Bulanık Kümeler ve Bulanık Geometriler Üzerine

Temel Ermiş

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

NİSAN 2009

On The Fuzzy Sets and Fuzzy Geometries

Temel Ermiş

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

APRIL 2009

Bulanık Kümeler ve Bulanık Geometriler Üzerine

Temel Ermiş

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Rüstem Kaya

Nisan 2009

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Temel Ermiş'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Bulanık Kümeler ve Bulanık Geometrileri Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Danışman Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

Üye : Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Yrd.Doç.Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Yrd.Doç.Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, Fuzzy Kümelerden hareketle, Fuzzy Projektif Uzayların özellikleri incelenmiştir.

İlk bölümde, gerekli olan bazı tanımlar verilmiş; ilk olarak Fuzzy Küme kavramı ve özellikleri açıklanmıştır, daha sonra Klasik Küme kavramı ile Fuzzy Küme arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur. Bu bölümdeki genel bilgiler literatürden özetlenerek verilmiştir.

İkinci bölümde, Fuzzy Vektör Uzayı tanıtılmıştır. Bunun için ilk olarak Fuzzy Lineer bağımsızlık kavramı verilmiştir. Sonra Fuzzy Taban kavramı verilerek, tüm Fuzzy Vektör Uzaylarının hangi şartlar altında bir Fuzzy Tabana sahip olacağı üzerinde durulmuştur. Daha sonra ise Fuzzy Tabansız bir Fuzzy Vektör Uzayı incelenmiştir. Son olarak Fuzzy Vektör Uzaylarında Boyut Kavramı üzerinde durulmuştur.

Son bölüm olan üçüncü bölümde, Öklid Uzayın Genişlemesi olan Projektif Uzay hakkında genel bilgiler verilip, Vektör Uzay ile Projektif Uzay arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur. Daha sonra Fuzzy Projektif Uzayın; Fuzzy Nokta, Fuzzy Doğru ve Fuzzy Düzlem kavramları tanıtılmış ve Fuzzy Vektör Uzayı ile Fuzzy Projektif Uzay arasındaki ilişki incelenmiştir

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Küme, Fuzzy Geometri, Vektör Uzay, Fuzzy Vektör Uzay, Projektif Uzay, Fuzzy Projektif Uzay.

SUMMARY

In the thesis, we have investigated the properties of Fuzzy Projective Space by using Fuzzy Sets.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapter are given. First of all, the concept and of Fuzzy Sets and its properties are explained. Later, the relations between the concept of crisp sets and fuzzy sets are studied. Infact, this chapter is summarized from some known references.

In second chapter, the concept of Fuzzy Vector Space, Fuzzy Linear Independence and Fuzzy Base are introduced. Necessary condition need for Fuzzy Base on all of Fuzzy Vector Space is examined. Later, the concept of dimension for fuzzy vector space is studied.

In the last chapter, after general information about Projective Space extensioning Euclidean Space is given, the relation between the Vector Space and Projective Space is studied. Later, the concept which are Fuzzy Point, Fuzzy Line and Fuzzy Plane of Fuzzy Projective Space is introduced and then the relation between Fuzzy Vector Space and Fuzzy Projective Space are investigated.

Keywords: Fuzzy Set, Fuzzy Geometries, Vector Space, Fuzzy Vector Space, Projective Space, Fuzzy Projective Space.

TEŞEKKÜR

Akademik kariyerimin başlangıcından itibaren bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım sayın

Prof. Dr. Rüstem KAYA'ya,

tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen her kararımda yanımda olan aileme ve her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen tüm meslektaşlarıma ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2009 Temel ERMİŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bulanık (fuzzy) kavramını açıklayan aşağıdaki üç paragraf [1] de verilmektedir: Etrafımızda ilgimizi çeken bir çok sorunun yorumlanmasında sayısal bilgiden ziyade fazlaca kendi görüş, değer yargısı, takdir ve düşüncelerimizi sözel olarak ifade ederek olayları inceleriz. Bu ifadelerin anlamlı olmaları ve başkalarına iletilebilmesi için mutlaka her insanın en az bir tane dile (anadil) ihtiyacı vardır. Dil ne kadar kesin olmayan kelime ve cümle ihtiva etse bile, insan iletişiminde ve bilgi akışında en etkin olan bir araçtır. Dildeki belirsizliklere rağmen insanoğlu onunla birbirini kolayca anlayabilmektedir. Örneğin " hava sıcak " denildiğinde herkes hava kelimesinin günlük hayattaki kullanımını kesinlikle anlamakta ancak " sıcak " kelimesinin ifade ettiği anlam izafi olarak birbirinden farklı olabilimektedir. Kutuplarda bulunan bir kişinin sıcak için 15° C ' yi algılamasına karşılık ekvator civarında yaşayan bir kişi için bu 35° C ' yi bulabilir. Arada birçok kişinin görüşü olarak başka derecelerde bulunabilir. Böylece " sıcak " kelimesinin altında insanların ima ettiği sayısal anlayışın bir sonucu olarak belirsiz bir durum ortaya çıkar. Bu rastgele değildir, ancak belirsizdir ve bu şekilde kelimelerin ima ettikleri belirsizliklere **bulanıklık** (fuzzy) denir. Burada hemen dikkat etmemiz gerekli bir nokta sadece " sıcak " kelimesinin ne kadar fazla bir sayısal dereceler topluluğu temsil ettiğidir. İşte bu gibi sayısal topluluklara ileriki bölümlerde küme adı verilecektir. Bazı insanların sıcaklığı 15° C , bazılarının ise 35° C gibi oldukça farklı sayısal biçimde algılamasına karşılık, bu insanlar arasında ihtilaf bulunmaz. İşte bulanık mantığın güzelliklerinden bir tanesi budur. Ancak Aristo mantığı geçerli sayılacak olsa idi iki grup insan arasında sürekli anlaşmazlıklar bulunacaktı. Çünkü Aristo mantığında sıcak ve soğuk vardır ve de ikisinin arasına müsade edilmez.

Bulanık mantığın en geçerli olduğu iki durumdan ilki incelenen olayların çok karmaşık olması ve bununla ilgili yeterli bilginin bulunmaması durumunda kişilerin görüş ve değer yargılarına yer verilmesi, ikincisi ise insan muhakemesine, kavrayışlarına ve karar vermesine ihtiyaç gösteren hallerdir. Bulanık mantıktan, karşılaşılan her türlü sorunun karmaşıkta olsa çözülebileceği anlamı çıkarılmamalıdır. Ancak, en azından insan düşüncelerinin incelenen olayla ilgili olarak bazı sözel çıkarımlarda bulunmasından dolayı en azından daha iyi anlaşılabileceği sonucuna varılabilir.

Günlük örneklerden bir tanesi, bir annenin çocuğuna fırına koyduğu keklerin pişmesi durumunda fırını kapatmasını söylemesi için ya sayısal olarak sıcaklığın hangi dereceye kadar devam etmesini veya daha basit olarak keklerin üstünün açık kahverengi olmaya başlaması halinde kapatmasını söyleyebilir. Bunlardan ikinci tür bilgi bulanıktır ve sayısal yönleri ima etmesine rağmen kesinlik olarak bilinmemektedir. İkinci tür sözel bilginin ise yani renk bilgisinin bir çok kişi tarafından tercih edildiği gerçektir. O halde böyle bilgileri bilgisayarlara tanıtarak bulanık işlemlerin yapılması temin etmek yoluna gidilmelidir. İşte bu yoldaki en geçerli yöntembilim (metodoloji) **bulanık küme**, **mantık** ve **sistemleridir.** Yukarıdaki kek örneğinde, sıcaklığın $60^\circ\ C$ olması gibi bir bilgiyi kullanmak oldukça zordur, fakat keklerin piştiğini açık kahverengi rengin belirmesi ile çocuk bile anlayacaktır.

Tanım 1.0.1 *X boş kümeden farklı bir küme ve A, X in keyfi bir alt kümesi olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} \chi_A \quad &: X \longrightarrow \{0,1\} \quad \textit{öyleki} \\ x \longrightarrow \chi_A(x) &= \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı χ_A fonksiyonuna A nın karakteristik fonksiyonu denir.

Karakteristik fonksiyon X kümesinin herhangi bir alt kümesini belirlemek için kullanılmaktadır [2]. Yani $x \in A$ ile x in A kümesine ait olduğu, $x \notin A$ ile de x in A kümesine ait olmadığı ifade edilir [3].

Sıklıkla gerçel dünyada karşılaşılan objelerin hangi sınıfa ait oldukları kesin olarak tanımlanmamıştır. Örneğin hayvanlar sınıfı köpekler, atlar, kuşlar gibi objeleri içerirken, bitkiler, akışkanlar veya kayalar gibi objeleri içermez. Fakat deniz yıldızı ve bakteri gibi objeler hayvanlar sınıfına ait olma ile ilgili belirsiz bir duruma sahiptir [4]. Bu tür durumlarda karakteristik fonksiyon kullanmak anlamsızlaşır. Belirsiz objeler için bu elemanların kümeye ait olup olmadıklarını derecelendirmek suretiyle bir yol izlenebilir [2]. Bu yorumun ışığında anlatımımıza devam edelim.

1.1 Bulanık Kümeler ve Üyelik Dereceleri

Tanım 1.1.1 *X boş kümeden farklı bir küme ve X üzerinde bir bulanık (fuzzy) küme A ise, bu takdirde A bulanık kümesi*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

şeklinde tanımlı fonsiyon yardımıyla karakterize edilen kümedir. Ayrıca μ_A fonksiyonuna A nın üyelik fonksiyonu da denir. Burada $\mu_A(x)$, $x \in X$ in üyelik derecesidir. A klasik anlamda bir küme ise A nın üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Yani

$$\mu_A(x) = 1 \ \textit{ise} \ x \in A \ \textit{dır}.$$
$$\mu_A(x) = 0 \ \textit{ise} \ x \notin A \ \textit{dır}.$$
$$\mu_A(x) \in [0,1] \ \textit{ise} \ x, \ A \ \textit{ya} \ \mu_A(x) \ \textit{kadar aittir}.$$

A, X üzerinde bir bulanık (fuzzy) küme ise $A = \{(\mu_A(x), x) : x \in X\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Ya da kısaca μ_A ile gösterilebilir.

Şimdi şu problemi ortaya koyalım: Bir okuyucunun bir dakikada okuduğu kelime sayısının değişim aralığı 80 den 800 e kadar olsun. Yani X=$\{x : 80 \leq x \leq 800, \ x \in \mathbb{Z}\}$ alalım. X kümesinin $Y = \{x : 80 \leq x \leq 160, \ x \in \mathbb{Z}\}$ şeklindeki yavaş, $O = \{x : 220 \leq x \leq 320, \ x \in \mathbb{Z}\}$ şeklindeki orta ve $H = \{x : 500 \leq x \leq 800, \ x \in \mathbb{Z}\}$ şeklindeki hızlı alt kümelerini düşünelim. Bu takdirde üç okuyucunun okuduğu kelime sayısının nasıl değerlendirileceğine bakalım. 319 kelime okumuş bir okuyucu orta hızda olarak değerlendirilirken, 321 kelime okumuş bir okuyucu nasıl değerlendirelecektir? Bu değerlendirmede üzerinde durulması gereken iki nokta vardır. Birincisi 320 kelime okumuş bir okuyucu nasıl değerlendirilecektir? (orta mı? hızlı mı?) İkincisi 319 ile 321 arasındaki keskin ayrımın daha yumuşatarak verilip verilemeyeceğidir. Burada verilen problemin üstesinden gelebilmek için bulanık (fuzzy) mantığa ihtiyaç duyulacaktır. Bunun için de bulanık (fuzzy) mantığın temel kavramları izleyen paragraflarda verilebilir.

1.2 Bulanık Kümeler Üzerindeki Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1 *A, X üzerindeki bir bulanık (fuzzy) küme olsun. Eğer $\mu_A = 0$ ise A ya bulanık boş küme denir.*

Tanım 1.2.2 *A ve B, X üzerindeki iki bulanık (fuzzy) küme olsun. Eğer $\forall\ x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B bulanık (fuzzy) kümelerine eşittir denir ve kısaca $\mu_A = \mu_B$ ile gösterilir.*

Tanım 1.2.3 *X üzerindeki bir A bulanık (fuzzy) kümesinin tümleyeni $A^{\mathbf{t}}$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu*

$$\forall\ x \in X \ \text{için}\ \mu_{A^t}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.4 *A ve B, X üzerindeki herhangi iki bulanık (fuzzy) küme olsun. Eğer $\forall\ x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise B bulanık (fuzzy) kümesi A bulanık (fuzzy) kümesini kapsar denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.*

A, X üzerindeki bir bulanık (fuzzy) küme olsun. Bu takdirde; $\forall\ x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ ve $\mu_X(x) = 1$ olduğundan, $\mu_A(x) \leq \mu_X(x)$ dır. Dolayısıyla X üzerindeki bir A bulanık (fuzzy) kümesine, X in bulanık (fuzzy) alt kümeside denir [3] .

Tanım 1.2.5 *X üzerindeki üyelik fonksiyonları sırası ile μ_A ve μ_B olan herhangi iki bulanık (fuzzy) küme A ve B olsun. Bu taktirde A ve B bulanık (fuzzy) kümelerinin birleşimide bulanık (fuzzy) kümedir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $A \cup B$ bulanık (fuzzy) kümesinin üyelik fonksiyonu*

$$\forall\ x \in X \ \text{için}\ \mu_{A \cup B}(x) = Max\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır ve kısalık hatırına $\mu_A \vee \mu_B$ şeklinde gösterilir.

A ve B bulanık (fuzzy) kümelerini kapsayan en küçük bulanık (fuzzy) küme $A \cup B$ dir. Yani D, A ve B yi içeren bir bulanık (fuzzy) küme ise D, aynı zamanda $A \cup B$ yi de kapsar. (1.1) ifadesine denk olan bu ifadeyi göstermek gerekirse

$$Max\,[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_A \quad \text{ve} \quad Max\,[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_B$$

dir. Eğer D, A ve B yi içeren herhangi bir bulanık (fuzzy) küme ise $\mu_D \geq \mu_A$ ve $\mu_D \geq \mu_B$ dir. Böylece

$$\mu_D \geq Max\,[\mu_A, \mu_B] \Longrightarrow A \cup B \subset D$$

elde edilir [4].

Tanım 1.2.6 *X üzerindeki üyelik fonksiyonları sırası ile μ_A ve μ_B olan herhangi iki bulanık (fuzzy) küme A ve B olsun. Bu taktirde A ve B bulanık (fuzzy) kümelerinin kesişimide bir bulanık (fuzzy) kümedir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $A \cap B$ bulanık (fuzzy) kümesinin üyelik fonksiyonu*

$$\forall\ x \in X \ \text{için}\ \mu_{A \cap B}(x) = Min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır ve kısalık hatırına $\mu_A \wedge \mu_B$ şeklinde gösterilir.

A ve B bulanık (fuzzy) kümelerinin kapsadığı en büyük bulanık (fuzzy) küme $A \cap B$ dir. Yani D, A ve B nin içerdiği bir bulanık (fuzzy) küme ise D yi aynı zamanda $A \cap B$ de içerir. (1.2) ifadesine denk olan bu ifadeyi göstermek gerekirse

$$Min\,[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_D$$

dir. Eğer D, A ve B nin içerdiği herhangi bir bulanık (fuzzy) küme ise

$$\mu_A \geq \mu_D \quad \text{ve} \quad \mu_B \geq \mu_D$$

dir. Böylece

$$\mu_D \leq Min\,[\mu_A, \mu_B] \Longrightarrow D \subset A \cap B$$

elde edilir [4].

Tanım 1.2.7 *A, X kümesi üzerinde bir bulanık (fuzzy) küme olmak üzere*

$$day(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

kümesine A kümesinin dayanağı adı verilir.

Tanım 1.2.8 *A, X kümesi üzerinde bir bulanık (fuzzy) kümesi olmak üzere*

$$mer(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$$

kümesine A kümesinin merkezi denir.

Tanım 1.2.9 *A, X kümesi üzerinde bir bulanık (fuzzy) küme olsun. Eğer $mer(A) \neq \varnothing$ ise A ya normal bulanık küme, $mer(A) = \varnothing$ ise A ya altnormal bulanık küme adı verilir.*

Tanım 1.2.10 *A, X kümesi üzerinde bir bulanık (fuzzy) küme olmak üzere*

$$y\ddot{u}k(A) = \sup\{\mu_A(x) : x \in X\}$$

reel sayısına A kümesinin yüksekliği denir.

1.3 Bulanık Kümeler Üzerindeki Temel Kavramların Özellikleri

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen, bulanık kümeler üzerindeki temel kavramlar yardımıyla klasik kümelerdeki temel özellikler, bulanık kümelere genişletilecektir.

Teorem 1.3.1 *Boştan farklı bir X kümesi üzerinde A, B ve C bulanık (fuzzy) kümeleri verilsin. Buna göre,*

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

e) $A \cup A = A$

f) $A \cap A = A$

g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ı) $A \cup (A \cap B) = A$

i) $A \cap (A \cup B) = A$

j) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$

k) $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$

l) $\left(A^t\right)^t = A$

m) $(A^t \cup B) \cap (A \cup B^t) = (A^t \cap B^t) \cup (A \cap B)$

n) $(A^t \cap B) \cup (A \cap B^t) = (A^t \cup B^t) \cap (A \cup B)$

o) $A \cap \varnothing = \varnothing$

ö) $A \cup X = X$

p) $A \cup \varnothing = A$

r) $A \cap X = A$.

İspat: A, B ve C bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A, μ_B ve μ_C olmak üzere ;

a) $\forall\ x \in X$ için,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{A\cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &= \max\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_{B\cup A}(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A \cup B = B \cup A \text{ dır.}$$

b) $\forall\ x \in X$ için,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{A\cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &= \min\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_{A\cap B}(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A \cap B = B \cap A \text{ dır.}$$

c) $\forall\, x \in X$ için, $\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\}$ dir ve $\max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\}$ için altı durum vardır. Bunlar;

Durum 1: $\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_C(x)$, **Durum 2:** $\mu_A(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_B(x)$

Durum 3: $\mu_B(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_C(x)$, **Durum 4:** $\mu_B(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_A(x)$

Durum 5: $\mu_C(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_B(x)$, **Durum 6:** $\mu_C(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_A(x)$

şeklindedir.

Durum 1: $\forall\, x \in X$ ve $\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_C(x)$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \mu_A(x) \\
&= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cup C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

Durum 2: $\forall\, x \in X$ ve $\mu_A(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_B(x)$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \mu_A(x) \\
&= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cup C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

Durum 3: $\forall\, x \in X$ ve $\mu_B(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_C(x)$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \mu_B(x) \\
&= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cup C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

Durum 4: $\forall\ x \in X$ ve $\mu_B(x) \geq \mu_C(x) \geq \mu_A(x)$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \mu_B(x) \\
&= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cup C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

Durum 5: $\forall\ x \in X$ ve $\mu_C(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \mu_C(x) \\
&= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cup C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

Durum 6: $\forall\ x \in X$ ve $\mu_C(x) \geq \mu_B(x) \geq \mu_A(x)$ ise,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cup C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \mu_C(x) \\
&= \max\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \max\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cup C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir.

d) $\forall\ x \in X$ için $\mu_{A\cap(B\cap C)}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\}$ dir ve $\min\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\}$

için altı durum vardır. Bu durumlar c) nin ispatında olduğu gibi düşünülürek,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cap(B\cap C)}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \min\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \mu_C(x)\} \\
&= \mu_{(A\cap B)\cap C}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ dir.

e) $\forall\ x \in X$ için, $\mu_{A\cup A}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} = \mu_A(x) \implies A \cup A = A$ dır.

f) $\forall\ x \in X$ için, $\mu_{A\cap A}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} = \mu_A(x) \implies A \cap A = A$ dır.

g) $\forall\ x \in X$ için, $\mu_{A\cup(B\cap C)}(x)$=$\max\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\}$ dır ve $\max\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\}$ için altı durum vardır. Bu durumlar c) nin ispatında olduğu gibi düşünülürek,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\} \\
&= \max\{\mu_A(x), \min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \min\{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \min\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_{A\cup C}(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dir.

h) $\forall\ x \in X$ için, $\mu_{A\cap(B\cup C)}(x)$=$\min\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\}$ dır ve $\min\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\}$ için altı durum vardır. Bu durumlar c) nin ispatında olduğu gibi düşünülürek,

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_{B\cup C}(x)\} \\
&= \min\{\mu_A(x), \max\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \max\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= \max\{\mu_{A\cap B}(x), \mu_{A\cap C}(x)\} \\
&= \mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.

ı) $\forall\, x \in X$ için, $\mu_{A\cup(A\cap B)}(x)$=$\max\{\mu_A(x), \mu_{A\cap B}(x)\}$=$\max\{\mu_A(x), \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$ dir. Burada $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ değerlerine göre iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{A\cup(A\cap B)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{A\cap B}(x)\} \\ &= \max\{\mu_A(x), \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \\ &= \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_A(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A\cup(A\cap B) = A \text{ dır.}$$

Durum 2: $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ ise,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{A\cup(A\cap B)}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{A\cap B}(x)\} \\ &\max\{\mu_A(x), \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \\ &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &= \mu_A(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A\cup(A\cap B) = A \text{ dır.}$$

i) $\forall\, x \in X$ için, $\mu_{A\cap(A\cup B)}(x)$=$\min\{\mu_A(x), \mu_{A\cup B}(x)\}$=$\min\{\mu_A(x), \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$ dir. Burada $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ değerlerine göre iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{A\cap(A\cup B)}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_{A\cup B}(x)\} \\ &= \min\{\mu_A(x), \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \\ &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &= \mu_A(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A\cap(A\cup B) = A \text{ dır.}$$

Durum 2: $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ ise,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{A\cap(A\cup B)}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_{A\cup B}(x)\} \\ &= \min\{\mu_A(x), \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \\ &= \min\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_A(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A\cap(A\cup B) = A \text{ dır.}$$

j) $\forall\, x \in X$ için, $\mu_{(A\cup B)^t}(x) = 1 - \mu_{(A\cup B)}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ dir. Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $(\mu_{B^t}(x) \leq \mu_{A^t}(x))$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{(A\cup B)^t}(x) &= 1-\mu_{(A\cup B)}(x)\\ &= 1-\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\\ &= 1-\mu_B(x)\\ &= \mu_{B^t}(x)\\ &= \min\{\mu_{A^t}(x),\mu_{B^t}(x)\}\\ &= \mu_{A^t\cap B^t}(x)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (A\cup B)^t = A^t \cap B^t \text{ dir.}$$

Durum 2: $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ ise $(\mu_{A^t}(x) \leq \mu_{B^t}(x))$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{(A\cup B)^t}(x) &= 1-\mu_{(A\cup B)}(x)\\ &= 1-\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\\ &= 1-\mu_A(x)\\ &= \mu_{A^t}(x)\\ &= \min\{\mu_{A^t}(x),\mu_{B^t}(x)\}\\ &= \mu_{A^t\cap B^t}(x)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (A\cup B)^t = A^t \cap B^t \text{ dir.}$$

k) $\forall\, x \in X$ için, $\mu_{(A\cap B)^t}(x) = 1-\mu_{(A\cap B)}(x) = 1-\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$ dir. Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $(\mu_{B^t}(x) \leq \mu_{A^t}(x))$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{(A\cap B)^t}(x) &= 1-\mu_{(A\cap B)}(x)\\ &= 1-\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\\ &= 1-\mu_A(x)\\ &= \mu_{A^t}(x)\\ &= \max\{\mu_{A^t}(x),\mu_{B^t}(x)\}\\ &= \mu_{A^t\cup B^t}(x)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (A\cap B)^t = A^t \cup B^t \text{ dir.}$$

Durum 2: $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ ise $(\mu_{A^t}(x) \leq \mu_{B^t}(x))$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{(A\cap B)^t}(x) &= 1-\mu_{(A\cap B)}(x)\\ &= 1-\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}\\ &= 1-\mu_B(x)\\ &= \mu_{B^t}(x)\\ &= \max\{\mu_{A^t}(x),\mu_{B^t}(x)\}\\ &= \mu_{A^t\cup B^t}(x)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (A\cap B)^t = A^t \cup B^t \text{ dir.}$$

l) $\forall\, x \in X$ için, $\mu_{(A^t)^t}(x) = 1 - (1 - \mu_A(x)) = \mu_A(x) \implies (A^t)^t = A$ dır.

m) $\forall\, x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \mu_{(A^t \cup B) \cap (A \cup B^t)}(x) &= \min\{\mu_{A^t \cup B}(x), \mu_{A \cup B^t}(x)\} \\ &= \min\{\max\{\mu_{A^t}(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_{B^t}(x)\}\} \end{aligned}$$

dır. Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\forall\, x \in X$ için $\mu_{A^t}(x) \leq \mu_B(x)$ ise,

$$\begin{aligned} \mu_{A^t}(x) \leq \mu_B(x) &\implies -\mu_{A^t}(x) \geq -\mu_B(x) \\ &\implies 1 - \mu_{A^t}(x) \geq 1 - \mu_B(x) \\ &\implies \mu_A(x) \geq \mu_{B^t}(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_{A^t \cap B^t}(x) &= \min\{\mu_{A^t}(x), \mu_{B^t}(x)\} \\ &\leq \min\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_{(A \cap B)}(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

sonuçları elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \mu_{\left(A^t \cup B\right) \cap (A \cup B^t)}(x) &= \min\{\mu_{A^t \cup B}(x), \mu_{A \cup B^t}(x)\} \\ &= \min\{\max\{\mu_{A^t}(x), \mu_B(x)\}, \max\{\mu_A(x), \mu_{B^t}(x)\}\} \quad ((1.3) \text{ den}) \\ &= \min\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_{(A \cap B)}(x) \\ &= \max\left\{\mu_{A^t \cap B^t}(x), \mu_{(A \cap B)}(x)\right\} \qquad ((1.4) \text{ den}) \\ &= \mu_{(A^t \cap B^t) \cup (A \cap B)}(x) \end{aligned}$$

dır. Yani $\mu_{(A^t \cup B) \cap (A \cup B^t)}(x) = \mu_{(A^t \cap B^t) \cup (A \cap B)}(x)$ eşitliği bulunur.

Durum 2: $\forall\, x \in X$ için $\mu_{A^t}(x) \geq \mu_B(x)$ ise,

$$\begin{aligned} \mu_{A^t}(x) \geq \mu_B(x) &\implies -\mu_{A^t}(x) \leq -\mu_B(x) \\ &\implies 1 - \mu_{A^t}(x) \leq 1 - \mu_B(x) \\ &\implies \mu_A(x) \leq \mu_{B^t}(x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cap B)}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ &\leq \min\{\mu_{B^t}(x), \mu_{A^t}(x)\} \qquad ((1.5) \text{ den}) \\ &= \mu_{A^t \cap B^t}(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \mu_{A^t\cup B}(x) &= \max\{\mu_{A^t}(x), \mu_B(x)\} &= \mu_{A^t}(x) \\ \mu_{A\cup B^t}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_{B^t}(x)\} &= \mu_{B^t}(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

sonuçları elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \mu_{(A^t\cap B^t)\cup(A\cap B)}(x) &= \max\left\{\mu_{A^t\cap B^t}(x), \mu_{(A\cap B)}(x)\right\} \\ &= \mu_{A^t\cap B^t}(x) \qquad ((1.6) \text{ dan}) \\ &= \min\{\mu_{A^t}(x), \mu_{B^t}(x)\} \\ &= \min\{\mu_{A^t\cup B}(x), \mu_{A\cup B^t}(x)\} \qquad ((1.7) \text{ den}) \\ &= \mu_{(A^t\cup B)\cap(A\cup B^t)}(x) \end{aligned}$$

dır. Yani $\mu_{\left(A^t\cup B\right)\cap(A\cup B^t)}(x) = \mu_{(A^t\cap B^t)\cup(A\cap B)}(x)$ eşitliği elde edilir.

n) $\forall\ x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \mu_{\left(A^t\cap B\right)\cup(A\cap B^t)}(x) &= \max\{\mu_{A^t\cap B}(x), \mu_{A\cap B^t}(x)\} \\ &= \max\{\min\{\mu_{A^t}(x), \mu_B(x)\}, \min\{\mu_A(x), \mu_{B^t}(x)\}\} \end{aligned}$$

dır. Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\forall\ x \in X$ için $\mu_{A^t}(x) \leq \mu_B(x)$ ise,

$$\begin{aligned} \mu_{A^t}(x) \leq \mu_B(x) &\Longrightarrow -\mu_{A^t}(x) \geq -\mu_B(x) \\ &\Longrightarrow 1 - \mu_{A^t}(x) \geq 1 - \mu_B(x) \\ &\Longrightarrow \mu_A(x) \geq \mu_{B^t}(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_{A^t\cup B^t}(x) &= \max\{\mu_{A^t}(x), \mu_{B^t}(x)\} \\ &\leq \max\{\mu_B(x), \mu_A(x)\} \\ &= \mu_{(A\cup B)}(x) \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \mu_{(A^t\cap B)\cup(A\cap B^t)}(x) &= \max\{\mu_{A^t\cap B}(x), \mu_{A\cap B^t}(x)\} \\ &= \max\{\min\{\mu_{A^t}(x), \mu_B(x)\}, \min\{\mu_A(x), \mu_{B^t}(x)\}\} \\ &= \max\{\mu_{A^t}(x), \mu_{B^t}(x)\} \\ &= \mu_{A^t\cup B^t}(x) \\ &= \min\left\{\mu_{A^t\cup B^t}(x), \mu_{(A\cup B)}(x)\right\} \\ &= \mu_{(A^t\cup B^t)\cap(A\cup B)}(x) \end{aligned}$$

Yani $\mu_{\left(A^t \cap B\right) \cup (A \cap B^t)}(x) = \mu_{(A^t \cup B^t) \cap (A \cup B)}(x)$ eşitliği elde edilir.

Durum 2: $\forall\ x \in X$ için $\mu_{A^t}(x) \geq \mu_B(x)$ ise,

$$\begin{aligned} \mu_{A^t}(x) \geq \mu_B(x) \quad & \Longrightarrow -\mu_{A^t}(x) \leq -\mu_B(x) \\ & \Longrightarrow 1 - \mu_{A^t}(x) \leq 1 - \mu_B(x) \\ & \Longrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_{B^t}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cup B)}(x) \quad & = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\ & \geq \max \{\mu_{B^t}(x), \mu_{A^t}(x)\} \\ & = \mu_{A^t \cup B^t}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{A^t \cap B}(x) \quad & = \min \{\mu_{A^t}(x), \mu_B(x)\} \quad = \mu_{A^t}(x) \\ \mu_{A \cap B^t}(x) \quad & = \max \{\mu_A(x), \mu_{B^t}(x)\} \quad = \mu_{B^t}(x) \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \mu_{(A^t \cup B^t) \cap (A \cup B)}(x) \quad & = \min \left\{\mu_{A^t \cup B^t}(x), \mu_{(A \cup B)}(x)\right\} \\ & = \mu_{A^t \cup B^t}(x) \\ & = \max \{\mu_{A^t}(x), \mu_{B^t}(x)\} \\ & = \max \{\mu_{A^t \cap B}(x), \mu_{A \cap B^t}(x)\} \\ & = \mu_{(A^t \cap B) \cup (A \cap B^t)}(x) \end{aligned}$$

Yani $\mu_{(A^t \cup B^t) \cap (A \cup B)}(x) = \mu_{(A^t \cap B) \cup (A \cap B^t)}(x)$ eşitliği elde edilir.

o)$\forall\ x \in X$ için, $\mu_{A \cap \varnothing}(x) = \min \left\{\mu_A(x), \mu_\varnothing(x)\right\} = \mu_\varnothing(x)$ olduğundan $A \cap \varnothing = \varnothing$ dır.

ö) $\forall\ x \in X$ için, $\mu_{A \cup X}(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_X(x)\} = \mu_X(x)$ olduğundan $A \cup X = X$ dır.

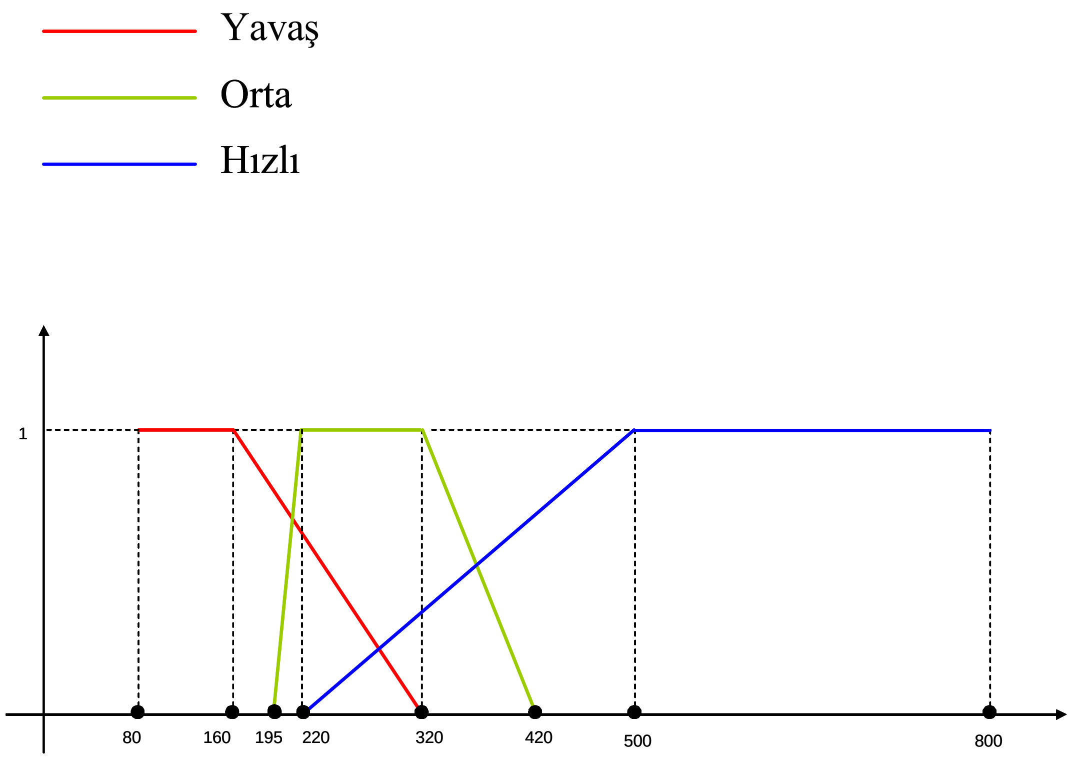
p) $\forall\ x \in X$ için $\mu_{A \cup \varnothing}(x) = \max \left\{\mu_A(x), \mu_\varnothing(x)\right\} = \mu_A(x)$ olduğundan $A \cup \varnothing = A$ dır.

r) $\forall\ x \in X$ için $\mu_{A \cap X}(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_X(x)\} = \mu_A(x)$ olduğundan $A \cap X = A$

Not: A bulanık bir küme ise $A \cap A^t \neq \varnothing$ ve $A^t \cup A \neq X$ olabilir [2].

Örneğin $X = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$ kümesi üzerinde bir A bulanık kümesi $A = \{(0.4, a), (0.5, b), (0.6, c)\}$ şeklinde verilsin. A bulanık kümesinin tümleyeni olan A^t bulanık kümesi $A^t = \{(0.6, a), (0.5, b), (0.4, c)\}$ şeklindedir. Bu takdirde $A^t \cup A = \{(0.6, a), (0.5, b), (0.6, c)\} \neq X$ dir.

Örnek 1.3.2 *Bir okuyucunun bir dakikada okuduğu kelime sayısının değişim aralığı 80 den 800 e kadar olsun. Yani* $X = \{x : 80 \leq x \leq 800,\ x \in \mathbb{Z}^+\}$ *alalım.* X *kümesinin* $Y = \{x : 80 \leq x \leq 160,\ x \in \mathbb{Z}^+\}$, $O = \{x : 220 \leq x \leq 320,\ x \in \mathbb{Z}^+\}$ *ve* $H = \{x : 500 \leq x \leq 800,\ x \in \mathbb{Z}^+\}$ *olacak şekildeki sırasıyla yavaş, orta ve hızlı şeklinde adlandırılan alt kümeleri göz önüne alınsın. Bu takdirde;*



Şekil-1.1

a) *Yavaş ve orta hızdaki okuyucu kümesini,*

b) *Hızlı olmayan okuyucu kümesini,*

c) *Yavaş veya hızlı okuyucu kümesini,*

d) *Yavaş veya yavaş olmayan okuyucu kümesini üyelik fonksiyonlarını bulalım.*

Çözüm:

a) Yavaş hızdaki okuyucu kümesi için doğru denklemi;

$$y = 2 - \frac{x}{160} \tag{1.8}$$

orta hızdaki okuyucu kümesi için doğru denklemi;

$$y = \frac{x}{25} - \frac{39}{5} \tag{1.9}$$

dir. (1.8) ve (1.9) dan kesişim noktası $\left(\frac{7840}{37}, \frac{25}{37}\right)$ dir. Diğer taraftan;

$$\mu_{Y \cap O}(x) = \min\{\mu_Y(x), \mu_O(x)\}$$

olduğu düşünülürse üyelik fonksiyonu

$$\mu_{Y \cap O}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [80, 195] \cup [320, 800] \\ \frac{x}{25} - \frac{39}{5} & , x \in \left[195, \frac{7840}{37}\right] \\ 2 - \frac{x}{160} & , x \in \left[\frac{7840}{37}, 320\right] \end{cases}$$

şeklindedir.

b) Grafikten hızlı okuyucu kümesi için doğru denklemi;

$$\mu_H(x) = \frac{x}{280} - \frac{11}{14}$$

olduğundan

$$\mu_{H'}(x) = 1 - \mu_H(x) = \frac{25}{14} - \frac{x}{280}$$

dir. Böylece üyelik fonksiyonu

$$\mu_{H'}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [80, 220] \\ \frac{25}{14} - \frac{x}{280} & , x \in [220, 500] \\ 0 & , x \in [500, 800] \end{cases}$$

olarak bulunur.

c) Yavaş hızdaki okuyucu kümesi için doğru denklemi;

$$y = 2 - \frac{x}{160} \tag{1.10}$$

hızlı okuyucu kümesi için doğru denklemi;

$$\mu_H(x) = \frac{x}{280} - \frac{11}{14} \tag{1.11}$$

olduğundan (1.10) ve (1.11) den kesişim noktası $\left(\frac{3120}{11}, \frac{5}{22}\right)$ dir. Diğer taraftan;

$$\mu_{Y \cup H}(x) = \max\{\mu_Y(x), \mu_H(x)\}$$

olduğundan üyelik fonksiyonu

$$\mu_{Y \cup H}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [80, 220] \cup [320, 800] \\ 2 - \frac{x}{160} & , x \in \left[160, \frac{3120}{11}\right] \\ \frac{x}{280} - \frac{11}{14} & , x \in \left[\frac{3120}{11}, 500\right] \end{cases}$$

olur.

d) Yavaş hızdaki okuyucu kümesi için doğru denklemi;

$$y = 2 - \frac{x}{160} \tag{1.12}$$

olduğundan, yavaş olmayan hızdaki okuyucu kümesi için doğru denklemi

$$y = 1 - \left(2 - \frac{x}{160}\right) = \frac{x}{160} - 1 \tag{1.13}$$

olur. (1.12) ve (1.13) den kesişim noktası $\left(240, \frac{1}{2}\right)$ dir. Diğer taraftan;

$$\mu_{Y \cup Y^{t}}(x) = \max\left\{\mu_Y(x), \mu_{Y^{\prime}}(x)\right\}$$

olduğundan üyelik fonksiyonu

$$\mu_{Y \cup Y^{t}}(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in [80, 160] \cup [320, 800] \\ 2 - \frac{x}{160} & , \ x \in [160, 240] \\ \frac{x}{160} - 1 & , \ x \in [240, 320] \end{cases}$$

şeklinde tespit edilir.

BÖLÜM 2

Bulanık Vektör Uzayları

Bu bölümde bulanık vektör uzaylarının cebirsel özellikleri [7] temel alınarak verilecektir. Burada ortaya atılan fikirler kolaylıkla diğer bulanık cebirsel kavramlara da uygulanabilir.

Taban kavramı klasik vektör uzayı çalışmalarında temel bir kavramdır, gerçekten bu kavram sayesinde tüm klasik vektör uzaylarının iyi bir temsili yapılabilir. Bu bölümde bulanık taban kavramı tanımlanıp, bu kavrama sahip olan bulanık vektör uzaylarının çok geniş sınıfına yer verilecektir.

Son olarak bulanık boyut kavramı tanımlanarak, bazı kavramların özellikleri incelenecektir.

A kümesinin kardinalitesi $|A|$ ile, V_1 vektör uzayı V_2 vektör uzayının bir alt uzayı olması $V_1 < V_2$ ile gösterilecektir.

2.1 Bulanık Vektör Uzayı

Tanım 2.1.1 *E bir vektör uzayı ve $\forall\ x,\ y \in E$ ve $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$ için $\mu : E \longrightarrow [0,1]$*

$$\mu(ax + by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\widetilde{E} = (E, \mu)$ çiftine bulanık vektör uzayı denir.

Bir $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayı için,

- $T_\mu^\alpha = \mu_\alpha^{-1} = \{x \in E : \mu(x) = \alpha\}$
- $H_\mu^\alpha = \mu^{-1}((\alpha, 1]) = \{x \in E : \mu(x) > \alpha\}$
- $E_\mu^\alpha = \mu^{-1}([\alpha, 1]) = \{x \in E : \mu(x) \geq \alpha\}$

notasyonları kullanılacaktır.

Önerme 2.1.2 *$\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayı ise,*

$i)$ $H_\mu^\alpha < E_\mu^\alpha < E$

$ii)$ $\forall\ a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\mu(ax) = \mu(x)$

$iii)$ $u,\ v \in E$ ve $\mu(u) > \mu(v)$ ise $\mu(u+v) = \mu(v)$ dir.

İspat: İspata geçmeden önce klasik vektör uzayındaki altvektör uzayı tanımını vermek yerinde olacaktır.

V, E nin alt kümesi olsun. Eğer $\forall\ x,\ y \in V$ ve $a,\ b \in \mathbb{R}$ için $ax + by \in V$ ise V E nin altvektör uzayıdır.

Şimdi önermenin (i) ifadesinin ispatı verilirse;

$i)$ $H_\mu^\alpha \subset E_\mu^\alpha \subset E$ olduğu açıktır. Şimdi $\forall\ x,\ y \in H_\mu^\alpha$ ve $a,\ b \in \mathbb{R}$ için $ax + by \in H_\mu^\alpha$ olduğu gösterilmelidir:

$$\left.\begin{array}{l} x \in H_\mu^\alpha \Rightarrow \mu(x) > \alpha \\ y \in H_\mu^\alpha \Rightarrow \mu(y) > \alpha \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

dir.

$$\begin{aligned} \mu(ax+by) &\geq \mu(x) \wedge \mu(y) && \text{(bulanık vektör uzayı tanımından)} \\ &> \alpha \wedge \alpha && \text{((2.1) den)} \end{aligned}$$

dolayısıyla $\mu(ax+by) > \alpha \Rightarrow ax + by \in H_\mu^\alpha$ dır. Ohalde $H_\mu^\alpha < E_\mu^\alpha$ dir.

Yukaridaki ispata benzer şekilde,

$\mu(ax+by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq \alpha \wedge \alpha = \alpha$ dır. Buradan $\mu(ax+by) \geq \alpha$ olup $ax+by \in E_\mu^\alpha$ dır. Ohalde $E_\mu^\alpha < E$ dir. Böylece (i) geçerlidir.

$ii)$ $\forall\ a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\mu(ax) = \mu(x)$ olduğunu gösterelim:

Bunun için öncelikle $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayı olmak üzere;

" $\mu(0) = \sup\limits_{x \in E} \mu(x) = \sup\left[\mu(E)\right]$ " önermesinin doğruluğunu gösterelim:

$$\forall\ x \in E \text{ için } \mu(0) = \mu(x - x) = \mu(1.x + (-1)x) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$$

dir. O halde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ ve $0 \in E$ için

$$\mu(ax) = \mu(ax + b0) \geq \mu(x) \wedge \mu(0) = \mu(x)$$

dir.

$iii)$ $u,\ v \in E$ için $\mu(u) > \mu(v)$ olsun. Göstermemiz gereken $\mu(u+v) = \mu(v)$ olduğudur. Bulanık vektör uzayı tanımı ve hipotez gereği

$$\mu(u+v) \geq \mu(u) \wedge \mu(v) = \mu(v) \Rightarrow \mu(u+v) \geq \mu(v) \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu(v) &= \mu((u+v)-u)\\ &\geq \mu(u+v)\wedge\mu(u)\\ &= \mu(u+v)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu(v)\geq\mu(u+v) \tag{2.3}$$

olur. Aksi halde; yani $\mu(u+v) > \mu(u)$ olsa idi $\mu(u) < \mu(v)$ olurdu ki bu ise hipotezde verilen $\mu(u) > \mu(v)$ olması durumu ile çelişirdi. O halde (2.2) ve (2.3) den $\mu(u+v) = \mu(v)$ dir.

Önerme 2.1.3 *$\widetilde{E} = (E,\mu)$ bulanık vektör uzayı ve $\mu(u) \neq \mu(v)$ olacak şekilde $u,\ v \in E$ olsun. Bu takdirde $\mu(u+v) = \mu(u)\wedge\mu(v)$ dir.*

İspat: $\mu(u) \neq \mu(v) \Rightarrow \mu(u) < \mu(v)$ veya $\mu(u) > \mu(v)$ dir.

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ \mu(u) > \mu(v) \Rightarrow \mu(u+v) = \mu(v)\\ &\bullet\ \mu(u) < \mu(v) \Rightarrow \mu(u+v) = \mu(u)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu(u+v) = \mu(u)\wedge\mu(v) \text{ yazılabilir}$$

2.2 Bulanık Lineer Bağımsızlık

Tanım 2.2.1 *$\widetilde{E} = (E,\mu)$ bulanık vektör uzayı olsun. Bu takdirde $\forall\ a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ için $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ lineer bağımsız kümesi*

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\mu(a_i x_i)\right)$$

özelliğini sağlar ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ lineer bağımsız kümesine bulanık lineer bağımsız denir.

Ayrıca $\widetilde{E}$ da verilmiş herhangi bir vektör kümesinin tüm alt kümeleri bulanık lineer bağımsız ise verilmiş olan vektör kümeside bulanık lineer bağımsızdır.

Örnek 2.2.2 *$\widetilde{E} = (\mathbb{R}^2,\mu)$ bulanık vektör uzayı ve*

$$\mu\left[(x,y)\right] = \begin{cases} 1, & (x,y) = (0,0) \textit{ ise} \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,\mathbb{R}-\{0\}) \textit{ ise} \\ \frac{1}{4}, & (x,y) = (\mathbb{R}^2-(0,\mathbb{R})) \textit{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlı üyelik fonksiyonu verilsin. O zaman kolaylıkla gösterilebilir ki x=$(1,0)$, y=$(-1,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımsız olmalarına rağmen $\widetilde{E}$ da bulanık lineer bağımsız değildir. Çünkü; $x+y = (1,0)+(-1,1) = (0,1)$ dir. O halde

$$\mu(x+y) = \mu(0,1) = \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

dir. Diğer yandan

$$\left.\begin{array}{l}\mu(x)=\mu((1,0))=\frac{1}{4}\\ \mu(y)=\mu((-1,1))=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \mu(x)\wedge\mu(y)=\frac{1}{4} \tag{2.5}$$

dir. (2.4) *ve* (2.5) *den* $\mu(x+y)\neq\mu(x)\wedge\mu(y)$ *dir.*

Önerme 2.2.3 $\widetilde{E}=(E,\mu)$ *bulanık vektör uzayı olsun. Bu takdirde, farklı üyelik derecelerine sahip olan E nin* $\{x_i\}_{i=1}^{N}\subset E-\{0\}$ *vektör kümesi, hem lineer bağımsız hem de bulanık lineer bağımsızdır.*

İspat: N üzerinden indüksiyonla ifadeyi ispatlayalım:

$N=1$ için, bir tane sıfırdan farklı vektör olur ki bu da lineer bağımsız demektir.

Şimdi varsayalım ki ifade N için doğru olsun. $N+1$ için ifadenin doğruluğunu gösterelim.

$\{x_i\}_{i=1}^{N+1}\subset E-\{0\}$ farklı üyelik derecelerine sahip vektörlerden oluşan küme olsun. İndüksiyon prensibinden $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ kümesi lineer bağımsız ve bulanık lineer bağımsız idi. Varsayalım ki $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ kümesi lineer bağımsız olmasın. O halde $\varnothing\neq S=\{1,2,\ldots,N\}$ kümesi ve $\forall\ i\in S,\ a_i\neq 0$ için $x_{N+1}=\sum\limits_{i\in S}a_ix_i$ dir. Buradan

$$\mu(x_{N+1})=\mu(\sum_{i\in S}a_ix_i)=\bigwedge_{i\in S}\mu(a_ix_i)=\bigwedge_{i\in S}\mu(x_i)$$

ve böylece $\mu(x_{N+1})\in\{\mu(x_i)\}_{i=1}^{N}$ olur ki bu $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ farklı üyelik derecelerine sahip vektörlerden oluşması kabulüyle çelişir. Dolayısıyla verilen $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Son olarak $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}\subset E-\{0\}$ farklı üyelik derecelerine sahip vektör kümesinin $\widetilde{E}$ da bulanık lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$\mu(x_{N+1})\neq\mu(x_i)\ \ (i=1,\ldots,N)$ olduğundan $\forall\ i$ için $\mu(x_{N+1})>\mu(x_i)$ yazmak genelliği bozmayacaktır. Buradan da $\mu(a_{N+1}x_{N+1})>\mu(a_ix_i)$ dir. Sonuç olarak $\forall\ i\in\{1,\ldots,N\}$ için

$$\mu(a_{N+1}x_{N+1}+a_ix_i)=\mu(a_ix_i)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mu(a_{N+1}x_{N+1}+a_ix_i)&=\mu(a_ix_i)\\ &=\mu(a_{N+1}x_{N+1}+a_ix_i)\wedge\mu(a_ix_i)\end{aligned}$$

buradan $\mu\left(\sum_{i\in S}^{N+1} a_i x_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{N+1} \mu(a_i x_i)$ elde edilir.

Not 2.2.4 *boy*$E = n$ *olmak üzere* $\widetilde{E} = (E,\mu)$ *bulanık vektör uzayı ise,* $\mu(E)$ *nin kardinalitesi olan* $|\mu(E)|$ *sayısı için* $|\mu(E)| \leq n+1$ *dir.*

2.3 Bulanık Taban

Tanım 2.3.1 $\widetilde{E} = (E,\mu)$ *bulanık vektör uzayı olmak üzere* E *nin herhangi bir tabanı aynı zamanda bulanık lineer bağımsız oluyorsa bu tabana* $\widetilde{E}$ *nın bulanık tabanı denir.*

Teorem 2.3.2 E *tabanı* $B = \{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *olan bir vektör uzayı olsun.* $\mu_0 \in (0,1]$ *sabit ve* $\forall\alpha \in A$ *için* $\mu_0 \geq \mu_\alpha$ *olacak şekilde sabitlerin herhangi bir* $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset (0,1]$ *kümesi verilsin.* $0 \neq z \in E$*,* $a_i \neq 0$ *olmak üzere* $z = \sum_{i=1}^{N} a_i v_{\alpha_i}$ *şeklinde tek türlü yazılabilen* z *için* μ*,*

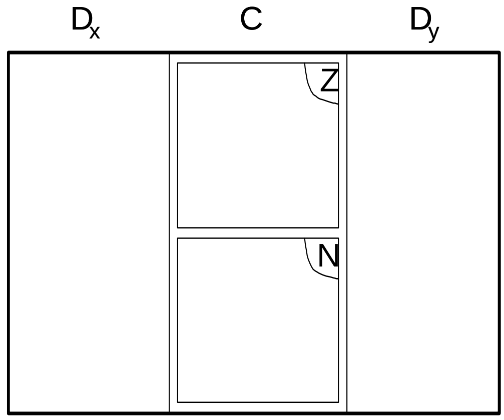
$$\begin{aligned} \mu:\ & E \to [0,1] \\ & z \to \mu(z) = \bigwedge_{i=1}^{N} \mu(v_{\alpha_i}) = \bigwedge_{i=1}^{N} \mu_{\alpha_i} \qquad ve \quad \mu(0) = \mu_0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\widetilde{E} = (E,\mu)$*,* B *bulanık tabanlı bir bulanık vektör uzayıdır.*

İspat: $x,\ y \in E - \{0\}$ olsun. $C \cap D_x = \varnothing$, $C \cap D_y = \varnothing$, $D_x \cap D_y = \varnothing$ ve $C \cup D_x$, $C \cup D_y$ sonlu ve boştan farklı olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i\in C\cup D_x} x_i v_{\alpha_i} \quad , \quad (\ \forall\, i \in C \cup D_x \text{ için } x_i \in \mathbb{R} - \{0\}) \\ y &= \sum_{i\in C\cup D_y} y_i v_{\alpha_i} \quad , \quad (\ \forall\, i \in C \cup D_y \text{ için } y_i \in \mathbb{R} - \{0\}) \end{aligned}$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir



Şekil-2.1

Durum 1: $a, b \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $ax + by \neq 0$ olsun.
$Z = \{i \in C : ax_i + by_i = 0\}$ ve $N = C - Z$ olsun. (O halde $N = \{i \in C : ax_i + by_i \neq 0\}$ dır.) $C,\ D_x,\ D_y,\ Z$ ve N boştan farklı alındı. Bu kümelerin en az birinin boş olması durumunda ispat açıktır.

$$x = \sum_{i \in C \cup D_x} x_i v_{\alpha_i} \Rightarrow ax = ax_1 v_{\alpha_1} + ax_2 v_{\alpha_2} + \cdots + ax_n v_{\alpha_n}$$
$$y = \sum_{i \in C \cup D_y} y_i v_{\alpha_i} \Rightarrow by = ay_1 v_{\alpha_1} + ay_2 v_{\alpha_2} + \cdots + ay_n v_{\alpha_n}$$

dir. Buradan $ax + by = (ax_1 + ay_1)\, v_{\alpha_1} + \cdots + (ax_n + ay_n)\, v_{\alpha_n}$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu(ax+by) &= \mu\left(\sum_{i \in C} (ax_i + by_i)\, v_{\alpha_i} + \sum_{i \in D_x} (ax_i)\, v_{\alpha_i} + \sum_{i \in D_y} (by_i)\, v_{\alpha_i}\right) \\ &= \mu\left(\sum_{i \in N} (ax_i + by_i)\, v_{\alpha_i} + \sum_{i \in D_x} (ax_i)\, v_{\alpha_i} + \sum_{i \in D_y} (by_i)\, v_{\alpha_i}\right) \end{aligned}$$

lineer toplamındaki tüm katsayılar sıfırdan farklıdır. μ nün tanımından

$$\begin{aligned} \mu(ax+by) &= \left(\bigwedge_{i \in N} \mu\,(v_{\alpha_i})\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in D_x} \mu\,(v_{\alpha_i})\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in D_y} \mu v_{\alpha_i}\right) \\ &= \left(\bigwedge_{i \in N} \mu_{\alpha_i}\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in D_x} \mu_{\alpha_i}\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in D_y} \mu_{\alpha_i}\right) \\ &\geq \bigwedge_{C \cup D_x \cup D_y} \mu_{\alpha_i} = \left(\bigwedge_{i \in C \cup D_x} \mu_{\alpha_i}\right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in C \cup D_y} \mu_{\alpha_i}\right) \\ &= \mu\,(x) \wedge \mu\,(y)\,, \end{aligned}$$

yani $a, b \neq 0$ ve $ax + by \neq 0$ olması durumunda $\mu(ax + by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ dir.

Durum 2: $ax + by = 0$ olması durumunda:

$\mu(0) = \mu_0 > \sup \mu(B)$ olduğundan $\mu(ax + by) = \mu(0) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ olur.

Durum 3: $a = 0$ veya $b = 0$ ise, genelliği bozmayacağından $a = 0$ alırsak bu takdirde

$$\mu(0x + by) = \mu(by) \geq \mu(x) \wedge \mu(by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

dir. Dolayısıyla $\widetilde{E}$, B bulanık tabanlı bir bulanık vektör uzayıdır.

Uyarı: Her bulanık vektör uzayı bir bulanık tabana sahip midir? Ya da bulanık tabansız bir bulanık vektör uzayı var mıdır? Bu sorular önemli olup, basit bir koşul koyarak tüm bulanık vektör uzaylarının bir bulanık tabana sahip olduğu ve bulanık tabansız bir bulanık vektör uzayı örneği ilerleyen kısımlarda verilecektir.

Tanım 2.3.3 *Bir B kümesinin boştan farklı her C alt kümesi için,* $\sup C \in C$ *ise B kümesine üstten iyi sıralı denir.*

Şimdi $[0, 1]$ kapalı aralığının üstten iyi sıralı alt kümelerine bakalım.

Tanım 2.3.4 $B \subset [0, 1]$ *kümesi verilsin. Eğer $x_n \to x$ olacak şekilde B kümesinde monoton artan en az bir (x_n) dizisi varsa B kümesi x de monoton artan bir limite sahiptir denir.*

Önerme 2.3.5 $B \subset [0, 1]$ *alt kümesi herhangi monoton artan limitine sahip olmaması için gerek ve yeter koşul B kümesinin üstten iyi sıralı bir küme olmasıdır.*

Önerme 2.3.6 $[0, 1]$ *in üstten iyi sıralı tüm alt kümeleri sayılabilirdir.*

İspat: Varsayalım ki $B \subset [0, 1]$ sayılamayan üstten iyi sıralı bir küme olsun. B üstten iyi sıralı olduğundan $\forall\, a \in B - \{\inf(B)\}$ için $\sup(\{b \in B : b < a\})$ kümesi vardır ve bu kümeye a nın *predecessoru* denir ve *predecessor*(a) ile gösterilir. $\forall\, a \in B - \{\inf(B)\}$ için $d(a)$=a−*predecessor*(a) olsun. Bu takdirde $\forall\, a \in B - \{\inf(B)\}$ için $d(a) > 0$ dır. $B - \{\inf(B)\}$ sayılamayan olduğu için, $\sum\limits_{B-\{\inf(B)\}} d(a) = \infty$ dur. Fakat $\sum\limits_{B-\{\inf(B)\}} d(a)$, $[0, 1]$ aralığının genişliğine eşit yada daha küçük olacağı açıktır. Dolayısıyla bu bir çelişki olup, B sayılabilir olmalıdır.

Yardımcı teorem 2.3.7 *$\mu(E)$ üstten iyi sıralı olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir bulanık vektör uzayı ve V, E nin bir özalt uzayı ise,*

$$\forall\ v \in V,\ \exists\ w \in E{-}V\ \ni\ \mu(w+v) = \mu(w) \wedge \mu(v)$$

dir.

İspat: $\mu(E)$ üstten iyi sıralı olduğu için,

$$\mu(w) = \sup \mu(E{-}V)\quad (\because\ \mu(E\backslash V) \subset \mu(E)\ )$$

olacak şekilde $w \in E{-}V$ vardır. $v \in V$ olsun.

$$\mu(w) \neq \mu(v) \Rightarrow \mu(w+v) = \mu(w) \wedge \mu(v) \text{ dir.} \qquad \big(\text{Önerme (2.4) den}\big)$$
$$\mu(w) = \mu(v) \Rightarrow \mu(w+v) \geq \mu(w) \wedge \mu(v) \text{ dir.} \qquad (\text{Tanım (2.1) den})$$

$w+v \in E{-}V$ ve $\mu(w) = \sup \mu(E{-}V)$ olduğundan $\mu(w+v) \leq \mu(w) = \mu(v)$ olmalıdır. Böylece $\mu(w+v) = \mu(w) \wedge \mu(v)$ elde edilir.

Yardımcı teorem 2.3.8 *$\mu(E)$ üstten iyi sıralı, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir bulanık vektör uzay ve V, E nin özaltuzayı olmak üzere B^*, $V = (V, \mu_{|V})$ nin bir tabanı olsun. Bu takdirde B^+ tarafından gerilen vektör uzay $\langle B^+ \rangle$ olmak üzere,*
$\exists\ w \in E{-}V\ \ni\ B^+ = B^* \cup \{w\}$, $\widetilde{W} = (W = \langle B^+ \rangle, \mu_{|W})$ nin bir bulanık tabanıdır.

İspat: $\mu(E)$ üstten iyi sıralı olduğundan $\exists\ w \in E{-}V\ \ni\ \mu(w) = \sup \mu(E{-}V)$ dir. Yardımcı teorem 2.3.7 den w, B^* dan bulanık lineer bağımsızdır. $B^+ = B^* \cup \{w\}$ olsun. Açık olarak B^+, $\widetilde{W} = (\langle B^+ \rangle, \mu_{|W})$ nin bir bulanık tabanıdır.

Teorem 2.3.9 *$\mu(E)$ üstten iyi sıralı olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir bulanık vektör uzayı bir bulanık tabana sahiptir.*

İspat: $\mu(E)$ üstten iyi sıralı olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir bulanık vektör uzayı olsun. $\Omega = \{B \subset E : B$ bulanık lineer bağımsız$\}$ kümesi verilsin. Bu küme kapsama bağıntısı ile kısmi sıralıdır. C, Ω nın tam sıralı bir alt kümesi ve $A = \bigcup_{B \in C} B$ olsun. A, C nin bir üst sınırı olduğu açıktır.

Varsayalım ki $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ olsun. Bu taktirde $a_i \in B_{\alpha(i)}$ olacak şekilde $B_{\alpha(1)}, B_{\alpha(2)}, \ldots, B_{\alpha(n)} \in C$ vardır. C tam sıralı olduğundan $\forall\ B_{\alpha(i)} \in C$, $\exists\ B_{\alpha(k)} \ni$

$B_{\alpha(i)} \subset B_{\alpha(k)}$ dır. Böylece $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B_{\alpha(k)}$ dır. $B_{\alpha(k)}$ bulanık lineer bağımsız olduğundan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vektör kümeside bulanık lineer bağımsız olur. Böylece A, C nin Ω da bir üst sınırıdır. Zorn Lemmasından Ω nın B^* gibi bir maksimal elemanı vardır.

Varsayalımki $\langle B^+ \rangle = V$, E nin öz alt uzayı olsun. O halde Yardımcı Teorem 2.3.8 den $\exists\ w \in E \backslash V \ \ni\ B^+ = B^* \cup \{w\}$, $\widetilde{W} = (W = \langle B^+ \rangle, \mu_{|_W})$ nin bir bulanık tabanıdır. Bu ise B^* ın Ω da maksimal eleman olması ile çelişir. Böylece $\langle B^* \rangle = E$ ve B^*, E için bir bulanık tabandır.

Sonuç 2.3.10 *E sonlu boyutlu olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayı bir bulanık tabana sahiptir.*

İspat: E sonlu boyutlu olduğundan, $\mu(E)$ de sonlu boyutludur ve böylece $\mu(E)$ üstten iyi sıralıdır. O halde Teorem 2.3.9 dan $\widetilde{E}$ bir bulanık tabana sahiptir.

Buraya kadar ki kısımda bir bulanık vektör uzayının bulanık tabana sahip olması için gerekli şartlar verildi. Aşağıdaki örnek, bulanık tabana sahip olmayan bir bulanık vektör uzayı örneğidir [1].

Örnek 2.3.11 *E=$\{\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} : x_k \in F$ cismi$\}$ bir vektör uzayı ve μ:$E \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki gibi tanımlı bir üyelik fonksiyonu*

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{1}{i+1}, & x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = 0, \quad x_i \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere $\widetilde{E} = (E, \mu)$ nin bulanık tabansız bir bulanık vektör uzayı olduğunu gösterelim:

Öncelikle $\widetilde{E} = (E, \mu)$ nin bulanık vektör uzayı olduğunu gösterelim:
$i \leq j$, x, $y \in E$ için $\mu(x) = \alpha_i$, $\mu(y) = \alpha_j$ olsun. Eğer

$$ax + by = 0 \text{ ise, } \mu(ax + by) = 1 > \mu(x) \wedge \mu(y)$$
$$ax + by \neq 0 \text{ ise, } k \geq i \ \text{ için } \mu(ax + by) = \alpha_k$$

dır. Fakat $\mu(x) \wedge \mu(y) = \alpha_i \wedge \alpha_j = \alpha_i$ dir. Sonuç olarak $\mu(ax+by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ eşitsizliği doğrudur. Varsayalım ki $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayının tabanı B olsun. $\left|B \cap T_{\mu}^{\alpha_i}\right| \leq 1$ olduğu gösterilecektir. Eğer $x = (0, \ldots, 0, x_i, \ldots)$, $y = (0, \ldots, 0, y_i, \ldots)$ olmak üzere $x,\ y \in B \cap T_{\mu}^{\alpha_i}$ için $x \neq y$ ise $x_i \neq y_i$ ve $\mu(x_i y - y_i x) > \alpha_i$ dir. Diğer yandan, $\mu(x_i y - y_i x) = \mu(x_i y) \wedge \mu(y_i x) = \alpha_i$ dir. Çünkü $x,\ y$ bulanık lineer bağımsızdır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $B = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$, $z_i \in T_{\mu}^{\alpha_i}$ dir.

Şimdi z_i elemanlarının E vektör uzayını üretemeyeceği gösterilecektir. Genelliği bozmaksızın aşağıdaki ifadeler kabul edilirse;

$z_1 = (1, *, *, *, *, \ldots)$

$z_2 = (0, 1, *, *, *, \ldots)$

$\vdots$

$z_i = (0, \ldots, 0, 1, *, \ldots)$

$v \in E,\ v = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i$ vektörü doğru bir şekilde tanımlanır. Varsaylım ki $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i z_i$ olsun. İlk koordinatların kıyaslanması ile $\beta_1 = 1$ olur. Aynı şekilde $\beta_2 = 1$ olur. Benzer şekilde devam edilerek $v = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık tabansız bir bulanık vektör uzayıdır.

Tanım 2.3.12 *$\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$, E üzerinde iki bulanık vektör uzayı olsun.*

$$\widetilde{E}_1 \text{ ve } \widetilde{E}_2 \text{ nın arakesiti } \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2 = (E, \mu_1 \wedge \mu_2)$$
$$\widetilde{E}_1 \text{ ve } \widetilde{E}_2 \text{ nın toplamı } \widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2 = (E, \mu_1 + \mu_2)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2)(x) &= \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) : x = x_1 + x_2\} \\ &= \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1)\} \\ &= \bigvee_{x = x_1 + x_2} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \end{aligned}$$

dir.

Önerme 2.3.13 *E vektör uzayı üzerinde iki bulanık vektör uzayı $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ olsun. Bu takdirde,*

i) $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2,\ E$ üzerinde bir bulanık vektör uzayıdır.

ii) $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2,\ E$ üzerinde bir bulanık vektör uzayıdır.

iii) $\mu_1(E)$ ve $\mu_2(E)$ üstten iyi sıralı ise $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ bulanık tabana sahiptir.

İspat: *i*) $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ x,\ y \in E$ için,

$$\begin{aligned} \mu_1 \wedge \mu_2(ax+by) &= \mu_1(ax+by) \wedge \mu_2(ax+by) \\ &\geq (\mu_1(x) \wedge \mu_1(y)) \wedge (\mu_2(x) \wedge \mu_2(y)) \\ &= \mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \wedge \mu_1(y) \wedge \mu_2(y) \\ &= (\mu_1 \wedge \mu_2)(x) \wedge (\mu_1 \wedge \mu_2)(y) \end{aligned}$$

olur. O halde $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2,\ E$ üzerinde bir bulanık vektör uzayıdır.

ii) Varsayalım ki $x,\ y \in E$ için

$(\mu_1 + \mu_2)(x+y) < (\mu_1 + \mu_2)(x) \wedge (\mu_1 + \mu_2)(y)$ olsun. $\exists\ x_1,\ x_2 \in E\ \ni\ \forall\ x_3 \in E$ için

$$\mu_1(x_3) \wedge \mu_2(x+y-x_3) < [\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x-x_1)] \wedge [\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(y-x_2)] \tag{2.6}$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} [\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x\text{-}x_1)] \wedge [\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(y\text{-}x_2)] &= \mu_1(x_1) \wedge \mu_1(x_2) \wedge \mu_2(x\text{-}x_1) \wedge \mu_2(y\text{-}x_2) \\ &\leq \mu_1(x_1+x_2) \wedge \mu_2(x+y-x_1-x_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.6) ve (2.8) den

$$\mu_1(x_3) \wedge \mu_2(x+y-x_3) < \mu_1(x_1+x_2) \wedge \mu_2(x+y-x_1-x_2) \tag{2.8}$$

elde edilir.

(2.8) ifadesinde $x_3 = x_1 + x_2$ alınırsa;

$$\mu_1(x_3) \wedge \mu_2(x+y-x_3) < \mu_1(x_3) \wedge \mu_2(x+y-x_3)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $(\mu_1 + \mu_2)(x+y) \geq (\mu_1 + \mu_2)(x) \wedge (\mu_1 + \mu_2)(y)$ dir.

iii) $(\mu_1 \wedge \mu_2)(E) \subset \mu_1(E) \cup \mu_2(E)$ ve $(\mu_1 + \mu_2)(E) \subset \mu_1(E) \cup \mu_2(E)$ olduğu açıktır. $\mu_1(E)$ ve $\mu_2(E)$ üstten iyi sıralı olduğundan $\mu_1(E) \cup \mu_2(E)$ üstten iyi sıralıdır. Dolayısıyla $(\mu_1 \wedge \mu_2)(E)$ ve $(\mu_1 + \mu_2)(E)$ üstten iyi sıralıdır. Böylece Teorem 2.3.9 dan $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ bulanık tabana sahiptir.

2.4 Bulanık Vektör Uzayının Boyutu

Tanım 2.4.1 *E tabanı X olan bir vektör uzayı ve $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir bulanık vektör uzayı olmak üzere;*

$$\sup \sum_{v \in X} \mu(v)$$

ifadesine $\widetilde{E}$ bulanık vektör uzayının boyutu denir ve $boy(\widetilde{E})$ ile gösterilir.

Burada *boy*, bulanık vektör uzayı ailesinden $[0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ aralığına tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca bir bulanık vektör uzayı sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter koşul $boy(\widetilde{E}) = M < \infty$ olmasıdır.

Önerme 2.4.2 *Tüm sonlu boyutlu $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayları bir bulanık tabana sahiptir.*

İspat: $\mu(E)$ nin üstten iyi sıralı olduğu gösterilmelidir. Varsayalım ki $\mu(E) \subset [0, 1]$ monoton artan limite sahip olsun. O halde $\alpha \in [0, 1]$ için E de α ya yakınsayan monoton artan bir $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Kabul edelim ki $\mu(x_1) = \beta > 0$ olsun. Önerme 2.2.3 den $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ lineer bağımsızdır. H_n, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ lineer bağımsız kümesinin E için bir tabana genişlemesi olsun. E nin tabanlarının dizisini düşünelim.
$\sum_{x \in H_n} \mu(x) > n\beta$ olduğu açıktır ki bu $boy(\widetilde{E}) = \infty$ oluğunu gösterir, bu ise bir çelişkidir. O halde Önerme 2.3.5 den $\mu(E)$ üstten iyi sıralıdır. Teorem 2.3.9 a göre $\widetilde{E}$ bir bulanık tabana sahiptir.

Önerme 2.4.3 *$boyE = n < \infty$ olmak üzere $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık vektör uzayı olsun. Eğer B, $\widetilde{E}$ nın bir bulanık tabanı ve B^*, E nin herhangi bir tabanı ise*

$$\sum_{v \in B^*} \mu(v) \leq \sum_{v \in B} \mu(v)$$

dır.

İspat: E sonlu boyutlu olduğu için $|\mu(E - \{0\})| = k < boy(E)$ dir. $\mu_i > \mu_{i+1}$ öyleki $\mu(E - \{0\}) = (\mu_i)_{i=1}^{k}$ olsun. B, $\widetilde{E}$ nın bir bulanık tabanı olduğundan $B \cap E_\mu^{\mu_i}$, $E_\mu^{\mu_i}$ alt vektör uzayının bir tabanıdır. Ayrıca $B^* \cap E_\mu^{\mu_i}$, $E_\mu^{\mu_i}$ nin lineer bağımsız bir alt kümesi olduğundan $\forall\ i \in \{1, \ldots, k\}$ için $|B^* \cap E_\mu^{\mu_i}| \leq |B \cap E_\mu^{\mu_i}|$ dır.

Şimdi aşağıdaki şekilde $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ bire-bir fonksiyonlar kümesi tanımlayalım,

$f_1 : B^* \cap E_\mu^{\mu_1} \to B \cap E_\mu^{\mu_1}$ şeklinde tanımlı bire-bir fonksiyon olsun. Gerçekten $|B^* \cap E_\mu^{\mu_1}| \leq |B \cap E_\mu^{\mu_1}|$ olduğundan bu fonksiyon vardır ve $\forall\ v \in B^* \cap E_\mu^{\mu_1}$ için $\mu(v) \leq \mu(f_1(v))$ dir.

$f_{n-1} : B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}} \to B \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}$ şeklinde tanımlı bire-bir fonksiyon olsun. O halde $\forall\ v \in B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}$ için $\mu(v) \leq \mu(f_{n-1}(v))$ dir.

$g_n : B^* \cap T_\mu^{\mu_n} \to (B \cap E_\mu^{\mu_n}) - f_{n-1}\left(B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}\right)$ şeklinde herhangi bir bire-bir fonksiyonu vardır. Çünkü

$$\begin{aligned} |B^* \cap T_\mu^{\mu_n}| &= |B^* \cap E_\mu^{\mu_n}| - \left|B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}\right| \\ &\leq |B \cap E_\mu^{\mu_n}| - \left|B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}\right| \\ &= |B \cap E_\mu^{\mu_n}| - \left|f_{n-1}\left(B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}\right)\right| \\ &= \left|(B \cap E_\mu^{\mu_n}) - f_{n-1}\left(B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}}\right)\right| \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} f_n \quad &: B^* \cap E_\mu^{\mu_n} \quad \to B \cap E_\mu^{\mu_n} \\ &\quad v \qquad\quad \to f_n(v) := \begin{cases} f_{n-1}(v) & , \quad v \in B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}} \\ g_n(v) & , \quad v \notin B^* \cap E_\mu^{\mu_{n-1}} \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde f_n fonksiyonu tanımlayalım. f_n fonksiyonu bire-birdir ve $n \in \{2, \ldots, k\}$ için $g_n(B^* \cap T_\mu^{\mu_n}) \subset E_\mu^{\mu_n}$ olduğundan $\mu(f_n(v)) = \mu(g_n(v)) \geq \mu_n = \mu(v)$
$(\forall\ v \in B^* \cap E_\mu^{\mu_n})$

$E = E_\mu^{\mu_k}$ ve $|B^*| = |B|$ olduğundan B^* ve B arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon vardır. O halde

$$\sum_{v \in B} \mu(v) = \sum_{v \in B^*} \mu(f_k(v)) \geq \sum_{v \in B^*} \mu(v)$$

dir.

Yardımcı teorem 2.4.4 $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *bulanık vektör uzay ise,* $\forall\ \alpha \in \mu(E) - \{0\}$ *için* E_μ^α *sonlu boyutludur.*

İspat: Kabul edelim ki E_μ^α sonsuz boyutlu ve B, $\widetilde{E}$ nın bir bulanık tabanı olsun. $B \cap E_\mu^\alpha$, E_μ^α için bir taban olduğundan $\left|B \cap E_\mu^\alpha\right|$ sonsuzdur. Böylece

$$\sum_{v \in B} \mu(v) \geq \sum_{v \in B \cap E_\mu^\alpha} \mu(v) \geq \sum_{v \in B \cap E_\mu^\alpha} \alpha = \infty$$

dır. O halde $boy(\widetilde{E}) = \infty$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla E_μ^α sonlu boyutlu olmalıdır.

Teorem 2.4.5 *$\widetilde{E} = (E, \mu)$ sonlu bir bulanık vektör uzayı ve B, $\widetilde{E}$ nın herhangi bir bulanık taban olsun. Bu takdirde*

$$boy\left(\widetilde{E}\right) = \sum_{v \in B} \mu(v)$$

dır.

İspat: B^*, E nin herhangi bir tabanı olmak üzere, $\sum\limits_{v \in B^*} \mu(v) \leq \sum\limits_{v \in B} \mu(v)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yardımcı Teorem 2.4.3 den $\forall\ \alpha > 0$, E_μ^α sonlu boyutludur ve $B \cap E_\mu^\alpha$, $\widetilde{E}_\alpha = \left(E_\mu^\alpha, \mu_{|_{E_\mu^\alpha}}\right)$ nın bir bulanık tabanıdır. $E_\mu^\alpha \cap B^*$, E_μ^α nın lineer bağımsız bir alt kümesi olduğundan Önerme 2.4.3 den,

$$\sum_{v \in B^* \cap E_\mu^\alpha} \mu(v) \leq \sum_{v \in B \cap E_\mu^\alpha} \mu(v)$$

dır. Bu $\forall\ \alpha > 0$ için doğrudur ve böylece

$$\sum_{v \in B^*} \mu(v) \leq \sum_{v \in B} \mu(v)$$

De Luca ve Termini [3] bir bulanık kümenin kardinalitesini aşağıdaki şekilde tanımladılar:

$\mu_A : A \to I$ olmak üzere $\widetilde{A} = (A, \mu_A)$ bulanık kümesinin kardinalitesi

$$Kard\left(\sum_{a \in B} \mu_A(a)\right)$$

dır.

$\widetilde{E} = (E, \mu)$ bulanık tabanı B olan sonlu boyutlu bir bulanık vektör uzayı ve $\widetilde{B} = \left(B, \mu_{|_B}\right)$ olsun. Yukarıdaki Tanım ve Teorem 2.4.5 den $boy\left(\widetilde{E}\right) = kard\left(\widetilde{B}\right)$ dır. Bu klasik kümelerdeki boyut kavramına uygundur.

Bulanık vektör uzaylarda boyut kavramının özelliklerini araştıralım.

$\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ iki bulanık vektör uzayı olmak üzere,

$$boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) = boy\left(\widetilde{E}_1\right) + boy\left(\widetilde{E}_2\right) - boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2\right) \tag{2.9}$$

olması beklenir. Fakat bu durum her zaman geçerli değildir.

Örneğin E=$\mathbb{R}$, $\mu_1 \equiv \frac{1}{2}$, $\mu_2 \equiv \frac{1}{4}$ ise $\mu_1 + \mu_2 \equiv \frac{1}{4}$ dür. Dolayısıyla $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2 \not\supseteq \widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_2$ dır. $boy\left(\widetilde{E}_1\right) = \frac{1}{2}$, $boy\left(\widetilde{E}_2\right) = \frac{1}{4}$, $boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) = \frac{1}{4}$ ve $boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2\right) = \frac{1}{4}$ dür, böylece $boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) \neq boy\left(\widetilde{E}_1\right) + boy\left(\widetilde{E}_2\right) - boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2\right)$ elde edilir.

Eğer yukarıdaki örnekte $\mu_2 \equiv \frac{1}{4}$, $\mu_2\left(\mathbb{R} - \{0\}\right) = \frac{1}{4}$ ve $\mu_2(0) = \frac{1}{2}$ şeklinde düşünülürse (2.9) ifadesi doğrudur.

Şimdi bazı koşullar altında (2.9) ifadesinin doğruluğu gösterilecektir.

Yardımcı teorem 2.4.6 *E sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ herhangi bir bulanık vektör uzayı olsun. Bu takdirde $\widetilde{E}$ için herhangi bir B bulanık tabanı şu şekilde inşa edilebilir; $\mu\left(E - \{0\}\right) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ olsun.*
$\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, α_i için $T_\mu^{\alpha_i}$, $H_j^{\alpha_i}$ nin $\bigcup\limits_{i<j} B\alpha_j$ tabanın $E_\mu^{\alpha_i}$ nin $\bigcup\limits_{i \le j} B\alpha_j$ tabanına genişlemesi olmak üzere, B_{α_i} , $T_\mu^{\alpha_i}$ deki maksimal lineer bağımsız kümesini tanımlayalım. Bu takdirde: $B = \bigcup\limits_{i \le k}^{m} B\alpha_j$, $\widetilde{E}$ nın bir bulanık tabanıdır.

Teorem 2.4.7 *E sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $\mu_1(0) \geq \sup\left[\mu_2\left(E \backslash \{0\}\right)\right]$ ve $\mu_2(0) \geq \sup\left[\mu_1\left(E \backslash \{0\}\right)\right]$ olmak üzere, $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ bulanık vektör uzayları verilsin. Bu takdirde $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ için bir bulanık tabanı olan E nin bir B tabanı vardır. Ayrıca $A_1 = \{x \in E : \mu_1(x) < \mu_2(x)\}$, $A_2 = E \backslash A_1$ ise*

$$\forall\ v \in B \cap A_1 \quad , \quad (\mu_1 \wedge \mu_2)(v) = \mu_1(v) \quad , \quad (\mu_1 + \mu_2)(v) = \mu_2(v)$$
$$\forall\ v \in B \cap A_2 \quad , \quad (\mu_1 \wedge \mu_2)(v) = \mu_2(v) \quad , \quad (\mu_1 + \mu_2)(v) = \mu_1(v)$$

dir.

İspat: $boyE$ üzerinde tümevarımla ispat yapılsın.

$boyE = 1$ için $B = \{v\}$, E tabanı olup, $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ içinde bulanık tabanı olacağından $boyE = 1$ için durum açıktır.

Şimdi boyutu n ye eşit veya küçük olan tüm bulanık vektör uzayları için iddia doğru olsun.

$boyE = n + 1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim;

$boyE = n + 1 > 1$ olmak üzere, $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ iki bulanık vektör uzayı verilsin ve $\widetilde{B}_1 = \{v_i\}_{i=1}^{n+1}$, $\widetilde{E}_1$ nın herhangi bir bulanık tabanı olsun. $\forall\ i \in \{2, \ldots, n+1\}$ için $\mu_1(v_1) \leq \mu_1(v_i)$ olduğunu kabul edelim. $H = \left\langle \{v_i\}_{i=1}^{n+1} \right\rangle$ olsun, $n+1 > 1$ olduğundan $H \neq \{0\}$ dır. Ayrıca $boyH = n$ dir. (H ın tanımından) $\widetilde{H}_1 = \left(H, \mu_{1|_H}\right)$ ve $\widetilde{H}_2 = \left(H, \mu_{2|_H}\right)$ şeklinde iki bulanık vektör uzayı tanımlayalım.

İndüksiyon prensibinden, $\widetilde{H}_1,\ \widetilde{H}_2,\ \widetilde{H}_1 \cap \widetilde{H}_2,\ \widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$ için bir bulanık taban olan H nın bir B^* tabanı vardır ve aynı zamanda

$$\begin{aligned}
&\forall\ v \in B \cap A_1, \quad \left(\mu_{1|_H} \wedge \mu_{2|_H}\right)(v) = \mu_{1|_H}(v) \quad , \quad \left(\mu_{1|_H} + \mu_{2|_H}\right)(v) = \mu_{2|_H}(v) \\
&\forall\ v \in B \cap A_2, \quad \left(\mu_{1|_H} \wedge \mu_{2|_H}\right)(v) = \mu_{2|_H}(v) \quad , \quad \left(\mu_{1|_H} + \mu_{2|_H}\right)(v) = \mu_{1|_H}(v)
\end{aligned}$$

dır. Şimdi B^*, B ye genişletilip, B nin $\widetilde{E}_1,\ \widetilde{E}_2,\ \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ bulanık vektör uzayları için bulanık taban olduğunu ve de

$$\begin{aligned}
&\forall\ v \in B \cap A_1, \quad (\mu_1 \wedge \mu_2)(v) = \mu_1(v) \quad , \quad (\mu_1 + \mu_2)(v) = \mu_2(v) \\
&\forall\ v \in B \cap A_2, \quad (\mu_1 \wedge \mu_2)(v) = \mu_2(v) \quad , \quad (\mu_1 + \mu_2)(v) = \mu_1(v)
\end{aligned}$$

olduğu gösterilecektir. Öncelikle,

$$\forall\ x \in H,\ (\mu_1 + \mu_2)_{|_H}(x) = \left(\mu_{1|_H} + \mu_{2|_H}\right)(x) \tag{2.10}$$

olduğunu gösterelim: $x \in H \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + \mu_2)_{|_H}(x) &= \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in E\} \\
&= \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x\text{-}x_1) : x_1 \in H\} \vee \sup \{\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(x\text{-}x_2) : x_2 \in E \setminus H\}
\end{aligned}$$

dır. $x \in H \setminus \{0\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) \wedge \mu_2(x - x) &= \mu_1(x) \wedge \mu_2(0) \leq \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} \\
\mu_1(0) \wedge \mu_2(x - 0) &= \mu_1(0) \wedge \mu_2(x) \leq \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\}
\end{aligned}$$

dır.

$\mu_1(0) \geq \sup [\mu_2(H \setminus \{0\})]$ ve $\mu_2(0) \geq \sup [\mu_1(H \setminus \{0\})]$ olduğundan $\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(0) = \mu_1(x_1)$ ve $\mu_1(0) \wedge \mu_2(x) = \mu_2(x)$ dir. Böylece

$$\mu_1(x) \vee \mu_2(x) \leq \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} \tag{2.11}$$

elde edilir. Varsayalım ki

$$\sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} < \sup \{\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(x - x_2) : x_2 \in H\} \tag{2.12}$$

olsun. O halde

$\widetilde{x} \in E\backslash H \ni \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} < \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2\left(x - \widetilde{x}\right)$ dir.

(2.11) den

$$\mu_1(x) \vee \mu_2(x) < \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2\left(x - \widetilde{x}\right) \tag{2.13}$$

elde edilir.

$\widetilde{x} \in E\backslash H$ ve $\forall\ i \in \{2, \ldots, n+1\}$ için $\mu_1(E\backslash H) = \mu_1(v_1) \leq \mu_1(v_i)$ olduğundan $\mu_1(x) < \mu_1\left(\widetilde{x}\right)$ dır. Böylece (2.13) ifadesi, $\mu_1(x) \vee \mu_2(x) < \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2\left(x - \widetilde{x}\right)$ olur. Kolaylıkla kontrol edilebilir ki ($\wedge$, $\vee$ *ve* $<$ özellikleri kullanılarak) son eşitsizlik sağlanmaz. Bu da (2.12) varsayımının yanlış olduğu anlamına gelir. O halde

$$\sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} \geq \sup\{\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(x - x_2) : x_2 \in E\backslash H\}$$

dır. Açıktır ki $x = 0$ olması durumunda da bu ifade doğrudur.

$$\begin{aligned}(\mu_1+\mu_2)_{|_H}(x) &= \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x\text{-}x_1) : x_1 \in E\} \\ &= \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x\text{-}x_1){:}x_1 \in H\} \vee \sup\{\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(x\text{-}x_2){:}x_2 \in E\backslash H\}\end{aligned}$$

dır. Fakat

$$\sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} \geq \sup\{\mu_1(x_2) \wedge \mu_2(x - x_2) : x_2 \in E\backslash H\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(\mu_1 + \mu_2)_{|_H}(x) &= \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1) : x_1 \in H\} \\ &= \sup\left\{\mu_{1|_H(x_1)} + \mu_{2|_H}(x - x_1) : x_1 \in H\right\} \\ &= \left(\mu_{1|_H} + \mu_{2|_H}\right)(x)\end{aligned}$$

dır. Böylece (2.10) ifadesi sağlanır. (2.10) ifadesi B^* ın, $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ da bulanık lineer bağımsız olduğunu gösterir. $v^* \in E{-}H$ için $\mu_2(v^*) = \sup[\mu_2(E{-}H)]$ olsun. μ_2 sonlu değerler aldığından v^* mevcuttur. Yardımcı Teorem 2.3.7 ve Yardımcı Teorem 2.3.8 den $\widetilde{E}_2$ için bir $B{=}B^* \cup \{v^*\}$ bulanık tabanı, $\widetilde{H}_2$ nın bir B^* bulanık tabanının bir v^* genişlemesidir. $\mu_1(E{-}H){=}\mu_1(v_1)$ olduğundan aynı zamanda $\widetilde{E}_1$ nın bir B bulanık tabanı, $\widetilde{H}_1$ nın bir B^* bulanık tabanının v^* genişlemesidir.

Şimdi $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ nın bir B bulanık tabanı, $\widetilde{H}_1 \cap \widetilde{H}_2$ nın bir B^* bulanık tabanının v^* genişlemesi olduğunu gösterelim:

$v^* \in A_1$ ise μ_1, $E{-}H$ üzerinde sabit olduğundan,

$$(\mu_1 \wedge \mu_2)\,(A_1 \cap (E{-}H)) = \mu_1\,(v^*)$$

dır ve $\forall\ z \in A_2 \cap (E{-}H)$

$$(\mu_1 \wedge \mu_2)\,(z) \leq \mu_1\,(v^*)$$

dır.

$$\begin{aligned} &v^* \in A_1 \text{ ise} \quad (\mu_1 \wedge \mu_2)\,(v^*) = \sup\left[(\mu_1 \wedge \mu_2)\,(E\backslash H)\right] \\ &v^* \in A_2 \text{ ise} \quad \mu_2\,(v^*) \leq \mu_1\,(v^*) \end{aligned}$$

dır.

$\mu_2\,(v^*){=}\sup\left[\mu_2\,(E{-}H)\right]$ ve μ_1, $E{-}H$ üzerinde sabit olduğundan, $A_1{\cap}(E\backslash H){=}\varnothing$ olur. Dolayısıyla $v^* \in A_2$ ise $(\mu_1 \wedge \mu_2)\,(v^*) = \sup\left[(\mu_1 \wedge \mu_2)\,(E{-}H)\right]$ dır. Yardımcı Teorem 2.3.8 den $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ nın bir B bulanık tabanı $\widetilde{H}_1 \cap \widetilde{H}_2$ nın B^* bulanık tabanın v^* genişlemesidir.

$\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ nın bir B bulanık tabanı, $\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$ nın B^* bulanık tabanın v^* genişlemesi olduğunu gösterelim: Varsayalım ki

$$\exists\ z \in E\backslash H\ \ni\ (\mu_1 + \mu_2)\,(v^*) < (\mu_1 + \mu_2)\,(z)$$

dır. $a \neq 0$ ve $v \in H$ için z vektörü $z = a\,(v^* + v)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$(\mu_1 + \mu_2)\,(v^*) < (\mu_1 + \mu_2)\,(z) = (\mu_1 + \mu_2)\,(a\,(v^* + v)) = (\mu_1 + \mu_2)\,(v^* + v)$$

olup bu ise

$$\forall\ \widetilde{x},\ \exists\ x_1 \in E\ \ni\ \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu\left(v^* - \widetilde{x}\right) < \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^* + v - x_1) \tag{2.14}$$

demektir. Özellikle $\widetilde{x} = 0$ ise (2.14) doğrudur.

$$\mu_1\,(0) \wedge \mu\,(v^*) < \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^* + v - x_1)$$

dir. Fakat $\mu_1\,(0) \geq \sup\left[\mu_2\,(E{-}\,\{0\})\right]$ olduğundan

$$\mu_2(v^*) < \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^* + v - x_1) \tag{2.15}$$

dır. $x_1 \in H$ ise $v \in H$ olduğundan $v - x_1 \in H$ olur. Böylece Yardımcı Teorem 2.3.7 den $\mu_2(v^* + v - x_1) = \mu_2(v^*) \wedge \mu_2(v - x_1)$ dır ve (2.15) ifadesi

$\mu_2(v^*) < \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^*) \wedge \mu_2(v - x_1)$ olur ki bu imkansızdır. Böylece $x_1 \in E \backslash H$ dır. (2.14) ifadesinde $\widetilde{x} = v^*$ olsun. $\mu_2(0) \geq \sup[\mu_1(E - \{0\})]$ olduğundan,

$$\mu_1(v^*) < \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^* + v - x_1) \tag{2.16}$$

dır. Böylece $\mu_1(E - H) = \mu_1(v_1)$ dir ve böylece $\mu_1(v^*) = \mu_1(x_1)$ dir. O halde (2.16) ifadesindeki eşitsizlik yanlıştır. Böylece $\forall\, z \in E - H$ için $(\mu_1 + \mu_2)(v^*) \geq (\mu_1 + \mu_2)(z)$ dir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.3.8 den, $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ nin bir B bulanık tabanı, $\widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_2$ nın bir B^* fuzzy tabanın v^* genişlemesidir. Şimdi de

$$\begin{aligned} v^* \in A_1 \Rightarrow \quad & (\mu_1 + \mu_2)(v^*) = \mu_2(v^*) \\ v^* \in A_2 \Rightarrow \quad & (\mu_1 + \mu_2)(v^*) = \mu_1(v^*) \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim: Tanımdan

$$(\mu_1 + \mu_2)(v^*) = \sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^* - x_1) : x_1 \in E\}$$

dır. $\sup\{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(v^* - x_1) : x_1 \in E\} = \mu_1(\widetilde{x}) \wedge \mu_2(v^* - \widetilde{x})$ olacak şekilde $\widetilde{x}$ verilsin. İlk olarak $x_1 = 0$ daha sonra $x_1 = v^*$ alarak ve $\mu_1(0) \geq \sup\{\mu_2(E - \{0\})\}$ ve $\mu_2(0) \geq \sup\{\mu_1(E - \{0\})\}$ olduğundan $\mu_1(v^*) \vee \mu_2(v^*) \leq \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2\left(v^* - \widetilde{x}\right)$ elde edilir. Varsayalım ki

$$\mu_1(v^*) \vee \mu_2(v^*) < \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2\left(v^* - \widetilde{x}\right) \tag{2.17}$$

olsun. Eğer $\widetilde{x} \in H$ ise Yardımcı Teorem 2.3.7 ($B = B^* \cup \{v^*\}$, $\widetilde{E}$ için bir bulanık tabandır.) den (2.17) ifadesi

$$\mu_1(v^*) \vee \mu_2(v^*) < \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2(v^*) \wedge \mu_2\left(\widetilde{x}\right)$$

olur ki bu doğru değildir. Böylece $\widetilde{x} \in E - H$ dır. Fakat $\mu_1(v^*) = \mu_1\left(\widetilde{x}\right)$ olduğundan (2.17) eşitsizliği sağlanmaz. O halde

$$\mu_1(v^*) \vee \mu_2(v^*) = \mu_1\left(\widetilde{x}\right) \wedge \mu_2\left(v^* - \widetilde{x}\right) = (\mu_1 + \mu_2)(v^*) \tag{2.18}$$

dır. (2.18) ifadesi istenilen sonuçtur.

Teorem 2.4.7 bulanık vektör uzay teorisinde önemli bir yere sahiptir. Şimdi Teorem 2.4.7 den elde edilen bazı sonuçları verelim:

Sonuç 2.4.8 *E sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $\mu_1(0) \geq \sup\{\mu_2(E - \{0\})\}$ ve $\mu_2(0) \geq \sup\{\mu_1(E \setminus \{0\})\}$ olmak üzere, E üzerinde iki bulanık vektör uzayı $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ olsun. Bu taktirde*

$$boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) = boy\left(\widetilde{E}_1\right) + boy\left(\widetilde{E}_2\right) - boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_1\right)$$

dir.

İspat: Teorem 2.4.7 den B bulanık taban olsun.

$$\begin{aligned} boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) &= \sum_{v \in B} (\mu_1 + \mu_2)(v) = \sum_{v \in A_1 \cap B} (\mu_2)(v) + \sum_{v \in A_2 \cap B} (\mu_1)(v) \\ &= \sum_{v \in A_1 \cap B} (\mu_2)(v) + \sum_{v \in A_2 \cap B} (\mu_1)(v) + \sum_{v \in A_2 \cap B} (\mu_2)(v) + \sum_{v \in A_1 \cap B} (\mu_1)(v) \\ &\quad - \sum_{v \in A_2 \cap B} (\mu_2)(v) - \sum_{v \in A_1 \cap B} (\mu_1)(v) \\ &= \sum_{v \in B} (\mu_1)(v) + \sum_{v \in B} (\mu_2)(v) - \sum_{v \in A_2 \cap B} (\mu_2)(v) - \sum_{v \in A_1 \cap B} (\mu_1)(v) \\ &= boy\left(\widetilde{E}_1\right) + boy\left(\widetilde{E}_2\right) - \sum_{v \in B} (\mu_1 \wedge \mu_2)(v) \\ &= boy\left(\widetilde{E}_1\right) + boy\left(\widetilde{E}_2\right) - boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_1\right) \end{aligned}$$

Teorem 2.4.5 dekine benzer şekilde, Teorem 2.4.7 ve Sonuç 2.4.8 sonlu boyutlu bulanık vektör uzaylarına genişletilebilir.

Örnek 2.4.9 *$E = \mathbb{R}^2$ olsun. μ_1 ve μ_2 aşağıdaki gibi tanımlayalım.*

$$\begin{aligned} &\mu_1(0) = \tfrac{5}{6} \;,\; \mu_1(0, \mathbb{R} - \{0\}) = \tfrac{1}{2} \;,\; \mu_1(E - \mathbb{R}) = \tfrac{1}{4} \\ &\mu_2(0) = 1 \;,\; \mu_2(\{(x,x) : x \in \mathbb{R} - \{0\}\}) = \tfrac{1}{3} \;,\; \mu_2(E - \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}) = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

kolaylıkla görülebilir ki $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ bulanık vektör uzayıdır ve $\mu_1(0) \geq \sup\{\mu_2(E - \{0\})\}$ ve $\mu_2(0) \geq \sup\{\mu_1(E - \{0\})\}$ dır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} &(\mu_1 \wedge \mu_2)(0) = \tfrac{5}{6} \;,\; (\mu_1 + \mu_2)((0, \mathbb{R} - \{0\})) = \tfrac{1}{2} \\ &(\mu_1 \wedge \mu_2)(E - \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}) = \tfrac{1}{5} \;,\; (\mu_1 + \mu_2)(0) = \tfrac{5}{6} \\ &(\mu_1 \wedge \mu_2)(\{(x,x) : x \in \mathbb{R} - \{0\}\}) = \tfrac{1}{4} \;,\; (\mu_1 + \mu_2)(E - (0, \mathbb{R})) = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

ve $B = \{(0,1), (1,1)\}$, $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ için bir taban olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} &boy\left(\widetilde{E}_1\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \;,\; boy\left(\widetilde{E}_2\right) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{8}{15} \\ &boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6} \;,\; boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{9}{20} \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$boy\left(\widetilde{E}_1\right)+boy\left(\widetilde{E}_2\right)-boy\left(\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_1\right)=\frac{3}{4}+\frac{8}{15}-\frac{9}{20}=\frac{5}{6}=boy\left(\widetilde{E}_1+\widetilde{E}_2\right)$$

Tanım 2.4.10 $\widetilde{E}=(E,\mu)$ *bir bulanık vektör uzayı ve* $f:E\longrightarrow F$ *bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde,*

$$f(\mu)(x)=\begin{cases}\sup\left\{(\mu)(z):z\in f^{-1}(x)\right\} & ,\ f^{-1}(x)\neq\varnothing\\ 0 & ,\ f^{-1}(x)=\varnothing\end{cases}$$

$\widetilde{cekf}=\left(cekf,\mu_{|_{cekf}}\right)$ *ve* $\widetilde{g\ddot{o}rf}=\left(g\ddot{o}rf,\mu_{|_{g\ddot{o}rf}}\right)$ *şeklinde tanımlanr.*

Teorem 2.4.11 *E sonlu boyutlu vektör uzayı olmak üzere* $\widetilde{E}=(E,\mu)$ *bir bulanık vektör uzayı ve* $f:E\longrightarrow F$ *bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde,*

$$boy\left(\widetilde{cekf}\right)+boy\left(\widetilde{g\ddot{o}rf}\right)=boy\left(\widetilde{E}\right)$$

dir.

İspat: Varsayalım ki $cekf\neq\varnothing$ olsun. $cekf=\{0\}$ ise ispat benzer şekilde yapılır B_{cek}, $\widetilde{cekf}$ nin bir bulanık tabanı ve B_{gen}, B_{cek} in $\widetilde{E}$ için bir bulanık tabana genişlemesi olsun. $B_{cek}\cup B_{gen}=B$, $\widetilde{E}$ için bir bulanık tabandır ve $B_{cek}\cap B_{gen}=\varnothing$ dir.

İlk olarak $f(B_{gen})=B_{g\ddot{o}r}$ nün $\widetilde{g\ddot{o}rf}$ için bir bulanık taban olduğunu gösterelim. $B_{g\ddot{o}r}$ ün $g\ddot{o}rf$ nin bir tabanı olduğu açıktır.

$v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n\in B_{gen}$ ve hepsi birden sıfır olmayan $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n\in\mathbb{R}$ verilsin. Tanımdan

$$f(\mu)\left(\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\right)=\begin{cases}\sup\left\{(\mu)(x):x\in f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\right)\right\} & ,\ f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\right)\neq\varnothing\\ 0 & ,\ f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\right)=\varnothing\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\in g\ddot{o}rf$ olduğundan

$$f(\mu)\left(\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\right)=\sup\left\{(\mu)(x):x\in f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_if(v_i)\right)\right\}$$

f nin lineerliliği ve f^{-1} özelliğinden

$$f(\mu)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)\right) = \sup\left\{(\mu)(x) : x \in cekf + f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)\right)\right\}$$

dir. $z \in cekf$ ise $z = 0$ yada b_i lerin hepsi birden sıfır olmamak üzere, $u_i \in B_{cek}$ için $z = \sum_{i=1}^{p} b_i u_i$ dir. Dolayısıyla $z \in cekf + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ ise ya $(\mu)(x) = \mu\left(0 + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right)$ ya da $(\mu)(x) = \sum_{i=1}^{p} b_i u_i + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ dir. Böylece

$$(\mu)(x) = \min\left(\bigwedge_{i=1}^{p} \mu(b_i u_i), \bigwedge_{i=1}^{k} \mu(a_i v_i)\right)$$

olur ki bu ifade $\mu\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right)$ ifadesine eşit yada daha küçüktür. Böylece

$$f(\mu)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(a_i v_i)$$

dir. Benzer şekilde $f(\mu)(f(v_i)) = \mu(v_i)$ elde edilir. Böylece

$$f(\mu)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)\right) = \bigwedge_{i=1}^{k} f(\mu)(a_i v_i)$$

dir ve dolayısıyla $B_{gör}$, $görf$ için bir bulanık tabandır. Şimdi bulanık boyut tanımından

$$boy\left(\widetilde{E}\right) = \sum_{v \in B_{cek} \cup B_{gen}} \mu(v) = \sum_{v \in B_{cek}} \mu(v) + \sum_{v \in B_{gen}} \mu(v)$$

elde edilir. Fakat $z \in \langle B_{gen} \rangle$ ise, $f(\mu)(f(z)) = \mu(z)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} boy\left(\widetilde{E}\right) &= \sum_{v \in B_{cek}} \mu(v) + \sum_{v \in B_{gen}} f(\mu)(f(v)) \\ &= \sum_{v \in B_{cek}} \mu(v) + \sum_{v \in B_{gör}} f(\mu)(v) \\ &= boy\left(\widetilde{cekf}\right) + boy\left(\widetilde{görf}\right) \end{aligned}$$

Teorem 2.4.11 in sonucu sonlu boyutlu bulanık vektör uzaylarına genişletilebilir.

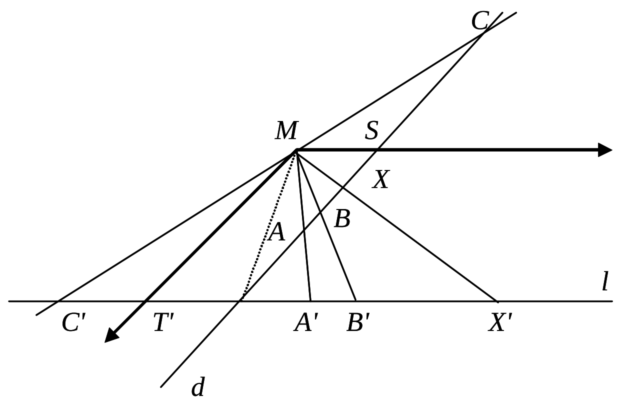
BÖLÜM 3

Bulanık Projektif Geometriler

Bu bölümde, [8] esas alınarak Projektif Uzay tanıtılmış ve $n-$boyutlu bir vektör uzayı ile $(n+1)-$boyutlu bir Projektif Uzay arasındaki ilişki incelenmiştir.

3.1 Öklid Düzleminin Projektif Düzleme Genişlemesi

Öklid geometrisinin en önemli postulatı, başka iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğruyla aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük iç açılar meydana getirirse bu iki doğrunun uzantıları açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler. Buna göre, bir doğruya paralel olan ve bu doğru dışında verilen bir noktadan geçen bir tek doğru vardır. Öklid düzleminde kesişen d ve l gibi doğrular göz önüne alınırsa; d ve l noktalarını, bu doğruların hiçbiri üzerinde bulunmayan bir M noktası yardımıyla birbirine şu şekilde eşlenirse: d üzerindeki herhangi X noktasına MX doğrusu ile l nin ortak (arakesit) noktası karşı gelsin (Buna M merkezli izdüşüm denir). Buna göre d nin $A,\ B,\ C,\ldots$ noktaları l nin $A',\ B',\ C',\ldots$ noktalarına eşlenir.

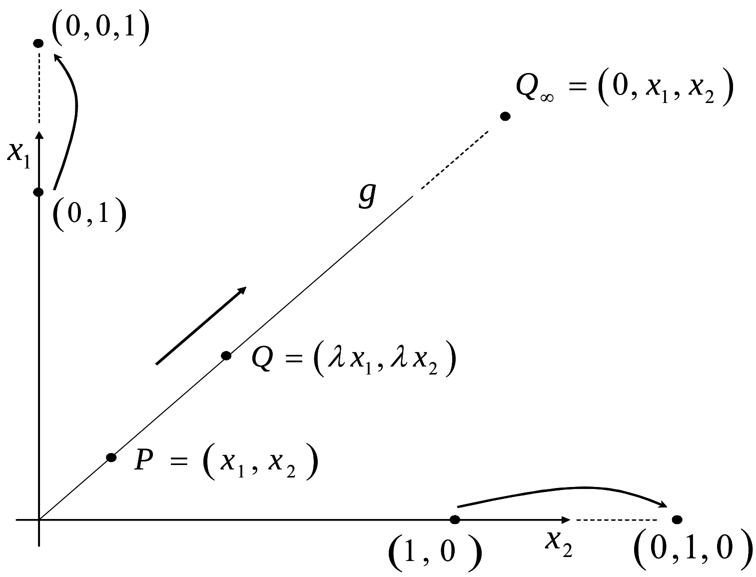


Şekil-3.1

MS doğrusu l ye paralel olacak şekilde seçilmişse d nin S noktasına l nin hangi noktası karşılık gelir? MT' doğrusu d ye paralel ise d nin hangi noktası T' ye eşlenir? Öklid düzleminde bu sorulara cevap olacak noktaları bulmak mümkün değildir. Bu ve benzeri düşünceler matematikçileri Öklid geometrisinde bir boşluk olabileceği düşüncesine yöneltmiş ve parelellik postulatı kuşku ile karşılanır olmuştur. Bu sebeple, önceleri bu postulatın ispat edilebileceği sanılarak bu yönde çalışmalar yapılmış ama sonuç alınamamıştır. Daha sonraları J. Bolyai (1802-1860), N. I. Lobaçevski (1792-1856) ve C. F. Gaus (1777-1855) tarafından paralellik postulatının ispat edilemeyeceği, onun mümkün hallerinden yalnız bir tanesi olduğu görülmüştür. Daha açık söylemek gerekirse, aksiyomların gerçeklerden çok varsayımlar olduğu anlaşılmış ve bu sonuç yepyeni geometrilerin doğmasına yol açmıştır. Örneğin, yukarıdaki soruları olumlu cevaplayabilmek için Öklid postulatını " düzlemde herhangi iki doğru en az bir ortak noktaya sahiptir " varsayımı ile değiştirilmekle eliptik (gerçel projektif) geometrinin temeli atılmıştır. Bu alanda paralelliğin söz konusu olmadığı bir geometri ilk kez B. Riemann (1826-1856) tarafından geliştirilmiştir. Bundan başka söz konusu Öklid postulatı yerine " bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir " varsayımını almakla hiçbir çelişkiye düşmeyen ve Öklid geometrisi kadar doğru olan başka geometrilerin (Bolyai-Lobaçevski geometrisinin) varlığıda gösterilmiştir. Öklid geometrisinin paralellik özelliği ile ayrılan bu çeşit tüm geometrilere, yani Öklid geometrisi dışındaki her geometriye Öklidyen olmayan geometri denir. Bütün bu geometriler paralellik postulatı üzerindeki değişikliklerden hareketle genelleştirme ve soyutlama yoluyla kurulmuştur denilebilir. Sonuç olarak projektif geometri Öklidyen olmayan bir geometridir. Paralellik postulatından dolayı Öklid geometrisi, Projektif geometri içinde kalan bir matematiksel yapıdır. O halde Öklidsel yapılar Projektif yapılara genişletilebilir. Bu genişleme koordinatlar yardımıyla aşağıdaki şekilde yapılır.

Öklid düzleminde koordinatları $x_1,\ x_2$ olan bir $P = (x_1, x_2)$ noktası; $\zeta_0 \neq 0$ olmak üzere, $i = 1,\ 2$ için $x_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_0}$ bağıntısı yardımıyla P noktası, $P = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ üçlüsüyle gösterilebilir.

Burada $i = 1,\ 2$ için, $\frac{\zeta_i}{\zeta_0} = \frac{\lambda\zeta_i}{\lambda\zeta_0}$ $(0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ cisim$)$ olduğundan $P = (x_1, x_2)$ noktası sonsuz sayıda sıralı üçlü ile temsil edilebilir. Buna göre $P = (x_1, x_2)$ noktası $(1, x_1, x_2)$ sıralı üçlüsü ile adlandırılır. Yukarıda verilen bağıntı yardımıyla tanımlanan, $\zeta_0 \neq 0,\ \lambda \neq 0$ için $(\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2)$ sıralı üçlülerin herbirine P noktasının homogen koordinatları denir. Düzlemde dik veya paralel koordinat sisteminde sonsuzdaki noktanın homogen koordinatlarının bulunuşu şekil-3.2 deki gibidir.



Şekil-3.2

Q noktasının homogen koordinatları; $Q = (\lambda x_1, \lambda x_2) \equiv (1, \lambda x_1, \lambda x_2)$ dır Eğer λ, $+1$ den $+\infty$ arasında değişen keyfi bir sabit ise Q, P ve Q tarafından belirlenen ve orjinden geçen g doğrusu üzerinde hareket eder. $\lambda \longrightarrow \infty$ iken

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda}, \lambda x_1, \lambda x_2 \right) \equiv (0, x_1, x_2) = Q_\infty$$

olup bu nokta g üzerindeki sonsuzdaki noktadır. Homogen koordinatlarda $(0,0,0)$ üçlüsü, Öklid düzleminde hiçbir noktayı temsil etmez. Sonuç olarak her $(0, \zeta_1, \zeta_2)$ sıralı üçlüsü, ζ_1, ζ_2 ikisi birden sıfır olmamak üzere Öklid düzleminde sonsuzdaki noktayı temsil eder ve ideal (improper) nokta adını alır. Ayrıca iki $(0, \zeta_1, \zeta_2)$, $\left(0, \zeta_1^{\shortmid}, \zeta_2^{\shortmid}\right)$ ideal nokta, $\lambda \neq 0$ için $\zeta_1 = \lambda \zeta_1^{\shortmid}$, $\zeta_2 = \lambda \zeta_2^{\shortmid}$ olduğundan eşittir (ya da denktir). Demek ki her doğru üzerinde sonsuzda diyebileceğimiz bir tek ideal nokta vardır. Nihayetinde bu ideal noktaların ilave edilmesi ile elde edilen düzleme projektif düzlem adı verilir. Projektif düzlemin ideal (improper) noktalarının aksine $\zeta_0 \neq 0$, $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ sıralı üçlüleri ile temsil edilen noktalarına ise has (proper) nokta denir. Burada Öklid koordinat sisteminin orjin noktasından geçen her doğru için bir tek ideal (improper) nokta belirlendi, fakat Öklid düzlemindeki keyfi doğrular için ideal (improper) noktalar nasıl belirlenir? Bunun için herhangi bir doğrunun homogen koordinatlardaki denklemi gözönüne alınır. Buna göre Öklid düzleminde herhangi bir doğru

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \tag{3.1}$$

denklemi ile temsil edilir. (3.1) denkleminde $x_1 = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}$, $x_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_0}$ bağıntısı uygulanırsa;

$$a_0\zeta_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir. Yani (3.2) denklemi orjinden geçmeyen herhangi bir doğrunun homogen koordinatlardaki denklemidir.

$$\begin{aligned} &a_0\zeta_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 = 0 \\ &\zeta_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

homogen denklem sisteminin matrisinin rankı 2 dir. Çünkü $a_0,\ a_1,\ a_2$ sabitleri aynı anda sıfır olamaz aksi halde (3.1) denklemi bir doğru belirtmez. O halde rank 2 olduğundan bir parametreye bağlı bir çözüm söz konusu olup, bu çözüm bir boyutlu lineer vektör uzayı teşkil eder.

$$\left.\begin{aligned} &a_0\zeta_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 = 0 \\ &\zeta_0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 = 0 \Rightarrow \zeta_1 = \frac{-a_2}{a_1}\zeta_2$$

Yani çözüm kümesi $\left\{\left(0, \frac{-a_2}{a_1}\zeta_2, \zeta_2\right) : \zeta_2 \neq 0\right\}$ dir.

O halde (3.2) ile ifade edilen her denklem bir doğruya karşılık gelir mi? (3.2) denklemi, (3.1) denkleminden elde edilmişti. Varsayalım ki $a_1 = a_2 = 0$ olsun. Bu durumda (3.2) denklemi

$$a_0\zeta_0 = 0 \tag{3.4}$$

şekline indirgenir. Eğer $a_0 = 0$ ise düzlemdeki her nokta (3.4) denklemini sağlayacağından artık bir doğru belirtmez. Böylece $a_0 \neq 0$ dır. Dolayısıyla (3.4) denklemi

$$\zeta_0 = 0$$

denklemine denktir. (3.4) denklemini sağlayan tüm noktalar sonsuzdaki noktalardır. Sonsuzdaki tüm noktaların (ideal noktalar) sağladığı $\zeta_0 = 0$ doğrusuna ideal doğru denir.

g doğrusu $a_0\zeta_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 = 0$ denklemi ile, h doğrusu $b_0\zeta_0 + b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 = 0$ denklemi ile temsil edilsin. g ve h doğrularının arakesitinin ne olduğu incelenirse,

$$\begin{aligned} a_0\zeta_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 &= 0 \\ b_0\zeta_0 + b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

homogen denklem sisteminin matrisinin rankı ya 1 ya da 2 dir. Rankın 1 olması durumunda; g ve h doğruları aynı doğrudur. Rankın 2 olması durumunda çözüm kümesi bir tek noktadan ibarettir. Sonuç olarak projektif düzlemde herhangi iki doğrunun ortak bir tek noktası vardır. Bu noktanın improper ve proper olduğu düşünülerek, Öklid düzlemindeki tüm paralel doğrular aynı improper noktada kesişirler sonucu da elde edilir.

3.2 n-Boyutlu Projektif Uzay

$2-$boyutlu duruma benzer şekilde, $\zeta_0 \neq 0$, $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ sıralı $(n+1)$ lileri ile $\mathbb{R}^n$ nin $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktaları arasında ilişki incelenirse;

$i = 1, \ldots .n$ için $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nin $x_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_0}$ bağıntısı yardımıyla P noktası $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ sıralı $(n+1)$-lisi ile ilişkilendirilir. Bu bağıntı ile $\mathbb{R}^n$ nin P noktası sıralı $(n+1)$-li ile temsil edilir. Ayrıca $\zeta_0^{'} = \lambda\zeta_0, \ldots, \zeta_n^{'} = \lambda\zeta_n$ olmak üzere, $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ve $\left(\zeta_0^{'}, \zeta_1^{'}, \ldots, \zeta_n^{'}\right)$ sıralı $(n+1)$ lileri $\mathbb{R}^n$ nin aynı noktasını temsil eder.

$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ yukarıdaki kurala göre ilişkilendirilmiş ise $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ sıralı $(n+1)$ lisine P nin **homogen koordinatları** denir. P nin homogen koordinatları $P = [\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ e hepsi aynı anda sıfır olmayan ζ_i için, $[0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ sıralı $(n+1)$ lileri eklenirse, daha önce has (proper) noktalara yeni noktalar eklenmiş olacak ve bunlar ideal (improper) nokta olarak isimlendirilecektir.

$i{=}1, \ldots .n$ için $\zeta_i{=}\lambda\zeta_i^{'}$ ve $\lambda{\neq}0$ olmak üzere, $P{=}[0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ ve $Q{=}\left[0, \zeta_1^{'}, \ldots, \zeta_n^{'}\right]$ aynı ideal noktalar olacaktır.

$\mathbb{R}^n$ e ideal (improper) noktalar eklenerek elde edilen yapıya $n-$boyutlu projektif uzay denir ve $\mathbb{P}_n$ ile gösterilir.

$$\mathbb{P}_n = \left\{ [\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n] : \begin{array}{l} \exists_1 \ \zeta_i \neq 0, \ i = 0, \ldots, n \\ [\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n] = \lambda \, [\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n] \, , \ 0 \neq \lambda \in F \text{ (cisim)} \end{array} \right\}$$

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $r-$boyutlu bir lineer alt uzay,

$$\begin{aligned} a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{20} + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m0} + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

katsayılar matrisinin rankı $n - r$ olan, lineer denklem sistemi ile temsil edilir. (3.6) sisteminde $x_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_0}$ bağıntısı uygulanırsa

$$\begin{aligned} a_{10}\zeta_0 + a_{11}\zeta_1 + \cdots + a_{1n}\zeta_n &= 0 \\ a_{20}\zeta_0 + a_{21}\zeta_1 + \cdots + a_{2n}\zeta_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m0}\zeta_0 + a_{m1}\zeta_1 + \cdots + a_{mn}\zeta_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

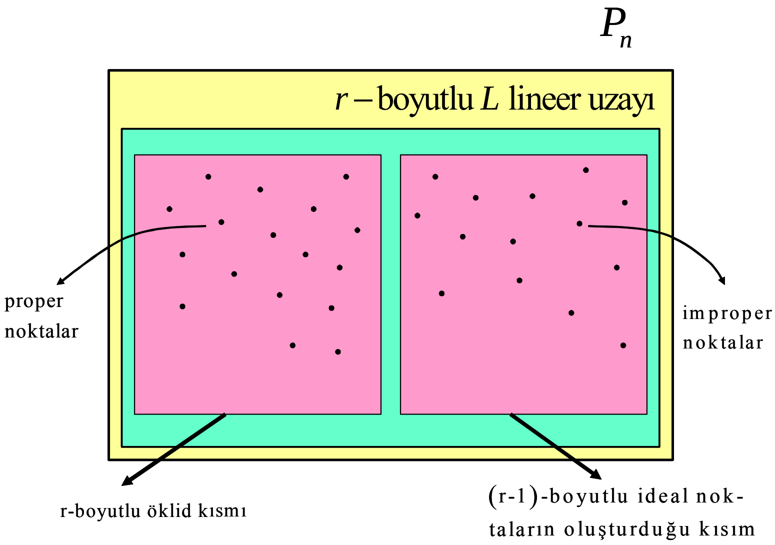
elde edilir. Rankı $n-r$ olan (3.7) formundaki denklem sistemini sağlayan $\mathbb{P}_n$ nin $[\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ noktalarının kümeside $r-$boyutlu lineer alt uzaynı teşkil eder. $1-$boyutlu bir lineer uzay doğrudur. $2-$boyutlu bir lineer uzay düzlemdir ve $(n-1)-$boyutlu bir lineer uzay hiperdüzlemdir. Hiperdüzlem durumunda (3.7) sisteminin matrisinin rankı 1 dir, yani (3.7) sisteminin $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ olan tüm vektör çözümleri, bu vektörler arasında sabit bir tanesinin katlarıdır. Böylece (3.7) sisteminin çözümü olan $[\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ sıralı $(n+1)$ lilerin tümü $\mathbb{P}_n$ de aynı noktayı temsil eder. $n-$boyutlu lineer uzay ise $\mathbb{P}_n$ projektif uzayının kendisidir. Çünkü (3.7) sisteminin matrisinin rankı 0 dır. Yani sistemin tüm katsayıları sıfırdır, bunun ise anlamı $\mathbb{P}_n$ nin tüm noktaları (3.7) sistemini sağlar.

Her lineer uzay sadece has (proper) noktalardan oluşmak zorunda değildir. Çünkü (3.7) sistemi (3.6) sistemi aracılığı ile inşa edilmişti. (3.6) sistemi çözümü olmayan bir sistem olabilir. Bu durumda (3.7) sistemi tarafından belirlenen lineer uzay tamamen ideal (improper) noktalardan oluşur. Bu ideal uzay örneği $\mathbb{P}_n$ nin tüm ideal noktalarından oluşan $\zeta_0 = 0$ ideal hiperdüzlemidir.

Rankı $n-r$ olan (3.7) formundaki denklem sisteminin, $\mathbb{P}_n$ de has (proper) noktalardan oluşan $r-$boyutlu lineer uzay L olsun. Eğer bu sisteme bağımsız bir denklem olarak $\zeta_0 = 0$ denklemi ilave edilirse (3.7) sistemi

$$\begin{aligned}
&a_{10}\zeta_0 + a_{11}\zeta_1 + \cdots + a_{1n}\zeta_n = 0\\
&a_{20}\zeta_0 + a_{21}\zeta_1 + \cdots + a_{2n}\zeta_n = 0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&a_{m0}\zeta_0 + a_{m1}\zeta_1 + \cdots + a_{mn}\zeta_n = 0\\
&\zeta_0 = 0
\end{aligned}$$

denklem sistemine dönüşür ve bu sistemin rankı; $n - r + 1 = n - (r - 1)$ dır. O halde $r-$boyutlu L lineer uzayının ideal (improper) noktalarından oluşan alt lineer uzayının boyutu $r - 1$ dir.



Şekil-3.3

L (3.7) sistemi tarafından belirlenen has (proper) noktaları içeren $\mathbb{P}_n$ de $r-$boyutlu bir lineer uzay, $L^{'}$ de L nin has (proper) noktalarının teşkil ettiği lineer uzay olsun. Bunun anlamı $L^{'}$, $\mathbb{R}_n$ de $r-$boyutlu bir lineer uzay olmasıdır. $L^{'}$ nün bir noktasının $x_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_0}$ $(i = 1, \ldots .n)$ Öklid koordinatları (3.6) denklem sistemini sağlar. $L^{'}$ ünde P başlangıç ve Q bitiş noktasına sahip olan $\mathbb{R}_n$ Öklid uzayının $\overrightarrow{PQ}$ vektörleri $r-$boyutlu

L lineer vektör uzayını oluşturur. L nin her $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörü

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

denklem sistemini sağlar. $\mathbb{R}_n$ nin (3.8) i $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörü ve $\mathbb{P}_n$ nin $[0, x_1, \ldots, x_n]$ ideal noktası karşılaştırılırsa; $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, (3.8) sisteminin çözümü olan vektör, $[0, x_1, \ldots, x_n]$, (3.7) sisteminin çözüm noktasıdır. Tersine L nin $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektörü için $[0, x_1, \ldots, x_n]$ L nin ideal (improper) noktasıdır.

$L_1^{'} \neq \varnothing$ ve $L_2^{'} \neq \varnothing$ olmak üzere, $i = 1,\ 2$ için L_i nin has (proper) noktalarının tamamı $L_i^{'}$ uzayını teşkil etsin. Başlangıç ve bitiş noktaları $L_i^{'}$ de olan $\mathbb{R}_n$ nin vektörlerinin tamamı L_i uzayını oluştursun. $L_i^{''}$ ise $i = 1,\ 2$ için L_i nin ideal (improper) noktalarından oluşsun. Paralellik tanımından;

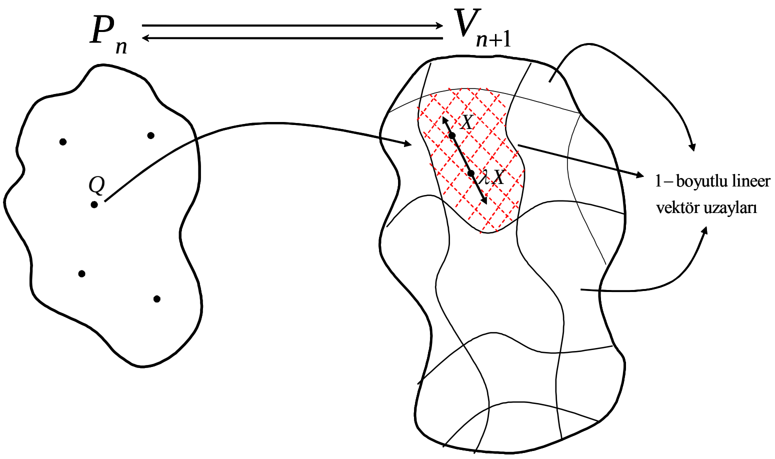
$$\begin{aligned} L_1^{'} \parallel L_2^{'} &\iff L_1 \subset L_2 \text{ veya } L_2 \subset L_1 \\ &\iff L_1^{''} \subset L_2^{''} \text{ veya } L_2^{''} \subset L_1^{''} \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Burdan ise $i = 1,\ 2$ için L_i den birinin ideal (improper) kısımı diğerinin improper kısımına aittir. O halde L_1 ve L_2 nin aynı boyutlu olması halinde;

$$L_1^{'} \parallel L_2^{'} \iff L_1^{''} = L_2^{''}$$

dir. Özel olarak L_1 ve L_2 nin doğru olması durumunda, $L_1^{''} = L_2^{''}$ tek bir ideal (improper) noktadan oluşur. Dolayısıyla paralel doğrular tek bir ideal noktada kesişir yorumu elde edilir.

$\mathbb{P}_n$ nin bir Q noktası ve $(n{+}1)$ $-$boyutlu vektör uzayı V_{n+1} in bir $X{=}\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ vektörü için şu ilişkiden bahsedilir; Q noktasının homogen koordinatları $Q = [\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ dir. Eğer Q ve X arasında bu ilişki var ise X e Q nun koordinat vektörü denir. Bu kurala göre, V_{n+1} in bir X vektörü, $\mathbb{P}_n$ nin sadece bir tek noktasına tekabül eder. Sadece sıfır vektörü $\mathbb{P}_n$ nin hiçbir noktası ile ilişkili değildir. Ayrıca $\lambda \neq 0,\ X = \lambda Y$ ise X ve Y vektörleri $\mathbb{P}_n$ nin aynı noktasını temsil eder. O halde $X,\ Q$ noktasının koordinat vektörü ise $\lambda \neq 0,\ \lambda X$ vektörüde sadece Q nun koordinat vektörüdür. Böylece $\mathbb{P}_n$ nin her Q noktasına karşılık V_{n+1} de $1-$boyutlu lineer vektör uzayı karşılık gelmiş olur ve bu vektör uzayı L_Q ile gösterilir. Sonuç olarak; $Q \neq Q^{\shortmid}$ ise $\mathrm{L}_Q \neq \mathrm{L}_{Q^{\shortmid}}$ dür. O halde $Q \leftrightarrows \mathrm{L}_Q$ ilişkisi V_{n+1} in $1-$boyutlu lineer vektör uzayı ile $\mathbb{P}_n$ nin noktaları arasında bir bire-bir eşlemedir.



Şekil-3.4

Buraya kadar olan kısımda temel olarak projektif uzay tanıtılmış ve genel anlamda vektör uzayları ile projektif uzaylar arasındaki ilgi incelendi. Buradan sonraki kısımda, bulanık vektör uzayları ile bulanık projektif uzaylar arasındaki ilişki üzerine yapılmış olan [6] nolu çalışma incelenecektir.

μ V üzerinde bir bulanık vektör uzayı olsun. $Supp(\mu)$ tarafından üretilen ($Supp(\mu) = \{x \in V : \mu(x) \neq 0\}$) L altuzayına μ nün taban vektör uzayı denir. Bu taktirde μ, L taban vektör uzaylı bir bulanık vektör uzayı yada kısaca L üzerinde bir bulanık vektör uzayı olarak adlandırılır ve (μ, L) ile gösterilir. Eğer U, $L \subseteq U \subseteq V$ olacak şekilde bir alt uzay ise μ yü U üzerinde bir bulanık vektör uzayı olarakta düşünülebilir. Bu durumda μ, (μ, U) ile gösterilecektir.

Ayrıca $\forall\, \vec{x} \in V - U$, $\mu^{\shortmid}\left(\vec{x}\right) = 0$ ile (μ, U) bulanık vektör uzayını $(\mu^{\shortmid}, V)$ bulanık vektör uzayına genişletebiliriz. P. Lubczonok' a göre; Sonlu boyutlu bulanık vektör uzayının boyutu, bulanık tabanının kardinalitesine eşittir. Bu kardinalite $kard\,(\mu) = \sum\limits_{\vec{u} \in V} \mu\left(\vec{u}\right)$ olarak tanımlanır ki bu tamsayı olmayan bir boyut verir. Bu ise amaca uygun değildir. Örneğin V üzerinde bulanık vektör uzaylarının tabanları sırasıyla
$\left\{\left(\vec{x}, 0.1\right), \left(\vec{y}, 0.3\right)\right\}$ ve $\left\{\left(\vec{z}, 0.7\right)\right\}$verilsin. P. Lubczonok' a göre birinci bulanık

vektör uzayın boyutu 0.4, ikinci bulanık vektör uzayın boyutu 0.7 dir. Bu durumda boyuttan taban vektörlerinin sayısı için bir sonuç çıkarmak imkansızdır. Bu boyut tanımı tanımlanan bir bulanık geometri için bir taban belirlemeye yeterli değildir. Bu zor durumun üstesinden gelmek için alternatif bir tanım aşağıda verilecektir:

Tanım 3.2.1 *V nin bir bulanık altuzayının boyutu olan boy(μ), onun taban alt uzayının boyutudur.*

Örneğin $\mu : L \longrightarrow [0,1]$, V nin bir boyutlu L altuzayı üzerinde bulanık vektör uzayı ise $boy\,(\mu) = 1$ olur.

Tanım 3.2.2 *U, V nin bir $i-$boyutlu alt uzayı olmak üzere, (μ, U) bir bulanık vektör uzayı ise (μ, U) ya, U üzerinde $i-$boyutlu bulanık vektör uzayı denir.*

$i = 1$ için, U bir vektör doğru olup, (μ, U), U üzerinde bulanık vektör doğru

$i = 2$ için, U bir vektör düzlem olup, (μ, U), U üzerinde bulanık vektör düzlem

$i = n-1$ için, U bir hiperdüzlem olup, (μ, U), U üzerinde bulanık vektör hiperdüzlem olarak adlandırılır.

3.3 Bulanık Vektör Doğrular ve Düzlemler

Herhangi bir F cismi üzerinde, $n \geq 2$ olmak üzere bir $n-$boyutlu V vektör uzayı verilsin. V nin bir vektör doğrusuda L olsun. Dolayısıyla L, sıfırdan farklı bir $\vec{u}$ vektörü ile tek türlü tanımlanır. Bazen de bu L doğrusu $\overrightarrow{0u}$ ile gösterilir. O halde L üzerinde bir μ bulanık kümesini verilsin;

Teorem 3.3.1 *$\mu : L \longrightarrow [0,1]$, L üzerinde bir μ bulanık vektör doğru ise*

$$\forall\ \vec{u},\ \vec{v} \in L \backslash \left\{\vec{0}\right\},\ \mu\left(\vec{u}\right) = \mu\left(\vec{v}\right) \quad ve \quad \forall\ \vec{u} \in L,\ \mu\left(\vec{0}\right) \geq \mu\left(\vec{u}\right)$$

dür.

$n \geqslant 3$ olmak üzere, $n-$boyutlu V vektör uzayının bir vektör düzlemi α olsun. Bu taktirde α, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki lineer bağımsız vektör tarafından tek türlü bellidir. Bazen de bu α düzlemi $\overrightarrow{0uv}$ ile gösterilir. O halde α üzerinde bir μ bulanık kümesini verilsin;

Teorem 3.3.2 $\mu : \alpha \longrightarrow [0,1]$, *$\alpha$ üzerinde bir bulanık vektör düzlem ise,* $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \in [0,1]$ *olmak üzere,*

$$\begin{array}{rlll} \mu : & \alpha & \longrightarrow [0,1] & \\ & \overrightarrow{0} & \longmapsto a_0 & \\ & \overrightarrow{u} & \longmapsto a_1 & , \ \forall \, \overrightarrow{u} \in L \backslash \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \\ & \overrightarrow{u} & \longmapsto a_2 & , \ \forall \, \overrightarrow{u} \in \alpha \backslash L \end{array}$$

olacak şekilde, α nın bir L vektör doğrusu vardır.

İspat: $\mu\left(\overrightarrow{0}\right) = a_0$ olsun. Önerme 2.1.3-(ii) den $\forall\, \overrightarrow{u} \in V$ için $\mu\left(\overrightarrow{0}\right) \geq \mu\left(\overrightarrow{u}\right)$ olduğu açıktır. Şimdi α düzleminde $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ gibi iki taban vektörü seçelim. O halde $a,\ b \in K,\ \overrightarrow{w} \in \alpha$ vektörü, $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılabilir. Bulanık vektör uzayı tanımından

$$\mu\left(\overrightarrow{w}\right) = \mu\left(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}\right) \geq \mu\left(\overrightarrow{u}\right) \wedge \mu\left(\overrightarrow{v}\right)$$

dir. $\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v'} = b\overrightarrow{v}$ denilirse, bu taktirde

$$\mu\left(\overrightarrow{w}\right) = \mu\left(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}\right) = \mu\left(\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v'}\right)$$

olur. Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: $\mu\left(\overrightarrow{u'}\right) \neq \mu\left(\overrightarrow{v'}\right)$ ise $a,\ b \in K \backslash \{0\}$, Önerme2.1.3-(ii) ve Önerme 2.1.4 den,

$$\mu\left(\overrightarrow{w}\right) = \mu\left(\overrightarrow{u'}\right) \wedge \mu\left(\overrightarrow{v'}\right) = \mu\left(a\overrightarrow{u}\right) \wedge \mu\left(b\overrightarrow{v}\right) = \mu\left(\overrightarrow{u}\right) \wedge \mu\left(\overrightarrow{v}\right)$$

dir. Bu ifade ya $\mu\left(\overrightarrow{u}\right)$ yada $\mu\left(\overrightarrow{v}\right)$ demektir ki bu da $a,\ b \neq 0$ olmak üzere $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ şeklinde yazılan $\forall\, \overrightarrow{w} \in V$ için, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ nin üyelik derecesi en küçük olan ile aynı üyelik derecesine sahip olacağı anlamına gelir.

Eğer $\mu\left(\overrightarrow{u}\right) > \mu\left(\overrightarrow{v}\right)$ ise $\overrightarrow{0u}$ vektör doğrusu üzerindeki vektörler dışında α üzerindeki tüm vektörler $\mu\left(\overrightarrow{v}\right)$ üyelik derecesine sahip olacaktır. $\left(\mu\left(\overrightarrow{v}\right) = a_1\right)$

Bu vektörler için $\exists\ a \in K \backslash \{0\}$ için $\mu\left(\overrightarrow{w}\right) = \mu\left(a\overrightarrow{u}\right) = \mu\left(\overrightarrow{u}\right) = a_1$ dir. Bu durumda $L = \overrightarrow{0u}$ dır.

Benzer şekilde $\mu\left(\overrightarrow{v}\right) > \mu\left(\overrightarrow{u}\right)$ ise $L = \overrightarrow{0v}$ olur.

Durum 2: $\mu\left(\overrightarrow{u^{'}}\right)=\mu\left(\overrightarrow{v^{'}}\right)=\mu\left(\overrightarrow{u}\right)=\mu\left(\overrightarrow{v}\right)$ ise

a) $\mu\left(\overrightarrow{w}\right)>\mu\left(\overrightarrow{u^{'}}\right)=\mu\left(\overrightarrow{v^{'}}\right)$ olacak şekilde α da $\overrightarrow{w}\neq 0$ vektörü yoksa α üzerindeki tüm vektörler aynı $\mu-$üyelik derecesine sahip olacaktır ve teoremin doğruluğu açıktır. Herhangi bir vektör doğrusu olarak L vektör doğrusu düşünülebilir ve $a_1=a_2=\mu\left(\overrightarrow{u^{'}}\right)$ dür.

b) $\mu\left(\overrightarrow{w}\right)>\mu\left(\overrightarrow{u}\right)=\mu\left(\overrightarrow{v}\right)$ olacak şekilde $\overrightarrow{w}\neq 0$ vektörü düşünülürse, (özellikle w ne $\overrightarrow{0u}$ ne de $\overrightarrow{0v}$ üzerindedir) α yı geren vektör kümesi olarak $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right\}$ kümesi alınabilir ki bu durumda Durum 1 söz konusudur.

Şimdi sonlu boyutlu vektör uzayları için aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı teorem 3.3.3 *Tabanı* $\left\{\overrightarrow{x_1},...,\overrightarrow{x_n}\right\}$ *olan, F cismi üzerinde bir $n-$boyutlu V vektör uzayı verilsin. μ, V üzerinde bulanık vektör uzay olmak üzere;*

$$\forall\, i,\ j,\ \ i\neq j \text{ için } \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)\neq\mu\left(\overrightarrow{x_j}\right) \quad ve \quad \overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{x_i} \ \text{ ise } \ \mu\left(\overrightarrow{x}\right)=\min_{i=1}^{n}\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$$

dür.

İspat: n üzerinde tümevarımla ispatı verilsin.

$n=1$ için ifade Önerme 2.1.3-(ii) ye indirgenir.

$n=k$ iken ifade doğru olsun.

Şimdi sıfırdan farklı bir vektör için $a_{k+1}\neq 0$ iken $\overrightarrow{x}=\sum_{i=1}^{k+1}a_i\overrightarrow{x_i}$ alınırsa;

$$\mu\left(\overrightarrow{x}\right)=\mu\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\overrightarrow{x_i}\right)=\mu\left(a_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}}+\sum_{i=1}^{k}a_i\overrightarrow{x_i}\right)=\mu\left(a_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}}+\overrightarrow{x^{'}}\right) \tag{3.9}$$

$\left(\overrightarrow{x^{'}}=\sum_{i=1}^{k}a_i\overrightarrow{x_i}\right)$ dır.

a) $\forall\ i<k+1$ için, Önerme 2.1.3-(ii) den;

$$\mu\left(a_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}}\right)=\mu\left(\overrightarrow{x_{k+1}}\right)\neq\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$$

olur.

b) Hipotezden;

$$\mu\left(\overrightarrow{x^{'}}\right)=\mu\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\overrightarrow{x_i}\right)=\min_{i=1}^{k}\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$$

ifadeleri vardır.

$\forall\ i \leq k,\ \mu\left(\overrightarrow{x_{k+1}}\right) \neq \mu\left(\overrightarrow{x^{\shortmid}}\right)$ dır. Dolayısıyla Önerme 2.1.4 den (3.9) ifadesi,

$$\mu\left(\overrightarrow{x^{\shortmid}}\right) \wedge \mu\left(a_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}}\right) \tag{3.10}$$

olur. a) ve b) varlığında (3.10) ifadesi

$$\min_{i=1}^{n} \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right) \wedge \mu\left(\overrightarrow{x_{k+1}}\right) = \min_{i=1}^{k+1} \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$$

olur.

Tanım 3.3.4 *V $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşikar olmayan ve $\forall\ j<i \leq n-1$, $U_j \subset U_i$ olacak şekildeki farklı altuzaylarının $(U_0, U_1, \ldots, U_m)$ dizisine V de bir flag denir. Bir flagın rankı onun içerdiği altuzayların sayısı olup, V de bir maksimal flag ise uzunluğu n olan flagdir.*

Teorem 3.3.5 *$\mu : V \longrightarrow [0,1]$, V üzerinde $n-$boyutlu bir bulanık vektör uzayı olsun.*
$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{array}{rlll} \mu : & V & \longrightarrow [0,1] & \\ & \vec{u} & \longmapsto a_0 & , \quad \vec{u} = \vec{0} = U_0 \\ & \vec{u} & \longmapsto a_1 & , \quad \vec{u} \in U_1 \backslash U_0 \\ & \vec{u} & \longmapsto a_2 & , \quad \vec{u} \in U_2 \backslash U_1 \\ & \vdots & \quad\vdots & \\ & \vec{u} & \longmapsto a_{n-1} & , \quad \vec{u} \in U_{n-1} \backslash U_{n-2} \\ & \vec{u} & \longmapsto a_n & , \quad \vec{u} \in V \backslash U_{n-1} \end{array}$$

ve $boy\,(U_i) = i$ olacak şekilde (bir tek olmak zorunda olmayan) uzunluğu n olan $(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, V)$ maksimal flag vardır.

İspat: $\mu\left(\vec{0}\right) = a_0$ ise Önerme 2.1.3-(ii) den $\forall \vec{x} \in V$, $a_0 \geq \mu\left(\vec{x}\right)$ dir. V nin mümkün tüm tabanları içinden, üyelik dereceleri farklı en çok sayıda vektörlerden oluşan tabanlar seçilsin ve bu tabanların kümesine M denilsin.

M deki tüm tabanlar içinde $i{\neq}j$, $\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right) {\neq} \mu\left(\overrightarrow{x_j}\right)$ özelliğindeki bir $B{=}\left\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\right\}$ tabanı seçilsin ve bu tabanın vektörleri aşağıdaki özelliği sağlasın;

$$\mu\left(\overrightarrow{x_1}\right) > \mu\left(\overrightarrow{x_2}\right) > \ldots > \mu\left(\overrightarrow{x_n}\right) \tag{3.11}$$

şimdi keyfi $\overrightarrow{x} \in V$ alınırsa;

- $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(\overrightarrow{0}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_1}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1}\backslash\overrightarrow{0}$ dir. Bu Önerme 2.1.3-(ii), Önerme 2.1.4 ve (3.11) den söylenebilir.
- $\vdots$
- $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1\ldots x_i}\backslash\overrightarrow{0x_1\ldots x_{i-1}}$ dir. (Bu ise Yardımcı Teorem 3.3.3 ve (3.11) den söylenebilir.)

Eğer $U_0 = \overrightarrow{0}, \forall\, i \neq 0,\ U_i = \overrightarrow{0x_1\ldots x_i}$ ve $a_i = \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$ ise teorem ispatlanmış olur.

Şimdi M de tüm $\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$ farklı olacak şekilde bir taban bulunmadığını varsayalım. Bu durumda taban vektör uzayın boyutu üzerinden tümevarımla ispat verilirse;

Teorem 3.3.1 ve 3.3.2, $n = 1$ (taban $\left\{\overrightarrow{x_1}\right\}$) ve $n = 2$ (taban $\left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right\}$) için bu durumu ispatlar.

$\left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0x_1}\right)$ ve $\left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0x_1}, \overrightarrow{0x_1x_2}\right)$ maksimal flaglar, (a_0, a_1) ve (a_0, a_1, a_2) , $\left(\mu\left(\overrightarrow{0}\right), \mu\left(\overrightarrow{x_1}\right)\right)$ ve $\left(\mu\left(\overrightarrow{0}\right), \mu\left(\overrightarrow{x_1}\right), \mu\left(\overrightarrow{x_2}\right)\right)$ tarafından verilen diziler olur. Buradan da görülür ki taban maksimal flag i ve a_i lerin dizisini tanımlar.

Şimdi $n = 1$ ve $n = 2$ deki durumun k dan $n-1$ e kadar tüm boyutlar için sağlanacağı kabul edelip, n-boyutlu durum içinde geçerli olacağı gösterilecektir. Yani $B{=}\left\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_n\right\}$ tabanı için $U_i{=}\overrightarrow{0x_1\ldots x_i}$ ve $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n,\ a_i{=}\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$ olduğu araştırılacak ve $U_0 = \overrightarrow{0},\ \mu\left(\overrightarrow{0}\right) = a_0$ olması ile ispat tamamlanacaktır.

M nin her bir tabanı ile belli bir sayı arasında ilişki kurulacaktır. Bunu yapmak için

$$\mu\left(\overrightarrow{x_n}\right) \leq \mu\left(\overrightarrow{x_{n-1}}\right) \leq \ldots \leq \mu\left(\overrightarrow{x_1}\right) \leq \mu\left(\overrightarrow{0}\right) \tag{3.12}$$

olacak şekilde her bir tabandaki $\left\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_n\right\}$ taban vektörleri düzenlenir. M nin seçiminden dolayı bu tabandaki vektörlerin herbiri için eşitliklerin sayısı aynı olacaktır.

Şimdi herbir tabanın sayısı nasıl tanımlanacağını açıklayalım. İlk olarak taban vektörleri (3.12) deki şekilde monoton artan bir dizideki gibi düzenlenir. Her bir eşitsizlik için " / " koyarak işe başlanır. Seçilen tüm tabanlar için " / " sayısı aynı olacaktır. İlk " / " dan önce, ilk eşitsizlikten önce ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır, iki ardışık " / " arasına ise iki ilişkili eşitsizlik arasında ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır. Son olarak ise son " / " dan sonra, son eşitsizlikten sonra ortaya çıkan, eşitliklerin sayısını yazılır.

$n = 8$ için bir örnek verelirse;

$\mu\left(\overrightarrow{x_8}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_7}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_6}\right) < \mu\left(\overrightarrow{x_5}\right) < \mu\left(\overrightarrow{x_4}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_3}\right) < \mu\left(\overrightarrow{x_2}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_1}\right) < \mu\left(\overrightarrow{0}\right)$

olacak şekilde bir $\left\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_8\right\}$ tabanı 2/0/1/1/0 dizisini verir.

M nin her bir tabanı için bir dizi elde ettikten sonra, bu diziler sırasıyla düzenlenip ve bu düzenleme ile ilişkili olarak en küçük B tabanı seçilir. Şimdi ihtiyaç duyulan tabanın B olduğunu gösterilecektir.

Varsayalım ki B nin dizisi sıfır ile başlasın. $\left(\mu\left(\overrightarrow{x_n}\right) < \mu\left(\overrightarrow{x_{n-1}}\right)\right)$ keyfi $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{x_i}$ olacak şekilde $V \backslash \overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}}$ alınsın. Dolayısıyla b_n sıfırdan farklı olmak zorundadır. Böylece $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(b_n \overrightarrow{x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \overrightarrow{x_i}\right)$ dır. Tümevarım hipotezinden dolayı $i < n$, $\mu\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i \overrightarrow{x_i}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$ dir. $\forall\ i < n$, $\mu\left(\overrightarrow{x_n}\right) \leq \mu\left(\overrightarrow{x_i}\right)$ olduğundan ve Önerme 2.1.4 den $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_n}\right)$

$\overrightarrow{0x_1 \ldots x_n}$ vektörü, $\left\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_{n-1}\right\}$ tabanı tarafından tanımlanan $(n-1)$ boyutta, tümevarım hipotezinden elde edilen maksimal flag ile toplanırsa $n+1$ uzunluklu bir maksimal flag elde edelir ve $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = a_n$ almak teoremi ispatlar.

Eğer dizi sıfırdan farklı bir k sayısı ile başlarsa, bunun anlamı

$$\mu\left(\overrightarrow{x_n}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_{n-1}}\right) = \cdots = \mu\left(\overrightarrow{x_{n-k}}\right)$$

dır.

$V \backslash \overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}}$ de keyfi bir $\overrightarrow{x}$ vektörü alınırsa iki durum vardır. $b_n \neq 0$, $\overrightarrow{x} = b_n x_n$ ise $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_n}\right)$ olduğu açıktır. Eğer bir $i \neq n$, $\exists\ b_i \neq 0$ ve $b_n \neq 0$ ise iki durum vardır;

Durum 1: $\forall\ i \in \{n-k, \ldots, n-1\}$ için $b_i = 0$ ise $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-k-1}}x_n$ dır. Böylece $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(b_n \overrightarrow{x_n} + \sum_{i=1}^{n-k-1} b_i \overrightarrow{x_i}\right)$ dır. Tümevarım hipotezinden belli bir $j < n-k$ için, $\mu\left(\sum_{i=1}^{n-k-1} b_i \overrightarrow{x_i}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_j}\right) < \mu\left(\overrightarrow{x_n}\right)$ dir, buradan Önerme 2.1.4 uygulanabilir anlamı çıkar ve $\mu\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_n}\right)$ bulunur.

Durum 2: $b_i \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{n-k, n-k-1, \ldots, n-1\}$ tamsayısının bulunduğunu varsayalım. Tümevarım hipotezinden $\overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}}$ de sırasıyla düzenlenmiş en küçük taban $\left\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}\right\}$ dır.

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i \vec{x_i}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_{n-1}}\right) = \mu\left(\vec{x_n}\right)$$

dır. Burada Önerme 2.1.4 kullanılamaz fakat Tanım 2.1.1 den $\mu\left(\vec{x}\right) \geq \mu\left(\vec{x_n}\right)$ sonucu elde edilir. Varsayılım ki $V \backslash \overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}}$ de $\mu\left(\vec{v}\right) \geq \mu\left(\vec{x_n}\right)$ olacak şekilde bir $\vec{v} \in V$ olsun. Bu taktirde bazı $i \leq n-k-1$ için, M tanımından $\mu\left(\vec{v}\right) \geq \mu\left(\vec{x_i}\right)$ dir. Başka bir $B^{\shortmid}$ tabanından elde edilen $\vec{v}$ ile $\vec{x_n}$ vektörleri değiştirilsin. Ancak $B^{\shortmid}$ tabanı sırasıyla düzenlenen B den daha küçük bir taban olacaktır. Çünkü B

$$n_1/n_2/\ldots/n_i/\ldots/n_e$$

dizisi ile karakterize edilseydi, $B^{\shortmid}$

$$n_1-1/n_2/\ldots/n_i+1/\ldots/n_e$$

ile karakterize edilecektir. Bu ise B nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla
$\forall\ v \in V \backslash \overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}}$ için $\mu\left(\vec{v}\right) = \mu\left(\vec{x_n}\right)$ dir.

Bu iki durumda da $\forall\ \vec{x} \in V \backslash \overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}}$ için $\mu\left(\vec{x}\right) = \mu\left(\vec{x_n}\right)$ olduğu bulundu. Dolayısıyla $\overrightarrow{0x_1 \ldots x_{n-1}} x_n = V$ n uzunluklu maksimal flag a ekleyerek ve $a_n{=}\mu\left(\vec{x_n}\right)$ alarak teorem ispatlanır.

Sonuç 3.3.6 $\mu : V \longrightarrow [0,1]$, *$V$ üzerinde n boyutlu bir bulanık vektör uzayı,* $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geq a_{m-1} \geq a_m$, $a_i \in [0,1]$ *olmak üzere ve*

$$\begin{array}{rlll} \mu : & V & \longrightarrow [0,1] & \\ & \vec{0} & \longmapsto a_0 & , \quad \vec{u} = \vec{0} = U_0 \\ & \vec{u} & \longmapsto a_1 & , \quad \vec{u} \in U_1 \backslash U_0 \\ & \vec{u} & \longmapsto a_2 & , \quad \vec{u} \in U_2 \backslash U_1 \\ & \vdots & \quad \vdots & \\ & \vec{u} & \longmapsto a_{m-1} & , \quad \vec{u} \in U_m \backslash U_{m-1} \\ & \vec{u} & \longmapsto a_m & , \quad \vec{u} \in V \backslash U_m \end{array}$$

olacak şekilde $m \leq n$ için $(U_0, U_1, \ldots, U_m)$ tek bir flag bulunur.

İspat: Bir önceki teoremde, U_i altuzayları tek olmadıkları mümkündü, örneğin $\mu\left(\overrightarrow{x_i}\right) = \mu\left(\overrightarrow{x_{i+1}}\right)$ ise $j < i$ için tüm U_j leri içeren U_{i+1} de $i-$ boyutlu her U_i altuzayı maksimal flag içinde $i-$ boyutlu her altuzay için seçilebilir. Tüm belirsiz altuzaylar çıkarılırsa, tek olan bir F flag elde edelir ki burada teoremin düzenlediği başka flagler yoktur. Bu F flag ı genellikle maksimal olmayacaktır.

Bir V vektör uzayına karşılık gelen bir projektif uzay $\mathbb{P}_n$ ile gösterilmişti. Aynı zamanda $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_n = PG(V)$ şeklinde de gösterilebilir ve $\mathbb{P}_n = PG(V) = (D(V), I)$ projektif uzayı V deki altuzayların $D(V)$ ailesi olarak tanımlanır. Burada " I " altuzaylar üzerindeki üzerinde bulunma bağıntısıdır. U ve $U^{|}$ birbirlerinin üzerinde iseler $U \subset U^{|}$ yada $U^{|} \subset U$ dur ve $UIU^{|}$ ile gösterilir. Bir U uzayının boyutu olan $boy(U)$, U nun taban vektörlerinin sayısına eşittir. U nun projektif boyutu olan $pb(U)$ ise $pb(U) = boy(U) - 1$ şeklinde tanımlanır. Projektif noktalar, doğrular, düzlemler gibi yapıların tanımı bu projektif boyuta dayanır. 0 projektif boyutuna sahip olan altuzaylara projektif nokta, 1-projektif boyutuna sahip olan altuzaylara projektif doğru denir.

Bundan sonraki kısımlarda klasik bir $n-$boyutlu projektif uzay, $(n+1)-$boyutlu vektör uzayından elde edildiği gibi, bir bulanık projektif uzayın da bulanık vektör uzayından nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır.

Şimdi Bulanık projektif uzayı tanımlamak için gerekli bazı kavramları verelim.

3.4 Bulanık Projektif Noktalar

Bir projektif nokta sadece bir vektör doğrusudur. V nin bir vektör doğrusu L olmak üzere (μ, L) bulanık vektör doğrusundan başlayarak bir bulanık projektif nokta inşa edilecektir. Teorem 3.3.1 den biliniyor ki μ aşağıdaki formdadır:
$a_0 \geq a_1$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mu : \quad & L \longrightarrow [0,1] \\ & \overrightarrow{0} \longmapsto a_0 \\ & \overrightarrow{u} \longmapsto a_1 \qquad , \quad \overrightarrow{u} \in L \backslash \left\{\overrightarrow{0}\right\} \end{aligned}$$

dır. L vektör doğrusuna karşılık gelen projektif noktayı p ile gösterilsin. Böylece $p \in PG(V)$ dir. p üzerinde bir $\mu^{'}$ bulanık projektif nokta oluşturabilmek için boyutu bir birim kadar daha küçük almak zorunda olduğumuzdan, L vektör doğrusuna karşılık gelen $\overrightarrow{0}$ vektörünün değeri seçilemez. Dolayısıyla p üzerinde bir $\mu^{'}$ bulanık projektif nokta aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mu^{'} : \quad \{p\} &\longrightarrow [0,1] \\ p &\longmapsto a_1 \end{aligned}$$

Burada bulanık vektör uzayı notasyonundan farkı açıkca belirtmek adına, bu nokta $[\mu^{'}, p]$ köşeli parantez şeklinde gösterilecektir.

3.5 Bulanık Projektif Doğrular

Bulanık projektif doğru içinde benzer şeyler yapılacaktır. α, V nin bir vektör düzlemi olsun. Teorem 3.3.2 den (μ, α) bulanık vektör düzlemi aşağıdaki formda olduğu biliniyor: $a_0 \geq a_1 \geq a_2$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mu : \quad \alpha &\longrightarrow [0,1] \\ \overrightarrow{0} &\longmapsto a_0 \\ \overrightarrow{u} &\longmapsto a_1 \qquad , \ \overrightarrow{u} \in L \\ \overrightarrow{u} &\longmapsto a_2 \qquad , \ \overrightarrow{u} \in \alpha \backslash L \qquad (L, \ \alpha \text{ nın vektör doğrusu}) \end{aligned}$$

dır. M, α vektör düzlemine karşılık gelen projektif doğru, $L \subseteq \alpha$ vektör doğrusuna da karşılık gelen projektif nokta p olsun. O halde M üzerinde bir $\mu^{'}$ bulanık projektif doğrusu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$a_1 \geq a_2$ ve $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mu^{'} : \quad M &\longrightarrow [0,1] \\ p &\longmapsto a_1 \\ q &\longmapsto a_2 \qquad , \ q \in M \backslash \{p\} \end{aligned}$$

dir ve bu bulanık projektif doğru $[\mu^{'}, M]$ şeklinde gösterilecektir. Bir bulanık projektif doğru bir bulanık vektör doğru gibi görünüyor. Fark ise bulanık vektör doğrusu üzerinde en büyük üyelik derecesine sahip olan V nin $\overrightarrow{0}$ orjin noktasının bulanık projektif doğru üzerinde herhangi bir nokta olabilir, bu durum ise vektör düzlemine karşılık gelen özel bir doğruya bağlıdır.

3.6 Bulanık Projektif Uzaylar

$n-$boyutlu $\mu^{'}$ bulanık projektif uzayının genel bir tanımı verilecektir. Bir $(n+1)$

boyutlu (μ, V) bulanık vektör uzayı: $j < i$ için U_j alt uzaylarını içeren V nin $i-$boyutlu bir alt uzayı U_i ve $a_0 \geqslant a_1 \geqslant ... \geq a_n \geq a_{n+1}$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{array}{lllll} \mu : & V & \longrightarrow [0,1] & & \\ & \vec{0} & \longmapsto a_0 & & \\ & \vec{u} & \longmapsto a_1 & , & \vec{u} \in U_1 \backslash \left\{ \vec{0} \right\} \\ & \vec{u} & \longmapsto a_2 & , & \vec{u} \in U_2 \backslash U_1 \\ & \vdots & \quad \vdots & & \\ & \vec{u} & \longmapsto a_n & , & \vec{u} \in U_n \backslash U_{n-1} \\ & \vec{u} & \longmapsto a_{n+1} & , & \vec{u} \in V \backslash U_n \end{array} \tag{3.13}$$

şeklindedir. $(n+1)-$boyutlu V vektör uzayına karşılık gelen $n-$boyutlu projektif uzay $\mathbb{P}_n^{'}$ olsun. Bu taktirde $\mathbb{P}_n^{'}$ üzerinde n boyutlu bulanık projektif uzay olan $\mu^{'}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

(3.13) de U_1 vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta q ve U_{n+1} vektör uzayına karşılık gelen $i-$boyutlu projektif uzay $U_i^{'}$ olsun. $\left(q, U_1^{'}, U_2^{'}, \ldots, U_{n-1}^{'}, V^{'}\right)$ dizisi maksimal flag ve $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geq a_n \geq a_{n+1}$, $a_i \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{array}{lllll} \mu^{'} : & \mathbb{P}_n^{'} & \longrightarrow [0,1] & & \\ & q & \longmapsto a_1 & & \\ & p & \longmapsto a_2 & , & p \in U_1^{'} \backslash \{q\} \\ & p & \longmapsto a_3 & , & p \in U_2^{'} \backslash U_1^{'} \\ & \vdots & \quad \vdots & & \\ & p & \longmapsto a_n & , & p \in U_{n-1}^{'} \backslash U_{n-2}^{'} \\ & p & \longmapsto a_{n+1} & , & \vec{u} \in \mathbb{P}_n^{'} \backslash U_{n-1}^{'} \end{array}$$

dır. Sonuç 3.3.6 deki şekilde bir $(n+1)-$boyutlu bulanık vektör uzayından n boyutlu bulanık projektif uzay tanımlanabilir. O halde $\left(U_0^{\shortmid}, U_1^{\shortmid}, \ldots, U_m^{\shortmid}\right)$ dizisi tek bir flag olacak şekilde bir bulanık projektif uzay elde edilir.

3.7 Bulanık Projektif Uzaylarda Üzerinde Bulunma

Burada yeni bulanık yapılar analiz edilmeye çalışılacaktır. Bulanık projektif uzaylar, klasik projektif uzaylara çok benzerdir. Aslında tek fark bulanık projektif uzayda her bir noktaya üyelik derecesi dediğimiz bazı değerler verilmesidir. Bulanık vektör uzayları, bulanık gruplar, bulanık ideallerin tanımları gibi, bulanık cebirdeki tanımlar bu yolla yapılır.

Şimdi bir $[\gamma, V]$ bulanık projektif uzayının alt yapıları analiz edilecek ve bunun için her bir noktanın tek bir üyelik derecesine sahip olacağı kabul edilecektir. Zadeh'in X in bazı μ ve λ bulanık alt kümelerinin $\subseteq$ bulanık kapsama tanımına göre;

$$\mu \text{ bulanık altkümesi, } \lambda \text{ bulanık altkümesini kapsar} \iff \forall\, x \in X\ ,\ \mu(x) \leq \lambda(x)$$

olduğu biliniyor. $[\mu, U]$ ve $[\lambda, U^{\shortmid}]$ bulanık projektif uzayları için bu tanım:

$$\forall\, p \in PG(V)\,,\ \mu(p) \leq \lambda(p) \Longrightarrow [\mu, U] \subseteq \left[\lambda, U^{\shortmid}\right]$$

şeklindedir. $PG(V)$ deki her p noktası için $\mu(p) = \lambda(p)$ dir.

Tanım 3.7.1 *U ve $U^{\shortmid}$,V nin iki altuzayı olsun. U ve $U^{\shortmid}$ bitişik ve $\forall\ \vec{x} \in U \cap U^{\shortmid}$, $\mu\left(\vec{x}\right) = \lambda\left(\vec{x}\right)$ ise $[\mu, U]$ ve $[\lambda, U^{\shortmid}]$ bulanık projektif uzaylarına bitişiktir denir.*

3.8 Bulanık Projektif Düzlemler

$3-$boyutlu vektör uzaylarına kendimizi kısıtlarsak, $PG(V)$, noktalar ve doğrulardan oluşan yani 0 ve 1 boyutlu projektif altuzayları içeren bir projektif düzlemdir. Burada bir doğru üzerindeki nokta sayısı s ile, bir noktadan geçen doğru sayısını ise t ile göstereceğiz. Bunlar bir projektif düzlemde eşittir. $\mathcal{P}$ bir bulanık projektif düzlem olsun. O halde

$$\begin{array}{rlll} \mathcal{P}: & PG(V) & \longrightarrow [0,1] & \\ & q & \longmapsto a_1 & \\ & p & \longmapsto a_2 & , \quad p \in L \backslash \{q\} \\ & p & \longmapsto a_3 & , \quad p \in PG(V) \backslash L \end{array}$$

$L,$ q noktasını içeren $PG(V)$ nin bir projektif doğrusudur.

$a_1,$ a_2 ve a_3 birbirinden farklı ise, Sonuç 3.3.6 dan dolayı $\mathcal{P}$ de farklı türden bulanık projektif doğruları tartışılabilir.

$i \in \{1, \ldots, t-1\}$ ve $j \in \{1, \ldots, s-1\}$ olmak üzere i ve j tamsayıları kullanılırsa;.

1) Taban doğrusu L olan bulanık doğru μ_1 tektir. μ_1 aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{array}{rlll} \mu_1: & L & \longrightarrow [0,1] & \\ & q & \longmapsto a_1 & \\ & p & \longmapsto a_2 & , \quad p \in L \backslash \{q\} \end{array}$$

2) M_i, $\mathcal{P}-$üyelik derecesi a_1 olan noktada L ile kesişen doğrular ve bir taban doğrusu olarak M_i doğrularından birine sahip olan M_{2i} bulanık doğruları

$$\begin{array}{rlll} \mu_{2i}: & M_i & \longrightarrow [0,1] & \\ & q & \longmapsto a_1 & \\ & p & \longmapsto a_3 & , \quad p \in M_i \backslash \{q\} \end{array}$$

şeklindedir.

3) N_{ij}, $\mathcal{P}-$üyelik derecesi a_2 olan q_j noktalarında sırasıyla L ile kesişen doğrular ve bir taban doğrusu olarak N_{ij} doğrularından birine sahip olan M_{3ij} bulanık doğruları.

$$\begin{array}{rlll} \mu_{3ij}: & N_{ij} & \longrightarrow [0,1] & \\ & q_j & \longmapsto a_1 & \\ & p & \longmapsto a_3 & , \quad p \in N_{ij} \backslash \{q\} \end{array}$$

şeklindedir.

Klasik $PG(V)$ bulanık uzayında aşağıdaki teorem vardır.

Teorem 3.8.1 *$PG(V)$ nin nokta ve doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar:*

$i)$ Farklı her iki noktadan bir tek doğru geçer.

$ii)$ Farklı her iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır.

$iii)$ $PG(V)$ herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta içerir.

Benzer durumların bulanık projektif düzlem içinde geçerli olup olmayacağı araştırılacaktır. $\mathcal{P}$ bulanık projektif düzlemindeki sonuçlara bakılırsa, aynı teoremin burada da sağlandığını söyleme eğiliminde olunur. Çünkü projektif uzay tabanı bir projektif düzlemdir. $\mu_1,\ \mu_{2i},\ \mu_{3ij}$ gibi farklı türden bulanık projektif doğrularını ve farklı $a_1,\ a_2,\ a_3$ üyelik derecelerine sahip farklı türden üç noktayı düşünerek çok karışık olan gerçek aşağıda gösterilecektir.

$ii)$ başlansın. Her iki bulanık projektif doğrunun bir tek ortak bulanık noktası olduğu açıktır. Bulanık projektif doğruların $PG(V)$ deki herhangi iki taban doğrusu $PG(V)$ nin tam olarak bir noktasında kesişecektir. Her bulanık projektif doğru aslında noktalarına değerler atanmış $PG(V)$ nin bir doğrusu olduğundan, kesim noktasına bir değer atanacaktır. Bu noktanın üyelik derecesi iki doğruda da aynı olacaktır, çünkü $\mathcal{P}$ nin her noktası tek bir üyelik derecesine sahiptir.

Şimdi $i)$ ye bakalım. Burada iki durum söz konusudur. P nin keyfi $[\lambda, q]$ ve $[\mu, p]$ gibi iki bulanık projektif noktası alınsın. $PG(V)$ nin p ve q noktaları $PG(V)$ nin tek bir L doğrusu üzerindedir. Böylece iki bulanık projektif nokta tek bir bulanık projektif doğru üzerinde olacaktır. Fakat bulanık projektif doğrunun bu doğru olacağı kesin değildir. Çünkü iki bulanık projektif noktayı bilerek tüm $\mathcal{P}$ bulanık projektif düzlemi belirlenemez.

Durum 1: $\mu(p) \neq \lambda(p)$ bu durumda tek bir bulanık doğrusu bu iki noktadan geçeceği biliniyor. Çünkü $\mu(p) = a$ ve $\lambda(p) = b$ $\ (\ a,\ b \in \{a_1, a_2, a_3\}\ )$ reel sayıları karşılaştırabilir. $a \leq b$ (yada $b \leq a$) ise L nin üzerindeki diğer tüm noktalar aynı $a-$üyelik derecesine sahip olacaktır. Bu sadece $[\mu', L]$ doğrusu için mümkündür.

Durum 2: $\mu(p) = \lambda(p)\ a \in \{a_2, a_3\}$ için $\mu(p) = \lambda(p) = a$ olduğunu varsayalım. $a = a_2$ ise tek bir duruma vardır. Çünkü üyelik dereceleri ile iki noktayı içeren tek bir $[\mu_1, L]$ bulanık doğru vardır. Fakat bulanık projektif düzlemi bilinmiyorsa üyelik dercesi a_1 olan $[\mu_1, L]$ nin diğer bulanık noktalarını bilmek imkansızdır.

$a = a_3$ ise bilinen hiçbirşey yoktur. İki bulanık noktayı içeren bulanık doğru,

$[\mu_{2i}, M_i]$ ya da $[\mu_{3ij}, N_{ij}]$ doğrularından biri olabilir ve bu doğrular üzerindeki diğer noktalar üyelik derecesi sırasıyla a_1 ve a_2 olan bulanık noktalar olabilir.

$iii)$ açıktır. $\mathcal{P}$ aynı bulanık projektif doğru üzerinde bulunmayan dört bulanık projektif nokta içerir. Çünkü $PG(V)$ de bu özellik vardır ve bulanık projektif nokta sadece değer atanmış bir projektif noktadır.

Teorem 3.8.1 in bulanık karşılığı aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 3.8.2 *$\mathcal{P}$ bulanık projektif düzleminin bulanık noktaları ve bulanık doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar.*

$i)$ Farklı her bulanık nokta çifti, tek bir bulanık doğru üzerinde bulunur. Fakat bu bulanık doğru, noktaların üyelik dereceleri farklı ise belirlenebilir.

$ii)$ Farklı her bulanık doğrunun tek bir ortak bulanık noktası vardır.

$iii)$ $\mathcal{P}$ bulanık projektif düzleminde herhangi üçü aynı bulanık doğrusu üzerinde bulunmayan dört tane bulanık nokta vardır.

Ayrıca bulanık projektif düzlem bilinir ise tek bir bulanık projektif doğru tanımlamak için farklı olmak zorunda olan iki üyelik derecesi olma şartına ihtiyaç yoktur.

Not 3.8.3 *Teorem 3.8.2 özel bir bulanık projektif düzlem için düzenlenir. Herhangi iki bulanık projektif doğru onların taban doğrularının aksine her zaman ortak bir bulanık projektif noktaya sahip olması doğru değildir. Örneğin V, $3-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. L ve $L^{'}$ aynı $PG(V)$ projektif düzleminde yer alan doğrular olmak üzere, aşağıdaki gibi $[\mu, L]$, $[\mu^{'}, L]$ bulanık projektif doğruları inşa edilsin. (L ve $L^{'}$ doğrularının arakesit noktası r olsun)*

$$\begin{aligned} \mu : \ L &\longrightarrow [0,1] \\ q &\longmapsto a_1 \\ p &\longmapsto a_2 \qquad , \quad p \in L \backslash \{q\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu^{'} : \ L^{'} &\longrightarrow [0,1] \\ q^{'} &\longmapsto a_3 \\ p^{'} &\longmapsto a_4 \qquad , \quad p^{'} \in L^{'} \backslash \{q^{'}\} \end{aligned}$$

olur. Buradan görülüyor ki bu iki bulanık projektif doğrunun üzerindeki kesim noktası asla aynı üyelik derecesine sahip olmayacaktır. Bunun anlamı ise klasik durumunun aksine iki bulanık projektif doğrunun bulanık projektif düzlemi germesi gerekliliğindendir. Kesim noktasını modellemek için $t-$*norm ve iki bulanık projekif alt uzayın toplamını modellemek için* $t-$*conorm kullanılarak bu problem çözülebilir.*

Çalışmamızı bulanık mantık uygumaları üzerine yazılan bir açıklama [13] ile bitiriyoruz.

Dünyadaki bazı olayları açıklamak için kesin tanımlamalarda bulunabilmek imkansızdır ve olaylar çoğu kere belirsizlikler ve doğrusal olmama özellikleri taşır. Cismin ısısını kaybetmesi, kapasitörün şarj veya deşarj olayı bu doğrusal olmama özelliklerine birer örnektir. Belli bir miktar uranyumun bozulması esnasında hangi atomun ne zaman bozulacağının bilinmemesi de belirsizlik taşıyan bir olaydır. Bu nedenle eşya ve olaylar bulanıklık perspektifinde ele alındıkça, çok daha doğru ve verimli sonlamauçlar elde edilebilir. Bulanık mantık, bu yaklaşım için kullanılabilecek oldukça tesirli bir mantık anlayışıdır.

Terimler ya da ölçüler kesin olarak tanımlanıp ölçülemediğinden dolayı insanlar çoğu zaman belirsiz (kesin olmayan) ifadeler kullanırlar. İşte bulanık mantık bazı sorulara basitçe evet-hayır cevabı verilemeyen durumları kapsar. Bulanıklığın ve bulanık mantığın temeli de budur.

Bulanık mantık, klasik mantık sistemlerinden ziyade insan düşüncesi ve tabii dil ruhuna daha yakındır. Temel olarak, gerçek dünyanın eksik ve yaklaşık özelliğini yakalayan etkili bir araç sağlar. Matematiksel model ve ölçülen değerlerin yanısıra insan düşüncesini de mühendislik sistemine katmak üzere insan düşüncesini formüle eder.

“Günlük konuşma dilini kullanan bulanık mantık, dilsel değişkenler (linquistic variables) yardımıyla biraz sıcak, ılık, uzun, çok uzun, soğuk gibi günlük hayatımızda kullandığımız kelimeler yardımıyla insan mantığına en yakın doğrulukta denetimi sağlayabilir. Bulanık mantık denetleyici kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, gündelik kullandığımız iş makinelerinden üretim mühendisliğine, endüstriyel denetim teknolojilerinden otomasyona kadar aklımıza gelecek her yerde kendisine uygulama alanı bulabilir”.

İkili mantık, iki ayrık değer alabilen değişkenleri ve mantıksal anlam taşıyan işlemleri ele alır. Değişkenlerin alabileceği iki değer farklı şekillerde adlandırılabilir (örneğin doğru ve yanlış, evet ve hayır, vs.), burada her değişken ancak ve ancak olası iki ayrı değerden birini alabilir: 1 ve 0.

Bulanık mantık; ikili mantık sistemine karşı geliştirilen ve günlük hayatta kullandığımız değişkenlere üyelik dereceleri atayarak, olayların hangi oranlarda gerçekleştiğini belirleyen çoklu mantık sistemidir.

Bulanıklık, çoklu değerlilik (multi – valued) demektir. İkili mantığın 0-1 önermelerine karşın bulanıklık, üç veya daha fazla, belki de sonsuz sayıda önermeler yapar. Yani bu mantıkta küme üyeleri derecelendirilebilir. Başka bir değişle siyah ile beyaz arasında yer alan sonsuz sayıda gri tonlarını içermektedir. Örneğin uzaklıkla ilgili bir problemde mesafenin yalnızca yakın ya da uzak olduğunu belirtmekle kalmayıp ne kadar yakın ya da ne kadar uzak olduğunu da belirtir.

Bulanık mantığın gücü basit şeyleri basit tutmaktır. Klasik mantık bizleri çok katı sınırlar çizmeye zorlar. Mesela batı edebiyatında “ novel ” denilen roman, 90 veya daha fazla sayfadan , “ novella ” ise 90 ’ dan daha az sayfadan oluşur. Bu standarda göre 91 sayfalık bir eser, roman olurken, 89 sayfalık bir çalışma “ novella ” (uzun hikaye) olur. Eğer bir bilgisayarda kelimelerin puntosu büyütülürse uzun hikaye, roman haline gelebilir. Bulanık mantık bu tür saçmalıkları önler.

Klasik mantıkta büyüklük-küçüklük, uzunluk-kısalık gibi kavramların kesin sınırları vardır. Diyelim ki uzun insanların alt sınırı 1.70 m ’ dir. Klasik mantığa, “ Ali uzun mudur ? ” sorusu sorulursa, bu sınıra bakıp, eğer Ali ’ nin boyu 1.70 m ’ in üzerinde ise Ali uzun, 1.69 m ise kısadır. Halbuki bulanık mantık, Ali ’ nin ne kadar uzun olduğunu sorar. Klasik mantık gibi uzuna 1, kısaya 0 gibi katı(kesin) değerler vermez. 0.1, 0.2, 0.3... gibi daha hassas ve esnek değerler verir. Böylelikle 1.69 m boyundaki bir insana kısa (0) demez, 0.2 gibi bir uzunluktadır der. Tabiî bulanık mantığında belli sınırları vardır ve bu sınırlar makama, ele alınan eleman ve şartlara göre değişirler. Onu klasik mantıktan ayıran nokta bu sınırların daha esnek olmasıdır. İşte bu esneklik sayesinde bulanık mantık tatbik edildiği her sahada çok daha hassas sonuçlar ve semereler doğurmaktadır.

Bulanık mantık ilk kez 1973 yılında, Londra ’ daki Queen Mary College ’ de profesör olan H. Mamdani tarafından bir buhar makinesinde uygulandı. Ticari olarak ise ilk defa, 1980 yılında, Danimarka ’ daki bir çimento fabrikasının fırınını kontrol etmede kullanıldı.

Bulanık mantık kuramının ilk önemli endüstriyel uygulaması 1980 yılında Danimarka ' daki bir çimento fabrikasında (F.L. Smidth) gerçekleştirmiş, değirmen içinde çok hassas bir denge ile oranlanması gereken sıcaklık ve oksijen ayarı en uygun bir biçimde yapılmıştır. Bundan sonra bir başka dikkate değer uygulama ise Hitachi firması tarafından 1987 yılında Sendai Metro ' sunda gerçekleştirilmiştir. Bu sayede trenin istenen konumda durması üç kat daha iyileştirilmiş, kullanılan enerji ise %10 azaltılmıştır. Bunun üzerine Hitachi firmasına benzeri bir sistemin Tokyo Metro ' suna da kurması için talep gelmiştir. Yamaichi Securities ' in geliştirdiği Bulanık Mantık temelli uzman sistem, 1988 yılının Ekim ayında kara Pazar adlı Tokyo Borsası ' nda yaşanan krizin sinyallerini onsekiz gün önceden haber vermiştir. Bu kadar başarılı uygulamaların ardından bulanık mantığa olan ilgi artmış, uluslararası bir çalışma ortamı oluşturabilmek amacıyla 1989 yılında aralarında SGS, Thomson, Omron, Hitachi, NCR, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi dünya devlerininde bulunduğu 51 firma tarafından LIFE (Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering) laboratuvarları kurulmuştur.

LIFE ' ın yanında FLSI (Fuzzy Logic Systems Institute) adındaki diğer araştırma merkezi de Bulanık Mantığın Elektronik, Otomotiv ve Üretim teknolojisi alanında yeni yeni uygulamalar kazandırmaktadır.

Bulanık Mantık, makineleri " daha zeki " yapmış ve birçok ürünün ve üretim sürecinin makine IQ ' sü (Zeka seviyesi) bu sayede artmıştır. Bu makineler arasında fotoğraf makineleri, kameralar, televizyonlar, mikro dalga fırınlar, çamaşır makineleri, elektrikli süpürgeler, otomatik şanzımanlar, motor kontrolü, metro denetim mekanizmaları, asansörler ve mikrodevreler sıralanabilir.

Bulanık teori her bir kelimenin anlamında saklı olan belirsizliği temsil eden teoridir. Bu teorinin bir uygulaması olarak "Bulanık Yapay Zeka" nın gelecekte insanlar ile bilgisayarlar arasında kurulacak olan yakın ilişkide büyük bir rol oynayacağı beklenmektedir.

Pilav pişirme aletlerinden asansörlere, arabaların motor ve süspansiyon sistemlerinden nükleer reaktörlerdeki soğutma ünitelerine, klimalardan elektrikli süpürgelere kadar bulanık mantığın uygulandığı birçok saha mevcuttur. Bu sahalarda temin ettiği enerji, iş gücü ve zaman tasarrufu ise, onun “iktisat” adına ne kadar çok önem verilmesi gereken bir sistem olduğunu göstermektedir.

Bulanık mantığın gelecekteki uygulama sahaları, daha da genişleyecek gibi gözükmektedir. Şeker hastaları için vücuttaki insülün miktarını ayarlayarak suni bir pankreas görevi yapan minik yapıların imalinde, prematüre doğumlarda bebeğin ihtiyaç duyduğu ortamı devam ettiren sistemlerin hazırlanmasında, suların klorlanmasında, kalp pillerinin üretiminde, oda içindeki ışığın miktarının ayarlanmasında ve bilgisayar sistemlerinin soğutulmasında bulanık mantık çok şeyler vaadetmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1) Abdukhalikov, K.S., Tulenbaev M.S. and Umirbaev U.U., 1994,On Fuzzy Bases of Vector Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 63, 201-206.

2) Akman, Y., 2007, Fuzzy Metrik Uzayları, Yüksek Lisans tezi, Gazi Üniversitesi, 72p.

3) De Luca, A. and Termini, S., 1970, A Definition of Non-Probabilistic Entropy In The Setting of Fuzzy Sets Theory, Inform. and Control, 20, 301-312.

4) Dubois, D. and Prade, H., 1980, Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, New York.

5) Kaya, R., 2005, Projektif Geometri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 391p.

6) Kuijken, L., Maldeghem, H. V. and Kerre, 1999, E., Fuzzy Projective Geometries From Fuzzy Vector Spaces, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, 16, 95-108.

7) Lubczonok, P., 1990, Fuzzy Vector Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 329-343.

8) Schreier, O. and Sperner, E., 1935, Projective Geometry of n -Dimensions, Chelsea Publishing Company, 200p.

9) Şen, Z., 2004, Mühendislikte Bulanık (Fuzzy) Mantık ile Modelleme Prensipleri, Su Vakfı Yayınları, 189p.

10) Tünay, A., 2000, Konveks Fuzzy Kümeler, Yüksek Lisans tezi, Selçuk Üniversitesi, 42p.

11) Uzun, S., Fuzzy Altvektör Uzayları, 1993, Yüksek Lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, 60p.

12) Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets, 8, 338-353.

13) http://www.bilimselkonular.com/ueye-bloglarndan/BULANIK-MANTIK-VE -BULANIK-KUME-TEORISI-.html

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Temel Ermiş

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Uşak, 02.07.1983

Medeni hali: Bekar

Adres bilgileri:

Ev adresi: Batıkent Mh.
Çoştu Sk. No:23
26180-Eskişehir

İş adresi: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Ed. Fak. Matematik Bölümü
26480-Eskişehir

E-posta: termis@ogu.edu.tr, temelermis@gmail.com

<u>Eğitim Bilgileri:</u>

Yüksek Lisans:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(2006-2009)

Lisans:
Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
(2002-2006)

<u>İş Deneyimi:</u>
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi)
(2007-)