-3\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum\limits_{j\in\lfloor l-3,i\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) & i \in \lfloor l-3, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}\right\} k < l \end{cases}$$

*biçimindedir.*

*Diğer taraftan,*

$$\begin{aligned} H_n d_k((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-l}) &= d_k((\widetilde{y_i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) \\ &= (\widetilde{x'_i})_{i\in\lfloor n-2,0\rfloor} \end{aligned}$$

*olup burada* $i \in \lfloor n-1, 0\rfloor$ *için*

$$\widetilde{y_i} := \begin{cases} e_{n,i} & i \in \lfloor n-1, l-1\rfloor \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum\limits_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j}) & i \in \lfloor l-2, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*ve* $i \in \lfloor n-2, 0\rfloor$ *için*

$$\widetilde{x'_i} := \begin{cases} d_k(\widetilde{y_{i+1}}) & i \in \lfloor n-2, k\rfloor \text{ için} \\ d_k(\widetilde{y_k}) + d_k(\widetilde{y_{k-1}}) & i = k-1 \text{ için} \\ d_k(\widetilde{y_i}) & i \in \lfloor k-2, 0\rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*biçimindedir.*
*Dolayısıyla* $i \in \lfloor n-2, 0\rfloor$ *için* $\widetilde{x_i} = \widetilde{x'_i}$ *olduğunu göstermeliyiz.*
*(i)* $k \in \lfloor n, l\rfloor$ *olsun.* (*Yani* $k \geq l$ )
*(A)* $i \in \lfloor n-2, k\rfloor$ *için*

$$\widetilde{x_i} = f_i = d_k(e_{n,i+1}) = d_k(\widetilde{y_{i+1}}) = \widetilde{x'_i}$$

*dir.*
*(B)* $i = k-1$ *için*

$$\begin{aligned} \widetilde{x_i} &= \widetilde{x_{k-1}} = f_{k-1} = d_k(e_{n,k}) + d_k(e_{n,k-1}) \\ &= d_k(\widetilde{y_k}) + d_k(\widetilde{y_{k-1}}) \\ &= \widetilde{x'_{k-1}} = \widetilde{x'_i} \end{aligned}$$

*dir.*
*(C)* $i \in \lfloor k-2, l-1\rfloor$ *için*

$$\widetilde{x_i} = f_i = d_k(e_{n,i}) = d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}$$

*dir.*
*(D) Son olarak,* $i \in \lfloor l-2, 0\rfloor$ *için* $\widetilde{x_i} = d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}$ *dir. (Bknz Ek C)*
*(ii)* $k = l-1$ *olsun.* (*Yani,* $k < l$)
*(A)* $i \in \lfloor n-2, k\rfloor$ *için*

$$\widetilde{x_i} = f_i = d_k(e_{n,i+1}) = d_k(\widetilde{y_{i+1}}) = \widetilde{x'_i}$$

*dir.*

*(B)* $i = k-1$ *için*

$$\begin{aligned}\widetilde{x_i} &= \widetilde{x_{k-1}} = f_{k-1} = d_k(e_{n,k}) + d_k(e_{n,k-1}) \\ &= d_k(\widetilde{y_k}) + d_k(\widetilde{y_{k-1}}) \\ &= \widetilde{x'_{k-1}} = \widetilde{x'_i}\end{aligned}$$

*dir.*

*(C)* $i \in \lfloor k-2, 0\rfloor$ *için* $\widetilde{x_i} = d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}$ *dir. (Bknz Ek D)*

*(iii) Son olarak* $k \in \lfloor l-2, 0\rfloor$ *olsun*. (*Yani,* $k < l$)

*(A)* $i \in \lfloor n-2, l-2\rfloor$ *için*

$$\widetilde{x_i} = f_i = d_k(e_{n,i+1}) = d_k(\widetilde{y_{i+1}}) = \widetilde{x'_i}$$

*dir.*

*(B)* $i \in \lfloor l-3, k\rfloor$ *için* $\widetilde{x_i} = d_k(\widetilde{y_{i+1}}) = \widetilde{x'_i}$ *dir. (Bknz Ek E)*

*(C)* $i = k-1$ *için* $\widetilde{x_i} = d_k(\widetilde{y_k}) + d_k(\widetilde{y_{k-1}}) = \widetilde{x'_i}$ *dir. (Bknz Ek E)*

*(D)* $i \in \lfloor k-2, 0\rfloor$ *için* $\widetilde{x_i} = d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}$ *dir. (Bknz Ek E)*

*Şimdi de dejenere morfizmleri ile uyumluluğa bakalım:* $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in [0, n]$, $l \in [0, n+1]$, *ve* $(e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in Diag_n NE$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}s_k H_{n+1}((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-l}) &= H_{n+1}(s_k((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-l} s_k)) \\ &= H_{n+1}((h_i)_{i\in\lfloor n,0\rfloor}, \sigma^k \tau^{n+1-l}) \\ &= \left\{\begin{array}{ll} H_{n+1}((h_i)_{i\in\lfloor n,0\rfloor}, \tau^{n+2-l}) & k \geq l \text{ için} \\ H_{n+1}((h_i)_{i\in\lfloor n,0\rfloor}, \tau^{n+1-l}) & k < l \text{ için}\end{array}\right\} \\ &= (\widetilde{z_i})_{i\in\lfloor n,0\rfloor}\end{aligned}$$

*olup burada*

$$h_i := \begin{cases} s_k(e_{n,i-1}) & i \in \lfloor n, k+1\rfloor \text{ için} \\ 0 & i = k \text{ için} \\ s_k(e_{n,i}) & i \in \lfloor k-1, 0\rfloor \text{ için}\end{cases}$$

*ve*

$$\widetilde{z_i} := \begin{cases} \left.\begin{cases} h_i & i \in \lfloor n, l-1\rfloor \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1, l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z_j}) + \sum\limits_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(h_j) & i \in \lfloor l-2, 0\rfloor \text{ için}\end{cases}\right\} k \geq l \text{ ise} \\ \left.\begin{cases} h_i & i \in \lfloor n-2, l-2\rfloor \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1, l-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z_j}) + \sum\limits_{j\in\lfloor l-1,i\rfloor} d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(h_j) & i \in \lfloor l-1, 0\rfloor \text{ için}\end{cases}\right\} k < l \text{ ise}\end{cases}$$

*dir. Diğer taraftan*

$$H_n s_k((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-l}) = s_k((\widetilde{y_i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (\widetilde{z'_i})_{i\in\lfloor n,0\rfloor}$$

*olup burada*

$$\widetilde{y_i} := \begin{cases} e_{n,i} & i \in \lfloor n-1, l-1 \rfloor \text{ için} \\ \sum\limits_{j \in \lceil i+1, l-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum\limits_{j \in \lfloor l-2, i \rfloor} d_{\lfloor l-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, l-2 \rceil}(e_{n,j}) & i \in \lfloor l-2, 0 \rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*ve*

$$\widetilde{z'_i} := \begin{cases} s_k(\widetilde{y_{i-1}}) & i \in \lfloor n, k+1 \rfloor \text{ için} \\ 0 & i = k \text{ için} \\ s_k(\widetilde{y_i}) & i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor \text{ için} \end{cases}$$

*biçimindedir. Dolayısıyla* $i \in \lfloor n, 0 \rfloor$ *için* $\widetilde{z_i} = \widetilde{z'_i}$ *olduğunu göstermeliyiz.*
*(i)* $k \in \lfloor n, l \rfloor$ *olsun.* (*Yani,* $k \geq l$)
*(A)* $i \in \lfloor n, k+1 \rfloor$ *için*

$$\widetilde{z_i} = h_i = s_k(e_{n,i-1}) = s_k(\widetilde{y_{i-1}}) = \widetilde{z'_i}$$

*dir.*
*(B)* $i = k$ *için*

$$\widetilde{z_i} = \widetilde{z_k} = h_k = 0 = \widetilde{z'_k} = \widetilde{z'_i}$$

*dir.*
*(C)* $i \in \lfloor k-1, l-1 \rfloor$ *için*

$$\widetilde{z_i} = h_i = s_k(e_{n,i}) = s_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{z'_i}$$

*dir.*
*(D)* $i \in \lfloor l-2, 0 \rfloor$ *için* $\widetilde{z_i} = s_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{z'_i}$ *dir. (Bknz Ek F)*
*(ii)* $k = l-1$ *olsun.* (*Yani,* $k < l$)
*(A)* $i \in \lfloor n, k+1 \rfloor$ *için*

$$\widetilde{z_i} = h_i = s_k(e_{n,i-1}) = s_k(\widetilde{y_{i-1}}) = \widetilde{z'_i}$$

*dir.*
*(B)* $i = k$ *için*

$$\widetilde{z_i} = \widetilde{z_k} = h_k = 0 = \widetilde{z'_k} = \widetilde{z'_i}$$

*dir.*
*(C)* $i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor$ *için* $\widetilde{z_i} = s_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{z'_i}$ *dir. (Bknz Ek G)*
*(iii) Son olarak* $k \in \lfloor l-2, 0 \rfloor$ *olsun.* (*Yani,* $k < l$)
*(A)* $i \in \lfloor n, l \rfloor$ *için*

$$\widetilde{z_i} = h_i = s_k(e_{n,i-1}) = s_k(\widetilde{y_{i-1}}) = \widetilde{z'_i}$$

*dir.*
*(B)* $i \in \lfloor l-1, k+1 \rfloor$ *için* $\widetilde{z_i} = s_k(\widetilde{y_{i-1}}) = \widetilde{z'_i}$ *dir. (Bknz Ek H)*
*(C)* $i = k$ *için* $\widetilde{z_i} = s_k(-\widetilde{y_k}) + s_k(\widetilde{y_k}) = 0 = \widetilde{z'_i}$ *dir. (Bknz Ek H)*

*(D)* $i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor$ *için* $\widetilde{z}_i = s_k(\widetilde{y}_i) = \widetilde{z}_i'$ *dir. (Bknz Ek H)*

*Böylece*

$$H : DiagN\mathbf{E} \times \Delta^1 \longrightarrow DiagN\mathbf{E}$$

*biçiminde bir simplisel morfizm elde edilir. Diğer taraftan* $H$ *nın* $D_{\mathbf{E}}S_{\mathbf{E}}$ *den* $id_{DiagN\mathbf{E}}$ *ya bir simplisel homotopi olması için* $ins_0 H = D_{\mathbf{E}}S_{\mathbf{E}}$ *ve* $ins_1 H = id_{DiagN\mathbf{E}}$ *olduğunu göstermeliyiz.* $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in [0, n+1]$ *ve* $(e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in Diag_n N\mathbf{E}$ *için*

$$\begin{aligned}(D_{\mathbf{E}})_n(S_{\mathbf{E}})_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) &= (S_{\mathbf{E}})_n(d_{\lfloor n,i+1\rfloor}(e_{n,i}))_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \\ &= (y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}\end{aligned}$$

*olup burada* $i \in \lfloor n-1, 0\rfloor$ *için*

$$\begin{aligned} y_i \; : &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor n,j+1\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_{n,j}) \\ &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_{n,j})\end{aligned}$$

*dır. Ayrıca*

$$H_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-k}) = ((y_i^{(n+1-k)})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})$$

*olup*

$$y_i^{(n+1-k)} := \begin{cases} e_{n,i} & i \in \lfloor n-1, k-1\rfloor \cap \mathbb{N}_0 \text{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1,k-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j^{(n+1-k)}) + \sum\limits_{j\in\lfloor k-2,i\rfloor} d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-2\rceil}(e_{n,j}) & i \in \lfloor k-2, 0\rfloor \text{ için}\end{cases}$$

*biçimindedir.* $i \in \lfloor n-1, 0\rfloor$ *üzerindeki tümevarım gereği*

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_{n,j}) \\ &= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j^{(0)}) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor n,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_{n,j}) \\ &= y_i^{(0)}\end{aligned}$$

*olup*

$$\begin{aligned}(ins_0)_n H_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) &= H_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^0) \\ &= ((y_i^{(0)}))_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \\ &= (y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \\ &= (D_E)_n(S_E)_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}(ins_1)_n H_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}) &= H_n((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1}) \\ &= (y_i^{(n+1)})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} = (e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \\ &= id_{DiagNE}((e_{n,i})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor})\end{aligned}$$

*elde edilir. Son olarak,* $\overline{W}\mathbf{E}$ *nin* $DiagN\mathbf{E}$ *nin güçlü simplisel deformasyon geriçekimi olması için* $H$ *nın* $S_{\mathbf{E}}$ *üzerinde sabit olması gerekir.* $(e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in \overline{W_n}\mathbf{E}$ *için*

$$\begin{aligned} H_n((S_{\mathbf{E}})_n(e_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-k}) &= H_n((y_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \tau^{n+1-k}) \\ &= (y_i^{(n+1-k)})_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, \end{aligned}$$

*olup burada*

$$y_i := \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_j)$$

*ve*

$$y_i^{(n+1-k)} := \begin{cases} y_i & i\in\lfloor n-1,k-1\rfloor \cap \mathbb{N}_0 \textit{ için} \\ \sum\limits_{j\in\lceil i+1,k-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j^{(n+1-k)}) + \sum\limits_{j\in\lfloor k-2,i\rfloor} d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-2\rceil}(y_j) & i\in\lfloor k-2,0\rfloor \textit{ için} \end{cases}$$

*biçimindedir. Şimdi* $i\in\lfloor n-1,0\rfloor$, $k\in[0,n+1]$ *için* $y_i^{(n+1-k)} = y_i$ *olduğunu göstermeliyiz.* $k\in\{n+1,0\}$ *için* $H$ *simplisel homotopi ve* $S_{\mathbf{E}}D_{\mathbf{E}}S_{\mathbf{E}} = S_{\mathbf{E}}$ *olduğundan bu durum sağlanır. Dolayısıyla* $k\in\lfloor n,1\rfloor$ *olmak üzere* $i\in\lfloor k-2,0\rfloor$ *için* $y_i^{(n+1-k)} = y_i$ *olduğunu göstermeliyiz. (Bknz Ek I)*

Burada $N$ ve $DiagN$ funktorları yardımıyla şu tanımlamalar yapılabilir:

**E** bir simplisel $R$-cebir olsun. Bu durumda $B^{(2)}\mathbf{E} := N\mathbf{E}$ bisimplisel $R$-modülüne $E$ nin **bisimplisel** $R$**-modül sınıflandırması** denir. $B\mathbf{E} := DiagN\mathbf{E}$ simplisel $R$-modülü de $E$ nin **simplisel** $R$**-modül sınıflandırması** olarak adlandırırlır.

**E** bir simplisel $R$-cebir, $k$ değişmeli halka ve $M$ bir $k$-modül olsun. **E** nin $k$ üzerindeki $M$ değişkenli (coefficients) ile $n$. homoloji modülü, **E** nin simplisel modül sınıflandırmasının $n$. homolojisidir. Yani

$$H_n(\mathbf{E}, M; k) := H_n(B\mathbf{E}, M; k)$$

biçimindedir. Benzer şekilde kohomoloji ise

$$H^n(\mathbf{E}, M; k) := H^n(B\mathbf{E}, M; k)$$

biçiminde ifade edilir. Kısaca,

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{E}; k) &= H_n(\mathbf{E}, k; k) \\ H_n(\mathbf{E}, M) &= H_n(\mathbf{E}, M, \mathbb{Z}) \\ H_n(\mathbf{E}) &= H_n(\mathbf{E}, \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H^n(\mathbf{E};k) &= H^n(\mathbf{E},k;k) \\ H^n(\mathbf{E},M) &= H^n(\mathbf{E},M,\mathbb{Z}) \\ H^n(\mathbf{E}) &= H^n(\mathbf{E},\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

dir.

**Sonuç 1.** **E** *bir simplisel $R$-cebir, $k$ değişmeli halka ve $M$ bir $k$-modül olsun. Bu durumda*

$$H_n(\mathbf{E},M;k) \cong H_n(\overline{W}\mathbf{E},M;k)$$

*ve*

$$H^n(\mathbf{E},M;k) \cong H^n(\overline{W}\mathbf{E},M;k)$$

*dır.*

**İspat 6.** $B\mathbf{E} = DiagN\mathbf{E} \cong \overline{W}\mathbf{E}$ *olduğundan*

$$H_n(\mathbf{E},M;k) = H_n(B\mathbf{E},M;k) = H_n(DiagN\mathbf{E},M;k) \cong H_n(\overline{W}\mathbf{E},M;k)$$

*dir. Benzer şekilde $H^n(\mathbf{E},M;k) \cong H^n(\overline{W}\mathbf{E},M;k)$ dir.*

# 5. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE KATEGORİKSEL $R$-CEBİRLER

## 5.1 Giriş

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J.H.L Whitehead tarafından [Whitehead, 1949] çalışmasında 2-tipten homotopilere bir cebirsel model olarak ifade edilmiştir. Çaprazlanmış modüllerin değişmeli cebirlere uygulaması ise T.Porter tarafından [Porter, 1986] çalışmasında ifade edilerek bu yapının Koszul komplekslerle ilişkisi gösterilmiştir. Bunun dışında [Gerstenhaber, 1964, Lichtenbaum ve Schlessinger, 1967] çalışmalarında da aynı kavram farklı isimlerle ifade edilmiştir.

Çaprazlanmış modüller, ideal ve modüllerin genelleştirmesidir. Hatta, herhangi bir cebir de bir çaprazlanmış modül olarak düşünülebilir. Dolayısıyla cebirler üzerinde tanımlanmış tüm kavramların çaprazlanmış modüllerde incelenerek genelleştirilmesi mümkündür. Bu bölümde, değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak bazı örneklerini inceleyeceğiz. Ayrıca kategoriksel $R$-cebir kavramını ifade ederek kategoriksel $R$-cebirler kategorisinin ($\mathbf{cAlg}_R$) çaprazlanmış modüller kategorisi (**XMod)** ile denkliği gösterilecektir.

Aksi belirtilmedikçe bu bölümde $K$ değişmeli halka ve $C$ ile $R$ birimli $(1_R \neq 0$ ve $1_C \neq 0)$ değişmeli cebirlerdir.

## 5.2 Çaprazlanmış Modül Kavramı

Bu kısımda, $K$ sıfırdan farklı birimi olan değişmeli halka olmak üzere, T.Porter tarafından [Porter, 1986] da verilen $K$-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ile iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramlarını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim.

$C$ ve $R$; $K$-cebirler olsun.

$$\begin{array}{rcl} f : R \times C & \longrightarrow & C \\ (r, c) & \longmapsto & f(r, c) = r \cdot c \end{array}$$

fonksiyonu her $k \in K$, $c, c' \in C$, $r, r' \in R$ için,

$$\begin{array}{ll} (1) & k(r \cdot c) = (kr) \cdot c = r \cdot (kc) \\ (2) & r \cdot (c + c') = r \cdot c + r \cdot c' \\ (3) & (r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c \\ (4) & r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c') \\ (5) & (rr') \cdot c = r \cdot (r' \cdot c) = r' \cdot (r \cdot c) \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa $f$ ye $R$ nin $C$ üzerinde **değişmeli cebir etkisi** denir.

$K$ bir halka, $R$; $K$-cebir ve $C$; $R$-cebir olsun.

$$\begin{array}{ccccc} R & \times & C & \longrightarrow & C \\ (r & , & c) & \longmapsto & r \cdot c \end{array}$$

değişmeli cebir etkisi ile birlikte

$$\mu : C \to R$$

cebir morfizmi

$$\begin{array}{lccc} \text{ÇM1)} & \mu(r \cdot c) & = & r\mu(c) \\ \text{ÇM2)} & \mu(c) \cdot c' & = & cc' \end{array}$$

şartlarını sağlıyorsa $\mu$'a (veya $(C, R, \mu)$ üçlüsüne ) **çaprazlanmış $R$-modül** denir. Burada ÇM2 ye de **Peiffer şartı** denir.

**NOT** : $\mu$ cebir homomorfizmi olduğundan ÇM1 aksiyomu ihmal edilebilir. Ancak gruplar üzerindeki tanımlamaya benzer durumla karşılaşılabileceği için verilmiştir. Çünkü gruplar üzerinde tanımlanan $(G_1, G_0, \mu)$ çaprazlanmış modülleri için bu şart $g_0 \in G_0$, $g_1 \in G_1$ olmak üzere $\mu(g_0 \cdot g_1) = g_0 \mu(g_1) g_0^{-1}$ biçimindedir.

**Örnekler:**

1) $R$ bir $K$-cebir ve $I$, $R$ nin ideali olsun.

$$\begin{array}{rl} \partial : & I \longrightarrow R \\ & a \longmapsto a \end{array}$$

içine (inclusion) dönüşümü

$$\begin{array}{ll} R \times I & \longrightarrow I \\ (r, a) & \longmapsto r \cdot a = ra \end{array}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Böylece herhangi bir ideal verildiğinde çaprazlanmış modül elde edilmektedir. Tersine herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde de bir ideal elde edilebilir. Çünkü $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış modül ise $\partial(C) \trianglelefteq R$ dir.

2) $M$, herhangi bir $R$-modül olsun.

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2) &\longmapsto m_1 m_2 = 0 \end{aligned}$$

çarpımı tanımlanırsa, $M$ bir $R$-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 : M &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto 0(x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi,

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modüldür. Böylece herhangi bir modül verildiğinde çaprazlanmış modül elde edilmektedir. Tersine herhangi bir çaprazlanmış modül verildiğinde de bir modül elde edilebilir. Çünkü $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış modül ise $Ker\partial$ bir $R/\partial(C)$-modüldür.

3) $K$ bir **k**-cebir ve her $k, k' \in K$ için

$$R = \{f_k | f_k : K \longrightarrow K \ f_k(k') = kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial : \quad K &\longrightarrow \quad R \\ k &\longmapsto \quad f_k \end{aligned}$$

cebir morfizmi

$$\begin{aligned} R \times K &\longrightarrow \quad K \\ (f_k, k') &\longmapsto \quad (f_k) \cdot k' = kk' \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

4) $L$ ve $M$ birer $R$-modül ve

$$\theta : \quad L \longrightarrow \quad M$$

$R$ modüllerin bir morfizmi olsun. $R \ltimes M$ yarı direkt çarpımı;

$$(r, m)(r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda $L$, her $l, l' \in L$ için

$$ll' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$\begin{aligned} R \ltimes M &\longrightarrow \quad R \\ (r, m) &\longmapsto \quad r \end{aligned}$$

şeklinde izdüşüm (projection) yoluyla bir $R \ltimes M$ modül yapısı verildiğinde

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\theta}: & L & \longrightarrow & R \ltimes M \\ & l & \longmapsto & (0, \theta(l)) \end{array}$$

fonksiyonu

$$\begin{array}{ccc} (R \ltimes M) \times L & \longrightarrow & L \\ ((r,m),l) & \longmapsto & rl \end{array}$$

etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış $R \ltimes M$-modül yapısı belirtir.

$\partial : C \to R$ , $\partial' : C' \to R'$ çaprazlanmış modülleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\phi"'] & R' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "(\phi,\theta)"] \arrow[d] & R' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

yani

$$\begin{tikzcd} (r,c) \arrow[r] \arrow[d] & (\phi(r), \theta(c)) \arrow[d] \\ (r \cdot c) \arrow[r] & \theta(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \theta(c) \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli olmak üzere $(\theta, \varphi)$ ikililerine **çaprazlanmış modül morfizmi** denir.

Objeleri çaprazlanmış modüller, morfizmleri de çaprazlanmış modül morfizmleri olan kategoriye **çaprazlanmış modüller kategorisi** denir. Bu kategori **XMod** ile gösterilir. Özel olarak $R = R'$ ve $\varphi$ birim dönüşüm alınırsa $\theta$ bir $R$-cebir morfizmi olup

$$\theta(r.c) = r\theta(c)$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\mu"'] & & C' \arrow[dl, "\mu'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\partial'\theta(c) = \partial(c)$$

olduğundan $\theta$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Dolayısıyla $R$ üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış $R$-modül olduğundan **XMod** kategorisinin bir alt kategorisi elde edilir. Ve bu kategori **XMod**$/R$ ile gösterilir.

## 5.3 Kategoriksel $R$-cebirler

**Tanım 3.** ***(a)*** *Bir* ***kategoriksel*** $R$***-cebir,***

*(i) Ob*$\mathcal{C}$ *ve* $Mor\mathcal{C}$ *birer R-cebirdir.*

*(ii) Ob*$\mathcal{C}$ *üzerinde tanımlı çarpım morfizmi* $\mu^{Ob\mathcal{C}}$ *ve* $Mor\mathcal{C}$ *üzerinde tanımlı çarpım morfizmi* $\mu^{Mor\mathcal{C}}$ *yardımıyla elde edilen bir* $\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\xrightarrow{\mu^{\mathcal{C}}}\mathcal{C}$ *funktoru vardır.*
*şartlarını sağlayan bir* $\mathcal{C}$ *(küçük) kategorisidir.*
***(b)*** $\mathcal{C}$ *ve* $\mathcal{D}$ *birer kategoriksel R-cebir olsun. Bir* ***kategoriksel*** $R$***-cebir homomorfizmi****, Ob*$\varphi$ *ve* $Mor\varphi$ *birer R-cebir homomorfizmi olmak üzere* $\mathcal{C}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{D}$ *funktorudur.*

Bu tanımda ifade edilen kategoriksel $R$-cebirlerin kategorisi $\mathbf{cAlg}_R$ ile gösterilir.

**Hatırlatma 4.** $\mathcal{C}$ *ve* $\mathcal{D}$ *kategoriksel R-cebirleri için* $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *kategoriksel R-cebir homomorfizmi genel olarak* $o \in$ *Ob*$\mathcal{C}$ *için* $o\varphi := o(Ob\varphi)$ *ve* $m \in Mor\mathcal{C}$ *için* $m\varphi := m(Mor\varphi)$ *ile gösterilir.*

**Önerme 3.** $\mathcal{C}$ *bir kategoriksel R-cebir olsun.*
***(a)*** $s^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C} \longrightarrow Ob\mathcal{C}$, $t^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C} \longrightarrow Ob\mathcal{C}$, $e^{\mathcal{C}} : Ob\mathcal{C} \longrightarrow Mor\mathcal{C}$ *ve* $c^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C} \longrightarrow Mor\mathcal{C}$ *sırasıyla kaynak (source), hedef (target), birim (identity) ve kompozisyon (composition) morfizmleri (R-modül homomorfizmleri) birer R-cebir homomorfizmidir.*
(**b**) *Ob*$\mathcal{C}$ *üzerindeki* $\eta^{Ob\mathcal{C}}$ *ve* $Mor\mathcal{C}$ *üzerindeki* $\eta^{Mor\mathcal{C}}$ *morfizmleri* ($R$*-modül homomorfizmleri*) $\mathcal{C}^{\otimes 0} \xrightarrow{\eta^{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$ *funktorunu verir. Burada* $\mathcal{C}^{\otimes 0}$ *tek objeli ve tek morfizmli bir küçük kategoridir.*

**İspat 7.** ***(a)*** *$\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}\xrightarrow{\mu^{\mathcal{C}}}\mathcal{C}$ bir funktor olduğundan,*

$$\begin{tikzcd}
Mor\mathcal{C}\otimes Mor\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "s^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}"] \arrow[r, shift right, "t^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}"'] \arrow[d, "Mor\mu^{\mathcal{C}}"'] & Ob\mathcal{C}\otimes Ob\mathcal{C} \arrow[l, bend left, "e^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}"] \arrow[d, "Ob\mu^{\mathcal{C}}"] \\
Mor\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "s^{\mathcal{C}}"] \arrow[r, shift right, "t^{\mathcal{C}}"'] & Ob\mathcal{C} \arrow[l, bend left, "e^{\mathcal{C}}"]
\end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli yani*

$$\begin{aligned}
(Mor\mu^{\mathcal{C}})s^{\mathcal{C}} &= s^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}(Ob\mu^{\mathcal{C}})\\
(Mor\mu^{\mathcal{C}})t^{\mathcal{C}} &= t^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}(Ob\mu^{\mathcal{C}})\\
(Ob\mu^{\mathcal{C}})e^{\mathcal{C}} &= e^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}(Mor\mu^{\mathcal{C}})
\end{aligned}$$

*biçiminde ve*

$$\begin{tikzcd}
Mor(C\otimes C)_t\Pi_s Mor(C\otimes C) \arrow[r, "c^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}"] \arrow[d, "Mor\mu^{\mathcal{C}}\ {}_t\Pi_s Mor\mu^{\mathcal{C}}"'] & Mor(\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}) \arrow[d, "Mor\mu^{\mathcal{C}}"] \\
Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C} \arrow[r, "c^{\mathcal{C}}"'] & Mor\mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli yani*

$$c^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}Mor\mu^{\mathcal{C}} = (Mor\mu^{\mathcal{C}}\ {}_t\Pi_s Mor\mu^{\mathcal{C}})c^{\mathcal{C}}$$

*biçimindedir. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned}
\mu^{Mor\mathcal{C}}s^{\mathcal{C}} &= (Mor\mu^{\mathcal{C}})s^{\mathcal{C}}\\
&= s^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}(Ob\mu^{\mathcal{C}})\\
&= (s^{\mathcal{C}}\otimes s^{\mathcal{C}})\mu^{Ob\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}
\mu^{Mor\mathcal{C}}t^{\mathcal{C}} &= (Mor\mu^{\mathcal{C}})t^{\mathcal{C}}\\
&= t^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}(Ob\mu^{\mathcal{C}})\\
&= (t^{\mathcal{C}}\otimes t^{\mathcal{C}})\mu^{Ob\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

*ve benzer şekilde*

$$\begin{aligned}
\mu^{Ob\mathcal{C}}e^{\mathcal{C}} &= (Ob\mu^{\mathcal{C}})e^{\mathcal{C}}\\
&= e^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}(Mor\mu^{\mathcal{C}})\\
&= (e^{\mathcal{C}}\otimes e^{\mathcal{C}})\mu^{Mor\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

*elde edilir. Buradan*

$$\beta : (Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C})\otimes(Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C}) \longrightarrow (Mor\mathcal{C}\otimes Mor\mathcal{C})_t\Pi_s(Mor\mathcal{C}\otimes Mor\mathcal{C})$$

*izomorfizmi düşünülürse*

$$\begin{aligned} \mu^{Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C}} c^{\mathcal{C}} &= \beta(\mu^{Mor\mathcal{C}}\ {}_t\Pi_s \mu^{Mor\mathcal{C}})c^{\mathcal{C}} \\ &= \beta(Mor(\mu^{\mathcal{C}})_t\Pi_s Mor(\mu^{\mathcal{C}}))c^{\mathcal{C}} \\ &= \beta c^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} Mor(\mu^{\mathcal{C}}) \\ &= (c^{\mathcal{C}} \otimes c^{\mathcal{C}}) Mor \mu^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

*biçimindedir. Böylece, $s^{\mathcal{C}}$, $t^{\mathcal{C}}$, $e^{\mathcal{C}}$ and $c^{\mathcal{C}}$ birer $R$-cebir homomorfizmidir.*

***(b) (a)** gereğince $s^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C} \longrightarrow Ob\mathcal{C}$, $t^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C} \longrightarrow Ob\mathcal{C}$, $e^{\mathcal{C}} : Ob\mathcal{C} \longrightarrow Mor\mathcal{C}$ ve $c^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C} \longrightarrow Mor\mathcal{C}$ morfizmleri birer $R$-cebir homomorfizmi olup*

$$\begin{aligned} \eta^{Mor\mathcal{C}} s^{\mathcal{C}} &= \eta^{Ob\mathcal{C}} = (s^{\mathcal{C}})^{\otimes 0}\eta^{Ob\mathcal{C}} = s^{\mathcal{C}^{\otimes 0}}\eta^{Ob\mathcal{C}}, \\ \eta^{Mor\mathcal{C}} t^{\mathcal{C}} &= \eta^{Ob\mathcal{C}} = (t^{\mathcal{C}})^{\otimes 0}\eta^{Ob\mathcal{C}} = t^{\mathcal{C}^{\otimes 0}}\eta^{Ob\mathcal{C}}, \\ \eta^{Ob\mathcal{C}} e^{\mathcal{C}} &= \eta^{Mor\mathcal{C}} = (e^{\mathcal{C}})^{\otimes 0}\eta^{Mor\mathcal{C}} = e^{\mathcal{C}^{\otimes 0}}\eta^{Mor\mathcal{C}} \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} (\eta^{Mor\mathcal{C}}\ {}_t\Pi_s \eta^{Mor\mathcal{C}})c^{\mathcal{C}} &= \eta^{Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C}} c^{\mathcal{C}} \\ &= (c^{\mathcal{C}})^{\otimes 0}\eta^{Mor\mathcal{C}} \\ &= c^{\mathcal{C}^{\otimes 0}}\eta^{Mor\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

*yazılabilir. Yani, $\eta^{\mathcal{C}}$; $Ob(\eta^{\mathcal{C}}) := \eta^{Ob\mathcal{C}}$ ve $Mor(\eta^{\mathcal{C}}) := \eta^{Mor\mathcal{C}}$ ile birlikte bir funktordur.*

**Sonuç 2.** $\mathbf{cAlg}_R$, $\mathbf{Mon}(\mathbf{Cat})$ *ve* $\mathbf{Cat}(\boldsymbol{Alg}_R)$ *kategorileri izomorftur.*

**İspat 8.** *Öncelikle* $\mathbf{cAlg}_R \stackrel{MonCat}{\longrightarrow} \mathbf{Mon}(\mathbf{Cat})$ *funktorunu tanımlayalım:*
*$\mathcal{C}$ bir kategoriksel $R$-cebir olsun. Bu durumda $Ob\mathcal{C}$ ve $Mor\mathcal{C}$ birer $R$-cebir olup $M \in \{Ob\mathcal{C}, Mor\mathcal{C}\}$ için*

$$\begin{aligned} (1 \otimes \mu^M)\mu^M &= (\mu^M \otimes 1)\mu^M, \\ (\eta^M \otimes 1)\mu^M &= Pr_2 \text{ ve } (1 \otimes \eta^M)\mu^M = Pr_1, \end{aligned}$$

*yazılabilir. (Bkz. Monoid Obje tanımı)*
*Ayrıca kategoriksel $R$-cebir tanımından $Ob(\mu^{\mathcal{C}}) := \mu^{Ob\mathcal{C}}$ ve $Mor(\mu^{\mathcal{C}}) := \mu^{Mor\mathcal{C}}$ olmak üzere bunlar yardımıyla elde edilen bir $\mu^{\mathcal{C}}$ funktoru vardır. Diğer taraftan önerme 3 (b) gereğince $Ob(\eta^{\mathcal{C}}) := \eta^{Ob\mathcal{C}}$ ve $Mor(\eta^{\mathcal{C}}) := \eta^{Mor\mathcal{C}}$ olmak üzere $\eta^{\mathcal{C}}$ funktoru olup*

$$\begin{aligned} (1 \otimes \mu^{\mathcal{C}})\mu^{\mathcal{C}} &= (\mu^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{\mathcal{C}}, \\ (\eta^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{\mathcal{C}} &= Pr_2 \text{ ve } (1 \otimes \eta^{\mathcal{C}})\mu^{\mathcal{C}} = Pr_1, \end{aligned}$$

*olur. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ kategoriksel $R$-cebiri $\mu^{\mathcal{C}}$ ve $\eta^{\mathcal{C}}$ funktorlarıyla* **Cat** *kategorisinde bir monoid objedir. Ayrıca $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriksel $R$-cebirleri için $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ kategoriksel $R$-cebir homomorfizmi alınırsa $Ob\varphi$ ve $Mor\varphi$; $R$-cebir homomorfizmleri varolup*

$$\mu^{Ob\mathcal{C}}(Ob\varphi) = (Ob\varphi \otimes Ob\varphi)\mu^{Ob\mathcal{D}}$$

*ve*

$$\mu^{Mor\mathcal{C}}(Mor\varphi) = (Mor\varphi \otimes Mor\varphi)\mu^{Mor\mathcal{D}}$$

*yazılabilir. Buradan da $\mu^{\mathcal{C}}$ ve $\varphi$ funktor oldukları için*

$$\mu^{\mathcal{C}}\varphi = (\varphi \otimes \varphi)\mu^{\mathcal{D}}$$

*olup $\varphi$,* **Cat** *kategorisinde bir monoid morfizmidir. Dolayısıyla bir $\mathcal{C}$ kategoriksel $R$-cebiri için $MonCat(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$ ve bir $\varphi$ kategoriksel $R$-cebir homomorfizmi için $MonCat(\varphi) := \varphi$ olacak şekilde*

$$\mathbf{cAlg}_R \xrightarrow{MonCat} \mathbf{Mon}(\mathbf{Cat})$$

*funktoru tanımlıdır.*
*Tersine,* **Cat** *kategorisinde bir monoid obje $\mathcal{C}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}(1 \otimes \mu^{\mathcal{C}})\mu^{\mathcal{C}} &= (\mu^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{\mathcal{C}},\\ (\eta^{\mathcal{C}} \otimes 1)\mu^{\mathcal{C}} &= Pr_2 \text{ ve } (1 \otimes \eta^{\mathcal{C}})\mu^{\mathcal{C}} = Pr_1\end{aligned}$$

*olacak şekilde $\mu^{\mathcal{C}}$ ve $\eta^{\mathcal{C}}$ funktorları vardır. Böylece*

$$\begin{aligned}(1 \otimes Ob(\mu^{\mathcal{C}}))Ob(\mu^{\mathcal{C}}) &= (Ob(\mu^{\mathcal{C}}) \otimes 1)Ob(\mu^{\mathcal{C}}),\\ (Ob(\eta^{\mathcal{C}}) \otimes 1)Ob\mu^{\mathcal{C}} &= Pr_2 \text{ and } (1 \otimes Ob(\eta^{\mathcal{C}}))Ob(\mu^{\mathcal{C}}) = Pr_1,\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}(1 \otimes Mor(\mu^{\mathcal{C}}))Mor(\mu^{\mathcal{C}}) &= (Mor(\mu^{\mathcal{C}}) \otimes 1)Mor(\mu^{\mathcal{C}}),\\ (Mor(\eta^{\mathcal{C}}) \otimes 1)Mor\mu^{\mathcal{C}} &= Pr_2 \text{ and } (1 \otimes Mor(\eta^{\mathcal{C}}))Mor(\mu^{\mathcal{C}}) = Pr_1,\end{aligned}$$

*olup, $\mu^{Ob\mathcal{C}} := Ob\mu^{\mathcal{C}}$, $\eta^{Ob\mathcal{C}} := Ob\eta^{\mathcal{C}}$ ve $\mu^{Mor\mathcal{C}} := Mor\mu^{\mathcal{C}}$, $\eta^{Mor\mathcal{C}} := Mor\eta^{\mathcal{C}}$ olmak üzere $Ob\mathcal{C}$ ve $Mor\mathcal{C}$ birer $R$-cebirdir. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ kategorisi $Ob\mathcal{C}$ ve $Mor\mathcal{C}$ üzerinde $R$-cebir yapısına sahip olup $\mu^{\mathcal{C}}$ funktoruyla birlikte bir kategoriksel $R$-cebirdir.*

*Ayrıca* **Cat** *kategorisinde $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ monoid objeleri için $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}$ monoid morfizmi alınırsa*

$$\mu^{\mathcal{C}}\varphi = (\varphi \otimes \varphi)\mu^{\mathcal{D}}$$

*olacak şekilde bir $\varphi$ funktoru olup*

$$\mu^{Ob\mathcal{C}}(Ob\varphi) = Ob\mu^{\mathcal{C}}Ob\varphi = (Ob\varphi \otimes Ob\varphi)Ob\mu^{\mathcal{D}} = (Ob\varphi \otimes Ob\varphi)\mu^{Ob\mathcal{D}}$$

*ve*

$$\mu^{Mor\mathcal{C}}(Mor\varphi) = Mor\mu^{\mathcal{C}}Mor\varphi = (Mor\varphi \otimes Mor\varphi)Mor\mu^{\mathcal{D}} = (Mor\varphi \otimes Mor\varphi)\mu^{Mor\mathcal{D}}$$

*yazılabilir. Böylece $Ob\varphi$ ve $Mor\varphi$ morfizmleri $R$-cebir homomorfizmidir. Dolayısıyla* **Cat** *kategorisindeki bir $\mathcal{C}$ monoid objesi için*

$$cAlg_R(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$$

*ve $\varphi$ monoid homomorfizmi için*

$$cAlg_R(\varphi) := \varphi$$

*olmak üzere*

$$\mathbf{Mon}(\mathbf{Cat}) \xrightarrow{cAlg_R} \mathbf{cAlg}_R$$

*funktoru vardır. Şimdi*

$$\mathbf{cAlg}_R \xrightarrow{CatAlg_R} \mathbf{Cat}(\mathbf{Alg}_R)$$

*funktorunu tanımlayalım. $\mathcal{C}$ bir kategoriksel $R$-cebir olmak üzere $Ob\mathcal{C}$ ve $Mor\mathcal{C}$ birer $R$-cebir olup önerme 3 (a) gereğince $s^{\mathcal{C}}$, $t^{\mathcal{C}}$, $e^{\mathcal{C}}$ ve $c^{\mathcal{C}}$ morfizmleri $R$-cebir homomorfizmidir.*

*Dolayısıyla $\mathcal{C}$; $Ob\mathcal{C}$, $Mor\mathcal{C}$ $R$-cebirleri ve $s^{\mathcal{C}}$, $t^{\mathcal{C}}$, $e^{\mathcal{C}}$, $c^{\mathcal{C}}$ $R$-cebir homomorfizmleri ile birlikte* $\mathbf{Alg}_R$ *kategorisinde bir kategori objedir. Ayrıca $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}$ kategoriksel $R$-cebir homomorfizmi, $Ob\varphi$ ve $Mor\varphi$; $R$-cebir homomorfizmleri olmak üzere* $\mathbf{Alg}_R$ *kategorisinde bir funktordur. Dolayısıyla bir $\mathcal{C}$ kategoriksel $R$-cebiri için $CatAlg_R(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$ ve $\varphi$ kategoriksel $R$-cebir homomorfizmi için $CatAlg_R(\varphi)$ olacak şekilde*

$$\mathbf{cAlg}_R \xrightarrow{CatAlg_R} \mathbf{Cat}(\mathbf{Alg}_R)$$

*funktoru vardır.*

*Tersine, $\mathcal{C}$;* $\mathbf{Alg}_R$ *kategorisinde bir kategori obje olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$ bir (küçük) kategori olup $s^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C} \longrightarrow Ob\mathcal{C}$, $t^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C} \longrightarrow Ob\mathcal{C}$, $e^{\mathcal{C}} : Ob\mathcal{C} \longrightarrow Mor\mathcal{C}$ ve $c^{\mathcal{C}} : Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C} \longrightarrow Mor\mathcal{C}$ morfizmleri birer $R$-cebir homomorfizmi olduğundan*

$$\begin{aligned} \mu^{Mor\mathcal{C}}s^{\mathcal{C}} &= (s^{\mathcal{C}} \otimes s^{\mathcal{C}})\mu^{Ob\mathcal{C}} = s^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}\mu^{Ob\mathcal{C}}, \\ \mu^{Mor\mathcal{C}}t^{\mathcal{C}} &= (t^{\mathcal{C}} \otimes t^{\mathcal{C}})\mu^{Ob\mathcal{C}} = t^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}\mu^{Ob\mathcal{C}}, \\ \mu^{Ob\mathcal{C}}e^{\mathcal{C}} &= (e^{\mathcal{C}} \otimes e^{\mathcal{C}})\mu^{Mor\mathcal{C}} = e^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}\mu^{Mor\mathcal{C}} \end{aligned}$$

*eşitlikleri yazılabilir. Diğer taraftan*

$$\beta : (Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C}) \otimes (Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C}) \longrightarrow (Mor\mathcal{C}\otimes Mor\mathcal{C})_t\Pi_s(Mor\mathcal{C}\otimes Mor\mathcal{C})$$

*izomorfizmi varolduğundan*

$$\begin{aligned}\mu^{Mor\mathcal{C}}{}_t\Pi_s\mu^{Mor\mathcal{C}}c^{\mathcal{C}} &= \beta(\mu^{Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C}})c^{\mathcal{C}} \\ &= \beta(c^{\mathcal{C}}\otimes c^{\mathcal{C}})\mu^{Mor\mathcal{C}} \\ &= c^{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}\mu^{Mor\mathcal{C}}\end{aligned}$$

*dir. Böylece $Ob(\mu^{\mathcal{C}}) := \mu^{Ob\mathcal{C}}$ ve $Mor\mu^{\mathcal{C}} := \mu^{Mor\mathcal{C}}$ olmak üzere $\mu^{\mathcal{C}}$ funktoru vardır. Ayrıca $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategori objeler olmak üzere $Ob\varphi$ ve $Mor\varphi$' si $R$-cebir homomorfizmleri olan $\mathcal{C}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{D}$ funktoru kategoriksel $R$-cebir homomorfizmidir. Dolayısıyla*

$$\mathbf{Cat}(\mathbf{Alg}_R)\xrightarrow{cAlg_R}\mathbf{cAlg}_R$$

*funktoru $cAlg_R(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$ ve $cAlg_R(\varphi) := \varphi$ olacak şekilde vardır.*

**Önerme 4.** *$\mathcal{C}$ bir kategoriksel $R$-cebir olsun.*
***(a)** Kompoziyonu varolan tüm $m, n \in Mor\mathcal{C}$ morfizmleri için*

$$c(m,n) = m - (et)(m) + n$$

*dir.*
***(b)** $\mathcal{C}$ deki her $m$ morfizmi $(et)(m) - m + (es)(m)$ biçiminde bir terse sahiptir.*
***(c)** $KertKers = \{0\}$ dır.*

**İspat 9.** ***(a)** $m, n \in Mor\mathcal{C}$ morfizmleri $t(m) = s(n)$ olacak şekilde kompozisyonu varolan morfizmler olsun. $c$ ve $e$ birer $R$-cebir homomorfizmi olduğundan,*

$$\begin{aligned}c(m,n) &= c(m+0, 0+n) \\ &= c(m+0, (et)(m) - (et)(m) + n) \\ &= c(m, (et)(m)) + c(0, -(et)(m) + n) \\ &= m - (et)(m) + n\end{aligned}$$

*elde edilir.*

***(b)***

$$t((et)(m) - m + (es)(m)) = t(et)(m) - t(m) + t(es)(m) = s(m)$$

$$s((et)(m) - m + (es)(m)) = s(et)(m) - s(m) + s(es)(m) = t(m)$$

*olmak üzere*

$$c(m, (et)(m) - m + (es)(m)) = m - (et)(m) + (et)(m) - m + (es)(m) = (es)(m)$$

$$c((et)(m) - m + (es)(m), m) = (et)(m) - m + (es)(m) - (es)(m) + m = (et)(m),$$

*olup* $(et)(m)-m+(es)(m)$ *nin* $m$ *nin tersi olduğunu elde ederiz.*

***(c)*** $m \in Kert$ *ve* $n \in Kers$ *olsun.* $t(m)=0=s(n)$ *olduğundan* $m$ *ve* $n$ *morfizmlerinin kompozisyonları vardır. Dolayısıyla* $(a)$ *gereğince*

$$\begin{aligned} mn &= m-(et)(m)+n \\ &= m-(es)(n)+n \\ &= n-(et)(m)+m \\ &= n-(es)(n)+m \\ &= nm \end{aligned}$$

*elde edilir. Yani,* $KertKers=\{0\}$ *bulunur.*

**Önerme 5.** $O, M$ *birer R-cebir ve* $s: M \longrightarrow O, t: M \longrightarrow O$, $e: O \longrightarrow M$ *morfizmleri için* $se=te=id$ *olsun. Eğer* $KertKers=\{0\}$ *ise,* $Ob\mathcal{C} := O$, $Mor\mathcal{C} := M$ *ve* $s^{\mathcal{C}}=s$, $t^{\mathcal{C}}=t$, $e^{\mathcal{C}}=e$, $c^{\mathcal{C}}=c$ *olacak şekilde bir* $\mathcal{C}$ *kategoriksel R-cebiri vardır.*

**İspat 10.** $t(m)=s(n)$ *olacak şekilde* $m,n \in M$ *için*, $c(m,n) := m-(et)(m)+n$ *olduğunu biliyoruz*.

*Bu durumda* $c$ *morfizmi* $(R$*-modül homomorfizmi*$)$ *bir R-cebir homomorfizmidir. Çünkü,* $t(m)=s(n)$ *ve* $t(m')=s(n')$ *olacak şekilde* $m,n,m',n' \in M$ *için*

$$\begin{aligned} c(m,n)c(m',n') &= (m-(et)(m)+n)(m'-(et)(m')+n') \\ &= (m-(et)(m))m'+nm'+(m-(et)(m))(n'-(es)(n'))+n(n'-(es)(n')) \\ &= mm'-(et)(m)m'+nm'+mn'-(et)(m)n'-m(es)(n')+(et)(mm')+nn' \\ &\quad -n(es)(n') \\ &= c(mm',nn')+A+B \end{aligned}$$

*olup burada*

$$\begin{aligned} A &= mn'-(et)(m)n'-m(es)(n')+(et)(m)(es)(n') \\ &= (m-(et)(m))(n'-(es)(n')) \in KertKers \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} B &= nm'-(es)(n)m'-n(et)(m')+(es)(n)(et)(m') \\ &= (n-(es)(n))(m'-(et)(m')) \in KersKert \end{aligned}$$

*biçimindedir. Diğer taraftan* $KersKert=\{0\}$ *olduğundan* $A=B=0$ *olur. Dolayısıyla*

$$c(m,n)c(m',n') = c(mm',nn') = c((m,n)(m',n'))$$

*dir. Şimdi de $\mathcal{C}$ kategorisindeki bir kategori objenin sağlaması gereken şartları kontrol edelim:*

*(i)* $t(m) = s(n)$ *olacak şekilde* $m, n \in M$ *için*

$$\begin{aligned} (sc)(m,n) &= s(m-(et)(m)+n) \\ &= s(m) - s(et)(m) + s(n) \\ &= s(m) - s(n) + s(n) \\ &= s(m) \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} (tc)(m,n) &= t(m-(et)(m)+n) \\ &= t(m) - t(et)(m) + t(n) \\ &= t(m) - t(m) + t(n) \\ &= t(n) \end{aligned}$$

*dir.*

*(ii) Hipotez gereği* $se = te = id$ *olduğu açıktır.*

*(iii)* $t(k) = s(m)$ *ve* $t(m) = s(n)$ *olacak şekilde* $k, m, n \in M$ *için*

$$\begin{aligned} c(k, c(m,n)) &= c(k, m-(et)(m)+n) \\ &= k-(et)(k)+m-(et)(m)+n \\ &= k-(es)(m)+m-(es)(n)+n \\ &= c(k-(es)(m)+m, n) \\ &= c((k,m),n) \end{aligned}$$

*dir.*

*(iv)* $m \in M$ *için*

$$\begin{aligned} c((es)(m), m) &= (es)(m)-(et)(es)(m)+m \\ &= (es)(m)-(es)(m)+m \\ &= m \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} c(m, (et)(m)) &= m-(et)(m)+(et)(m) \\ &= m \end{aligned}$$

*biçimindedir.*

*Dolayısıyla, $\mathcal{C}$; Ob$\mathcal{C}$ $:= O$, $Mor\mathcal{C} := M$ ve $s^{\mathcal{C}} = s$, $t^{\mathcal{C}} = t$, $e^{\mathcal{C}} = e$, $c^{\mathcal{C}} = c$ olmak üzere* $\mathbf{Alg}_R$ *kategorisinde bir kategori objedir.*

## 5.4 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi ile Kategoriksel $R$-cebirler Kategorisinin Denkliği

Bu kısımda amaç **XMod** ve $\mathbf{cAlg}_R$ kategorilerinin denk olduğunu ifade etmektir.

$(C, R, \partial)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere $C \rtimes R$ semidirekt çarpımı $R$ nin $C$ üzerine etkisi yardımıyla ortaya çıkar. Dolayısıyla $(c, r)$, $(c', r') \in C \rtimes R$ olmak üzere

$$(c, r)(c', r') = (cc' + cr' + rc', rr')$$

biçimindedir.

**Önerme 6.** *$(C, R, \partial)$ herhangi bir çaprazlanmış modül olmak üzere Ob$\mathcal{C}$ $:= R$, $Mor\mathcal{C} := C \rtimes R$ ve $(c, r) \in C \rtimes R$ için*

$$\begin{aligned}
&s(c, r) = \partial(c) + r \\
&t(c, r) = r \\
&e(r) = (0, r)
\end{aligned}$$

*ve $\{(c_2, \partial(c_1) + r_1), (c_1, r_1) \in Mor\mathcal{C} \times Mor\mathcal{C} \mid c_1, c_2 \in C,\ r_1 \in R\}$ kompozisyonu varolan morfizmler için $c_1, c_2 \in C, r_1 \in R$ olmak üzere*

$$c(((c_2, \partial(c_1) + r_1), (c_1, r_1))) := (c_2 + c_1, r_1)$$

*olarak alınırsa bir $\mathcal{C}$ kategoriksel $R$-cebiri elde edilir.*

**İspat 11.** *Ob$\mathcal{C}$ $= R$ ve $Mor\mathcal{C} = C \rtimes R$ birer $R$-cebir olup $s, t$ ve $e$ morfizmlerinin birer $R$-cebir homomorfizmi olduğunu göstermeliyiz:*

$$\begin{aligned}
s((c, r)(c', r')) &= s(cc' + cr' + rc', rr') \\
&= \partial(cc' + cr' + rc') + rr' \\
&= \partial(cc') + \partial(cr') + \partial(rc') + rr'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(c, r)s(c', r') &= (\partial(c) + r)(\partial(c') + r') \\
&= \partial(c)\partial(c') + \partial(c)r' + r\partial(c') + rr' \\
&= \partial(cc') + \partial(cr') + \partial(rc') + rr'
\end{aligned}$$

*yani* $s((c,r)(c',r')) = s(c,r)s(c',r')$ *dir. Diğer taraftan* $(c,r),(c',r') \in Mor\mathcal{C}$ *için*

$$\begin{aligned} t((c,r)(c',r')) &= t(cc'+cr'+rc',rr') \\ &= rr' \\ &= t(c,r)t(c',r') \end{aligned}$$

*olup ve benzer şekilde* $r,r' \in Ob\mathcal{C}$ *için*

$$e(rr') = (0,rr') = (0,r)(0,r') = e(r)e(r')$$

*biçimindedir.*

*Ayrıca kompozisyonu varolan morfizmler*

$$\begin{aligned} Mor\mathcal{C}_t\Pi_s Mor\mathcal{C} &= \{((c_2,r_2),(c_1,r_1)) \in MorC \times MorC \mid t(c_2,r_2) = s(c_1,r_1)\} \\ &= \{((c_2,r_2),(c_1,r_1)) \in MorC \times MorC \mid r_2 = \partial(c_1)+r_1\} \\ &= \{((c_2,\partial(c_1)+r_1),(c_1,r_1)) \in MorC \times MorC \mid c_1,c_2 \in C, r_1 \in R\} \end{aligned}$$

*biçiminde olup*

$$\begin{aligned} & c(((c_2,\partial(c_1)+r_1),(c_1,r_1))((c_2',\partial(c_1')+r_1'),(c_1',r_1'))) \\ = \;& c((c_2,\partial(c_1)+r_1)(c_2',\partial(c_1')+r_1'),(c_1,r_1)(c_1',r_1')) \\ = \;& c((c_2c_2'+c_2(\partial(c_1')+r_1')+(\partial(c_1)+r_1)c_2',(\partial(c_1)+r_1)(\partial(c_1')+r_1')), \\ & (c_1c_1'+c_1r_1'+r_1c_1',r_1r_1')) \\ = \;& c((c_2c_2'+c_2c_1'+c_2r_1'+c_1c_2'+r_1c_2',\partial(c_1c_1')+\partial(c_1r_1')+\partial(r_1c_1')+r_1r_1'), \\ & (c_1c_1'+c_1r_1'+r_1c_1',r_1r_1')) \\ = \;& (c_2c_2'+c_2c_1'+c_2r_1'+c_1c_2'+r_1c_2'+c_1c_1'+c_1r_1'+r_1c_1',r_1r_1') \end{aligned}$$

*ve diğer taraftan*

$$\begin{aligned} & c((c_2,\partial(c_1)+r_1),(c_1,r_1))c(((c_2',\partial(c_1')+r_1'),(c_1',r_1'))) \\ = \;& (c_1+c_2,r_1)(c_1'+c_2',r_1') \\ = \;& (c_1c_1'+c_1c_2'+c_2c_1'+c_2c_2'+r_1c_1'+r_1c_2'+c_1r_1'+c_2r_1',r_1r_1') \end{aligned}$$

*olduğundan* $c$ *bir* $R$*-cebir homomorfizmidir. Son olarak* $\mathcal{C}$ *nin* $\mathcal{C} =$***Alg***$_R$ *kategorisinde bir kategori obje olduğunu gösterelim:*

*(i)* $((c_2,\partial(c_1)+r_1),(c_1,r_1))$ *kompozisyonu varolan morfizmler olmak üzere,*

$$\begin{aligned} (sc)((c_2,\partial(c_1)+r_1),(c_1,r_1)) &= s(c_2+c_1,r_1) \\ &= \partial(c_2+c_1)+r_1 \\ &= \partial(c_2)+\partial(c_1)+r_1 \\ &= s(c_2,\partial(c_1)+r_1) \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}(tc)((c_2, \partial(c_1) + r_1), (c_1, r_1)) &= t(c_2 + c_1, r_1) \\ &= r_1 \\ &= t(c_1, r_1)\end{aligned}$$

*yazılabilir.*

*(ii)* $r \in Ob\mathcal{C}$ *için*

$$(se)(r) = s(e(r)) = s(0, r) = \partial(0) + r = r$$

*ve*

$$(te)(r) = t(e(r)) = t(0, r) = r$$

*dir. Yani* $se = id = te$ *dir.*

*(iii)* $c_{1,}c_2, c_3 \in C, r_1 \in R$ *için*

$$\begin{aligned}&c((c_3, \partial(c_2) + \partial(c_1) + r_1), c((c_2, \partial(c_1) + r_1), (c_1, r_1)))) \\ = \;& c((c_3, \partial(c_2) + \partial(c_1) + r_1), (c_2 + c_1, r_1)) \\ = \;& (c_3 + c_2 + c_1, r_1) \\ = \;& c((c_3 + c_2, \partial(c_1) + r_1), (c_1, r_1)) \\ = \;& c(c((c_3, \partial(c_2) + \partial(c_1) + r_1), (c_2, \partial(c_1) + r_1)), (c_1, r_1))\end{aligned}$$

*dir.*

*(iv)*

$$\begin{aligned}c((es)(c, r), (c, r)) &= c(e(\partial(c) + r), (c, r)) \\ &= c((0, \partial(c) + r), (c, r)) \\ &= (0 + c, r) = (c, r)\end{aligned}$$

*ve* $(c, r) \in Mor\mathcal{C}$ *için*

$$\begin{aligned}c((c, r), (et)(c, r)) &= c((c, r), (0, r)) \\ &= (c + 0, r) = (c, r)\end{aligned}$$

*dir.*

*Dolayısıyla* $\mathcal{C}$*;* **Alg**$_R$ *kategorisinde bir kategori objedir. Yani Sonuç 2 gereğince* $\mathcal{C}$ *bir kategoriksel* $R$*-cebirdir.*

Burada $(C, R, \partial)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere Önerme 6 de ifade edilen $\mathcal{C}$ kategoriksel $R$-cebirine $(C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü ile ilişkili kategoriksel $R$-cebir denir. $c\mathrm{Alg}_R(C, R, \partial) := \mathcal{C}$ ile gösterilir.

**Sonuç 3.** ***(a)*** *$(C, R, \partial)$ ve $(C', R', \partial')$ birer çaprazlanmış modül olsun.* *$(C, R, \partial) \stackrel{\varphi=(\varphi_1,\varphi_0)}{\longrightarrow} (C', R', \partial')$ çaprazlanmış modül morfizmi için ObcAlg$_R(\varphi) := \varphi_0$ ve $Mor$cAlg$_R(\varphi) := \varphi_1 \rtimes \varphi_0$, $(\varphi_1 \rtimes \varphi_0)(c, r) = (\varphi_1(c), \varphi_0(r))$ olmak üzere*

$$cAlg_R(C, R, \partial) \stackrel{cAlg_R(\varphi)}{\longrightarrow} cAlg_R(C', R', \partial')$$

*morfizmi vardır.*
***(b)*** **XMod**$\stackrel{cAlg_R}{\longrightarrow}$**cAlg**$_R$ *funktoru tanımlıdır.*

**Önerme 7.** *$\mathcal{C}$ bir kategoriksel $R$-cebir olmak üzere*

$$C := Kert,\ R := Ob\mathcal{C},\ \partial := s|_{Kert}$$

*ve $R$ nin $C$ üzerine etkisi $r \in R$, $c \in C$ için $r \cdot c := e(r)c$ olarak alınırsa $(C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü vardır.*

**İspat 12.** *$Mor\mathcal{C}$ bir $R$-cebir ve $s$ bir $R$-cebir homomorfizmi olduğundan $Kert$ bir $R$-cebir ve $s|_{Kert}$ bir $R$-cebir homomorfizmidir. Ayrıca $e$ bir $R$-cebir homomorfizmi olduğunda $Kert$ üzerinde bir Ob$\mathcal{C}$-etkisi vardır. Diğer taraftan*

*(CM1) $r \in R = Ob\mathcal{C}$ ve $c \in Mor\mathcal{C}$ için*

$$\begin{aligned} s(r \cdot c) &= s(e(r)c) \\ &= s(e(r))s(c) \\ &= rs(c) \end{aligned}$$

*olup $r \in Ob\mathcal{C}$, $c \in Kert$ için*

$$(s|_{Kert})(r \cdot c) = r(s|_{Kert(c)})$$

*dir.*

*(CM2) $n, m \in Kert$ için*

$$\begin{aligned} s|_{Kert}(n) \cdot m &= s(n) \cdot m \\ &= e(s(n))m \\ &= nm \end{aligned}$$

*dir.*

**Tanım 4.** *$\mathcal{C}$ bir kategoriksel $R$-cebir olmak üzere Önerme 7 de tanımlı $(C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{C}$ ile ilişkili çaprazlanmış modül denir.*

**Sonuç 4.** ***(a)*** *$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategoriksel $R$-cebir olmak üzere $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}$ kategoriksel $R$-cebir homomorfizmi için*

$$XMod(\mathcal{C}) \stackrel{XMod(\varphi)}{\longrightarrow} XMod(\mathcal{D})$$

*morfizmi $XMod(\varphi) = (Ob\varphi, Mor\varphi)$ biçimindedir.*
***(b)*** $\mathbf{cAlg}_R \stackrel{XMod}{\longrightarrow} \mathbf{XMod}$ *funktoru vardır.*

**Teorem 4.** $\mathbf{XMod}$ *ve* $\mathbf{cAlg}_R$ *kategorileri denktir.*

**İspat 13.** $\mathbf{XMod} \stackrel{cAlg_R}{\longrightarrow} \mathbf{cAlg}_R$ *ve* $\mathbf{cAlg}_R \stackrel{XMod}{\longrightarrow} \mathbf{XMod}$ *funktorları için $(cAlg_R)(XMod) \cong id_{cAlg_R}$ ve $(XMod)(cAlg_R) \cong id_{XMod}$ olduğunu göstermeliyiz. $(C, R, \partial)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere*

$$\begin{aligned}(XMod)(cAlg_R)(C, R, \partial) &= XMod(R, C \rtimes R, s, t, e, c) \\ &= (Kert, R, s|_{Kert})\end{aligned}$$

*biçiminde olup burada*

$$\begin{aligned}Kert &= \{(c, r) \mid t(c, r) = 0\} \\ &= \{(c, r) \mid r = 0\} \\ &= \{(c, 0) \mid c \in C\} \\ &= C \rtimes \{0\}\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{array}{rcl} R \times Kert & \longrightarrow & R \\ (r, (c, 0)) & \longmapsto & r \cdot (c, 0) = e(r)(c, 0) = (0, r)(c, 0) = (r \cdot c, 0) \end{array}$$

*olmak üzere*

$$s|_{Kert}(c, 0) = s(c, 0) = \partial(c) + 0 = \partial(c)$$

*dir. Yani $(XMod)(cAlg_R)(C, R, \partial) = (C \rtimes \{0\}, R, s|_{Kert}) \cong (C, R, \partial) = id_{XMod}(C, R, \partial)$ elde edilir.*
*Diğer taraftan $C = (ObC, MorC, s, t, e, c)$ bir kategoriksel $R$-cebir olmak üzere*

$$\begin{aligned}(cAlg_R)(XMod)(C) &= cAlg_R(Kert, ObC, s|_{Kert}) \\ &= (ObC, Kert \rtimes ObC, s, t, e, c)\end{aligned}$$

*biçiminde olup burada $(m, o) \in Kert \rtimes ObC$ için*

$$\begin{aligned}s(m, o) &= s|_{Kert}(m) + o = s(m) + o \\ t(m, o) &= o \\ e(o) &= (0, o)\end{aligned}$$

*dır. O halde* $(cAlg_R)(XMod)(C) = (ObC, Kert \rtimes ObC, s, t, e, c)$ *olmak üzere* $Kert \rtimes ObC \cong MorC$ *olduğunu göstermeliyiz.*

$$\begin{array}{rlcl} \phi : & MorC & \longrightarrow & Kert \rtimes ObC \\ & m & \longmapsto & (m-(et)(m), t(m)) \end{array}$$

*fonksiyonu tanımlayalım. Burada*

$$\begin{aligned} t(m-(et)(m)) &= t(m) - t(et)(m) \\ &= t(m) - t(m) = 0 \end{aligned}$$

*olduğundan* $m-(et)(m) \in Kert$ *olup* $\phi$ *iyi tanımlıdır. Ayrıca* $m, n \in MorC$ *için*

$$\begin{aligned} \phi(mn) &= (mn-(et)(mn), t(mn)) \\ &= (mn-(et)(m)(et)(n), t(mn)) \end{aligned}$$

*ve*

$$\phi(m)\phi(n) = (m-(et)(m), t(m))(n-(et)(n), t(n))$$

$$= ((m-(et)(m))(n-(et)(n)) + (m-(et)(m))t(n) + t(m)(n-(et)(n)), t(m)t(n))$$

$= (mn - m(et)(n) - (et)(m)n + (et)(m)(et)(n) + (m-(et)(m))e(t(n)) + e(t(m))(n-(et(n))), t(mn))$ ($\because$ *ObC nin* $Kert$ *etkisi*)

$= (mn-(et)(m)(et)(n), t(mn))$ *olduğundan* $\phi$ *bir homomorfizmdir. Diğer taraftan*

$$\begin{array}{rlcl} \phi^{-1} : & Kert \rtimes ObC & \longrightarrow & MorC \\ & (m, o) & \longmapsto & e(o) + m \end{array}$$

*homomorfizmide tanımlı olup*

$$\begin{aligned} \phi\phi^{-1}(m,o) &= \phi(\phi^{-1}(m,o)) \\ &= \phi(e(o)+m) \\ &= (e(o)+m-(et)(e(o)+m), t(e(o)+m)) \\ &= (e(o)+m-e(te)(o)-(et)(m), (te)(o)+t(m)) \\ &= (m,o) \ (\because te = id \text{ ve } m \in Kert) \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\phi(m) &= \phi^{-1}(\phi(m)) \\ &= \phi^{-1}(m-(et)(m), t(m)) \\ &= e(t(m)) + m - (et)(m) \\ &= m \end{aligned}$$

*olduğundan* $\phi$ *bir izomorfizmdir. Böylece* $(cAlg_R)(XMod) \cong id_{cAlg_R}$ *dir.*

## 5.5 Çaprazlanmış Modüllerin (Ko)Homolojisi

### 5.5.1 Bir kategoriksel $R$-cebirin nerve'ü (kategoriksel nerve)

$C$ bir kategoriksel $R$-cebir olsun. $C$ nin k**ategoriksel nerve**'ü $N_{Cat}C$,

$$(N_{Cat}C)_n = (MorC)^{{}^t\Pi_s n}$$

biçiminde bir simplisel $R$-cebirdir. Burada yüz ve dejenere morfizmleri şu şekildedir: $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olmak üzere $d_k : (N_{Cat}C)_n \longrightarrow (N_{Cat}C)_{n-1}$

$$d_k = \begin{cases} (pr_j)_{j\in\lfloor n-1,1\rfloor} & k = 0 \text{ için} \\ (pr_j)_{j\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} \cup (c_{\lfloor k+1,k-1\rfloor}) \cup (pr_j)_{j\in\lfloor k-2,0\rfloor} & k \in [1, n-1] \text{ için} \\ (pr_j)_{j\in\lfloor n-2,0\rfloor} & k = n \text{ için} \end{cases}$$

ve $n = 1$ için

$$d_k = \begin{cases} s & k = 0 \text{ için} \\ t & k = 1 \text{ için} \end{cases}$$

iken $s_k : (N_{Cat}C)_n \longrightarrow (N_{Cat}C)_{n+1}$ morfizmi $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$s_k = (pr_j)_{j\in\lfloor n-1,k\rfloor} \cup (t_k e) \cup (pr_j)_{j\in\lfloor k-1,0\rfloor}$$

biçimindedir. Buradan $N_{Cat}$ funktoru

$$\begin{tikzcd} \mathbf{cAlg_R} \arrow[r, "N_{Cat}"] \arrow[d, "Cat\mathrm{Alg_R}"'] & \mathbf{sAlg_R} \\ \mathbf{CatAlg_R} \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

olarak ifade edilebilir.

### 5.5.2 $Cosk$ funktoru

$V = (C, R, \mu)$ bir çaprazlanmış modül olsun. $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$C_n \rtimes R := C^{\times n} \times R.$$

$n$-katlı semidirekt çarpım olmak üzere $C_n \rtimes R$ nin elemanları

$$(c_i, r)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} := (c_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \cup (r) = (c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots, c_0, r)$$

ve $(c_i, r)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}, (c'_i, r'_i)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in C_n \rtimes R$ olmak üzere

$$(c_i, r)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}(c'_i, r')_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} := \left(c_i\left(\left(\sum_{k\in\lfloor i-1,0\rfloor} c_k\right)\right) r\cdot c'_i, rr'\right)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor}$$

biçimindedir.

Buradan

$$\textbf{XMod}\overset{Cosk}{\longrightarrow}\mathbf{sAlg}_{\boldsymbol{R}}$$

funktoru $(CoskV)_n := C_n \rtimes R := C^{\times n} \times R = (c_j, r)_{i\in\lfloor n-1,0\rfloor} = (c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots, c_0, r)$ olmak üzere yüz ve dejenere dönüşümleri sırasıyla $(c_j, r)_{j\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in (CoskV)_n$, $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_k\left((c_j, r)_{j\in\lfloor n-1,0\rfloor}\right) = \begin{cases} (c_j, r\cdot c_0)_{j\in\lfloor n-1,1\rfloor} & if\ k = 0,\\ (c_j)_{j\in\lfloor n-1,k+1\rfloor} \cup (c_k + c_{k-1}) \cup (c_j, r)_{j\in\lfloor k-2,0\rfloor} & if\ k \in [1, n-1]\\ (c_j, r)_{j\in\lfloor n-2,0\rfloor} & if\ k = n \end{cases}$$

ve $(c_j, r)_{j\in\lfloor n-1,0\rfloor} \in (CoskV)_n$, $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_k((c_j, r)_{j\in\lfloor n-1,0\rfloor}) = (c_j)_{j\in\lfloor n-1,k\rfloor} \cup (0) \cup (c_j,r)_{j\in\lfloor k-1,0\rfloor}$$

biçiminde tanımlanır. Daha açık olarak $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} d_0(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, r) &= (c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1, r)\\ d_k(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, r) &= (c_{n-1}, \ldots, c_{k+1}, c_k + c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots, c_0, r)\ k = 1, 2, \ldots, n-1\\ d_n(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, r) &= (c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots, c_0, r) \end{aligned}$$

ve $n = 1$ için $d_0(c, r) = s(c, r) = \partial(c) + r$, $d_1(c, r) = t(c, r) = r$ olup $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} s_0(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, r) &= (c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, id_{d_0c_0}, r)\\ s_k(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0, r) &= (c_{n-1}, \ldots, c_k, id_{d_1c_k}, \ldots, c_0, r)\ k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

biçimindedir. Diğer taraftan **XMod** ve $\mathbf{cAlg_R}$ kategorilerinin denkliği kullanılarak $Cosk$ funktoru, kategoriksel $R$-cebirler kategorisinden simplisel $R$-cebirler kategorisine giden kategoriksel nerve funktor olarak

$$\begin{array}{ccc} \textbf{XMod} & \overset{Cosk}{\longrightarrow} & \mathbf{sAlg_R}\\ cAlg_R \searrow & & \nearrow N_{Cat}\\ & \mathbf{cAlg}_R & \end{array}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

**Sonuç 5.** $s\mathbf{Alg}_R \overset{Trunc}{\longrightarrow}$ **XMod** *funktoru,* $\textbf{XMod}\overset{Cosk}{\longrightarrow} s\mathbf{Alg}_R$ *funktorunun sol eki olup* $Trunc \circ Cosk \cong id_{\textbf{XMod}}$ *dir.*

**İspat 14.** **XMod** *ve* *c**Alg**$_R$* *kategorileri denk olup* **XMod** $\dashv$ *c**Alg**$_R$* *ve* $XMod \circ cAlg_R \cong id_{\mathbf{XMod}}$ *dir. Dolayısıyla* $F \dashv N_{Cat}$ *iolduğundan*

$$Trunc = XMod \circ F \dashv N_{Cat} \circ cAlg_R \cong Cosk,$$

*ve* $F \circ N_{Cat} \cong id_{cAlg_R}$ *olduğundan*

$$Trunc \circ Cosk \cong XMod \circ F \circ N_{Cat} \circ cAlg_R \cong XMod \circ id_{\mathbf{c}Alg_R} \circ cAlg_R \cong id_{\mathbf{XMod}}$$

*elde edilir.*

### 5.5.3 Çaprazlanmış modüllerin (ko)homolojisi

Bir simplisel $R$-cebirin simplisel $R$-modül sınıflandırması ile (ko)homolojisi tanımlarını daha önceki bölümlerde vermiştik. Burada ifade ettiğimiz üzere bir $V = (C, R, \mu)$ çaprazlanmış modülüne karşılık $CoskV$ biçiminde bir simplisel $R$-cebir olup çaprazlanmış modüller için bu tanımlar da simplisel cebirler için verilen karşılıklarına paralel olacaktır.

$V = (C, R, \mu)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere $BV := BCoskV = DiagN(CoskV)$ simplisel $R$-modülüne $V$ nin **simplisel $R$-modül sınıflandırması** denir. Benzer şekilde $B^{(2)}V := B^{(2)}CoskV = N(CoskV)$ bisimplisel $R$-modülüne $V$ nin **bisimplisel $R$-modül sınıflandırması** denir. Buradan $V = (C, R, \mu)$ bir çaprazlanmış modül, $k$ değişmeli halka, $M$ bir $k$-modül ve $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $V$ nin $k$ üzerindeki $M$ değişkeni (coefficients) ile $n$. homolojisi

$$H_n(V, M; k) := H_n(BV, M; k),$$

ve $n$. kohomolojisi ise

$$H^n(V, M; k) := H^n(BV, M; k)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} H_n(V, k) &: = H_n(V, k; k) \\ H_n(V, M) &: = H_n(V, M; \mathbb{Z}) \\ H_n(V) &: = H_n(V, \mathbb{Z}; \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H^n(V, k) &: = H^n(V, k; k) \\ H^n(V, M) &: = H^n(V, M; \mathbb{Z}) \\ H^n(V) &: = H^n(V, \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

yazılabilir.

**Sonuç 6.** *$V = (C, R, \mu)$ bir çaprazlanmış modül, $k$ değişmeli halka ve $M$ bir $k$-modül olmak üzere*

$$\begin{aligned} H_n(V, M; k) &:= H_n(CoskV, M; k) \\ H^n(V, M; k) &:= H^n(CoskV, M; k) \end{aligned}$$

*biçimindedir.*

**İspat 15.**

$$H_n(V, M; K) = H_n(BV, M; K) = H_n(BCoskV, M; K) = H_n(CoskV, M; K)$$

*ve benzer şekilde*

$$H^n(V, M; K) = H^n(BV, M; K) = H^n(BCoskV, M; K) = H^n(CoskV, M; K)$$

*biçimindedir.*

**Uyarı 1.** $H_n(V, M; k) := H_n(CoskV, M; k) \cong H_n(\overline{W}CoskV, M; k)$ *ve* $H^n(V, M; k) := H^n(CoskV, M; k) \cong H^n(\overline{W}CoskV, M; k)$ *dir.*

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sAlg_R} & \xrightarrow{\overline{W}} & \mathbf{sMod_R} \\ N \searrow & & \nearrow Diag \\ & \mathbf{s^2Mod}_{\boldsymbol{R}} & \end{array}$$

diyagramında görülen $\overline{W}$ ile DiagN funktorları tanımlanmıştır. Daha sonra E bir simplisel R-cebir olmak üzere birinci bölümde verilen simplisel homotopi tanımları kullanılarak DiagNE ile $\overline{W}$E nin simplisel homotopi denk olduğu hatta $\overline{W}$E nin DiagNE nin bir güçlü simplisel deformasyon geriçekimi olduğu ispatlanmıştır.

Ayrıca çaprazlanmış modül kavramı ve örnekleri ile kategoriksel R-cebir kavramı ifade edilerek çaprazlanmış modül kategorisi **XMod** ile kategoriksel R-cebir kategorisi $\mathbf{cAlg}_R$ nin denkliği gösterilmiştir.

Son olarak bir çaprazlanmış R-modülün simplisel R-modül sınıflandırması tanımlanarak çaprazlanmış R-modülün (ko)homoloji tanımları ifade edilmiştir.

Böylece çaprazlanmış modüller, ideal ve modüllerin genelleştirmesi olduğundan homoloji ve kohomoloji kavramları çaprazlanmış modüller için tanımlanarak bu kavramların genelleştirilmesi sağlanmıştır.

# EK AÇIKLAMALAR

**Sayfa**

**Ek Açıklamalar-A**

**Önerme 2 İspat: (A)** $i \in \lfloor n-2, k \rfloor$ için

$$
\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-x_j) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-2 \rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-x'_j) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-2 \rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_k d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_{j+1}) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_k d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-2 \rceil}(e_{j+1}) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j+1, i+2 \rfloor} d_k s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_{j+1}) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j+1, i+2 \rfloor} d_k s_{\lceil i, n-2 \rceil}(e_{j+1}) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j+1, i+2 \rfloor} s_{\lceil i+1, j \rceil} d_k(-y_{j+1}) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j+1, i+2 \rfloor} s_{\lceil i+1, n-1 \rceil} d_k(e_{j+1}) \\
&= d_k \left( \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j+1, i+2 \rfloor} s_{\lceil i+1, j \rceil}(-y_{j+1}) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j+1, i+2 \rfloor} s_{\lceil i+1, n-1 \rceil}(e_{j+1}) \right) \\
&= d_k \left( \sum_{j \in \lceil i+2, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+2 \rfloor} s_{\lceil i+1, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i+1 \rfloor} d_{\lfloor j, i+2 \rfloor} s_{\lceil i+1, n-1 \rceil}(e_j) \right) \\
&= d_k(y_{i+1})
\end{aligned}
$$

elde edilir.

**(B)** $i = k-1$ için

$$\begin{aligned}
x_i &= x_{k-1} = \sum_{j\in\lceil k,n-2\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-x_j) + \sum_{j\in\lfloor n-2,k-1\rfloor} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,n-2\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-x'_j) + \sum_{j\in\lfloor n-2,k-1\rfloor} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,n-2\rceil} d_k d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-y_{j+1}) + \sum_{j\in\lfloor n-2,k\rfloor} d_k d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(e_{j+1}) + s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(d_k(e_k) + e_{k-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,n-2\rceil} d_{\lfloor j+1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-y_{j+1}) + \sum_{j\in\lfloor n-2,k-2\rfloor} d_{\lfloor j+1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(e_{j+1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-2\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,k-1\rfloor} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(e_j) \\
&= d_k(y_k) + \sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-2\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,k-1\rfloor} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-2\rceil}(e_j) \\
&= d_k(y_k) + \sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil} d_k(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,k-1\rfloor} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-1\rceil} d_k(e_j) \\
&= d_k(y_k) + d_k\left(\sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,k-1\rfloor} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,n-1\rceil}(e_j)\right) \\
&= d_k(y_k) + d_k(y_{k-1})
\end{aligned}$$

elde edilir.

**(C)** Son olarak, $i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-x_j) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-x'_j) + \sum_{j \in \lfloor n-2, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + (d_k d_{\lfloor k-1,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,k-2 \rceil}(-y_{k-1} - y_k)) + \\
&\quad \sum_{j \in \lceil k, n-2 \rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_{j+1}) + \sum_{j \in \lfloor n-2, k \rfloor} d_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_{j+1}) + \\
&\quad d_{\lfloor k-1,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(d_k(e_k) + e_{k-1}) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k-1, n-2 \rceil} d_{\lfloor j+1,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_{j+1}) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n-2, k-1 \rfloor} d_{\lfloor j+1,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_{j+1}) + \sum_{j \in \lfloor k-1, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k, n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-2 \rceil}(-y_j) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n-1, k \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_j) + \sum_{j \in \lfloor k-1, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} d_{k-j+i} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k, n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-2 \rceil}(-y_j) + \\
&\quad \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil} d_k(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k, n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil} d_k(-y_j) + \\
&\quad \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-2 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil} d_k(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-1 \rceil} d_k(e_j) \\
&= d_k \left( \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-1 \rceil}(e_j) \right) \\
&= d_k(y_i)
\end{aligned}$$

bulunur.

**Ek Açıklamalar-B**

**Önerme 2 İspat: (devam) (A)** $i \in \lfloor n, k+1 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
z_i &= \sum_{j\in\lceil i+1,n\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-z_j) + \sum_{j\in\lfloor n,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,n\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-z'_j) + \sum_{j\in\lfloor n,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,n\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_{j-1}) + \sum_{j\in\lfloor n,i\rfloor} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,n\rceil}(e_{j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,n\rceil} d_{\lfloor j-1,i\rfloor} s_k s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_{j-1}) + \sum_{j\in\lfloor n,i\rfloor} d_{\lfloor j-1,i\rfloor} s_k s_{\lceil i,n\rceil}(e_{j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,n\rceil} d_{\lfloor j-1,i\rfloor} s_{\lceil i-1,j-2\rceil} s_k(-y_{j-1}) + \sum_{j\in\lfloor n,i\rfloor} d_{\lfloor j-1,i\rfloor} s_{\lceil i-1,n-1\rceil} s_k(e_{j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_{\lceil i-1,j-1\rceil} s_k(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i-1\rfloor} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_{\lceil i-1,n-1\rceil} s_k(e_j) \\
&= s_k\left(\sum_{j\in\lceil i,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_{\lceil i-1,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i-1\rfloor} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_{\lceil i-1,n-1\rceil}(e_j)\right) \\
&= s_k(y_{i-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. **(B)** $i = k$ için

$$\begin{aligned}
z_i &= z_k = \sum_{j\in\lceil k+1,n\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-z_j) + \sum_{j\in\lfloor n,k\rfloor} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,n\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,n\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-z'_j) + \sum_{j\in\lfloor n,k\rfloor} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,n\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,n\rceil} s_k d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-y_{j-1}) + \sum_{j\in\lfloor n,k+1\rfloor} s_k d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,n\rceil}(e_{j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,n\rceil} d_{\lfloor j-1,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-y_{j-1}) + \sum_{j\in\lfloor n,k+1\rfloor} d_{\lfloor j-1,k+1\rfloor} s_{\lceil k,n\rceil}(e_{j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,n\rceil} s_k d_{\lfloor j,k+2\rfloor} s_{\lceil k+1,j-1\rceil}(-y_{j-1}) + \sum_{j\in\lfloor n,k+1\rfloor} s_k d_{\lfloor j,k+2\rfloor} s_{\lceil k+1,n\rceil}(e_{j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,n\rceil} d_{\lfloor j,k+2\rfloor} s_{\lceil k+1,j-1\rceil}(-z_j) + \sum_{j\in\lfloor n,k+1\rfloor} d_{\lfloor j,k+2\rfloor} s_{\lceil k+1,n\rceil}(h_j) \\
&= (-z_{k+1}) + \left(\sum_{j\in\lceil k+2,n\rceil} d_{\lfloor j,k+2\rfloor} s_{\lceil k+1,j-1\rceil}(-z_j) + \sum_{j\in\lfloor n,k+1\rfloor} d_{\lfloor j,k+2\rfloor} s_{\lceil k+1,n\rceil}(h_j)\right) \\
&= (-z_{k+1}) + z_{k+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

**(C)** Son olarak, $i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor$ için

$$
\begin{aligned}
z_i &= \sum_{j \in \lceil i+1,n \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-z_j) + \sum_{j \in \lfloor n,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,n \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-z'_j) + \sum_{j \in \lfloor n,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,k-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-z'_j) + 0 + \sum_{j \in \lceil k+1,n \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-z'_j) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n,k+1 \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(h_j) + 0 + \sum_{j \in \lfloor k-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,k-1 \rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k+1,n \rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_{j-1}) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n,k+1 \rfloor} s_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_{j-1}) + \sum_{j \in \lfloor k-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,k-1 \rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k,n-1 \rceil} s_k d_{\lfloor j+1,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j \rceil}(-y_j) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n-1,k \rfloor} s_k d_{\lfloor j+1,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_j) + \sum_{j \in \lfloor k-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,k-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{k-j+1} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k,n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j \rceil}(-y_j) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n-1,k \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_j) + \sum_{j \in \lfloor k-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,k-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil} s_k(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k,n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil} s_k(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1,n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil} s_k(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-1 \rceil} s_k(e_j) \\
&= s_k \left( \sum_{j \in \lceil i+1,n-1 \rceil} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1,i \rfloor} d_{\lfloor j,i+1 \rfloor} s_{\lceil i,n-1 \rceil}(e_j) \right) \\
&= s_k(y_i)
\end{aligned}
$$

dir.

**Ek Açıklamalar-C**

**Teorem 3 İspat: (i) (D)** Son olarak, $i \in \lfloor l-2, 0 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_i} &= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_k d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} d_k(e_{n,j}) \\
&= d_k\left(\sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j})\right) \\
&= d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Ek Açıklamalar-D**

**Teorem 3 İspat: (devam) (ii) (C)** $i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_i} &= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i \rfloor} d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-\widetilde{x'_j}) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i \rfloor} d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_k d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i \rfloor} d_k d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j \in \lfloor k-1, i \rfloor_k} d_{\lfloor k, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-1 \rceil} d_k(e_{n,j}) \\
&= d_k \left( \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j \in \lfloor k-1, i \rfloor_k} d_{\lfloor k, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-1 \rceil}(e_{n,j}) \right) \\
&= d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Ek Açıklamalar-E**

**Teorem 3 İspat: (devam) (iii) (B)** $i \in \lfloor l-3, k \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_i} &= \sum_{j\in\lceil i+1,l-3\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,i\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-3\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,i\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-3\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(\widetilde{-y_{j+1}}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,i\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j+1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_k d_{\lfloor j-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-2\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i+1\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+2\rfloor} s_{\lceil i+1,j-1\rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i+1\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+2\rfloor} s_{\lceil i+1,l-2\rceil} d_k(e_{n,j}) \\
&= d_k \left( \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+2\rfloor} s_{\lceil i+1,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i+1\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+2\rfloor} s_{\lceil i+1,l-2\rceil}(e_{n,j}) \right) \\
&= d_k(\widetilde{y_{i+1}}) = \widetilde{x'_i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**(iii) (C)** $i = k-1$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_i} &= \sum_{j\in\lceil k,l-3\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,k-1\rfloor} d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,l-3\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-\widetilde{x'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,k-1\rfloor} d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,l-3\rceil} d_k d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j+1}}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,k\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,j+1}) \\
&\quad +(d_k d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,k}) + d_k d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,k-1})) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,l-3\rceil} d_k d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j+1}}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,k-2\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,j+1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,l-2\rceil} d_k d_{\lfloor j-1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-2\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k-1\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-2\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= d_k(\widetilde{y_k}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-2\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= d_k(\widetilde{y_k}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-2\rceil} d_k(e_{n,j}) \\
&= d_k(\widetilde{y_k}) + d_k\left(\sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k\rfloor} s_{\lceil k-1,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,k\rfloor} s_{\lceil k-1,l-2\rceil}(e_{n,j})\right) \\
&= d_k(\widetilde{y_k}) + d_k(\widetilde{y_{k-1}}) = \widetilde{x'_i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**(iii) (D)** $i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_i} &= \sum_{j\in\lceil i+1,l-3\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,i\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-3\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,i\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x_j}) + d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-2\rceil}(-\widetilde{x'_{k-1}}) + \sum_{j\in\lceil k,l-3\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{x'_j}) \\
&\quad + \sum_{j\in\lfloor l-3,k\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) + d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_{k-1}) + \sum_{j\in\lfloor k-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(f_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-2\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + d_k d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-2\rceil}(-\widetilde{y_{k-1}}) + d_{k\lfloor k-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-2\rceil}(-\widetilde{y_k}) \\
&\quad + \sum_{j\in\lceil k,l-3\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j+1}}) + \sum_{j\in\lfloor l-3,k\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j+1}) + \\
&\quad d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,k}) + d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,k-1}) + \sum_{j\in\lfloor k-2,i\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k-1,l-3\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j+1}}) \\
&\quad + \sum_{j\in\lfloor l-3,k-1\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j+1}) + \sum_{j\in\lfloor k-1,i\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_k d_{\lfloor j-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-2\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \\
&\quad \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_k d_{\lfloor l-2,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-3\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \\
&\quad \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} d_k(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} d_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} d_k(e_{n,j}) \\
&= d_k\left(\sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j})\right) \\
&= d_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{x'_i}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Ek Açıklamalar-F**

**Teorem 3 İspat: (devam) (i) (D)** $i \in \lfloor l-2, 0 \rfloor$ için

$$
\begin{aligned}
\widetilde{z_i} &= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} s_k d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{k-j+i} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{k-l+i+1} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= s_k\left(\sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j})\right) \\
&= s_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{z'_i}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

**Ek Açıklamalar-G**

**Teorem 3 İspat: (devam) (ii) (C)** $i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}_i &= \sum_{j\in\lceil i+1,k\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z}_j) + \sum_{j\in\lfloor k,i\rfloor} d_{\lfloor k+1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z}'_j) + \sum_{j\in\lfloor k,i\rfloor} d_{\lfloor k+1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y}_j) + \sum_{j\in\lfloor k-1,i\rfloor} s_k d_{\lfloor k+1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y}_j) + \sum_{j\in\lfloor k-1,i\rfloor} d_{\lfloor k,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-1\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= s_k\left(\sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y}_j) + \sum_{j\in\lfloor k-1,i\rfloor} d_{\lfloor k,i+1\rfloor} s_{\lceil i,k-1\rceil} s_k(e_{n,j})\right) \\
&= s_k(\widetilde{y}_i) = \widetilde{z}'_i
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Ek Açıklamalar-H**

**Teorem 3 İspat: (devam) (iii) (B)** $i \in \lfloor l-1, k+1 \rfloor$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{z_i} &= \sum_{j\in\lceil i+1,l-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,i\rfloor} d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,i\rfloor} d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j-1}}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,i\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i,l-2\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i-1\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i,l-2\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i-1\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_k s_{\lceil i,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,i\rfloor} s_k s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_{\lceil i-1,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,i\rfloor} s_{\lceil i-1,l-2\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= s_k \left( \sum_{j\in\lceil i,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i\rfloor} s_{\lceil i-1,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i-1\rfloor} d_{\lfloor l-1,i\rfloor} s_{\lceil i-1,l-2\rceil}(e_{n,j}) \right) \\
&= s_k(\widetilde{y_{i-1}}) = \widetilde{z'_i}
\end{aligned}$$

bulunur.

**(iii) (C)** $i = k$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{z_i} &= \widetilde{z_k} = \sum_{j\in\lceil k+1,l-1\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-\widetilde{z_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,k\rfloor} d_{\lfloor l,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-1\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,l-1\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-\widetilde{z'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,k\rfloor} d_{\lfloor l,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-1\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil k+1,l-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j-1}}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,k+1\rfloor} s_k d_{\lfloor l,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-1\rceil}(e_{n,j-1}) \\
&= \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} s_k d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k\rfloor} s_k d_{\lfloor l,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= s_k d_{k+1} s_k(-\widetilde{y_k}) + \sum_{j\in\lceil k+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k\rfloor} s_k d_{\lfloor l,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= s_k(-\widetilde{y_k}) + \sum_{j\in\lceil k+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k\rfloor} d_{\lfloor l-1,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-2\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= s_k(-\widetilde{y_k}) + s_k \left( \sum_{j\in\lceil k+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,k+1\rfloor} s_{\lceil k,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,k\rfloor} d_{\lfloor l-1,k+1\rfloor} s_{\lceil k,l-2\rceil}(e_{n,j}) \right) \\
&= s_k(-\widetilde{y_k}) + s_k(\widetilde{y_k}) = 0 = \widetilde{z'_i}
\end{aligned}$$

dir.

**(iii) (D)** $i \in \lfloor k-1, 0 \rfloor$ için,

$$\begin{aligned}
\widetilde{z_i} &= \sum_{j\in\lceil i+1,l-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,i\rfloor} d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{z'_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-1,i\rfloor} d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(h_j) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k+1,l-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_{j-1}}) \\
&\quad + \sum_{j\in\lfloor l-1,k+1\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j-1}) + \sum_{j\in\lfloor k-1,i\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} s_k d_{\lfloor j+1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) \\
&\quad + \sum_{j\in\lfloor l-2,k\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j}) + \sum_{j\in\lfloor k-1,i\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} s_k d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} s_k d_{\lfloor j+1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} s_k d_{\lfloor l,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-1\rceil}(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{k-j+i} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lceil k,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil} s_k(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil} s_k(e_{n,j}) \\
&= s_k\left(\sum_{j\in\lceil i+1,l-2\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor} s_{\lceil i,j-1\rceil}(-\widetilde{y_j}) + \sum_{j\in\lfloor l-2,i\rfloor} d_{\lfloor l-1,i+1\rfloor} s_{\lceil i,l-2\rceil}(e_{n,j})\right) \\
&= s_k(\widetilde{y_i}) = \widetilde{z'_i}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Ek Açıklamalar-I**

**Teorem 3 İspat: (devam)**

$$
\begin{aligned}
d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(y_i) &= d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}\left(\sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_j)\right)\\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,n-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(e_j)\\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-1\rceil}s_{\lceil k,j-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-1\rceil}s_{\lceil k,n-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(e_j)\\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}d_{\lfloor i+k-1-j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i+1,i+j-k\rceil}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-1\rceil}d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i+1,i+n-k\rceil}s_{\lceil i,k-2\rceil}(e_j)\\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}d_{\lfloor i+k-1-j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_i s_{\lceil i+1,i+j-k\rceil}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_i s_{\lceil i+1,i+n-k\rceil}s_{\lceil i,k-2\rceil}(e_j)\\
&= \sum_{j\in\lceil i+1,k-1\rceil} d_{\lfloor k-1,i+1\rfloor}s_{\lceil i,k-2\rceil}(-y_j) + \sum_{j\in\lceil k,n-1\rceil} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,j-1\rceil}(-y_j) +\\
&\quad \sum_{j\in\lfloor n-1,i\rfloor} d_{\lfloor j,i+1\rfloor}s_{\lceil i,n-1\rceil}(e_j)
\end{aligned}
$$

olup $i \in \lfloor k-2, 0 \rfloor$ üzerinde tümevarım gereği

$$\begin{aligned}
y_i^{(n+1-k)} &= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j^{(n+1-k)}) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i \rfloor} d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(y_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i \rfloor} d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(y_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor k-2, i+1 \rfloor} d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(y_j) \\
&\quad + \sum_{j \in \lceil i+1, k-1 \rceil} d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lceil k, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) \\
&\quad + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, k-2 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + d_{\lfloor k-1, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, k-2 \rceil}(-y_{k-1}) \\
&\quad + \sum_{j \in \lceil k, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(e_j) \\
&= \sum_{j \in \lceil i+1, n-1 \rceil} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, j-1 \rceil}(-y_j) + \sum_{j \in \lfloor n-1, i \rfloor} d_{\lfloor j, i+1 \rfloor} s_{\lceil i, n-1 \rceil}(e_j) \\
&= y_i
\end{aligned}$$

olur.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Arvasi, Z ve Porter, T, 1997, Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, *Theory and Applications of Categories* 3.1, 1–23.

Baues, H.-J. ve Wirsching, G., 1985, Cohomology of small categories, *Journal of pure and applied algebra* 38.2-3, 187–211.

Carrasco, P., Cegarra, A. M., vd. 2002, (Co) Homology of crossed modules, *Journal of Pure and Applied Algebra* 168.2-3, 147–176.

Curtis, E. B., 1971, Simplicial homotopy theory, *Advances in Mathematics* 6.2, 107–209.

Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1947a, Cohomology theory in abstract groups. I, *Annals of mathematics*, 51–78.

— 1947b, Cohomology theory in abstract groups. II: Group extensions with a non-abelian kernel, *Annals of Mathematics*, 326–341.

Ellis, G. J., 1992, Homology of 2-Types, *Journal of the London Mathematical Society* 2.1, 1–27.

Gerstenhaber, M., 1964, On the deformation of rings and algebras, *Annals of Mathematics*, 59–103.

Goerss, P. G. ve Jardine, J. F., 2009, *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)


Hungerford, T. W., 2012, *Abstract algebra: an introduction*. Cengage Learning.

Lichtenbaum, S. ve Schlessinger, M., 1967, The cotangent complex of a morphism, *Transactions of the American Mathematical Society* 128.1, 41–70.

May, J. P., 1992, *Simplicial objects in algebraic topology*. Vol. 11. University of Chicago Press.

Porter, T., 1986, Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconcelos, *Journal of Algebra* 99.2, 458–465.

Quillen, D., 1973, Higher algebraic K-theory: I, *Higher K-theories*. Springer, 85–147.

Thomas, S., 2007, (Co)homology of crossed modules, *PhD Thesis, RWTH Aachen University*.

Weibel, C. A., 1995, *An introduction to homological algebra*. 38. Cambridge university press.

Whitehead, J. H. C., 1949, Combinatorial homotopy. II, *Bulletin of the American Mathematical Society* 55.5, 453–496.

# ÖZGEÇMİŞ

Elif ILGAZ ÇAĞLAYAN 1989 yılında Eskişehir'in Mihalıççık ilçesinde doğmuştur. Lise öğrenimini 2007 yılında Eskişehir Kılıçoğlu Anadolu Lisesi'nde tamamlayarak aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik Bölümünde üniversite öğrenimine başlamıştır. Dört yıllık üniversite eğitim hayatı boyunca akademisyen olmayı hedefleyerek hep bu doğrultuda çalışmış ve 2011 yılında lisanstan mezun olduktan sonra yine aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik-Bilgisayar bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atanmıştır. 2011-2013 yılları arasında Topoloji anabilim dalında yükseklisans öğrenimini tamamlamış ve devamında da doktora öğrenimine başlamıştır.