Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin
Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi

Harun Barış ÇOLAKOĞLU

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs 2009

Some Properties and Generalization of

Taxicab, Maximum, Chinese Checker and Alpha Planes

Harun Barış ÇOLAKOĞLU

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics

May 2009

# Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi

Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Mayıs 2009

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Harun Barış ÇOLAKOĞLU'nun DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman:** Prof. Dr. Rüstem KAYA

**Doktora Tez Savunma Jürisi :**

**Üye:** Prof. Dr. Rüstem KAYA

**Üye:** Prof. Dr. Mehmet ÜREYEN

**Üye:** Prof. Dr. Şükrü OLGUN

**Üye:** Doç. Dr. Münevver ÖZCAN

**Üye :** Yard. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ............................ tarih ve ....................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

# ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, birer metrik geometri modeli olan taksi, maksimum, Çin dama ve alfa düzlemlerinin uzaklıkla ilgili bazı özellikleri incelenmiş ve bu düzlemler geniş bir metrik-ailesi kullanılarak genelleştirilmiştir.

Birinci bölümde, geometrideki aksiyomatik sistemlerle ilgili temel bilgiler verilmiş; taksi, maksimum, Çin dama ve alfa düzlemleri bu sistemlerle ilişkilendirilerek kısaca tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, düzlemde iki kenar uzunluğu verilen bir dik üçgenin üçüncü kenarının uzunluğunu bulmak için kullanılan Pisagor Teoreminin bu düzlemlerdeki benzerleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid düzleminde bilinen düzgün çokgen kavramı taksi, maksimum, Çin dama ve alfa düzlemleri için tanımlanmış ve bu türden tüm çokgenlerin varlığı araştırılmıştır. Böylece, bir çokgen için düzgünlük kavramı taksi, maksimum, Çin dama ve alfa düzgünlük kavramlarıyla zenginleştirilmiştir.

Son bölümde, önce düzlemde taksi, maksimum, Çin dama ve alfa metriklerini içeren geniş bir metrik-ailesi ($m$ metriği) tanıtılmış ve bu metrik-ailesinin her bir üyesiyle birlikte düşünülen düzlem-ailesinin ($m$ düzleminin) Öklidyen düzlem geometri aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir. Daha sonra, düzlemin bu yeni tanımlanan uzaklıkla ilgili özellikleri incelenmiştir. Son olarak, düzlemde tanımlanan yeni metriğin $n$ boyutlu uzaydaki formu verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Taksi düzlem, Maksimum düzlem, Çin dama düzlem, Alfa düzlem, *m* düzlem, Öklidyen düzlem, Düzlem geometri, Metrik geometri, İzometri.

## SUMMARY

In this dissertation that consists of four chapters, the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha planes are studied, as being models of metric geometry. Mainly, some properties pertaining to the related distances of these planes are given, and then these planes are generalized constructing a plane-family with a wide metric-family.

In the first chapter, basic knowledges on axiomatic systems of geometry are presented, and then the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha planes are shortly introduced relating the stated axiomatic systems.

In the second chapter, the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha versions of well-known Pythagorean Theorem are given, which state equations that relate the distances between pairs of vertices of a right triangle in the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha planes.

In the third chapter, the notion of regular polygon is defined for the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha planes, so that the concept of regularity of a polygon is expanded and new questions about them are rised. Then existence of new kind of regular polygons are investigated.

In the last chapter, the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha planes are generalized by constructing a plane-family ($m$ plane) with a wide metric-family ($m$ metric) which includes the taxicab, maximum, Chinese checker and alpha metrics as special cases. Next, it is determined if the plane with $m$ metric satisfies the axioms of Euclidean plane geometry or not, and then some propeties of $m$ plane pertaining to the distance are given. Finally, $n$ dimensional form of the $m$ metric is given.

**Keywords:** Taxicab plane, Maximum plane, Chinese checker plane, Alpha plane, $m$ plane, Euclidean plane, Plane geometry, Metric geometry, Isometry.

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin başından itibaren çalışmalarımın her aşamasında büyük yardım ve desteğini gördüğüm değerli hocam

Prof. Dr. Rüstem KAYA'ya,

hayatım boyunca hep yanımda olan ÇOLAKOĞLU ailesine ve bu süreç içerisinde bir şekilde desteklerini gördüğüm değerli arkadaşlarım Şükrü ARGIN, Fikret ERDEM, Serdar ERDOĞAN, Özcan GELİŞGEN, Sinan KAPÇAK, Cemal KAPÇAK ve Rauf ULUSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tüm çalışmalarımı, ağabeyim

Şahin Savaş ÇOLAKOĞLU'na

ithaf ediyorum.

ESKİŞEHİR, 2009. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

**İÇİNDEKİLER**

**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)**

**Sayfa**

# BÖLÜM 1

# TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezi diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için, üzerinde çalışılacak olan taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemleri kısaca tanıtılmıştır. Ancak daha öncesinde, bu düzlemleri ilişkilendireceğimiz aksiyomatik sistemlerle ilgili temel bilgiler verilmiştir. Buradaki amaç, bu düzlemlerin hangi geometrik yapı ya da yapılara uygun olduğunu belirlemektir. Böylece hem bu düzlemler sağlam bir zemine oturtulmuş, hem de onları ele alış biçimimiz açık bir şekilde belirtilmiş olacaktır. Bölüm 4'te; taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerini özel haller olarak içeren genel bir düzlem-ailesi verilmiş ve bu ailenin Öklidyen geometri aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı belirlenmiştir. Bu sebeple, bahsi geçen düzlemlerle ilgili verilen özellikler bu bölüm içinde ispat edilmemiş, ancak Bölüm 4'te verilen bazı özelliklerin özel hallerine işaret edilmiştir.

## 1.1 Aksiyomatik Sistemler ve Modeller

Matematikte bir *aksiyomatik sistem*, genel olarak *tanımsız terim*ler ve *aksiyom*lardan oluşur. Burada, tanımsız terimler -henüz belirlenmemiş- *nesne*-lere ve bu nesneler arasındaki -henüz belirlenmemiş- *ilişki*lere, aksiyomlar da bu nesne ve ilişkilerle ilgili *yargı*lara işaret eder. Aksiyomların belirttiği yargılar ispatlanmazlar; ancak *doğru* kabul edilir ve bu yargılardan, mantık kuralları kullanılarak yeni yargılar elde edilebilir. Bu noktada, bir aksiyomatik sistemin aksiyomlarının bazı özelliklere sahip olması beklenir: Tanımsız terimlerle ilgili *her* yargının ya kendisi ya da *değil*i aksiyomlardan elde edilebilmelidir. Aksiyomlar birbiriyle çelişmemelidir (aksiyomlar kullanılarak bir yargının hem kendisi hem de değili elde edilememelidir). Herhangi bir aksiyom, diğer aksiyomlardan elde edilememelidir. Bu özelliklere sırasıyla *tam*lık, *tutarlı*lık ve *bağımsız*lık özelliği denir; bu özellikleri sağlayan bir aksiyomatik sisteme de sırasıyla *tam*, *tutarlı* ve *bağımsız* denir. Aksiyomatik sistemlerde tanımsız terimler ve aksiyomların yanında bazı *tanım*lar da bulunabilir. Ancak, bunlar sadece ifadeleri kısaltmak için kullanılır ve bazı özelliklere sahip nesneleri veya ilişkileri belirler. (Bkz: [10], [38], [45].)

Aksiyomatik sistemin tanımsız terimleri *yorum*lanabilir; yani, tanımsız terimlere belirli anlamlar yüklenebilir. Böylece, aksiyomlar ve bu aksiyomlardan elde edilen yargılar, doğru ya da yanlış olabilen *önerme*lere dönüşürler. Açıkça, eğer bir yorum için aksiyomatik sistemin tüm aksiyomları doğru ise, bu aksiyom sisteminden elde edilen önermeler de doğru olacaktır. Böyle bir yoruma aksiyomatik sistemin bir *model*i denir. Bununla birlikte, aynı yorum farklı aksiyomatik sistemler için model olabilir. Örneğin Öklid düzlemi, -kimi yanları ortak, hatta birinin bazı aksiyomları bir diğerinin teoremleri olsa da- [7], [31], [42], [63], [66] ve [67]'te verilen *Öklidyen düzlem geometri* aksiyom sistemlerinin bir modelidir. Ancak tez içinde Öklidyen düzlem, [40]'de verilen ve "metrik yaklaşım" ürünü olan aksiyomatik sistemin bir modeli olarak göz önüne alınacaktır.

Bu tezde, üzerinde çalışılacak olan *düzlem*ler -yani taksi, maksimum, Çin dama, $\alpha$ ve $m$-düzlemleri-, *metrik geometri* olarak bilinen bir aksiyomatik sistemin modelleri olarak göz önüne alınmıştır. Bununla beraber, bu düzlemler Öklid açı ölçme fonksiyonuyla birlikte *açıölçer* (*protractor*) *geometri*nin de modelleri olacaktır. Ancak, bu düzlemler *Öklidyen geometri* aksiyomlarının hepsini birden sağlamadığından *Öklid-dışı geometri* sınıfında yer alacaktır.

Aşağıda, Öklidyen geometrinin aksiyomlarına genişleyen bir dizi aksiyomatik sistem; [45], [22] ve [40] dikkate alınarak hazırlanmıştır. Verilen aksiyomatik sistemlerin örnek modelleri, sağlamalarıyla birlikte [45]'ten görülebilir. Burada, sadece tanımlara ve bazı modellere işaret edilmiştir.

**Tanım 1.1.1** $\mathbb{P}$, elemanları *nokta*lar olan bir küme; $\mathbb{L}$ de, $\mathbb{P}$ nin boş küme olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları *doğru*lar olan bir küme olmak üzere, aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan matematiksel sisteme *soyut geometri* denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ ile gösterilir.
$(i)$ $\mathbb{P}$ deki her farklı iki noktadan geçen bir doğru vardır.
$(ii)$ Her doğru en az iki noktaya sahiptir[1].

**Örnek 1.1.1** Noktalar kümesi $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ olsun. Doğrular kümesi $\mathbb{L}$ de; $a$, $b$ ve $m$ sabit birer reel sayı olmak üzere, tüm *dikey doğru* denen $l_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$ ve *dikey olmayan doğru* denen $l_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$ kümelerinin birleşimi olan $L_E$ kümesi olsun. Son olarak üzerinde bulunma bağıntısı "$\circ$" da, $(x, y) \circ l_a \Leftrightarrow x = a$ ve $(x, y) \circ l_{m,b} \Leftrightarrow y = mx + b$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, $[\mathbb{R}^2, L_E]$ sistemi bir soyut geometri modelidir. Bu model *kartezyen düzlem* olarak bilinir. Kartezyen düzlemde $A$ ve $B$ noktalarından geçen doğru $AB$ veya $\overleftrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.1.2** Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ soyut geometrisine *konum* (*incidence*) *geometrisi* denir.
$(i)$ $\mathbb{P}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.
$(ii)$ Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

**Örnek 1.1.2** Kartezyen düzlem $[\mathbb{R}^2, L_E]$, bir konum geometri modelidir. [45]'ten birçok konum geometri modeli görülebilir.

---
[1] Bu sistemde *nokta*, *doğru* ve *üzerinde olma* tanımlanmamış terimlerdir. Ancak, doğrular tanım gereği noktalardan oluştuğu için "eleman olma" bağıntısı, "üzerinde olma" bağıntısını karşılayabilir. Bununla beraber, böyle bir kısıtlama zorunlu değildir.

**Tanım 1.1.3** $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki $(i)$ ve $(ii)$ koşullarını sağlarsa, $d$ ye $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* denir. Eğer üç koşulu da sağlarsa, $d$ ye $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *metrik*tir denir.

$(i)$ Her $P, Q \in \mathcal{X}$ için $d(P,Q) \geq 0$ ve $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ dir.

$(ii)$ Her $P, Q \in \mathcal{X}$ için $d(P,Q) = d(Q,P)$ dir.

$(iii)$ Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için, $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ dir.[2]

**Örnek 1.1.3** Düzlemde ($\mathbb{R}^2$ de) Öklid (veya Öklidyen) uzaklık fonksiyonu, $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ iki nokta olmak üzere, $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $d_E(P,Q) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]^{1/2}$ şeklinde tanımlıdır ve $d_E$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik belirtir.

**Tanım 1.1.4** $l$, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ konum geometrisinin bir doğrusu, $d$ de $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $f : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $l$ için *cetveldir* denir.

$(i)$ $f$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

$(ii)$ $l$ üzerindeki her $P$ ve $Q$ noktaları için $|f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$ dir.

Burada, $(ii)$ şıkkındaki eşitliğe *cetvel denklemi*, $f(P)$ ye de $P$ nin $f$ ye bağlı *koordinatı* denir.

**Tanım 1.1.5** $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ bir konum geometri ve $d$, $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu cetvele sahipse, $d$ ile birlikte $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ konum geometrisine *metrik geometri* denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ ile gösterilir.

**Örnek 1.1.4** $[\mathbb{R}^2, L_E]$ konum geometrisi için $d_E$ uzaklık fonksiyonu göz önüne alınırsa, $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a,y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için, $f_2 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x,y) = x\sqrt{1+m^2}$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir. Böylece $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E]$ sistemi bir metrik geometri modelidir. Birçok metrik geometri modeli yine [45]'ten bulunabilir.

**Tanım 1.1.6** $A, B$ ve $C$, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisi içinde üç farklı nokta olmak üzere, eğer bu noktalar aynı doğru üzerinde ve $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$ ise, $B$

[2] $(i)$ özelliğinin ilk kısmı, $d$ fonksiyonunun değer kümesi $[0, \infty)$ şeklinde tanımlanarak devre dışı bırakılabilir. Ayrıca, bu kısım $(ii)$ ve $(iii)$ özelliklerinin doğrudan sonucu olduğundan, yalnızca *metrik* tanımlanırken verilmeyebilir.

noktası $A$ ve $C$ noktaları *arasında*dır denir ve bu durum $A$-$B$-$C$ ile gösterilir. $A$ ve $B$ farklı iki nokta olmak üzere, $\{X \in \mathbb{P} : X = A$ veya $X = B$ veya $A$-$X$-$B\}$ kümesine $AB$ *doğru parçası* denir ve $\overline{AB}$ veya $[AB]$ şeklinde gösterilir. $AB$ ve $CD$ iki doğru parçası olmak üzere, eğer $d(A,B) = d(C,D)$ ise $AB$ ve $CD$ doğru parçaları *eş*tir denir. Ayrıca $\overline{AB} \cup \{X \in \mathbb{P} : A\text{-}B\text{-}X\}$ kümesine $AB$ *ışını*, $A$ noktasına da $AB$ ışınının *başlangıç noktası* denir. $AB$ ışını, $[AB$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.1.7** $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ bir metrik geometri ve $S \subset \mathbb{P}$ olsun. Eğer $S$ içindeki her farklı $P$ ve $Q$ noktaları için $\overline{PQ} \subset S$ ise, $S$ kümesine *konveks*tir denir.

**Tanım 1.1.8** Bir $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisinde, verilen her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu için $\mathbb{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan $H_1$ ve $H_2$ gibi iki alt kümesi varsa, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ sistemi *düzlem ayırma aksiyomu*nu sağlar denir. Bu durumda, $H_1$ ve $H_2$ kümelerinin her birine bir *yarı düzlem*, $l$ doğrusuna da bu yarı düzlemlerin *kenar*ı denir.
$(i)$ $H_1$ ve $H_2$ konvekstir.
$(ii)$ $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ ($\mathbb{P}$ den $l$ nin çıkarılmasıyla elde edilen küme).
$(iii)$ $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise, $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ dir.

**Tanım 1.1.9** Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye *Pasch geometri* denir.

**Örnek 1.1.5** $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E]$ sistemi bir Pasch geometri modelidir.

**Tanım 1.1.10** Başlangıç noktaları ortak farklı iki ışının birleşim kümesine *açı* denir; $AB$ ve $BC$ ışınlarının oluşturduğu açıya $ABC$ açısı denir ve $\angle ABC$ şeklinde gösterilir. Bir $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ Pasch geometrisinde, $\mathcal{A}$ tüm açıların kümesi olmak üzere, aşağıdaki dört koşulu sağlayan $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *açı ölçme fonksiyonu* denir:
$(i)$ Eğer $\angle ABC \in \mathcal{A}$ ise, $0 < m(\angle ABC) < 180$ dir.
$(ii)$ $H$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir $r$ reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(\angle PAB) = r$ olacak şekilde bir tek $AP$ ışını vardır.
$(iii)$ Eğer $D$ noktası $\angle ABC$ nın *iç bölgesi*nde ise, $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$ dir.

$(iv)$ Eğer $A$-$B$-$C$ ve $D \notin AC$ ise, $m\angle ABD + m\angle DBC = 180$ dir.

**Örnek 1.1.6** $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E]$ sisteminde açı ölçme fonksiyonu
$m_E(\angle ABC) = \left(\frac{180}{\pi}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\langle A-B, C-B\rangle}{\|A-B\|\|C-B\|}\right)$ şeklinde tanımlanır (Aynı açı ölçme fonksiyonunu belirten başka bir tanımlama için bkz: [64]).

**Tanım 1.1.11** $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ Pasch geometrisine bu geometri üzerinde tanımlı bir $m$ açı ölçme fonksiyonuyla birlikte *açıölçer* (*protractor*) geometri denir ve $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ ile gösterilir.

**Örnek 1.1.7** $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemi bir açıölçer geometri modelidir. [51] ve [8]'de incelenen Moulton ve Moise düzlemleri de birer açıölçer geometri modelidir.

**Tanım 1.1.12** $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, eğer $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$ ise $ABC$ ve $DEF$ açıları *eş*tir denir. Ayrıca, iki üçgenin köşe noktaları arasında birebir bir eşleme verildiğinde, eğer birinci üçgenin kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve bu kenarlar arasındaki açılarına eş ise bu iki üçgen *eş*tir denir.

**Tanım 1.1.13** $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, iki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve bu kenarlar arasındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş iken bu üçgenler de eş ise, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ sistemi *kenar-açı-kenar* $(KAK)$ *aksiyomu*nu sağlıyor denir.

**Tanım 1.1.14** KAK aksiyomunu sağlayan açıölçer geometriye *mutlak* (*absolute, neutral*) *geometri* denir.

**Örnek 1.1.8** $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemi bir mutlak geometri modelidir. Bölüm 4'te taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerinin Öklid açı ölçme fonksiyonuyla birlikte birer açıölçer geometri modeli oldukları gösterilmiştir. Bununla birlikte, bu düzlemler KAK aksiyomunu sağlamadığından, mutlak geometri modeli değildirler.

**Tanım 1.1.15** Bir $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ konum geometrisinde $l_1$ ve $l_2$ iki doğru olmak üzere, eğer $l_1 \cap l_2 = \varnothing$ ise, $l_1$ ve $l_2$ doğruları *paralel*dir denir.

**Tanım 1.1.16** Bir $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ konum geometrisinde $l$ doğrusu ve bu doğru dışında bir $P$ noktası verildiğinde, $P$ noktasından geçen ve $l$ doğrusuna paralel olan bir tek doğru varsa, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemi *paralellik aksiyomu*nu sağlıyor denir.

**Tanım 1.1.17** Paralellik aksiyomunu sağlayan mutlak geometriye *Öklidyen düzlem geometri* denir. Daha açık olarak, $\mathbb{P}$, elemanları *nokta*lar olan bir küme; $\mathbb{L}$, $\mathbb{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları *doğru*lar olan küme; $d$, $\mathbb{P}$ üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu ve $m$ de $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ üzerinde tanımlı bir açı ölçme fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki onüç aksiyomu sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ sistemine Öklidyen düzlem geometri denir:

[**E1**] Farklı iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[**E2**] Her doğru en az iki nokta, $\mathbb{P}$ kümesi de doğrusal olmayan üç nokta içerir.

[**E3**] Her sıralı $(A, B)$ nokta çifti için $d$, negatif olmayan bir $d(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[**E4**] Her $A$ ve $B$ noktaları için $d(A, B) = d(B, A)$ dir.

[**E5**] Her $A$, $B$ ve $C$ noktaları için $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ dir.

[**E6**] Verilen her $l$ doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm $A, B$ noktaları için $|f_l(A) - f_l(B)| = d(A, B)$ dir.

[**E7**] Verilen her $l$ doğrusu için $\mathbb{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan $H_1$ ve $H_2$ gibi iki alt kümesi vardır:

$(i)$ $H_1$ ve $H_2$ konvekstir.

$(ii)$ $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ dir.

$(ii)$ $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ dir.

[**E8**] $m$, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] $H$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir $r$ reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(\angle PAB) = r$ olacak şekilde bir tek $AP$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer $D$ noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise, $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$ dir.

[**E11**] Eğer $B$, $A$ ile $C$ arasında ve $D \notin AC$ ise, $m\angle ABD + m\angle DBC = 180$ dir.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

[**E13**] $l$ doğrusu dışında bir $P$ noktası verilsin. Bu durumda $P$ noktasından geçen ve $l$ doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

**Örnek 1.1.9** $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemi bir Öklidyen geometri modelidir. Bu model *Öklidyen* (*analitik*) *düzlem* veya *Öklid düzlemi* olarak bilinir. [30], [43] ve [50]'de farklı Öklidyen geometri modelleri verilmiştir. Ancak tüm Öklidyen geometri modelleri birbirine izomorftur.

## 1.2 Taksi, Maksimum, Çin dama ve $\alpha$-Düzlemleri

Taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemleri Öklidyen analitik düzlemle hemen hemen aynı yapıya sahiptir. Şöyle ki, bu düzlemlerdeki nokta ve doğrular Öklidyen analitik düzlemin nokta ve doğrularıyla aynıdır. Açılar da aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonları farklıdır. Aşağıda, bu düzlemler daha önce bahsedilen aksiyomatik sistemlerle ilişkilendirilmiştir:

$A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}^2$ de iki nokta ve $\alpha \in [0, \pi/2)$ olmak üzere; $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ tanımlı

$d_T(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,

$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$,

$d_C(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$,

$d_\alpha(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

fonksiyonlarına, sırasıyla *taksi*, *maksimum*, *Çin dama* ve *$\alpha$-uzaklık fonksiyonları*; $d_T(A, B)$, $d_M(A, B)$, $d_C(A, B)$ ve $d_\alpha(A, B)$ negatif olmayan reel sayılarına da sırasıyla, $A$ ve $B$ noktaları arasındaki *taksi*, *maksimum*, *Çin dama* ve *$\alpha$-uzaklık* denir. Yukarıda verilen uzaklık fonksiyonları $\mathbb{R}^2$ de birer metrik belirtir (Bkz: Teorem 4.1.1, Uyarı 4.1.1 ve Uyarı 4.1.2). Bununla birlikte, Teorem 4.2.1'in bir sonucu olarak, $[\mathbb{R}^2, L_E]$ konum geometrisinde bu uzaklık fonksiyonları sırasıyla göz önüne alınırsa,

(1) $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için, $f_2 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(1 + |m|)$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir.

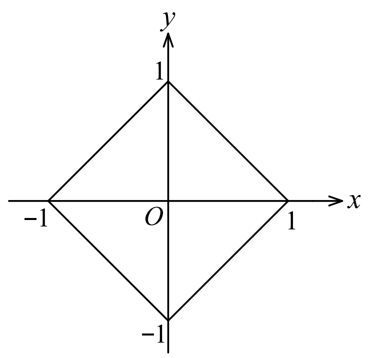
(2) $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için, $f_3 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(\max\{1, |m|\})$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir.

(3) $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için, $f_4 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(\max\{1, |m|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{1, |m|\})$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir.

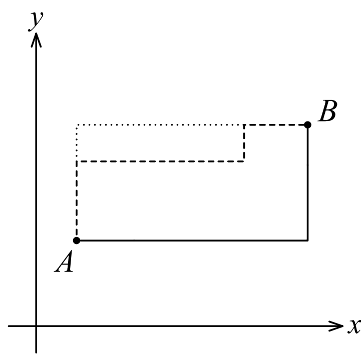
(4) $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f(a, y) = y$ fonksiyonu dikey doğrular için, $f_5 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(\max\{1, |m|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{1, |m|\})$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir.

Buna göre; $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_M]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_C]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_\alpha]$ sistemleri birer metrik geometri modelidir ve sırasıyla taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemi olarak bilinir. Bu sistemler düzlem ayırma aksiyomunu da sağlar. Böylece, Öklid açı ölçme aksiyomuyla birlikte açıölçer geometri modelleri olan $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_M, m_E]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_C, m_E]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_\alpha, m_E]$ sistemleri elde edilir. Bu tez içinde taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemleri, sırasıyla $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_M, m_E]$, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_C, m_E]$ ve $[\mathbb{R}^2, L_E, d_\alpha, m_E]$ sistemlerine işaret edecek ve sırasıyla $\mathbb{R}^2_T$, $\mathbb{R}^2_M$, $\mathbb{R}^2_C$ ve $\mathbb{R}^2_\alpha$ ile gösterilecektir. Aşağıda, kısaca bu düzlemlerden bahsedilmiştir.

Taksi metriği, Minkowski tarafından verilen, $d(A,B) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}$ metriğinin $p = 1$ için özel halidir (Bkz: [46]). Ancak taksi düzlem, ilk olarak Menger tarafından sunulmuş, Krause tarafından geliştirilmiştir (Bkz: [44], [40]). Bugüne kadar taksi düzlem üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Bunlardan bazıları için bkz: [1], [2], [3], [11], [12], [17], [23], [33], [34], [35], [39], [41], [47], [48], [49], [52], [54], [55], [56], [58]). Taksi düzlemde çemberler kenarları $\mp 1$ eğimli bilinen Öklidyen karelerdir; Şekil 1.2.1'de taksi birim çember -yani, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ kümesi- çizilmiştir. Şekil 1.2.2'de taksi düzleminde $A$ ve $B$ noktaları arasındaki bazı en kısa yollar gösterilmiştir.

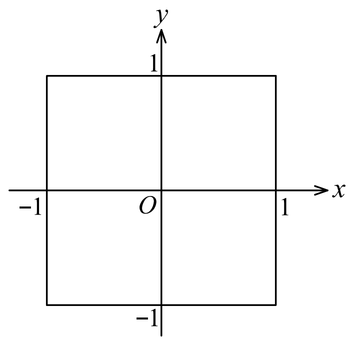



Şekil 1.2.1

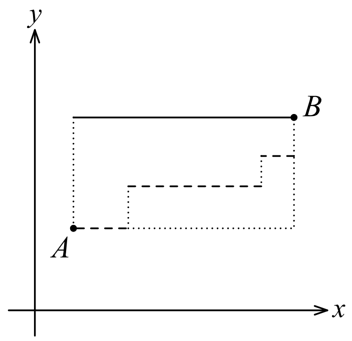



Şekil 1.2.2

Maksimum metriği, yine Minkowski'nin verdiği $d(A,B) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}$ metiğinin $p \to \infty$ iken limitidir (Bkz: [46]). Salihova, maksimum düzlem geometrinin uzunlukla ilgili bazı özelliklerini [53]'te incelemiştir. Konu üzerine yapılmış çalışmalar çok azdır. Bu düzlemin de çemberleri karedir; Şekil 1.2.3'te maksimum birim çember -yani, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ kümesi- çizilmiştir. Şekil 1.2.4'te maksimum düzleminde $A$ ve $B$ noktaları arasındaki bazı en kısa yollar gösterilmiştir.

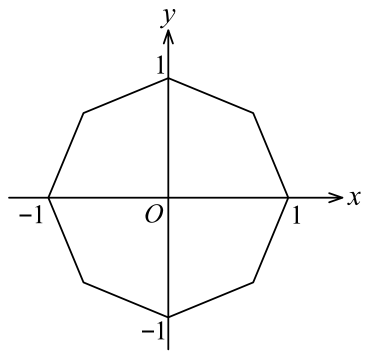



Şekil 1.2.3

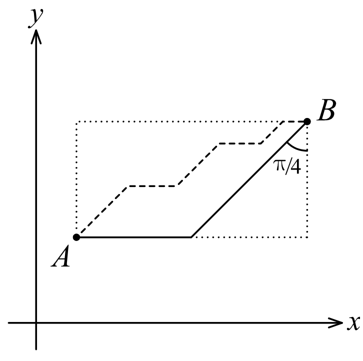



Şekil 1.2.4

Krause [40]'ta, analitik düzlemde Çin dama oyunundaki (Bkz: [68]) damaların hareketlerini en kısa yol kabul eden uzaklık fonksiyonunu sormuştur. Bunun üzerine, Çin dama metriği Chen tarafından geliştirilmiştir (Bkz: [9]). Bu konu üzerinde de birçok çalışma yapılmıştır (Bunlardan bazıları için bkz: [4], [5], [27], [28], [36], [59], [60], [61], [62]). Çin dama düzleminde çemberler, en uzun köşegenlerinden biri $x$ ya da $y$ eksenine paralel olan bilinen Öklidyen düzgün sekizgendir; Şekil 1.2.5'te Çin dama birim çember -yani, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x|, |y|\} = 1\}$ kümesi- çizilmiştir. Şekil 1.2.6'da Çin dama düzleminde $A$ ve $B$ noktaları arasındaki bazı en kısa yollar gösterilmiştir.

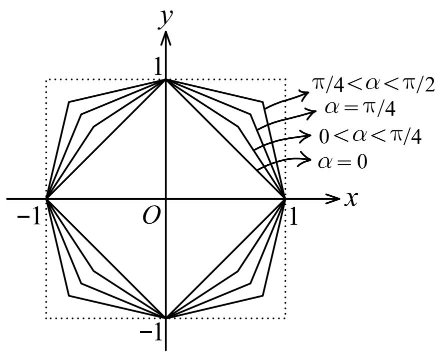



Şekil 1.2.5

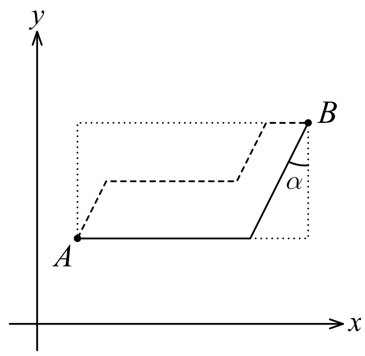



Şekil 1.2.6

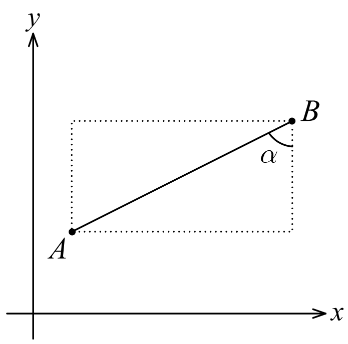
$\alpha$-metriği (veya -"alfa"nın bir değişken olduğunu unutmamak kaydıyla- alfa metriği), taksi ve Çin dama metriklerini de kapsayan bir metrik ailesi olarak Tian tarafından sunulmuştur (Bkz: [57]). Ancak, bu çalışmada $\alpha$, $[0, \pi/4)$ aralığına kısıtlanmıştır. Teorem 4.1.1'den anlaşılacağı üzere, $\alpha$ nın $[0, \pi/2)$ arasında olması durumunda $d_\alpha$ nın metrik özelliği bozulmaz (Ayrıca bkz: [18]). Bu konu çok yeni olmakla beraber, literatürde ilgili çalışmalara rastlanmaktadır (Bkz: [24], [25], [26]). $\alpha$-düzleminde çemberler özel sekizgenlerdir; Şekil 1.2.7'de $\alpha$ birim çember -yani, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x|, |y|\} = 1\}$ kümesi- bazı özel değerler için gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 1.2.8'de $\alpha$-düzleminde $A$ ve $B$ noktaları arasındaki bazı en kısa yollar gösterilmiştir.



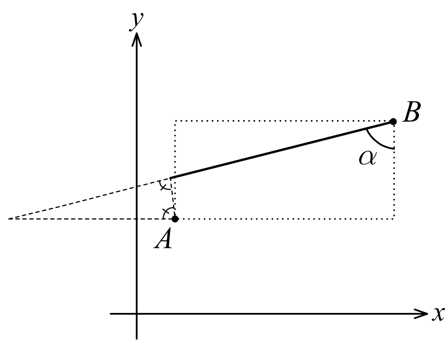

Şekil 1.2.7




Şekil 1.2.8 (a)




Şekil 1.2.8 (b)




Şekil 1.2.8 (c)

# BÖLÜM 2

# PİSAGOR TEOREMİ

Bilindiği gibi, Pisagor teoremi Öklid düzlemindeki dik üçgenlerin kenar uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade eder: Verilen bir $ABC$ üçgeninde $A$ açısı dik ise, $d_E(B,C) = \mathbf{a}$, $d_E(A,C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A,B) = \mathbf{c}$ olmak üzere, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ dir. Ayrıca, Pisagor teoreminin karşıtı da Öklid düzlemindeki üçgenlerin iyi bilinen bir özelliğidir: Verilen bir $ABC$ üçgeninde, $d_E(B,C) = \mathbf{a}$, $d_E(A,C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A,B) = \mathbf{c}$ olmak üzere, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ ise, $A$ açısı diktir. Bu bölümde, Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen Pisagor Teoreminin taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerindeki benzerleri -yani, bu düzlemlerde Pisagor teoreminin işlevini görebilecek teoremler- verilmiştir. Bununla birlikte, verilen benzerlerin karşıtlarının doğru olmadığı birer örnekle gösterilmiş ve her bir düzlem için, Öklid düzlemindeki karşıt teoremin işlevini görebilecek bir teorem verilmiştir.

Bu bölümde, altbölümler kendi içinde yeterli olabilsin diye bazı tekrarlardan kaçınılmamıştır. Böylece, her bir altbölüm birbirinden bağımsız olarak tek başına incelenebilir.

## 2.1 Pisagor Teoreminin Taksi Benzerleri

Pisagor teoreminin bir taksi benzeri, taksi düzlemde $A$ açısı dik olan bir $ABC$ üçgeni için $d_T(B,C) = a$, $d_T(A,C) = b$ ve $d_T(A,B) = c$ uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade etmelidir. Pisagor teoreminin iki farklı taksi benzeri [35]'te verilmiştir. Ancak verilen benzerler $a$, $b$ ve $c$ taksi uzunluklarına ek olarak iki parametre içermektedir. Burada, dik üçgenin taksi kenar uzunluklarına ek olarak yalnızca bir parametre içeren iki karşılık verilmiştir (Bkz: [13]). Böylece, taksi Pisagor teoremi daha sade ve kullanışlı hale getirilmiştir.

Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve taksi uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki yardımcı teorem, tartışmamız içinde önemli bir role sahiptir.

**Yardımcı Teorem 2.1.1** *$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $m$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m) = (1+m^2)^{1/2} \diagup (1+|m|)$ olmak üzere,*

$$d_E(A,B) = \rho(m) d_T(A,B) \tag{2.1.1}$$

*dir. $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A,B) = d_T(A,B)$ dir.*

**İspat:** $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ kartezyen koordinat düzleminde iki nokta olsun. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve $m = (y_2 - y_1) \diagup (x_2 - x_1)$ dir. O halde, açıkça, $d_E(A,B) = |x_2 - x_1| (1+m^2)^{1/2}$ ve $d_T(A,B) = |x_2 - x_1| (1+|m|)$ dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa kolayca (2.1.1) eşitliği elde edilir. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A,B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_T(A,B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A,B) = d_T(A,B)$ elde edilir. ■

**Yardımcı Teorem 2.1.2** *Eğer $m$ sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = -1/m$ ise,*

$$\rho(m) = \rho(m') \tag{2.1.2}$$

*dir.*

**İspat:** Eğer $m \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $m' = (-1/m) \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\rho(m') &= \left(1+(m')^2\right)^{1/2} \diagup (1+|m'|) = \left(1+(-1/m)^2\right)^{1/2} \diagup (1+|-1/m|) \\ &= \left(\frac{1+m^2}{m^2}\right)^{1/2} \diagup \left(\frac{1+|m|}{|m|}\right) = \left(1+m^2\right)^{1/2} \diagup (1+|m|) = \rho(m)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve -daha önce tanımlandığı gibi- bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B,C) = \mathbf{a}$, $d_E(A,C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A,B) = \mathbf{c}$; taksi uzunlukları da $d_T(B,C) = a$, $d_T(A,C) = b$ ve $d_T(A,B) = c$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, genelde $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ Öklidyen uzunlukları ile $b$ ve $c$ taksi uzunlukları birbirinden farklı olduğu halde, bunların karşılıklı oranlarının eşit olduğunu gösterir.

**Yardımcı Teorem 2.1.3** *$ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgen ve $d_E(A,C) = \mathbf{b}$, $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, $d_T(A,C) = b$ ve $d_T(A,B) = c$ ise, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir.*

**İspat:** Eğer $ABC$ üçgeninin $AB$ ve $AC$ kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $\mathbf{b} = b$ ve $\mathbf{c} = c$ olacağı açıktır. Böylece bu iki oran birbirine eşittir. $ABC$ üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da koordinat eksenlerine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer $AB$ doğrusunun eğimi $m$ ise, $AC$ doğrusunun eğimi $-1/m$ dir. Burada $m' = -1/m$ denirse, (2.1.1) eşitliğinden, $\mathbf{c} = \rho(m)c$ ve $\mathbf{b} = \rho(m')b$ eşitlikleri elde edilir. Fakat bu durumda (2.1.2) eşitliği, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ eşitliğini gerektirir. ■

Bu gerçekler yardımıyla aşağıda, verilen bir dik üçgenin taksi kenar uzunlukları arasında, bu uzunluklar hariç yalnızca bir parametreye -daha açık olarak, dik kenarlardan birinin eğimine ya da hipotenüsün eğimine- bağlı bir bağıntı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte, eğer dik kenarlardan biri ya da hipotenüs koordinat eksenlerinden birine paralel ise, dik üçgenin taksi kenar uzunlukları arasında bu uzunluklardan başka hiçbir parametreye bağlı olmayan bir bağıntı söz konusudur.

**Teorem 2.1.4** $(i)$ *Eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,*

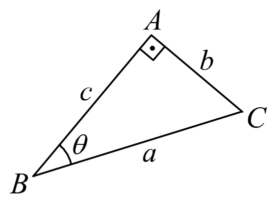
$$a = b + c, \tag{2.1.3}$$

$(ii)$ *eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani $BC$ kenarı) dikey değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi $m$ olmak üzere,*

$$(1 + |m|)a = |bm + c| + |cm - b| \tag{2.1.4}$$

*dir.*

**İspat:** $(i)$ Bu eşitlik, taksi uzaklık tanımından aşikardır.
$(ii)$ $CBA$ açısı $\theta$ ile gösterilsin. $ABC$ üçgeninin saat yönünün tersine harflendirilmesiyle $\theta$ nın pozitif ve dar olacağına dikkat ediniz (Bkz: Şekil 2.1.1).




Şekil 2.1.1

$AB$ kenarının eğimi $m$, $BC$ kenarının eğimi de $m_1$ olsun. Buna göre, $AC$ kenarının eğimi $-1/m = m'$ olur ve $\tan\theta = (m - m_1)/(1 + mm_1)$ eşitliği elde edilir (Bu son eşitlik, iki açının farklarının tanjantı formülünden kolayca elde edilir). Ayrıca Yardımcı Teorem 2.1.3 gereğince $\tan\theta = \mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir O halde,

$$b/c = (m - m_1)/(1 + mm_1) \tag{2.1.5}$$

dir. Bu eşitlikten $m_1$ çekilirse, $m \neq -c/b$ olmak üzere,

$$m_1 = (cm - b)/(bm + c) \tag{2.1.6}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (2.1.1) eşitliği, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ eşitliğine uygulanır ve Yardımcı Teorem 2.1.2 kullanılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a^2 = [\rho(m)]^2 (b^2 + c^2) \tag{2.1.7}$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlikten de kolayca

$$(1+|m|)^2a^2 = [(1+|m_1|)^2 \diagup (1+m_1^2)](1+m^2)(b^2+c^2) \qquad (2.1.8)$$

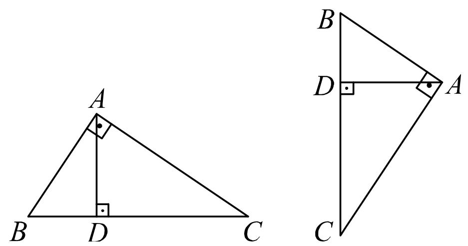
eşitliği elde edilir. (2.1.6) eşitliğindeki $m_1$, (2.1.8) eşitliğinde yerine konursa bu denklemin sağ tarafı $(|bm+c|+|cm-b|)^2$ şeklinde kısaltılabilir. Son olarak, her iki tarafın kare kökü alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.1.4) eşitliği elde edilir. Eğer $AC$ kenarının eğimi $m$ olarak alınırsa, $AC$ kenarının eğimi $m' = -1/m$ olur ve ispatımız (2.1.4) eşitliğinde $m$ yerine $m'$ konularak elde edilen (2.1.4′) eşitliğini verir. Fakat (2.1.4′) eşitliği $|m|$ ile çarpılırsa (2.1.4) eşitliği elde edilir. Böylece, $m$ dik kenarlardan hangisinin eğimi olursa olsun, (2.1.4) eşitliği doğrudur. ■

**Sonuç 2.1.5** *Eğer $BC$ kenarı, yani $ABC$ üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,*

$$a = (b^2+c^2) \diagup (b+c) \qquad (2.1.9)$$

*dir. Buna ek olarak, eğer $b=c$ ise, $a=b=c$ dir.*

**İspat:** $ABC$ üçgeninin $BC$ kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun (Bkz: Şekil 2.1.2). Bu durumda (2.1.9) eşitliği, (2.1.7) eşitliğinin bir sonucu olarak elde edilir. Şöyle ki, eğer $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ise, $m_1 = 0$ ve böylece $\rho(m_1) = 1$; eğer $BC$ kenarı $y$-eksenine paralel ise, $m_1 \to \infty$ ve böylece $\rho(m_1) \to 1$ dir. Her iki durum için de (2.1.7) eşitliği, $AB$ kenarının eğimi $m$ olmak üzere, $a^2 = [\rho(m)]^2(b^2+c^2)$ haline gelir.




Şekil 2.1.2

Benzer üçgenler ve Yardımcı Teorem 2.1.3'ten, $BC$ yatay iken $|m| = |AD/BD| = |AC/AB| = b/c$; $BC$ dikey iken $|m| = c/b$ elde edilir. Böylece, eğer $BC$ yatay ise, $a^2 = [(1+(b/c)^2)^{1/2} \diagup (1+b/c)]^2(b^2+c^2)$; eğer $BC$ dikey ise, $a^2 = [(1+(c/b)^2)^{1/2} \diagup (1+$

$c/b)]^2(b^2+c^2)$ bulunur. Bu iki eşitlik de, gerekli işlemler yapılarak (2.1.9) eşitliğine denk olan $a^2 = (b^2+c^2)^2 \diagup (b+c)^2$ eşitliğine indirgenir.

Eğer, ek olarak $b = c$ ise, (2.1.9) eşitliği $a = b$ ye indirgenir; ancak bu durumda, $ABC$ ikizkenar taksi üçgen olduğu için, $a = b = c$ elde edilir. ■

Bir sonraki sonuç da Pisagor teoreminin bir taksi benzeridir ve dik kenarların birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içerir.

**Sonuç 2.1.6** *Eğer $ABC$ üçgeninin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, $BC$ kenarının, yani hipotenüsün eğimi $m_1$ olmak üzere,*

$$a \diagup (1+|m_1|) = (b^2+c^2) \diagup (|bm_1 - c| + |cm_1 + b|) \tag{2.1.10}$$

*dir.*

**İspat:** $AB$ kenarının eğimi $m$ ise, (2.1.5) eşitliğinden

$$m = (b + cm_1) \diagup (c - bm_1) \tag{2.1.11}$$

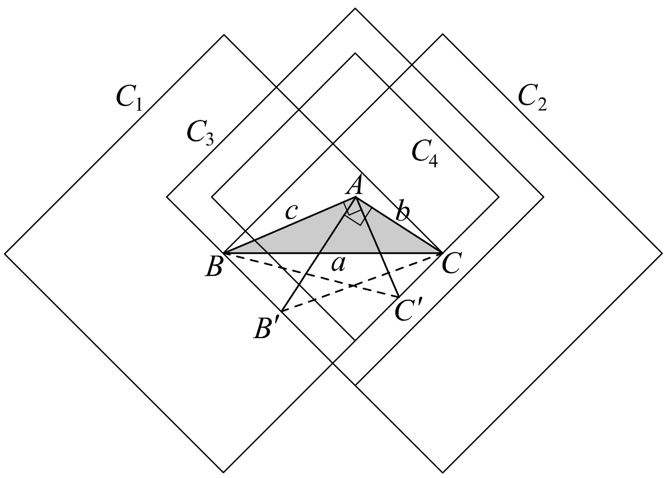
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $m$ nin eşitini, (2.1.4) eşitliğinde $m$ yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.1.10) eşitliği bulunur. ■

**Uyarı 2.1.1** $AB$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m = 0$ iken, Teorem 2.1.4'ün ispatındaki (2.1.4) eşitliğinin elde edilişi geçerli olduğundan (2.1.4) eşitliğinin, (2.1.3) eşitliğine indirgeneceğine dikkat ediniz. Benzer şekilde, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken, (2.1.10) eşitliği de (2.1.9) eşitliğine indirgenir. Buna ek olarak, (2.1.3) ve (2.1.9) eşitlikleri, sırasıyla $AB$ veya $BC$ kenarları dikey iken, (2.1.4) eşitliğinin $m \to \infty$ ve (2.1.10) eşitliğinin $m_1 \to \infty$ iken limitleridir. Bunu görmek için, önce (2.1.4) ve (2.1.9) eşitliklerinin (2.1.8) eşitliğinden elde edildiğine; $m \to \infty$ iken $\rho(m) \to 1$ ve $m_1 \to c/b$ ((2.1.6) eşitliğine bakınız); $m_1 \to \infty$ iken $\rho(m_1) \to 1$ ve $m \to -c/b$ ((2.1.11) eşitliğine bakınız) olduğuna dikkat ediniz. Böylece (2.1.8) eşitliği, $m \to \infty$ iken (2.1.3) eşitliğine; $m_1 \to \infty$ iken de (2.1.9) eşitliğine indirgenir.
□

**Uyarı 2.1.2** Eğer $A$ açısı dik olan $ABC$ üçgeni saat yönünde harflendirilirse $b$ ve $c$ nin rolleri değişir. Böylece (2.1.4) eşitliği $(1+|m|)a = |cm+b| + |bm-c|$ şekline, (2.1.10) eşitliği de $a/(1+|m_1|) = (b^2+c^2)/(|cm_1-b|+|bm_1+c|)$ şekline gelir. □

Aşağıda, Teorem 2.1.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.1.6'nın karşıtının doğru olmadığını -yani, taksi düzleminde (2.1.4) ya da (2.1.10) eşitliğini sağlayan fakat hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgenlerinin var olduğunu- gösteren bir örnek verilmiştir. Verilen örnek, içinde dört farklı taksi çemberi bulunan Şekil 2.1.3'e işaret etmektedir. Bilindiği gibi, $A$ merkezli ve $r$ yarıçaplı taksi çemberi, $A$ noktasına taksi uzaklığı $r$ olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri, kenarlarının eğimi $\pm 1$ ve köşegenlerinin uzunluğu $2r$ olan $A$ (ağırlık) merkezli karedir. Ayrıca, Öklidyen çemberlerde olduğu gibi, $A$ merkezi ve bu merkeze $r$ taksi uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

**Örnek 2.1.1** $ABC$, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ve $A$ köşesi, $BC$ çaplı taksi çemberinin iç bölgesinde kalan, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş bir üçgen ve $d_T(B,C) = a$, $d_T(A,C) = b$, $d_T(A,B) = c$ olsun (Bkz: Şekil 2.1.3). Bu durumda $A$ açısının geniş olduğu açıktır. $C_1$ ve $C_2$, merkezleri sırasıyla $B$ ve $C$ noktaları olan ve aynı $a$ yarıçap uzunluğuna sahip iki taksi çemberini; $m$ ve $m'$ de sırasıyla $AB$ ve $AC$ doğrularının eğimlerini göstersin. $C_1$ üzerinde, $BAC'$ açısı dik olacak şekilde bir $C'$ noktası ve $C_2$ üzerinde, $CAB'$ açısı dik olacak şekilde bir $B'$ noktası, Şekil 2.1.3'deki gibi alınsın.




Şekil 2.1.3

$B'$ noktası, hem $C_2$ taksi çemberi hem de $A$ merkezli $c$ yarıçaplı taksi çemberi ($C_3$ çemberi) üzerinde olduğu için $d_T(C,B') = a$ ve $d_T(A,B') = c$ dir. Benzer şekilde, $C'$ noktası, hem $C_1$ taksi çemberi hem de $A$ merkezli $b$ yarıçaplı taksi çemberi ($C_4$ çemberi) üzerinde olduğu için $d_T(B,C') = a$ ve $d_T(A,C') = b$ dir. O halde $ABC'$ ve $AB'C$ dik üçgenlerine Teorem 2.1.4 uygulanırsa, hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgeni için de geçerli olan

$$(1+|m|)a = |cm-b| + |bm+c| \quad \text{ve} \quad (1+|m'|)a = |cm'-b| + |bm'+c|$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Teorem 2.1.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.1.6'nın karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur. □

Aşağıdaki teorem, taksi düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul ifade eder. Yeterli koşul, aslında Pisagor teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

**Teorem 2.1.7** *$ABC$, taksi düzlemde kenar uzunlukları $d_T(B,C) = a$, $d_T(A,C) = b$ ve $d_T(A,B) = c$ olan bir üçgen olsun; $m_1$, $m$ ve $m'$ de sırasıyla $BC$, $AB$ ve $AC$ kenarlarının eğimlerini göstersin. Buna göre, $A$ açısının dik olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(x) = (1+x^2)/(1+|x|)^2$ olmak üzere,*

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)(b^2+c^2) = \rho(m')(b^2+c^2) \tag{2.1.12}$$

*eşitliğinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Eğer (2.1.12) eşitliği geçerli ise, $\rho(m) = \rho(m')$ ve

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)b^2 + \rho(m)c^2 = \rho(m')b^2 + \rho(m')c^2$$

dir. O halde,

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)b^2 + \rho(m')c^2 \tag{2.1.13}$$

dir. (2.1.1) eşitliğini (2.1.13) eşitliğine uygulayarak $\mathbf{a} = d_E(B,C)$, $\mathbf{b} = d_E(A,C)$ ve $\mathbf{c} = d_E(A,B)$ olmak üzere $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ elde edilir. Pisagor teoreminin karşıtı doğru olduğu için $A$ açısı diktir.

Şimdi, tersine $A$ açısının dik açı olduğunu kabul edelim. O halde $m' = -1/m$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.1.2'den $\rho(m) = \rho(m')$ elde edilir. Bu durumda (2.1.12) eşitliği, Teorem 2.1.4'ün ispatındaki (2.1.7) eşitliğinin doğrudan bir sonucudur. ∎

## 2.2 Pisagor Teoreminin Maksimum Benzerleri

Pisagor teoreminin bir maksimum benzeri, maksimum düzleminde $A$ açısı dik olan bir $ABC$ üçgeni için $d_M(B,C)=a$, $d_M(A,C)=b$ ve $d_M(A,B)=c$ uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade etmelidir. Pisagor teoreminin iki farklı maksimum benzeri [53]'de verilmiştir. Ancak verilen benzerler $a$, $b$ ve $c$ maksimum uzunluklarına ek olarak iki parametre içermektedir. Burada, dik üçgenin maksimum kenar uzunluklarına ek olarak yalnızca bir parametre içeren iki karşılık verilmiştir. Böylece, daha önce verilen benzerler kullanışlı ve sade hale getirilmiştir.

Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve maksimum uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki yardımcı teorem, konu içinde önemli bir role sahiptir.

**Yardımcı Teorem 2.2.1** *$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $m$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m)=(1+m^2)^{1/2} \diagup \max\{1,|m|\}$ olmak üzere,*

$$d_E(A,B)=\rho(m)d_M(A,B) \tag{2.2.1}$$

*dir. $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A,B)=d_M(A,B)$ dir.*

**İspat:** $A=(x_1,y_1)$ ve $B=(x_2,y_2)$ kartezyen koordinat düzleminde iki nokta olsun. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve $m=(y_2-y_1)\diagup(x_2-x_1)$ dir. Buradan kolayca $d_E(A,B)=|x_2-x_1|\,(1+m^2)^{1/2}$ ve $d_M(A,B)=|x_2-x_1|\,(\max\{1,|m|\})$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa (2.2.1) eşitliği bulunur. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1=x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A,B)=|y_2-y_1|$ ve $d_M(A,B)=|y_2-y_1|$ olur. Böylece $d_E(A,B)=d_M(A,B)$ eşitliği elde edilir. ■

**Yardımcı Teorem 2.2.2** *Eğer $m$ sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m'=-1/m$ ise,*

$$\rho(m)=\rho(m') \tag{2.2.2}$$

*dir.*

**İspat:** Eğer $m \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $m' = (-1/m) \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\rho(m') &= \left(1+(m')^2\right)^{1/2} \diagup \max\{1,|m'|\} = \left(1+(-1/m)^2\right)^{1/2} \diagup \max\{1,|-1/m|\} \\ &= \left(\frac{1+m^2}{m^2}\right)^{1/2} \diagup \left(\frac{\max\{1,|m|\}}{|m|}\right) = \left(1+m^2\right)^{1/2} \diagup \max\{1,|m|\} = \rho(m)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve -daha önce tanımlandığı gibi- bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B,C) = \mathbf{a}$, $d_E(A,C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, maksimum uzunlukları da $d_M(B,C) = a$, $d_M(A,C) = b$ ve $d_M(A,B) = c$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, genelde $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ Öklidyen uzunlukları ile $b$ ve $c$ maksimum uzunlukları birbirinden farklı olduğu halde bunların karşılıklı oranlarının eşit olduğunu ifade eder:

**Yardımcı Teorem 2.2.3** *$ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgen ve $d_E(A,C) = \mathbf{b}$, $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, $d_M(A,C) = b$ ve $d_M(A,B) = c$ ise, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir.*

**İspat:** Eğer $ABC$ üçgeninin $AB$ ve $AC$ kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $\mathbf{b} = b$ ve $\mathbf{c} = c$ olacağı açıktır. Böylece bu iki oran birbirine eşittir. $ABC$ üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da koordinat eksenlerine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer $AB$ doğrusunun eğimi $m$ ise, $AC$ doğrusunun eğimi $-1/m$ dir. Burada $m' = -1/m$ denirse, (2.2.1) eşitliğinden, $\mathbf{c} = \rho(m)c$ ve $\mathbf{b} = \rho(m')b$ eşitlikleri elde edilir. Fakat bu durumda (2.2.2) eşitliği, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ eşitliğini gerektirir. ■

Bu gerçekler yardımıyla aşağıda, verilen bir dik üçgenin maksimum kenar uzunlukları arasında, bu uzunluklar hariç yalnızca bir parametreye -daha açık olarak, dik kenarlardan birinin eğimine ya da hipotenüsün eğimine- bağlı bir bağıntı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte eğer dik kenarlardan biri ya da hipotenüs koordinat eksenlerinden birine paralel ise, dik üçgenin maksimum kenar uzunlukları arasında bu uzunluklardan başka hiçbir parametreye bağlı olmayan bir bağıntı söz konusudur.

**Teorem 2.2.4** ($i$) *Eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,*

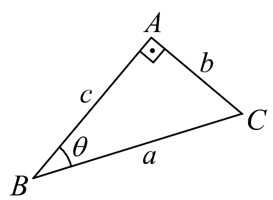
$$a = \max\{b, c\}, \tag{2.2.3}$$

($ii$) *eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani $BC$ kenarı) dikey değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi $m$ olmak üzere,*

$$(\max\{1, |m|\})a = \max\{|bm + c|, |cm - b|\} \tag{2.2.4}$$

*dir.*

**İspat:** ($i$) Bu eşitlik maksimum uzaklık tanımından açıktır.
($ii$) $CBA$ açısı $\theta$ ile gösterilsin. $ABC$ üçgeninin saat yönünün tersine harflendirilmesiyle $\theta$ nın pozitif ve dar olacağına dikkat ediniz (Bkz: Şekil 2.2.1).




Şekil 2.2.1

$AB$ kenarının eğimi $m$, $BC$ kenarının eğimi de $m_1$ olsun. Buna göre, $AC$ kenarının eğimi $-1/m = m'$ olur ve $\tan\theta = (m - m_1)/(1 + mm_1)$ eşitliği elde edilir (Bu son eşitlik, iki açının farklarının tanjantı formülünden kolayca elde edilir). Ayrıca Yardımcı Teorem 2.2.3 gereğince $\tan\theta = \mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir. O halde,

$$b/c = (m - m_1)/(1 + mm_1) \tag{2.2.5}$$

dir. Bu eşitlikten $m_1$ çekilirse, $m \neq -c/b$ olmak üzere,

$$m_1 = (cm - b)/(bm + c) \tag{2.2.6}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (2.2.1) eşitliği, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ eşitliğine uygulanır ve Yardımcı Teorem 2.2.2 kullanılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a^2 = [\rho(m)]^2 (b^2 + c^2) \tag{2.2.7}$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlikten de kolayca

$$(\max\{1,|m|\})^2 a^2 = [(\max\{1,|m_1|\})^2 \diagup (1+m_1^2)](1+m^2)(b^2+c^2) \qquad (2.2.8)$$

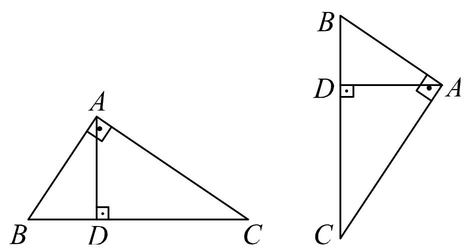
eşitliği elde edilir. (2.2.6) eşitliğindeki $m_1$, (2.2.8) eşitliğinde yerine konursa bu denklemin sağ tarafı $(\max\{|bm+c|, |cm-b|\})^2$ şeklinde kısaltılabilir. Son olarak, her iki tarafın kare kökü alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.2.4) eşitliği elde edilir. Eğer $AC$ kenarının eğimi $m$ olarak alınırsa, $AC$ kenarının eğimi $m' = -1/m$ olur ve ispatımız (2.2.4) eşitliğinde $m$ yerine $m'$ konularak elde edilen (2.2.4′) eşitliğini verir. Fakat (2.2.4′) eşitliği $|m|$ ile çarpılırsa (2.2.4) eşitliği elde edilir. Böylece, $m$ dik kenarlardan hangisinin eğimi olursa olsun, (2.2.4) eşitliği doğrudur. ■

**Sonuç 2.2.5** *Eğer $BC$ kenarı, yani $ABC$ üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,*

$$a = (b^2+c^2) \diagup \max\{b,c\} \qquad (2.2.9)$$

*dir.*

**İspat:** $ABC$ üçgeninin $BC$ kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun (Bkz: Şekil 2.2.2). Bu durumda (2.2.9) eşitliği, (2.2.7) eşitliğinin bir sonucu olarak elde edilir. Şöyle ki, eğer $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ise, $m_1 = 0$ ve böylece $\rho(m_1) = 1$; eğer $BC$ kenarı $y$-eksenine paralel ise, $m_1 \to \infty$ ve böylece $\rho(m_1) \to 1$ dir. Her iki durum için de (2.2.7) eşitliği, $AB$ kenarının eğimi $m$ olmak üzere, $a^2 = [\rho(m)]^2(b^2+c^2)$ haline gelir.




Şekil 2.2.2

Benzer üçgenler ve Yardımcı Teorem 2.2.3 ten, $BC$ yatay iken $|m| = |AD/BD| = |AC/AB| = b/c$; $BC$ dikey iken $|m| = c/b$ elde edilir. Böylece, eğer $BC$ yatay ise, $a^2 = [(1+(b/c)^2)^{1/2} \diagup \max\{1, b/c\}]^2(b^2+c^2)$; eğer $BC$ dikey ise, $a^2 = [(1+(c/b)^2)^{1/2} \diagup \max\{1, b/c\}]^2(b^2+c^2)$ bulunur. Bu iki eşitlik de, gerekli işlemler yapılarak (2.2.9) eşitliğine denk olan $a^2 = (b^2+c^2)^2 \diagup (\max\{b, c\})^2$ eşitliğine indirgenir. ■

Bir sonraki sonuç da Pisagor teoreminin bir maksimum benzeridir ve dik kenarların birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içerir.

**Sonuç 2.2.6** *Eğer $ABC$ üçgeninin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, $BC$ kenarının, yani hipotenüsün eğimi $m_1$ olmak üzere,*

$$a \diagup \max\{1, |m_1|\} = (b^2+c^2) \diagup \max\{|bm_1 - c|, |cm_1 + b|\} \tag{2.2.10}$$

*dir.*

**İspat:** $AB$ kenarının eğimi $m$ ise, (2.2.5) eşitliğinden

$$m = (b + cm_1) \diagup (c - bm_1) \tag{2.2.11}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $m$ nin eşitini, (2.2.4) eşitliğinde $m$ yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.2.10) eşitliği bulunur. ■

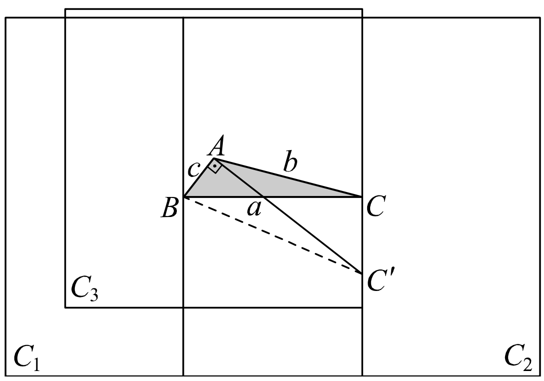
**Uyarı 2.2.1** $AB$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m = 0$ iken, Teorem 2.2.4'ün ispatındaki (2.2.4) eşitliğinin elde edilişi geçerli olduğundan (2.2.4) eşitliği, (2.2.3) eşitliğine indirgeneceğine dikkat ediniz. Benzer şekilde, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken, (2.2.10) eşitliği de (2.2.9) eşitliğine indirgenir. Buna ek olarak, (2.2.3) ve (2.2.9) eşitlikleri, sırasıyla $AB$ veya $BC$ kenarları dikey iken, (2.2.4) eşitliğinin $m \to \infty$ ve (2.2.10) eşitliğinin $m_1 \to \infty$ iken limitleridir. Bunu görmek için, önce (2.2.4) ve (2.2.9) eşitliklerinin (2.2.8) eşitliğinden elde edildiğine; $m \to \infty$ iken $\rho(m) \to 1$ ve $m_1 \to c/b$ ((2.2.6) eşitliğine bakınız); $m_1 \to \infty$ iken $\rho(m_1) \to 1$ ve $m \to -c/b$ ((2.2.11) eşitliğine bakınız) olduğuna dikkat ediniz. Böylece (2.2.8) eşitliği, $m \to \infty$ iken (2.2.3) eşitliğine; $m_1 \to \infty$ iken de (2.2.9) eşitliğine indirgenir. □

**Uyarı 2.2.2** Eğer $A$ açısı dik olan $ABC$ üçgeni saat yönünde harflendirilirse $b$ ve $c$ nin rolleri değişir. Böylece (2.2.4) eşitliği $(\max\{1, |m|\})a = \max\{|bm - c|, |cm + b|\}$

şekline, (2.2.10) eşitliği de $a \diagup \max\{1, |m_1|\} = (b^2 + c^2) \diagup \max\{|bm_1 + c|, |cm_1 - b|\}$ şekline gelir. □

Aşağıda, Teorem 2.2.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.2.6'nın karşıtının doğru olmadığını -yani, maksimum düzleminde (2.2.4) ya da (2.2.10) eşitliğini sağlayan fakat hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgenlerinin var olduğunu- gösteren bir örnek verilmiştir. Verilen örnek, içinde üç farklı maksimum çemberi bulunan Şekil 2.2.3'e işaret etmektedir. Bilindiği gibi, $A$ merkezli ve $r$ yarıçaplı maksimum çemberi, $A$ noktasına maksimum uzaklığı $r$ olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri, kenarları eksenlere paralel ve uzunlukları $2r$ olan $A$ merkezli karedir. Ayrıca, Öklidyen çemberlerde olduğu gibi, $A$ merkezi ve bu merkeze $r$ maksimum uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

**Örnek 2.2.1** $ABC$, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ve $A$ açısı geniş olan, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş bir üçgen ve $d_M(B,C) = a$, $d_M(A,C) = b$, $d_M(A,B) = c$ olsun (Bkz: Şekil 2.2.3). $C_1$ ve $C_2$, merkezleri sırasıyla $B$ ve $C$ noktaları olan ve aynı $a$ yarıçap uzunluğuna sahip iki maksimum çemberini; $m$ de $AB$ doğrusunun eğimini göstersin. $C_1$ üzerinde, $AB \perp AC'$ olacak şekilde bir $C'$ noktası Şekil 2.2.3'teki gibi alınsın.




Şekil 2.2.3

$C'$ noktası, hem $C_1$ maksimum çemberi hem de $A$ merkezli $b$ yarıçaplı maksimum çemberi ($C_3$ çemberi) üzerinde olduğu için $d_M(B,C') = a$ ve $d_M(A,C') = b$ dir. O halde, $ABC'$ dik üçgenine Teorem 2.2.4 uygulanırsa, hiç dik açısı olmayan $ABC$

üçgeni için de geçerli olan

$$(\max\{1,|m|\})a = \max\{|bm+c|\,,|cm-b|\}$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 2.2.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.2.6'nın karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur. □

Aşağıdaki teorem, maksimum düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul ifade eder. Yeterli koşul, aslında Pisagor teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

**Teorem 2.2.7** *$ABC$, maksimum düzleminde kenar uzunlukları $d_M(B,C) = a$, $d_M(A,C) = b$ ve $d_M(A,B) = c$ olan bir üçgen olsun; $m_1$, $m$ ve $m'$ de sırasıyla $BC$, $AB$ ve $AC$ kenarlarının eğimlerini göstersin. Buna göre, $A$ açısının dik olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(x) = (1+x^2)\diagup(\max\{1,|x|\})^2$ olmak üzere,*

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)(b^2+c^2) = \rho(m')(b^2+c^2) \tag{2.2.12}$$

*eşitliğinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Eğer (2.2.12) eşitliği geçerli ise, $\rho(m) = \rho(m')$ ve

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)b^2 + \rho(m)c^2 = \rho(m')b^2 + \rho(m')c^2$$

dir. O halde,

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)b^2 + \rho(m')c^2 \tag{2.2.13}$$

dir. (2.2.1) eşitliğini (2.2.13) eşitliğine uygulayarak $\mathbf{a} = d_E(B,C)$, $\mathbf{b} = d_E(A,C)$ ve $\mathbf{c} = d_E(A,B)$ olmak üzere $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ elde edilir. Pisagor teoreminin karşıtı doğru olduğu için $A$ açısı diktir.

Şimdi, tersine $A$ açısının dik açı olduğunu kabul edelim. O halde $m' = -1/m$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.2.2'den $\rho(m) = \rho(m')$ dir. Bu durumda (2.2.12) eşitliği, Teorem 2.2.4'ün ispatındaki (2.2.7) eşitliğinin doğrudan bir sonucudur. ■

## 2.3 Pisagor Teoreminin Çin Dama Benzerleri

Pisagor teoreminin bir Çin dama benzeri, Çin dama düzleminde $A$ açısı dik olan bir $ABC$ üçgeni için $d_C(B,C) = a$, $d_C(A,C) = b$ ve $d_C(A,B) = c$ uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade etmelidir. Pisagor teoreminin iki farklı Çin dama benzeri [27]'de verilmiştir. Ancak verilen benzerler $a$, $b$ ve $c$ Çin dama uzunluklarına ek olarak iki parametre içermektedir. Burada, dik üçgenin Çin dama kenar uzunluklarına ek olarak yalnızca bir parametre içeren iki karşılık verilmiştir (Bkz: [16]). Böylece, daha önce verilen benzerler kullanışlı ve sade hale getirilmiştir.

Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve Çin dama uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki yardımcı teorem, tartışmamız içinde önemli bir role sahiptir.

**Yardımcı Teorem 2.3.1** *$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $m$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m) = (1+m^2)^{1/2} \big/ (\max\{1,|m|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\})$ olmak üzere,*

$$d_E(A,B) = \rho(m) d_C(A,B) \tag{2.3.1}$$

*dir. $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A,B) = d_C(A,B)$ dir.*

**İspat:** $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ kartezyen koordinat düzleminde iki nokta olsun. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve $m = (y_2 - y_1) \big/ (x_2 - x_1)$ dir. Buradan kolayca $d_E(A,B) = |x_2 - x_1| \, (1+m^2)^{1/2}$ ve $d_C(A,B) = |x_2 - x_1| \, (\max\{1,|m|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\})$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa (2.3.1) eşitliği bulunur. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A,B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_C(A,B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A,B) = d_C(A,B)$ elde edilir. ∎

**Yardımcı Teorem 2.3.2** *Eğer $m$ sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = -1/m$ ise,*

$$\rho(m) = \rho(m') \tag{2.3.2}$$

*dir.*

**İspat:** Eğer $m \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $m' = (-1/m) \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\rho(m') &= \left(1+(m')^2\right)^{1/2} \big/ (\max\{1,|m'|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|m'|\}) \\
&= \left(1+(-1/m)^2\right)^{1/2} \big/ (\max\{1,|-1/m|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|-1/m|\}) \\
&= \left(\frac{1+m^2}{m^2}\right)^{1/2} \Big/ \left(\frac{\max\{1,|m|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\}}{|m|}\right) \\
&= \left(1+m^2\right)^{1/2} \big/ (\max\{1,|m|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\}) = \rho(m)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve -daha önce tanımlandığı gibi- bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B,C) = \mathbf{a}$, $d_E(A,C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, Çin dama uzunlukları da $d_C(B,C) = a$, $d_C(A,C) = b$ ve $d_C(A,B) = c$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, genelde $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ Öklidyen uzunlukları ile $b$ ve $c$ Çin dama uzunlukları birbirinden farklı olduğu halde bunların karşılıklı oranlarının eşit olduğunu ifade eder:

**Yardımcı Teorem 2.3.3** *$ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgen ve $d_E(A,C) = \mathbf{b}$, $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, $d_C(A,C) = b$ ve $d_C(A,B) = c$ ise, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir.*

**İspat:** Eğer $ABC$ üçgeninin $AB$ ve $AC$ kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $\mathbf{b} = b$ ve $\mathbf{c} = c$ olacağı açıktır. Böylece bu iki oran birbirine eşittir. $ABC$ üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da koordinat eksenlerine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer $AB$ doğrusunun eğimi $m$ ise, $AC$ doğrusunun eğimi $-1/m$ dir. Burada $m' = -1/m$ denirse, (2.3.1) eşitliğinden, $\mathbf{c} = \rho(m)c$ ve $\mathbf{b} = \rho(m')b$ eşitlikleri elde edilir. Fakat bu durumda (2.3.2) eşitliği, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ eşitliğini gerektirir. ■

Bu gerçekler yardımıyla aşağıda, verilen bir dik üçgenin Çin dama kenar uzunlukları arasında, bu uzunluklar hariç yalnızca bir parametreye -daha açık olarak, dik kenarlardan birinin eğimine ya da hipotenüsün eğimine- bağlı bir bağıntı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte eğer dik kenarlardan biri ya da hipotenüs koordinat eksenlerinden birine paralel ise, dik üçgenin Çin dama kenar uzunlukları arasında bu uzunluklardan başka hiçbir parametreye bağlı olmayan bir bağıntı söz konusudur.

**Teorem 2.3.4** (*i*) *ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,*

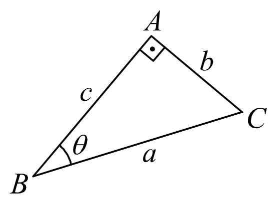
$$a = \max\{b, c\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{b, c\}, \tag{2.3.3}$$

(*ii*) *eğer ABC üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de* (*yani BC kenarı*) *dikey değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi m olmak üzere,*

$$(\max\{1, |m|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{1, |m|\})a = \max\{|bm + c|, |cm - b|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|bm + c|, |cm - b|\} \tag{2.3.4}$$

dir.

**İspat:** (*i*) Bu eşitlik Çin dama uzaklık tanımından aşikardır.
(*ii*) $CBA$ açısı $\theta$ ile gösterilsin. $ABC$ üçgeninin saat yönünün tersine harflendirilmesiyle $\theta$ nın pozitif ve dar olacağına dikkat ediniz (Bkz: Şekil 2.3.1).




Şekil 2.3.1

$AB$ kenarının eğimi $m$, $BC$ kenarının eğimi de $m_1$ olsun. Buna göre, $AC$ kenarının eğimi $-1/m = m'$ olur ve $\tan\theta = (m - m_1)\diagup(1 + mm_1)$ eşitliği elde edilir (Bu son eşitlik, iki açının farklarının tanjantı formülünden kolayca elde edilir). Ayrıca Yardımcı Teorem 2.3.3 gereğince $\tan\theta = \mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir. O halde,

$$b/c = (m - m_1)\diagup(1 + mm_1) \tag{2.3.5}$$

dir. Bu eşitlikten $m_1$ çekilirse, $m \neq -c/b$ olmak üzere,

$$m_1 = (cm - b)\diagup(bm + c) \tag{2.3.6}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (2.3.1) eşitliği, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ eşitliğine uygulanır ve Yardımcı Teorem 2.3.2 kullanılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a^2 = [\rho(m)]^2 (b^2 + c^2) \tag{2.3.7}$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlikten de kolayca

$$\begin{aligned} &(\max\{1, |m|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{1, |m|\})^2 a^2 = \\ &[(\max\{1, |m_1|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{1, |m_1|\})^2 / (1 + m_1^2)](1 + m^2)(b^2 + c^2) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

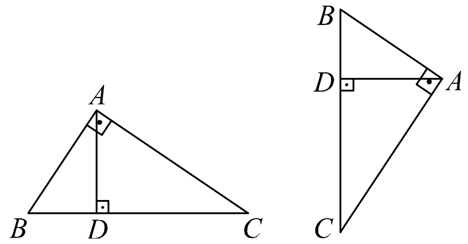
eşitliği elde edilir. (2.3.6) eşitliğindeki $m_1$, (2.3.8) eşitliğinde yerine konursa bu denklemin sağ tarafı $(\max\{|bm + c|, |cm - b|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|bm + c|, |cm - b|\})^2$ şeklinde kısaltılabilir. Son olarak, her iki tarafın kare kökü alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.3.4) eşitliği elde edilir. Eğer $AC$ kenarının eğimi $m$ olarak alınırsa, $AC$ kenarının eğimi $m' = -1/m$ olur ve ispatımız (2.3.4) eşitliğinde $m$ yerine $m'$ konularak elde edilen (2.3.4′) eşitliğini verir. Fakat (2.3.4′) eşitliği $|m|$ ile çarpılırsa (2.3.4) eşitliği elde edilir. Böylece, $m$ dik kenarlardan hangisinin eğimi olursa olsun, (2.3.4) eşitliği doğrudur. ■

**Sonuç 2.3.5** *Eğer $BC$ kenarı, yani $ABC$ üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,*

$$a = (b^2 + c^2) / (\max\{b, c\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{b, c\}) \tag{2.3.9}$$

*dir.*

**İspat:** $ABC$ üçgeninin $BC$ kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun (Bkz: Şekil 2.3.2). Bu durumda (2.3.9) eşitliği, (2.3.7) eşitliğinin bir sonucu olarak elde edilir. Şöyle ki, eğer $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ise, $m_1 = 0$ ve böylece $\rho(m_1) = 1$; eğer $BC$ kenarı $y$-eksenine paralel ise, $m_1 \to \infty$ ve böylece $\rho(m_1) \to 1$ dir. Her iki durum için de (2.3.7) eşitliği, $AB$ kenarının eğimi $m$ olmak üzere, $a^2 = [\rho(m)]^2 (b^2 + c^2)$ haline gelir.




Şekil 2.3.2

Benzer üçgenler ve Yardımcı Teorem 2.3.3'ten, $BC$ yatay iken $|m| = |AD/BD| = |AC/AB| = b/c$; $BC$ dikey iken $|m| = c/b$ elde edilir. Böylece, eğer $BC$ yatay ise, $a^2 = [(1 + (b/c)^2)^{1/2} \diagup (\max\{1, b/c\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{1, b/c\})]^2 (b^2 + c^2)$; eğer $BC$ dikey ise, $a^2 = [(1 + (c/b)^2)^{1/2} \diagup (\max\{1, b/c\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{1, b/c\})]^2 (b^2 + c^2)$ bulunur. Bu iki eşitlik de, gerekli işlemler yapılarak (2.3.9) eşitliğine denk olan $a^2 = (b^2 + c^2)^2 \diagup (\max\{b, c\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{b, c\})^2$ eşitliğine indirgenir. ■

Bir sonraki sonuç da Pisagor teoreminin bir Çin dama benzeridir ve dik kenarların birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içerir.

**Sonuç 2.3.6** *Eğer $ABC$ üçgeninin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, $BC$ kenarının, yani hipotenüsün eğimi $m_1$ olmak üzere,*

$$a \diagup (\max\{1, |m_1|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{1, |m_1|\}) = (b^2 + c^2) \diagup$$
$$(\max\{|bm_1 - c|, |cm_1 + b|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|bm_1 - c|, |cm_1 + b|\}) \quad (2.3.10)$$

dir.

**İspat:** $AB$ kenarının eğimi $m$ ise, (2.3.5) eşitliğinden

$$m = (b + cm_1) \diagup (c - bm_1) \quad (2.3.11)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $m$ nin eşitini, (2.3.4) eşitliğinde $m$ yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.3.10) eşitliği bulunur. ■

**Uyarı 2.3.1** $AB$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m = 0$ iken, Teorem 2.3.4'ün ispatındaki (2.3.4) eşitliğinin elde edilişi geçerli olduğundan (2.3.4) eşitliği, (2.3.3) eşitliğine indirgeneceğine dikkat ediniz. Benzer şekilde, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken, (2.3.10) eşitliği de (2.3.9) eşitliğine indirgenir. Buna ek olarak, (2.3.3) ve (2.3.9) eşitlikleri, sırasıyla $AB$ veya $BC$ kenarları dikey iken, (2.3.4) eşitliğinin $m \to \infty$ ve (2.3.10) eşitliğinin $m_1 \to \infty$ iken limitleridir. Bunu görmek için, önce (2.3.4) ve (2.3.9) eşitliklerinin (2.3.8) eşitliğinden elde edildiğine; $m \to \infty$ iken $\rho(m) \to 1$ ve $m_1 \to c/b$ ((2.3.6) eşitliğine bakınız); $m_1 \to \infty$ iken $\rho(m_1) \to 1$ ve $m \to -c/b$ ((2.3.11) eşitliğine bakınız) olduğuna dikkat ediniz. Böylece (2.3.8) eşitliği, $m \to \infty$ iken (2.3.3) eşitliğine; $m_1 \to \infty$ iken de (2.3.9) eşitliğine indirgenir. $\square$

**Uyarı 2.3.2** Eğer $A$ açısı dik olan $ABC$ üçgeni saat yönünde harflendirilirse $b$ ve $c$ nin rolleri değişir. Böylece (2.3.4) eşitliği

$$\begin{aligned}(\max\{1,|m|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\})a = {} & \max\{|bm-c|\,,|cm+b|\}+\\ & (\sqrt{2}-1)\min\{|bm-c|\,,|cm+b|\}\end{aligned}$$

şekline, (2.3.10) eşitliği de

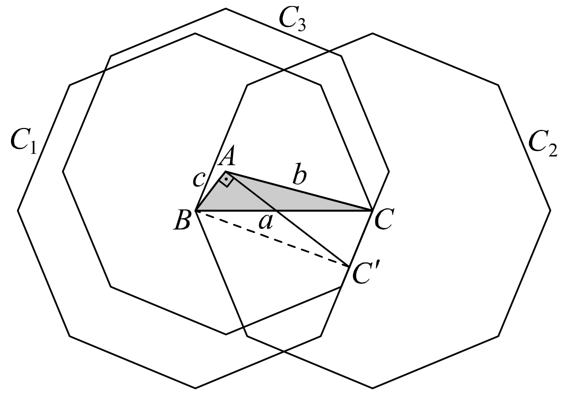
$$\begin{aligned}a\diagup(\max\{1,|m_1|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{1,|m_1|\}) = {} & (b^2+c^2)\diagup\\ & (\max\{|bm_1+c|\,,|cm_1-b|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|bm_1+c|\,,|cm_1-b|\})\end{aligned}$$

şekline gelir. $\square$

Aşağıda, Teorem 2.3.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.3.6'nın karşıtının doğru olmadığını -yani, Çin dama düzleminde (2.3.4) ya da (2.3.10) eşitliğini sağlayan fakat hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgenlerinin var olduğunu- gösteren bir örnek verilmiştir. Verilen örnek, içinde üç farklı Çin dama çemberi bulunan Şekil 2.3.3'e işaret etmektedir. Bilindiği gibi, $A$ merkezli ve $r$ yarıçaplı Çin dama çemberi, $A$ noktasına Çin dama uzaklığı $r$ olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri, kenarlarının eğimi $\pm(\sqrt{2}\pm 1)$ ve merkezden geçen köşegenlerinin uzunluğu $2r$ olan $A$ merkezli (Öklidyen) düzgün sekizgendir. Ayrıca, Öklidyen çemberlerde olduğu gibi, $A$ merkezi ve bu merkeze $r$ Çin dama uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.

**Örnek 2.3.1** $ABC$, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ve $A$ açısı geniş olan, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş bir üçgen ve $d_C(B,C) = a$, $d_C(A,C) = b$,

$d_C(A,B) = c$ olsun (Bkz: Şekil 2.3.3). $C_1$ ve $C_2$, merkezleri sırasıyla $B$ ve $C$ noktaları olan ve aynı $a$ yarıçap uzunluğuna sahip iki Çin dama çemberini; $m$ de $AB$ doğrusunun eğimini göstersin. $C_1$ üzerinde, $AB \perp AC'$ olacak şekilde bir $C'$ noktası Şekil 2.3.3'teki gibi alınsın.




Şekil 2.3.3

$C'$ noktası, hem $C_1$ Çin dama çemberi hem de $A$ merkezli $b$ yarıçaplı Çin dama çemberi ($C_3$ çemberi) üzerinde olduğu için $d_C(B,C') = a$ ve $d_C(A,C') = b$ dir. O halde, $ABC'$ dik üçgenine Teorem 2.3.4 uygulanırsa, hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgeni için de geçerli olan

$$(\max\{1,|m|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\})a = \max\{|bm+c|, |cm-b|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|bm+c|, |cm-b|\}$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 2.3.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.3.6'nın karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur. □

Aşağıdaki teorem, Çin dama düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul ifade eder. Yeterli koşul, aslında Pisagor teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

**Teorem 2.3.7** *$ABC$, Çin dama düzleminde kenar uzunlukları $d_C(B,C) = a$, $d_C(A,C) = b$ ve $d_C(A,B) = c$ olan bir üçgen olsun; $m_1$, $m$ ve $m'$ de sırasıyla $BC$, $AB$ ve $AC$ kenarlarının eğimlerini göstersin. Buna göre, $A$ açısının dik olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(x) = (1+x^2)/(\max\{1,|x|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{1,|x|\})^2$*

*olmak üzere,*

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)(b^2 + c^2) = \rho(m')(b^2 + c^2) \tag{2.3.12}$$

*eşitliğinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Eğer (2.3.12) eşitliği geçerli ise, $\rho(m) = \rho(m')$ ve

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)b^2 + \rho(m)c^2 = \rho(m')b^2 + \rho(m')c^2$$

dir. O halde,

$$\rho(m_1)a^2 = \rho(m)b^2 + \rho(m')c^2$$

dir. (2.3.1) eşitliğini (2.3.13) eşitliğine uygulayarak $\mathbf{a} = d_E(B, C)$, $\mathbf{b} = d_E(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_E(A, B)$ olmak üzere $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ elde edilir. Pisagor teoreminin karşıtı doğru olduğu için $A$ açısı diktir.

Şimdi, tersine $A$ açısının dik açı olduğunu kabul edelim. O halde $m' = -1/m$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.3.2'den $\rho(m) = \rho(m')$ dir. Bu durumda (2.3.12) eşitliği, Teorem 2.3.4'ün ispatındaki (2.3.7) eşitliğinin doğrudan bir sonucudur. ■

## 2.4 Pisagor Teoreminin Alfa Benzerleri

Pisagor teoreminin bir alfa benzeri, alfa düzleminde $A$ açısı dik olan bir $ABC$ üçgeni için $d_\alpha(B,C) = a$, $d_\alpha(A,C) = b$ ve $d_\alpha(A,B) = c$ uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade etmelidir. Pisagor teoreminin iki farklı alfa benzeri [24]'te verilmiştir. Ancak verilen benzerler $a$, $b$ ve $c$ alfa uzunluklarına ek olarak iki parametre içermektedir. Bu kısımda, dik üçgenin alfa kenar uzunluklarına ek olarak yalnızca bir parametre içeren iki karşılık verilmiştir (Bkz: [20]). Böylece, daha önce verilen benzerler kullanışlı ve sade hale getirilmiştir. Burada şunu belirtmekte fayda vardır: $\alpha$ genel olarak bir parametredir; ancak $\alpha$-düzlemi içinde, $\alpha$ veya sadece $\alpha$ ya bağlı ifadeler parametre değildir. Çünkü, $\alpha$ belirlendiğinde bu ifadeler yalnızca bir reel sayı olacaktır. Konu içinde kısalığı sağlamak için böyle bir ifade olan $(\sec\alpha - \tan\alpha)$ ifadesi yerine $\lambda(\alpha)$ ifadesi kullanılmıştır.

Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve alfa uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren ve bu bağıntının bir özelliğini belirten aşağıdaki iki yardımcı teorem, tartışmamız içinde önemli bir role sahiptir.

**Yardımcı Teorem 2.4.1** *$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $m$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m) = (1+m^2)^{1/2} \big/ (\max\{1,|m|\} + \lambda(\alpha)\min\{1,|m|\})$ olmak üzere,*

$$d_E(A,B) = \rho(m)d_\alpha(A,B) \tag{2.4.1}$$

*dir. $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A,B) = d_\alpha(A,B)$ dir.*

**İspat:** $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ kartezyen koordinat düzleminde iki nokta olsun. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve $m = (y_2 - y_1)\big/(x_2 - x_1)$ dir. Buradan kolayca $d_E(A,B) = |x_2 - x_1|\,(1+m^2)^{1/2}$ ve $d_\alpha(A,B) = |x_2 - x_1|\,(\max\{1,|m|\} + \lambda(\alpha)\min\{1,|m|\})$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa (2.4.1) eşitliği bulunur. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A,B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_\alpha(A,B) = |y_2 - y_1|$ olur. Böylece $d_E(A,B) = d_\alpha(A,B)$ elde edilir. ■

**Yardımcı Teorem 2.4.2** *Eğer $m$ sıfırdan farklı bir reel sayı ve $m' = -1/m$ ise,*

$$\rho(m) = \rho(m') \tag{2.4.2}$$

*dir.*

**İspat:** Eğer $m \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $m' = (-1/m) \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\rho(m') &= \left(1 + (m')^2\right)^{1/2} \diagup (\max\{1, |m'|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m'|\}) \\
&= \left(1 + (-1/m)^2\right)^{1/2} \diagup (\max\{1, |-1/m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |-1/m|\}) \\
&= \left(\frac{1 + m^2}{m^2}\right)^{1/2} \diagup \left(\frac{\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m|\}}{|m|}\right) \\
&= \left(1 + m^2\right)^{1/2} \diagup (\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m|\}) = \rho(m)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve -daha önce tanımlandığı gibi- bu üçgenin kenarlarının Öklidyen uzunlukları $d_E(B, C) = \mathbf{a}$, $d_E(A, C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A, B) = \mathbf{c}$, alfa uzunlukları da $d_\alpha(B, C) = a$, $d_\alpha(A, C) = b$ ve $d_\alpha(A, B) = c$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, genelde $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ Öklidyen uzunlukları ile $b$ ve $c$ alfa uzunlukları birbirinden farklı olduğu halde bunların karşılıklı oranlarının eşit olduğunu gösterir.

**Yardımcı Teorem 2.4.3** *$ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgen ve $d_E(A, C) = \mathbf{b}$, $d_E(A, B) = \mathbf{c}$, $d_\alpha(A, C) = b$ ve $d_\alpha(A, B) = c$ ise, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir.*

**İspat:** Eğer $ABC$ üçgeninin $AB$ ve $CD$ kenarları koordinat eksenlerine paralel ise, $\mathbf{b} = b$ ve $\mathbf{c} = c$ olacağı açıktır. Böylece bu iki oran birbirine eşittir. $ABC$ üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da koordinat eksenlerine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer $AB$ doğrusunun eğimi $m$ ise, $AC$ doğrusunun eğimi $-1/m$ dir.

Burada $m' = -1/m$ denirse, (2.4.1) eşitliğinden, $\mathbf{c} = \rho(m)c$ ve $\mathbf{b} = \rho(m')b$ eşitlikleri elde edilir. Fakat bu durumda (2.4.2) eşitliği, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ eşitliğini gerektirir. ■

Bu gerçekler yardımıyla aşağıda, verilen bir dik üçgenin alfa kenar uzunlukları arasında, bu uzunluklar hariç yalnızca bir parametreye -daha açık olarak, dik kenarlardan birinin eğimine ya da hipotenüsün eğimine- bağlı bir bağıntı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte, eğer dik kenarlardan biri ya da hipotenüs koordinat eksenlerinden birine paralel ise, dik üçgenin alfa kenar uzunlukları arasında bu uzunluklardan başka hiçbir parametreye bağlı olmayan bir bağıntı söz konusudur.

**Teorem 2.4.4** $(i)$ *$ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,*

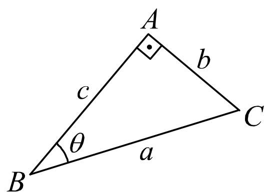
$$a = \max\{b, c\} + \lambda(\alpha) \min\{b, c\}, \tag{2.4.3}$$

$(ii)$ *eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü de (yani $BC$ kenarı) dikey değil ise, dik kenarlardan birinin eğimi $m$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned}(\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m|\})a = \max\{|bm + c|, |cm - b|\} + \\ \lambda(\alpha) \min\{|bm + c|, |cm - b|\}.\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

dir.

**İspat:** $(i)$ Bu eşitlik alfa uzaklık tanımından aşikardır.
$(ii)$ $CBA$ açısı $\theta$ ile gösterilsin. $ABC$ üçgeninin saat yönünün tersine harflendirilmesiyle $\theta$ nın pozitif ve dar olacağına dikkat ediniz (Bkz: Şekil 2.4.1).




Şekil 2.4.1

$AB$ kenarının eğimi $m$, $BC$ kenarının eğimi de $m_1$ olsun. Buna göre, $AC$ kenarının eğimi $-1/m = m'$ olur ve $\tan\theta = (m - m_1)/(1 + mm_1)$ eşitliği elde edilir (Bu son eşitlik, iki açının farklarının tanjantı formülünden kolayca elde edilir). Ayrıca Yardımcı Teorem 2.4.3 gereğince $\tan\theta = \mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir. O halde,

$$b/c = (m - m_1)\diagup(1 + mm_1) \tag{2.4.5}$$

dir. Bu eşitlikten $m_1$ çekilirse, $m \neq -c/b$ olmak üzere,

$$m_1 = (cm - b)\diagup(bm + c) \tag{2.4.6}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (2.4.1) eşitliği, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ eşitliğine uygulanır ve Yardımcı Teorem 2.4.2 kullanılırsa

$$[\rho(m_1)]^2 a^2 = [\rho(m)]^2 (b^2 + c^2) \tag{2.4.7}$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlikten de kolayca

$$\begin{gathered}(\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha)\min\{1, |m|\})^2 a^2 = \\ [(\max\{1, |m_1|\} + \lambda(\alpha)\min\{1, |m_1|\})^2 \diagup (1 + m_1^2)](1 + m^2)(b^2 + c^2)\end{gathered} \tag{2.4.8}$$

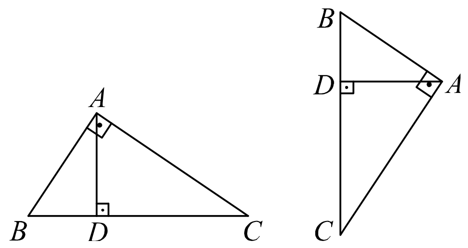
eşitliği elde edilir. (2.4.6) eşitliğindeki $m_1$, (2.4.8) eşitliğinde yerine konursa bu denklemin sağ tarafı $(\max\{|bm + c|, |cm - b|\} + \lambda(\alpha)\min\{|bm + c|, |cm - b|\})^2$ şeklinde kısaltılabilir. Son olarak, her iki tarafın kare kökü alınıp gerekli sadeleştirme- ler yapılırsa (2.4.4) eşitliği elde edilir. Eğer $AC$ kenarının eğimi $m$ olarak alınırsa, $AC$ kenarının eğimi $m' = -1/m$ olur ve ispatımız (2.4.4) eşitliğinde $m$ yerine $m'$ konularak elde edilen (2.4.4′) eşitliğini verir. Fakat (2.4.4′) eşitliği $|m|$ ile çarpılırsa (2.4.4) eşitliği elde edilir. Böylece, $m$ dik kenarlardan hangisinin eğimi olursa olsun, (2.4.4) eşitliği doğrudur. ■

**Sonuç 2.4.5** *Eğer $BC$ kenarı, yani $ABC$ üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,*

$$a = (b^2 + c^2)\diagup(\max\{b, c\} + \lambda(\alpha)\min\{b, c\}) \tag{2.4.9}$$

*dir.*

**İspat:** $ABC$ üçgeninin $BC$ kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun (Bkz: Şekil 2.4.2). Bu durumda (2.4.9) eşitliği, (2.4.7) eşitliğinin bir sonucu olarak elde edilir. Şöyle ki, eğer $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ise, $m_1 = 0$ ve böylece $\rho(m_1) = 1$; eğer $BC$ kenarı $y$-eksenine paralel ise, $m_1 \to \infty$ ve böylece $\rho(m_1) \to 1$ dir. Her iki durum için de (2.4.7) eşitliği, $AB$ kenarının eğimi $m$ olmak üzere, $a^2 = [\rho(m)]^2(b^2 + c^2)$ haline gelir.




Şekil 2.4.2

Benzer üçgenler ve Yardımcı Teorem 2.4.3 ten, $BC$ yatay iken $|m| = |AD/BD| = |AC/AB| = b/c$; $BC$ dikey iken $|m| = c/b$ elde edilir. Böylece, eğer $BC$ yatay ise, $a^2 = [(1 + (b/c)^2)^{1/2} \diagup (\max\{1, b/c\} + \lambda(\alpha)\min\{1, b/c\})]^2(b^2 + c^2)$; eğer $BC$ dikey ise, $a^2 = [(1 + (c/b)^2)^{1/2} \diagup (\max\{1, b/c\} + \lambda(\alpha)\min\{1, b/c\})]^2(b^2 + c^2)$ bulunur. Bu iki eşitlik de, gerekli işlemler yapılarak (2.4.9) eşitliğine denk olan $a^2 = (b^2 + c^2)^2 \diagup (\max\{b, c\} + \lambda(\alpha)\min\{b, c\})^2$ eşitliğine indirgenir. ■

Bir sonraki sonuç da Pisagor teoreminin bir alfa benzeridir ve dik kenarların birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içerir.

**Sonuç 2.4.6** *Eğer $ABC$ üçgeninin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, $BC$ kenarının, yani hipotenüsün eğimi $m_1$ olmak üzere,*

$$a \diagup (\max\{1, |m_1|\} + \lambda(\alpha)\min\{1, |m_1|\}) = (b^2 + c^2) \diagup$$
$$(\max\{|bm_1 - c|, |cm_1 + b|\} + \lambda(\alpha)\min\{|bm_1 - c|, |cm_1 + b|\}) \quad (2.4.10)$$

dir.

**İspat:** $AB$ kenarının eğimi $m$ ise, (2.4.5) eşitliğinden

$$m = (b + cm_1) \diagup (c - bm_1) \quad (2.4.11)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $m$ nin eşitini, (2.4.4) eşitliğinde $m$ yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.4.10) eşitliği bulunur. ■

**Uyarı 2.4.1** $AB$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m = 0$ iken, Teorem 2.4.4'ün ispatındaki (2.4.4) eşitliğinin elde edilişi geçerli olduğundan (2.4.4) eşitliği, (2.4.3) eşitliğine indirgeneceğine dikkat ediniz. Benzer şekilde, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $m_1 = 0$ iken, (2.4.10) eşitliği de (2.4.9) eşitliğine indirgenir. Buna ek olarak, (2.4.3) ve (2.4.9) eşitlikleri, sırasıyla $AB$ veya $BC$ kenarları dikey iken, (2.4.4) eşitliğinin $m \to \infty$ ve (2.4.10) eşitliğinin $m_1 \to \infty$ iken limitleridir. Bunu görmek için, önce (2.4.4) ve (2.4.9) eşitliklerinin (2.4.8) eşitliğinden elde edildiğine; $m \to \infty$ iken $\rho(m) \to 1$ ve $m_1 \to c/b$ ((2.4.6) eşitliğine bakınız); $m_1 \to \infty$ iken $\rho(m_1) \to 1$ ve $m \to -c/b$ ((2.4.11) eşitliğine bakınız) olduğuna dikkat ediniz. Böylece (2.4.8) eşitliği, $m \to \infty$ iken (2.4.3) eşitliğine; $m_1 \to \infty$ iken de (2.4.9) eşitliğine indirgenir. $\square$

**Uyarı 2.4.2** Eğer $A$ açısı dik olan $ABC$ üçgeni saat yönünde harflendirilirse $b$ ve $c$ nin rolleri değişir. Böylece (2.4.4) eşitliği

$$(\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m|\})a = \max\{|bm - c|, |cm + b|\} + \lambda(\alpha) \min\{|bm - c|, |cm + b|\}$$

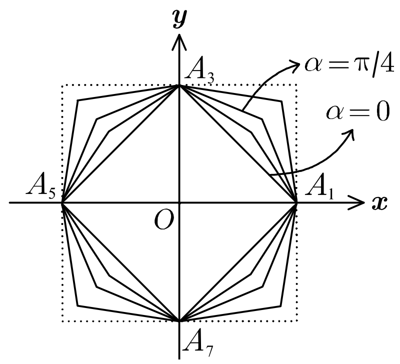
şekline, (2.4.10) eşitliği de

$$a \big/ (\max\{1, |m_1|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m_1|\}) = (b^2 + c^2) \big/ (\max\{|bm_1 + c|, |cm_1 - b|\} + \lambda(\alpha) \min\{|bm_1 + c|, |cm_1 - b|\})$$

şekline gelir. $\square$

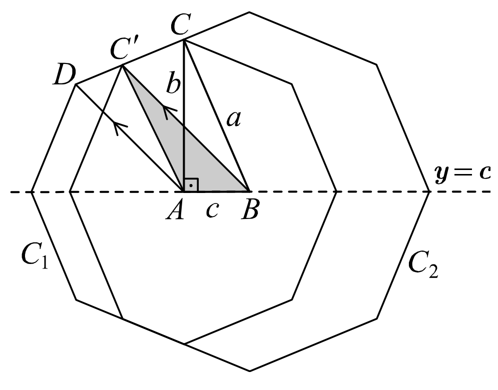
Aşağıda, Teorem 2.4.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.4.6'nın karşıtının doğru olmadığını -yani, alfa düzleminde (2.4.4) ya da (2.4.10) eşitliğini sağlayan fakat hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgenlerinin var olduğunu- gösteren bir örnek verilmiştir. Verilen örnek, içinde iki farklı alfa çemberi bulunan Şekil 2.4.3'e işaret etmektedir. Bilindiği gibi, $A$ merkezli ve $r$ yarıçaplı alfa çemberi, $A$ noktasına alfa uzaklığı $r$ olan tüm noktaların kümesidir. Bu noktaların geometrik yeri, eğer $A$ noktası orijin ve $r = 1$ ise, $k = [1 + \lambda(\alpha)]$ olmak üzere, köşeleri $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (1/k, 1/k)$, $A_3 = (0, 1)$, $A_4 = (-1/k, 1/k)$, $A_5 = (-1, 0)$, $A_6 = (-1/k, -1/k)$, $A_7 = (0, -1)$ ve

$A_8 = (1/k, -1/k)$ olan $O$ (ağırlık) merkezli bir sekizgendir (Bkz: Şekil 2.4.3). Ayrıca, Öklidyen çemberlerde olduğu gibi, $A$ merkezi ve bu merkeze $r$ alfa uzaklığındaki bir nokta bu çemberi tamamen belirler.




Şekil 2.4.3

**Örnek 2.4.1** $ABC$, $AB$ kenarı $x$-eksenine paralel ve $A$ açısı dik olan, köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş bir üçgen ve $b > c$ olmak üzere, $d_\alpha(B, C) = a$, $d_\alpha(A, C) = b$, $d_\alpha(A, B) = c$ olsun. $C_1$, merkezi $B$ noktası ve yarıçapı $b$ olan alfa çemberi olsun ve $CD$, bu çemberin, $DAB$ açısı geniş olacak şekilde bir kenarı olsun. Son olarak, $C'$, $CD$ doğrusu ile $B$ noktasından geçip $DA$ doğrusuna paralel olan doğrunun kesişim noktası olsun (Bkz: Şekil 2.4.4). Şimdi, merkezi $B$ noktası ve yarıçapı $d_\alpha(B, C')$ olan $C_2$ alfa çemberini çizersek, açıkça $C'$ noktası $C_2$ çemberinin bir köşesi olur ve $C$ noktası da $C_2$ çemberi üzerinde olur (Bkz: Şekil 2.4.4).




Şekil 2.4.4

Bu durumda $C$ noktası, hem $C_1$ hem de $C_2$ alfa çemberi üzerinde olduğu için $d_\alpha(B, C') = a$ ve $d_\alpha(A, C') = b$ dir. O halde, $ABC$ dik üçgenine Teorem 2.4.4

uygulanırsa, hiç dik açısı olmayan $ABC'$ üçgeni için de geçerli olan

$$(\max\{1,|m|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{1,|m|\})a=\max\{|bm+c|\,,|cm-b|\}+ \\ \lambda(\alpha)\min\{|bm+c|\,,|cm-b|\}$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 2.4.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 2.4.6'nın karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur. Burada Şekil 2.4.4'ün $\alpha=\pi/4$ durumuda çizildiğini, ancak verilen örneğin tüm durumları kapsadığını belirtelim. □

Aşağıdaki teorem, alfa düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul ifade eder. Yeterli koşul, aslında Pisagor teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

**Teorem 2.4.7** *$ABC$, alfa düzleminde kenar uzunlukları $d_\alpha(B,C)=a$, $d_\alpha(A,C)=b$ ve $d_\alpha(A,B)=c$ olan bir üçgen olsun; $m_1$, $m$ ve $m'$ de sırasıyla $BC$, $AB$ ve $AC$ kenarlarının eğimlerini göstersin. Buna göre, $A$ açısının dik olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(x)=(1+x^2)\big/(\max\{1,|x|\}+\lambda(\alpha)\min\{1,|x|\})^2$ olmak üzere,*

$$\rho(m_1)a^2=\rho(m)(b^2+c^2)=\rho(m')(b^2+c^2) \tag{2.4.12}$$

*eşitliğinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Eğer (2.4.12) eşitliği geçerli ise, $\rho(m)=\rho(m')$ ve

$$\rho(m_1)a^2=\rho(m)b^2+\rho(m)c^2=\rho(m')b^2+\rho(m')c^2$$

dir. O halde,

$$\rho(m_1)a^2=\rho(m)b^2+\rho(m')c^2 \tag{2.4.13}$$

dir. (2.4.1) eşitliğini (2.4.13) eşitliğine uygulayarak $\mathbf{a}=d_E(B,C)$, $\mathbf{b}=d_E(A,C)$ ve $\mathbf{c}=d_E(A,B)$ olmak üzere $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2$ elde edilir. Pisagor teoreminin karşıtı doğru olduğu için $A$ açısı diktir.

Şimdi, tersine $A$ açısının dik açı olduğunu kabul edelim. O halde $m'=-1/m$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.4.2'den $\rho(m)=\rho(m')$ dir. Bu durumda (2.4.12) eşitliği, Teorem 2.4.4'ün ispatındaki (2.4.7) eşitliğinin doğrudan bir sonucudur. ■

**Uyarı 2.4.3** Bilindiği gibi, $\alpha$ metriği, taksi ve Çin dama metriklerinin bir genellemesidir. Bu sebeple, bu kısımda verilen Pisagor teoreminin $\alpha$ benzerleri, Pisagor teoreminin taksi ve Çin dama benzerlerini kapsamaktadır. Şöyle ki, (2.4.3), (2.4.4), (2.4.9) ve (2.4.10) eşitlikleri $\alpha = 0$ için sırasıyla (2.1.3), (2.1.4), (2.1.9) ve (2.1.10) eşitliklerini; $\alpha = \pi/4$ için de sırasıyla (2.3.3), (2.3.4), (2.3.9) ve (2.3.10) eşitliklerini verir. Bununla beraber, her ne kadar $\lambda(\alpha)$ ifadesini sıfır yapan bir $\alpha$ sayısı bulunmasa da -veya $\lambda(\alpha) \in (0, 1]$ olsa da- $\lambda(\alpha) \in [0, 1]$ olacak şekilde $\lambda(\alpha)$ tanımlanabilir. Örneğin, doğrudan $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\lambda(\alpha) = \alpha$ şeklinde tanımlanabilir; veya $a$ ve $b$, $0 \leq b \leq a \neq 0$ özelliğindeki reel sayılar olmak üzere $\lambda(\alpha) = b/a$ olarak alınabilir. Bu durumda elde edilecek fonksiyon yine bir metrik belirtir (Bu metriğin daha genel hali için Altbölüm 4.1'e bakınız). Böylece $\lambda(\alpha) = 0$ durumu için (2.4.3), (2.4.4), (2.4.9) ve (2.4.10) eşitlikleri, sırasıyla (2.2.3), (2.2.4), (2.2.9) ve (2.2.10) eşitliklerini verir. $\square$

# BÖLÜM 3

# DÜZGÜN ÇOKGENLER

Taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerinde çokgen kavramı, Öklid düzleminde olduğu gibi tanımlanır: Doğru parçaları sadece uç noktalarında kesişmek, her uç noktası tam olarak iki doğru parçasına ait olmak ve ortak bir uç noktasına sahip iki doğru parçası doğrudaş olmamak üzere, aynı düzlemde bulunan üç ya da daha çok doğru parçasının birleşimine *çokgen* denir. Kenar sayısı $n$ ($n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$) olan çokgene kısaca $n$-gen denir. Bu bölümde, Öklid düzleminde bilinen düzgün çokgen kavramının taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerindeki benzerleri incelenmiştir. Bilindiği gibi, Öklid düzleminde kenar uzunlukları eşit olan çokgenlere *eşkenarlı çokgen*, iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere *eşaçılı çokgen*, hem eşkenarlı hem de eşaçılı olan çokgenlere de *düzgün çokgen* denir. Bu kavramların taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ benzerleri de benzer şekilde tanımlanabilir. Bununla birlikte, bahsi geçen metrik geometrilerde aynı açı ölçme fonksiyonunu kullandığımızdan eşaçılı çokgen kavramı yeni bir kavram değildir. Ancak bu metrik geometrilerin uzaklık fonksiyonları Öklid uzaklık fonksiyonundan farklı olduğu için, eşkenarlı çokgen kavramı, dolayısıyla da düzgün çokgen kavramı yeni kavramlardır. Konu içinde Öklid düzlemindeki düzgün çokgenlerin taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ düzgün olup olmadıkları belirlenmiş ve taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ düzgün çokgenlerinin varlığı araştırılmıştır.

Bölüm 2'ye benzer olarak, bu bölümde de altbölümler kendi içinde yeterli olabilsin diye bazı tekrarlardan kaçınılmamıştır. Böylece, her bir altbölüm birbirinden bağımsız olarak tek başına incelenebilir.

## 3.1 Taksi Düzgün Çokgenler

Çokgenler için verilen aşağıdaki tanımlar, Öklid düzlemindeki tanımlarda Öklid uzaklığı yerine taksi uzaklığı kullanılarak verilmiştir:

**Tanım 3.1.1** Düzlemde taksi kenar uzunlukları eşit olan çokgenlere *taksi eşkenarlı çokgen* denir.

**Tanım 3.1.2** Düzlemde iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere *taksi eşaçılı çokgen* denir.

**Tanım 3.1.3** Düzlemde hem taksi eşkenarlı hem de taksi eşaçılı çokgenlere *taksi düzgün çokgen* denir.

Düzlemdeki Öklidyen düzgün çokgenlerin taksi düzgünlüğünü incelemeden önce, iki yardımcı teorem ve bunları takibeden bir teorem ve bir sonuç verilmiştir. Bu teorem ve sonuç, Öklidyen düzgün çokgenleri incelerken sıkça kullanılacaktır. Koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve taksi uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan aşağıdaki özellik Yardımcı Teorem 2.1.1'den bilinmektedir:

$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $m$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m) = (1+m^2)^{1/2} \big/ (1+|m|)$ olmak üzere,

$$d_E(A,B) = \rho(m) d_T(A,B) \tag{3.1.1}$$

dir. $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A,B) = d_T(A,B)$ dir.

Aşağıdaki yardımcı teorem, vereceğimiz teoremin ispatını kısaltır.

**Yardımcı Teorem 3.1.1** *Eğer* $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ *ise,* $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ *olması için gerek ve yeter koşul,* $|m_1| = |m_2|$ *veya* $|m_1 m_2| = 1$ *olmasıdır.*

**İspat:** Kabul edelim ki, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ olsun. Eğer $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ ise, $(1 + m_1^2)(1 + |m_2|)^2 = (1 + m_2^2)(1 + |m_1|)^2$ olacağı açıktır. Buradan kolayca $(|m_1| - |m_2|)(|m_1 m_2| - 1) = 0$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ bulunur. Şimdi de karşıt olarak, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $|m_1| = |m_2|$ ise, $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ olacağı açıktır. Eğer $|m_1 m_2| = 1$ ise, $m_1 = 1/|m_2|$ veya $m_1 = -1/|m_2|$ dir. Her iki durumda da doğrudan bir hesapla $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ eşitliği kolayca görülebilir. ■

Aşağıdaki teorem, Öklid uzunlukları eşit olan iki doğru parçasının taksi uzunluklarının da eşit olması için gerek ve yeter koşulu verir:

**Teorem 3.1.2** *$A$, $B$, $C$ ve $D$, düzlemde dört nokta ve $A \neq B$, $C \neq D$, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olsun, $m_1$ ve $m_2$ de sırasıyla $AB$ ve $CD$ doğrularının eğimlerini göstersin.*

*$(i)$ Eğer $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olmasıdır.*

*$(ii)$ Eğer $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ ise, $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ olmasıdır.*

*$(iii)$ Eğer $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ ise, $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ olmasıdır.*

**İspat:** $(i)$ Bu ifade, (3.1.1) eşitliği ve Yardımcı Teorem 3.1.2'den açıktır.

$(ii)$ Eğer $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ ise, Yardımcı Teorem 2.1.1'den $d_E(A,B) = d_T(A,B)$ dir. O halde, $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(m_2) = 1$ olmasıdır. Açıkça, $\rho(m_2) = 1 \Leftrightarrow m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ dir.

$(iii)$ Eğer $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ ise, Yardımcı Teorem 2.1.1'den $d_E(C,D) = d_T(C,D)$ dir. O halde, $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(m_1) = 1$ olmasıdır. Açıkça, $\rho(m_1) = 1 \Leftrightarrow m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ dir. ■

Aşağıdaki sonuç, Öklidyen düzgün çokgenlerin taksi düzgünlüğünü incelemede çok kullanışlıdır:

**Sonuç 3.1.3** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olsun. O halde, $d_T(A,B) = d_T(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/2$ radyana eşit olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.*

**İspat:** $A$, $B$ ve $C$, düzlemde $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ özelliğinde doğrudaş olmayan üç nokta, $m_1$ ve $m_2$ de sırasıyla $AB$ ve $BC$ doğrularının eğimleri olsun. Buna göre, $m_1$ ve $m_2$ birbirinden farklıdır. O halde, Teorem 3.1.3 gereğince, $d_T(A,B) = d_T(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ve $m_1 = -m_2$ veya $|m_1 m_2| = 1$; $m_1 = 0$ ve $m_2 \to \infty$; veya $m_2 = 0$ ve $m_1 \to \infty$ olmasıdır. Ek olarak, $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olduğundan $A$ ve $C$ noktaları, $B$ noktasından geçip $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir. Bununla birlikte, aşağıdaki iyi bilinen üç özellik de geçerlidir:

$(i)$ $AB$ ve $BC$ doğrularının birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 m_2 = -1$; $m_1 = 0$ ve $m_2 \to \infty$; veya $m_2 = 0$ ve $m_1 \to \infty$ olmasıdır.
$(ii)$ $AB$ ve $BC$ doğrularının, $B$ noktasından geçip $x = 0$ ve $y = 0$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ ve $m_1 \neq m_2$ (yani, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ve $m_1 = -m_2$) olmasıdır.
$(iii)$ $AB$ ve $BC$ doğrularının, $B$ noktasından geçip $y = x$ ve $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 m_2 = 1$ ve $m_1 \neq m_2$; $m_1 = 0$ ve $m_2 \to \infty$; veya $m_2 = 0$ ve $m_1 \to \infty$ olmasıdır.

O halde, $d_T(A,B) = d_T(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/2$ radyana eşit olması veya $AB$ ve $BC$ doğrularının, $B$ noktasından geçip $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır. ■

**Uyarı 3.1.1** Dikkat edilirse Teorem 3.1.3, taksi geometrinin Öklidyen izometrilerine işaret eder. Daha açık olarak, ötelemelerin, bir nokta etrafında $\pi/2$, $\pi$ ve $3\pi/2$ radyanlık dönmelerin ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan doğrulara göre yansımaların taksi uzaklıkları değiştirmediğine işaret eder. Bölüm 4'te taksi izometrilerin yalnızca bu dönüşümlerden ibaret olduğunu göreceğiz (Ayrıca bkz: [54]). □

### 3.1.1 Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Taksi Düzgünlüğü

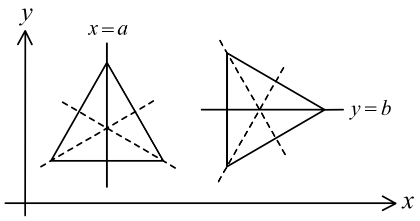
Her Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda taksi eşaçılı olduğundan, bir Öklidyen düzgün çokgenin, ancak ve ancak taksi eşkenarlı ise taksi düzgün olacağı aşikardır. Bu yüzden Öklidyen düzgün çokgenlerin taksi düzgünlüğünü incelemek için taksi eşkenarlı olup olmadığını belirlemek yeterlidir. Bunu yaparken yararlanacağımız kavramlar şöyledir:

Bilindiği gibi, her Öklidyen düzgün çokgenin köşelerinden geçen bir Öklidyen çember (*çevrel çember*) vardır ve her çemberin içine, köşeleri çemberin üzerinde olacak şekilde Öklidyen düzgün çokgen yerleştirilebilir. Bir Öklidyen düzgün çokgenin çevrel çemberinin merkezine bu Öklidyen düzgün çokgenin *merkez*i denir. Eğer bir Öklidyen düzgün çokgen bir $l$ doğrusuna göre simetrikse bu doğruya çokgenin *simetri ekseni* denir. Ek olarak, eğer bu simetri ekseni çokgenin bir köşesinden geçiyorsa bu simetri eksenine de *köşesel simetri ekseni* denir. Her simetri ekseninin, ait olduğu Öklidyen düzgün çokgenin merkezinden geçtiği iyi bilinen bir özelliktir.

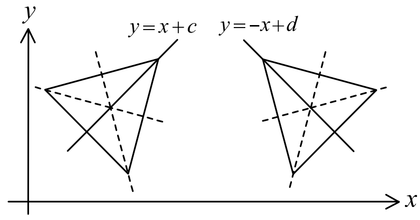
Aşağıdaki inceleme taksi düzgün olan ve olmayan Öklidyen düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda taksi düzgün olan Öklidyen düzgün çokgenlerin sadece kare ve özel bir düzgün sekizgenden ibaret olduğu görülmüştür.

**Önerme 3.1.4** *Hiçbir Öklidyen düzgün üçgen* (*eşkenar üçgen*) *taksi düzgün değildir.*

**İspat:** Bir Öklidyen düzgün üçgenin ardışık herhangi iki kenarının aynı Öklidyen uzunluğa sahip olduğu, ancak ardışık herhangi iki kenarı arasındaki açının ölçüsünün $\pi/2$ radyan olmadığı açıktır. O halde, Sonuç 3.1.4 gereğince, Öklidyen düzgün üçgenin taksi düzgün olması için, her ardışık iki kenarının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması gerekir. Bir Öklidyen düzgün üçgenin ardışık iki kenarının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olduğunu (veya simetri eksenlerinden birinin bu doğrulardan birine paralel olduğunu) kabul edelim. Şekil 3.1.1 ve Şekil 3.1.2 bu özellikteki tüm üçgenleri temsil eder. Her Öklidyen düzgün




Şekil 3.1.1

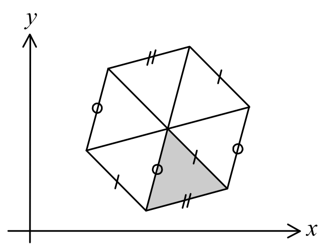



Şekil 3.1.2

üçgenin üç tane köşesel simetri ekseni vardır. Bu simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olduğunda diğer ikisininin bu doğrulardan hiçbirine paralel olmayacağı basit bir hesaplamayla gösterilebilir. O halde, Şekil 3.1.1 ve Şekil 3.1.2'deki üçgenler taksi düzgün değildir. Sonuç olarak, hiçbir Öklidyen düzgün üçgen taksi düzgün değildir. ■

**Sonuç 3.1.5** *Hiçbir Öklidyen düzgün altıgen taksi düzgün değildir.*

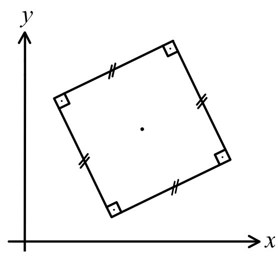
**İspat:** Her Öklidyen düzgün altıgenin, köşesel simetri ekseleriyle altı tane Öklidyen düzgün üçgene ayrılacağı açıktır. Teorem 3.1.3 gereğince, Öklidyen düzgün altıgenin ve Öklidyen düzgün üçgenlerin paralel olan kenarlarının taksi uzunlukları eşittir. Ancak, hiçbir Öklidyen düzgün üçgen taksi eşkenarlı olmadığından Öklidyen düzgün altıgen de taksi eşkenarlı değildir. O halde, hiçbir Öklidyen düzgün altıgen taksi düzgün değildir. ■




Şekil 3.1.3

**Önerme 3.1.6** *Her Öklidyen düzgün dörtgen (Öklidyen kare) taksi düzgündür.*

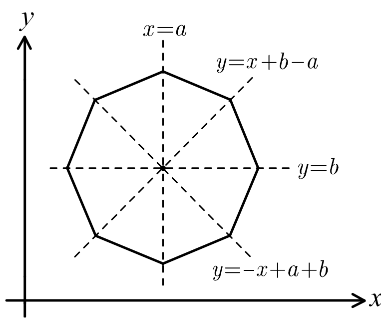
**İspat:** Öklidyen karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan (Bkz: Şekil 3.1.4), Sonuç 3.1.4 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı taksi uzunluğa sahiptir. O halde, her Öklidyen kare taksi düzgündür. ■




Şekil 3.1.4

**Önerme 3.1.7** *Köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her Öklidyen düzgün sekizgen taksi düzgündür.*

**İspat:** Her Öklidyen düzgün sekizgenin tam olarak dört tane köşesel simetri ekseni olduğu ve iki köşesel simetri ekseni arasındaki açının $\pi/4$ radyanın katı olduğu açıktır. Bir Öklidyen düzgün sekizgenin köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel ise, bu eksenle arasındaki açı $\pi/4$ radyanın katı olan doğrular yine $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olacağından, diğer köşesel simetri eksenleri de $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrulardan birine paraleldir (Bkz: Şekil 3.1.5). Bu durumda, Öklidyen düzgün sekizgenin herhangi ardışık iki kenarı $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir. Sonuç 3.1.4 gereğince herhangi ardışık iki kenar aynı taksi uzunluğa sahiptir. O halde, köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her Öklidyen düzgün sekizgen taksi düzgündür. ■




Şekil 3.1.5

**Teorem 3.1.8** *Önerme 3.1.7 ve Önerme 3.1.8'de belirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında hiçbir Öklidyen düzgün çokgen taksi düzgün değildir.*

**İspat:** İspatı Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genler ve Öklidyen düzgün $2n$-genler için ayrı ayrı ele alalım:

$(i)$ Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genler: Önerme 3.1.5'te $n = 2$ durumu ispatlandı. Şimdi, $n > 2$ durumunu göz önüne alalım. Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin köşesel simetri ekseni sayısının $(2n-1)$ olduğu açıktır ve $n > 2$ iken $(2n-1) \geq 5$. O halde, Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin en az bir köşesel simetri ekseni $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel değildir. Bu da, en az bir ardışık iki kenarın $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir doğruya göre simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin ardışık iki kenarı arasındaki açının ölçüsü de $\pi/2$ radyan değildir. Sonuç 3.1.4'ün karşıt tersi gereğince, bu ardışık iki kenarın taksi uzunlukları eşit değildir. O halde, hiçbir Öklidyen düzgün $(2n-1)$-gen taksi düzgün değildir.

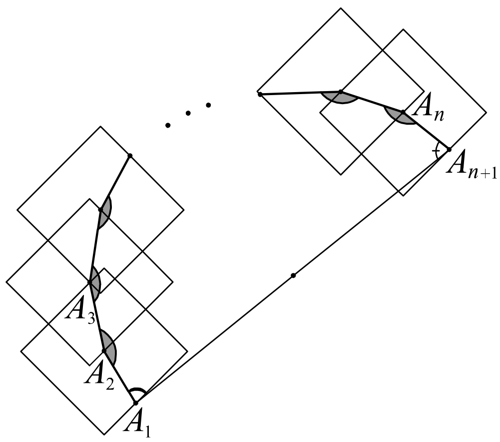
$(ii)$ Öklidyen düzgün $2n$-genler: Önerme 3.1.7'de $n = 2$ durumu, Sonuç 3.1.6'da da $n = 3$ durumu ispatlandı. Önerme 3.1.8'deki Öklidyen düzgün çokgenleri dışarda bırakmak için, $n = 4$ durumunda köşesel simetri eksenleri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir Öklidyen düzgün sekizgeni göz önüne alalım. Böyle bir Öklidyen sekizgenin taksi düzgün olmayacağı, Sonuç 3.1.4'ün karşıt tersi gereği açıktır. Son olarak $n > 4$ durumunu dikkate alalım: Açıkça, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin köşesel simetri ekseni sayısı $n$ dir. Buna göre, $n > 4$ olduğundan Öklidyen düzgün $2n$-genin en az bir köşesel simetri ekseni $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel değildir. Bu da, en az bir ardışık iki kenarın $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir doğruya göre simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca $n > 4$ olduğunda, Öklidyen düzgün $2n$-genin ardışık iki kenarı arasındaki açının ölçüsü de $\pi/2$ radyan değildir. Sonuç 3.1.4'ün karşıt tersi gereğince, bu ardışık iki kenarın taksi uzunlukları eşit değildir. O halde, $n > 4$ için hiçbir Öklidyen düzgün $2n$-gen taksi düzgün değildir. İspat tamamlanmıştır. $\blacksquare$

### 3.1.2 Taksi düzgün $2n$-genlerin Varlığı ve Öklidyen Düzgünlüğü

Buraya kadar hangi Öklidyen düzgün çokgenlerin aynı zamanda taksi düzgün, hangilerinin taksi düzgün olmadığını gördük. Bununla birlikte bazı taksi düzgün çokgenlerin varlığı hakkında da bilgi edindik. Ancak taksi düzgün çokgenlerin varlığı hakkında henüz genel bilgilere sahip değiliz. Aşağıdaki teorem taksi düzgün $2n$-genlerin var olduğunu taksi çemberler yardımıyla göstermektedir:

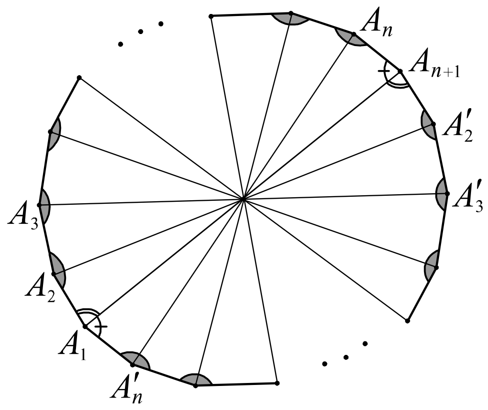
**Teorem 3.1.9** *Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden birbirine eş iki farklı taksi düzgün $2n$-gen vardır.*

**İspat:** Bilindiği gibi, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin her bir iç açısının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ radyandır. Şimdi düzlemde verilen herhangi bir $A_1A_2$ doğru parçasını göz önüne alalım. Açıkça, her birinin uzunluğu $d_T(A_1, A_2)$ ve ardışık ikisi arasındaki açının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ olan $A_iA_{i+1}$, $2 \leq i \leq n$, doğru parçaları, yarıçapı $d_T(A_1, A_2)$ ve merkezi $A_i$ olan taksi çemberleri yardımıyla kolayca çizilebilir (Bkz: Şekil 3.1.6).

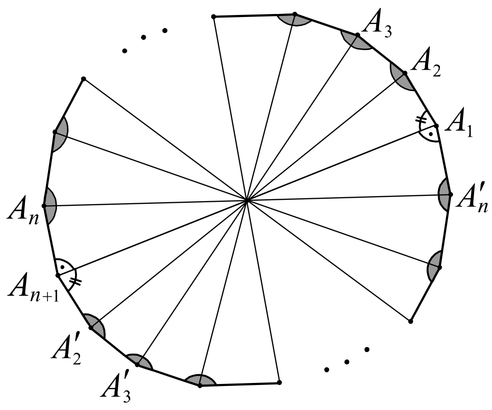



Şekil 3.1.6

Bu durumda $\measuredangle A_2A_1A_{n+1} + \measuredangle A_nA_{n+1}A_1 = \pi(n-1)/n$ olduğu kolayca görülebilir. Çizilen doğru parçalarına ek olarak, eğer $A_iA_{i+1}$ doğru parçalarının, $A_1A_{n+1}$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrikleri olan $A'_iA'_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçalarını çizersek, bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.1.7). Bir noktaya göre simetri (veya bir nokta etrafında $\pi$ radyan dönme) taksi uzaklıkları ve açı ölçülerini değiştirmediğinden $1 \leq i \leq n$ için $d_T(A_i, A_{i+1}) = d_T(A'_i, A'_{i+1}) = d_T(A_1, A_2)$, ve $2 \leq i \leq n$ için




Şekil 3.1.7



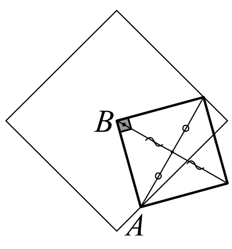

Şekil 3.1.8

$\measuredangle A_i = \measuredangle A'_i = \pi(n-1)/n$ dir. O halde, çizilen $2n$-gen taksi düzgündür. Benzer prosedür, $A_1A_2$ doğrusunun diğer tarafında da uygulanabilir ve ilk elde edilen $2n$-genden farklı fakat yine taksi düzgün olan bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.1.8). Ancak bu iki taksi düzgün $2n$-gen, $A_1A_2$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrik, dolayısıyla da eştir. ■

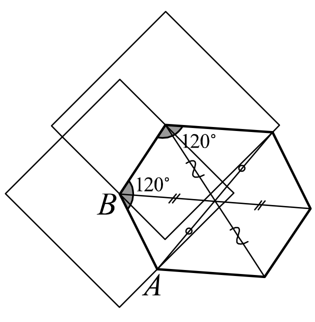
Herhangi bir taksi düzgün $2n$-gende karşılıklı köşeleri birleştiren $n$ tane doğru parçası vardır (Şekil 3.1.7 ve Şekil 3.1.8'de $A_iA'_i$, $1 \le i \le n$, doğru parçaları). Çokgenin *eksen*leri diyeceğimiz bu doğru parçalarının noktadaş olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.1.10'un ispatında verilen prosedürün bir uygulamasıdır:

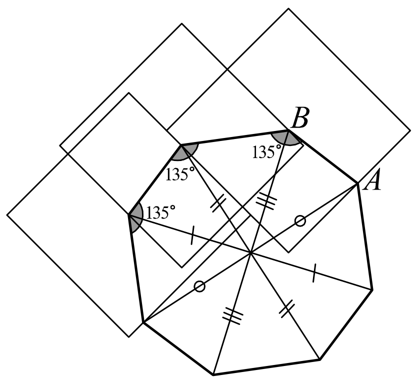
**Örnek 3.1.1** Aşağıdaki Şekil 3.1.9, Şekil 3.1.10 ve Şekil 3.1.11'de sırasıyla, verilen bir $AB$ doğru parçasını kenar kabul eden taksi düzgün dörtgen (*taksi kare*), taksi düzgün altıgen ve taksi düzgün sekizgenin çizimleri gösterilmiştir.




Şekil 3.1.9




Şekil 3.1.10




Şekil 3.1.11

Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden taksi düzgün $2n$-genler, Teorem 3.1.10'un ispatında verilen prosedür yardımıyla kolayca elde edilebilir. □

Önerme 3.1.7'de her Öklidyen karenin taksi düzgün, yani taksi kare olduğu gösterilmiştir. Önerme 3.1.13 gereğince de her taksi karenin Öklidyen düzgün, yani Öklidyen kare olduğu gösterilecektir. Aşağıdaki teorem Teorem 3.1.3'ün başka bir ifadesidir:

**Teorem 3.1.10** *$A$, $B$, $C$ ve $D$, düzlemde dört nokta ve $A \neq B$, $C \neq D$, $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olsun, $m_1$ ve $m_2$ de sırasıyla $AB$ ve $CD$ doğrularının eğimlerini göstersin.*

*(i) Eğer $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olmasıdır.*

*(ii) Eğer $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ ise, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ olmasıdır.*

*(iii) Eğer $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ ise, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ olmasıdır.*

Aşağıdaki sonuç, Teorem 3.1.11'in doğrudan bir sonucu olmakla beraber, Sonuç 3.1.4'ün de başka bir ifadesidir:

**Sonuç 3.1.11** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olsun. O halde, $d_T(A,B) = d_T(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/2$ radyan olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.*

Aşağıdaki inceleme Öklidyen düzgün olan veya olmayan taksi düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda, Öklidyen düzgün olan taksi düzgün çokgenlerin yalnızca kare ve özel bir düzgün sekizgenden ibaret olduğu görülmüştür.

**Önerme 3.1.12** *Her taksi kare Öklidyen düzgündür.*

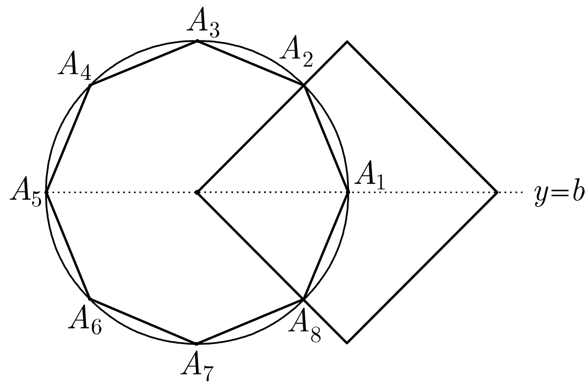
**İspat:** Taksi karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı taksi uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.1.12

gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde, her taksi kare Öklidyen düzgündür. ■

Bir sonraki önermeyi ispatlamak için yeni bir kavram kullanacağız: Eşaçılı bir $2n$-genin alterne (birer kenar arayla ardışık) kenarlarının Öklidyen uzunlukları eşit ise bu çokgene *eşaçılı yarı-düzgün çokgen* denir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin köşelerinden geçen bir Öklidyen çevrel çember daima vardır (Bkz: [65]).

**Önerme 3.1.13** *Eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her taksi düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Her taksi düzgün sekizgende kenarlar eşit taksi uzunlukta ve alterne kenarlar arasındaki açıların ölçüleri $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.1.12 gereğince, alterne kenarlar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde her taksi düzgün sekizgen bir eşaçılı yarı-düzgün çokgendir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin ardışık iki kenarının Öklidyen uzunlukları eşitse bu çokgenin Öklidyen düzgün olacağı açıktır. Şimdi, eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine, diyelim ki $y = 0$ doğrusuna, paralel olan bir $A_1A_2...A_8$ taksi düzgün sekizgenini göz önüne alalım. Bu durumda $A_1, A_2, ..., A_8$ noktalarından geçen $A_1A_5$ çaplı bir Öklidyen çember vardır. $A_1$ merkezli ve $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı taksi çember, Öklidyen çemberi $A_2$ ve $A_8$ noktalarında keseceği açıktır (Bkz: Şekil 3.1.12).




Şekil 3.1.12

Bu Öklidyen ve taksi çemberlerin ikisi de $A_1A_5$ doğrusuna göre simetrik olduğundan kesişimleri de $A_1A_5$ doğrusuna göre simetriktir. Sonuç 3.1.12 gereğince, ardışık olan $A_1A_2$ ve $A_1A_8$ kenarları aynı Öklidyen uzuluğa sahiptir. O halde, eksenlerinden biri

$y = 0$ doğrusuna paralel olan her taksi düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür. Diğer durumlar da benzer olarak yapılır. ■

**Teorem 3.1.14** *Önerme 3.1.13 ve Önerme 3.1.14'te belirtilen taksi düzgün çokgelerin dışında hiçbir taksi düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir.*

**İspat:** Öklidyen düzgün olan, Önerme 3.1.13 ve Önerme 3.1.14'te belirtilen taksi düzgün çokgelerin dışında bir taksi düzgün çokgenin var olduğunu kabul edelim. Buna göre, taksi düzgün olan, Önerme 3.1.7 ve Önerme 3.1.8'de belirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında bir Öklidyen düzgün çokgen vardır. Ancak bu, Teorem 3.1.9 ile çelişir. O halde, Önerme 3.1.13 ve Önerme 3.1.14'te belirtilen taksi düzgün çokgelerin dışında hiçbir taksi düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir. ■

Sonuç olarak, taksi ve Öklidyen kareler daima aynı şekle sahiptir ve kare bu özellikteki tek çokgendir.

### 3.1.3 Taksi Düzgün (2$n$-1)-genlerin Yokluğu Üzerine

Aşağıdaki önerme taksi düzgün üçgenlerin var olmadığını gösterir.

**Önerme 3.1.15** *Hiçbir taksi düzgün üçgen yoktur.*

**İspat:** Her taksi eşaçılı üçgen aynı zamanda Öklidyen düzgün üçgendir. Önerme 3.1.5 gereğince hiçbir Öklidyen düzgün üçgen taksi düzgün olmadığından, hiçbir taksi eşaçılı üçgen de taksi düzgün değildir. O halde hiçbir taksi düzgün üçgen yoktur. ■

Taksi düzgün beşgen, dokuzgen ve onbeşgenin var olmadıkları, C.a.R (*Compass and Ruler*; Bkz: [69]) adlı bir bilgisayar programı yardımıyla görülmektedir. Ancak, $n \geq 3$ için taksi düzgün $(2n-1)$-genlerin varlığı ya da yokluğu üzerine bir önerme ispatlanamamıştır. Sonuç olarak, "taksi düzgün $(2n-1)$-gen var mıdır?" sorusu cevap bekleyen bir *açık problem*dir (Bkz: [14]).

## 3.2 Maksimum Düzgün Çokgenler

Çokgenler için verilen aşağıdaki tanımlar, Öklid düzlemindeki tanımlarda Öklid uzaklığı yerine maksimum uzaklığı kullanılarak verilmiştir:

**Tanım 3.2.1** Düzlemde maksimum kenar uzunlukları eşit olan çokgenlere *maksimum eşkenarlı çokgen* denir.

**Tanım 3.2.2** Düzlemde iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere *maksimum eşaçılı çokgen* denir.

**Tanım 3.2.3** Düzlemde hem maksimum eşkenarlı hem de maksimum eşaçılı çokgenlere *maksimum düzgün çokgen* denir.

Düzlemdeki Öklidyen düzgün çokgenlerin maksimum düzgünlüğünü incelemeden önce, iki yardımcı teorem ve bunları takibeden bir teorem ve bir sonuç verilmiştir. Bu teorem ve sonuç, Öklidyen düzgün çokgenleri incelerken sıkça kullanılacaktır.

Koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve taksi uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan aşağıdaki özellik Yardımcı Teorem 2.1.1'den bilinmektedir:

$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $m$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(m) = (1+m^2)^{1/2} \diagup \max\{1, |m|\}$ olmak üzere,

$$d_E(A,B) = \rho(m) d_M(A,B) \tag{3.2.1}$$

dir. $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise, $d_E(A,B) = d_M(A,B)$ dir.

Aşağıdaki yardımcı teorem, vereceğimiz teoremin ispatını kısaltacaktır.

**Yardımcı Teorem 3.2.1** *Eğer $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olmasıdır.*

**İspat:** Kabul edelim ki, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ için $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ olsun. Eğer $m_1 \leq 1$ ve $m_2 \leq 1$, veya $m_1 \geq 1$ ve $m_2 \geq 1$ ise, $m_1^2 = m_2^2$ ve böylece $|m_1| = |m_2|$ elde edilir. Eğer $m_1 \leq 1$ ve $m_2 \geq 1$, veya $m_1 \geq 1$ ve $m_2 \leq 1$ ise, $m_1^2 m_2^2 = 1$ ve böylece

$|m_1 m_2| = 1$ elde edilr. Şimdi de karşıt olarak, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ için $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $|m_1| = |m_2|$ ise, $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ olacağı açıktır. Eğer $|m_1 m_2| = 1$ ise, $m_1 = 1/|m_2|$ veya $m_1 = -1/|m_2|$ dir. Her iki durumda da doğrudan bir hesapla $\rho(m_1) = \rho(m_2)$ olduğu kolayca görülebilir. ∎

Aşağıdaki teorem Öklid uzunlukları eşit olan iki doğru parçasının maksimum uzunluklarının da eşit olması için gerek ve yeter koşulu verir:

**Teorem 3.2.2** *$A$, $B$, $C$ ve $D$, düzlemde dört nokta ve $A \neq B$, $C \neq D$, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olsun, $m_1$ ve $m_2$ de sırasıyla $AB$ ve $CD$ doğrularının eğimlerini göstersin.*

*$(i)$ Eğer $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $d_M(A,B) = d_M(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olmasıdır.*

*$(ii)$ Eğer $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ ise, $d_M(A,B) = d_M(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ olmasıdır.*

*$(iii)$ Eğer $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ ise, $d_M(A,B) = d_M(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ olmasıdır.*

**İspat:** $(i)$ Bu ifade, (3.2.1) eşitliği ve Yardımcı Teorem 3.2.2'den açıktır.

$(ii)$ Eğer $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ ise, Yardımcı Teorem 2.1.1'den $d_E(A,B) = d_M(A,B)$. O halde, $d_M(A,B) = d_M(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(m_2) = 1$ olmasıdır. Açıkça, $\rho(m_2) = 1 \Leftrightarrow m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ dir.

$(iii)$ Eğer $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ ise, Yardımcı Teorem 2.1.1'den $d_E(C,D) = d_M(C,D)$. O halde, $d_M(A,B) = d_M(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $\rho(m_1) = 1$ olmasıdır. Açıkça, $\rho(m_1) = 1 \Leftrightarrow m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ dir ∎

Aşağıdaki sonuç, Öklidyen düzgün çokgenlerin maksimum düzgünlüğünü incelemede çok kullanışlı olacaktır:

**Sonuç 3.2.3** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olsun. O halde, $d_M(A,B) = d_M(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/2$ radyan olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.*

**İspat:** $A$, $B$ ve $C$, düzlemde $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ özelliğinde doğrudaş olmayan üç nokta, $m_1$ ve $m_2$ de sırasıyla $AB$ ve $BC$ doğrularının eğimleri olsun. Buna göre, $m_1$ ve $m_2$ birbirinden farklıdır. O halde, Teorem 3.2.3 gereğince, $d_M(A,B) = d_M(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ve $m_1 = -m_2$ veya $|m_1 m_2| = 1$; $m_1 = 0$ ve $m_2 \to \infty$; veya $m_2 = 0$ ve $m_1 \to \infty$ olmasıdır. Ek olarak, $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olduğundan $A$ ve $C$ noktaları, $B$ noktasından geçip $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir. Bununla birlikte, aşağıdaki iyi bilinen üç özellik de geçerlidir:

$(i)$ $AB$ ve $BC$ doğrularının birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 m_2 = -1$; $m_1 = 0$ ve $m_2 \to \infty$; veya $m_2 = 0$ ve $m_1 \to \infty$ olmasıdır.
$(ii)$ $AB$ ve $BC$ doğrularının, $B$ noktasından geçip $x = 0$ ve $y = 0$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ ve $m_1 \neq m_2$ (yani, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ve $m_1 = -m_2$) olmasıdır.
$(iii)$ $AB$ ve $BC$ doğrularının, $B$ noktasından geçip $y = x$ ve $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 m_2 = 1$ ve $m_1 \neq m_2$; $m_1 = 0$ ve $m_2 \to \infty$; veya $m_2 = 0$ ve $m_1 \to \infty$ olmasıdır.

O halde, $d_M(A,B) = d_M(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/2$ radyan olması veya $AB$ ve $BC$ doğrularının, $B$ noktasından geçip $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır. ■

**Uyarı 3.2.1** Dikkat edilirse Teorem 3.2.3, maksimum geometrinin Öklidyen izometrilerine işaret eder. Daha açık olarak, ötelemelerin, bir nokta etrafında $\pi/2$, $\pi$ ve $3\pi/2$ radyanlık dönmelerin ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan doğrulara göre yansımaların maksimum uzaklıkları değiştirmediğine işaret eder. Bölüm 4'te maksimum izometrilerin yalnızca bu dönüşümlerden ibaret olduğunu göreceğiz (Ayrıca bkz: [53]). □

### 3.2.1 Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Maksimum Düzgünlüğü

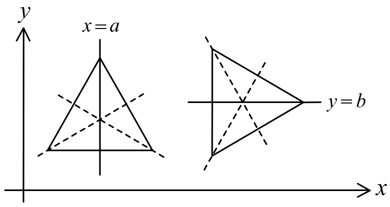
Her Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda maksimum eşaçılı olduğundan, bir Öklidyen düzgün çokgenin ancak ve ancak maksimum eşkenarlı ise maksimum düzgün olacağı aşikardır. Bu yüzden Öklidyen düzgün çokgenlerin maksimum düzgünlüğünü incelemek için maksimum eşkenarlı olup olmadığını belirlemek yeterlidir. Bunu yaparken yararlanacağımız kavramlar şöyledir:

Bilindiği gibi her Öklidyen düzgün çokgenin köşelerinden geçen bir Öklidyen çember (*çevrel çember*) vardır ve her çemberin içine, köşeleri çemberin üzerinde olacak şekilde Öklidyen düzgün çokgen yerleştirilebilir. Bir Öklidyen düzgün çokgenin çevrel çemberinin merkezine bu Öklidyen düzgün çokgenin *merkez*i denir. Eğer bir Öklidyen düzgün çokgen bir $l$ doğrusuna göre simetrikse bu doğruya çokgenin *simetri ekseni* denir. Ek olarak, eğer bu simetri ekseni çokgenin bir köşesinden geçiyorsa bu simetri eksenine de *köşesel simetri ekseni* denir. Her simetri ekseninin, ait olduğu Öklidyen düzgün çokgenin merkezinden geçtiği iyi bilinen bir özelliktir.

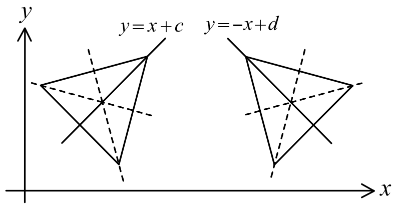
Aşağıdaki inceleme maksimum düzgün olan ve olmayan Öklidyen düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda maksimum düzgün olan Öklidyen düzgün çokgenlerin kare ve özel düzgün sekizgenlerden ibaret olduğunu göreceğiz.

**Önerme 3.2.4** *Hiçbir Öklidyen düzgün üçgen (eşkenar üçgen) maksimum düzgün değildir.*

**İspat:** Öklidyen düzgün üçgenin ardışık herhangi iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip olduğundan, ancak ardışık herhangi iki kenarı arasındaki açının ölçüsü $\pi/2$ radyan olmadığından, Sonuç 3.1.4 gereğince, Öklidyen düzgün üçgenin maksimum düzgün olabilmesi için her ardışık iki kenarının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması gerektiği açıktır. Bir Öklidyen düzgün üçgenin ardışık iki kenarının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olduğunu (veya simetri eksenlerinden birinin bu doğrulardan birine paralel olduğunu) kabul edelim. Şekil 3.2.1 ve Şekil 3.2.2 bu özellikteki tüm üçgenleri temsil eder. Her Öklidyen düzgün




Şekil 3.2.1

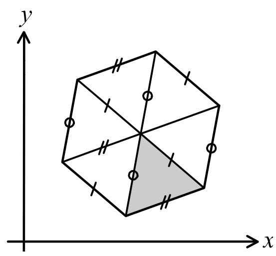



Şekil 3.2.2

üçgenin üç tane köşesel simetri ekseni vardır. Bu simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olduğunda diğer ikisininin bu doğrulardan hiçbirine paralel olmayacağı basit bir hesaplamayla gösterilebilir. O halde, Şekil 3.2.1 ve Şekil 3.2.2'deki üçgenler maksimum düzgün değildir. Sonuç olarak, hiçbir Öklidyen düzgün üçgen maksimum düzgün değildir. ■

**Sonuç 3.2.5** *Hiçbir Öklidyen düzgün altıgen maksimum düzgün değildir.*

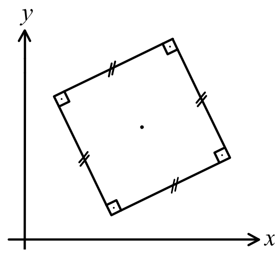
**İspat:** Her Öklidyen düzgün altıgenin, köşesel simetri ekseleriyle altı tane Öklidyen düzgün üçgene ayrılacağı açıktır. Teorem 3.2.3 gereğince, Öklidyen düzgün altıgenin ve Öklidyen düzgün üçgenlerin paralel olan kenarlarının maksimum uzunlukları eşittir. Ancak, hiçbir Öklidyen düzgün üçgen maksimum eşkenarlı olmadığından Öklidyen düzgün altıgen de maksimum eşkenarlı değildir. O halde, hiçbir Öklidyen düzgün altıgen maksimum düzgün değildir. ■




Şekil 3.2.3

**Önerme 3.2.6** *Her Öklidyen düzgün dörtgen (Öklidyen kare) maksimum düzgündür.*

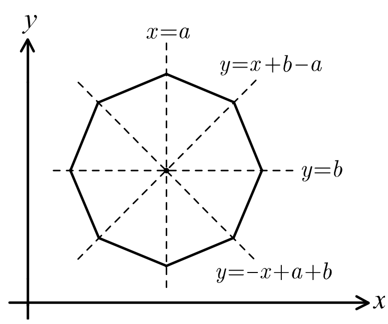
**İspat:** Öklidyen karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan (Bkz: Şekil 3.2.4), Sonuç 3.2.4 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı maksimum uzunluğa sahiptir. O halde, her Öklidyen kare maksimum düzgündür. ■




Şekil 3.2.4

**Önerme 3.2.7** *Köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her Öklidyen düzgün sekizgen maksimum düzgündür.*

**İspat:** Her Öklidyen düzgün sekizgenin tam olarak dört tane köşesel simetri ekseni olduğu ve iki köşesel simetri ekseni arasındaki açının $\pi/4$ radyanın katı olduğu açıktır. Buna göre, bir Öklidyen düzgün sekizgenin köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel ise, bu eksenle arasındaki açı $\pi/4$ radyanın katı olan doğrular yine $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olduğundan, diğer köşesel simetri eksenleri de $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrulardan birine paraleldir (Bkz: Şekil 3.2.5). Bu durumda, Öklidyen düzgün sekizgenin herhangi ardışık iki kenarı $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir. Sonuç 3.2.4 gereğince herhangi ardışık iki kenar aynı maksimum uzunluğa sahiptir. O halde, köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her Öklidyen düzgün sekizgen maksimum düzgündür. ∎




Şekil 3.2.5

**Teorem 3.2.8** *Önerme 3.2.7 ve Önerme 3.2.8'de belirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında hiçbir Öklidyen düzgün çokgen maksimum düzgün değildir.*

**İspat:** İspatı Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genler ve Öklidyen düzgün $2n$-genler için ayrı ayrı ele alalım:

$(i)$ Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genler: Önerme 3.2.5'te $n=2$ durumu ispatlandı. Şimdi, $n>2$ durumunu göz önüne alalım. Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin köşesel simetri ekseni sayısının $(2n-1)$ olduğu açıktır ve $n>2$ iken $(2n-1)\geq 5$. O halde, Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin en az bir köşesel simetri ekseni $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$ doğrularından hiçbirine paralel değildir. Bu da, en az bir ardışık iki kenarın $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir doğruya göre simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin ardışık iki kenarı arasındaki açının ölçüsü de $\pi/2$ radyan değildir. Sonuç 3.2.4'ün karşıt tersi gereğince, bu ardışık iki kenarın maksimum uzunlukları eşit değildir. O halde, hiçbir Öklidyen düzgün $(2n-1)$-gen maksimum düzgün değildir.

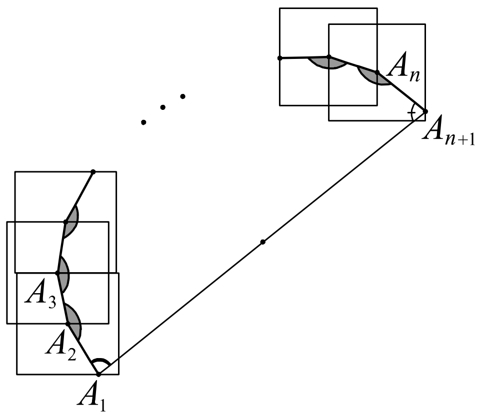
$(ii)$ Öklidyen düzgün $2n$-genler: Önerme 3.2.7'de $n=2$ durumu, Sonuç 3.2.6'da da $n=3$ durumu ispatlandı. Önerme 3.2.8'deki Öklidyen düzgün çokgenleri dışarda bırakmak için, $n=4$ durumunda köşesel simetri eksenleri $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir Öklidyen düzgün sekizgeni göz önüne alalım. Böyle bir Öklidyen sekizgenin maksimum düzgün olmayacağı, Sonuç 3.2.4'ün karşıt tersi gereği açıktır. Son olarak $n>4$ durumunu dikkate alalım: Açıkça, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin köşesel simetri ekseni sayısı $n$ dir. Buna göre, $n>4$ olduğundan Öklidyen düzgün $2n$-genin en az bir köşesel simetri ekseni $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$ doğrularından hiçbirine paralel değildir. Bu da, en az bir ardışık iki kenarın $x=0$, $y=0$, $y=x$, $y=-x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir doğruya göre simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca $n>4$ olduğunda, Öklidyen düzgün $2n$-genin ardışık iki kenarı arasındaki açının ölçüsü de $\pi/2$ radyan değildir. Sonuç 3.2.4'ün karşıt tersi gereğince, bu ardışık iki kenarın maksimum uzunlukları eşit değildir. O halde, $n>4$ için hiçbir Öklidyen düzgün $2n$-gen maksimum düzgün değildir. İspat tamamlanmıştır. ■

### 3.2.2 Maksimum düzgün 2$n$-genlerin Varlığı ve Öklidyen Düzgünlüğü

Buraya kadar hangi Öklidyen düzgün çokgenlerin aynı zamanda maksimum düzgün, hangilerinin maksimum düzgün olmadığını gördük. Bununla birlikte, bazı maksimum düzgün çokgenlerin varlığı hakkında da bilgi edindik. Ancak maksimum düzgün çokgenlerin varlığı hakkında henüz genel bilgilere sahip değiliz. Aşağıdaki teorem maksimum düzgün $2n$-genlerin var olduğunu maksimum çemberler yardımıyla göstermektedir:

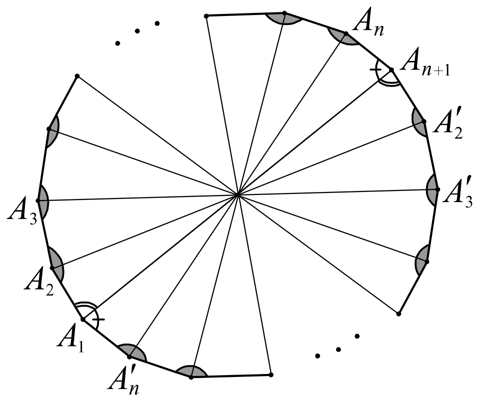
**Teorem 3.2.9** *Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden birbirine eş iki farklı maksimum düzgün* $2n$*-gen vardır.*

**İspat:** Bilindiği gibi, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin her bir iç açısının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ radyandır. Şimdi düzlemde verilen herhangi bir $A_1A_2$ doğru parçasını göz önüne alalım. Açıkça, her birinin uzunluğu $d_M(A_1, A_2)$ ve ardışık ikisi arasındaki açının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ olan $A_iA_{i+1}$, $2 \leq i \leq n$, doğru parçaları, yarıçapı $d_M(A_1, A_2)$ ve merkezi $A_i$ olan maksimum çemberleri yardımıyla kolayca çizilebilir (Şekil 3.2.6).

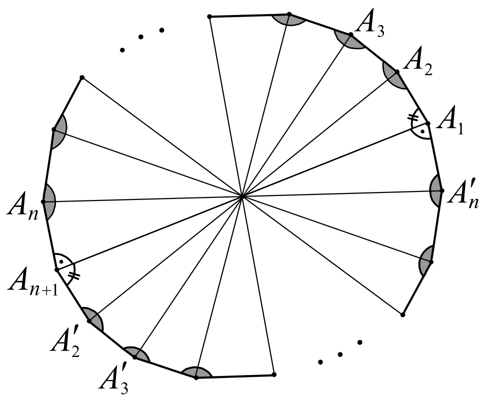



Şekil 3.2.6

Bu durumda $\measuredangle A_2A_1A_{n+1} + \measuredangle A_nA_{n+1}A_1 = \pi(n-1)/n$ olduğu kolayca görülebilir. Çizilen doğru parçalarına ek olarak, eğer $A_iA_{i+1}$ doğru parçalarının, $A_1A_{n+1}$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrikleri olan $A_i'A_{i+1}'$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçalarını çizersek, bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.2.7). Bir noktaya göre simetri (veya bir




Şekil 3.2.7



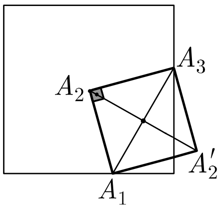

Şekil 3.2.8

nokta etrafında $\pi$ radyan dönme) maksimum uzaklıkları ve açı ölçülerini değiştirmediğinden $1 \leq i \leq n$ için $d_M(A_i, A_{i+1}) = d_M(A_i', A_{i+1}') = d_M(A_1, A_2)$, ve $2 \leq i \leq n$ için $\measuredangle A_i = \measuredangle A_i' = \pi(n-1)/n$. O halde, çizilen $2n$-gen maksimum düzgündür. Benzer prosedür, $A_1A_2$ doğrusunun diğer tarafında da uygulanabilir ve ilk elde edilen $2n$-genden farklı fakat yine maksimum düzgün olan bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: 3.2.8). Ancak bu iki maksimum düzgün $2n$-gen, $A_1A_2$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrik, dolayısıyla da eştir. ■

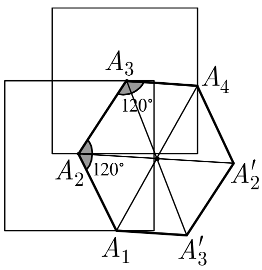
Herhangi bir maksimum düzgün $2n$-gende karşılıklı köşeleri birleştiren $n$ tane doğru parçası vardır (Şekil 3.2.7 ve Şekil 3.2.8'de $A_iA_i'$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçaları). Çokgenin *eksen*leri diyeceğimiz bu doğru parçalarının noktadaş olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.2.10'un ispatındaki prosedürün bir uygulamasıdır:

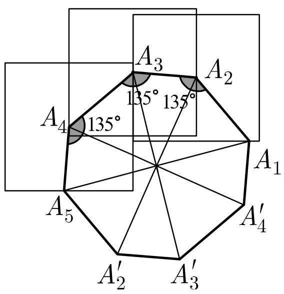
**Örnek 3.2.1** Aşağıdaki Şekil 3.2.9, Şekil 3.2.10 ve Şekil 3.2.11'de sırasıyla, verilen bir $A_1A_2$ doğru parçasını kenar kabul eden maksimum düzgün dörtgen (*maksimum kare*), düzgün altıgen ve düzgün sekizgenin çizimleri gösterilmiştir.




Şekil 3.2.9




Şekil 3.2.10




Şekil 3.2.11

Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden maksimum düzgün $2n$-genler, Teorem 3.2.10'un ispatında verilen prosedür yardımıyla kolayca elde edilebilir. □

Önerme 3.2.7'den her Öklidyen karenin maksimum düzgün, yani maksimum kare olduğunu biliyoruz. Önerme 3.2.13 gereğince de her maksimum karenin Öklidyen düzgün, yani Öklidyen kare olduğunu göreceğiz. Aşağıdaki teorem Teorem 3.2.3'ün başka bir ifadesidir:

**Teorem 3.2.10** *$A$, $B$, $C$ ve $D$, düzlemde dört nokta ve $A \neq B$, $C \neq D$, $d_M(A,B) = d_M(C,D)$ olsun, $m_1$ ve $m_2$ de sırasıyla $AB$ ve $CD$ doğrularının eğimlerini göstersin.*
*(i) Eğer $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ ise, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $|m_1| = |m_2|$ veya $|m_1 m_2| = 1$ olmasıdır.*
*(ii) Eğer $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ ise, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ olmasıdır.*
*(iii) Eğer $m_2 = 0$ veya $m_2 \to \infty$ ise, $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olması için gerek ve yeter koşul, $m_1 = 0$ veya $m_1 \to \infty$ olmasıdır.*

Aşağıdaki sonuç, Teorem 3.2.11'in doğrudan bir sonucu olmakla beraber, Sonuç 3.2.4'ün de başka bir ifadesidir:

**Sonuç 3.2.11** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olsun. O halde, $d_M(A,B) = d_M(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/2$ radyan olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.*

Aşağıdaki inceleme Öklidyen düzgün olan ve olmayan maksimum düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda Öklidyen düzgün olan maksimum düzgün çokgenlerin yalnızca kare ve özel düzgün sekizgenlerden ibaret olduğu görülmüştür.

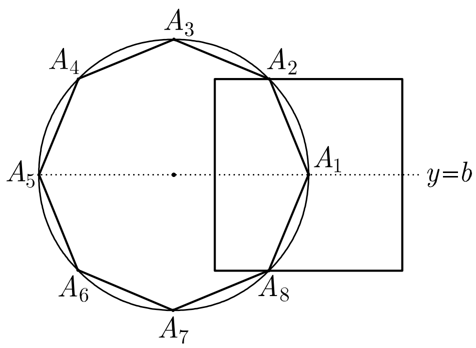
**Önerme 3.2.12** *Her maksimum kare Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Maksimum karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı maksimum uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.2.12 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde, her maksimum kare Öklidyen düzgündür. ■

Bir sonraki önermeyi ispatlamak için yeni bir kavram kullanacağız: Eşaçılı bir $2n$-genin alterne (birer kenar arayla ardışık) kenarlarının Öklidyen uzunlukları eşit ise bu çokgene *eşaçılı yarı-düzgün çokgen* denir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin köşelerinden geçen daima bir Öklidyen çevrel çember vardır (Bkz: [65]).

**Önerme 3.2.13** *Eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her maksimum düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Her maksimum düzgün sekizgende kenarlar eşit maksimum uzunlukta ve alterne kenarlar arasındaki açıların ölçüleri $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.2.12 gereğince, alterne kenarlar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde her maksimum düzgün sekizgen bir eşaçılı yarı-düzgün çokgendir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin ardışık iki kenarının Öklidyen uzunlukları eşitse bu çokgenin Öklidyen düzgün olacağı açıktır. Şimdi, eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine, diyelim ki $y = 0$ doğrusuna, paralel olan bir $A_1A_2...A_8$ maksimum düzgün sekizgenini göz önüne alalım. Bu durumda $A_1, A_2, ..., A_8$ noktalarından geçen $A_1A_5$ çaplı bir Öklidyen çember vardır. $A_1$ merkezli ve $d_M(A_1, A_2)$ yarıçaplı maksimum çember, Öklidyen çemberi $A_2$ ve $A_8$ noktalarında keseceği açıktır (Bkz: Şekil 3.2.12).




Şekil 3.2.12

Bu Öklidyen ve maksimum çemberlerin ikisi de $A_1A_5$ doğrusuna göre simetrik olduğundan kesişimleri de $A_1A_5$ doğrusuna göre simetriktir. Sonuç 3.2.12 gereğince, ardışık olan $A_1A_2$ ve $A_1A_8$ kenarları aynı Öklidyen uzuluğa sahiptir. O halde, eksenlerinden biri $y = 0$ doğrusuna paralel olan her maksimum düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür. Diğer durumlar da benzer olarak yapılır. ■

**Teorem 3.2.14** *Önerme 3.2.13 ve Önerme 3.2.14'te belirtilen maksimum düzgün çokgelerin dışında hiçbir maksimum düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir.*

**İspat:** Öklidyen düzgün olan, Önerme 3.2.13 ve Önerme 3.2.14'te belirtilen maksimum düzgün çokgelerin dışında bir maksimum düzgün çokgenin var olduğunu kabul edelim. Buna göre, maksimum düzgün olan, Önerme 3.2.7 ve Önerme 3.2.8'de bilirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında bir Öklidyen düzgün çokgen vardır. Ancak bu, Teorem 3.2.9 ile çelişir. O halde, Önerme 3.2.13 ve Önerme 3.2.14'te belirtilen maksimum düzgün çokgelerin dışında hiçbir maksimum düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir. ■

Sonuç olarak, maksimum ve Öklidyen kareler daima aynı şekle sahiptir ve kare bu özellikteki tek çokgendir.

### 3.2.3 Maksimum Düzgün (2$n$-1)-genlerin Yokluğu Üzerine

Aşağıdaki önerme maksimum düzgün üçgenlerin var olmadığını gösterir.

**Önerme 3.2.15** *Hiçbir maksimum düzgün üçgen yoktur.*

**İspat:** Her maksimum eşaçılı üçgen aynı zamanda Öklidyen düzgün üçgendir. Önerme 3.2.5 gereğince hiçbir Öklidyen düzgün üçgen maksimum düzgün olmadığından, hiçbir maksimum eşaçılı üçgen de maksimum düzgün değildir. O halde hiçbir maksimum düzgün üçgen yoktur. ■

Maksimum düzgün beşgen, dokuzgen ve onbeşgenin var olmadıkları, C.a.R (*Compass and Ruler*; Bkz: [69]) adlı bir bilgisayar programı yardımıyla görülmektedir. Ancak, $n \geq 3$ için maksimum düzgün $(2n-1)$-genlerin varlığı ya da yokluğu üzerine bir önerme ispatlanamamıştır. Sonuç olarak, "maksimum düzgün $(2n-1)$-gen var mıdır?" sorusu cevap bekleyen bir *açık problem*dir (Bkz: [19]).

## 3.3 Çin Dama Düzgün Çokgenler

Çokgenler için verilen aşağıdaki tanımlar, Öklid düzlemindeki tanımlarda Öklid uzaklığı yerine Çin dama uzaklığı kullanılarak verilmiştir:

**Tanım 3.3.1** Düzlemde Çin dama kenar uzunlukları eşit olan çokgenlere *Çin dama eşkenarlı çokgen* denir.

**Tanım 3.3.2** Düzlemde iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere *Çin dama eşaçılı çokgen* denir.

**Tanım 3.3.3** Düzlemde hem Çin dama eşkenarlı hem de Çin dama eşaçılı çokgenlere *Çin dama düzgün çokgen* denir.

Düzlemdeki Öklidyen düzgün çokgenlerin Çin dama düzgünlüğünü incelemeden önce tartışmamız içinde önemli bir role sahip olan bir teorem ve bu teoremin bir sonucunu vereceğiz. Aşağdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz (Bkz: [36]).

**Teorem 3.3.1** $(i)$ *Düzlemde bir nokta etrafında $\theta$ radyanlık dönmenin iki nokta arasındaki Çin dama uzaklığını değiştirmemesi için gerek ve yeter koşul, $\theta \in \{\frac{t\pi}{4} + 2k\pi : 0 \leq t \leq 7,\ t, k \in \mathbb{Z}\}$ olmasıdır.*
$(ii)$ *Düzlemde $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre yansımanın iki nokta arasındaki Çin dama uzaklığını değiştirmemesi için gerek ve yeter koşul, $\frac{a}{b} \in \{0, \pm 1, \pm(\sqrt{2} - 1), \pm(\sqrt{2} + 1)\}$ ya da $b = 0$ olmasıdır.*

İfadeleri kısaltmak için $x = 0$ , $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, $y = (\sqrt{2} - 1)x$, $y = -(\sqrt{2}-1)x$, $y = (\sqrt{2}+1)x$ ve $y = -(\sqrt{2}+1)x$ doğrularının oluşturduğu kümeyi $S$ ile gösterelim. Buna göre, aşağıdaki önerme, Teorem 3.3.1'in doğrudan bir sonucudur:

**Sonuç 3.3.2** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_E(A, B) = d_E(B, C)$ olsun. O halde, $d_C(A, B) = d_C(B, C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/4$, $\pi/2$ ya da $3\pi/4$ radyan olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.*

Sonuç 3.3.2, Öklidyen düzgün çokgenlerin Çin dama düzgünlüğünü incelemede çok kullanışlı olacaktır.

### 3.3.1 Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Çin Dama Düzgünlüğü

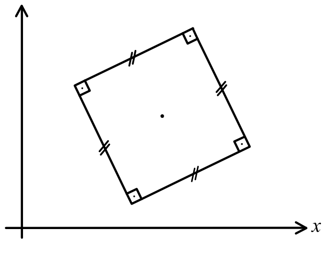
Her Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda Çin dama eşaçılı olduğundan, bir Öklidyen düzgün çokgenin ancak ve ancak Çin dama eşkenarlı ise Çin dama düzgün olacağı aşikardır. Bu yüzden Öklidyen düzgün çokgenlerin Çin dama düzgünlüğünü incelemek için Çin dama eşkenarlı olup olmadığını belirlemek yeterlidir. Bunu yaparken yararlanacağımız kavramlar şöyledir:

Bilindiği gibi her Öklidyen düzgün çokgenin köşelerinden geçen bir Öklidyen çember (*çevrel çember*) vardır ve her çemberin içine, köşeleri çemberin üzerinde olacak şekilde Öklidyen düzgün çokgen yerleştirilebilir. Bir Öklidyen düzgün çokgenin çevrel çemberinin merkezine bu Öklidyen düzgün çokgenin *merkez*i denir. Eğer bir Öklidyen düzgün çokgen bir $l$ doğrusuna göre simetrikse bu doğruya çokgenin *simetri ekseni* denir. Ek olarak, eğer bu simetri ekseni çokgenin bir köşesinden geçiyorsa bu simetri eksenine de *köşesel simetri ekseni* denir. Her simetri ekseninin, ait olduğu Öklidyen düzgün çokgenin merkezinden geçtiği iyi bilinen bir özelliktir.

Aşağıdaki inceleme Çin dama düzgün olan ve olmayan Öklidyen düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda Çin dama düzgün olan Öklidyen düzgün çokgenlerin kare, düzgün sekizgen ve özel düzgün 16-genlerden ibaret olduğunu göreceğiz.

**Önerme 3.3.3** *Her Öklidyen düzgün dörtgen (Öklidyen kare) Çin dama düzgündür.*

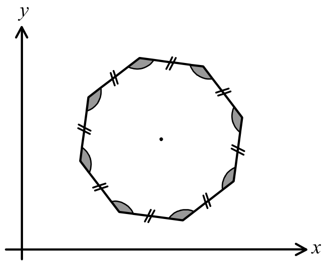
**İspat:** Öklidyen karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan (Bkz: Şekil 3.3.1), Sonuç 3.3.2 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Çin dama uzunluğa sahiptir. O halde, her Öklidyen kare Çin dama düzgündür. ■




Şekil 3.3.1

**Önerme 3.3.4** *Her Öklidyen düzgün sekizgen Çin dama düzgündür.*

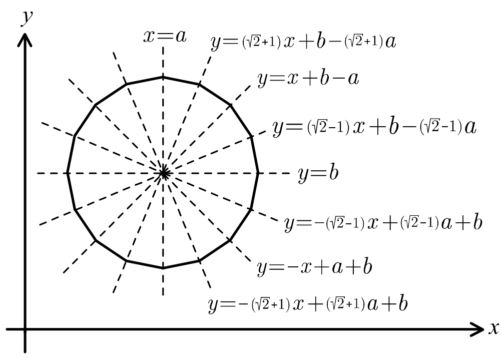
**İspat:** Öklidyen düzgün sekizgenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $3\pi/4$ radyan olduğundan (Bkz: Şekil 3.3.2), Sonuç 3.3.2 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Çin dama uzunluğa sahiptir. O halde, her Öklidyen düzgün sekizgen Çin dama düzgündür. ■




Şekil 3.3.2

**Önerme 3.3.5** *Köşesel simetri eksenlerinden biri $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel olan her Öklidyen düzgün 16-gen Çin dama düzgündür.*

**İspat:** Her Öklidyen düzgün16-genin tam olarak sekiz tane köşesel simetri ekseni olduğu ve iki köşesel simetri ekseni arasındaki açının $\pi/8$ radyanın katı olduğu açıktır. Buna göre, bir Öklidyen düzgün 16-genin köşesel simetri eksenlerinden biri $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel ise, bu eksenle arasındaki açı $\pi/8$ radyanın katı olan tüm doğrular yine $S$ kümesindeki doğrular olduğundan, diğer köşesel simetri eksenleri de $S$ kümesindeki doğrulardan birine paraleldir (Şekil 3.3.3).




Şekil 3.3.3

Bu durumda, Öklidyen düzgün 16-genin herhangi ardışık iki kenarı $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir. Sonuç 3.3.2 gereğince herhangi ardışık iki kenar aynı Çin dama uzunluğa sahiptir. O halde, köşesel simetri eksenlerinden biri $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel olan her Öklidyen düzgün 16-gen Çin dama düzgündür. ■

**Teorem 3.3.6** *Önerme 3.3.3, Önerme 3.3.4 ve Önerme 3.3.5'te belirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında hiçbir Öklidyen düzgün çokgen Çin dama düzgün değildir.*

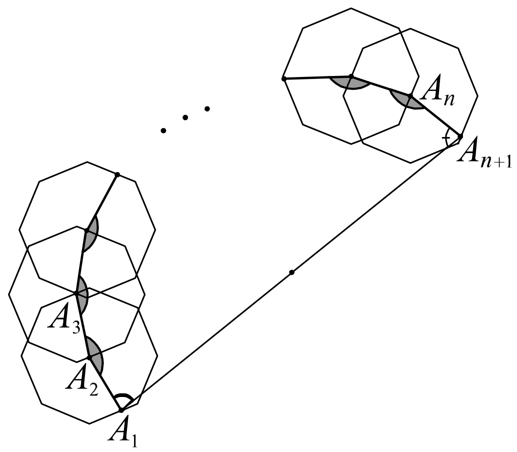
**İspat:** Önce $n \neq 4$, $n \neq 8$, ve $n \neq 16$ için bir Öklidyen düzgün $n$-geni göz önüne alalım. Bu Öklidyen düzgün $n$-genin iç açılarının ölçüleri $\pi(n-2)/n$ radyan olup bu ölçü $\pi/4$, $\pi/2$ veya $3\pi/4$ radyana eşit değildir. O halde, bu Öklidyen düzgün $n$-genin Çin dama düzgün olması için, Sonuç 3.3.2 gereğince her bir köşesel simetri ekseninin $S$ kümesindeki bir doğruya paralel olması gerekir. Bu durum"da iki köşesel simetri ekseni arasındaki açı $\pi/8$ radyanın katı olmalıdır. Ancak bir Öklidyen düzgün $n$-genin iki köşesel simetri ekseni arasındaki açının ölçüsü $2\pi/n$ radyanın katı olup $n \geq 3$, $n \neq 4$, $n \neq 8$, ve $n \neq 16$ için $2\pi/n$ nin katları $\pi/8$ in katı değildir. O halde, bu Öklidyen düzgün $n$-gen Çin dama düzgün değildir. Şimdi de köşesel simetri eksenlerinden biri $S$ kümesindeki hiçbir doğruya paralel olmayan bir Öklidyen düzgün 16-geni göz önüne alalım. Böyle bir Öklidyen düzgün 16-genin ardışık iki kenarının arasındaki açının ölçüsün $\pi/4$, $\pi/2$ veya $3\pi/4$ radyana eşit olmayacağı ve hiçbir köşesel simetri ekseninin $S$ kümesindeki hiçbir doğruya paralel olmayacağı aşikardır. Sonuç 3.3.2'nin karşıt tersi gereğince bu Öklidyen düzgün 16-gen Çin dama düzgün değildir. İspat tamamlanmıştır. ■

### 3.3.2 Çin Dama düzgün $2n$-genlerin Varlığı ve Öklidyen Düzgünlüğü

Buraya kadar hangi Öklidyen düzgün çokgenlerin aynı zamanda Çin dama düzgün, hangilerinin Çin dama düzgün olmadığını gördük. Bununla birlikte bazı Çin dama düzgün çokgenlerin varlığı hakkında da bilgi edindik. Ancak Çin dama düzgün çokgenlerin varlığı hakkında henüz genel bilgilere sahip değiliz. Aşağıdaki teorem Çin dama düzgün $2n$-genlerin var olduğunu, Çin dama çemberler yardımıyla göstermektedir:

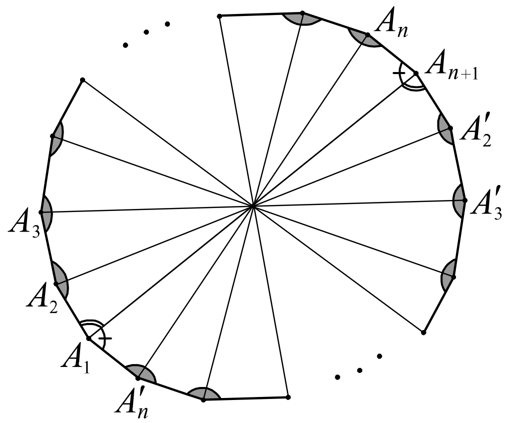
**Teorem 3.3.7** *Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden birbirine eş iki farklı Çin dama düzgün $2n$-gen vardır.*

**İspat:** Bilindiği gibi, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin her bir iç açısının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ radyandır. Şimdi düzlemde verilen herhangi bir $A_1A_2$ doğru parçasını göz önüne alalım. Açıkça, her birinin uzunluğu $d_C(A_1, A_2)$ ve ardışık ikisi arasındaki açının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ olan $A_iA_{i+1}$, $2 \leq i \leq n$, doğru parçaları, yarıçapı $d_C(A_1, A_2)$ ve merkezi $A_i$ olan Çin dama çemberleri yardımıyla kolayca çizilebilir (Şekil 3.3.4).

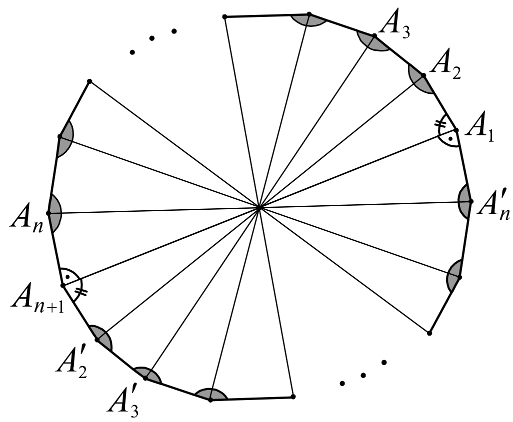



Şekil 3.3.4

Bu durumda $\measuredangle A_2A_1A_{n+1} + \measuredangle A_nA_{n+1}A_1 = \pi(n-1)/n$ olduğu da kolayca görülebilir. Çizilen doğru parçalarına ek olarak, eğer $A_iA_{i+1}$ doğru parçalarının, $A_1A_{n+1}$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrikleri olan $A'_iA'_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçaları çizilirse, bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.2.5). Bir noktaya göre simetri (veya bir




Şekil 3.3.5



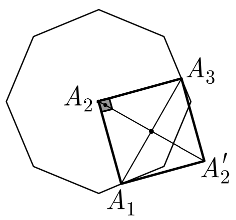

Şekil 3.3.6

nokta etrafında $\pi$ radyan dönme) Çin dama uzaklıkları ve açı ölçülerini değiştirmediğinden $1 \leq i \leq n$ için $d_C(A_i, A_{i+1}) = d_C(A'_i, A'_{i+1}) = d_C(A_1, A_2)$, ve $2 \leq i \leq n$ için $\measuredangle A_i = \measuredangle A'_i = \pi(n-1)/n$. O halde, çizilen $2n$-gen Çin dama düzgündür. Benzer prosedür, $A_1A_2$ doğrusunun diğer tarafında da uygulanabilir ve ilk elde edilen $2n$-genden farklı fakat yine Çin dama düzgün olan bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.3.6). Ancak bu iki Çin dama düzgün $2n$-gen, $A_1A_2$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrik, dolayısıyla da eştir. ■

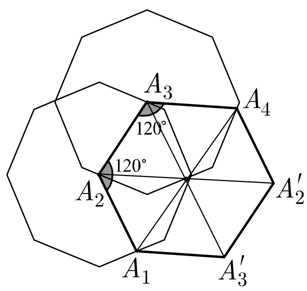
Herhangi bir Çin dama düzgün $2n$-gende karşılıklı köşeleri birleştiren $n$ tane doğru parçası vardır (Şekil 3.3.5 ve Şekil 3.3.6 de $A_iA'_i$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçaları). Çokgenin *eksen*leri diyeceğimiz bu doğru parçalarının noktadaş olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.3.7'nin ispatında verilen prosedürün bir uygulamasıdır:

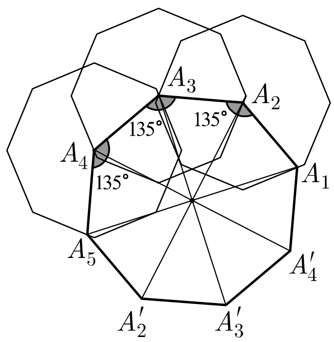
**Örnek 3.3.1** Aşağıdaki Şekil 3.3.7, Şekil 3.3.8 ve Şekil 3.3.9'da sırasıyla, verilen bir $A_1A_2$ doğru parçasını kenar kabul eden Çin dama düzgün dörtgen (*Çin dama kare*), Çin dama düzgün altıgen ve Çin dama düzgün sekizgenin çizimleri gösterilmiştir.




Şekil 3.3.7




Şekil 3.3.8




Şekil 3.3.9

Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden Çin dama düzgün $2n$-genler, Teorem 3.3.7'nin ispatında verilen prosedür yardımıyla kolayca elde edilebilir. □

Önerme 3.3.3 ve Önerme 3.3.4'ten her Öklidyen karenin ve Öklidyen düzgün sekizgenin Çin dama düzgün olduğunu biliyoruz. Önerme 3.3.9 ve Önerme 3.3.10 gereğince de her Çin dama karenin ve Çin dama düzgün sekizgenin Öklidyen düzgün olduğunu göreceğiz. Aşağıdaki önerme, Sonuç 3.3.2'nin başka bir ifadesidir:

**Sonuç 3.3.8** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_C(A,B) = d_C(B,C)$ olsun. O halde, $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ olması için gerek ve yeter koşul $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/4$, $\pi/2$ ya da $3\pi/4$ radyan olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.*

Aşağıdaki inceleme Öklidyen düzgün olan ve olmayan Çin dama düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda Öklidyen düzgün olan Çin dama düzgün çokgenlerin yalnızca Çin dama kare, Çin dama düzgün sekizgen ve özel Çin dama düzgün 16-genlerden ibaret olduğunu göreceğiz.

**Önerme 3.3.9** *Her Çin dama düzgün kare Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Çin dama karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Çin dama uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.3.8 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde, her Çin dama düzgün kare Öklidyen düzgündür. ■

**Önerme 3.3.10** *Her Çin dama düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür.*

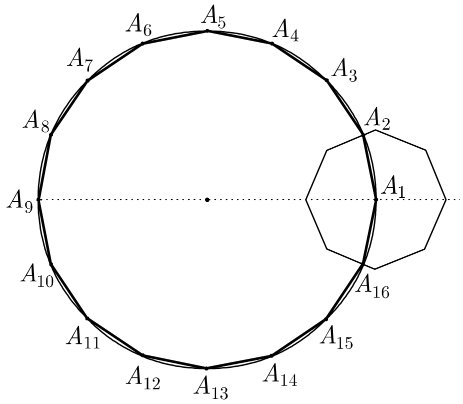
**İspat:** Çin dama düzgün sekizgenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Çin dama uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $3\pi/4$ radyan olduğundan, Sonuç 3.3.8 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde, her Çin dama düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür. ■

Bir sonraki önermeyi ispatlamak için yeni bir kavram kullanacağız: Eşaçılı bir $2n$-genin alterne (birer kenar arayla ardışık) kenarlarının Öklidyen uzunlukları eşit ise bu çokgene *eşaçılı yarı-düzgün çokgen* denir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin köşelerinden geçen daima bir Öklidyen çevrel çember vardır (Bkz: [65]).

**Önerme 3.3.11** *Eksenlerinden biri $S$ kümesindeki doğrulardan birine paralel olan her Çin dama düzgün 16-gen Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Her Çin dama düzgün 16-gende kenarlar eşit Çin dama uzunlukta ve alterne kenarlar arasındaki açıların ölçüleri $3\pi/4$ radyan olduğundan, Sonuç 3.3.8

gereğince, alterne kenarlar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde her Çin dama düzgün 16-gen bir eşaçılı yarı-düzgün çokgendir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin ardışık iki kenarının Öklidyen uzunlukları eşitse bu çokgenin Öklidyen düzgün olacağı açıktır. Şimdi, eksenlerinden biri $S$ kümesindeki doğrulardan birine, diyelim ki $y = 0$ doğrusuna, paralel olan bir $A_1A_2...A_{16}$ Çin dama düzgün 16-genini göz önüne alalım. Bu durumda $A_1, A_2, ..., A_{16}$ noktalarından geçen $A_1A_9$ çaplı bir Öklidyen çember vardır. $A_1$ merkezli ve $d_C(A_1, A_2)$ yarıçaplı Çin dama çemberi, Öklidyen çemberi $A_2$ ve $A_{16}$ noktalarında keseceği açıktır (Bkz: Şekil 3.3.10).




Şekil 3.3.10

Bu Öklidyen ve Çin dama çemberlerinin ikisi de $A_1A_9$ doğrusuna göre simetrik olduğundan kesişimleri de $A_1A_9$ doğrusuna göre simetriktir. Sonuç 3.3.8 gereğince, ardışık olan $A_1A_2$ ve $A_1A_{16}$ kenarları aynı Öklidyen uzuluğa sahiptir. O halde, eksenlerinden biri $y = 0$ doğrusuna paralel olan her Çin dama düzgün 16-gen Öklidyen düzgündür. Diğer durumlar da benzer olarak yapılır. ■

**Teorem 3.3.12** *Önerme 3.3.9, Önerme 3.3.10 ve Önerme 3.3.11'de belirtilen Çin dama düzgün çokgenlerin dışında hiçbir Çin dama düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir.*

**İspat:** Öklidyen düzgün olan, Önerme 3.3.9, Önerme 3.3.10 ve Önerme 3.3.11'de belirtilen Çin dama düzgün çokgenlerin dışında bir Çin dama düzgün çokgenin var olduğunu kabul edelim. Buna göre, Çin dama düzgün olan, Önerme 3.3.3, Önerme 3.3.4 ve Önerme 3.3.5'te belirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında bir Öklidyen düzgün çokgen vardır. Ancak bu, Teorem 3.3.6 ile çelişir. O halde, Önerme 3.3.9, Önerme 3.3.10 ve Önerme 3.3.11'de belirtilen Çin dama düzgün çokgenlerin dışında hiçbir Çin dama düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir. ■

Sonuç olarak, Çin dama ve Öklidyen kare ve düzgün sekizgenler daima aynı şekle sahiptir ve bu özelliğe sahip düzgün çokgenler yanızca kare ve düzgün sekizgendir.

### 3.3.3 Çin Dama Düzgün (2$n$-1)-genlerin Yokluğu Üzerine

Aşağıdaki önerme Çin dama düzgün üçgenlerin var olmadığını gösterir.

**Önerme 3.3.13** *Hiçbir Çin dama düzgün üçgen yoktur.*

**İspat:** Her Çin dama eşaçılı üçgen aynı zamanda Öklidyen düzgün üçgendir. Teorem 3.3.6 gereğince hiçbir Öklidyen düzgün üçgen Çin dama düzgün olmadığından, hiçbir Çin dama eşaçılı üçgen de Çin dama düzgün değildir. O halde hiçbir Çin dama düzgün üçgen yoktur. ■

Çin dama düzgün beşgen, dokuzgen ve onbeşgenin var olmadıkları, C.a.R (*Compass and Ruler*; Bkz: [69]) adlı bir bilgisayar programı yardımıyla görülmektedir. Ancak, $n \geq 3$ için Çin dama düzgün $(2n-1)$-genlerin varlığı ya da yokluğu üzerine bir önerme ispatlanamamıştır. Sonuç olarak, "Çin dama düzgün $(2n-1)$-gen var mıdır?" sorusu cevap bekleyen bir *açık problem*dir (Bkz: [15]).

## 3.4 Alfa Düzgün Çokgenler

Çokgenler için verilen aşağıdaki tanımlar, Öklid düzlemindeki tanımlarda Öklid uzaklığı yerine alfa uzaklığı kullanılarak verilmiştir:

**Tanım 3.4.1** Düzlemde alfa kenar uzunlukları eşit olan çokgenlere *alfa eşkenarlı çokgen* denir.

**Tanım 3.4.2** Düzlemde iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere *alfa eşaçılı çokgen* denir.

**Tanım 3.4.3** Düzlemde hem alfa eşkenarlı hem de alfa eşaçılı çokgenlere *alfa düzgün çokgen* denir.

Çin dama düzgün çokgenleri, $\alpha = \pi/4$ durumu için alfa düzgün çokgenler olarak düşünülebileceğinden, bu kısımda $\alpha \neq \pi/4$ durumu için alfa düzgün çokgenleri inceleyeceğiz. Düzlemdeki Öklidyen düzgün çokgenlerin alfa düzgünlüğünü incelemeden önce tartışmamız içinde önemli bir role sahip olan bir teorem ve bu teoremin bir sonucunu vereceğiz. Aşağdaki teorem, Önerme 4.4.1 ve Önerme 4.4.2'nin özel bir halidir.

**Teorem 3.4.1** $(i)$ *Düzlemde bir nokta etrafında $\theta$ radyanlık dönmenin iki nokta arasındaki $\alpha$ $(\alpha \neq \pi/4)$ uzaklığı değiştirmemesi için gerek ve yeter koşul, $\theta \in \{\frac{t\pi}{2} + 2k\pi : 0 \leq t \leq 3,\ t, k \in \mathbb{Z}\}$ olmasıdır.*
$(ii)$ *Düzlemde $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre yansımanın iki nokta arasındaki $\alpha$ $(\alpha \neq \pi/4)$ uzaklığı değiştirmemesi için gerek ve yeter koşul, $\frac{a}{b} \in \{-1, 0, 1\}$ ya da $b = 0$ olmasıdır.*

Aşağıdaki önerme Teorem 3.4.1'in doğrudan bir sonucudur:

**Sonuç 3.4.2** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_E(A, B) = d_E(B, C)$ olsun. O halde, $d_\alpha(A, B) = d_\alpha(B, C)$ olması için gerek ve yeter koşul, $ABC$ açısının ölçüsünün $\pi/4$, $\pi/2$ ya da $3\pi/4$ radyan olması veya $A$ ve $C$ noktalarının, $B$ noktasından geçen ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olmasıdır.* $(\alpha \neq \pi/4)$

Sonuç 3.4.2, Öklidyen düzgün çokgenlerin alfa düzgünlüğünü incelemede çok kullanışlı olacaktır.

### 3.4.1 Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Alfa Düzgünlüğü

Her Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda alfa eşaçılı olduğundan, bir Öklidyen düzgün çokgenin ancak ve ancak alfa eşkenarlı ise alfa düzgün olacağı aşikardır. Bu yüzden Öklidyen düzgün çokgenlerin alfa düzgünlüğünü incelemek için alfa eşkenarlı olup olmadığını belirlemek yeterlidir. Bunu yaparken yararlanacağımız kavramlar şöyledir:

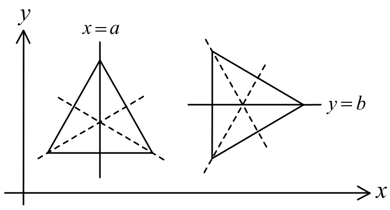
Bilindiği gibi her Öklidyen düzgün çokgenin köşelerinden geçen bir Öklidyen çember (*çevrel çember*) vardır ve her çemberin içine, köşeleri çemberin üzerinde olacak şekilde Öklidyen düzgün çokgen yerleştirilebilir. Bir Öklidyen düzgün çokgenin çevrel çemberinin merkezine bu Öklidyen düzgün çokgenin *merkez*i denir. Eğer bir Öklidyen düzgün çokgen bir $l$ doğrusuna göre simetrikse bu doğruya çokgenin *simetri ekseni* denir. Ek olarak, eğer bu simetri ekseni çokgenin bir köşesinden geçiyorsa bu simetri eksenine de *köşesel simetri ekseni* denir. Her simetri ekseninin, ait olduğu Öklidyen düzgün çokgenin merkezinden geçtiği iyi bilinen bir özelliktir.

Aşağıdaki inceleme alfa düzgün olan ve olmayan Öklidyen düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda alfa düzgün olan Öklidyen düzgün çokgenlerin kare ve özel düzgün sekizgenlerden ibaret olduğunu göreceğiz.

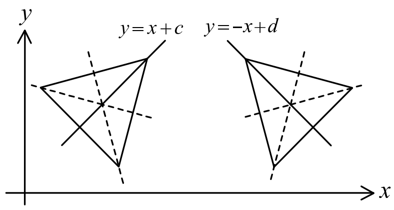
**Önerme 3.4.3** *Hiçbir Öklidyen düzgün üçgen* (*eşkenar üçgen*) *alfa düzgün değildir.*

**İspat:** Bir Öklidyen düzgün üçgenin ardışık herhangi iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip, ancak ardışık herhangi iki kenarı arasındaki açının ölçüsü $\pi/2$ radyan olmadığından, Sonuç 3.4.2 gereğince, bu Öklidyen düzgün üçgenin alfa düzgün olabilmesi için her ardışık iki kenarın $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olması gerektiği açıktır. Bir Öklidyen düzgün üçgenin ardışık iki kenarının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetrik olduğunu (veya simetri eksenlerinden birinin bu doğrulardan birine paralel olduğunu) kabul edelim. Şekil 3.4.1 ve Şekil

3.4.2 bu özellikteki tüm üçgenleri temsil eder. Her Öklidyen düzgün üçgenin üç tane köşesel simetri ekseni vardır. Bu simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olduğunda diğer ikisininin bu doğrulardan hiçbirine paralel olmayacağı basit bir hesaplamayla gösterilebilir. O halde, Şekil 3.4.1 ve Şekil 3.4.2 deki üçgenler alfa düzgün değildir. Sonuç olarak, hiçbir Öklidyen düzgün üçgen alfa düzgün değildir. ■



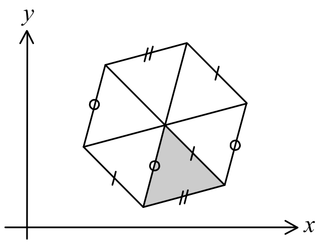

Şekil 3.4.1




Şekil 3.4.2

**Sonuç 3.4.4** *Hiçbir Öklidyen düzgün altıgen alfa düzgün değildir.*

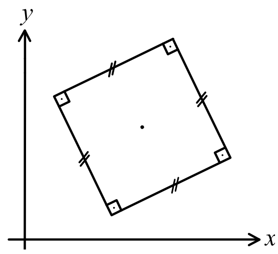
**İspat:** Her Öklidyen düzgün altıgenin, köşesel simetri ekseleriyle altı tane Öklidyen düzgün üçgene ayrılacağı ve Öklidyen düzgün altıgen ve Öklidyen düzgün üçgenlerin paralel olan kenarlarının alfa uzunluklarının eşit olacağı açıktır (Bkz: Şekil 3.4.3). Ancak, hiçbir Öklidyen düzgün üçgen alfa eşkenarlı olmadığından Öklidyen düzgün altıgen de alfa eşkenarlı değildir. O halde, hiçbir Öklidyen düzgün altıgen alfa düzgün değildir. ■




Şekil 3.4.3

**Önerme 3.4.5** *Her Öklidyen düzgün dörtgen (Öklidyen kare) alfa düzgündür.*

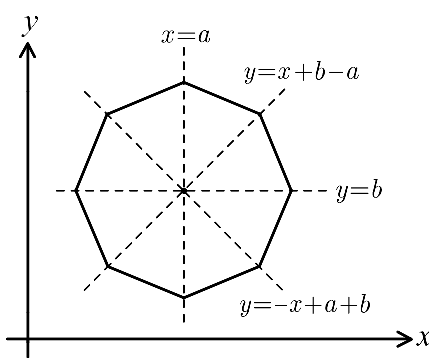
**İspat:** Öklidyen karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı Öklidyen uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan (Bkz: Şekil 3.4.4), Sonuç 3.4.2 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı alfa uzunluğa sahiptir. O halde, her Öklidyen kare alfa düzgündür. ■




Şekil 3.4.4

**Önerme 3.4.6** *Köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her Öklidyen düzgün sekizgen alfa düzgündür.*

**İspat:** Her Öklidyen düzgün sekizgenin tam olarak dört tane köşesel simetri ekseni olduğu ve iki köşesel simetri ekseni arasındaki açının $\pi/4$ radyanın katı olduğu açıktır. Buna göre, bir Öklidyen düzgün sekizgenin köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel ise, bu eksenle arasındaki açı $\pi/4$ radyanın katı olan doğrular yine $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olduğundan, diğer köşesel simetri eksenleri de $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrulardan birine paraleldir (Bkz: Şekil 3.4.5). Bu durumda, Öklidyen düzgün sekizgenin herhangi ardışık iki kenarı $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir. Sonuç 3.4.2 gereğince herhangi ardışık iki kenar aynı alfa uzunluğa sahiptir. O halde, köşesel simetri eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her Öklidyen düzgün sekizgen alfa düzgündür. ■




Şekil 3.4.5

**Teorem 3.4.7** *Önerme 3.4.5 ve Önerme 3.4.6'da belirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında hiçbir Öklidyen düzgün çokgen alfa düzgün değildir.*

**İspat:** İspatı Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genler ve Öklidyen düzgün $2n$-genler için ayrı ayrı yapıyoruz:

$(i)$ Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genler: Önerme 3.4.3'te $n = 2$ durumu ispatlandı. Şimdi, $n > 2$ durumunu göz önüne alalım. Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin köşesel simetri ekseni sayısının $(2n-1)$ olduğu açıktır ve $n > 2$ iken $(2n-1) \geq 5$. O halde, Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin en az bir köşesel simetri ekseni $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel değildir. Bu da, en az bir ardışık iki kenarın $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir doğruya göre simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca Öklidyen düzgün $(2n-1)$-genin ardışık iki kenarı arasındaki açının ölçüsü de $\pi/2$ radyan değildir. Sonuç 3.4.2'nin karşıt tersi gereğince, bu ardışık iki kenarın alfa uzunlukları eşit değildir. O halde, hiçbir Öklidyen $(2n-1)$-gen alfa düzgün değildir.

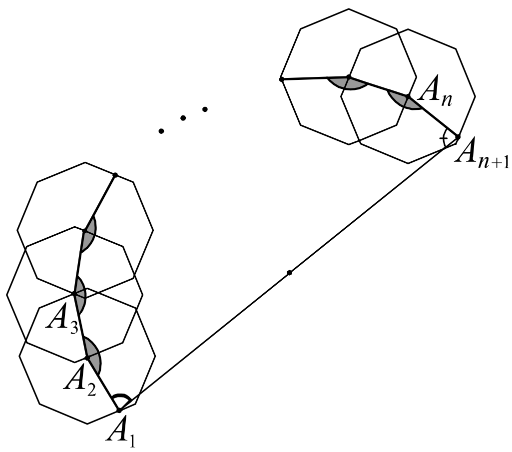
$(ii)$ Öklidyen düzgün $2n$-genler: $n = 2$ durumu Önerme 3.4.5 e dahildir. $n = 3$ durumu da Sonuç 3.4.4'de ispatlandı. Önerme 3.4.6'daki Öklidyen düzgün çokgenleri dışarda bırakmak için, $n = 4$ durumunda köşesel simetri eksenleri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir Öklidyen düzgün sekizgeni göz önüne alalım. Böyle bir Öklidyen sekizgenin alfa düzgün olmayacağı, Sonuç 3.4.2'nin karşıt tersi gereği açıktır. Son olarak $n > 4$ durumunu dikkate alalım: Açıkça, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin köşesel simetri ekseni sayısı $n$ dir. Buna göre, $n > 4$ olduğundan Öklidyen düzgün $2n$-genin en az bir köşesel simetri ekseni $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel değildir. Bu da, en az bir ardışık iki kenarın $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından hiçbirine paralel olmayan bir doğruya göre simetrik olduğunu gösterir. Ayrıca $n > 4$ olduğunda, Öklidyen düzgün $2n$-genin ardışık iki kenarı arasındaki açının ölçüsü de $\pi/2$ radyan değildir. Sonuç 3.4.2'nin karşıt tersi gereğince, bu ardışık iki kenarın alfa uzunlukları eşit değildir. O halde, $n > 4$ için hiçbir Öklidyen düzgün $2n$-gen alfa düzgün değildir. İspat tamamlanmıştır. ■

### 3.4.2 Alfa düzgün $2n$-genlerin Varlığı ve Öklidyen Düzgünlüğü

Buraya kadar hangi Öklidyen düzgün çokgenlerin aynı zamanda alfa düzgün, hangilerinin alfa düzgün olmadığını gördük. Bununla birlikte, bazı alfa düzgün çokgenlerin varlığı hakkında da bilgi edindik. Ancak alfa düzgün çokgenlerin varlığı hakkında henüz genel bilgilere sahip değiliz. Aşağıdaki teorem alfa düzgün $2n$-genlerin var olduğunu alfa çemberler yardımıyla göstermektedir:

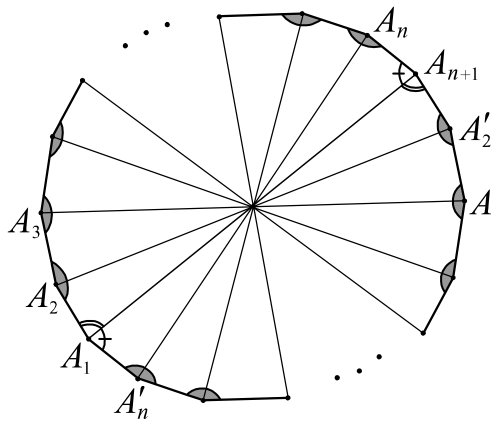
**Teorem 3.4.8** *Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden birbirine eş iki farklı alfa düzgün $2n$-gen vardır.*

**İspat:** Bilindiği gibi, bir Öklidyen düzgün $2n$-genin her bir iç açısının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ radyandır. Şimdi düzlemde verilen herhangi bir $A_1A_2$ doğru parçasını göz önüne alalım. Açıkça, her birinin uzunluğu $d_\alpha(A_1, A_2)$ ve ardışık ikisi arasındaki açının ölçüsü $\pi(n-1)/n$ olan $A_iA_{i+1}$, $2 \leq i \leq n$, doğru parçaları, yarıçapı $d_\alpha(A_1, A_2)$ ve merkezi $A_i$ olan alfa çemberleri yardımıyla kolayca çizilebilir (Bkz: Şekil 3.4.6).

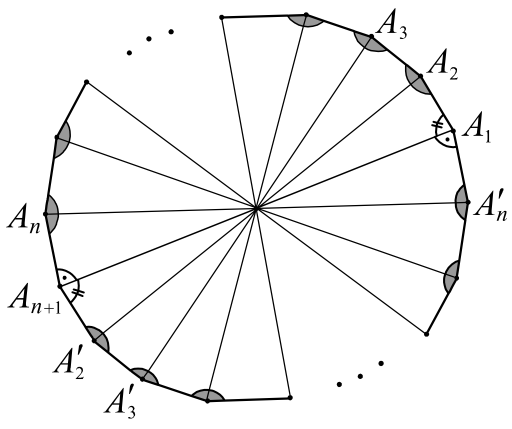



Şekil 3.4.6

Bu durumda $\measuredangle A_2A_1A_{n+1} + \measuredangle A_nA_{n+1}A_1 = \pi(n-1)/n$ olduğu kolayca görülebilir. Çizilen doğru parçalarına ek olarak, eğer $A_iA_{i+1}$ doğru parçalarının, $A_1A_{n+1}$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrikleri olan $A'_iA'_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçalarını çizersek, bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.4.7). Bir noktaya göre simetri (veya bir




Şekil 3.4.7



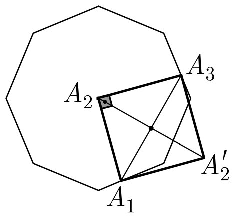

Şekil 3.4.8

nokta etrafında $\pi$ radyan dönme) alfa uzaklıkları ve açı ölçülerini değiştirmediğinden $1 \leq i \leq n$ için $d_\alpha(A_i, A_{i+1}) = d_\alpha(A_i', A_{i+1}') = d_\alpha(A_1, A_2)$, ve $2 \leq i \leq n$ için $\measuredangle A_i = \measuredangle A_i' = \pi(n-1)/n$. O halde, çizilen $2n$-gen alfa düzgündür. Benzer prosedür, $A_1A_2$ doğrusunun diğer tarafında da uygulanabilir ve ilk elde edilen $2n$-genden farklı fakat yine alfa düzgün olan bir $2n$-gen elde edilir (Bkz: Şekil 3.4.8). Ancak bu iki alfa düzgün $2n$-gen, $A_1A_2$ doğru parçasının orta noktasına göre simetrik, dolayısıyla da eştir. ■

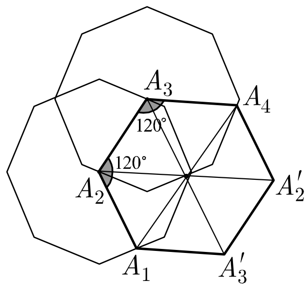
Herhangi bir alfa düzgün $2n$-gende karşılıklı köşeleri birleştiren $n$ tane doğru parçası vardır (Şekil 3.4.7 ve Şekil 3.4.8'de $A_iA_i'$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçaları). Çokgenin *eksen*leri diyeceğimiz bu doğru parçalarının noktadaş olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.4.8'in ispatında verilen prosedürün bir uygulamasıdır:

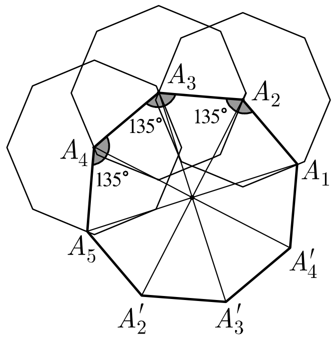
**Örnek 3.4.1** Aşağıdaki Şekil 3.4.9, Şekil 3.4.10 ve Şekil 3.4.11'de sırasıyla, verilen bir $A_1A_2$ doğru parçasını kenar kabul eden alfa düzgün dörtgen (*alfa kare*), alfa düzgün altıgen ve alfa düzgün sekizgenin çizimleri gösterilmiştir.




Şekil 3.4.9




Şekil 3.4.10




Şekil 3.4.11

Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden alfa düzgün $2n$-genler, Teorem 3.4.8 in ispatında verilen prosedür yardımıyla kolayca elde edilebilir. □

Önerme 3.4.5'ten her Öklidyen karenin alfa düzgün, yani alfa kare olduğunu biliyoruz. Önerme 3.4.13 gereğince de her alfa karenin Öklidyen düzgün, yani Öklidyen kare olduğunu göreceğiz. Aşağıdaki önerme, Sonuç 3.4.2'nin başka bir ifadesidir:

**Sonuç 3.4.9** *$A$, $B$ ve $C$, düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta ve $d_\alpha(A,B) = d_\alpha(B,C)$ olsun. O halde, $d_E(A,B) = d_E(B,C)$ ancak ve ancak $ABC$ açısının ölçüsü $\pi/2$ radyandır veya $A$ ve $C$ noktaları, $B$ noktasından geçen ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan bir doğruya göre simetriktir.*

Aşağıdaki inceleme Öklidyen düzgün olan ve olmayan alfa düzgün çokgenleri tam olarak belirler. Bu inceleme sonunda Öklidyen düzgün olan alfa düzgün çokgenlerin yalnızca kare ve özel düzgün sekizgenlerden ibaret olduğunu göreceğiz.

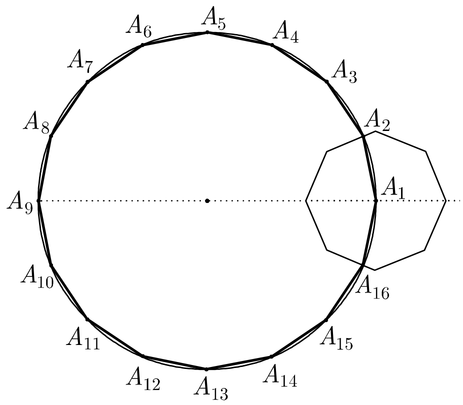
**Önerme 3.4.10** *Her alfa kare Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Alfa karenin herhangi ardışık iki kenarı aynı alfa uzunluğa sahip ve ardışık iki kenar arasındaki açının ölçüsüsü $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.4.9 gereğince, herhangi ardışık iki kenar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde, her alfa kare Öklidyen düzgündür. ■

Bir sonraki önermeyi ispatlamak için yeni bir kavram kullanacağız: Eşaçılı bir $2n$-genin alterne (birer kenar arayla ardışık) kenarlarının Öklidyen uzunlukları eşit ise bu çokgene *eşaçılı yarı-düzgün çokgen* denir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin köşelerinden geçen daima bir Öklidyen çevrel çember vardır (Bkz: [65]).

**Önerme 3.4.11** *Eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine paralel olan her alfa düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür.*

**İspat:** Her alfa düzgün sekizgende kenarlar eşit alfa uzunlukta ve alterne kenarlar arasındaki açıların ölçüleri $\pi/2$ radyan olduğundan, Sonuç 3.4.9 gereğince, alterne kenarlar aynı Öklidyen uzunluğa sahiptir. O halde her alfa düzgün sekizgen bir eşaçılı yarı-düzgün çokgendir. Bir eşaçılı yarı-düzgün çokgenin ardışık iki kenarının Öklidyen uzunlukları eşitse bu çokgenin Öklidyen düzgün olacağı açıktır. Şimdi, eksenlerinden biri $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından birine, diyelim ki $y = 0$ doğrusuna, paralel olan bir $A_1A_2...A_8$ alfa düzgün sekizgenini göz önüne alalım. Bu durumda $A_1, A_2, ..., A_8$ noktalarından geçen $A_1A_5$ çaplı bir Öklidyen çember vardır. $A_1$ merkezli ve $d_\alpha(A_1, A_2)$ yarıçaplı alfa çember, Öklidyen çemberi $A_2$ ve $A_8$ noktalarında keseceği açıktır (Bkz: Şekil 3.4.12).




Şekil 3.4.12

Bu Öklidyen ve alfa çemberlerin ikisi de $A_1A_5$ doğrusuna göre simetrik olduğundan kesişimleri de $A_1A_5$ doğrusuna göre simetriktir. Sonuç 3.4.9 gereğince, ardışık olan $A_1A_2$ ve $A_1A_8$ kenarları aynı Öklidyen uzuluğa sahiptir. O halde, eksenlerinden biri $y = 0$ doğrusuna paralel olan her alfa düzgün sekizgen Öklidyen düzgündür. Diğer durumlar da benzer olarak yapılır. ■

**Teorem 3.4.12** *Önerme 3.4.10 ve Önerme 3.4.11'de belirtilen alfa düzgün çokgelerin dışında hiçbir alfa düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir.*

**İspat:** Öklidyen düzgün olan, Önerme 3.4.10 ve Önerme 3.4.11'de belirtilen alfa düzgün çokgelerin dışında bir alfa düzgün çokgenin var olduğunu kabul edelim. Buna göre, alfa düzgün olan, Önerme 3.4.5 ve Önerme 3.4.6'da bilirtilen Öklidyen düzgün çokgenlerin dışında bir Öklidyen düzgün çokgen vardır. Ancak bu, Teorem 3.4.7 ile çelişir. O halde, Önerme 3.4.10 ve Önerme 3.4.11'de belirtilen alfa düzgün çokgelerin dışında hiçbir alfa düzgün çokgen Öklidyen düzgün değildir. ■

Sonuç olarak, alfa ve Öklidyen kareler daima aynı şekle sahiptir ve kare bu özellikteki tek çokgendir.

### 3.4.3 Alfa Düzgün (2$n$-1)-genlerin Yokluğu Üzerine

Aşağıdaki önerme alfa düzgün üçgenlerin var olmadığını gösterir.

**Önerme 3.4.13** *Hiçbir alfa düzgün üçgen yoktur.*

**İspat:** Her alfa eşaçılı üçgen aynı zamanda Öklidyen düzgün üçgendir. Önerme 3.4.3 gereğince hiçbir Öklidyen düzgün üçgen alfa düzgün olmadığından, hiçbir alfa eşaçılı üçgen de alfa düzgün değildir. O halde hiçbir alfa düzgün üçgen yoktur. ■

Burada, $n \geq 3$ için alfa düzgün $(2n-1)$-genlerin varlığı ya da yokluğu üzerine bir önerme ispatlanamamıştır. Sonuç olarak, "alfa düzgün $(2n-1)$-gen var mıdır?" sorusu cevap bekleyen bir *açık problem*dir.

# BÖLÜM 4

# TAKSİ, MAKSİMUM, ÇİN DAMA ve ALFA DÜZLEMLERİNİN BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde önce, düzlemde taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ metriklerini içeren yeni bir metrik-ailesi ($m$-metriği) verilecek ve bu metrik-ailesiyle oluşturulacak düzlem-ailesinin (yani $m$-düzleminin) Öklidyen düzlem geometri aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı gösterilecektir. Daha sonra, $m$-düzlemin bazı özellikleri incelenecek ve son olarak, $m$-metriğinin üç ve daha genel olarak $n$ boyuttaki formları verilecektir. Bununla birlikte, çalışmalarımız genel olarak düzlem geometri üzerine olacaktır.

Burada, başlıkta belirtilen "genelleştirme" ifadesini biraz açmakta fayda vardır: Konu içinde $m$-düzlemi için verilen bir özellik, açıkça bu düzlem-ailesinin her bir üyesi için de sağlanacaktır. Başka bir ifadeyle, $m$-düzlem için bir özellik vermek, bu düzlem-ailesinin her bir üyesi için bir özellik vermek demektir. Son bahsedilen özellik ise, $m$-düzlem için verilen bir özelliğin sadece özel bir durumudur. Bu bakış açısı, $m$-düzlem geometriye bölüm başlığında belirtilen “genel olma” özelliğini kazandırır.

## 4.1 Düzlemde $m$-Metriği ve Geometrik Yorumu

Aşağıdaki tanımda düzlemde iki nokta arasında yeni bir uzaklık tanımlanmıştır: $m$ uzaklık. Bu tanım içinde verilen $d_m$ fonksiyonunun düzlemde bir *uzaklık ölçme fonksiyonu* olduğu, yani bu fonksiyonun, (1) "Her $A, B \in \mathbb{R}^2$ için $d_m(A,B) \geq 0$; $d_m(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$" ve (2) "Her $A, B \in \mathbb{R}^2$ için $d_m(A,B) = d_m(B,A)$" özeliklerini sağladığı; hatta bunlara ek olarak (3) (*üçgen eşitsizliği*) "Her $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ için $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$" özelliğini de sağlayarak bir *metrik ailesi* belirttiği Teorem 4.1.1'de ispatlanmıştır.

**Tanım 4.1.1** $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ düzlemde iki nokta;. $u$, $v$ ve $m$ de, $u \geq v \geq 0 \neq u$ özelliğindeki reel sayılar olsun. Buna göre,
$\Delta_{AB} = \max\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\}$ ve
$\delta_{AB} = \min\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\}$ olmak üzere,

$$d_m(A,B) = (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB}) \big/ \sqrt{1+m^2} \tag{4.1.1}$$

eşitliğiyle tanımlanmış $d_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna *$m$ uzaklık fonksiyonu*, $d_m(A,B)$ değerine de $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$-uza*klık* denir.

**Uyarı 4.1.1** Açıkça, Tanım 4.1.1'de $u$, $v$ ve $m$ değerlerine bağlı olan sonsuz farklı uzaklık fonksiyonu vardır. Dikkat edilirse "$A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$-uzaklık" Tanım 4.1.1'de verilen haliyle aslında *iyi-tanımlı* değildir. Çünkü $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$-uzaklık, $m$ değerine olduğu gibi, $u$ ve $v$ değerlerine göre de değişmektedir. $m$-uzaklık kavramını iyi-tanımlı kılmak için "$m$-uzaklık" ifadesinde ve "$d_m$" gösteriminde $u$ ve $v$ parametrelerine de yer verilmelidir. Bunu yapmak oldukça kolaydır; örneğin bahsi geçen ifade ve gösterimde $m$ yerine $m(u,v)$ kullanılabilir. Fakat kısalığı sağmak için, ifade ve gösterimleri aynı bırakıp $u$ ve $v$ değerlerini aksi ifade edilmedikçe önceden belirlenmiş ve sabitlenmiş kabul ediyoruz. $\square$

Aşağıdaki teorem $d_m$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterir.

**Teorem 4.1.1** *Tanım 4.1.1'de verilen $d_m$ fonksiyonu bir metriktir.*

**İspat:** Yapılması gereken $d_m$ nin metrik olma özelliklerine sahip olduğunu göstermektir. Açıkça $u > 0$, $v \geq 0$, $\Delta_{AB} \geq 0$, $\delta_{AB} \geq 0$ ve $\sqrt{1+m^2} \geq 0$ olduğundan $d_m(A,B) \geq 0$ dir. Ayrıca $d_m$ nin, "$d_m(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$" özelliğinin sağladığı açıktır. Böylece, $d_m$ metrik olma özelliklerinden birincisini sağlar. Bununla birlikte, "Düzlemdeki her $A$ ve $B$ noktası için $d_m(A,B) = d_m(B,A)$ dir" önermesinin doğru olduğu da aşikardır. O halde, $d_m$ metrik olma özelliklerinden ikincisine de sahiptir. Son olarak, $d_m$ nin metrik olma özelliklerinden üçüncüsünü -yani üçgen eşitsizliğini- sağladığı gösterilmelidir. Bunun için düzlemde $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ve $C = (x_3, y_3)$ noktalarını göz önüne alalım.

İfadeleri kısaltmak amacıyla $u' = u \diagup \sqrt{1+m^2}$, $v' = v \diagup \sqrt{1+m^2}$ ve $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$ olmak üzere $u_{i+j-2} = |(x_i - x_j) + m(y_i - y_j)|$ ve $v_{i+j-2} = |m(x_i - x_j) - (y_i - y_j)|$ olsun. Böylece $d_m(A,B) = u' \max\{u_1, v_1\} + v' \min\{u_1, v_1\}$, $d_m(A,C) = u' \max\{u_2, v_2\}$ $+ v' \min\{u_2, v_2\}$ ve $d_m(C,B) = u' \max\{u_3, v_3\} + v' \min\{u_3, v_3\}$ olacaktır. Açıkça, $|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)| \leq |(x_1 - x_3) + m(y_1 - y_3)| + |(x_3 - x_2) + m(y_3 - y_2)|$ ve $|m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| \leq |m(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)| + |m(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)|$, yani $u_1 \leq u_2 + u_3$ ve $v_1 \leq v_2 + v_3$ olduğundan kolayca

$$d_m(A,B) \leq u' \max\{u_2 + u_3, v_2 + v_3\} + v' \min\{u_2 + u_3, v_2 + v_3\} \qquad (4.1.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak, aşağıdaki olası dört durumdan $d_m$ nin üçgen eşitsizliğini sağladığı kolayca görülebilir:

**Durum I:** Eğer $u_2 \geq v_2$ ve $u_3 \geq v_3$ ise, $(u_2 + u_3) \geq (v_2 + v_3)$ ve böylece $d_m(A,B) \leq u'(u_2 + u_3) + v'(v_2 + v_3) = d_m(A,C) + d_m(C,B)$.

**Durum II:** Eğer $u_2 \leq v_2$ ve $u_3 \leq v_3$ ise, benzer olarak $(u_2 + u_3) \leq (v_2 + v_3)$ ve böylece $d_m(A,B) \leq u'(v_2 + v_3) + v'(u_2 + u_3) = d_m(A,C) + d_m(C,B)$ dir.

**Durum III:** Eğer $u_2 \geq v_2$ ve $u_3 \leq v_3$ ise, iki altdurum söz konusudur:

**i)** $(u_2 + u_3) \geq (v_2 + v_3)$ : Açıkça, $u' \geq v'$ ve $u_3 \leq v_3$ olduğundan $(u' - v')(u_3 - v_3) \leq 0$ dir. O halde $u'(u_3 - v_3 + u_2 - u_2) + v'(v_3 - u_3 + v_2 - v_2) \leq 0$ dir. Buradan $u'(u_2 + u_3) + v'(v_2 + v_3) \leq (u'u_2 + v'v_2) + (u'v_3 + v'u_3)$ elde edilir. Böylece $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$ elde edilir.

**ii)** $(u_2 + u_3) \leq (v_2 + v_3)$ : Açıkça, $u' \geq v'$ ve $u_2 \geq v_2$ olduğundan $(u' - v')(v_2 - u_2) \leq 0$

dir. O halde $u'(v_2 - u_2 + v_3 - v_3) + v'(u_2 - v_2 + u_3 - u_3) \leq 0$ dir. Buradan $u'(v_2+v_3)+v'(u_2+u_3) \leq (u'u_2+v'v_2)+(u'v_3+v'u_3)$ elde edilir. Böylece $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$ elde edilir.

**Durum IV:** Eğer $u_2 \leq v_2$ ve $u_3 \geq v_3$ ise, yine iki altdurum söz konusudur:

**i)** $(u_2+u_3) \geq (v_2+v_3)$ : Açıkça, $a' \geq b'$ ve $u_2 \leq v_2$ olduğundan $(u'-v')(u_2-v_2) \leq 0$ dir. O halde $u'(u_2 - v_2 + u_3 - u_3) + v'(v_2 - u_2 + v_3 - v_3) \leq 0$ dir. Buradan $u'(u_3+u_2)+v'(v_3+v_2) \leq (u'u_3+v'v_3)+(u'v_2+v'u_2)$ elde edilir. Böylece $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$ elde edilir.

**ii)** $(u_2+u_3) \leq (v_2+v_3)$ : Açıkça, $u' \geq v'$ ve $u_3 \geq v_3$ olduğundan $(u'-v')(v_3-u_3) \leq 0$ dir. O halde $u'(v_3 - u_3 + v_2 - v_2) + v'(u_3 - v_3 + u_2 - u_2) \leq 0$ dir. Buradan $u'(v_2+v_3)+v'(u_2+u_3) \leq (u'u_3+v'v_3)+(u'v_2+v'u_2)$ elde edilir. Böylece $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$ elde edilir. ■

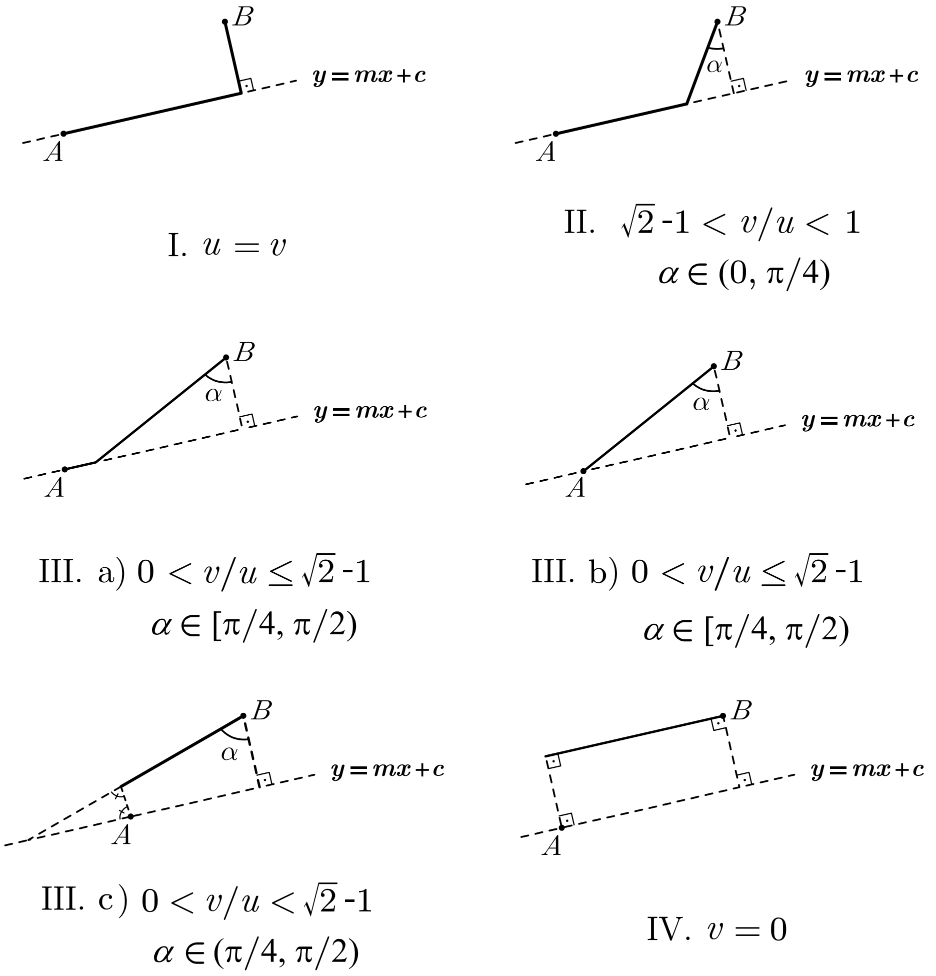
Aşağıda, düzlemde iki nokta arasındaki $m$-uzaklığı başka bir yaklaşımla ele alınmaktadır. Aslında bu yaklaşım, iki nokta arasındaki $m$-uzaklığın geometrik anlamı olarak düşünülebileceği gibi, $m$-uzaklık fikrinin de çıkış noktasıdır.

$A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ kartezyen düzlemde iki nokta, $l_A$ ve $l_B$ de sırasıyla $A$ ve $B$ noktalarından geçen ve eğimleri yine sırasıyla $m$ ve $-1/m$ olan doğrular olsun (burada, kısalığı sağlamak için $y$-eksenine paralel olan doğruların eğimlerini $\infty$ ile gösterecek ve $m = 0$, $k \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ iken $\frac{k}{m} \to \infty$ kabul edeceğiz). $A$ noktasının $l_B$ doğrusuna olan Öklidyen uzaklığı $d_E(A, l_B) = |(x_1-x_2)+m(y_1-y_2)| \diagup \sqrt{1+m^2}$ ve $B$ noktasının $l_A$ noktasına uzaklığı $d_E(B, l_A) = |m(x_1-x_2)-(y_1-y_2)| \diagup \sqrt{1+m^2}$ olduğu için, $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$-uzaklığın

$$d_m(A,B) = u \max\{d_E(A,l_B), d_E(B,l_A)\} + v \min\{d_E(A,l_B), d_E(B,l_A)\} \quad (4.1.3)$$

eşitliğiyle verilebileceği aşikardır. Bu gerçeğe göre, $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$-uzaklık, $A$ dan $B$ ye her biri $m$, $-1/m$, $[m(u^2 - v^2) + 2uv] \diagup [(u^2 - v^2) - 2uvm]$ veya $[m(u^2 - v^2) - 2uv] \diagup [(u^2 - v^2) + 2uvm]$ eğimli doğrulardan birine paralel olan doğru parçalarının oluşturduğu en kısa yolun Öklidyen uzunluğunun $u$ katıdır. Genel olarak $A$ ve $B$ noktaları arasında sonsuz farklı en kısa yol vardır. Bunlardan Şekil 4.1.1'de gösterilenlerine *temel yol* diyeceğiz. Ayrıca $mx - y = 0$ ve $x + my =$

0 doğrularının her birine de *doğrultu ekseni* diyeceğiz. Burada $m \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ için $d_m(A,B) = d_{-1/m}(A,B)$ olduğuna dikkat edilmelidir.




I. $u = v$

II. $\sqrt{2}$-1 $< v/u < 1$
$\alpha \in (0, \pi/4)$

III. a) $0 < v/u \leq \sqrt{2}$-1
$\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$

III. b) $0 < v/u \leq \sqrt{2}$-1
$\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$

III. c) $0 < v/u < \sqrt{2}$-1
$\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$

IV. $v = 0$

Şekil 4.1.1

**Uyarı 4.1.2** Kolayca görülebileceği üzere; taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ metrikleri $m$-metriğinin özel halleridir: Eğer $d_m$ de $u = v = 1$ ise, taksi metriği $d_T$ yi de içeren

$$d_m(A,B) = (\Delta_{AB} + \delta_{AB}) \big/ \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Benzer şekilde eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $v = 0$ ise, maksimum metriği $d_M$ yi de içeren

$$d_m(A,B) = \Delta_{AB} \big/ \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $v = \sqrt{2} - 1$ ise, Çin dama metriği $d_C$ yi de içeren

$$d_m(A, B) = \left(\Delta_{AB} + (\sqrt{2} - 1)\delta_{AB}\right) \diagup \sqrt{1 + m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $\alpha \in [0, \pi/2)$ olmak üzere $v = (\sec\alpha - \tan\alpha)$ ise, $\alpha$ metrik ailesini de içeren

$$d_m(A, B) = (\Delta_{AB} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\delta_{AB}) \diagup \sqrt{1 + m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer bu metrik ailelerini, sırasıyla $d_{T(m)}$, $d_{M(m)}$, $d_{C(m)}$ ve $d_{\alpha(m)}$ ile gösterecek olursak $d_{T(0)}(A, B) = d_T(A, B)$, $d_{M(0)}(A, B) = d_M(A, B)$, $d_{C(0)}(A, B) = d_C(A, B)$ ve $d_{\alpha(0)}(A, B) = d_\alpha(A, B)$ olacağı aşikardır. Bununla birlikte, eğer $\delta_{AB} > 0$ ve $\alpha \in (0, \pi/4)$ ise

$$d_{L(m)}(A, B) < d_{C(m)}(A, B) < d_{\alpha(m)}(A, B) < d_{T(m)}(A, B);$$

eğer $\delta_{AB} > 0$ ve $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$ ise

$$d_{L(m)}(A, B) < d_{\alpha(m)}(A, B) < d_{C(m)}(A, B) < d_{T(m)}(A, B)$$

eşitsizliklerinin doğrulukları kolayca gözlemlenebilir. Bu eşitsizliklere ek olarak, eğer $\delta_{AB} = 0$ ise, $A$ ve $B$ noktalarının doğrultu eksenlerinden birine paralel olacağı ve böylece

$$d_{T(m)}(A, B) = d_{L(m)}(A, B) = d_{C(m)}(A, B) = d_{\alpha(m)}(A, B) = ud_E(A, B)$$

olacağı açıktır. $\square$

$A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ düzlemde farklı iki nokta olmak üzere, sırasıyla $A$ ve $B$ noktalarından geçen ve doğrultu eksenlerine paralel olan doğruların -yani, $i \in \{1, 2\}$ olmak üzere, $mx + y - mx_i + y_i = 0$ ve $x + my - x_i - my_i = 0$ doğrularının- sınırladığı bölgeyi $R_{AB}$ ile gösterelim. $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel olduğunda bu bölgenin bir doğru parçası, diğer durumlarda ise bir dikdörtgensel bölge olacağı açıktır. Bununla beraber, $R_{AB}$ yi sınırlayan dikdörtgenin kenarlarınının Öklidyen (veya $m$) uzunluklarının maksimumu $\Delta_{AB}$ ye, minimumu da $\delta_{AB}$ ye eşittir. Bu tanımlama ve (4.1.3) eşitliğinden aşağıdaki iki önerme elde edilir:

**Önerme 4.1.2** *$A$, $B$ ve $C$ düzlemde $C \in R_{AB}$ özelliğinde üç nokta olsun. Buna göre, $d_m(A,B) \geq d_m(A,C)$ dir. Bununla birlikte, eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerinden birine paralel veya $v > 0$ ise, $d_m(A,B) = d_m(A,C) \Leftrightarrow B = C$ dir. Eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel değil ve $v = 0$ ise, $D$ noktası $R_{AB}$ nin $d_m(B,D) \leq d_m(A,D)$ koşuluna uyan bir köşesi olmak üzere, $d_m(A,B) = d_m(A,C) \Leftrightarrow C \in [BD]$ dir.*

**İspat:** $A$, $B$ ve $C$ düzlemde $C \in R_{AB}$ özelliğinde üç nokta olsun. Eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel ise $R_{AB} = [AB]$ ve $\delta_{AB} = \delta_{AC} = 0$ dir. Bu durumda $d_m(A,B) = d_m(A,C) \Leftrightarrow B = C$ olduğu ve $B \neq C$ ise $d_m(A,B) > d_m(A,C)$ olduğu açıktır. $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel değil ve $v > 0$ iken, $B \neq C \Leftrightarrow d_m(A,B) > d_m(A,C)$ dir. Çünkü bu durumda $\Delta_{AB} > \Delta_{AC}$ veya $\delta_{AB} > \delta_{AC}$ dir. $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel değil ve $v = 0$ iken, $D$ noktası $R_{AB}$ nin $d_m(B,D) \leq d_m(A,D)$ koşuluna uyan bir köşesi olmak üzere, eğer $C \in [BD]$ ise, $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$, dolayısıyla $d_m(A,B) = d_m(A,C)$ dir. Eğer $d_m(A,B) = d_m(A,C)$ ise, $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$, dolayısıyla $C \in [BD]$ dir. ■

**Önerme 4.1.3** *$A$, $B$, $C$ ve $D$ düzlemde verilen dört nokta olmak üzere, eğer $R_{AB}$ ve $R_{CD}$ -Öklidyen anlamda- eş ise, $d_m(A,B) = d_m(C,D)$ dir.*

**İspat:** Açıkça, $R_{AB}$ ve $R_{CD}$ nin eş olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Delta_{AB} = \Delta_{CD}$ ve $\delta_{AB} = \delta_{CD}$ olmasıdır. O halde $R_{AB}$ ve $R_{CD}$ eş ise, $d_m(A,B) = d_m(C,D)$ dir. Bu önermenin karşıtının doğru olmadığı açıktır. ■

## 4.2 $m$-Düzlemi ve Öklidyen Geometri Aksiyomları

Bölüm 1'de tanımlanan taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerine benzer olarak $[\mathbb{R}^2, L_E, d_m]$ sistemini göz önüne alalım. Teorem 4.1.1'de $d_m$ nin bir uzaklık fonksiyonu -hatta bir metrik- olduğu gösterildi. O halde $[\mathbb{R}^2, L_E, d_m]$ sisteminin bir metrik geometri modeli olduğunu göstermek için, her doğrunun bir cetvele sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.2.1 bunu gösterir. Böylece, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_m]$ sistemi taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$-düzlemlerini de kapsayan geniş bir *düzlem-ailesi* teşkil eder. Bununla birlikte, bu modelin düzlem ayırma aksiyomunu sağlayacağı ve Öklid açı ölçme fonksiyonuyla birlikte bir açıölçer geometri modeli oluşturacağı aşikardır. Bu modele -yani $[\mathbb{R}^2, L_E, d_m, m_E]$ sistemine- alışılageldiği gibi *$m$-düzlemi* diyeceğiz ve $\mathbb{R}^2_m$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki teorem, $[\mathbb{R}^2, L_E]$ sisteminde $d_m$ metriği göz önüne alındığında her doğrunun bir cetvele sahip olduğunu gösterir. Teoremde $m$ gösterimlerinin karışmaması için, Bölüm 1'de tanımlanan $l_{m,b}$ yerine $l_{n,b}$ alınmıştır. Böylece, $a, n$ ve $b$ sabit reel sayılar olmak üzere $l_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$ kümesi dikey doğruları; $l_{n,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = nx + b\}$ kümesi de dikey olmayan doğruları temsil edecektir.

**Teorem 4.2.1** $[\mathbb{R}^2, L_E, d_m]$ *sisteminde* $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = y[(u \max\{1, |m|\} + v \min\{1, |m|\})/\sqrt{1+m^2}\ ]$ *fonksiyonu dikey doğrular için;* $f_2 : l_{n,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x\left[(u \max\{|1+mn|, |m-n|\} + v \min\{|1+mn|, |m-n|\})/\sqrt{1+m^2}\ \right]$ *fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir.*

**İspat:** Önce $f_1$ ve $f_2$ fonksiyonlarının bire-bir ve örten olduklarını gösterelim:

$P, Q \in l_a$ ise, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P = (a, y_1)$ ve $Q = (a, y_2)$ yazılabilir. Eğer $f_1(a, y_1) = f_1(a, y_2)$ ise, $y_1 = y_2$ dolayısıyla $P = Q$ olacağı aşikardır. Ayrıca, her $t \in \mathbb{R}$ için $f_1(a, y) = t$ olacak şekilde $y = [t\sqrt{1+m^2}/(u \max\{1, |m|\} + v \min\{1, |m|\})] \in \mathbb{R}$ -dolayısıyla $(a, y) \in l_a$- vardır. O halde $f_1$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

$P, Q \in l_{n,b}$ ise, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 = nx_1 + b$ ve $y_2 = nx_2 + b$ olacak şekilde $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_1, y_2)$ yazılabilir. Bu durumda $n = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ olur. Eğer $f_2(x_1, y_1) = f_2(x_2, y_2)$ ise, $x_1 = x_2$ ve dolayısıyla $y_1 = y_2$ olacağı aşikardır. O halde $P = Q$. Ayrıca, her

$t \in \mathbb{R}$ için $f_2(x,y) = t$ olacak şekilde $x = [t\sqrt{1+m^2}/(u\max\{|1+mn|, |m-n|\} + v\min\{|1+mn|, |m-n|\})] \in \mathbb{R}$ ve $y = (nx+b) \in \mathbb{R}$ -dolayısıyla $(x,y) \in l_{n,b}$- vardır. O halde $f_2$ fonksiyonu da bire-bir ve örtendir.

Son olarak her $P, Q \in l_a$ için $|f_1(P) - f_1(Q)| = d_m(P,Q)$, ve her $P, Q \in l_{n,b}$ için $|f_2(P) - f_2(Q)| = d_m(P,Q)$ eşitliklerinin geçerli olduğu gösterelim:

$P = (a, y_1), Q = (a, y_2) \in l_a$ olsun. Buna göre,

$|f_1(P) - f_1(Q)| = |y_1 - y_2| \left|(u\max\{1, |m|\} + v\min\{1, |m|\})/\sqrt{1+m^2}\right|$

$= \left|(u\max\{|y_1 - y_2|, |m(y_1 - y_2)|\} + v\min\{|y_1 - y_2|, |m(y_1 - y_2)|\})/\sqrt{1+m^2}\right|$

$= (u\Delta_{PQ} + v\delta_{PQ})/\sqrt{1+m^2} = d_m(P,Q)$ dir.

$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in l_{n,b}$, $u' = u/\sqrt{1+m^2}$ ve $v' = v/\sqrt{1+m^2}$ olsun. Buna göre,

$|f_2(P) - f_2(Q)| = |x_1 - x_2| \, |u'\max\{|1+mn|, |m-n|\} + v'\min\{|1+mn|, |m-n|\}|$

$$= \left| \begin{array}{c} u'\max\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} + \\ v'\min\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \end{array} \right|$$

$= (u\Delta_{PQ} + v\delta_{PQ})/\sqrt{1+m^2} = d_m(P,Q)$ dir.

İspat tamamlanmıştır. ■

Krause [40]'de taksi düzlemin Öklidyen geometri aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını incelemiş ve taksi düzlemin, KAK aksiyomu hariç tüm Öklidyen geometri aksiyomlarını sağladığını göstermiştir. Ancak KAK aksiyomu sağlanmadığından, taksi düzlemin Öklidyen geometri modeli olmadığı, dolayısıyla Öklid-dışı geometriler sınıfında olduğunu belirtmiştir. Bu kısımda aynı yaklaşım kullanılarak $m$-düzleminin Öklidyen geometri aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını inceleyeceğiz. Göreceğiz ki, varacağımız sonuç Krause'nin sonucuna benzer olacaktır.

Konum aksiyomları olarak bilinen ilk iki aksiyom nokta ve doğrularla ilgilidir ve Öklidyen analitik düzlemde geçerli olduğundan $m$-düzlemde de geçerlidir.
[**E1**] Verilen iki noktayı içeren birtek doğru vardır.
[**E2**] Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

Bir sonraki üç aksiyom metrik olma özellikleridir ve Teorem 4.1.1'de $d_m$ nin metrik olduğu gösterilmiştir.

[**E3**] Her sıralı $(A, B)$ nokta çifti için $d_m$, negatif olmayan bir $d_m(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_m(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[**E4**] Her $A$ ve $B$ noktaları için $d_m(A, B) = d_m(B, A)$ dir.

[**E5**] Her $A$, $B$ ve $C$ noktaları için $d_m(A, B) + d_m(B, C) \geq d_m(A, C)$ dir.

Altıncı aksiyom her doğrunun cetvele sahip olduğunu garantiler ve Teorem 4.2.1'de her doğrunun cetvele sahip olduğu gösterilmiştir.

[**E6**] Verilen her $l$ doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm $A, B$ noktaları için $|f_l(A) - f_l(B)| = d_m(A, B)$ dir.

Yedinci aksiyom düzlem ayırma aksiyomudur ve arada olma kavramı değişmediğinden Öklidyen analitik düzlemde olduğu gibi $m$-düzlemde de geçerli olacaktır.

[**E7**] Verilen her $l$ doğrusu için $\mathbb{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan $H_1$ ve $H_2$ gibi iki alt kümesi vardır.

$(i)$ $H_1$ ve $H_2$ konvekstir.

$(ii)$ $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ dir.

$(iii)$ $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ dir.

Bir sonraki dört aksiyom açı ölçme aksiyomlarıdır. $m$-düzlemindeki açı ölçme aksiyomu Öklidyen analitik düzlemdeki açı ölçme aksiyomu ile aynı olduğundan bu aksiyomlar geçerli olacaktır.

[**E8**] $m_E$, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] $H$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir $r$ reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m_E(\angle PAB) = r$ olacak şekilde bir tek $AP$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer $D$ noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise, $m_E\angle ABD + m_E\angle DBC = m_E\angle ABC$ dir.

[**E11**] Eğer $B$, $A$ ile $C$ arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise, $m_E\angle ABD + m_E\angle DBC = 180$ dir.

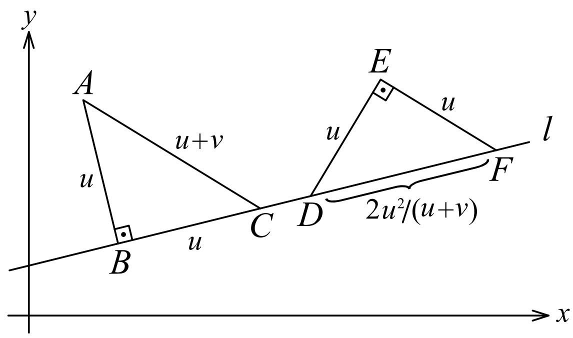
On ikinci aksiyom KAK aksiyomudur ve $m$-düzlemde geçerli değildir. Bu aksiyomun geçerli olmadığı Örnek 4.2.1 de gösterilmiştir.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

Son aksiyom paralellik aksiyomudur ve sadece nokta ve doğrularla ilgilidir. Öklidyen analitik düzlemde geçerli olduğundan $m$-düzlemde de geçerli olacaktır.
[**E13**] $l$ doğrusu dışında bir $P$ noktası verilsin. Bu durumda $P$ noktasından geçen ve $l$ doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Aşağıdaki örnek, $m$-düzleminde kenar-açı-kenar aksiyomunun sağlanmadığını -$d_m$ uzaklığı için (4.1.3) eşitliğini kullanarak- gösterir. Örnekte kullanılan $m$, $u$ ve $v$ reel sayıları $d_m$ fonksiyonunda kullanılan değerlerle aynıdır.

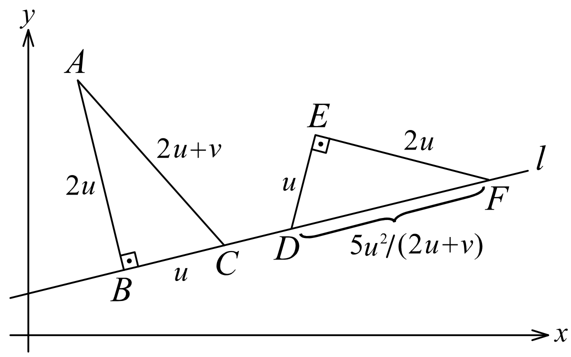
**Örnek 4.2.1** Düzlemde $m \in \mathbb{R}$ eğimli bir $l$ doğrusu alalım ve $u, v \in \mathbb{R}$ $u \geq v \geq 0 \neq u$ olmak üzere, kenarlarının Öklidyen uzaklıkları $d_E(A, B) = 1$, $d_E(B, C) = 1$, $d_E(A, C) = \sqrt{2}$, $d_E(D, E) = u\sqrt{2}/(u + v)$, $d_E(E, F) = u\sqrt{2}/(u + v)$ ve $d_E(D, F) = 2u/(u + v)$ olan $ABC$ ve $DEF$ dik üçgenlerini Şekil 4.2.1'deki gibi çizelim.




Şekil 4.2.1

Bu durumda, bu doğru parçalarının $m$-uzaklıkları (4.2.1) eşitliği kullanılarak kolayca bulunur: $d_m(A, B) = u$, $d_m(B, C) = u$, $d_m(A, C) = u + v$, $d_m(D, E) = u$, $d_E(E, F) = u$ ve $d_E(D, F) = 2u^2/(u + v)$ dir. Burada $u \neq (\sqrt{2} - 1)v$ iken $u + v \neq 2u^2/(u + v)$ dir. O halde bu örnek, $u \neq (\sqrt{2} - 1)v$ iken $m$-düzlemde KAK aksiyomunun sağlanmadığını gösterir. Benzer bir örnek $u = (\sqrt{2} - 1)v$ durumunda da bu aksiyomun sağlanmayacağını gösterir: Yine düzlemde $m \in \mathbb{R}$ eğimli bir $l$ doğrusu alalım ve $u, v \in \mathbb{R}$ $u \geq v \geq 0 \neq 0$ olmak üzere, kenarlarının Öklidyen uzaklıkları $d_E(A, B) = 2$, $d_E(B, C) = 1$, $d_E(A, C) = \sqrt{5}$, $d_E(D, E) = u\sqrt{5}/(2u + v)$,

$d_E(E,F) = 2u\sqrt{5}/(2u+v)$ ve $d_E(D,F) = 5u/(2u+v)$ olan $ABC$ ve $DEF$ dik üçgenlerini Şekil 4.2.2'deki gibi çizelim.




Şekil 4.2.2

Bu durumda, bu doğru parçalarının $m$-uzaklıkları (4.2.1) eşitliği kullanılarak kolayca bulunur: $d_m(A,B) = 2u$, $d_m(B,C) = u$, $d_m(A,C) = 2u+v$, $d_m(D,E) = u$, $d_E(E,F) = 2u$ ve $d_E(D,F) = 5u^2/(2u+v)$ dir. Burada $u = (\sqrt{2}-1)v$ iken -hatta $u \neq (\sqrt{5}-2)v$ iken- $2u+v \neq 5u^2/(2u+v)$ dir. Açıkça, eğer aksiyom sağlansaydı $d_m(A,C) = d_m(D,E)$ olmalıydı. O halde $m$-düzleminde KAK aksiyomu sağlamaz.

Sonuç olarak, $m$-düzlemi Öklid-dışı geometriler sınıfındadır. □

## 4.3 $m$-Düzleminde Bazı Özellikler

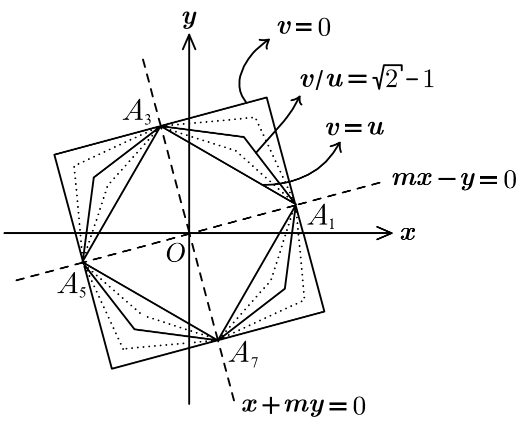
Bu kısımda önce, $m$ düzleminde "birim çember", "bir noktanın bir doğruya uzaklığı" ve "iki noktanın en kısa uzaklık kümesi" kavramları işlenecek; daha sonra da iki nokta arasındaki $m$ ve Öklid uzaklıkları arasında fonksiyonel bir bağıntı olduğu gösterilip bunun bazı sonuçları verilecektir.

### 4.3.1 $m$-Düzleminde Birim Çember

Bu metrik geometriye ait çemberleri tanımak için birim çembere bakmak yeterli olacaktır. Alışılageldiği gibi, $m$ düzleminde orijine $m$ uzaklığı 1 br olan noktaların geometrik yerine *birim m çember* denir. Açıkça, $m$-düzleminde $(0,0)$ noktasına $m$-uzaklığı 1 br olan $(x,y)$ noktaları

$$\left(u\max\{|x+my|\,,|mx-y|\}+v\min\{|x+my|\,,|mx-y|\}\right)\diagup\sqrt{1+m^2}=1 \quad (4.3.1)$$

denklemini sağlar. Bu denklemin geometrik yerinin $k=\sqrt{1+m^2}$ için $A_1=\left(\frac{1}{uk},\frac{m}{uk}\right)$, $A_2=\left(\frac{1-m}{(u+v)k},\frac{1+m}{(u+v)k}\right)$, $A_3=\left(\frac{-m}{uk},\frac{1}{uk}\right)$, $A_4=\left(\frac{-1-m}{(u+v)k},\frac{1-m}{(u+v)k}\right)$, $A_5=\left(\frac{-1}{uk},\frac{-m}{uk}\right)$, $A_6=\left(\frac{m-1}{(u+v)k},\frac{-1-m}{(u+v)k}\right)$, $A_7=\left(\frac{m}{uk},\frac{-1}{uk}\right)$ ve $A_8=\left(\frac{1+m}{(u+v)k},\frac{m-1}{(u+v)k}\right)$ olmak üzere, $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_5A_6$, $A_6A_7$, $A_7A_8$ ve $A_8A_1$ doğru parçalarının birleşimi olduğunu görmek zor değildir. Bununla birlikte, bu doğru parçalarının birleşimi; eğer $u=v$ ise köşeleri $A_1$, $A_3$, $A_5$ ve $A_7$ olan bir kare, eğer $v=0$ ise köşeleri $A_2$, $A_4$, $A_6$ ve $A_8$ olan bir kare, ve son olarak eğer $0<v/u<1$ ise köşeleri $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$ ve $A_8$ olan bir sekizgendir. Özel olarak $v/u=\sqrt{2}-1$ ise bu sekizgen Öklidyen düzgünür (Bkz: Şekil 4.3.1).




Şekil 4.3.1

Böylece $m$ düzlemindeki birim $m$ çemberlerleri, dolayısıyla da genel olarak $m$ çemberleri tanımış olduk. Şimdi ilk akla gelen sorulardan biri, herhalde, bir $m$ çemberinin çevresinin çapına oranının, yani $\pi_m$ değerinin kaç olduğudur. $m$ düzlemi içindeki her $m$ çemberi Öklidyen anlamda birbirinin benzeri olacağından, bu oranın sabit olacağı aşikardır. Basit, fakat uzun sayılabilecek ve burada vermeye gerek olmayan hesaplamalarla $\pi_m = 4(u^2 + v^2)/(u^2 + uv)$ bulunur. Dikkat edilirse $\pi_m$, -beklendiği gibi- $m$ den bağımsızdır.

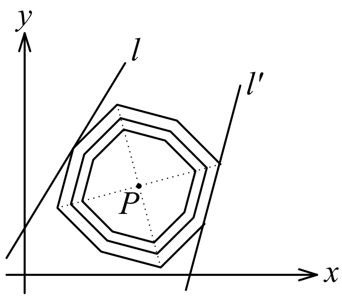
Bir sonraki kısımda, $m$ çemberlerin tipleri hakkında edindiğimiz bilgiler sayesinde $m$ düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığını kolayca hesaplayabileceğimiz bir formül vereceğiz.

## 4.3.2 Bir Noktanın Bir Doğruya $m$-Uzaklığı

$m$-düzleminde bir $P$ noktasının bir $l$ doğrusuna olan $m$-uzaklığı, alışılageldiği üzere

$$d_m(P,l) = \min_{X \in l} d_m(P,X) \tag{4.3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaklık, geometrik olarak $P$ noktasını merkez kabul eden ve $l$ doğrusuyla en az bir ortak noktası olan $m$ çemberlerinin en küçüğünün yarıçap uzunluğu olarak düşünülebilir. Bununla birlikte, aranan çember, $l$ doğrusunu kesmeyen $P$ merkezli bir $m$ çemberini doğruya değene kadar büyütmekle elde edilebilir (Bkz: Şekil 4.3.2). Bu düşünceler, verilen bir noktanın bir doğruya olan $m$-uzaklığını bulmak için kullanışlıdır. Bunun sebebi $m$ çemberinin çokgen oluşudur. Açıkça, istediğimiz uzaklığı bulmak için aradığımız $m$ çemberi, doğruya köşe noktalarından birinde teğettir ya da bir kenar doğru üzerinde olur (Bkz: Şekil 4.3.2).




Şekil 4.3.2

Bununla birlikte, bir kenarın doğru üzerinde olması da $m$ çemberinin doğruya teğet olması durumu gibi düşünülebilir. Sonuç olarak, istenen uzaklık, bir köşesi doğru üzerinde olan $P$ merkezli $m$ çemberlerinin yarıçaplarının en küçüğüdür. Aşağıdaki teorem bu düşüncelerin bir ürünüdür:

**Teorem 4.3.1** *Düzlemde, $P = (x_0, y_0)$ noktasının, denklemi $ax + by + c = 0$ olan $l$ doğrusuna m-uzaklığı*

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a+bm|}{u}, \frac{|am-b|}{u}\right\}} & , \ u = v \\ \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u+v}, \frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u+v}\right\}} & , \ v = 0 \\ \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a+bm|}{u}, \frac{|am-b|}{u}, \frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u+v}, \frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u+v}\right\}} & , \ 0 < v/u < 1 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

*eşitliğiyle hesaplanabilir.*

**İspat:** Altbölüm 4.3.1'de verilen bilgiler doğrultusunda, $P = (x_0, y_0)$ merkezli bir $m$ çemberinin herhangi karşılıklı iki köşesinden geçen doğrunun $P$ noktasından geçeceği aşikardır. Bu doğruların denklemleri basit hesaplamalarla kolayca aşağıdaki gibi bulunur:

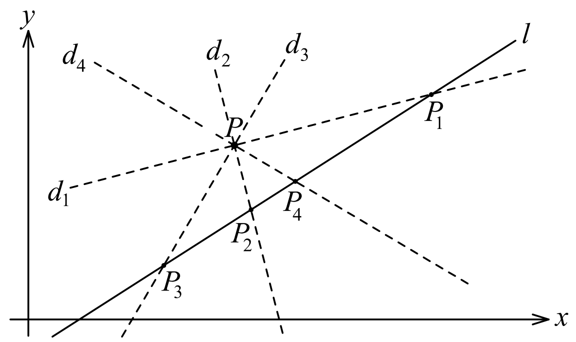
$(i)$ Eğer $u = v$ ise, $m$ çemberinin karşılıklı köşelerini birleştiren iki doğru vardır: $d_1 : mx - y - mx_0 + y_0 = 0$ ve $d_2 : x + my - x_0 - my_0 = 0$.

$(ii)$ Eğer $v = 0$ ise, $m$ çemberinin karşılıklı köşelerini birleştiren iki doğru vardır: $d_3 : (m-1)x - (1+m)y - (m-1)x_0 + (1+m)y_0 = 0$ ve $d_4 : (1+m)x + (m-1)y - (1+m)x_0 - (m-1)y_0 = 0$.

$(iii)$ Eğer $0 < v/u < 1$ ise, $m$ çemberinin karşılıklı köşelerini birleştiren dört doğru vardır: Bunlar yukarıda ifade edilen $d_1$, $d_2$, $d_3$ ve $d_4$ doğrularıdır.

Bu doğrulardan hiçbirinin $l$ doğrusuna paralel olmadığını ve $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ doğrularının $l$ doğrusuyla kesişimlerinin sırasıyla, $P_1$, $P_2$, $P_3$ ve $P_4$ noktaları olduğunu kabul edelim (Bkz: Şekil 4.3.3). Bu kısımın başındaki tartışmalarımızdan, $P$ noktasının $l$ doğrusuna olan $m$-uzaklığının

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \min\{d_m(P,P_1), d_m(P,P_2)\} & , \ u = v \\ \min\{d_m(P,P_3), d_m(P,P_4)\} & , \ v = 0 \\ \min\{d_m(P,P_1), d_m(P,P_2), d_m(P,P_3), d_m(P,P_4)\} & , \ 0 < v/u < 1 \end{cases} \quad (4.3.4)$$




Şekil 4.3.3

olacağı aşikardır. Hesaplamalarla, noktaların koordinatları

$$P_1 = \left(\frac{bmx_0 - by_0 - c}{a + bm}, \frac{-amx_0 + ay_0 - cm}{a + bm}\right), \quad P_2 = \left(\frac{-bx_0 - bmy_0 - mc}{am - b}, \frac{ax_0 + amy_0 + c}{am - b}\right),$$

$$P_3 = \left(\frac{b(1+m)x_0 - b(1-m)y_0 - (1-m)c}{a(1-m) + b(1+m)}, \frac{-a(1+m)x_0 + a(1-m)y_0 - (1+m)c}{a(1-m) + b(1+m)}\right) \text{ ve}$$

$$P_4 = \left(\frac{-b(1-m)x_0 - b(1+m)y_0 - (1+m)c}{a(1+m) - b(1-m)}, \frac{a(1-m)x_0 + a(1+m)y_0 + (1-m)c}{a(1+m) - b(1-m)}\right)$$

şeklinde; aranan uzaklıklar da (4.1.3) eşitliği kullanılarak kolayca

$$d_m(P, P_1) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|a+bm|}{u}}, \; d_m(P, P_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|am-b|}{u}},$$

$$d_m(P, P_3) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u+v}}, \; d_m(P, P_4) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u+v}}$$

şeklinde bulunur. Burada $m$ değeri $-a/b$, $b/a$, $(a+b)/(a-b)$ ve $-(a-b)/(a+b)$ değerlerini alamayacağından, $u > 0$ olduğundan ve son olarak, $a$ ve $b$ nin ikisi birden sıfır olamayacağından verilen ifadelerin hepsinin tanımlı olduğuna dikkat ediniz. Açıkça, payları aynı olan kesirli ifadenin minimumu, paydası maksimum olandır. Bu gerçek, $d_1$, $d_2$, $d_3$ ve $d_4$ doğrularından hiçbirinin $l$ doğrusuna paralel olmadığı durumda, teoremde verilen formülün geçerli olduğunun ispatını tamamlar. Eğer bu doğrulardan biri $l$ doğrusuna paralel ise, açıkça $P_1$, $P_2$, $P_3$ ve $P_4$ noktalarından biri var olmayacaktır. Böylece P noktasının var olmayan bir noktaya uzaklığı da söz konusu olmayacaktır. Dolayısıyla (4.3.4) eşitliğinde ilgili uzaklık çıkarılacaktır. Ancak bu durumda (4.3.3) eşitliğindeki paydalarda, maksimumu alınacak sıfırdan farklı değer veya değerlerin yanına sadece bir sıfır eklenmiş olacak ve sonuç değişmeyecektir. O halde, $d_1$, $d_2$, $d_3$ ve $d_4$ doğrulardan biri $l$ doğrusuna paralel olduğunda da (4.3.3) eşitliği geçerlidir. Bu doğruların en çok birinin $l$ doğrusuna paralel olacağı açıktır. İspat tamamlanmıştır. ■

### 4.3.3 İki Noktanın En Kısa $m$-Uzaklık Kümesi

$A$ ve $B$, $m$-düzleminde farklı iki nokta olmak üzere, $d_m(A,X) + d_m(X,B) = d_m(A,B)$ özelliğini sağlayan tüm $X$ noktalarının kümesine $A$ ve $B$ noktalarının *en kısa m uzaklık kümesi* denir ve bu küme $M(A,B)$ ile gösterilir. Kolayca görülebileceği üzere, Öklid düzleminde $d_E(A,X) + d_E(X,B) = d_E(A,B)$ özelliğini sağlayan tüm $X$ noktalarının kümesinin geometrik yeri bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. Ancak $A$ ve $B$ noktalarının en kısa $m$-uzaklık kümesinin geometrik yeri bu iki noktayı birleştiren bir doğru parçası olabileceği gibi bir düzlemsel bölge de belirtebilecektir. Elde edilen düzlemsel bölgeler bu noktaları karşılıklı olarak köşe kabul eden ve kenarları doğrultu eksenlerine ya da bunların açıortaylarına paralel olan özel *paralelkenar*lardır. Düzlemde verilen $A$ ve $B$ noktalarının en kısa $m$-uzaklık kümesinin geometrik yerini bulmak için yapılan işlemler uzun ve sıkıcı olduğundan burada vermiyoruz. Bununla birlikte, elde edilen sonuçları bir şekille ifade edeceğiz. Şekil 4.3.4, verilen iki noktanın en kısa $m$-uzaklık kümelesinin geometrik yerlerini belirlemek için yeterli bilgi içermektedir.

### 4.3.4 Öklid ve $m$-Uzaklıkları Arasındaki İlişki

Düzlemde iki nokta arasındaki Öklidyen ve $m$-uzaklıklarını, bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini kullanarak birbiri cinsinden yazmak mümkündür. Aşağıdaki teorem bu iki uzaklık arasındaki ilişkiyi verir. Teoremde kısalığı sağlamak için $u' = u/\sqrt{1+m^2}$ ve $v' = v/\sqrt{1+m^2}$ gösterimleri kullanılmıştır.

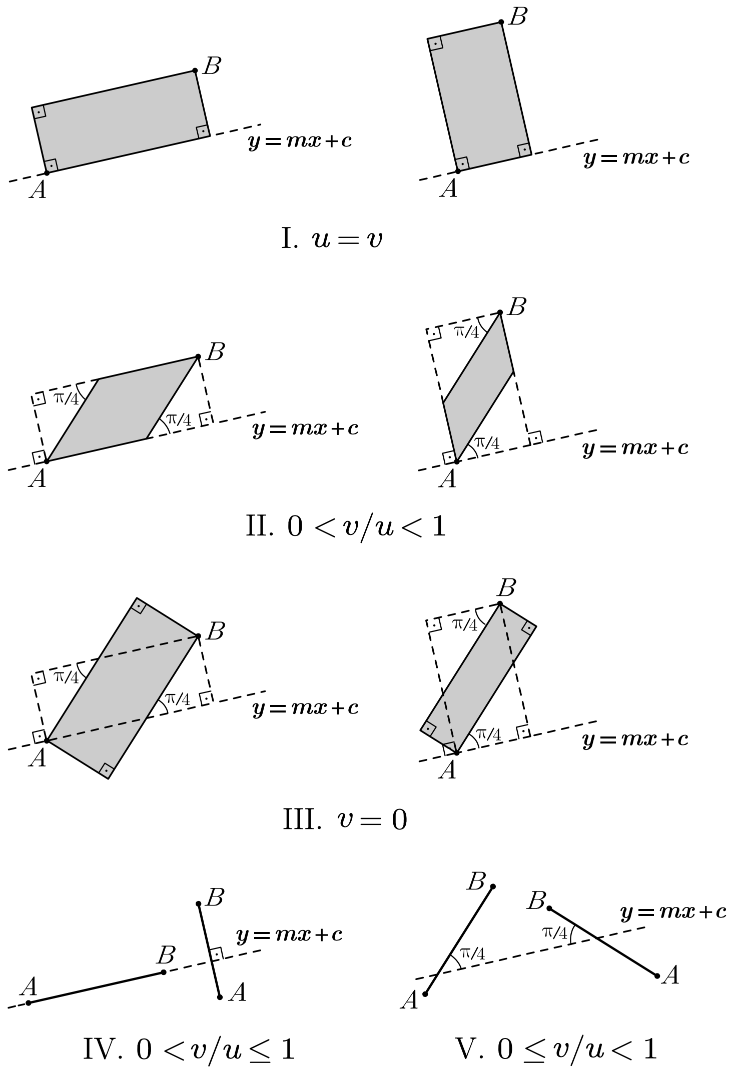
**Teorem 4.3.2** *$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $n$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,* $\rho(n) = (1+n^2)^{1/2} \big/ (u' \max\{|1+mn|, |m-n|\} + v' \min\{|1+mn|, |m-n|\})$ *olmak üzere*

$$d_E(A,B) = \rho(n) d_m(A,B) \tag{4.3.5}$$

*dir. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise,*

$$d_E(P,Q) = [1 \big/ (u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\})] d_m(P,Q) \tag{4.3.6}$$

*dir.*




Şekil 4.3.4

**İspat:** $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ kartezyen koordinat düzleminde iki nokta olsun. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde değilse, $n = (y_2 - y_1) \diagup (x_2 - x_1)$ dir. Buradan kolayca $d_E(A, B) = |x_2 - x_1| (1 + m^2)^{1/2}$ ve
$d_m(A, B) = |x_2 - x_1| (u' \max\{|1{+}mn|, |m{-}n|\} + v' \min\{|1{+}mn|, |m{-}n|\})$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa (4.3.5) eşitliği bulunur. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda $d_E(A, B) = |y_2 - y_1|$ ve $d_m(A, B) = |y_2 - y_1| (u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\})$ olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa da (4.3.6) eşitliği elde edilir. ■

Bu teoremden hemen çıkarılabilecek iki sonuç aşağıdadır:

**Sonuç 4.3.3** *$A$, $B$, $C$ ve $D$ düzlemde dört nokta olmak üzere, eğer $AB$ ve $CD$ doğruları çakışık, paralel ya da birbirine dik ise,*

$$d_m(A,B) = d_m(C,D) \Leftrightarrow d_E(A,B) = d_E(C,D) \tag{4.3.7}$$

*dir.*

**İspat:** $AB$ ve $CD$ doğrularının çakışık ve paralel olma durumlarında önermenin doğruluğu açıktır. $AB$ ve $CD$ doğrularının birbirine dik olması durumuna bakalım. $AB$ doğrusu koordinat eksenlerinden birine paralel olsun. Bu durumda (4.3.5) veya (4.3.6) eşitlikleri kullanılarak $d_E(A,B) = [1/(u' \max\{1,|m|\}+v' \min\{1,|m|\})]d_m(A,B)$ ve $d_E(C,D) = [1/(u' \max\{1,|m|\} + v' \min\{1,|m|\})]d_m(C,D)$ elde edilir. Böylece $d_m(A,B) = d_m(C,D) \Leftrightarrow d_E(A,B) = d_E(C,D)$. $AB$ doğrusu koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda eğer $AB$ doğrusunun eğimi $n$ ise, $CD$ doğrusunun eğimi $-1/n$ olur. (4.3.6) eşitliği kullanılılarak $d_E(A,B) = \rho(n)d_m(A,B)$ ve $d_E(C,D) = \rho(-1/n)d_m(C,D)$ elde edilir. Doğrudan bir hesaplamayla $\rho(n) = \rho(-1/n)$ bulunur. Böylece, bu durum için de $d_m(A,B) = d_m(C,D) \Leftrightarrow d_E(A,B) = d_E(C,D)$ sağlanır. ■

**Sonuç 4.3.4** *$A$, $B$ ve $C$ düzlemde doğrudaş farklı üç nokta ise,*

$$d_m(A,C)/d_m(C,B) = d_E(A,C)/d_E(C,B) \tag{4.3.8}$$

*dir.*

**İspat:** Eğer $AB$ doğrusu eğimi $n$ olan, dikey olmayan bir doğru ise, (4.3.5) eşitliğinden $d_E(A,C) = \rho(n)d_m(A,C)$ ve $d_E(C,B) = \rho(n)d_m(C,B)$ elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa oranı (4.3.8) eşitliğini verir. Eğer $AB$ doğrusu dikey bir doğru ise, (4.3.6) eşitliği kullanılarak, benzer şekilde (4.3.8) eşitliği elde edilir. ■

Bir sonraki sonuç, uzunluk oranlarıyla ilgili meşhur Thales teoreminin $m$-düzlemdeki benzeridir:

**Sonuç 4.3.5** *$A$, $B$ ve $C$ düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta olsun. $A$, $B$ ve $C$ den farklı $D$ ve $E$ noktaları da sırasıyla $AB$ ve $AC$ doğruları üzerinde olsun. Buna* *göre, $BC$ ve $DE$ doğrularının paralel olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\frac{d_m(A,D)}{d_m(A,B)} = \frac{d_m(A,E)}{d_m(A,C)} = \frac{d_m(D,E)}{d_m(B,C)} \tag{4.3.9}$$

*eşitliklerinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Öklid düzlemindeki Thales teoremi ve Sonuç 4.3.4'ün direkt sonucudur. ■

Yönlü uzunluk kavramı, Öklid düzleminde tanımlandığı gibi $m$-düzlemde de tanımlanabilir. Aşağıdaki tanımda düzlemde iki nokta arasındaki yönlü $m$ uzunluk kavramı verilmiştir:

**Tanım 4.3.1** $A$ ve $B$, $m$-düzleminde *yönlendirilmiş* bir $l$ doğrusu üzerinde farklı iki nokta olmak üzere

$$d_m[A,B] = \begin{cases} d_m(A,B), & AB \text{ doğru parçası, } l \text{ ile aynı yönde yönlendirilmiş ise} \\ -d_m(A,B), & AB \text{ doğru parçası, } l \text{ ile zıt yönde yönlendirilmiş ise} \end{cases}$$

eşitliğinde verilen $d_m[A,B]$ sayısına $AB$ doğru parçasının yönlü $m$ uzunluğu denir.

Bu tanıma göre, doğrudaş ve birbirinden farklı $A$, $B$ ve $C$ noktaları için aşağıdakiler geçerlidir:

$(i)$ $B$ noktası $A$ ve $C$ noktaları arasında ise, $(d_m[A,B]/d_m[B,C]) > 0$ dir.

$(ii)$ $B$ noktası $A$ ve $C$ noktaları arasında değil ise, $(d_m[A,B]/d_m[B,C]) < 0$ dir.

**Teorem 4.3.6** *$A$, $B$ ve $X$ düzlemde doğrudaş farklı üç nokta ise,*

$$d_m[A,X]/d_m[X,B] = d_E[A,X]/d_E[X,B] \tag{4.3.10}$$

*dir.*

**İspat:** Sonuç 4.3.4'ten uzunluk oranları eşittir. Her iki tarafta yönler de aynı olduğundan eşitlik geçerlidir. ■

Aşağıdaki iki sonuç sırasıyla, yönlü uzunluk kavramıyla ilgili meşhur Ceva ve Menelaus teoremlerinin $m$-düzlemdeki benzerleridir:

**Sonuç 4.3.7** *$A$, $B$ ve $C$ düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta olsun. $A$, $B$ ve $C$ noktalarından farklı olan $D$, $E$ ve $F$ noktaları da sırasıyla $BC$, $AC$ ve $AB$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre; $AB$, $BE$ ve $CF$ doğrularının noktadaş ya da paralel olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\frac{d_m[A,F]}{d_m[F,B]}.\frac{d_m[B,D]}{d_m[D,C]}.\frac{d_m[C,E]}{d_m[E,A]}=1$$

*eşitliklerinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Öklid düzlemindeki Ceva teoremi ve Teorem 4.3.6'nın direkt sonucudur. ■

**Sonuç 4.3.8** *$A$, $B$ ve $C$ düzlemde doğrudaş olmayan üç nokta olsun. $A$, $B$ ve $C$ noktalarından farklı olan $D$, $E$ ve $F$ noktaları da sırasıyla $BC$, $AC$ ve $AB$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre; $D$, $E$ ve $F$ noktalarının doğrudaş olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\frac{d_m[A,F]}{d_m[F,B]}.\frac{d_m[B,D]}{d_m[D,C]}.\frac{d_m[C,E]}{d_m[E,A]}=-1 \tag{4.3.12}$$

*eşitliğinin sağlanmasıdır.*

**İspat:** Öklid düzlemindeki Menelaus teoremi ve Teorem 4.3.6'nın direkt sonucudur. ■

**Uyarı 4.3.1** Öklid düzlemindeki Thales, Ceva ve Menelaus teoremleri, sırasıyla Sonuç 4.3.5, Sonuç 4.3.7 ve Sonuç 4.3.8'de $d_m$ yerine $d_E$ yazmakla elde edilebilir.

## 4.4 $m$-Düzlemin İzometrileri

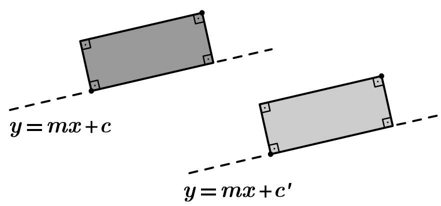
Bilindiği gibi, $[\mathbb{R}^2, L_E, d]$ metrik geometri modelinin bir *izometri*si; $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye, iki nokta arasındaki $d$ uzaklığını koruyan bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Daha özel olarak, eğer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bire-bir ve örten fonksiyonu her $A, B \in \mathbb{R}^2$ için $d_E(A, B) = d_E(f(A), f(B))$ özelliğini sağlıyorsa, $f$ ye Öklidyen düzlemin bir izometrisi veya *Öklidyen izometri*; her $A, B \in \mathbb{R}^2$ için $d_m(A, B) = d_m(f(A), f(B))$ özelliğini sağlıyorsa da, $f$ ye $m$-düzlemin bir izometrisi veya $m$ *izometri* denir. Bu konu içinde, önce $m$-uzaklığı koruyan tüm Öklidyen izometrileri belirleyeceğiz; sonra da $m$-düzleminin bunlardan başka bir izometrisi olmadığını göstereceğiz. Böylece, $m$-düzlemin tüm izometrilerini belirlemiş olacağız. Bu işleri yaparken olabildiğince, zorlu analitik çözümlerden uzak durup bir anlamda sentetik diyebileceğimiz yolları kullanacağız.

Önerme 4.1.3 veya Sonuç 4.3.3 gereğince, aşağıdaki dönüşümlerin iki nokta arasındaki $m$-uzaklığı koruyan Öklidyen izometri oldukları aşikardır:

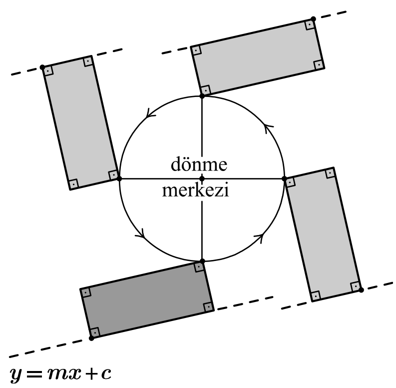
(1) Düzlemi tüm ötelemeleri (Bkz: Şekil 4.4.1),

(2) Bir nokta etrafında $\pi/2$, $\pi$ ve $3\pi/2$ radyanlık dönmeler (Bkz: Şekil 4.4.2),

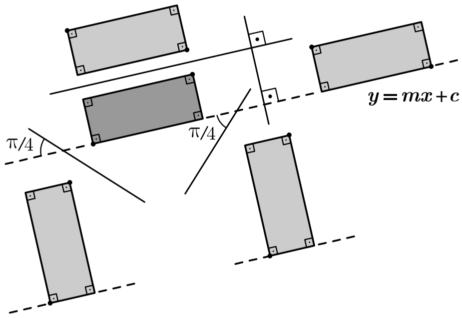
(3) Doğrultu eksenlerine ya da bunların açıortaylarına paralel olan doğrulara -daha açık olarak eğimi $m$, $\frac{-1}{m}$, $\frac{m-1}{1+m}$ ya da $\frac{1+m}{1-m}$ olan doğrulara- göre yansımalar (Bkz: Şekil 4.4.3).




Şekil 4.4.1




Şekil 4.4.2



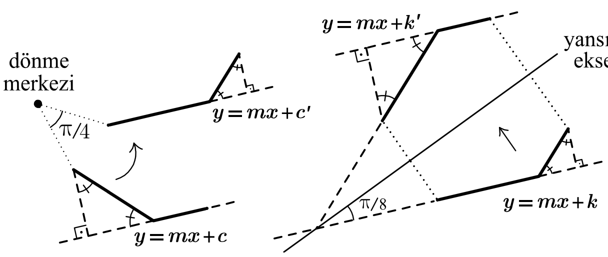

Şekil 4.4.3

Bununla birlikte, $d_m$ uzaklık fonksiyonunda $v/u = \sqrt{2}-1$ olduğunda, yukarıda verilen Öklidyen izometrilere ek olarak, iki nokta arasındaki temel yolu daima yine bir temel yola götürdüğü için, "bir nokta etrafında $\pi/4$ radyanlık dönme" ve "$y = mx$ doğrusuyla $\pi/8$ radyanlık açı yapan doğrulara göre yansıma" da iki nokta arasındaki $m$-uzaklığı korur (Bkz: Şekil 4.4.4). Böylece $v/u = \sqrt{2}-1$ durumunda $m$-uzaklığı koruyan Öklidyen izometrilere aşağıdakilerin de ekleneceği aşikardır:

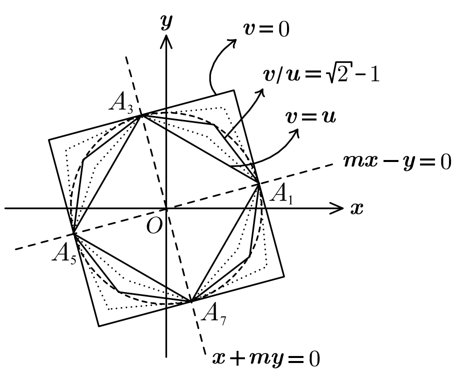
(4) Bir nokta etrafında $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ ve $7\pi/4$ radyanlanlık dönmeler,

(5) $y = mx$ doğrusuyla $\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$ ve $7\pi/8$ radyanlık açı yapan doğrulara -daha açık olarak eğimi $\frac{(1-\sqrt{2})m-1}{(1-\sqrt{2})+m}$, $\frac{(1+\sqrt{2})m-1}{(1+\sqrt{2})+m}$, $\frac{(1-\sqrt{2})m+1}{(1-\sqrt{2})-m}$ ya da $\frac{(1+\sqrt{2})m+1}{(1+\sqrt{2})-m}$ olan doğrulara- göre yansımalar.

Son olarak, aynı merkezli birim Öklidyen ve $m$ çemberlere bakıldığında kalan Öklidyen izometrilerin $m$-uzaklığı korumayacağı aşikardır (Bkz: Şekil 4.4.5).




Şekil 4.4.4




Şekil 4.4.5

Aşağıdaki iki önerme, yukarıdaki gözlemlerimizi kısaca ifade eder (kısalığı sağlamak için, $y$-eksenine paralel olan doğruların eğimlerini $\infty$ ile gösterecek ve $m = 0$, $k \in \mathbb{R}$-$\{0\}$ iken $\frac{k}{m} \to \infty$ kabul edeceğiz):

**Önerme 4.4.1** *(i) $v/u \neq \sqrt{2}-1$ iken, düzlemde bir nokta etrafında $\theta$ radyanlık dönmenin $\mathbb{R}_m^2$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul,*
*$\theta \in \{\frac{t\pi}{2}+2k\pi : 0 \leq t \leq 3,\ t,k \in \mathbb{Z}\}$ olmasıdır.*
*(ii) $v/u = \sqrt{2}-1$ iken, düzlemde bir nokta etrafında $\theta$ radyanlık dönmenin $\mathbb{R}_m^2$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul, $\theta \in \{\frac{t\pi}{4}+2k\pi : 0 \leq t \leq 7,\ t,k \in \mathbb{Z}\}$ olmasıdır.*

**Önerme 4.4.2** *(i) $v/u \neq \sqrt{2}-1$ iken, düzlemde $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetrinin $\mathbb{R}_m^2$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul,*
*$-\frac{a}{b} \in \left\{m, -\frac{1}{m}, \frac{m-1}{1+m}, \frac{1+m}{1-m}\right\}$ olmasıdır.*
*(ii) $v/u = \sqrt{2}-1$ iken, düzlemde $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetrinin $\mathbb{R}_m^2$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul,*
*$-\frac{a}{b} \in \left\{m, -\frac{1}{m}, \frac{m-1}{1+m}, \frac{1+m}{1-m}, \frac{(1-\sqrt{2})m-1}{(1-\sqrt{2})+m}, \frac{(1+\sqrt{2})m-1}{(1+\sqrt{2})+m}, \frac{(1-\sqrt{2})m+1}{(1-\sqrt{2})-m}, \frac{(1+\sqrt{2})m+1}{(1+\sqrt{2})-m}\right\}$ olmasıdır.*

Açıkça, iki izometrinin bileşkesi yine bir izometridir. Böylece $m$-uzaklığı koruyan Öklidyen izometriler; tüm ötelemeler, Önerme 4.4.1'de verilen dönmeler, Önerme 4.4.2'de verilen yansımalar ve bunların bileşkeleridir. Şimdi cevaplanması gereken "$\mathbb{R}_m^2$ nin bunlardan başka bir izometrisi var mıdır?" sorusudur. Aşağıdaki önerme ve onun sonucu, bu soruyu cevaplarken kullanışlı olacaktır.

**Önerme 4.4.3** *$A$ ve $B$, $\mathbb{R}_m^2$ de farklı iki nokta, $\tau : \mathbb{R}_m^2 \to \mathbb{R}_m^2$ dönüşümü de $\mathbb{R}_m^2$ nin bir izometrisi ise, $\tau(M(A,B)) = M(\tau(A), \tau(B))$ dir.*

**İspat:** $Y \in \tau(M(A,B))$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} Y \in \tau(M(A,B)) &\Leftrightarrow Y = \tau(X) \text{ olacak şekilde } \exists X \in M(A,B) \\ &\Leftrightarrow d_m(A,X) + d_m(X,B) = d_m(A,B) \\ &\Leftrightarrow d_m(\tau(A),\tau(X)) + d_m(\tau(X),\tau(B)) = d_m(\tau(A),\tau(B)) \\ &\Leftrightarrow Y = \tau(X) \in M(\tau(A),\tau(B)). \ \blacksquare \end{aligned}$$

$A$ ve $B$, $\mathbb{R}_m^2$ de farklı iki nokta; $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü de $\mathbb{R}_m^2$ nin bir izometrisi olsun. Buna göre, $\tau$ $M(A,B)$ nin köşelerini $M(\tau(A),\tau(B))$ nin köşelerine götürür ve $M(A,B)$ nin tipini korur.

Aşağıdaki önerme, yukarıdaki sorunun cevabının olumsuz olduğunu gösterir.

**Önerme 4.4.4** *Eğer bire-bir ve örten $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü iki nokta arasındaki $m$-uzaklığı koruyorsa, bu dönüşüm iki nokta arasındaki Öklidyen uzaklığı da korur; yani, Öklidyen izometridir.*

**İspat:** $A$ ve $B$, doğrultu eksenlerine ve bu eksenlerin açıortaylarına paralel olmayan bir doğru üzerindeki farklı iki nokta; $C$, $R_{AB}$ nin $A$ ve $B$ den farklı bir köşesi; $\tau$ da $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $0 < v/u < 1$ olmak üzere iki nokta arasındaki $m$-uzaklığı koruyan ve $\tau(A) = A'$, $\tau(B) = B'$, $\tau(C) = C'$ özelliklerine sahip bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Önerme 4.4.3 gereğince $\tau$; $M(A, C)$ yi $M(A', C')$ ye, $M(B, C)$ yi $M(B', C')$ ye ve $M(A, B)$ yi de $M(A', B')$ ye dönüştürür. $\tau$ iki noktanın en kısa uzaklık kümelerinin tiplerini koruduğundan, $M(A', C')$ ve $M(B', C')$ birer doğru parçası, $M(A', B')$ ise bir paralelkenardır. Buna göre, $A', C'$ ve $B', C'$ nokta çiftlerinin herbiri doğrultu eksenlerinden ya da bunların açıoraylarından birine paralel olan bir doğru üzerinde; $A'$ ve $B'$ noktaları ise, bu eksenlere ve bunların açıortaylarına paralel olmayan bir doğru üzerinde yatar. Bu durumda, $A'$, $B'$ ve $C'$ noktalarının, dik açısı $C'$ nde ve dik kenarları doğrultu eksenlerine ya da bunların açıortaylarına paralel olan bir dik üçgen oluşturacağı kolayca görülür. Eğer dik kenarlar doğrultu eksenlerine paralel ise, Sonuç 4.3.3 gereğince $d_E(A, C) = d_E(A', C')$ ve $d_E(B, C) = d_E(B', C')$ olduğu açıktır. Böylece, $ABC$ üçgeni $A'B'C'$ üçgenine eştir ve $d_E(A, B) = d_E(A', B')$ dir. Eğer dik kenarlar doğrultu eksenlerinin açıortaylarına paralel ise, bu durumda $v/u = \sqrt{2} - 1$ olur ve yine $d_E(A, C) = d_E(A', C')$ ve $d_E(B, C) = d_E(B', C')$ elde edilir. Böylece $ABC$ üçgeni yine $A'B'C'$ üçgenine eştir ve $d_E(A, B) = d_E(A', B')$ dir. O halde, $\tau$ bir Öklidyen izometridir. Burada, $v = 0$ ve $v = 1$ durumları da benzer şekilde görülür. ■

$\mathbb{R}^2_m$ deki, orijin etrafında $\theta \in [0, 2\pi)$ radyanlık izometrik dönmelerin kümesini $R_m$ ile; orijinden geçen doğrulara göre izometrik yansımaların kümesini de $S_m$ ile gösterelim. Bu gösterimlerle yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonucu doğrudan elde ederiz:

**Sonuç 4.4.5** *Eğer $\tau : \mathbb{R}^2_m \to \mathbb{R}^2_m$, $\tau(O) = O$ özellğini sağlayan bir izometri ise, ya $\tau \in R_m$ ya da $\tau \in S_m$ dir.*

Sonuç olarak, eğer $v/u \neq \sqrt{2}-1$ ise, dört yansıma ve dört dönmeden oluşan $O_m(2) = R_m \cup S_m$ ortogonal grubuna sahibiz. Bu grup, karenin simetriler grubudur (dihedral grup $D_4$). Eğer $v/u = \sqrt{2}-1$ ise, sekiz yansıma ve sekiz dönmeden oluşan $O_m(2) = R_m \cup S_m$ ortogonal grubuna sahibiz. Bu grup da, Öklidyen düzgün sekizgenin simetriler grubudur (dihedral grup $D_8$). Aşağıdaki son teorem, $\mathbb{R}^2_m$ nin tüm izometrilerinin, $T(2)$ düzlemin tüm ötelemelerini göstermek üzere, $T(2)O_m(2)$ içinde olduğunu gösterir.

**Teorem 4.4.6** *Eğer $f : \mathbb{R}^2_m \to \mathbb{R}^2_m$ bir izometri ise, $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(2)$ ve $g \in O_m(2)$ vardır.*

**İspat:** $f$, $\mathbb{R}^2_m$ nin bir izometrisi olsun. Ayrıca, $A = (a_1, a_2)$ ve $O = (0,0)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. Bir $g$ fonksiyonu $g = T_{-A} \circ f$ şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda $g$ nin bir izometri olduğu açktır. Bununla birlikte, $g$ nin

$$g(O) = (T_{-A} \circ f)(O) = -A + f(O) = -A + A = O$$

özelliği de vardır. O halde, $g \in O_m(2)$ ve $f = T_A \circ g$. $T_A$ ve $g$ nin tekliği aşikardır.

■

## 4.5 $m$-Düzleminde Pisagor Teoremi

Pisagor teoreminin bir $m$ benzeri, $m$-düzleminde $A$ açısı dik olan bir $ABC$ üçgeni için $d_m(B,C) = a$, $d_m(A,C) = b$ ve $d_m(A,B) = c$ uzunlukları arasındaki bir bağıntıyı ifade etmelidir. Bu kısımda, dik üçgenin $m$ kenar uzunluklarına ek olarak yalnızca bir parametre içeren iki karşılık verilecektir. Burada şunu belirtmekte fayda vardır: $m$, genel olarak bir parametredir; ancak $m$-düzlemi içinde, $m$ veya sadece $m$ ye bağlı ifadeler parametre değildir. Çünkü $m$ belirlendiğinde bu ifadeler yalnızca birer reel sayı olacaktır. Ayrıca burada $u$ ve $v$ reel saylarını da birer parametre olarak görmeyeceğiz (Bkz: Uyarı 4.1.1).

Kartezyen koordinat düzleminde iki nokta arasındaki Öklid ve $m$-uzaklıklarını birbirine dönüştürmeye yarayan bir bağıntı veren Teorem 4.3.2'yi, aşağıda bir yardımcı teorem olarak aynen veriyoruz:

**Yardımcı Teorem 4.5.1** *$A$ ve $B$, kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta, $n$ de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise, $\rho(n)=(1+n^2)^{1/2} \diagup (u' \max\{|1+mn|\,, |m-n|\}+v' \min\{|1+mn|\,, |m-n|\})$ olmak üzere,*

$$d_E(A,B) = \rho(n) d_m(A,B) \tag{4.5.1}$$

*dir. Eğer $A$ ve $B$ dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise,*

$$d_E(P,Q) = [1 \diagup (u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\})] d_m(P,Q) \tag{4.5.2}$$

*dir.*

Doğrudan hesaplanabilecek başka bir yararlı gerçek de şudur:

**Yardımcı Teorem 4.5.2** *Eğer $n$ sıfırdan farklı bir reel sayı ve $n' = -1/n$ ise,*

$$\rho(n) = \rho(n') \tag{4.5.3}$$

*dir.*

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri ters saat yönünde harflendirilmiş $A$ açısı dik olan bir üçgeni gösterecek ve daha önce tanımlandığı gibi bu üçgenin kenarlarının Öklid uzunlukları $d_E(B,C) = \mathbf{a}$, $d_E(A,C) = \mathbf{b}$ ve $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, $m$ uzunlukları da $d_m(B,C) = a$, $d_m(A,C) = b$ ve $d_m(A,B) = c$ olarak alınacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem, genelde $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ Öklidyen uzunlukları ile $b$ ve $c$ $m$ uzunlukları birbirinden farklı olduğu halde bunların karşılıklı oranlarının eşit olduğunu ifade eder:

**Yardımcı Teorem 4.5.3** *$ABC$, kartezyen koordinat düzleminde köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş, $A$ açısı dik olan bir üçgen ve $d_E(A,C) = \mathbf{b}$, $d_E(A,B) = \mathbf{c}$, $d_m(A,C) = b$ ve $d_m(A,B) = c$ ise, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir.*

**İspat:** Eğer $ABC$ üçgeninin $AB$ ve $CD$ kenarları koordinat ekenlerine paralel ise, $\mathbf{b} = [1/(u' \max\{1,|m|\} + v' \min\{1,|m|\})]b$ ve $\mathbf{c} = [1/(u' \max\{1,|m|\} + v' \min\{1,|m|\})]c$ olacağı açıktır. Böylece bu iki oran birbirine eşittir. $ABC$ üçgeninin dik kenarlarından biri koordinat eksenlerine paralel olmasın. Bu durumda diğer dik kenar da koordinat eksenlerine paralel değildir. Ancak kenarlar birbirine dik olduğundan, eğer $AB$ doğrusunun eğimi $n$ ise, $AC$ doğrusunun eğimi $-1/n$ dir. Burada $n' = -1/n$ denirse, (4.5.1) eşitliğinden, $\mathbf{c} = \rho(n)c$ ve $\mathbf{b} = \rho(n')b$ eşitlikleri elde edilir. Fakat bu durumda (4.5.3) eşitliği, $\mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ eşitliğini gerektirir. ■

Bu gerçekler yardımıyla, verilen bir dik üçgenin $m$ kenar uzunlukları arasında, bu uzunluklar hariç yalnızca bir parametreye -daha açık olarak, dik kenarlardan birinin eğimine ya da hipotenüsün eğimine- bağlı bir bağıntı olduğunu göstereceğiz. Bununla birlikte eğer dik kenarlardan biri ya da hipotenüs koordinat eksenlerinden birine paralel ise, dik üçgenin $m$ kenar uzunlukları arasında başka hiçbir parametreye bağlı olmayan bir bağıntı olduğunu göreceğiz.

**Teorem 4.5.4** $(i)$ *Eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel ise,*

$$(u' \max\{1,|m|\} + v' \min\{1,|m|\})a = u' \max\{|b+cm|, |bm-c|\} + v' \min\{|b+cm|, |bm-c|\}, \qquad (4.5.4)$$

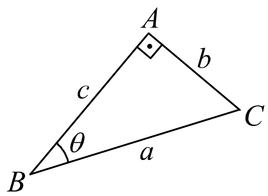
$(ii)$ *eğer $ABC$ üçgeninin dik kenarları koordinat eksenlerine paralel değil, hipotenüsü (yani $BC$ kenarı) dikey değil ve dik kenarlardan birinin eğimi $n$ ise,*

$$
\begin{aligned}
(u' \max\{|1+mn|\,,|m-n|\} + v' \min\{|1+mn|\,,|m-n|\})a \;\; &= \\
u' \max\{|(bn+c)+m(cn-b)|\,,|m(bn+c)-(cn-b)|\}+ & \\
v' \min\{|(bn+c)+m(cn-b)|\,,|m(bn+c)-(cn-b)|\} & \qquad (4.5.5)
\end{aligned}
$$

dir.

**İspat:** $(i)$ Bilinen $m$-uzaklık tanımından $a = u' \max\{|\mathbf{b}m-\mathbf{c}|\,,|\mathbf{c}m+\mathbf{b}|\} + v' \min\{|\mathbf{b}m-\mathbf{c}|\,,|\mathbf{c}m+\mathbf{b}|\}$ elde edilir. Yardımcı Teorem 4.4.2 nin ispatında verilen **b** ve **c** değerleri bu eşitlikte yerine konursa (4.4.4) eşitliği elde edilir.

$(ii)$ $CBA$ açısı $\theta$ ile gösterilsin. $ABC$ üçgeninin ters saat yönünde harflendirilmesiyle $\theta$ nın pozitif ve dar olacağına dikkat ediniz (Bkz: Şekil 4.5.1).




Şekil 4.5.1

$AB$ kenarının eğimi $n$, $BC$ kenarının eğimi de $n_1$ olsun. Buna göre, $AC$ kenarının eğimi $-1/n = n'$ olur ve $\tan\theta = (n-n_1)/(1+nn_1)$ eşitliği elde edilir (bu son eşitlik, iki açının farklarının tanjantı formülünden kolayca elde edilir). Ayrıca Yardımcı Teorem 4.5.3 gereğince $\tan\theta = \mathbf{b}/\mathbf{c} = b/c$ dir. O halde,

$$b/c = (n-n_1)/(1+nn_1) \qquad (4.5.6)$$

dir. Bu eşitlikten $n_1$ çekilirse, $n \neq -c/b$ olmak üzere,

$$n_1 = (cn-b)/(bn+c) \qquad (4.5.7)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.5.1) eşitliği, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ eşitliğine uygulanır ve Yardımcı Teorem 4.5.2 kullanılırsa

$$[\rho(n_1)]^2 a^2 = [\rho(n)]^2 (b^2+c^2) \qquad (4.5.8)$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlikten de kolayca

$$(u' \max\{|1+mn|, |m-n|\} + v' \min\{|1+mn|, |m-n|\})^2 a^2 = (1+n^2)(b^2+c^2)$$
$$[(u' \max\{|1+mn_1|, |m-n_1|\} + v' \min\{|1+mn_1|, |m-n_1|\})^2 \diagup (1+n_1^2)] \quad (4.5.9)$$

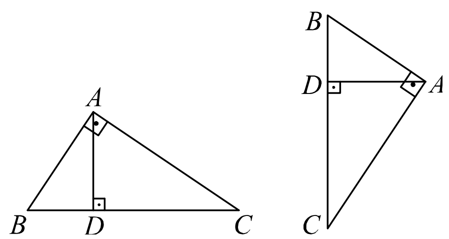
eşitliği elde edilir. (4.5.7) eşitliğindeki $n_1$, (4.5.9) eşitliğinde yerine konursa bu denklemin sağ tarafı $(u' \max\{|(bn+c)+m(cn-b)|, |m(bn+c)-(cn-b)|\} + v' \min\{|(bn+c)+m(cn-b)|, |m(bn+c)-(cn-b)|\})^2$ şeklinde kısaltılabilir. Son olarak, her iki tarafın kare kökü alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.5.5) eşitliği elde edilir. Eğer $AC$ kenarının eğimi $n$ olarak alınırsa, $AC$ kenarının eğimi $n' = -1/n$ olur ve ispatımız (4.5.5) eşitliğinde $n$ yerine $n'$ konularak elde edilen (4.5.5$'$) eşitliğini verir. Fakat (4.5.5$'$) eşitliği $|n|$ ile çarpılırsa (4.5.5) eşitliği elde edilir. Böylece, $n$ dik kenarlardan hangisinin eğimi olursa olsun, (4.5.5) eşitliği doğrudur. ■

**Sonuç 4.5.5** *Eğer $BC$ kenarı, yani $ABC$ üçgeninin hipotenüsü, koordinat eksenlerinden birine paralel ise,*

$$a \diagup (u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\}) = (b^2+c^2) \diagup$$
$$(u' \max\{|bm+c|, |cm-b|\} + v' \min\{|bm+c|, |cm-b|\}) \quad (4.5.10)$$

dir.

**İspat:** $ABC$ üçgeninin $BC$ kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun (Bkz: Şekil 4.5.2). Bu durumda (4.5.10) eşitliği, (4.5.8) eşitliğinin bir sonucu olarak elde edilir. Şöyle ki, eğer $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel ise, $n_1 = 0$ ve böylece $\rho(n_1) = 1$; eğer $BC$ kenarı $y$-eksenine paralel ise, $n_1 \to \infty$ ve böylece $\rho(n_1) \to 1$ dir. Her iki durum için de (4.5.8) eşitliği, $AB$ kenarının eğimi $n$ olmak üzere, $[1 \diagup (u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\})]^2 a^2 = [(1+n^2)^{1/2} \diagup (u' \max\{|1+mn|, |m-n|\} + \min\{|1+mn|, |m-n|\})]^2 (b^2+c^2)$ haline gelir.




Şekil 4.5.2

Benzer üçgenler ve Yardımcı Teorem 4.5.3 ten, $BC$ yatay iken $|n| = |AD/BD| = |AC/AB| = b/c$; $BC$ dikey iken $|n| = c/b$ elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak (4.5.10) eşitliğine denk olan $a^2 \diagup (u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\})^2 = (b^2 + c^2)^2 \diagup (u' \max\{|bm + c|, |cm - b|\} + v' \min\{|bm + c|, |cm - b|\})^2$ eşitliği elde edilir. ∎

Bir sonraki sonuç da Pisagor teoreminin bir $m$ benzeridir ve dik kenarların birinin eğimi yerine hipotenüsün eğimini parametre olarak içerir.

**Sonuç 4.5.6** *Eğer $ABC$ üçgeninin hiçbir kenarı koordinat eksenlerine paralel değil ise, $BC$ kenarının, yani hipotenüsün eğimi $n_1$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} a \diagup (u' \max\{|1 + mn_1|, |m - n_1|\} + v' \min\{|1 + mn_1|, |m - n_1|\}) = (b^2 + c^2) \diagup \\ [(u' \max\{|(cn_1 + b) + m(bn_1 - c)|, |m(cn_1 + b) - (bn_1 - c)|\} + \\ v' \min\{|(cn_1 + b) + m(bn_1 - c)|, |m(cn_1 + b) - (bn_1 - c)|\}) \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

dir.

**İspat:** $AB$ kenarının eğimi $n$ ise, (4.5.6) eşitliğinden

$$n = (b + cn_1) \diagup (c - bn_1) \tag{4.5.12}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $n$ nin eşitini, (4.5.5) eşitliğinde $n$ yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.5.11) eşitliği bulunur. ∎

**Uyarı 4.5.1** $AB$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $n = 0$ iken, Teorem 4.5.4 ün ispatındaki (4.5.5) eşitliğinin elde edilişi geçerli olduğundan (4.5.5) eşitliği, (4.5.4) eşitliğine indirgeneceğine dikkat ediniz. Benzer şekilde, $BC$ kenarı $x$-eksenine paralel, yani $n_1 = 0$ iken, (4.5.11) eşitliği de (4.5.10) eşitliğine indirgenir. Buna ek olarak, (4.5.4) ve (4.5.10) eşitlikleri, sırasıyla $AB$ veya $BC$ kenarları dikey iken, (4.5.5) eşitliğinin $n \to \infty$ ve (4.5.11) eşitliğinin $n_1 \to \infty$ iken limitleridir. Bunu görmek için, önce (4.5.5) ve (4.5.10) eşitliklerinin (4.5.9) eşitliğinden elde edildiğine ve $n \to \infty$ iken $\rho(n) \to 1$ ve $n_1 \to c/b$ ((4.5.7) eşitliğine bakınız); $n_1 \to \infty$ iken $\rho(n_1) \to 1$ ve $n \to -c/b$ ((4.5.12) eşitliğine bakınız) olduğuna dikkat ediniz. Böylece (4.5.9) eşitliği, $n \to \infty$ iken (4.5.4) eşitliğine; $n_1 \to \infty$ iken (4.5.10) eşitliğine indirgenir. □

**Uyarı 4.5.2** Eğer $A$ açısı dik olan $ABC$ üçgeni saat yönünde harflendirilirse $b$ ve $c$ nin rolleri değişir. Böylece (4.5.4) eşitliği

$$\begin{aligned}(u'\max\{1,|m|\}+v'\min\{1,|m|\})a = u'\max\{|c+bm|,|cm-b|\}+ \\ v'\min\{|c+bm|,|cm-b|\}\end{aligned}$$

şekline; (4.5.5) eşitliği

$$\begin{aligned}(u'\max\{|1+mn|,|m-n|\}+v'\min\{|1+mn|,|m-n|\})a &= \\ u'\max\{|(cn+b)+m(bn-c)|,|m(cn+b)-(bn-c)|\}+ \\ v'\min\{|(cn+b)+m(bn-c)|,|m(cn+b)-(bn-c)|\}\end{aligned}$$

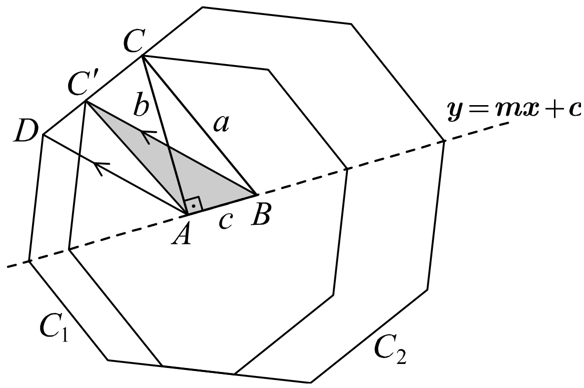
şekline, (4.5.11) eşitliği de

$$\begin{aligned}a\diagup(u'\max\{|1+mn_1|,|m-n_1|\}+v'\min\{|1+mn_1|,|m-n_1|\}) = (b^2+c^2)\diagup \\ [(u'\max\{|(bn_1+c)+m(cn_1-b)|,|m(bn_1+c)-(cn_1-b)|\}+ \\ v'\min\{|(bn_1+c)+m(cn_1-b)|,|m(bn_1+c)-(cn_1-b)|\})\end{aligned}$$

şekline gelir. □

Şimdi, Teorem 4.5.4 ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 4.5.6 nın karşıtının yanlış olduğunu -yani, $m$-düzleminde (4.5.5) ya da (4.5.11) eşitliğini sağlayan fakat hiç dik açısı olmayan $ABC$ üçgenlerinin var olduğunu- gösteren bir örnek veriyoruz.

**Örnek 4.5.1** $ABC$, $AB$ kenarı $y = mx$ doğrusuna paralel ve $A$ açısı dik olan, köşeleri ters saat yönünde harflendirilmiş bir üçgen ve $b > c$ olmak üzere, $d_m(B,C) = a$, $d_m(A,C) = b$, $d_m(A,B) = c$ olsun. $C_1$, merkezi $B$ noktası ve yarıçapı $b$ olan $m$ çemberi olsun ve $CD$, bu çemberin, $DAB$ açısı geniş olacak şekilde bir kenarı olsun. Son olarak, $C'$, $CD$ doğrusu ile $B$ noktasından geçip $DA$ doğrusuna paralel olan doğrunun kesişim noktası olsun (Bkz: Şekil 4.5.3).




Şekil 4.5.3

Şimdi, merkezi $B$ noktası ve yarıçapı $d_m(B,C')$ olan $C_2$ $m$ çemberini çizersek, açıkça $C'$ noktası $C_2$ çemberinin bir köşesi olur ve $C$ noktası da $C_2$ çemberi üzerinde olur. Bu durumda $C$ noktası, hem $C_1$ hem de $C_2$ $m$ çemberi üzerinde olduğu için $d_m(B,C') = a$ ve $d_m(A,C') = b$ dir. O halde, $ABC$ dik üçgenine Teorem 4.5.4 uygulanırsa, hiç dik açısı olmayan $ABC'$ üçgeni için de geçerli olan

$$\begin{gathered}(u' \max\{|1+mn|, |m-n|\} + v' \min\{|1+mn|, |m-n|\})a = \\ u' \max\{|(bn+c)+m(cn-b)|, |m(bn+c)-(cn-b)|\}+ \\ v' \min\{|(bn+c)+m(cn-b)|, |m(bn+c)-(cn-b)|\}\end{gathered}$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 4.5.4'ün karşıtının, dolayısıyla Sonuç 4.5.6'nın karşıtının doğru olmadığı gösterilmiş olur. Burada Şekil 4.5.3'ün $v/u = (\sqrt{2}-1)$ durumuda çizildiğini, ancak verilen örneğin, tüm durumları kapsadığını belirtelim. $\square$

Aşağıdaki teorem, $m$-düzlemindeki bir üçgenin bir dik açıya sahip olabilmesi için gerek ve yeter bir koşul ifade eder. Yeterli koşul, aslında Pisagor teoreminin karşıtının başka bir ifadesidir.

**Teorem 4.5.7** *$ABC$, $m$-düzlemde kenar uzunlukları $d_m(B,C) = a$, $d_m(A,C) = b$ ve $d_m(A,B) = c$ olan bir üçgen olsun; $n_1$, $n$ ve $n'$ de sırasıyla $BC$, $AB$ ve $AC$ kenarlarının eğimlerini göstersin. Buna göre, $A$ açısının dik olması için gerek ve* *yeter koşul,* $\rho(x) = (1+x^2)^{1/2} \big/ (u' \max\{|1+mx|\,, |m-x|\} + v' \min\{|1+mx|\,, |m-x|\})$ *olmak üzere,*

$$\rho(n_1)a^2 = \rho(n)(b^2 + c^2) = \rho(n')(b^2 + c^2) \tag{4.5.13}$$

*olmasıdır.*

**İspat:** Eğer (4.5.13) eşitliği geçerli ise, $\rho(n) = \rho(n')$ ve

$$\rho(n_1)a^2 = \rho(n)b^2 + \rho(n)c^2 = \rho(n')b^2 + \rho(n')c^2$$

dir. O halde,

$$\rho(n_1)a^2 = \rho(n)b^2 + \rho(n')c^2 \tag{4.5.14}$$

dir. (4.5.1) eşitliğini (4.5.14) eşitliğine uygulayarak $\mathbf{a} = d_E(B, C)$, $\mathbf{b} = d_E(A, C)$ ve $\mathbf{c} = d_E(A, B)$ olmak üzere $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ elde edilir. Pisagor teoreminin karşıtı doğru olduğu için $A$ açısı diktir.

Şimdi, tersine $A$ açısının dik açı olduğunu kabul edelim. O halde $n' = -1/n$, ve böylece Yardımcı Teorem 4.5.2 den $\rho(n) = \rho(n')$ dir. Bu durumda (4.5.13) eşitliği, Teorem 4.5.4'ün ispatındaki (4.5.8) eşitliğinin doğrudan bir sonucudur. ■

**Uyarı 4.5.3** Bilindiği gibi $m$-metriği; taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ metriklerinin bir genellemesidir. Bu sebeple, bu kısımda verilen Pisagor teoreminin $m$ benzerleri, Pisagor teoreminin taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ benzerlerini kapsamaktadır. Şöyle ki, (4.5.4), (4.5.5), (4.5.10) ve (4.5.11) eşitlikleri $m = 0$ ve $u = v = 1$ için sırasıyla (2.1.3), (2.1.4), (2.1.9) ve (2.1.10) eşitliklerine; $m = 0$, $u = 1$ ve $v = 0$ için sırasıyla (2.2.3), (2.2.4), (2.2.9) ve (2.2.10) eşitliklerine; $m = 0$, $u = 1$ ve $v = (\sqrt{2} - 1)$ için sırasıyla (2.3.3), (2.3.4), (2.3.9) ve (2.3.10) eşitliklerine; ve son olarak $m = 0$, $u = 1$ ve $v = (\sec\alpha - \tan\alpha)$ için sırasıyla (2.4.3), (2.4.4), (2.4.9) ve (2.4.10) eşitliklerine indirgenir. □

## 4.6 Üç Boyutlu Uzayda $m$-Metriği ve Geometrik Yorumu

Düzlemde tanımlanmış olan $m$-uzaklığını, aşağıdaki tanımla üç boyutlu uzaya -yani $\mathbb{R}^3$ e- genişletmek mümkündür. Bu tanım içinde verilen $d_m$ fonksiyonunun düzlemde bir *uzaklık ölçme fonksiyonu* olduğu, yani bu fonksiyonun, (1) "Her $A, B \in \mathbb{R}^3$ için $d_m(A,B) \geq 0$; $d_m(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$" ve (2) "Her $A, B \in \mathbb{R}^3$ için $d_m(A,B) = d_m(B,A)$" özeliklerini sağladığı; hatta bunlara ek olarak (3) (*üçgen eşitsizliği*) "Her $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ için $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$" özelliğini de sağlayarak bir *metrik* belirttiği Teorem 4.6.2 'de ispatlanmıştır.

**Tanım 4.6.1** $A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ üç boyutlu uzayda iki nokta; $u$, $v$ ve $m$ de $u \geq v \geq 0 \neq u$ özelliğindeki reel sayılar olsun. Buna göre, $p_1 = |(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|$, $p_2 = |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|$, $p_3 = |z_1 - z_2| \sqrt{1+m^2}$, $\Delta_{AB} = \max\{p_1, p_2, p_3\}$ ve $\delta_{AB} = \min\{p_1 + p_2, p_1 + p_3, p_2 + p_3\}$ olmak üzere

$$d_m(A,B) = (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB}) \diagup \sqrt{1+m^2} \qquad (4.6.1)$$

eşitliğiyle tanımlanan $d_m : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonkisyonuna $m$ 3-*uzaklık fonksiyonu*, $d_m(A,B)$ değerine de $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$ 3-*uzaklık* denir.

**Uyarı 4.6.1** Uyarı 4.1.1'de bahsedilen konu burada da geçerlidir; yani tanımda verilen $u$ ve $v$ reel sayıları birer parametre olarak görülmemelidir. Daha açık bir ifadeyle, $u$ ve $v$ değerleri aksi ifade edilmedikçe önceden belirlenmiş ve sabitlenmiş olarak kabul edilecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem $d_m$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir metrik olduğunu ispatlamada kullanışlı olacaktır:

**Yardımcı Teorem 4.6.1** *$A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ üç boyutlu uzayda iki nokta, ve $p_1, p_2, p_3$ değerleri de Tanım 4.6.1'de tanımlandığı gibi olsun. Eğer* $\max\{p_1, p_2, p_3\} = p_j$ *ise, her $t \in I = \{1,2,3\}$ için*

$$d_m(A,B) = \left( up_j + v \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_i \right) \diagup \sqrt{1+m^2} \geq \left( up_t + v \sum_{i \in I\text{-}\{t\}} p_i \right) \diagup \sqrt{1+m^2} \qquad (4.6.2)$$

*dir.*

**İspat:** Eğer $\max\{p_1, p_2, p_3\} = p_j$ ise, $\min\{p_1 + p_2, p_1 + p_3, p_2 + p_3\} = b\sum\limits_{i\in I\text{-}\{j\}} p_i$ olduğu aşikardır. Böylece, açıkça $d_m(A,B) = \left(up_j + v\sum\limits_{i\in I\text{-}\{j\}} p_i\right) \diagup \sqrt{1+m^2}$. Kısalığı sağlamak için $u' = u\diagup\sqrt{1+m^2}$, $v' = v\diagup\sqrt{1+m^2}$, $L_1 = d_m(A,B)$, ve her $t \in I$ için $L_2 = u'p_t + v'\sum\limits_{i\in I\text{-}\{t\}} p_i$ eşitliklerini kullanalım. Buna göre

$$\begin{aligned} L_1 - L_2 &= u'\left(p_j - p_t\right) + v'\left(\sum_{i\in I\text{-}\{j\}} p_i - \sum_{i\in I\text{-}\{t\}} p_i\right) \\ &= u'\left(p_j - p_t\right) + v'\left(p_t - p_j\right) \\ &= \left(u' - v'\right)\left(p_j - p_t\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $(u' - v') \geq 0$, ve her $t \in I$ için $(p_j - p_t) \geq 0$ olduğundan $L_1 \geq L_2$ elde edilir. O halde, her $t \in I$ için

$$d_m(A,B) \geq \left(up_t + v\sum_{i\in I\text{-}\{t\}} p_i\right) \diagup \sqrt{1+m^2}$$

eşitsizliği geçerlidir. ■

Aşağıdaki teorem, üç boyutlu uzayda tanımlı $d_m$ uzaklık fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir metrik belirttiğini ifade eder.

**Teorem 4.6.2** *Tanım 4.6.1'de verilen $d_m$ fonksiyonu bir metriktir.*

**İspat:** Yapılması gereken $d_m$ nin metrik olma özelliklerine sahip olduğunu göstermektir. Açıkça, $u > 0$, $v \geq 0$, $\Delta_{AB} \geq 0$, $\delta_{AB} \geq 0$ ve $\sqrt{1+m^2} \geq 0$ olduğundan $d_m(A,B) \geq 0$ dir. Bununla birlikte, "$d_m(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$" ve "her $A,B \in \mathbb{R}^3$ için $d_m(A,B) = d_m(B,A)$" önermelerinin doğru olduğu da aşikardır. O halde, $d_m$ (1) ve (2) özelliklerine sahiptir. Son olarak $d_m$ nin (3) özelliğini -yani üçgen eşitsizliğini- de sağladığı gösterilmelidir. Bunun için, $\mathbb{R}^3$ te $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ ve $C = (x_3, y_3, z_3)$ noktalarını göz önüne alalım.

Kısalığı sağlamak için yine $u' = u\diagup\sqrt{1+m^2}$, $v' = v\diagup\sqrt{1+m^2}$, $I = \{1,2,3\}$ ve
$p_{11} = |(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|$, $p_{12} = |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|$, $p_{13} = |z_1 - z_2|$,
$p_{21} = |(x_1 - x_3) + m(y_1 - y_3)|$, $p_{22} = |m(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)|$, $p_{23} = |z_1 - z_3|$,

$p_{31} = |(x_2 - x_3) + m(y_2 - y_3)|$, $p_{32} = |m(x_2 - x_3) - (y_2 - y_3)|$, $p_{33} = |z_2 - z_3|$

eşitliklerini kullanalım. Böylece, doğrulukları kolayca görülebilecek

$|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)| \leq |(x_1 - x_3) + m(y_1 - z_3)| + |(x_3 - x_2) + m(y_3 - y_2)|$,

$|m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| \leq |m(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)| + |m(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)|$ ve $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$ eşitsizliklerinden, her $i \in I$ için $p_{1i} \leq (p_{2i} + p_{3i})$ elde edilir. O halde, eğer $\Delta_{AB} = \max\{p_{11}, p_{12}, p_{13}\} = p_{1j}$ ise

$$\begin{aligned} d_m(A,B) &= u'p_{1j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{1i} \\ &\leq u'(p_{2j} + p_{3j}) + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} (p_{2i} + p_{3i}) = u'p_{2j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{2i} + u'p_{3j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{3i} \end{aligned}$$

ve böylece $d_m(A,B) \leq u'p_{2j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{2i} + u'p_{3j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{3i}$ dir.
Ayrıca, Yardımcı Teorem 4.6.1'den

$$\begin{aligned} d_m(A,C) &\geq u'p_{2j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{2i} \\ d_m(B,C) &\geq u'p_{3j} + v'\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{3i} \end{aligned}$$

dir. O halde, $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$ eşitsizliği geçerlidir. İspat tamamlanmıştır. ■

Aşağıda, üç boyutlu uzayda iki nokta arasındaki $m$-uzaklığı başka bir yaklaşımla ele alınmıştır. Aslında bu yaklaşım, iki nokta arasındaki $m$ 3-uzaklığın geometrik anlamı olarak düşünülebileceği gibi, $m$ 3-uzaklık fikrinin de çıkış noktasıdır.

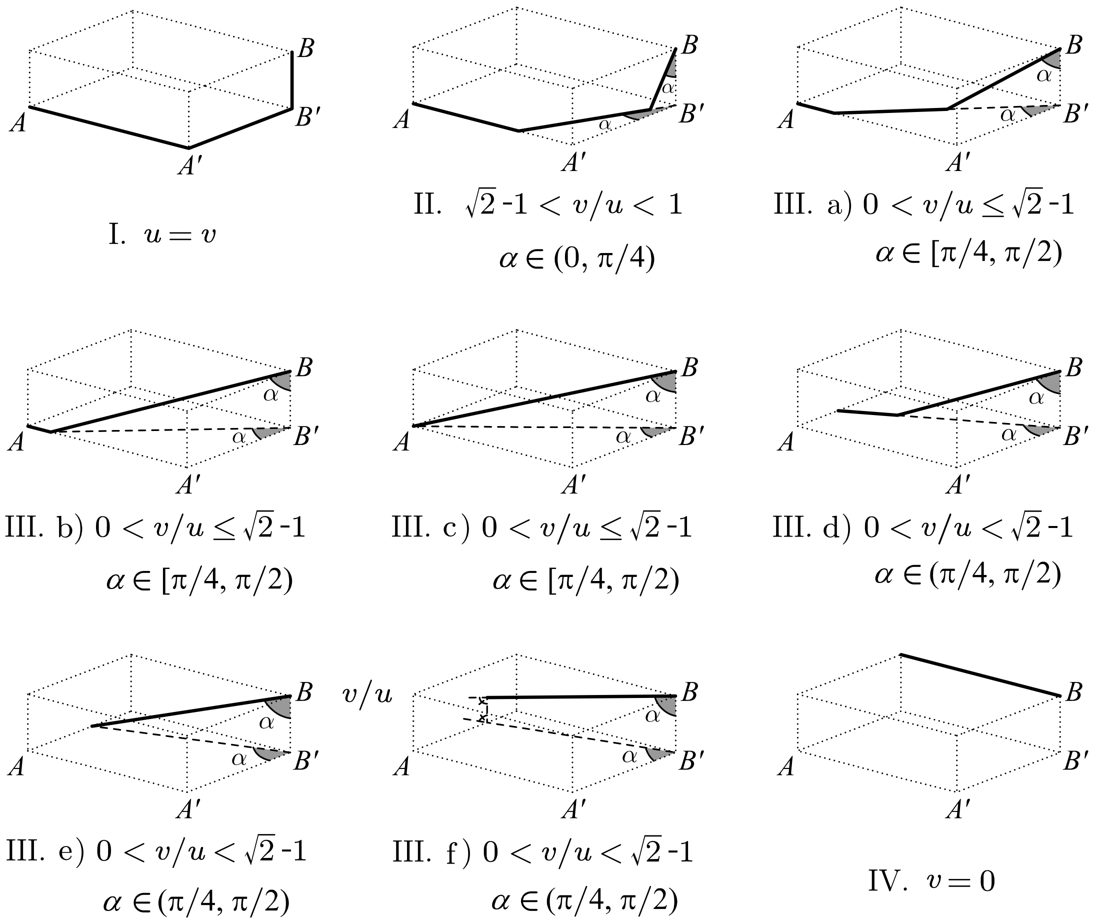
$A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ üç boyutlu kartezyen koordinat uzayında iki nokta olsun. $\alpha_X$, $\alpha'_X$ ve $\alpha''_X$ de $X$ noktasından geçen, sırasıyla $(1, m, 0)$, $(-m, 1, 0)$ ve $(0, 0, 1)$ vektörlerine dik olan düzlemleri göstersin. Buna göre, $A$ noktasının, sırasıyla $\alpha_B$, $\alpha'_B$ ve $\alpha''_B$ (veya $B$ noktasının $\alpha_A$, $\alpha'_A$ ve $\alpha''_A$ düzlemlerine) Öklid 3-uzaklıkları

$$\begin{aligned} l_1 &= d_E(A, \alpha_B) = |(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)| \diagup \sqrt{1 + m^2} \\ l_2 &= d_E(A, \alpha'_B) = |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| \diagup \sqrt{1 + m^2} \\ l_3 &= d_E(A, \alpha''_B) = |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

olduğundan, $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$ 3-uzaklık

$$d_m(A,B) = u \max\{l_1, l_2, l_3\} + v \min\{l_1 + l_2, l_1 + l_3, l_2 + l_3\} \tag{4.6.3}$$

eşitliğiyle verilebileceği aşikardır. Bu gerçeğe göre, $A$ ve $B$ noktaları arasındaki $m$ 3-uzaklık, belli doğrultulardaki doğru parçalarından oluşan $A$ dan $B$ ye en kısa yolun Öklid 3 uzaklığının $u$ katıdır (Bkz: Şekil 4.6.1). Aşağıdaki şekillerde $AB$ cisim köşegenli dikdörtgenler prizmasının $AA'$, $A'B'$ ve $BB'$ kenarları, sırasıyla $(1, m, 0)$, $(-m, 1, 0)$ ve $(0, 0, 1)$ doğrultu vektörlerine sahipitir. Bu doğrultu vektörlerine sahip ve orijinden geçen doğrulara *doğrultu eksenleri* diyeceğiz.



I. $u = v$

II. $\sqrt{2}\text{-}1 < v/u < 1$, $\alpha \in (0, \pi/4)$

III. a) $0 < v/u \leq \sqrt{2}\text{-}1$, $\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$

III. b) $0 < v/u \leq \sqrt{2}\text{-}1$, $\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$

III. c) $0 < v/u \leq \sqrt{2}\text{-}1$, $\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$

III. d) $0 < v/u < \sqrt{2}\text{-}1$, $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$

III. e) $0 < v/u < \sqrt{2}\text{-}1$, $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$

III. f) $0 < v/u < \sqrt{2}\text{-}1$, $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$

IV. $v = 0$

Şekil 4.6.1

**Uyarı 4.6.2** Kolayca görülebileceği gibi, taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ 3-uzaklıkları $m$ 3-uzaklığın özel halleridir: Eğer $d_m$ de $u = v = 1$ ise, taksi 3-uzaklığı $(d_T)$ içeren

$$d_m(A, B) = (\Delta_{AB} + \delta_{AB}) \big/ \sqrt{1 + m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Benzer şekilde, eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $v = 0$ ise, maksimum

3-uzaklığı ($d_M$) içeren

$$d_m(A,B) = \Delta_{AB} \diagup \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer $d_m$ de $u=1$ ve $v=\sqrt{2}-1$ ise, Çin dama 3-uzaklığı ($d_C$) içeren

$$d_m(A,B) = \left(\Delta_{AB} + (\sqrt{2}-1)\delta_{AB}\right) \diagup \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer $d_m$ de $u=1$ ve $\alpha \in [0,\pi/2)$ olmak üzere $v = (\sec\alpha - \tan\alpha)$, $\alpha \in [0,\pi/2)$ ise, $\alpha$ 3-uzaklığı ($d_\alpha$) içeren

$$d_m(A,B) = (\Delta_{AB} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\delta_{AB}) \diagup \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer bu metrik ailelerini, sırasıyla $d_{T(m)}$, $d_{M(m)}$, $d_{C(m)}$ ve $d_{\alpha(m)}$ ile gösterecek olursak $d_{T(0)}(A,B) = d_T(A,B)$, $d_{M(0)}(A,B) = d_M(A,B)$, $d_{C(0)}(A,B) = d_C(A,B)$ ve $d_{\alpha(0)}(A,B) = d_\alpha(A,B)$ olacağı aşikardır. Bununla birlikte, eğer $\delta_{AB} > 0$ ve $\alpha \in (0,\pi/4)$ ise,

$$d_{M(m)}(A,B) < d_{C(m)}(A,B) < d_{\alpha(m)}(A,B) < d_{T(m)}(A,B);$$

eğer $\delta_{AB} > 0$ ve $\alpha \in (\pi/4,\pi/2)$ ise,

$$d_{M(m)}(A,B) < d_{\alpha(m)}(A,B) < d_{C(m)}(A,B) < d_{T(m)}(A,B)$$

eşitsizliklerinin doğrulukları kolayca gözlemlenebilir. Bu eşitsizliklere ek olarak eğer $\delta_{AB} = 0$ ise, $A$ ve $B$ noktalarının doğrultu eksenlerinden birine paralel olacağı ve böylece

$$d_{M(m)}(A,B) = d_{\alpha(m)}(A,B) = d_{C(m)}(A,B) = d_{T(m)}(A,B) = ud_E(A,B)$$

olacağı açıktır. $\square$

$A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki nokta olmak üzere, sırasıyla $A$ ve $B$ noktalarından geçen ve doğrultu eksenlerine dik olan düzlemlerin -yani, $i \in \{1,2\}$ olmak üzere, $mx - y - mx_i + y_i = 0$, $x + my - x_i - my_i = 0$ ve $z - z_i = 0$ düzlemlerinin-sınırladığı prizmatik bölgeyi $R_{AB}$ ile gösterelim. $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel olduğunda bu bölgenin bir doğru parçası; doğrultu eksenlerinden birine dik olan düzlem içinde olduğunda dikdörtgensel bölge; diğer durumlarda prizmatik bölge olacağı açıktır. Bununla beraber, $R_{AB}$ yi sınırlayan prizmanın kenarlarının Öklidyen (veya $m$) uzunluklarının maksimumu $\Delta_{AB}$ ye, ikişerli toplamlarının minimumu da $\delta_{AB}$ ye eşittir. Bu tanımlama ve (4.6.3) eşitliğinden aşağıdaki iki önerme elde edilir:

**Önerme 4.6.3** *$A$, $B$ ve $C$ uzayda $C \in R_{AB}$ özelliğinde üç nokta olsun. Buna göre, $d_m(A,B) \geq d_m(A,C)$ dir. Bununla birlikte, eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerinden birine paralel veya $v > 0$ ise, $d_m(A,B) = d_m(A,C) \Leftrightarrow B = C$ dir. Eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel değil ve $v = 0$ ise, $R_{AB}$ nin $B$ noktasından geçen ve en uzun kenarına dik olan yüzü $Y$ olmak üzere, $d_m(A,B) = d_m(A,C) \Leftrightarrow C \in Y$ dir.*

**İspat:** $A$, $B$ ve $C$ düzlemde $C \in R_{AB}$ özelliğinde üç nokta olsun. Eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel ise $R_{AB} = [AB]$ ve $\delta_{AB} = \delta_{AC} = 0$ dir. Bu durumda $d_m(A,B) = d_m(A,C) \Leftrightarrow B = C$ olduğu ve $B \neq C$ ise $d_m(A,B) > d_m(A,C)$ olduğu açıktır. Eğer $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel değil ve $v > 0$ ise, $B \neq C \Leftrightarrow d_m(A,B) > d_m(A,C)$ dir. Çünkü bu durumda $\Delta_{AB} > \Delta_{AC}$ veya $\delta_{AB} > \delta_{AC}$ olur. $AB$ doğrusu doğrultu eksenlerine paralel değil ve $v = 0$ iken, $D$ noktası $R_{AB}$ nin $d_m(B,D) \leq d_m(A,D)$ koşuluna uyan bir köşesi olmak üzere, eğer $C \in [BD]$ ise, $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$, dolayısıyla $d_m(A,B) = d_m(A,C)$. Eğer $d_m(A,B) = d_m(A,C)$ ise, $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$, dolayısıyla $C \in [BD]$ bulunur. ■

**Önerme 4.6.4** *$A$, $B$, $C$ ve $D$ uzayda dört nokta olmak üzere, $R_{AB}$ ve $R_{CD}$ -Öklidyen anlamda- eş ise, $d_m(A,B) = d_m(C,D)$ dir.*

**İspat:** Açıkça, $R_{AB}$ ve $R_{CD}$ eş ise $\Delta_{AB} = \Delta_{CD}$ ve $\delta_{AB} = \delta_{CD}$; dolayısıyla $d_m(A,B) = d_m(C,D)$ dir. ■

Aşağıdaki önerme uzayda iki nokta arasındaki $m$ ve Öklidyen uzaklıklar arasında bir bağıntı verir:

**Önerme 4.6.5** *$A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ üç boyutlu uzayda iki nokta, $l$ de bu noktalardan geçen doğru olsun. Eğer $l$ doğrusunun doğrultu vektörü $(p,q,r)$ ise, $p_1 = |p + mq|$, $p_2 = |mp - q|$, $p_3 = |r|\sqrt{1+m^2}$ ve $\mu_{AB} = \frac{u\max\{p_1,p_2,p_3\}+v\min\{p_1+p_2,p_1+p_3,p_2+p_3\}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ olmak üzere, $d_m(A,B) = \mu_{AB} d_E(A,B)$ dir.*

**İspat:** Eğer $l$ nin doğrultu vektörü $(p, q, r)$ ise, $x_1 - x_2 = \lambda p$, $y_1 - y_2 = \lambda q$ ve $z_1 - z_2 = \lambda r$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Bu gerçek ve $d_m(A, B)$ ve $d_E(A, B)$ nin koordinat tanımları kullanılarak doğrudan bir hesaplamayla önermenin doğruluğu gösterilebilir. ∎

Aşağıdaki iki önerme, Önerme 4.6.5'den doğrudan elde edilir:

**Sonuç 4.6.6** *$A$, $B$, $C$ ve $D$ üç boyutlu uzayda dört nokta olsun. $AB$ ve $CD$ doğruları çakışık veya paralel ise,*

$$d_m(A, B) = d_m(C, D) \Leftrightarrow d_E(A, B) = d_E(C, D)$$

*dir.*

**Sonuç 4.6.7** *$A$, $B$ ve $X$ üç boyutlu uzayda doğrudaş üç nokta ise,*

$$d_m(A, X) / d_m(X, B) = d_E(A, X) / d_E(X, B)$$

*dir.*

**Uyarı 4.6.3** Alışıldığı gibi, $m$ 3-uzaklıkla donatılmış üç boyutlu kartezyen uzayı $\mathbb{R}^3_m$ ile gösterelim. Buna göre, $\mathbb{R}^2_m$ ye benzer olarak Sonuç 4.6.7 gereği, $\mathbb{R}^3_m$ de Thales, Menelaus ve Ceva teoremlerinin geçerli olduğu aşikardır.

**Uyarı 4.6.4** Kolayca görülebileceği üzere, Sonuç 4.6.6 gereği, $\mathbb{R}^3_m$ de iki nokta arasındaki $m$ 3-uzaklık tüm ötelemeler altında invaryanttır. Bununla birlikte, özel bir durumu [29] da cevaplanmış olan "$\mathbb{R}^3_m$ nin izometriler grubu nedir?" sorusu açık bir problemdir (Bkz: [21]).

## 4.7 $n$ Boyutlu Uzayda $m$-Metriği

Üç boyutlu uzayda tanımlanmış olan $m$ 3-uzaklığı, aşağıdaki tanımla $n$ boyutlu uzaya -yani $\mathbb{R}^n$ ye- genişletmek mümkündür. Bu tanım içinde verilen $d_m$ fonksiyonunun düzlemde bir *uzaklık ölçme fonksiyonu* olduğu, yani bu fonksiyonun, (1) "Her $A, B \in \mathbb{R}^n$ için $d_m(A,B) \geq 0$; $d_m(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$" ve (2) "Her $A, B \in \mathbb{R}^n$ için $d_m(A,B) = d_m(B,A)$" özeliklerini sağladığı; ve bunlara ek olarak (3) (*üçgen eşitsizliği*) "Her $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ için $d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$" özelliğini de sağlayarak bir *metrik* belirttiği Teorem 4.7.2'de ispatlanmıştır.

**Tanım 4.7.1** $A = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $B = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de iki nokta; $u$, $v$ ve $m$ de $u \geq v \geq 0 \neq u$ özelliğindeki reel sayılar olsun. Buna göre, $p_1 = |(x_1 - y_1) + m(x_2 - y_2)|$, $p_2 = |m(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|$, $p_k = |x_k - y_k|$ ; $k \in \{3, 4, ..., n\}$, $\Delta_{AB} = \max\{p_1, p_2, ..., p_n\} = p_j$ ve $\delta_{AB} = \sum\limits_{i \in I\text{-}\{j\}} p_i$ , $I = \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere

$$d_m(A,B) = (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB}) \diagup \sqrt{1 + m^2}$$

eşitliği ile tanımlanan $d_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ fonksiyonuna *m n-uzaklık fonksiyonu*, $d_m(A,B)$ değerine de $A$ ve $B$ arasındaki *m n-uzaklık* denir.

**Uyarı 4.7.1** Uyarı 4.1.1 ve Uyarı 4.6.1'de bahsedilen konu burada da geçerlidir; yani tanımda verilen $u$ ve $v$ reel sayıları birer parametre olarak görülmemelidir. Daha açık bir ifadeyle, $u$ ve $v$ değerleri aksi ifade edilmedikçe önceden belirlenmiş ve sabitlenmiş olarak kabul edilecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem $d_m$ nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik olduğunu göstermede kullanışlı olacaktır:

**Önerme 4.7.1** *$A = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $B = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de iki nokta; $p_1, p_2, ..., p_n$ de Tanım 4.7.1'de tanımlandığı gibi olsun. Buna göre, eğer $\max\{p_1, p_2, ..., p_n\} = p_j$ ise, her $t \in I = \{1, 2, ..., n\}$ için*

$$d_m(A,B) = \left( up_j + v\sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_i \right) \diagup \sqrt{1 + m^2} \geq \left( up_t + v\sum_{i \in I\text{-}\{t\}} p_i \right) \diagup \sqrt{1 + m^2}$$

*dir.*

**İspat:** Kısalığı sağlamak için $u' = u\diagup\sqrt{1+m^2}$, $v' = v\diagup\sqrt{1+m^2}$,
$L_1 = d_m(A,B) = u'p_j + v'\sum\limits_{i\in I\text{-}\{j\}} p_i$, ve $L_2 = u'p_t + v'\sum\limits_{i\in I\text{-}\{t\}} p_i$ , $t \in I$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} L_1 - L_2 &= u'(p_j - p_t) + v'\left(\sum_{i\in I\text{-}\{j\}} p_i - \sum_{i\in I\text{-}\{t\}} p_i\right) \\ &= u'(p_j - p_t) + v'(p_t - p_j) \\ &= (u' - v')(p_j - p_t) \end{aligned}$$

dir. Burada $(u' - v') \geq 0$ ve $(p_j - p_t) \geq 0$ olduğundan, her $t \in I$ için $L_1 \geq L_2$ dir. Yani, iddia edildiği gibi her $t \in I$ için

$$d_m(A,B) \geq \left(up_t + v\sum_{i\in I\text{-}\{t\}} p_i\right)\diagup\sqrt{1+m^2}$$

eşitsizliği elde edlir. ■

Aşağıdaki teorem, $n$ boyutlu uzayda tanımlı $m$-uzaklık fonksiyonunun bir metrik belirttiğini ifade eder.

**Teorem 4.7.2** *Tanım 4.7.1'de verilen $d_m$ fonksiyonu bir metriktir.*

**İspat:** $d_m$ nin (1) ve (2) özelliklerini -yani, her $A, B \in \mathbb{R}^n$ için $d_m(A,B) \geq 0$; $d_m(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ve $d_m(A,B) = d_m(B,A)$ özelliklerini- sağladığı aşikardır. O halde, $d_m$ nin (3) özelliğini -yani üçgen eşitsizliğini- sağladığı gösterilmelidir. Bunun için, $\mathbb{R}^n$ de $A = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $B = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ve $C = (z_1, z_2, ..., z_n)$ noktalarını göz önüne alalım.

Kısalığı sağlamak için $u' = u\diagup\sqrt{1+m^2}$, $v' = v\diagup\sqrt{1+m^2}$, $I = \{1, 2, ..., n\}$,
$p_{11} = |(x_1 - y_1) + m(x_2 - y_2)|$, $p_{12} = |m(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|$, $p_{1k} = |x_k - y_k|$,
$p_{21} = |(x_1 - z_1) + m(x_2 - z_2)|$, $p_{22} = |m(x_1 - z_1) - (x_2 - z_2)|$, $p_{2k} = |x_k - z_k|$,
$p_{31} = |(y_1 - z_1) + m(y_2 - z_2)|$, $p_{32} = |m(y_1 - z_1) - (y_2 - z_2)|$, $p_{3k} = |y_k - z_k|$; $k \in \{3, 4, ..., n\}$ olsun. Açıkça,

$$\begin{aligned} |(x_1 - y_1) + m(x_2 - y_2)| &= |(x_1 - y_1 + z_1 - z_1) + m(x_2 - y_2 + z_2 - z_2)| \\ &\leq |(x_1 - z_1) + m(x_2 - z_2)| + |(z_1 - y_1) + m(z_2 - y_2)| \end{aligned}$$

$|m(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)| \leq |m(x_1 - z_1) - (x_2 - z_2)| + |m(z_1 - y_1) - (z_2 - y_2)|$ ve $|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k|$ olduğundan her $i \in I$ için $p_{1i} \leq (p_{2i} + p_{3i})$ dir. Eğer $\Delta_{AB} = \max\{p_{11}, p_{12}, ..., p_{1n}\} = p_{1j}$ ise,

$$\begin{aligned} d_m(A,B) &= u'p_{1j} + v' \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{1i} \\ &\leq u'(p_{2j}+p_{3j}) + v' \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} (p_{2i}+p_{3i}) \\ &= u'p_{2j} + v' \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{2i} + a'p_{3j} + b' \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{3i} \end{aligned}$$

dir. Önerme 4.7.1'den $d_m(A,C) \geq u'p_{2j} + v' \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{2i}$ ve $d_m(B,C) \geq u'p_{3j} + v' \sum_{i \in I\text{-}\{j\}} p_{3i}$ olduğundan, ispatı tamamlayan

$$d_m(A,B) \leq d_m(A,C) + d_m(C,B)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Aşağıdaki önerme iki nokta arasındaki $m$ $n$-uzaklığın tanımından doğrudan elde edilir:

**Önerme 4.7.3** $\mathbb{R}^n$ *de iki nokta arasındaki* $m$ *$n$-uzaklığı tüm ötelemeler altında invaryanttır. Yani,* $a_i \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $T(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, ..., x_n + a_n)$ *kuralı ile tanımlanmış* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dönüşümü, iki nokta arasındaki* $m$ *$n$-uzaklığı değiştirmez.*

**Uyarı 4.7.2** Kolayca görülebileceği gibi, taksi, maksimum, Çin dama ve $\alpha$ uzaklıkları $m$ $n$-uzaklığın özel halleridir: Eğer $d_m$ de $u = v = 1$ ise, taksi $n$-uzaklığı ($d_T$) içeren

$$d_m(A,B) = (\Delta_{AB} + \delta_{AB}) \big/ \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Benzer şekilde, eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $v = 0$ ise, maksimum $n$-uzaklığı ($d_M$) içeren

$$d_m(A,B) = \Delta_{AB} \big/ \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $v = \sqrt{2} - 1$ ise, Çin dama $n$-uzaklığı ($d_C$) içeren

$$d_m(A,B) = \Big(\Delta_{AB} + (\sqrt{2}-1)\delta_{AB}\Big) \big/ \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer $d_m$ de $u = 1$ ve $\alpha \in [0, \pi/2)$ olmak üzere $v = (\sec\alpha - \tan\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi/2)$ ise, $\alpha$ $n$-uzaklığı ($d_\alpha$) içeren

$$d_m(A,B) = (\Delta_{AB} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\delta_{AB}) \big/ \sqrt{1+m^2}$$

metrik ailesi elde edilir. Eğer bu metrik ailelerini, sırasıyla $d_{T(m)}$, $d_{M(m)}$, $d_{C(m)}$ ve $d_{\alpha(m)}$ ile gösterecek olursak $d_{T(0)}(A,B) = d_T(A,B)$, $d_{M(0)}(A,B) = d_M(A,B)$, $d_{C(0)}(A,B) = d_C(A,B)$ ve $d_{\alpha(0)}(A,B) = d_\alpha(A,B)$ olacağı aşikardır. Bununla birlikte, eğer $\delta_{AB} > 0$ ve $\alpha \in (0, \pi/4)$ ise,

$$d_{M(m)}(A,B) < d_{C(m)}(A,B) < d_{\alpha(m)}(A,B) < d_{T(m)}(A,B);$$

eğer $\delta_{AB} > 0$ ve $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$ ise,

$$d_{M(m)}(A,B) < d_{\alpha(m)}(A,B) < d_{C(m)}(A,B) < d_{T(m)}(A,B)$$

eşitsizliklerinin doğrulukları kolayca gösterilebilir. Bu eşitsizliklere ek olarak eğer $\delta_{AB} = 0$ ise, $A$ ve $B$ noktalarının doğrultu eksenlerinden birine paralel olacağı ve böylece

$$d_{M(m)}(A,B) = d_{\alpha(m)}(A,B) = d_{C(m)}(A,B) = d_{T(m)}(A,B) = ud_E(A,B)$$

olacağı açıktır. $\square$

## KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Akça, Z. and Kaya, R., *On the Taxicab Trigonometry*, Journal of Inst. of Math. &Comp. Sci., Vol. 10 (1997), No.3, 151-159.

[2] Akça, Z. and Kaya, R., *On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space*, Hadronic Journal, Vol. 27 (2004), No. 5, 521-532.

[3] Akça, Z. and Kaya, R., *On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces*, Hadronic Journal Supplement, Vol. 19 (2004), No. 4, 491-501.

[4] Akça, Z., Bayar, A. and Ekmekçi, S., *The Norm in CC-Plane Geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 12 (2007), No. 6, 321-324.

[5]Bayar, A. and Ekmekçi, S., *On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions*, International J. of Mathematics and Analysis, Vol. 1 (2006), No. 3, 249-259.

[6] Bayar, A., Ekmekçi, S. and Akça, Z., *On the Plane Geometry with Generalized Absolute Value Metric*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2008 (2008), Article ID 673275, doi:10.1155/2008/673275.

[7] Birkhoff, G. D., *A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor*, The Annals of Mathematics, Vol. 33 (1932), No. 2, 329-345.

[8] Boone, J. R., *The Moise Plane*, The College Mathematics Journal, Vol. 27 (1996), No. 3, 182-185.

[9] Chen, G. , "Lines and Circles in Taxicab Geometry", M.S. thesis, Department of Math. and Comp. Sci., Centered Missouri State University, 1992.

[10] Coxeter, H. S. M., "Introduction to Geometry", John Wiley&Sons Inst., 1961.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

[11] Çolakoğlu, H. B., "Bazı Öklidyen Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri", Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2006.

[12] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *A Synthetic Approach to the Taxicab Circles*, Applied Sciences (APPS), Vol. 9 (2007), 67-77.

[13] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *Taxicab Versions of Pythagorean Theorem*, Pi Mu Epsilon Journal (PMEJ), Vol. 12 (2008), No. 9, 535-539.

[14] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *Regular Polygons in the Taxicab Plane*, Scientific-Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics (KoG), Vol. 12 (2008), 27-33.

[15] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *Regular Polygons in the Chinese Checker Plane*, Applied Sciences (APPS), Vol. 10 (2008), 29-37.

[16] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *Chinese Checker Versions of Pythagorean Theorem*, Int. J. Contemp. Math. Sciences (IJCMS), Vol. 4 (2009), No. 2, 61-69.

[17] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *Volume of a Tetrahedron in the Taxicab Space*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, Vol. 21 (2009), No. 1, 21-27.

[18] Çolakoğlu, H. B., *Concerning the Alpha Distance*, Algebras, Groups and Geometries, (accepted for publication).

[19] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *Regular Polygons in Some Models of Protractor Geometry*, International Electronic Journal of Geometry, (accepted for publication).

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

[20] Çolakoğlu, H. B., Gelişgen Ö. and Kaya, R., *Pythagorean Theorems in Alpha Plane*, Mathematical Communications, (accepted for publication).

[21] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., *A Generalization of Some Well-Known Distances and Related Isometries*, Applied Mathematics and Computation, (under review).

[22] Divjak, B., *Notes on Taxicab Geometry*, Scientific and Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics (KoG), Vol. 5 (2000), 5-9.

[23] Ekmekçi, S., "Taksi Çemberleriyle İlgili Özellikler", Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2001.

[24] Gelişgen, Ö., "Minkowski Geometrileri Üzerine: Taksi, Çin Dama ve $\alpha$-Geometrileri Hakkında Genel Bir Analiz", Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2007.

[25] Gelişgen, Ö. and Kaya, R., *On $\alpha$-Distance in Three Dimensional Space*, Applied Sciences (APPS), Vol. 8 (2006), 65-69.

[26] Gelişgen, Ö. and Kaya, R., *Generalization of $\alpha$-Distance to n-Dimensional Space*, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), Vol. 10 (2006), 33-37.

[27] Gelişgen, Ö. and Kaya, R., *CC – Analog of the Theorem of Pythagoras*, Algebras, Groups and Geometries, Vol. 23 (2006), No. 2, 179-188.

[28] Gelişgen, Ö., Kaya, R. and Özcan, M., *Distance Formulae in the Chinese Checker Space*, Int. J. of Pure and App. Math. (IJPAM), Vol. 26 (2006), No.1, 35-44.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**


[29] Gelişgen, Ö. and Kaya, R., *The Taxicab Space Group*, Acta Math. Hungar., DOI: 10.1007/s10474-008-8006-9, 2008.

[30] Grunbaum, B. and Mycielski, J., *Some Models of Plane Geometries*, The American Mathematical Monthly, Vol. 97 (1990), No. 9, 839-846.

[31] Hilbert, D., "The Foundations of Geometry", Trans. by E. J. Townsend, Open Court, La Salle, Illinois, 1902 ("Grundlagen der Geometrie", Leibzig, 1899).

[32] Kaya, R., "Analitik Geometri", Bilim ve Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2002.

[33] Kaya, R., *Area Formula For Taxicab Triangles*, Pi Mu Epsilon, Vol. 12 (2006), No. 4, 219-220.

[34] Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ. and Özcan, M., *General Equation for Taxicab Conics and Their Classification*, Mitt. Math. Ges. Hamburg, Vol. 19 (2000), 135-148.

[35] Kaya, R. and Çolakoglu, H. B., *Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems*, Int. J. of Pure and App. Math. (IJPAM), Vol. 26 (2006), No. 1, 69-81.

[36] Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. and Bayar, A., *Group of Isometries of CC-Plane*, Missouri J. of Mathematical Sciences, Vol. 18 (2006), No. 3, 221-233.

[37] Kaya, R., Gelişgen Ö., Ekmekçi S. and Bayar, A., *On The Group of Isometries of The Plane with Generalized Absolute Value Metric*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 39 (2009), No.2, 591-603.

[38] Kennedy, H. C., *The Origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79 (1972), 133-136.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**


[39] Korkmazoğlu, A., "Küresel Taksi Geometri Üzerine", Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2000.

[40] Krause, E. F., "Taxicab Geometry", Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1975; Dover Publications, New York, 1987.

[41] Laatsch, R., *Pyramidal Sections in Taxicab Geometry*, Mitt. Mathematics Magazine, Vol. 55 (1982), No.4, 205-212.

[42] MacLane, S., *Metric Postulates for Plane Geometry, The American Mathematical Monthly*, Vol. 66 (1959), No. 7, 543-555.

[43] Mader, A., *A Euclidean Model for Euclidean Geometry*, The American Mathematical Monthly, Vol. 96 (1989), No. 1, 43-49.

[44] Menger, K., "You Will Like Geometry", Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL., 1952.

[45] Milmann, R. S. and Parker, G. D., "Geometry; A Metric Approach with Models", Springer, 1991.

[46] Minkowski, H., "Gesammelte Abhandlungen", Chelsa Publishing Co., New York, 1967.

[47] Özcan, M., Ekmekçi, S. and Bayar, A., *The Taxicab Lengths Under Rotations*, The Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 11 (2002), No. 7, 381-384.

[48] Özcan, M. and Kaya, R., *On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, Vol. 14 (2002), No.2, 107-117.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**


[49] Özcan, M. and Kaya, R., *Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, Vol. 15 (2003), No. 3, 178-185.

[50] Parker, G. D., *A Metric Model of Plane Euclidean Geomety*, The American Mathematical Monthly, Vol. 87 (1980), No. 7, 567-572.

[51] Powers, R. C. and Sahoo, P. K., *Triangle Congruence and Moulton Plane*, Elemente der Mathematik, Vol. 56 (2001), No. 3, 95-101.

[52] Reynolds, B. E., *Taxicab Geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 7 (1980), No. 2, 77-88.

[53] Salihova, S., "Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine", Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2006.

[54] Schattschneider, D. J., *The Taxicab Group*, The American Mathematical Monthly, Vol. 91 (1984), No. 7, 423-428.

[55] So, S. S., *Recent Developments in Taxicab Geometry*, Cubo Matematica Educational, Vol. 4 (2002), No. 2, 79-96.

[56] Thompson, K. and Dray, T., *Taxicab Angles and Trigonometry*, Pi Mu Epsilon, Vol. 11 (2000), No. 2, 87-96.

[57] Tian, S., *Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance*, Missouri J. of Math. Sci., Vol. 17 (2005), No. 1, 35-40.

[58] Torun, S., "Taksi Elipslerin Özellikleri Üzerine", Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2004.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**


[59] Turan, M. and Özcan, M., *Two-foci Chinese Checker Ellipses*, Int. J. of Pure and App. Math. (IJPAM), Vol. 16 (2004), No. 1, 119-127.

[60] Turan, M. and Özcan, M., *Two-foci Chinese Checker Hyperbalos*, Int. J. of Pure and App. Math. (IJPAM), Vol. 16 (2005), No. 4, 509-520.

[61] Turan, M. and Özcan, M., *General Equation for Chinese Checker Conics and Focus-Directrix Chinese Checker Conics*, International Journal of Pure And Applied Mathematics (IJPAM), Vol. 30 (2006), No. 3, 397-406.

[62] Uymaz, A.Ç., "Çin Dama Çemberi ve Özellikleri", Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2002.

[63] Veblen, O., *A System of Axioms for Geometry*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5 (1904), No.3, 343-384.

[64] Venema, G. A., "The Foundations of Geometry", Prentice Hall, 2005, p. 330.

[65] "Equiangular Semi-Regular Polygon": Encyclopaedia of Mathematics, Springer, 2002; http://eom.springer.de/p/p073580.htm.

[66] "School Mathematics Study Group": "Geometry", Yale University Press, New Haven, 1961; http://www.libraryofmath.com/the-smsg-postulates.html.

[67] "The University of Chicago School Mathematics Project": http://www.libraryofmath.com/the-ucsmp-postulates.html.

[68] "Chinese Checkers Game": http://www.jgames.com/chinesecheckers.

[69] "Compass and Ruler Software": http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en/index.html.

# ÖZ GEÇMİŞ

Saygıyla andığım hocam Dr. Fikri GÖKDAL'a ...

Harun Barış ÇOLAKOĞLU, 24 Temmuz 1979'da Manisa'nın Salihli ilçesinde doğmuştur. Üç çocuklu bir ailenin ortanca çocuğudur. Emekli bir asker olan babasının mesleği dolayısıyla ilk, orta ve lise eğitimini farklı il ve ilçelerde tamamlamış, 1994 yılında lise son sınıfı Salihli Lisesi'nde bitirerek mezun olmuştur. 1996 yılında, Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sınavlarına girerek okumaya hak kazandığı Akdeniz Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nü 2002 yılında bitirmiştir. Lisans eğitimini aldığı yıllarda geometri derslerini veren Dr. Fikri GÖKDAL'dan etkilenerek, 2003 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde, -Fikri GÖKDAL'ın da doktora danışmanı olan- Prof. Dr. Rüstem KAYA danışmanlığında Geometri üzerine yüksek lisans eğitimine başlamış ve bu eğitimi 2005 yılının Aralık ayında bitirmiştir. Aynı yıllar içinde özel bir dershanede Matematik Öğretmeni olarak çalışmıştır. 2006 yılında, Gelibolu'da 309. kısa dönem er olarak yaptığı askerlik sürecinde de Gelibolu Mehmetçik Dershanesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görevlendirilmiştir. 2006 yılı Eylül ayında, yine aynı bölümde ve aynı danışmanla dışarıdan Doktora eğitimine başlamış ve 2009 yılı Mayıs ayında Doktora eğitimini bitirmiştir. Yazar, boş vakitlerinde müzik ve sinemayla ilgilenmektedir.

Nazilli, 2009. Harun Barış ÇOLAKOĞLU