ÖRTME UZAYLARININ TEMEL GRUPLARI ÜZERİNE

Güneş KEFELİ

Matematik Anabilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
2008

ON THE FUNDAMENTAL GROUPS OF COVERING SPACES

Güneş KEFELİ

Department of Mathematics

MASTER OF SCIENCE DISSERTATION

2008

ÖRTME UZAYLARININ TEMEL GRUPLARI ÜZERİNE

Güneş KEFELİ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisans Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Ağustos 2008

ONAY

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Güneş KEFELİ ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " **ÖRTME UZAYLARININ TEMEL GRUPLARI ÜZERİNE**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

İkinci Danışman:

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Üye: Prof.Dr.Mahmut KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Yrd.Doç.Dr.Ummahan EGE ARSLAN

Üye: Yrd.Doç.Dr.Enver USLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

ÖRTME UZAYLARININ TEMEL GRUPLARI ÜZERİNE

Güneş KEFELİ

Matematik biliminde örtme uzaylar teorisi topolojide olduğu kadar bununla ilişkili olan Diferansiyel Geometri, Lie Gruplar Teorisi, Riemann Yüzeyler Teorisi gibi çalışma alanlarında da önemlidir.

Örtme uzaylar teorisi topolojik uzayların temel gruplarının çalışmalarıyla yakından ilişkilidir. Örtme uzayları hakkındaki birçok temel topolojik problem çeşitli uzayların temel grupları hakkındaki cebirsel problemlere dönüştürü- lebilir.

Bunlardan herhangi biri olmaksızın diğeri hakkında açıklama yapmak tam anlamıyla mümkün olmaz. Kabaca bir X topolojik uzayının $\widetilde{X}$ örtme uzayı, $\widetilde{X}$ dan X e örten bir yerel homeomorfizm vasıtasıyla X uzayını örten bir topolojik uzaydır.

Bu çalışmada amacımız örtme uzayları ile temel gruplar arasındaki ilişkiyi incelemektir.

Bu tez altı ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, temel grup yapısının temelini oluşturan homotopi kavramı tanıtıldı ve temel özellikleri verildi. İkinci bölümde, topolojik uzayları homotopik yapılarına göre sınıflandırmamızı sağlayan homotopi tipleri incelendi. Üçüncü bölümde, genel hatlarıyla bağlantılı uzaylar ele alındı. Dördüncü bölümde, topolojiden cebire geçiş yapabilmemizi sağlayan temel grup yapısı ayrıntılı bir şekilde işlendi. Bir sonraki bölümde, temel grup örneği olarak çemberin temel grubu oluşturuldu. Son bölümde ise örtme uzayları ve temel gruplar arasındaki ilişki verildi.

Anahtar Kelimeler: Temel Gruplar, Homotopi Grupları, Örtme Uzayları.

ABSTRACT

ON THE FUNDAMENTAL GROUPS OF COVERING SPACES

Güneş KEFELİ

The idea of covering spaces is very important in topological spaces which found applications in related disciplines such as differential geometry,the theory of Lie groups and the theory of Riemann surfaces. This idea is also closely connected with the study of fundamental group. several topological problems about covering spaces can be reduced to algebraic problems on the fundamental groups of the concerned spaces.It would be practically impossible to give a complete exposition of either one of these two topics without also taking up the other.

Let X be a topological space, a covering space of X consists of a space $\widetilde{X}$ and a continuos map p of $\widetilde{X}$ onto X which satisfies a certain very strong smoothness requirement.

This thesis consists of six main chapters. In the first chapter homotopy structure is introduced and its basic properties are given. In the second chapter homotopy types ara examined and in the next chapter, connected spaces are given. In the fourth chapter fundamental group of circles is computed and the last chapter we give the relationship between covering spaces nad fundamental groups.

Keywords: Fundamental Groups, Homotopy Groups, Covering Spaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın

İ. İLKER AKÇA 'ya

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

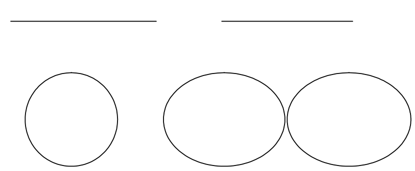
İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Topolojinin en temel problemlerinden birisi, verilen iki topolojik uzayın homeomorf olup olmadığını belirlemektir. Bu problemin çözülmesi için kullanılabilecek genel bir metod mevcut değildir, fakat özel durumlarda uygulanabilen bazı teknikler vardır.

İki uzayın homeomorf olduğunu göstermek için uzaylardan birinden diğerine sürekli terse sahip olan bir sürekli fonksiyon oluşturmak gerekir. Böyle sürekli bir fonksiyonu oluşturmak kolay değildir. İki uzayın homeomorf olmadığını göstermek ise ayrı bir problemdir. Bunun için ise, ters fonksiyonu sürekli olan bir sürekli fonksiyonun bulunamıyacağının gösterilmesi gerekmektedir. Eğer uzaylardan birinin sahip olduğu ama diğer uzayın sahip olmadığı bazı topolojik özellikler bulunabilirse, problem çözülmüş olur, bu durumda uzaylar homeomorf olamaz. Örneğin $\mathbb{R}$ de $[0,1]$ kapalı aralığı $(0,1)$ açık aralığına homeomorf olamaz, çünkü $[0,1]$ kompaktır $(0,1)$ ise kompakt değildir. Bundan başka $\mathbb{R}^2$ nin aşağıda verilen A, B, C ve D uzaylarının ikişer ikişer homeomorf olmadıklarını gösterelim.



Şekil 1.1:

B, C ve D uzayları kompakt olmasına rağmen A uzayı kompakt değildir. Bu nedenle A uzayı diğer uzayların hiçbirine homeomorf olmaz. Eğer C uzayından iki noktayı atarsak, geriye kalan uzay her zaman iki bağlantılı bileşenlidir. Fakat B uzayının iç kısmından iki nokta veya D den merkezi içeren iki nokta çıkarılırsa, kalan uzaylar üç bağlantılı bileşenlidir. Bu nedenle B uzayı, C ve D uzaylarının ikisine de homeomorf olamaz. D uzayında, $D - \{d\}$ iki bileşenli olacak şekilde bir d noktası (D nin merkezi) vardır. Fakat C uzayında, $C - \{c\}$ iki bileşenli olacak şekilde hiçbir c noktası yoktur. O halde C ile D uzayları da homeomorf olamazlar.

Fakat şu ana kadar çalıştığımız topolojik özellikler problemin çözümü için yeterli değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ düzleminin $\mathbb{R}^3$ uzayına homeomorf olmadığı nasıl gösterilebilir. Kompaktlık, bağlantılık, yerel bağlantılık, metriklenebilirlik gibi topolojik özellikler listesine bakıldığında bu iki uzayı birbirinden ayıran bir topolojik özellik bulunamaz. Bundan başka S^2 küresi, T tor yüzeyi ve T_2 çift tor yüzeyi gibi yüzeyleri düşünüldüğünde, şu ana kadar ele alınan hiçbir topolojik özellik bu yüzeyleri birbirinden ayırt etmeye yetmeyecektir. Bundan dolayı yeni özellikler ve teknikler sunmalıyız. Bu özelliklerin en doğalı olan basit bağlantılılıktır. Kabaca söylersek, eğer bir X uzayındaki her kapalı eğri X içindeki bir noktaya büzülebilirse, X uzayına basit bağlantılı denir.

Basit bağlantılılık, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ arasındaki ayrımı ortaya çıkaran bir özelliktir. Çünkü $\mathbb{R}^3$den bir nokta çıkarıldığında geriye basit bağlantılı bir uzay kalırken $\mathbb{R}^2$ den bir nokta çıkarıldığında geriye kalan uzay basit bağlantılı değildir. Bu özellik aynı zamanda S^2(basit bağlantılıdır) ile T tor yüzeyi (basit bağlantılı değildir) arasındaki ayrımı ortaya çıkarır. Fakat bu özellik T ile T_2 arasındaki ayrımı ortaya çıkaramaz, çünkü her iki uzayda basit bağlantılı değildir.

Basit bağlantılılığı özel bir hal olarak içeren, basit bağlantılıktan daha genel bir kavram mevcuttur. Bu kavram, bir uzayın *"Temel Grubu"* olarak adlandırılan belirli bir gruptur. Homeomorf olan iki uzayın temel grupları izomorftur. Uzay basit bağlantılı olduğunda X in temel grubu aşikar gruptur. Böylece S^2 ve T nin homeomorf olmadığının ispatı, S^2 nin temel grubunun aşikar grup ve T nin temel grubunun aşikar grup olmadığının gösterilmesi ile yapılır.

Temel grup kavramı, basit bağlantılık özelliği ile yapılacağından daha çok sayıda uzay arasında ayrım yapılmasını sağlar. Örneğin T nin ve T_2 nin homeomorf olmadığının gösterilmesinde kullanılır.

Matematik biliminde örtme uzaylar teorisi topolojide olduğu kadar bununla ilişkili olan Diferansiyel Geometri, Lie Gruplar Teorisi, Riemann Yüzeyler Teorisi gibi çalışma alanlarında da önemlidir.

Örtme uzaylar teorisi topolojik uzayların temel gruplarının çalışmalarıyla yakından ilişkilidir. Örtme uzayları hakkındaki birçok temel topolojik problem çeşitli uzayların temel grupları hakkındaki cebirsel problemlere dönüştürü- lebilir.

Bunlardan herhangi biri olmaksızın diğeri hakkında açıklama yapmak tam anlamıyla mümkün olmaz. Kabaca bir X topolojik uzayının $\widetilde{X}$ örtme uzayı, $\widetilde{X}$ dan X e örten bir yerel homeomorfizm vasıtasıyla X uzayını örten bir topolojik uzaydır.

Bu çalışmada amacımız örtme uzayları ile temel gruplar arasındaki ilişkiyi incelemektir.

Bu tez altı ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, temel grup yapısının temelini oluşturan homotopi kavramı tanıtıldı ve temel özellikleri verildi. İkinci bölümde, topolojik uzayları homotopik yapılarına göre sınıflandırmamızı sağlayan homotopi tipleri incelendi. Üçüncü bölümde, genel hatlarıyla bağlantılı uzaylar ele alındı. Dördüncü bölümde, topolojiden cebire geçiş yapabilmemizi sağlayan temel grup yapısı ayrıntılı bir şekilde işlendi. Bir sonraki bölümde, temel grup örneği olarak çemberin temel grubu oluşturuldu. Son bölümde ise örtme uzayları ve temel gruplar arasındaki ilişki verildi.

BÖLÜM 2

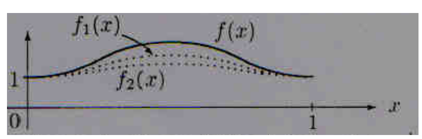
HOMOTOPİ

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = 1 + x^2 (x-2)^2 \end{array}$$

fonksiyonunu ele alınsın, bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki şekildedir.

Şekil 2.1:

Şekilden de görüldüğü gibi bu fonksiyonun grafiği 1 sabit fonksiyonunun grafiğine çok benzerdir, sadece $x = 1$ noktasının civarında küçük bir salınıma sahiptir. $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2(x-2)^2$ fonksiyonu ele alınırsa, bu fonksiyonunda grafiği aynı şekle sahiptir fakat daha küçük salınım mevcuttur. Benzer şekilde $f_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2(x-2)^2$ fonksiyonu da aynı şekle sahiptir fakat daha çok küçük salınımı vardır.



Şekil 2.2:

Böylece daha genel olarak $n \geq 1$ için $f_n(x) = 1 + \frac{1}{(n+1)}x^2(x-2)^2$ fonksiyonunu tanımlanabilir ve böylece f fonksiyonu ile 1 sabit fonksiyonu arasında değişen ara değer fonksiyonlarının ailesi elde edilir.

Bir fonksiyondan diğer bir fonksiyon üzerine sürekli bir deformasyon elde edebilmek için yukarıdaki gibi ara değer fonksiyonları gereklidir. Bunu oluşturmak için yani sürekli bir deformasyon elde edebilmek için $f_1,\ f_2,\ f_3, ...$ ara değer fonksiyonları tamsayılar ile değil, genelde 0 ile 1 arasındaki reel sayılar ile indislenmelidir. Böylece $f_0 = f$ ve $f_1 = 1$ sabit fonksiyonu olacak şekilde bir $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ fonksiyonlar ailesi oluşturmak istenir.

Yukarıdaki örnekte her bir $t \in [0,1]$ için $f_t(x) = 1 + (1-t)\,x^2\,(x-2)^2$ fonksiyonlarını ele alınsın. Burada $f_0(x) = 1 + x^2(x-2)^2 = f(x)$ ve $f_1(x) = 1$ sabit fonksiyonudur.

Böyle bir deformasyon yardımı ile, $[0,1]$ içindeki herbir nokta için bir fonksiyon elde edilir, böylece deformasyon $[0,1]$ den $[0,2] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların kümesine bir fonksiyondur yani $t \in [0,1]$ noktasını f_t fonksiyonuna dönüştürür. Deformasyonun sürekli olması için ise bu fonksiyonun sürekli olması gerekir.

$\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ ailesi, her bir $t \in [0,1]$ için bir $f_t : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu belirler. Ayrıca her bir $x \in [0,2]$ için $f_t(x) \in \mathbb{R}$ dir. Böylece bu aileyi her bir $(x,t) \in [0,2] \times [0,1]$ ikilisi $f_t(x) \in \mathbb{R}$ değerine dönüştüren bir kural olarak düşünülebilir. Diğer bir deyişle bir $[0,2] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu elde edilir. $[0,2]$ ve $[0,1]$ üzerindeki topolojiler ele alındığında, çarpım topolojisi ile $[0,2] \times [0,1]$ üzerinde bir topoloji oluşturulur ve böylece $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ ailesi bu iki topolojik uzay arasında bir fonksiyona karşılık gelir. Böylece karşılık gelen fonksiyon sürekli ise sürekli olan bir fonksiyonlar ailesi tanımlanmış olur. Böylece adına "homotopi" denilen aşağıdaki kavram elde edilir. Ayrıntılı bilgi için [3], [4], [5] incelenebilir.

Tanım 2.1 S ve T iki topolojik uzay ve $f, g : S \longrightarrow T$ iki fonksiyon olsun. Eğer

$$\begin{array}{rccc} F : & S \times [0,1] & \longrightarrow & T \\ & (s,t) & \longmapsto & F(s,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu her $s \in S$ için $F(s,0) = f(s)$ ve $F(s,1) = g(s)$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f ve g fonksiyonlarına homotopik, bu F fonksiyonuna da f ile g arasında bir homotopi denir ve bu $f \cong g$ şeklinde gösterilir

Örnek 2.1 .$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu ile $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2$ sabit fonksiyonunun homotopik olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{array}{rccc} F : & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) \end{array}$$

$F(0,x) = f(x) = x^2$ ve $F(1,x) = g(x) = 2$ olacak şekilde bir F homotopisinin mevcut olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{array}{rccc} F : & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) = (1-t)\,x^2 + 2t \end{array}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $x, t \in [0,1]$ için süreklidir. Ayrıca

$$F(0,x) = (1-0)\,x^2 + 2.0 = x^2 = f(x)$$

ve

$$F(1,x) = (1-1)\,x^2 + 2.1 = 2 = g(x)$$

dir. O halde bu F sürekli fonksiyonu $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2$ fonksiyonları arasında bir homotopi olup $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2$ fonksiyonları homotopik fonksiyonlardır.

Örnek 2.2 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ çember olmak üzerine

$$\begin{array}{cccc} f & : & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (x,y) \end{array}$$

fonksiyonu ile

$$\begin{array}{cccc} g & : & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (0,0) \end{array}$$

sabit fonksiyonu homotopik olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccccc} F & : & [0,1] \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (t,(x,y)) & \longmapsto & F(t,(x,y)) = ((1-t)\,x, (1-t)\,y) \end{array}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $x,\, y \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0,1]$ için süreklidir.

$$F(0,(x,y)) = ((1-0)\,x, (1-0)\,y) = (x,y) = f(x,y)$$

ve

$$F(1,(x,y)) = ((1-1)\,x, (1-1)\,y) = (0,0) = g(x,y)$$

olup F, f ile g fonksiyonları arasında bir homotopidir. O halde f ile g homotopiktir.

Örnek 2.3 $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,y)$ ve $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (3x, 3y)$ fonksiyonlarının homotopik olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccccc} F & : & [0,1] \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (t,(x,y)) & \longmapsto & F(t,(x,y)) = ((2t+1)\,x, (2t+1)\,y) \end{array}$$

fonksiyonu $x, y \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0,1]$ için süreklidir.

$$\begin{aligned} F(0,(x,y)) &= ((2.0+1)\,x, (2.0+1)\,y) = (x,y) = f(x,y)\,, \\ F(1,(x,y)) &= ((2.1+1)\,x, (2.1+1)\,y) = (3x, 3y) = g(x,y) \end{aligned}$$

olup F, f ile g fonksiyonları arasında bir homotopidir. O halde f ile g homotopiktir.

Örnek 2.4 f ile g, $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ iki sürekli fonksiyon olsun. Buna göre

$$\begin{array}{rcccc} F & : & [0,1]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) = (1-t)\,f(x) + tg(x) \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir ve

$$\begin{aligned} F(0,x) &= (1-0)\,f(x) + 0.g(x) = f(x)\,, \\ F(1,x) &= (1-1)\,f(x) + 1.g(x) = g(x) \end{aligned}$$

olup F, $f$ile g arasında bir homotopidir.

Tanım 2.2 Eğer $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu bir sabit fonksiyona homotopikse f ye basit homotopiktir denir.

Örnek 2.5 f ve g fonksiyonları basit homotopik fonksiyonlar yani birer sabit fonksiyona homotopik olan fonksiyonlar olsun. Bu f ve g fonksiyonları arasında bir homotopi olmayabilir. Ayrıca sabit fonksiyonların bile homotopik olması gerekmez. X bağlantılı ve Y bağlantılı olmayan topolojik uzaylar olsun ve $f_0(x) = y_0$, $f_1(x) = y_1$ olacak şekilde iki sabit fonksiyonu ele alalım. f_0 ve f_1 homotopik değildir çünkü Y bağlantılı iken $X \times C$ bağlantılı ve bağlantılı bir uzayın bir sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de bağlantılıdır.

2.1 HOMOTOPİK FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

Teorem 2.3 $B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ n-boyutlu kapalı disk ve $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ $n-1$ boyutlu küresi ele alınsın.

$I : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ birim fonksiyonu ile $i : S^{n-1} \longrightarrow B^n$ içine fonksiyon olmak üzere $I : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ birim fonksiyonunun bir sabit fonksiyona homotop olması için gerek ve yeter şart $f.i = I$ olacak şekilde bir $f : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ sürekli fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. $f.i = I$ olacak şekilde bir f sürekli fonksiyonunun var olduğu kabul edilsin. $F : S^{n-1} \times C \longrightarrow S^{n-1}$, $F(x,t) = f(tx)$ biçiminde bir homotopi tanımlansın. Bu durumda, $x \in S^{n-1}$ olduğu için $F(x,1) = f(x) = x$ ve aynı zamanda $F(x,0) = f(0)$ dır.

Tersine $F : S^{n-1} \times C \longrightarrow S^{n-1}$, $F(x,0) = c$, $F(x,1) = x$ biçiminde tanımlanan F fonksiyonu var olsun. $f : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ fonksiyonunun $f(x) = F\left(\frac{x}{\|x\|}; \|x\|\right)$, $f(0) = c$ biçiminde tanımlansın. S^{n-1} kompakt olduğundan F düzgün süreklidir. Bundan dolayı keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|F(x,t) - c\| < \delta$ iken $t < \varepsilon$ olacak şekilde X ten bağımsız bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu ise f in 0 da sürekli olduğunu gösterir. □

Yardımcı Teorem 2.4 Eğer $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ sürekli fonksiyonlar ise buradan $h = gf : X \longrightarrow Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

İspat. Y içerisindeki bir açık kümenin f altındaki ters görüntüsü X içerisinde açık ve Z içerisindeki açık bir kümenin g altındaki ters görüntüsü Y de açıktır. A , Z de açık bir küme olsun. $h^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ kümesi X içerisinde açık olduğundan h süreklidir. □

Yardımcı Teorem 2.5 $x_1 \in X$, $x_2 \in Y$ olmak üzere $p : X \times Y \longrightarrow X$ ve $q : X \times Y \longrightarrow Y$, $p(x_1, x_2) = x_1$, $q(x_1, x_2) = x_2$ olsun. O halde p ve q süreklidir.

İspat. A, X te açık olsun. $x_1 \in A$ ve $x_2 \in Y$ olmak üzere $p^{-1}(A)$, $(x_{1,}x_2)$ ikililerinin kümesidir. Böylece $p^{-1}(A) = A \times Y$ olup $X \times Y$ içinde açıktır. Buradan p süreklidir. Benzer şekilde q süreklidir. □

Yardımcı Teorem 2.6 X, A ve B kapalı kümelerin birleşimi ve

$$f : A \longrightarrow Y \text{ ve } g : B \longrightarrow Y$$

ve $\forall x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ olacak şekilde iki sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $h : X \longrightarrow Y$, $x \in A$ için $h(x) = f(x)$ ve $x \in B$ için $h(x) = g(x)$ biçiminde tanımlanan h fonksiyonu süreklidir.

İspat. : $F \subset X$; $F_1 = F \cap A$ ve $F_2 = F \cap B$ olsun. Buradan $F = F_1 \cup F_2$ ve böylece $h(F) = h(F_1) \cup h(F_2)$ dır. $\overline{F} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$ olduğundan $h\left(\overline{F}\right) = h\left(\overline{F_1}\right) \cup h\left(\overline{F_2}\right)$ dir.

Eğer $x \in \overline{F_1} = \overline{(F \cap A)}$ ise $x \in \overline{A}$ ve A kapalı olduğundan $x \in A$ dır. O halde $h\left(\overline{F_1}\right) = f\left(\overline{F_1}\right)$ dır. Benzer şekilde $\overline{F_2} \subset B$ ve $h\left(\overline{F_2}\right) = g\left(\overline{F_2}\right)$. f ve g sürekli olduğundan $f\left(\overline{F_1}\right) \subset \overline{(f(F_1))}$ $g\left(\overline{F_2}\right) \subset \overline{(g(F_2))}$ dir. Buna göre

$$h\left(\overline{F}\right) = h\left(\overline{F_1}\right) \cup h\left(\overline{F_2}\right) \subset \overline{(f(F_1))} \cup \overline{(g(F_2))} = \overline{(h(F_1))} \cup \overline{(h(F_2))}$$

olur. O halde

$$\overline{(h(F_1))} \cup \overline{(h(F_2))} = \overline{(h(F_1) \cup h(F_2))} = h(F)$$

dir ve $h\left(\overline{F}\right) \subset \overline{(h(F))}$ olur. Yani h süreklidir. □

Teorem 2.7 " $\simeq$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. " $\simeq$ " bağıntısının bir denklik bağıntısı olması için yansıma, simetri ve geçişme özelliğine sahip olduğu gösterilmelidir.

i) $\simeq$ bağntısının yansıyan olduğunu göstermek için $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = f(x)$ olacak şekilde bir $F : X \times C \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun tanımlanması gerekir. Burada $F(x,t) = f(x)$ olacak şekilde tanımlanırsa $f \simeq f$ olduğu görülür.

ii) $\simeq$ bağıntısının simetrik olduğunu göstermek için $f \simeq g$ iken $g \simeq f$ olduğu gösterilmelidir. $f \simeq g$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} F : X \times C & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan

$$\begin{array}{rcl} A : X \times C & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & A(x,1-t) \end{array}$$

fonksiyonu da süreklidir ve $A(x,0) = F(x,1) = g(x)$, $A(x,1) = F(x,0) = f(x)$ olur. O halde, $g \simeq f$ dir.

iii) $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ olsun. O halde

$$\begin{array}{rcl} F : X \times C & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ ve

$$\begin{array}{rcl} G : X \times C & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & G(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $G(x,0) = g(x)$, $G(x,1) = h(x)$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan

$$\begin{array}{rcl} H : X \times C & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \end{array}$$

sürekli fonksiyonu tanımlanabilir. Burada $H(x,0) = F(x,2t) = F(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = G(x,2t-1) = G(x,1) = h(x)$ elde edilir . O halde $f \simeq h$ dır. $\square$

Bu teoremden fonksiyonların homotopi sınıfları kavramına ulaşılır. Eğer f sürekli fonksiyonsa, karşı gelen homotopi sınıfı f e homotopik olan bütün sürekli fonksiyonlardan oluşur ve $[f]$ biçiminde gösterilir. Burada, X ten Y ye sürekli fonksiyonların homotopi sınıfının kümesi $[X,Y]$ biçiminde gösterilir.

Teorem 2.8 i) $f_{1,}\ f_2 : X \longrightarrow Y$ ve $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ olmak üzere $f_1 \simeq f_2$ ve $g_1 \simeq g_2$ ise $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$ dır.

ii) Eğer $f_1 g_1 : X \longrightarrow Y$ ve $f \simeq g$ ise herhangi $A \subset X$ için

$$f\mid_A \simeq g\mid_A$$

dır.

İspat. i) $\Phi : f_1 \simeq f_2$ ve $\Psi : g_1 \simeq g_2$ olsun.

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & X \times C & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & \Phi(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $\Phi(x,0) = f_1(x)$, $\Phi(x,1) = f_2(x)$ olacak şekilde ve

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & Y \times C & \longrightarrow & Z \\ & & (y,t) & \longmapsto & \Psi(y,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $\Psi(y,0) = g_1(y)$ ve $\Psi(x,1) = g_2(y)$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan

$$\begin{array}{cccc} F & : & X \times C & \longrightarrow & Z \\ & & (x,t) & \longmapsto & F(x,t) = \begin{cases} g_1(\Phi(x,2t)) & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \Psi(f_2(x), 2t-1) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\Phi, \Psi, f_1, f_2, g_1$ ve g_2 sürekli ve $t = \frac{1}{2}$ için

$$F\left(x, \frac{1}{2}\right) = g_1 \Phi(x,1) = g_1 f_2(x) = \Psi(f_2(x), 0) = g_1 f_2(x)$$

olduğundan $F(x,t)$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca $F(x,0) = g_1\Phi(x,0) = g_1f_1(x)$ ve $F(x,1) = \Psi(f_2(x),1) = g_2f_2(x)$ dir. Böylece $g_1f_1 \simeq g_2f_2$ elde edilir.

i) Farz edelim ki $i : A \longrightarrow X$ içine fonksiyon olsun. O halde, $f\mid_A = f.i$ dir. $G : i \simeq i$, $G(x,0) = i(x)$ ve $G(x,1) = i(x)$, $F : f \simeq g$, $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$

olmak üzere

$$H(x,t) = \begin{cases} fG(x,2t) & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F(i(x,2t-1)) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon süreklidir ve $H(x,0) = fG(x,0) = fi(x)$, $H(x,1) = F(i(x,1)) = gi(x)$ dir. Ohalde $fi \simeq gi$ yani $f\mid_A \simeq g\mid_A$ elde edilir. □

Teorem 2.9 $f, g : X \longrightarrow Y$ homotopik fonksiyonlar ve

$$h : Y \longrightarrow Z$$

sürekli fonksiyon olsun. Böylece $hf, hg : X \longrightarrow Z$ homotopik fonksiyonlardır.

İspat.

$$\begin{array}{rcl} F : X \times C & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ olacak şekilde mevcuttur. Bunun yardımıyla

$$\begin{array}{rcl} G : X \times C & \longrightarrow & Z \\ (x,t) & \longmapsto & G(x,t) = h(F(x,1)) \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın. h ve F sürekli olduğundan dolayı G fonksiyonu da süreklidir. Ayrıca

$$G(x,0) = h(F(x,0)) = hf(x) \text{ ve } G(x,1) = h(F(x,1)) = hg(x)$$

dir. Ohalde tanımlanan bu G fonksiyonu hf ve hg arasında bir homotopidir. Yani $hf \simeq hg$ dir. □

Teorem 2.10 $f : X \longrightarrow Y$ sürekli $g, h : Y \longrightarrow Z$ homotopik fonksiyonlar ise $gf, hf : X \longrightarrow Z$ ye homotopik fonksiyonlardır.

İspat.

$$\begin{array}{cccc} F & : & Y \times C & \longrightarrow & Z \\ & & (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = g(x)$, $F(x,1) = h(x)$ olacak şekilde mevcuttur. Bunun yardımıyla

$$\begin{array}{cccc} A & : & X \times C & \longrightarrow & Z \\ & & (x,t) & \longmapsto & A(x,t) = F(f(x),t) \end{array}$$

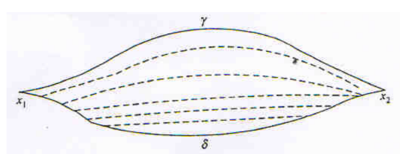
sürekli fonksiyonu tanımlansın. f ve F sürekli olduğundan dolayı A fonksiyonu da süreklidir. Ayrıca

$$A(x,0) = F(f(x),0) = (gf)(x) \quad , \; A(x,1) = F(f(x),1) = (hf)(x)$$

olacağından A fonksiyonu gf ve hf arasında homotopidir yani $gf \simeq hf$ dir. $\square$

2.2 RELATİF HOMOTOPİ

Çeşitli durumlarda homotopinin kısıtlanmış durumu incelenir. Bu kısıtlama altında deformasyon boyunca bazı alt kümelerde noktaların değişmez kalması gereklidir.



Şekil 2.3:

Yukardaki şekilde aynı x_1 ve x_2 uç noktalarına sahip γ ve δ yaylarını ele alınmıştır. γ nın δ biçimine sürekli olarak deforme edildiğini düşünelim. Burada arada değişen tüm yayların aynı x_1 ve x_2 uç noktalarına sahip olduğu görülür. Bu durum altında γ ve δ yaylarının x_1 ve x_2 noktalarından oluşan alt kümeye göre relatif homotopik oldukları söylenir. Bunun daha formal tanımı aşağıdaki gibidir..

Tanım 2.11 $A \subset X$,

$$\begin{array}{cccc} f_0 & : & X & \longrightarrow & Y \\ f_1 & : & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $x \in A$ için f_0 ve f_1 arasında $t \in C$ den bağımsız $F(x,t)$ homotopisi mevcutsa f_0 ve f_1 , A ya göre homotopiktirler denir. Diğer bir deyişle $\forall x \in A$ ve $\forall t \in C$ için $F(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$ olacak şekildeki F homotopisine A ya göre homotopi denir. Bu $f_0 \simeq f_1\,(relA)$ veya $F : f_0 \simeq f_1\,(relA)$ biçiminde gösterilir.

$F : f_0 \simeq f_1\,(relA)$ ise $\forall x \in X$ için $F\,(x,0) = f_0\,(x)\,, F\,(x,1) = f_1\,(x)$ ve $\forall x_0 \in A, \forall t \in C$ için $F\,(x_0,t) = f_0\,(x_0) = f_1\,(x_0)$ dir. Eğer $A = \emptyset$ ise A ya göre homotopiye basit homotopi denir.

Teorem 2.12 A ya göre homotopi olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. A ya göre homotopi olma bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için $\simeq$ bağıntının yansıma,simetri ve geçişme özelliklerine sahip olduğu gösterilmelidir.

i) $\simeq$ bağntısının yansıyan olduğunu göstermek için $F\,(x,0) = f\,(x)$ ve $F\,(x,1) = f\,(x)$ olacak şekilde bir $F : X \times C \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun tanımlanması gerekir. Burada $F\,(x,t) = f\,(x)$ olacak şekilde tanımlanırsa $F\,(x,0) = f\,(x) = F\,(x,1)$ olacağından $f \simeq f\,(relA)$ olduğu görülür.

ii) Simetri özelliğinin sağlandığını göstermek için $f \simeq g\,(relA)$ iken $g \simeq f\,(relA)$ olduğu gösterilmelidir.

$f \simeq g\,(relA)$ olsun. Bu durumda ;

$$\begin{array}{rclcl} F & : & X \times C & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & F\,(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F\,(x,0) = f\,(x)$ ve $F\,(x,1) = g\,(x)$ olacak şekilde mevcuttur . Ayrıca $x_0 \in A$ için $F\,(x_0,t) = f\,(x_0) = g\,(x_0)$ dır. Buradan

$$\begin{array}{rclcl} G & : & X \times C & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & G\,(x,t) = F\,(x,1-t) \end{array}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon süreklidir ve $G\,(x,0) = F\,(x,1) = g\,(x)$ ve $G\,(x,1) = F\,(x,0) = f\,(x)$ dir ve $x_0 \in A$ için $G\,(x_0,t) = g\,(x_0) = f\,(x_0)$ olacağından $g \simeq f\,(relA)$ elde edilir.

iii) Geçişme özelliğinin sağlandığını göstermek için ; $f \simeq g\,(relA)$ ve $g \simeq h\,(relA)$ iken $f \simeq h\,(relA)$ olduğu gösterilmelidir.

$f \simeq g\,(relA)$ ve $g \simeq h\,(relA)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rclcl} F & : & X \times C & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & F\,(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$, $x_0 \in A$ için $F(x_0,t) = f(x_0) = g(x_0)$ olacak şekilde mevcuttur ve

$$\begin{array}{rcccl} G & : & X \times C & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & G(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $G(x,0) = g(x), G(x,1) = h(x)$ ve $x_0 \in A$ için $G(x_0,t) = g(x_0) = h(x_0)$ olacak şekilde mevcuttur. Böylece

$$\begin{array}{rcccl} H & : & X \times C & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

sürekli fonksiyonu tanımlanabilir. Burada $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ ve $x_0 \in A$ için $H(x_0,t) = f(x_0) = h(x_0)$ olacağından $f \simeq h\,(relA)$ elde edilir. $\square$

Uyarı 2.13 $x \in A$ noktalarının görüntüleri Y nin aynı noktasına dönüşecek şekilde tüm $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonlarının kümesi denklik sınıfları biçiminde ayrıştırılır. Böylece f ve g iki sürekli fonksiyonlarının aynı sınıfa ait olabilmesi için gerek ve yeter şart $f \simeq g\,(relA)$ olduğu görülür. Sürekli fonksiyonların bu sınıfları homotopi sınıfları olarak adlandırılır.

Örnek 2.6

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , f(x) = x^2$$

fonksiyonu ile

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , g(x) = \sqrt{x}$$

fonksiyonunun homotopik olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcccl} F & : & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) = (1-t)\,x^2 + \sqrt{x}t \end{array}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $t, x \in [0,1]$ için süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(0,x) &= \sqrt{x}t + (1-0)\,x^2 = x^2 = f(x) \\ F(1,x) &= \sqrt{x}.1 + (1-1)\,x^2 = \sqrt{x} = g(x) \end{aligned}$$

olup F, f ile g fonksiyonları arasında bir homotopidir. O halde $f(x) = x^2$ ile $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonları homotopik fonksiyonlarıdır. Bundan başka,

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \sqrt{0}t + (1-t)\,0 = 0 = f(0) = g(0) \\ F(t,1) &= \sqrt{1}t + (1-t)\,.1 = t + 1 - t = 1 = f(1) = g(1) \end{aligned}$$

olduğundan f ile g fonksiyonları $A = \{0, 1\}$ kümesine göre homotopiktir. O halde $f \cong g\,(rel\ A)$ dir.

BÖLÜM 3

HOMOTOPİ TİPLERİ VE GERİ ÇEKMELER

3.1 BÜZÜLEBİLİR UZAYLAR

$g \; : \; X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun görüntüsü bir tek nokta ise g ye sabit fonksiyon denir. Eğer $f \; : \; X \longrightarrow Y$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu, g sabit fonksiyonuna homotopik ise f ye basit homotopiktir denir. Eğer I_X birim fonksiyonu sabit fonksiyona homotopik ise (uygun bir kategoride) X uzayı büzülebilir denir. Bir başka deyişle büzülebilir uzay kendi üzerinde bir noktaya deforme edilebilen bir uzaydır.

Örnek 3.1 Eğer S, sadece bir nokta içeren uzay ise S ile R homotopik denk olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $f \; : \; R \longrightarrow S$ sabit fonksiyonu tanımlanır.

$$g \; : \; S \longrightarrow R$$

şeklinde tanımlı, S deki tek noktayı $0 \in \mathbb{R}$ e dönüştüren bir fonksiyon olsun.

$$g \circ f \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tanımlı bileşke fonksiyonu 0 sabit fonksiyonu olduğundan $f \circ g \; : \; S \longrightarrow S$ bileşke fonksiyonu birim fonksiyondur. Böylece $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı tüm fonksiyonlar homotopiktir. Buradan $g \circ f$ fonksiyonu birim fonksiyona homotopik olduğu elde edilir.

Örnek 3.2 $B^n, \mathbb{R}^n$ nin $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^n \leq 1$ özelliğini sağlayan $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ noktalarından oluşsun.

$X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in B^n$ olmak üzere,

$$F \; : \; B^n \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$F(x,t) = ((1-t)\, x_1, (1-t)\, x_2, ..., (1-t)\, x_n)$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca $F(x,0) = x = I_{B^n}(x)$ ve $F(x,1) = (0,0,...,0)$ dır. Böylece,

$$I \; : \; B^n \longrightarrow B^n$$

birim fonksiyonu sabit fonksiyona homotopiktir.

Teorem 3.1 Eğer Y büzülebilir bir uzay ise $f : X \longrightarrow Y$ biçiminde tanımlanan tüm f fonksiyonları sabit fonksiyona homotopiktir.

İspat. Y büzülebilir olduğundan

$$\begin{array}{rccc} F: & Y \times C & \longrightarrow & Y \\ & (y,t) & \longmapsto & F(y,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $\forall\ y \in Y$ için $F(y,0) = y = I_y(y)$ ve $F(y,1) = y_0$ olacak şekilde mevcuttur. $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyon olmak üzere $G : X \times C \longrightarrow Y$ fonksiyonunu $x \in X$ için $G(x,t) = F(f(x),t)$ olarak tanımlansın. Yardımcı teorem 2.1.2 i kullanırsak G nin sürekli olduğu görülür. Ayrıca $G(x,0) = F(f(x),0) = f(x)$, $G(x,1) = F(f(x),1) = y_0$ dır. Böylece, f ile

$$\begin{array}{rccc} g: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y_0 \end{array}$$

sabit fonksiyonu homotopiktir. □

Uyarı 3.2 Büzülebilir uzaylar içinde tek bir homotopi sınıfı vardır.

3.2 HOMOTOPİ TİPLERİ

X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonları $gf : X \longrightarrow X$ I_X birim fonksiyonuna homotopik

$$fg : Y \longrightarrow Y$$

I_Y birim fonksiyonuna homotopik olacak şekilde mevcutsa X ve Y uzaylarına aynı homotopi tipindedir denir.

f ve g fonksiyonlarına homotopi denklikleri denir ve X ve Y uzaylarına da homotopik olarak denktirler denir.

Yardımcı Teorem 3.3 Eğer S ile T homeomorfik ise aynı zamanda homotopik denktir.

İspat. S ile T homeomorfik ise bir $f : S \longrightarrow T$ homeomorfizmi mevcuttur, bu durumda $f^{-1} : T \longrightarrow S$ sürekli fonksiyonu $f \circ f^{-1} = I_T$ ve $f^{-1} \circ f = I_S$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan $f \circ f^{-1} \simeq I_T$ ve $f^{-1} \circ f \simeq I_S$ olacak şekilde $f : S \longrightarrow T$ ve $f^{-1} : T \longrightarrow S$ sürekli fonksiyonları vardır. O halde S ve T homotopik denktir. $\square$

Örnek 3.3 $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \right\}$ biçiminde tanımlansın. $A \simeq S^1$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{array}{rcll} f & : & S^1 & \longrightarrow A \\ & & (x,y) & \longmapsto f(x,y) = (x,y) \end{array}$$

içine fonksiyonu ve

$$\begin{array}{rcll} g & : & A & \longrightarrow S^1 \\ & & (x,y) & \longmapsto g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) \end{array}$$

biçiminde g dönüşümü tanımlansın. Eğer $(x,y) \in S^1$ için $g(x,y) = (x,y)$ olursa $g \circ f$ bileşke fonksiyonu $I_{S^1} : S^1 \longrightarrow S^1$ birim fonksiyonuna eşit olur. Buradan $g \circ f \simeq I_{S^1}$ olduğu görülür. $(f \circ g)(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \circ (x,y)$ bileşke fonksiyonu

$$\begin{array}{rcll} F & : & A \times [0,1] & \longrightarrow A \\ & & ((x,y),t) & \longmapsto F((x,y),t) = \dfrac{t.\sqrt{x^2+y^2} + (1-t)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) \end{array}$$

biçiminde tanımlı F fonksiyonu yardımıyla A nın I_A birim fonksiyonu ile homotopik olur. Gerçekten de

$$F((x,y),0) = (f \circ g)(x,y)\, ve F((x,y),1) = (x,y)$$

dir. F sürekli fonksiyonların bileşkesi olduğundan süreklidir. Buradan f ve g, A ile S^1 arasında homotopi denklikleridir.

Örnek 3.4 Büzülebilir uzay ile tek nokta içeren uzay aynı homotopi tipine sahip değildir. Eğer büzülebilir uzay birden fazla nokta içerirse bu iki uzayın homeomorfik olmasına gerek yoktur.

Örnek 3.5 B^n, $\{y_0\} \subset B^n$olacak şekildeki tek nokta kümesine homeomorfik değildir. Burada B^n in $\{y_0\}$ kümesi ile aynı homotopi tipine sahip olduğu gösterilmelidir. Bunu göstermek için

$$f : \{y_0\} \longrightarrow B^n$$

$(f(y_0) = y_0)$ içine fonksiyonu ve

$$g \ : \ B^n \longrightarrow \{y_0\}$$

sabit fonksiyonu ele alınsın. Burada $gf = I$ ve $F \ : \ B^n \times C \longrightarrow B^n$, $F(x,t) = tx + (1-t)\,y$ biçiminde tanımlı $F(x,t)$ fonksiyonu fg ile I_{B^n} arasında homotopidir, yani $fg \simeq I_{B^n}$ dir. O halde B^n ile $\{y_0\} \subset B^n$ kümesi aynı homotopi tipine sahiptir.

Teorem 3.4 Aynı homotopi tipinde olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Yansıma ve simetri özelliği tanımdan görülür. X, Y ile Y, Z aynı homotopi tipine sahip olsunlar. Bu durumda $f \ : \ X \longrightarrow Y$, $g \ : \ Y \longrightarrow X$, $f_1 \ : \ Y \longrightarrow Z$, $g_1 \ : \ Z \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonları $gf \simeq I_X$, $g_1 f_1 \simeq I_Y$, $fg \simeq I_Y$, $f_1 g_1 \simeq I_Z$ olacak şekilde mevcuttur. $f_2 \ : \ X \longrightarrow Z$, $f_2(x) = f_1(f(x))$ ve $g_2 \ : \ Z \longrightarrow X$ $g_2(x) = g(g_1(x))$ fonksiyonlarını düşünürsek Yardımcı teorem 2.1.2 sayesinde f_2 ve g_2 sürekli ve teorem 2.1.7 ve teorem 2.1.8 'ten $g(g_1 f_1)$, g ye homotopiktir çünkü $g_1 f_1$ birim fonksiyonuna homotopiktir. Böylece $g_2 f_2 = g((g_1 f_1) f)$, gf e homotopiktir. Sonuçta $g_2 f_2$ birime homotopiktir. Benzer şekilde $f_2 g_2$, $I \ : \ Z \longrightarrow Z$ birime homotopiktir. Bu da gösterir ki X, Z ile aynı homotopi tipindedir. Böylece aynı homotopi tipine sahip olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. □

3.3 GERİ ÇEKMELER

Tanım 3.5 $A \subset X$ olsun. $i \ : \ A \longrightarrow X$ içine fonksiyon olmak üzere bir

$$r \ : \ X \longrightarrow A$$

sürekli fonksiyonu $r \circ i = I_A$ olacak şekilde mevcutsa A ya X in bir geri çekmesi denir.

r fonksiyonuna ise geri çekme fonksiyonu denir.

Tanım 3.6 $A \subset X$ olsun. $i \ : \ A \longrightarrow X$ içine dönüşüm olmak üzere $r \ : \ X \longrightarrow A$ geri çekme fonksiyonu $i \circ r \simeq I_X$ olacak şekilde mevcutsa A ya X in deformasyon geri çekmesi denir. Denk şekilde eğer $\forall x \in X$ için $F \ : \ X \times C \longrightarrow X$ homotopisi $F(x,1) \in A$ olacak şekilde mevcutsa A, X in deformasyon geri çekmesidir.

Örnek 3.6

$$\begin{aligned} C &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ -1 \leq z \leq 1\right\}, \\ S^1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z=0\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{llll} i & : & S^1 & \longrightarrow & C \\ & & (x,y,0) & \longmapsto & i.(x,y,0)=(x,y,0) \end{array}$$

içine fonksiyon ile

$$\begin{array}{llll} r & : & C & \longrightarrow & S^1 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & r.(x,y,z)=(x,y,0) \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{r} & S^1 \\ (x,y,0) & \longmapsto & (x,y,0) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$$

birimdir yani $r \circ i = I_{S^1}$ dir ve

$$\begin{array}{llll} F & : & C \times I & \longrightarrow & C \\ & & ((x,y,z),t) & \longmapsto & F((x,y,z),t)=(x,y,tz) \end{array}$$

biçiminde tanımlı F, $i \circ r$ ve $I_C : C \longrightarrow C$ arasında bir homotopidir.

Örnek 3.7 Eğer A, X in deformasyon geri çekmesi ise bu durumda A ve X aynı homotopi tipine sahiptir. A, X in deformasyon geri çekmesi ise $i : A \longrightarrow X$ içine dönüşümü ve $r : X \longrightarrow A$ geri çekmesi için $r \circ i = I_A$ dir . Ayrıca $i \circ r \simeq I_X$ dir. Dolayısıyla A ile X aynı homotopi tipine sahiptir.

Tanım 3.7 $A \subset X$ olsun. Eğer $r : X \longrightarrow A$ geri çekmesi $i \circ r \simeq I_X\,(relA)$ olacak şekilde varsa, A ya X in güçlü deformasyon geri çekmesi denir. Denk olarak $A \subset X$ olsun. Eğer $F : X \times C \longrightarrow X$ homotopisi $\forall\, x \in X$ için $F(x,0)=x$, $\forall\, a \in A$, $t \in C$ için $F(a,t)=a$ ve $F(x,1) \in A$ olacak şekilde varsa A, X in güçlü deformasyon geri çekmesidir.

Örnek 3.8 Güçlü deformasyon geri çekmesi, bir deformasyon geri çekmesidir. $A \subset X$ ve A, X in güçlü deformasyon geri çekmesi olsun. Bu durumda $F : X \times C \longrightarrow X$ homotopisi $\forall\, x \in X$ için $F(x,0)=x$,$\forall a \in A$ ve $t \in C$ için $F(a,t)=a$ ve $F(x,1) \in A$ olacak şekilde mevcuttur. Bu da A, X in deformasyon geri çekmesi olduğunu gösterir.

Örnek 3.9 X herhangi bir uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $\{x_0\}$, X uzayının bir geri çekmesidir.

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \{x_0\} & \longrightarrow & X \\ & & x_0 & \longmapsto & f(x_0) = x_0 \end{array}$$

içine fonksiyon ve

$$\begin{array}{rcccl} g & : & X & \longrightarrow & \{x_0\} \\ & & x & \longmapsto & g(x) = x_0 \end{array}$$

sabit fonksiyonu için $gf = I_{\{x_0\}}$ olduğu açıktır.

$$\begin{array}{rcccl} F & : & X \times I & \longrightarrow & X \\ & & (x,t) & \longmapsto & tx + (1-t)\, x_0 \end{array}$$

biçiminde tanımlanan F, $f \circ g$ ve $I : X \longrightarrow X$ fonksiyonları arasında bir homotopidir. O halde $\{x_0\}$, X uzayının bir geri çekmesidir.

Örnek 3.10 $\mathbb{R}^n$ nin $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ birim topu için $B^n, \mathbb{R}^n$ nin bir geri çekmesidir. $B^n \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

içine fonksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & B^n \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|}; \|x\| \ \rangle\ 1 \\ x; \|x\| \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

fonksiyonu için $(gf)(x) = g(f(x)) = g(x) = x$ olup $gf = I_{B^n}$ olduğundan dolayı B^n, $\mathbb{R}^n$ nin bir geri çekmesidir.

Örnek 3.11 S^n, $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ın güçlü deformasyon geri çekmesidir.

$$S^n = \{X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)\, ; \|x\| = 1\}$$

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ içine fonksiyonu ile

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} & \longrightarrow & S^n \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|} \end{array}$$

fonksiyonu ele alındığında $(gf)(x) = g(f(x)) = g(x) = x = I_{S^n}(x)$ olup $gf = I_{S^n}$ elde edilir.

$$F \ : \ (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times C \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

$x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$,$t \in C$ için

$$F(x,t) = (1-t)\,x + \frac{tx}{\|x\|}$$

biçimindeki F fonksiyonu süreklidir. Ayrıca $F(x,0) = x = I_{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}$ ve $F(x,1) = \dfrac{x}{\|x\|}$ dir.

$\forall s \in S^n$ için

$$\begin{aligned} F(s,t) &= (1-t)\,.s + \frac{st}{\|s\|} \\ &= (1-t)\,s + st \\ &= s \end{aligned}$$

ve $F(x,1) = \dfrac{x}{\|x\|} \in S^n$ dir. Dolayısıyla $S^n; \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ bir güçlü deformasyon geri çekmesidir.

Örnek 3.12

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{X = (x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\right\} \\ C_2 &= \left\{X = (x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere $Y = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{R}^2$ alt kümeleri ele alındığında Y tek noktada kesişen çember çiftidir. $X = Y - \{(2,0), (-2,0)\}$ olsun. Bu durumda $x_0 = (0,0)$ noktası X in güçlü bir deformasyon geri çekmesi olduğunu gösterelim. Bunun için $x \in C_i$, $i = 1,2$ için

$$\begin{aligned} F \ : \ X \times C &\longrightarrow X \\ (x,s) &\longmapsto \frac{(1-s)x}{\|((1-s)x_1 + (-1)^s, (1-s)x_2)\|} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı F fonksiyonu tanımlansın, burada $i \ : \ \{x_0\} \longrightarrow X$ ve $x \in C_i$ için $\left((1-s)\,x_1 + (-1)^i, (1-s)\,x_2\right) \neq (0,0)$ olduğuna dikkat edelim. F nin sürekli olduğunu kontrol etmek kolaydır. $F(x_0, s) = x_0$, $F(x,0) = x$ ve $F(x,1) = x_0$ olduğundan dolayı $i \circ r \simeq I_X \ (rel\,\{x_0\})$ dir ve böylece $\{x_0\}$, X in bir güçlü deformasyon geri çekmesidir.

BÖLÜM 4

BAĞLANTILI UZAYLAR

Bu bölümde bağlantılı uzaylar ve yol bağlantılı uzayları hatırlatarak bir takım özelliklerini inceliyeceğiz. Daha ayrıntılı bilgi için ,[2], [1] kaynaklarına bakılabilir.

4.1 BAĞLANTILI UZAYLAR

Tanım 4.1 X bir topolojik uzay olsun . Eğer X in hem açık hemde kapalı olan alt kümeleri sadece $\emptyset$ ve X ise X uzayına bağlantılı uzay denir. X in bir A alt kümesinin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli şart alt uzay topolojisine göre bağlantılı olmasıdır.

Bu tanıma denk olarak bağlantılı uzay tanımını şu şekilde de yapılabilir. Eğer X boş olmayan ayrık iki açık alt kümesinin birleşimi olarak yazılamıyorsa X uzayına bağlantılı uzay denir.

Teorem 4.2 Bir X uzayının bağlantılı olması için gerekli ve yeterli şart X in boş olmayan ayrık iki açık alt kümesinin birleşimi olarak yazılamamasıdır.

İspat. X bağlantılı uzay olsun. Bu durumda tüm açık ve kapalı alt kümeleri $\emptyset$ ve X dir. X_1 ve X_2, X in ayrık açık alt kümeleri olmak üzere $X = X_1 \cup X_2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $X - X_1 = X_2$ dir. Bir topolojik uzayda tümleyeni açık olan bir alt kümenin kapalıdır. X_2 açık olduğundan (X_1in tümleyeni) X_1 kapalıdır. Buna göre X_1 hem açık hemde kapalı bir alt kümedir. Bunun anlamı ya $X_1 = \emptyset$ ya da $X_1 = X$ olmasıdır. Her iki durumda da X, X in boş olmayan ayrık iki açık alt kümesinin birleşimi olarak yazılamaz.

Tersine, X boş olmayan ayrık iki açık alt kümenin birlesimi olarak yazılamadığını kabul edelim,ve $U \subseteq X$ olsun. Eğer U hem açık hem kapalı ise $X - U$ da hem açık hem kapalıdır. Bu durumda

$$X = (X - U) \cup U \text{ ve } (X - U) \cap U = \emptyset$$

dır. Kabul gereği X, boş olmayan ayrık iki açık alt kümenin birleşimi olarak yazamayacağımızdan $U = \emptyset$ yada $U = X$ olmalıdır. O halde X in hem açık hemde kapalı alt kümeleri sadece $\emptyset$ ve X dir. Buna göre X bağlantılı uzaydır $\square$

Teorem 4.3 (X, ζ) bir topolojik uzay ve $Y = \{0, 1\}$ olmak üzere $(Y, P(Y))$ ayrık uzayı verilsin. Bu durumda (X, ζ) uzayının bağlantılı olması için gerekli ve yeterli şart sürekli ve örten hiçbir $f : (X, \zeta) \longrightarrow (Y, P(Y))$ fonksiyonun olmamasıdır.

İspat. (X, ζ) uzayı bağlantılı olsun. Sürekli ve örten bir

$$f : (X, \zeta) \longrightarrow (Y, P(Y))$$

fonksiyonu olduğu kabul edilsin. $\{0\}, \{1\}$ kümeleri $(Y, P(Y))$ uzayında açık ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(\{0\})$ ve $f^{-1}(\{1\})$ kümeleri (X, ζ) uzayında açıktır. Üstelik , f örten olduğundan $f^{-1}(\{0\})$ ve $f^{-1}(\{1\})$ kümeleri boş kümeden farklıdır. Öte yandan

$$X = f^{-1}(\{Y\}) = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) \text{ dır ve . } \{0\} \cap \{1\} = \emptyset$$

olduğundan $f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ dır. Bu ise (X, ζ) uzayının bağlantılı olması ile çelişir. O halde sürekli ve örten hiçbir $f : (X, \zeta) \longrightarrow (Y, P(Y))$ fonksiyonu yoktur.

Tersine, sürekli ve örten hiçbir $f : (X, \zeta) \longrightarrow (Y, P(Y))$ fonksiyonunun olmadığı kabul edilsin ve (X, ζ) uzayının bağlantılı olduğu gösterilsin. Bunun için (X, ζ) uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde boş kümeden farklı U ve V açık alt kümeleri vardır.

$$f(x) = \begin{cases} 1; x \in U \\ 0; x \in V \end{cases}$$

şeklinde bir $f : (X, \zeta) \longrightarrow (Y, P(Y))$ fonksiyonu tanımlansın. U ve V kümeleri boş kümeden farklı olduklarından f örtendir. $(Y, P(Y))$ uzayının açık kümeleri $\emptyset$, X, $\{1\}$ ve $\{0\}$ dır. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = V$, $f^{-1}(\{1\}) = U$ ve $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ kümeleri (X, ζ) uzayında açık olduğundan f fonksiyonu süreklidir. O halde f sürekli ve örten bir fonksiyondur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde (X, ζ) bağlantılı olmak zorundadır. $\square$

Örneğin; $\mathbb{R}$ nin $S^0 = \{-1, 1\}$ alt kümesi bağlantılı değildir çünkü $\{1\}$, S^0ın hem açık hemde kapalı olan bir alt kümesidir yada buna denk olarak S^0, S^0 ın $\{-1\}, \{1\}$ ayrık açık alt kümelerinin birleşimidir.

$\mathbb{R}$ nin bağlantılı bir alt kümesine örnek olarak $[a,b]$ aralığını verilebilir.

Örnek 4.1 $X = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve üzerindeki topoloji $\zeta = \{\emptyset\} \cup \mathbb{R} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu topolojiye göre X in herhangi bir alt kümesi bağlantılıdır. Bunu göstermek için S, X in herhangi bir alt kümesi olduğu kabul edilsin.Kabul edelim ki, F, S nin hem açık hemde kapalı olan boştan farklı bir alt kümesi olsun. Böylece, U, X içinde açık ve C, X içinde kapalı olmak üzere, $F = U \cap S = C \cap S$ olarak yazılabilir, bir b için $U = (-\infty, b)$ ve bir a için $C = [a, \infty)$ olur.

$F = U \cap S = C \cap S$ olduğundan dolayı eğer $x \in S$ ise $x < b$, $x \geq a$ olmalıdır. (Eğer $x \geq b$ olacak şekilde bir x elemanı varsa bu durumda $C \cap S \neq U \cap S$ olur , benzer şekilde $x < a$ olacak şekilde bir x elemanı varsa bu durumda da $C \cap S \neq U \cap S$ olur). Böylece $S \subseteq [a, b)$ ve $F = S$ olur yani S bağlantılıdır.

Örnek 4.2 $X = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve üzerindeki topoloji F şu şekilde tanımlı olsun,

$S \in F$ ancak ve ancak herbir $s \in S$ için $[s, t) \subseteq S$ olacak şekilde bir $t > s$ vardır. Bu durumda X in boş olmayan bağlantılı alt kümeleri tek nokta kümeleridir. Şimdi bu ispatlansın.

T, X in boş olmayan bağlantılı alt kümesi olsun ve x, T içinde bir nokta olsun. X in $[x, x+\varepsilon)$ alt kümesi her $\varepsilon > 0$ için hem açık hemde kapalıdır. Böylece $[x, x+\varepsilon) \cap T$, T nin hem açık hemde kapalı olan bir alt kümesidir. T bağlantılıdır ve $[x, x+\varepsilon) \cap T \neq \emptyset$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $[x, x+\varepsilon) \cap T = T$ elde edilir. Fakat bu sadece $T = \{x\}$ için mümkündür. Açıktır ki, tek nokta kümeleri bağlantılıdır ve X in boş olmayan bağlantılı alt kümeleri sadece tek nokta kümeleridir.

Şimdi bilinen topolojiye göre $\mathbb{R}$ nin $[a,b]$ alt kümelerinin bağlantılı olduğu ispatlanabilir.

Teorem 4.4 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığı bağlantılıdır.

İspat. Kabul edelim ki $[a,b]$, $[a,b]$ nin iki ayrık açık U ve V alt kümelerinin birleşimi olsun yani $U \cap V = \emptyset$ ve $U \cup V - [a,b]$ olsun. $a \in U$ alınsın. U ve V, aynı zamanda $[a,b]$ içinde kapalıdır. Ve böylece $[a,b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı olduğundan, U ile V, $\mathbb{R}$ içinde de kapalıdırlar. $h, \{u \in U \mid u \langle V, her\ v \in V$ için$\}$ kümesinin en küçük üst sınırı olsun. (Bu küme boş değildir çünkü a bu kümeye aittir) U kapalı olduğu için $h \in U$ dur. Her bir $\varepsilon > 0$ için $(h-\varepsilon, h+\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ dir. (Diğer durumda h, bir üst sınır olmazdı) ve böylece $h \in V$ nin kapanışıdır. Fakat V kapalıdır böylece $h \in V$ dir ve $h \in U \cap V$olur. Bu ise çelişki olup $[a,b]$ bağlantılıdır. $\square$

Teorem 4.5 Bir bağlantılı uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bağlantılıdır.

İspat. X bağlantılı ve $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ve örten fonksiyon olsun. U, Y içinde açık ve kapalı ise $f^{-1}(u)$ da X içinde açık ve kapalıdır. Bunun anlamı $f^{-1}(u) = \emptyset$ yada $f^{-1}(u) = X$ dir . Böylece, $U = \emptyset$ yada $U = Y$ dir. Böylece Y de bağlantılıdır. $\square$

Sonuç 4.6 X ve Y homeomorf topolojik uzaylar ise, X in bağlantılı olması için gerekli ve yeterli şart Y in bağlantılı olmasıdır.

Örnek 4.3 $[0,1]$, $\mathbb{R}$ de bağlantılıdır.

$$\begin{array}{cccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & S^1 \\ & & t & \longmapsto & f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

sürekli örten bir fonksiyondur. O halde S^1 de bağlantılıdır.

$\mathbb{R}$ içindeki $[a,b)$, $(a,b]$ ve (a,b) biçimindeki aralıklarda bağlantılıdır. Bunun göstermek için şu sonucu ispatlanır.

1. **Teorem 4.7** $\{Y_j : j \in J\}$, bir X uzayının bağlantılı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\cap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ ise $Y = \cup_{j \in J} Y_j$ bağlantılıdır.

İspat. U, Y nin boş olmayan hem açık hemde kapalı alt kümesi olsun. $i \in J$ için $U \cap Y_i \neq \emptyset$ dir ve $U \cap Y_i, Y_i$ içinde hem açık hemde kapalıdır. Fakat Y_i bağlantılı olduğundan $U \cap Y_i = Y_i$ dir ve böylece $Y_i \subseteq U$dır.Y_i kümesi diğer tüm $j \in J$ için Y_J kümeleri ile kesişir. Bu durumda her $j \in J$ için $Y_J \subseteq U$ elde edilir.

O halde $U = Y$ dir. Yani Y bağlantılıdır. $[a, b) = \cup_{n \geq 1} [a, b.\dfrac{(b-a)}{2^n}]$ olup bağlantılıdır. Benzer şekilde $[a, \infty), (-\infty, b]$ ve (a, ∞) aralıklarda da bağlantılı olur. $\square$

Teorem 4.8 X ve Y iki topolojik uzay olsun. X ve Y nin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli şart $X \times Y$ nin bağlantılı olmasıdır.

İspat. X ve Y bağlantılı olsun. $\forall\, x \in X$ ve $y \in Y$ için $X \cong X \times \{y\}$ ve $Y \cong \{x\} \times Y$ olduğundan $X \times \{y\}$ ve $\{x\} \times Y$ de bağlantlıdır.

$(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, y)\} \neq \emptyset$ dır ve böylece $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ bağlantılıdır. Bir $y \in Y$ için $X \times Y = \cup_{x \in X} (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ yazılabilir. $\cap_{x \in X} (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) \neq \emptyset$ olduğundan $X \times Y$ bağlantılıdır denebilir.

Tersine $X \times Y$ bağlantılı olsun.

$\pi_x : X \times Y \longrightarrow X$ ve $\pi_y : X \times Y \longrightarrow Y$ projeksiyon dönüşümleri sürekli örten fonksiyonlar olduğu için X ve Y de bağlantılıdır. $\square$

4.2 YOLLAR VE YOL BAĞLANTILI UZAYLAR

X herhangi bir uzay olmak üzere $f : [0, 1] \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonuna X içinde bir yol denir. $f(0)$ noktasına yolun başlangıç noktası, $f(1)$ e de yolun bitim noktası denir. f ye de $f(0)$ dan $f(1)$ e bir yol denir. $f([0, 1])$ görüntü kümesi ise X içinde eğri olarak isimlendirilir.

$t \in [0, 1]$ genelde zaman olarak düşünülür $f(t)$ ise t zamanındaki pozisyonu belirler. En basit yol $\forall\, t \in [0, 1]$ için

$$\begin{array}{rcl} e_x : [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & e_x(t) = x \end{array}$$

sabit yoludur. Bu yol için harcanan her t zamanı için katedilen yol değişmemektedir, aynı $x \in X$ değerine eşittir.

Elde mevcut olan bir yoldan iki şekilde yeni yol elde edilebilir.Bu aşağıdaki yardımcı teoremle verilsin.

Yardımcı Teorem 4.9 A-) Eğer f, X içinde bir yol ve f, $\overline{f}(t) = f(1-t)$ ile tanımlı ise, $\overline{f}$ de X içinde bir yoldur.

B-) Eğer f ve g , X içinde bir yol ve f nin bitim noktası ile g nin başlangıç noktası çakışık ise

$$\begin{array}{rcccl} f * g & : & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & & t & \longmapsto & (f*g)(t) = \begin{cases} f(2t)\,; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1)\,; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlı $f * g$ de X içinde bir yoldur.

Yardımcı Teorem 4.10 W, X topolojk uzaylar olsunlar ve A, B her ikisi de W nın kapalı alt kümeleri olmak üzere $W = A \cup B$ olduğu kabul edilsin.

Eğer $f : A \longrightarrow X$ ve $g : B \longrightarrow X$ her $w \in A \cap B$ için $f(w) = g(w)$ olacak şekildeki sürekli fonksiyonlar ise

$$\begin{array}{rcccl} h & : & W & \longrightarrow & X \\ & & w & \longmapsto & h(w) = \begin{cases} f(w)\,; w \in A \\ g(w)\,; w \in B \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan h sürekli fonksiyondur.

İspat. h iyi tanımlı bir fonksiyondur. C, X in kapalı bir alt kümesi olduğu kabul edilsin. Buna göre

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap A \cup B \\ &= \left(h^{-1}(C) \cap A\right) \cup \left(h^{-1}(C) \cap B\right) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) \end{aligned}$$

dır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(C)$, A da kapalı böylece W da da kapalı ve g sürekli olduğundan $g^{-1}(C)$, B de kapalı, böylece W da da kapalıdır. O halde $h^{-1}(C), W$ de kapalıdır böylece h süreklidir. $\square$

Tanım 4.11 Bir X uzayını ele alınsın. X içinde herhangi x_0, x_1 noktaları verildiğinde X içinde x_0 dan x_1 e bir yol mevcutsa X uzayına yol bağlantılıdır denir.

Örneğin, $\mathbb{R}^n$ bilinen topolojisi ile birlikte yol bağlantılıdır.Çünkü $a, b \in \mathbb{R}^n$ noktaları alındığında

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & t & \longmapsto & f(t) = tb + (1-t)\,a \end{array}$$

a dan b ye bir yoldur. Bu örneği daha da genelleştirirsek, $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir konveks (dış bukey) alt kümesi yol bağlantılıdır.

$\mathbb{R}^n$ nin bir E alt kümesi için, a ve $b \in E$ iken $\{t.b + (1-t)\,.a; 0 \leq t \leq 1\}$ kümesi de tamamıyla E de kalıyorsa E ye konveks küme denir yani E de alınan iki nokta çiftini birleştiren doğru parçası tamamen E de kalıyorsa E ye konveks küme denir.

Özel olarak $\mathbb{R}^1$ deki herhangi bir aralık yol bağlantılıdır.

Teorem 4.12 Bir yol bağlantılı uzayın sürekli bir dönüşüm altındaki görüntüsü yol bağlantılıdır.

İspat. X yol bağlantılı uzay ve $g : X \longrightarrow Y$ sürekli bir örten dönüşüm olsun. Y de a ve b gibi iki nokta alınsın. $g\left(a'\right) = a$ ve $g(b') = b$ olacak şekilde $a', b' \in X$ noktaları vardır. X yol bağlantılı olduğundan a' noktasını, b' noktasına birleştiren bir f yolu vardır. Buna göre gf, a yı b ye birleştiren bir yoldur. O halde Y de yol bağlantılıdır. $\square$

Sonuç 4.13 Eğer X ve Y homeomorfik topolojik uzaylar ise, X in yol bağlantılı olması için gerek ve yeterli koşul Y nin yol bağlantılı olmasıdır.

Teorem 4.14 X topolojik uzay ve $\{Y_j \mid j \in J\}$, X uzayının yol bağlantılı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\cap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ ise $Y = \cup_{j \in J} Y_j$ yol bağlantılıdır.

İspat. a ve $b \in Y$ alınsın. Buna göre bazı $k \in J$ için $a \in Y_k$ ve $l \in J$ için $b \in Y_l$ dir. $c \in \cap_{j \in J} Y_j$ alalım. Y_k yol bağlantılı olduğu için $a, c \in Y_k$ için a ile c yi birleştiren bir f yolu mevcuttur. Buna göre

$$\begin{array}{rcccl} h = f * g & : & [0,1] & \longrightarrow & Y \\ & & t & \longmapsto & h(t) = \begin{cases} f(2t); 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1); \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan h, a dan b ye bir yoldur.O halde Y yol bağlantılıdır. □

Teorem 4.15 X ve Y iki topolojik uzay olsun. X ve Y nin yol bağlantılı olması için gerekli ve yeterli şart $X \times Y$ nin yol bağlantılı olmasıdır.

Teorem 4.16 Her yol bağlantılı uzay, bağlantılıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

İspat. X yol bağlantılı bir uzay olsun. X in bağlantılı olduğu gösterilmelidir. Bunun için U, V boş olmayan açık alt kümeler olmak üzere $X = U \cup V$ olsun. X yol bağlantılı olduğu için ve U ile V boş olmadıkları için $f(0) \in U$ ve $f(1) \in V$ olacak şekilde bir $f : [0,1] \longrightarrow X$ yolu mevcuttur. $[0,1]$ bağlantılı olduğundan $f([0,1])$ de bağlantılıdır ve böylece $U \cap f([0,1])$ ile $V \cap f([0,1])$ ayrık olamaz. Buna göre U ile V ayrık değildir. O halde X bağlantılıdır. □

Teorem 4.17 $\mathbb{R}^n$ nin boş olmayan açık bağlantılı bir E alt kümesi yol bağlantılıdır.

İspat. $p \in E$ olsun ve F de, E içindeki bir yol vasıtasıyla p ye birleştirilebilen tüm noktalardan oluşan E nin bir alt kümesi olsun. E nin açık olduğu gösterilsin. Bunu ispatlamak için $q \in F \subseteq E$ olsun. E açık olduğu için merkezi q olan bir $D \subseteq E$ açık n-diski mevcuttur yani bazı $\varepsilon > 0$ sayısı için $q \in D = \{x \mid \|q - x\| < \varepsilon\} \subseteq E$ dir.

D açık n-diski yol bağlantılıdır (bu $\mathbb{R}^n$ ye homeomorfiktir) böylece D nin herhangi bir noktası içindeki bir yol vasıtasıyla p ye birleştirilebilir ve böylece

$q \in D \subseteq F$ dir. Böylece F açıktır. F nin kapalı olduğu da gösterilsin . Bunu görmek içinde $G = E - F$ olduğunu düşünelebilir böylece G, E içindeki bir yol vasıtasıyla p ye birleştirilemeyen noktalardan meydana gelir.

Yukarıdakine benzer olarak G nin açık olduğu gösterilebilir böylece F kapalıdır. F boş değildir açık ve kapalıdır E bağlantılı olduğu için $E = F$ dir böylece E yol bağlantılıdır. $\square$

4.3 YOLLARIN HOMOTOPİ SINIFLARI

Eğer f ile g , $f(1) = g(0)$ olacak şekilde X içinde iki yol ise f ile g nin $f * g$ çarpımı

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t)\,; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1)\,; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu kısımda daha çok ,$\{0, 1\}$ e göre homotop olan yolların çarpımıyla ilgilenilecek ve bu çarpımın bir grup için geçerli olan aksiyonların sağladığı gösterilecek.

Tanım 4.18 f ve g, X içinde iki yol olsun. Eğer f ve g ,$\{0, 1\}$ e göre homotopik ise f ile g ye denktirler denir. Bunu $f \sim g$ ile gösteririz. Buna göre eğer X içindeki f_0 ve f_1 yolları için;

$$\begin{array}{rccc} F : & I \times I & \longrightarrow & X \\ & (t, s) & \longmapsto & F(t, s) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $t \in I$ ve $s \in I$ için

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f_0(t) \ , \\ F(t, 1) &= f_1(t)\,, \\ F(0, 0) &= f_0(0) = f_1(0) \ , \\ F(1, 1) &= f_1(1) = f_0(1) \end{aligned}$$

olacak şekilde bulunabilirse f_0 ile f_1 e denktir denir. Bu durumda $F = f_0 \sim f_1$ yazarız.

Bir f yolunun denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.Yolların denklik sınıflarının çarpımını yollarının çarpımının denklik sınıfı olarak $[f][g] = [f * g]$ biçiminde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.19 f_0, f_1, g_0 ve g_1, X içinde $f_0(1) = g_0(0)$ ve $f_1(1) = g_1(0)$ özelliğindeki yollar olsun. Eğer $f_0 \sim f_1$ ve $g_0 \sim g_1$ ise $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ dır.

İspat. $F : f_0 \sim f_1$ ve $G : g_0 \sim g_1$ $\{0,1\}$ e göre homotopik olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} H \ : \ I \times I &\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s)\,; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1,s)\,; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada $F(1,s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0,s)$ olduğundan dolayı H süreklidir. Ayrıca H, $f_0 * g_0$ ve $f_1 * g_1$ arasında $\{0,1\}$ e göre homotopidir. $\square$

Bir sonraki sonuç ise, yolların denklik sınıflarının çarpımının birleşmeli olduğu ifade eder. Bir başka deyişle $f(1) = g(0)$ ve $g(1) = h(0)$ olduğundan $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ dır.

(Genelde, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$ dır.)

Yardımcı Teorem 4.20 X bir uzay ve f, g, h X içinde $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(0)$ olacak şekilde üç yol olsun. Buna göre $(f * g) * h \sim f * (g * h)$ dir.

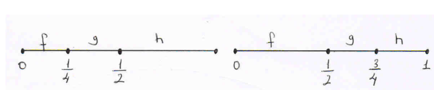
İspat.

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t)\,; 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1)\,; \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1)\,; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t)\,; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2)\,; \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t-3)\,; \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dır. Bu yolları aşağıdaki diyagramları kullanılarak incelensin.



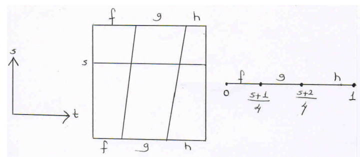
Şekil 4.1:

$(f * g) * h$ fonksiyonunu ele alınsın.

$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ iken,

$$\begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & 4t-1 \end{array}$$

lineer dönüşümü ile g nin bileşkeni yani $g(4t-1)$ kullanılır. $(f*g)*h$ ile $f*(g*h)$ arasındaki homotopiyi oluşturmak için aşağıdaki şekli ele alınsın. S nin verilen bir değeri



Şekil 4.2:

için f yi $\left[0, \left(\frac{s+1}{4}\right)\right]$ aralığında kullanırız, g yi $\left[\left(\frac{s+1}{4}\right), \left(\frac{s+2}{4}\right)\right]$ aralığında kullanırız ve h ı $\left[\left(\frac{s+2}{4}\right), 1\right]$ aralığında kullanırız.

$$\begin{array}{rcl} F : I \times I & \rightarrow & X \\ (t,s) & \mapsto & F(t,s) = \begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{1+s}\right); 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1); \frac{s+1}{4} \leq t \leq \dfrac{s+2}{4} \\ h\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right); \dfrac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın, F fonksiyonu süreklidir ve

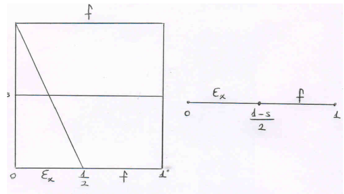
$F(t,0) = ((f*g)*h), F(t,1) = (f*(g*h))(t), F(0,s) = f(0) = ((f*g)*h)(0), \quad F(1,s) = h(1)$

dir. Böylece F bir homotopidir. □

Eğer $x \in X$ ise $\varepsilon_x : I \longrightarrow X$, $\varepsilon_x(t) = x$ sabit yoldur. Buna göre bir f yolu x noktasında başlayıp y noktasında bitiyorsa, $[\varepsilon_x][f] = [f] = [f][\varepsilon_y]$ dir.

Yardımcı Teorem 4.21 Eğer f, X içinde x noktasında başlayıp y noktasında biten bir yol ise $\varepsilon_x * f \sim f$ ve $f * \varepsilon_y \sim f$ dir.

İspat. Sadece $\varepsilon_x * f \sim f$ in ispatını yapacağız. Bunun için aşağıdaki şekil gözöüne alınsın.



Şekil 4.3:

$$
\begin{aligned}
F \quad &: \quad I \times I \quad \longrightarrow \quad X \\
(t,s) \quad &\longmapsto \quad F(t,s) = \begin{cases} x; 0 \leq t \leq \dfrac{1-s}{2} \\ f\left(\dfrac{2t-1+s}{1+s}\right); \dfrac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

fonksiyonu tanımlansın. Buna göre, $F(t,0) = \varepsilon_x * f$ ve $F(t,1) = f(t)$ dir ve F, $\{0,1\}$ e göre bir homotopidir. □

Son olarak yolların (yolların denkliğine göre) terslerini tanımlamak gerekir. Önce şunu hatırlatalım; eğer f bir yol ise $\overline{f}(t) = f(1-t)$ biçiminde tanımlanan $\overline{f}$, f yolununun tersidir. Ayrıca $f \sim g$ olması için gerek ve yeterli şart $\overline{f} \sim \overline{g}$ dir. Bir sonraki sonuç gösterecektir ki, $\overline{f}$ nin denklik sınıfının tersi olarak alınır yani f, x de başlayıp y de biten bir yol ise, $[f]\left[\overline{f}\right] = [\varepsilon_x]$, $\left[\overline{f}\right][f] = [\varepsilon_y]$ dır.

Yardımcı Teorem 4.22 f , X içinde başlangıç noktası x bitim noktası y olan bir yol ise $f * \overline{f} \sim \varepsilon_x$ ve $\overline{f} * f \sim \varepsilon_y$ dir.

İspat. Sadece $f * \overline{f} \sim \varepsilon_x$ nin ispatını yapacağız $f * \overline{f}$ yolu

$$
\begin{aligned}
\left(f * f^{|}\right)(t) &= \begin{cases} f(2t); 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f^{|}(2t-1); \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} f(2t); 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f(1-(2t-1)); \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(2t); 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f(2-2t); \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Bu $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$ için f yi $\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$ için ise $f^{|}$ yi verir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
F \quad &: \quad I \times I \quad \longrightarrow \quad X \\
(t,s) \quad &\longmapsto \quad F(t,s) = \begin{cases} f(2t(1-s)); 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f((2-2t)(1-s)); \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

dönüşümü tanımlansın. F sürekli ve

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \left(f * f^{|}\right)(t), \\ F(t,1) &= f(0) = \varepsilon_x(t), \\ F(0,s) &= f(0) = \left(f * f^{|}\right)(0), \\ F(1,s) &= f(0) = \left(f * f^{|}\right)(1) \end{aligned}$$

dir. Böylece $f * f^{|} \sim \varepsilon_x$ elde edilir. Buna alternatif olarak $f * f^{|}$ ile ε_x arasında aşağıdaki şekilde homotopi tanımlanabilir,

$$\begin{aligned} G \; : \; I \times I &\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto G(t,s) = \begin{cases} f(2t)\,; 0 \leq t \leq \dfrac{1-s}{2} \\ f(1-s)\,; \frac{1-s}{2} \leq t \leq \dfrac{1+s}{2} \\ f(2-2t)\,; \dfrac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

BÖLÜM 5

TEMEL GRUPLAR

X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasında başlayıp x_0 noktasında biten kapalı yolların kümesi ele alınsın. x_0 noktasına bu şekildeki noktaların taban noktası ve bu şekildeki yollara da "x_0 tabanlı yollar" yada "tabanı x_0 olan yollar" denir. Eğer f, x_0 tabanlı bir yol ise f e homotop olan tüm x_0 tabanlı yolların sınıfı $[f]$ ile gösterilir ve buna x_0 tabanlı yolların bir homotopi sınıfı denir.

Bu şekildeki x_0 tabanlı bütün homotopi sınıflarının ailesi $\pi_1(X, x_0)$ biçiminde gösterilir.

Teorem 5.1 $\pi_1(X, x_0)$ bir gruptur.

İspat. $\pi_1(X, x_0)$ ailesinin grup olduğunu göstermek için, bunun üzerinde bir işlem tanımlanmalı. Bu işlemi $[f] \in \pi_1(X, x_0), [g] \in \pi_1(X, x_0)$ için $[f][g] = [f * g]$ biçiminde tanımlansın. Çarpımın tanımı $[f]$ ve $[g]$ nin temsilci seçiminden bağımsızdır. Çünkü, $f \simeq f_1$, $g \simeq g_1$ ise $f * g \simeq f_1 * g_1$ dir ve $[f_1] . [g_1] = [f_1 * g_1] = [f * g]$ olur. Böylece $[f][g]$ çarpımı tek şekilde tanımlanır. Buna göre,

i)Yukardaki işlem tanımından $[f] . [g] = [f * g] \in \pi_1(X, x_0)$

ii)$[f], [g]$ ve $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ için ; $([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h]$ ve Yardımcı teorem 4.3.3 den dolayı $(f * g) * h \sim f * (g * h)$ olduğundan, $f * g * h = [f * (g * h)]$ dolayısıyla $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ dır.

iii)$[I]$, x_0 tabanlı sabit yolun homotopi sınıfını göstersin . Yardımcı teorem 4.3.4 ten $[f][I] = [I][f] = [f]$ dır. O halde $[I]$, $\pi_1(X, x_0)$ nın yukardaki işleme göre birim elemanıdır.

iv) Yardımcı teorem 4.3.5 ten dolayı $[f] . \left[\overline{f}\right] = \left[f * \overline{f}\right] = [I]$ dır. Böylece üzerinde tanımlanan işleme göre her $[f]$ elemanının $\left[\overline{f}\right]$ biçiminde bir tersi vardır.

Bundan dolayı $\pi_1(X, x_0)$ bir gruptur. $\square$

Tanım 5.2 X, bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $\pi_1(X, x_0)$ grubuna X uzayının x_0 tabanlı temel grubu denir.

5.1 TEMEL GRUPLARIN İZOMORFİZMİ

Teorem 5.3 $x_0, x_1 \in X$ olsun. X içinde x_0 dan x_1 e yol varsa bu durumda $\pi_1(X, x_0)$ ve $\pi_1(X, x_1)$ grupları izomorftur.

İspat. f, x_0 tabanlı yol ve h, x_0 ve x_1 noktalarını birleştiren bir yol olsun. Bu durumda $g = \left(\overline{h} * f\right) * h$, x_1 tabanlı bir yol olur.

$$
\begin{array}{cclcl}
\emptyset & : & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\
 & & [f] & \longmapsto & \emptyset[f] = [g] = \left[\left(\overline{h} * f\right) * h\right]
\end{array}
$$

şeklinde tanımlanmış olan dönüşüm x_0 tabanlı homotopi sınıfları ile x_1 tabanlı homotopi sınıfları arasında bir dönüşümdür. $\emptyset[f]$, $[f]$ yardımıyla tek bir şekilde belirlenir tersine, $[f]$; $\emptyset[f]$ yardımıyla tek şekilde belirlidir çünkü eğer $\left(\overline{h} * f_1\right) * h \sim \left(\overline{h} * f_2\right) * h$ ise $f_1 \sim f_2$ dir.

Herhangi x_1 tabanlı g yolu, $\overline{h} * \left((h * g) * \overline{h}\right) * h$ yoluna homotoptur ve böylece x_1 tabanlı yolların her homotopi sınıfı bazı $[f]$ için $\emptyset[f]$ formundadır. Buna göre $\emptyset$, $\pi_1(X, x_0)$ ile $\pi_1(X, x_1)$ arasında bire-bir ve örten dönüşümdür. $[f_1]$ ve $[f_2]$ $\pi_1(X, x_0)$ in iki elemanı olsun.

$$
\begin{aligned}
\emptyset([f_1] . [f_2]) &= \emptyset[f_1 * f_2] = \left[\overline{h} * f_1 * f_2 * h\right] = \left[\overline{h} * f_1 * h * \overline{h} * f_2 * h\right] \\
&= \left[(\overline{h} * f_1) * h\right] . \left[\left(\overline{h} * f_2\right) * h\right] = \emptyset[f_1] . \emptyset[f_2]
\end{aligned}
$$

olduğundan dolayı $\emptyset$, izomorfizmdir. $\square$

Sonuç 5.4 X bir yol bağlantılı uzaysa herhangi x, $y \in X$ noktaları için $\pi(X, x)$ ve $\pi(X, y)$ temel grupları izomorftur. Eğer uzayımız yol bağlantılı olmazsa, sonuç her zaman doğru olmayabilir.

Uyarı 5.5 Yukardaki sonuca göre, $\pi_1(X, x)$ yerine $\pi_1(X)$ yazılmak istenilebilir. x den y ye giden farklı yollar farklı izomorfizm üretebileceği için ve $\emptyset$ izomorfizmi tamamen x den y ye giden bir yola bağlı olduğu için $\pi_1(X, x)$ ile $\pi_1(X, y)$ arasında kanonik izomorfizm mevcut değildir. Bundan dolayı $\pi_1(X, x)$ yerine $\pi_1(X)$ alınması uygun olmaz.

Bu sebepten dolayı, yukarda tanımlanan $\emptyset$ izomorfizmi h yolu ile belirlenmiş, $\pi_1(X, x_0)$ dan $\pi_1(X, x_1)$ e bir izomorfizm olarak isimlendirilir ve bunu $\emptyset_h$ ile ifade etmek uygundur

5.2 TEMEL GRUPLARIN HOMOMORFİZMİ

X ve Y iki topolojik uzay olsun. Buradan X ve Y nin temel gruplarının X den Y ye giden bir sürekli fonksiyon için nasıl etkilendiğini inceleyelim.

Eğer $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyonsa X içerisindeki temel grup Y içerisindeki görüntüsüne izomorf olmayabilir. Fakat aşağıda vereceğimiz teoremde gruplar arasında homomorfizmin varlığını gösterelecektir.

Teorem 5.6 $f : X \longrightarrow Y$ bir sürekli fonksiyon ise X in herhangi bir x_0 noktası için $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ homomorfizmi vardır.

İspat. g, h, x_0 tabanlı iki yol olsun. $g_1, h_1 : C \longrightarrow Y$, $g_1 = fg$ ve $h_1 = fh$ biçiminde tanımlı ve $u \in C$ için

$$g_1(u) = f(g(u)) ve h_1(u) = f(h(u))$$

olacak şekildeki iki yol olsun. Bu durumda g_1 ve h_1 yolları Y içerisinde $f(x_0)$ noktasında başlayıp $f(x_0)$ noktasında biten kapalı yollardır. Eğer $g \sim h$ ise bu durumda bir $F : C \times C \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonu

$$F(u,0) = g(u), F(u,1) = h(u), F(0,v) = g(0) = h(0) = x_0$$

ve $F(1,v) = g(1) = h(1) = x_0$ olacak şekilde mevcuttur. Bunun yardımıyla

$$G : C \times C \longrightarrow Y$$

$G(u,v) = f(F(u,v))$ fonksiyonu tanımlansın. G fonksiyonu süreklidir ve

$$\begin{aligned} G(u,0) &= f(g(u)) = g_1(u), G(u,1) = f(h(u)) = h_1(u) \\ G(0,v) &= f(x_o) \\ G(1,v) &= f(x_0) \end{aligned}$$

dır. Böylece $g_1 \sim h_1$ elde edilir. Şimdi ,

$$\begin{array}{rcl} f_* : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [g] & \longmapsto & f_*[g] = [fg] \end{array}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm X içerisinde x_0 tabanlı yolların homotopi sınıfları ile Y içerisindeki $f(x_0)$ tabanlı yolların homotopi sınıfları arasında bir dönüşümdür.

Ayrıca, $f_*[g]$, $[g]$ yardımıyla tek biçimde belirlenir. Böylece f_*, $\pi_1(X, x_0)$ in her bir elemanını $\pi_1(Y, f(x_0))$ in tek bir elemanıyla eşler.

$$\begin{array}{rcl} p : C & \longrightarrow & X \\ u & \mapsto & p(u) = \begin{cases} g(2u)\,; 0 \leq u \leq \dfrac{1}{2} \\ h(2u-1)\,; \dfrac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan yol $g * h$ yoludur. Buna göre,

$$u \mapsto \theta(u) = \begin{cases} f(g(2u))\,; 0 \leq u \leq \dfrac{1}{2} \\ f(h(2u-1))\,; \dfrac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

şeklindeki dönüşüm $f * p$ yi verir. Bu ise $g_1 * h_1$ yoludur. $[g]$, $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ için $f_*[g * h] = [f(g * h)] = [fg * fh] = [fg][fh] = f_*[g] f_*[h]$ elde edilir. Böylece f_* $\pi_1(X, x_0)$ dan $\pi_1(Y, f(x_0))$ a bir homomorfizm olur. $\square$

5.3 İNDİRGENMİŞ HOMOMORFİZMLER

Tanım 5.7 $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. Bunun yardımıyla

$$\begin{array}{rcl} f_* : \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [g] & \longmapsto & f_*[g] = [fg] \end{array}$$

biçiminde tanımlanmış homomorfizme f den indirgenen homomorfizm denir.

Tanım 5.8 $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $(gf)_* = g_* f_*$ olur ve $I : X \longrightarrow X$ birim fonksiyon ise I_*, $\pi_1(X, x)$ üzerinde bir birim homomorfizmdir.

Teorem 5.9 X ve Y toplojik uzaylar ve

$$f : X \longrightarrow Y \text{ ve } g : Y \longrightarrow Z$$

X in bazı x_0 noktaları için $y_0 = f(x_0)$ olmak üzere $g(y_0) = x_0$ eşitliğini sağlayan sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca gf, x_0 a göre I_X e homotop olsun ve fg, y_0 a göre I_Y ye homotop olsun. Bu durumda $\pi_1(X, x_0)$ ile $\pi_1(Y, y_0)$ izomorftur.

İspat. f, g, gf ve fg sürekli fonksiyonları için

$$\begin{array}{rcccc} f_* & : & \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y,y_0) \\ g_* & : & \pi_1(Y,y_0) & \longrightarrow & \pi_1(X,x_0) \\ (gf)_* & : & \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X,x_0) \\ (fg)_* & : & \pi_1(Y,y_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y,y_0) \end{array}$$

indirgenmiş homomorfizmleri ele alınsın. α, X içinde x_0 tabanlı bir yol olsun. Bu durumda $gf(x_0) = g(y_0) = x_0$ olduğu için $(gf)\alpha$ da x_0 tabanlı bir yoldur. Fakat gf, x_0 a göre I_X e homotop olduğundan $(gf)\alpha$ da α ya homotoptur. Buna göre $(gf)_*$, $\pi_1(X,x_0)$ dan $\pi_1(X,x_0)$ a birim dönüşümdür.

Benzer şekilde $(fg)_*$, $\pi_1(Y,y_0)$ dan $\pi_1(Y,y_0)$ a birim dönüşüm olduğu görülür. $(gf)_* = g_*f_*$ ve $(fg)_* = f_*g_*$ olduğu için g_*f_* dönüşümleride sırasıyla $\pi_1(X,x_0)$ ve $\pi_1(Y,y_0)$ üzerindeki birim dönüşümlerdir.

$(gf)\alpha : C \longrightarrow X$ yolu ele alınsın. Bu $(gf)\alpha : C \longrightarrow X$ yoluna eşittir böylece $f_*[\alpha] = [\beta]$ ise $g_*[\beta] = g_*f_*[\alpha]$ dır. g_*f_* birim dönüşüm olduğu için $[\alpha] = g_*[\beta]$ elde edilir. Böylece $f_*[\alpha_1] = f_*[\alpha_2]$ ise $[\beta_1] = [\beta_2]$ elde edilir ve bu $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ olduğunu gösterir. Böylece f_* in bire-bir bir dönüşüm olduğu kolayca gösterilir. Ayrıca $[\gamma]$, $\pi_1(X,x_0)$ in bir elemanı olmak üzere $\pi_1(Y,y_0)$ in herbir elemanı $f_*[\gamma]$ formundadır böylece f_* bire-bir homomorfizmdir yani $\pi_1(X,x_0)$ ile $\pi_1(Y,y_0)$ arasında bir izomorfizmdir benzer şekilde g_*, $\pi_1(Y,y_0)$ ile $\pi_1(X,x_0)$ arasında bir izomorfizmdir. □

Sonuç 5.10 Eğer $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm ise $\pi_1(X,x_0)$ ile $\pi_1(Y,f(x_0))$ izomorfiktir.

Böylece temel gruplar yardımıyla topolojiden cebire geçiş yapılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- Bir topolojik uzay verildiğinde bir temel grup elde edebiliriz.
  - İki topolojik uzay ve bunlar arasında iki sürekli fonksiyondan temel gruplar ve bunlar arasında homeomorfizm elde edilir.
  - Uzaylar arasında homeomorfizm bir izomorfizme indirger.
  - Birim dönüşüm ,birim homemorfizme indirger.
  - Sürekli fonksiyonların bileşkesi , indirgenen homomorfizmlerin bileşkesine indirger.

İki uzayın temel grupları izomorfik değilse bu uzaylar homeomorfik olamaz. Tersi her zaman doğru olmaz yani uzaylarımız homemorfik olmazsa bunların temel grupları izomorfik olabilir.

Teorem 5.11 X ve Y iki toplojik uzay ve $\phi, \Psi : X \longrightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon , $F : X \times C \longrightarrow Y$, ϕ ve Ψarasındaki homotopi olsun.

$f : C \longrightarrow Y$ Y içindeki $\phi(x_0)$ ile $\Psi(x_0)$ arasındaki yolu $f(t) = F(x_0, t)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, Φ_f, f yolu ile belirlenmiş $\pi_1(Y, \phi(x_0))$ ile $\pi_1(Y, \Psi(x_0))$ arasındaki izomorfizm olmak üzere,

$$\begin{array}{rcccl} \phi^* & : & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \phi(x_0)) \\ \Psi^* & : & \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \Psi(x_0)) \end{array}$$

indirgenmiş homomorfizmleri için $\Psi^* = \Phi_f . \phi^*$ sağlanır.

İspat. Bunu göstermek için $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ ise $[\Psi g] = \left[\overline{f} * \phi_g * f\right]$ olduğu yani ϕ_g ve $\overline{f} * \phi_g * f$ yollarının denk olduğu gösterilmelidir.

$$\left(\left(\overline{f} * \phi_g\right) * f\right)(t) = \begin{cases} f(1-4t)\,; 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4} \\ \phi g(4t-1)\,; \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f(2t-1)\,; \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\left(\left(\overline{f} * \phi_g\right) * f\right)(t) = \begin{cases} F(x_0, (1-4t))\,; 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4} \\ F(g(4t-1), 0)\,; \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ F(x_0, 2t-1)\,; \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dir.Burada Ψg ve $\left(\overline{f} * \phi_g\right) * f$ arasında bir homotopi bulmak istiyoruz. Bunun için önce $x = \Psi(x_0)$ olmak üzere Ψg ile $(\varepsilon_x * \Psi g) * \varepsilon_x$ denk oldukları gösterilmeli.

$$((\varepsilon_x * \Psi g) * \varepsilon_x)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1)\,; 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4} \\ F(g(4t-1), 1)\,; \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ F(x_0, 1)\,; \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

formundadır.

Böylece $H : C \times C \longrightarrow Y$ dönüşümü

$$H(t,s) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t(1-s)); 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4t-1), s); \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1+2(t-1)(1-s)); \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. H süreklidir ve

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \left(\left(\overline{f} * \phi_g\right) * f\right)(t) \\ H(t,1) &= ((\varepsilon_x * \Psi g) * \varepsilon_x)(t) \\ H(0,s) &= F(x_0,1) = \Psi(x_0) \\ H(1,s) &= F(x_0,1) = \Psi(x_0) \end{aligned}$$

dır. Bu ise $\left(\overline{f} * \phi_g\right) * f \sim (\varepsilon_x * \Psi g) * \varepsilon_x \sim \Psi g$ olduğu anlamına gelir . Böylece $\Phi_f \phi^* = \Psi^*$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.12 X ve Y aynı homotopi tipine sahip iki topolojik uzay ve

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

bir homotopi denkliği olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in X$ için

$$\phi^* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

bir izomorfizmdir.

İspat. φ bir homotopi denkliği olduğundan $\Psi : Y \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonu, $\varphi\Psi : Y \longrightarrow Y$ dönüşümü I_Y ye ve $\Psi\varphi : X \longrightarrow X$ dönüşümü de I_X e homotop olacak şekilde mevcuttur. Teorem 5.3.5 gereği $\Phi_f (\Psi\varphi)^* = I^*$ olduğu görülür. Φ_f ve I^* izomorfizmler olduğu için $(\Psi\varphi)^* = \Psi^*\varphi^*$ bir izomorfizmdir. Böylece Ψ^* epimorfizm (örten homorfizm) ve φ^* monomorfizm (bire-bir homomorfizm) dir. Benzer şekilde $\varphi^*\Psi^*$ bir izomorfizmdir böylece φ^* epimorfizm ve Ψ^* monomorfizmdir. $\square$

Sonuç 5.13 Büzülebilir bir uzay aşikar temel gruba sahiptir.

Tanım 5.14 Yol bağlantılı olan ve aşikar temel gruba sahip olan uzaya basit bağlantılı uzay denir.

Sonuç 5.15 Büzülebilir uzay basit bağlantılı uzaydır. Tersi doğru değildir.

Teorem 5.16 X ve Y iki uzay $\Psi : X \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon, $x, y \in X$ için f, x den y ye giden bir yol olsun.Φ_f ve $\Phi_{\Psi(f)}$ sırasıyla f ve $\Psi(f)$ yardımıyla tanımlanmış temel grupların izomorfizmleri olmak üzere

$$\Psi^*\Phi_f = \Phi_{\Psi(f)}\Psi^* \ : \ \pi(X,x) \longrightarrow \pi(Y,\Psi(y))$$

dir.

İspat. f yardımıyla tanımlanan Φ_f izomorfizmi $[g] \in \pi(X,x)$ için

$$\begin{array}{cccc} \Phi_f & : & \pi(X,x) & \longrightarrow & \pi(X,y) \\ & & [g] & \longmapsto & \Phi_f[g] = \left[\overline{f} * g * f\right] \end{array}$$

ve $\Psi(f)$ yardımıyla tanımlanan $\Phi_{\Psi(f)}$ izomorfizmi $[\Psi g] \in \pi(Y,\Psi(x))$ için

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\Psi(f)} & : & \pi(Y,\Psi(x)) & \longrightarrow & \pi(Y,\Psi(y)) \\ & & [\Psi g] & \longmapsto & \Phi_{\Psi(f)}[\Psi g] = \left[\overline{\Psi f} * \Psi g * \Psi f\right] \end{array}$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca Ψ sürekli fonksiyonu yardımıyla elde edilen

$$\begin{array}{cccc} \Psi^* & : & \pi(X,x) & \longrightarrow & \pi(Y,\Psi(x)) \\ & & [g] & \longmapsto & \Psi^*[g] = [\Psi g] \end{array}$$

indirgenmiş homomorfizmi ele alırsa

$$\pi(X,x) \xrightarrow{\Phi_f} \pi(X,y) \xrightarrow{\Psi^*} \pi(Y,\Psi(y))$$

elde edilir. Buna göre $[g] \in \pi(X,x)$ için

$$\Phi_f[g] = \left[\overline{f} * g * f\right] \in \pi(X,y)$$

ve $\Psi^*\left[\overline{f} * g * f\right] = \left[\Psi\left(\overline{f} * g * f\right)\right] \in \pi(Y,\Psi(y))$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} (\Psi^*\Phi_f)[g] &= \Psi^*(\Phi_f[g]) \\ &= \Psi^*\left[\overline{f} * g * f\right] \\ &= \left[\Psi\left(\overline{f} * g * f\right)\right] \\ &= \left[\Psi\overline{f} * \Psi g * \Psi f\right] \\ &= \left[\overline{\Psi f} * \Psi g * \Psi f\right] \\ &= \Phi_{\Psi(f)}[\Psi g] = \Phi_{\Psi(f)}\Psi^*[g] \end{aligned}$$

dır. O halde $(\Psi^*\Phi_f) = \Phi_{\Psi(f)}\Psi^*$ bulunur. $\square$

BÖLÜM 6

ÇEMBERİN TEMEL GRUBU

Bu bölümde $S^1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^{2} x_i^2 = 1\right\}$ çemberinin $\pi_1(S^1, \cdot)$ temel grubu oluşturalacaktır. S^1üzerindeki topoloji $\mathbb{R}^2$ üzerinden bilinen topolojiden indirgenen topoloji olarak ele alınacaktır. Buna göre S^1 in açık kümeleri çember üzerindeki açık yayların birleşiminden oluşur.

S^1i modülü 1 olan karmaşık sayıların bir grubu olarak yani $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ olarak ele alınabilir. S^1 yol bağlantılı olduğu için bunun temel grubları izomorfiktir. Böylece $\pi_1(S^1, \cdot)$ temel grubu hesaplamak için S^1 in herhangi bir noktası kullanılabilir. Burada $\pi_1(S^1)$ için taban nokta olarak $e^{i0} = 1$ noktası kullanılsın. Böylece $\alpha(0) = \alpha(1) = 1 \in S^1$ olacak şekildeki tüm $\alpha : C \longrightarrow S^1$ sürekli fonksiyonların homotopi tipleri sınıflandırılabilir.

İlk olarak 1 tabanlı,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: C \longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \alpha_1(t) = \begin{cases} e^{\pi i t}; 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ e^{\pi i(1-t)}; \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış yol ele alınsın. Bu yol $(1,0)$ noktasında başlayıp $(0,1)$ noktasına gelen $(0,1)$ den $(1,0)$ noktasına dönen kapalı yoldur ve bu yol ε_1 sabit yoluna (null path) homotoptur. Bu şekildeki çember üzerinde tam tur atmadan oluşturulabilen 1 tabanlı tüm kapalı yollar ε_1 sabit yoluna homotoptur. Böylece bu şekildeki tüm 1 tabanlı kapalı yolların homotopi tipleri aynıdır.

İkinci olarak, 1 tabanlı

$$\begin{aligned} \alpha_2 &: C \longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \alpha_2(t) = e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı yol ele alınsın. Bu yol çember üzerinde $(1,0)$ de başlayıp pozitif yönde 1 tam tur atıp yine $(1,0)$ de biten bir kapalı yoldur. Çember üzerinde $(1,0)$ noktasında başlayıp pozitif yönde 1 tam tur atıp, $(1,0)$ noktasında durmaksızın 2 tam tur yapmadan çember üzerinde herhangi bir noktasında duran sonra tekrar $(1,0)$ noktasına geri dönen kapalı yollatın tamamı α_2 e homotoptur. Böylece bu şekildeki tüm 1 tabanlı kapalı yolların homotopi tipleri de aynı olur.

Buna göre genel olarak, 1 tabanlı

$$\begin{array}{rcccl} \alpha_n & : & C & \longrightarrow & S^1 \\ & & t & \longmapsto & \alpha_n(t) = e^{2\pi n i t} \end{array}$$

şeklinde tanımlı yol ele alınsın. Bu yol çember üzerinde $(1,0)$ de başlayıp n tam tur atıp tekrar $(1,0)$ noktasında biten kapalı yoldur. Burada n pozitif bir tam sayı ise yolun dönme yönü pozitif yöndedir ve n negatif bir tam sayı ise yolun dönme yönü negatif yöndedir.

Böylece herbir n tamsayısı için çember üzerindeki kapalı yollar için farklı homotopi tipleri elde edilebilir. Dolayısıyla $\pi_1(S^1)$ temel grubu ile tüm tamsayıların grubu arasında bir ilişkinin olduğu görülür.

ϑ reel sayıların toplamsal grubundan S^1 e $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\vartheta(t) = e^{2\pi i t}$ biçiminde tanımlı olan bir fonksiyon olsun.ϑ ın homomorfizm olduğu açıktır.

$0 \in \mathbb{R}$ için $\vartheta(0) = e^{2\pi i 0} = e^0 = 1 \in S^1$ dir ve $\mathbb{R}$ nin görüntüsü S^1 çemberini defalarca örter. Ayrıca ϑ dönüşümü $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ açık aralığı $S^1 - \{-1\}$ üzerine homorf olarak dönüştürür. Bundan dolayı

$$\Psi \ : \ S^1 - \{-1\} \longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

dönüşümü , $\vartheta \mid_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ nin tersi olarak düşünülebilir.

Geometrik olarak reel sayıları projeksiyon dönüşümüile birlikte bir spiral olarak düşünürüz. Burada $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ olduğuna dikkat edelim. Eğer $f(0) = f(1) = 1$ özelliğinde

$$f \ : \ I \longrightarrow S^1$$

yolu verildiğinde $\widetilde{f}(0) = 0$ ve $e\widetilde{f} = f$ özelliğinde tek bir

$$\widetilde{f} \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümünün var olduğunu göstermeliyiz. ($\widetilde{f}$ dönüşümüne f nin bir lifti denir.) $f(1) = 1$ olduğundan $\widetilde{f}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ olmalıdır. Bu tamsayı f nin derecesi olarak tanımlanır. Eğer f_0 ile f_1 S^1 içerisinde denk yollar ise $\widetilde{f_0}(1) = \widetilde{f}(1)$ olduğunu göstermeliyiz. Buradan ise $\pi(S^1, 1) \longrightarrow 2$ bir fonksiyon elde edilir. Sonuçta bu fonksiyonun bir grup izomorfizmi olduğunu göstereceğiz.

Yardımcı Teorem 6.1 U, $S^1 - \{1\}$ kümesinin herhangi bir açık alt kümesi ve $V = I \cap e^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $e^{-1}(U)$, $n \in \mathbb{Z}$ için herbiri e vasıtasıyla U üzerine hemeomorfig olarak dönüşen $V + n = \{v + n;\ v \in V\}$ açık kümelerinin ayrık birleşimidir.

İspat. U kümesini bir açık aralık olarak alalım. Yani bazı a, b ler için $U = \{e^{2\pi it};\ 0 \leq a < b \leq 1\}$ alınsın. Bu durumda $V = (a, b)$ ve $V + n = (a + n, b + n)$ dır. Açıktır ki $e^{-1}(U)$, $V + n\ (n \in \mathbb{Z})$ açık kümelerinin ayrık birleşimidir. e_n, e_n in $(a + n, b + n)$ ye kısıtlaması olsun. Açıktır ki e_n süreklidir ve bire-bir artandır. e_n^{-1} fonksiyonunun sürekli olduğunu kontrol etmek için $(a + n, b + n)$ aralığını ele alalım. Ve $W \subseteq (a + n, b + n)$ kapalı bir alt küme olsun. (böylece kompakt) W kompakt S^1 Hausdorff olduğundan dolayı $e_n W \longrightarrow e_n(W)$ bir homeoforfizme indirgenir. Özel olarak $e_n(W)$ kompakttır ve böylece kapalıdır. Bu ise W kapalı bir alt kümesi ise $e_n(W)$ nin de kapalı olduğunu gösterir. Böylece e_n^{-1} süreklidir ve buradan e_n bir homeomorfizmdir. $\square$

Sonuç 6.2 Herhangi bir $f : I \longrightarrow S^1$ sürekli fonksiyonu bir

$$\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

liftine sahiptir. Ayrıca $e(x_0) = f(0)$ özelliğindeki bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\widetilde{f}(0) = x_0$ özelliğinde tek bir $\widetilde{f}$ lifti vardır

İspat. Her bir $x \in S^1$ için U_x, x in bir açık komşuluğu olsun. Öyleki $e^{-1}(U_x)$, her biri e vasıtasıyla U_x üzerine homeomorfik olarak dönüşen $\mathbb{R}$ nin açık alt kümelerinin ayrık birleşimidir.$\{f^{-1}(U_x);\ x \in S^1\}$ kümesi I nın açık bir örtüsü olan $\{(x_j, y_j) \cap I;\ j \in J\}$ biçiminde ifade edilebilir. I kompakt olduğundan dolayı $i = 1, 2, ..., n-1$ için $t_i + \epsilon_i > t_{i+1} - \epsilon_{i+1}$ özelliğinde $[0, t_1 + \epsilon_1)$, $(t_2 - \epsilon_2, t_2 + \epsilon_2)$, ..., $(t_n - \epsilon_n, 1]$ biçiminde sonlu bir alt örtü vardır. Şimdi $0 = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = 1$ olacak şekilde $i = 1, 2, ..., n-1$ için $a_i \in (t_{i+1} - \epsilon_{i+1},\ t_i + \epsilon_i)$ seçelim. Açıktır ki $f([a_i, a_{i+1}])$ S^1 in bir S_i açık kümesinde bulunur. Öyleki $e^{-1}(S_i)$, herbiri e vasıtasıyla S_i üzerine homeomorfik olarak dönüşen $\mathbb{R}$ nin açık Falt kümelerinin birleşimidir.

Şimdi $k = 0, 1, 2, ..., n$ için $\widetilde{f}_k(0) = x_0$ olacak şekilde $[0, a_k]$ üzerinde $\widetilde{f}_k$ liftinglerini tanımlayacağız. Bu $k = 0$ için aşikardır. Yani $\widetilde{f}_0(0) = x_0$ dır.

$$\widetilde{f}_k : [0, a_k] \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümünün tanımlı ve tek olduğunu kabul edelim. $f([a_k, a_{k+1}]) \subseteq S_k$ dır ve $e^{-1}(S_k)$ herbir $j \in J$ için bir homeomorfizm olan4

$$e|_{W_j} \ : \ W_j \longrightarrow S_k$$

ile birlikte $\{W_j : \ j \in J\}$ nin ayrık birleşimidir. Buna göre $\{W_j : \ j \in J\}$ biricik W elemanı için $\widetilde{f_k}(a_k) \in W$ dır. Herhangi $\widetilde{f_{k+1}}$ genişlemesi $[a_k, a_{k+1}]$ den W içerisine dönüşüm olmalıdır. Çünkü $[a_k, a_{k+1}]$ yol bağlantılıdır.

$$e|_W \ : \ W \longrightarrow S_k$$

kısıtlaması bir homeomorfizm olduğundan $ep = f|_{[a_k, a_{k+1}]}$olacak şekilde bir tek

$$p \ : \ [a_k, a_{k+1}] \longrightarrow W$$

dönüşümü vardır. (Aslında $p = (e|_W)^{-1} f$ dir.)

Şimdi $\widetilde{f_{k+1}}$ dönüşümünü

$$\widetilde{f_{k+1}}(s) = \begin{cases} \widetilde{f_k(s)} : 0 \leq s \leq a_k \\ p(s) : a_k \leq s \leq a_{k+1} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu dönüşüm, $\widetilde{f_k}(a_k) = p(a_k)$ olduğundan dolayı süreklidir ve inşası gereği tektir. Böylece biz $\widetilde{f}$ yi elde etmiş oluruz. □

Bu teoremi kullanarak S^1 içerisindeki bir kapalı yolun derecesini tanımlayabiliriz. f, S^1 içerisinde 1 tabanlı bir kapalı yol olsun ve $\widetilde{f} \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\widetilde{f}(0) = 0$ özelliğinde tek bir lift olsun. $e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1)$ olduğu için $\widetilde{f}(1)$ in bir tamsayı olduğunu görürüz ki bu tamsayı f in derecesi olarak tanımlanır.

Denk yolların aynı dereceye sahip olduklarını göstermek için ilk olarak denk yolların denk liftlere sahip olduklarını göstermeliyiz. Bunu göstermek için ise bir önceki teoremde I yerine I^2 alacağız.

Yardımcı Teorem 6.3 Her hangi bir $F \ : \ I^2 \longrightarrow S^1$ sürekli fonksiyonu

$$\widetilde{F} \ : \ I^2 \longrightarrow S^1$$

liftine sahiptir. Ayrıca $e(x_0) = F(0,0)$ özelliğindeki $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\widetilde{F}(0,0) = x_0$ özelliğinde bir tek $\widetilde{F}$ lifti vardır.

İspat. I^2 kompakt olduğunda

$$R_{i,j} = \left\{(t,s) \in I^2;\ a_i \leq t \leq a_{i+1},\ b_j \leq s \leq b_{j+1}\right\}$$

dikdörtgen olmak üzere $F(R_{i,j}) \subset S^1$ olacak şekilde

$$\begin{array}{c} 0 = a_0 < a_1 < ... < a_n = 1 \\ 0 = b_0 < b_1 < ... < b_m = 1 \end{array}$$

bulabiliriz. Böylece $\widetilde{F}$ tüm $R_{0,0},\ R_{0,1},...,\ R_{0,m},\ R_{1,0},\ R_{1,1},...$ dikdörtgeni üzerinde tanımlıdır. □

Sonuç 6.4 (Monodromy Teoremi) f_0 ve f_1, S^1 içerisinde 1 tabanlı denk yollar olsun.Eğer $\widetilde{f_0}$ ve $\widetilde{f_1}$, $\widetilde{f_0}(0) = \widetilde{f_1}(0)$ olacak şekildeki liftler ise bu durumda $\widetilde{f_0}(0) = \widetilde{f_1}(0)\,,\ \widetilde{f_0}(1) = \widetilde{f_1}(1)$ dır.

İspat. F, f_0 ve f_1 arasındaki $\{0,1\}$ e göre homotopi olsun. Bunun lifti

$$\widetilde{F} \ :\ I^2 \ \longrightarrow \ S^1$$

dir ve $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{f_0}(0) = \widetilde{f_1}(0)$ dır. $F(t,0) = f_0(t)$ ve $F(t,1) = f_1(t)$ olduğundan $\widetilde{F}(t,0) = \widetilde{f_0}(t)$ ve $\widetilde{F}(t,1) = \widetilde{f_1}(t)\,d\imath r$. Aynı zamanda $\widetilde{F}(1,t)\,,\ \widetilde{f_0}(1)$ den $\widetilde{f_1}(1)$ e bir yoldur. Çünkü $F(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$ dir. Fakat $\widetilde{F}(1,t) \in e^{-1}(f_0(1)) \cong \mathbb{Z}$ dir. Bu ise $\widetilde{F}(1,t)$ nin sabit olması ve böylecede $\widetilde{f_0}(1) = \widetilde{f_1}(1)$ olması anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi çemberin temel grubunu hesaplayabiliriz.

Teorem 6.5 $\pi(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$

İspat. f nin derecesi deg(f) olmak üzere

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \pi(S^1,1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & [f] & \longrightarrow & \varphi([f]) = \deg(f) \end{array}$$

tanımlayalım. $\widetilde{f}$, f nin $\widetilde{f}(0) = 0$ özelliğindeki bricik lifti olmak üzere deg$(f) = \widetilde{f}(1)$ olduğunu hatırlayalım. φ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Şimdi φ fonksiyonunun grup izomorfizmi olduğunu görelim.

İlk olarak φ nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim. $l_a(f)$ f nin $a \in e^{-1}(f(0))$ noktasında başlayan lifti olsun ve 1 de başlayan S^1 içerisindeki bir yol için $l_0(f) = \widetilde{f}$, $l_a(f)(t) = \widetilde{f}(t) + a$ dır. Açıktır ki $l_a(f * g) = l_a(f) * l_b(g)$ dir. Burada $b = \widetilde{f}(1) + a$ dır. Buna göre $[f], [g] \in \pi(S^1, 1)$ ise

$$\begin{aligned}
&\varphi([f][g]) = \varphi\left([f * g] = \widetilde{f * g}(1)\right) \\
&= l_a(f * g)(1) \\
&= (l_a(f) * l_b(g))(1) \\
&= l_b(g)(1) \\
&= b + \widetilde{g}(1) \\
&= \widetilde{f}(1) + \widetilde{g}(1) \\
&= \varphi([f]) + \varphi([g])
\end{aligned}$$

dir ki bu φ nin bir homomorfizm olduğunu gösterir. φ nin örten olduğunu göstermek daha kolaydır. Verilen $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{array}{cccc} g : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) = nt \end{array}$$

ile verilmiş olsun. Bu durumda $eg : I \longrightarrow S^1$ e bir tabanlı kapalı bir yoldur. g, $g(0) = 0$ özelliğinde eg nin lifti olduğundan dolayı $\varphi([eg]) = \deg(eg) = g(1) = n$ elde edilir ki buda φ nin örten olduğunu gösterir.

φ nin bire-bir olduğunu göstermek için ise $\varphi([f]) = 0$ yani $\deg(f) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bunun anlamı f nin $\widetilde{f}$ lifti $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(1) = 0$ ı sağlamasıdır.$\mathbb{R}$ büzülebilir olduğundan $\widetilde{f} \simeq \epsilon_0 (rel\{0,1\})$ dir. Diğer bir deyişle $F(0,t) = \widetilde{f}(t)$, $F(1,t) = 0$ ve $F(t,0) = F(t,1) = 0$ özelliğinde bir $F : I^2 \longrightarrow S^1$ dönüşümü için $eF(0,t) = f(t)$, $eF(1,t) = 1$, $eF(t,0) = eF(t,1) = 1$ sağlandı ve böylece $f \simeq \epsilon_1 (rel\{0,1\})$ yani $[f] = 1 \in \pi(S^1, 1)$ dir. Buda φ nin bire-bir olduğunu ispatlar ve böylece φ bir izomorfizmdir. $\square$

Teorem 6.6 X ve Y iki yol bağlantılı topolojik uzay olsun. $X \times Y$ çarpımının temel grubu, X in ve Y nin temel gruplarının çarpımına izomorftur.

İspat. $p : X \times Y \longrightarrow X$ ve $q : X \times Y \longrightarrow Y$ projeksiyon dönüşümleri olsunlar.

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) & \longrightarrow & \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \\ & [f] & \longmapsto & \varphi[f] = (p * [f], q * [f]) = ([pf], [qf]) \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. İlk olarak φ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu kontrol edelim. Eğer $f \sim g$ ise, $F : I \times I \longrightarrow X \times Y$ sürekli dönüşümü, $F(t,0) = f(t)$,

$F(t,1) = g(t)$ ve $F(0,s) = F(1,s) = (x_0, y_0)$ olacak şekilde vardır. $pF : I \times I \longrightarrow X$ ve $qF : I \times I \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonları $pf \sim pg$ ve $qf \sim qg$ denkliklerini sağlarlar öyleki $\varphi[f] = \varphi[g]$ olur ve φ iyi tanımlıdır.

φ nin örten olduğunu göstermek için $([f_1], [f_2])$ nin $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ a ait olduğunu düşünelim. $f : I \longrightarrow X \times Y$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ olsun. $\varphi[f] = ([f_1], [f_2])$ olduğu açıktır.

φ nin bire-bir olduğunu görmek için $\varphi[f] = \varphi[g]$ alalım. Bunun anlamı $pf \sim pg$ ve $qf \sim qg$ dır. Eğer $F_1 : I \times I \longrightarrow X$ ve $F_2 : I \times I \longrightarrow Y$ bu denklikleri verirse, $F : I \times I \longrightarrow X \times Y$, $F(t,s) = (F_1(t,s), F_2(t,s))$, $f \sim g$ denkliğini sağlar.

Sonuç olarak φ bir homomorfizmdir, eğer $f, g : I \longrightarrow X \times Y$, $f(1) = g(0)$ şartını sağlayan yollar ise, $p(f * g) = pf * pg$ ve $q(f * g) = qf * qg$ dir. $\square$

Sonuç 6.7 Torun temel grubu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dir.

BÖLÜM 7

ÖRTME UZAYLARI

Örtme uzay kavramı, differansiyel geometri , Lie gruplar teorisi, Riemann yüzeyler teorisi gibi bir çok alanda önemli uygulamaları bulunduğundan dolayı topolojik uzaylarda oldukça önemlidir. Bu kavramı aynı zamanda temel grupların çalışmalarıyla yakından ilişkilidir. Örtme uzayları ile ilgili birçok topolojik problem ilgilenilen uzayların temel grupları üzerindeki cebirsel problemlere dönüştürülebilir. Ayrıntılı bilgi için [5], [6] a bakılabilir.

7.1 ÖRTME UZAYLARI

$\widetilde{X}$ ve X iki topolojik uzay ve $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ bir sürekli fonksiyon olsun. Bir $U\subset X$ açık alt kümesi için eğer $p^{-1}(U)$, $\widetilde{X}$ nın p vasıtasıyla herbiri U üzerine homeomorfik olarak dönüşen açık alt kümelerinin ayrık birleşimi olarak yazılabiliyorsa, U ya p vasıtasıyla tam olarak örtülür denir.

$p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ dönüşümü için eğer herbir $x\in X$ noktası p vasıtasıyla tam olarak örtülen bir açık komşuluğa sahipse p dönüşümüne örtme dönüşümü veya bir örtme izdüşümü denir. $\widetilde{X}$ uzayına $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ örtme dönüşümünün örtme uzayı ve X uzayına taban uzayı denir. Buna denk olarak, p örtense ve $j\neq k$ olmak üzere $U_j\cap U_k=\emptyset$ ve $j\in J$ için $p\,|_{U_j}\ :\ U_j\ \longrightarrow\ U$ homeomorfizm olacak şekildeki $\widetilde{X}$ 'nin alt kümelerinin $\{U_j\}$ belli koleksiyonu için $p^{-1}(U)=\cup_{j\in J}U_j$ olacak şekildeki x in U açık komşuluğu varsa, $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ dönüşümüne örtme dönüşümü denir.

Teorem 7.1 $\widetilde{X}$ bir X topolojik uzayının örtme uzayı, $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ örtme dönüşümü, $\widetilde{x_0}\in\widetilde{X}$ ve $x_0=p(\widetilde{x_0})$ olsun. Bu durumda

$$p_*\ :\ \pi\left(\widetilde{X},\widetilde{x_0}\right)\ \longrightarrow\ \pi(X,x_0)$$

indirgenmiş homomorfizmi bir monomorfizmdir.

Örnek 7.1

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & p(t)=e^{2\pi it} \end{array}$$

dönüşümü ele alınsın. $x + iy$, S^1 üzerinde bir nokta, bunun orijine göre simetriği olan nokta da $-x + i(-y)$ ve $U = S^1 - \{-x + i(-y)\}$ olsun. Bu durumda $p^{-1}(U)$, merkezi $\frac{1}{2}\pi \arcsin x$ olan birim uzunlıktaki tüm açık aralıkların birleşiminden oluşur ve bu aralıklar p vasıtasıyla U üzerine homeomorfik olarak dönüşür. Bundan dolayı p , örtme dönüşümüdür ve $\mathbb{R}$, S^1 çemberinin bir örtme uzayıdır.

Örnek 7.2 Herhangi bir homeomorfizm örtme dönüşümüdür.

Örnek 7.3 n, pozitif bir tamsayı olsun ve

$$\begin{array}{rcccl} p & : & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & & z & \longmapsto & p(z) = z^n \end{array}$$

dönüşümünü düşünelim.$\forall z \in S^1$ için $S^1 - \{z\}$, p vasıtasıyla tam olarak örtülür. Böylece p örtme dönüşümüdür.

Örnek 7.4 n, pozitif bir tamsayı ve

$$\begin{aligned} \widetilde{X} &= \{z : z \in C; 0 < |z| < r\} \\ X &= \{z : z \in C : 0 < |z| < r^n\} \text{ ve } p(z) = z^n \end{aligned}$$

olsun. Böylece p örtme dönüşümüdür.

Örnek 7.5 $\widetilde{X} = \mathbb{R}^2$ ve $M = S^1 \times S^1$ tor olsun.

$$\begin{array}{rcccl} p & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M \\ & & (x, y) & \longmapsto & p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \end{array}$$

dönüşümü bir örtme dönüşümüdür.

7.2 YEREL HOMEOMORFİZMLER

X ve Y iki uzay ve $f : Y \longrightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $y \in Y$ noktası, X in bir açık alt kümesi üzerine f yardımıyla homeomorfik olarak dönüşen bir açık komşuluğa sahipse f fonksiyonuna bir yerel homeomorfizm denir.

Eğer f bir yerel homeomorfizm ise Y nin herbir noktası yukardaki özelliklere sahip komşuluklara sahiptir. Böylece bir yerel homeomorfizm bir açık fonksiyondur.

Yardımcı Teorem 7.2 Bir örtme dönüşümü, yerel homeomorfizmdir.

İspat. $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtme dönüşüm olsun ve $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ ele alınsın. U, $p\left(\widetilde{X}\right)$ nin p vasıtasıyla tam olarak örtülen bir açık komşuluğu olsun. Buna göre, tanımdan $j \neq k$ için $U_j \cap U_k = \emptyset$ olacak şekilde ve herbiri p ile U üzerine homeomorfik olarak dönüşen U_j kümeleri için, $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$ dir.

$\widetilde{U}$, $\widetilde{x}$ noktasını içeren $\{U_j\}$ ailesine ait bir açık küme olsun. Bu durumda $\widetilde{U}$,

$$p\,|_{\widetilde{U}} \;:\; \widetilde{U} \longrightarrow U$$

bir homeomorfizm özelliğindeki $\widetilde{x}$ nin bir açık komşuluğudur. Bu da p nin yerel homeomorfizm olduğunu gösterir. □

Buna rağmen, bir yerel homeomorfizmin bir örtme dönüşüm olması gerekmez. Bu aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 7.6

$$\begin{array}{cccl} p & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ & & t & \longmapsto & p(t) = e^{2\pi i t} \end{array}$$

örtme dönüşümü ele alınsın .$p_1 : (0,3) \longrightarrow S^1$, p nin $(0,3)$ açık aralığına kısıtlanmışı olsun. p örtme dönüşüm olduğundan dolayı bu bir yerel homeomorfizmdir ve bunun $(0,3)$ açık aralığına kısıtlanmış p_1 dönüşümü de bir yerel homeomorfizmdir. p_1 aynı zamanda örtendir fakat $1 \in S^1$ karmaşık sayısı p_1 vasıtasıyla tam olarak örtülen hiçbir komşuluğu sahip değildir. Bundan dolayı p_1 bir örtme dönüşümü değildir.

Sonuç 7.3 $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtme dönüşümü olsun. Bu durumda X, $\widetilde{X}$ nın bir bölüm uzayıdır.

7.3 G-UZAYLARI

X bir küme ve G bir grup olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

fonksiyonu için,

i) $\forall x \in X$ için $e.x = x$ (e, G nin birim elemanı)

ii) $\forall x \in X$ ve $g, h \in G$ için $g.(h.x) = (gh).x$

şartları sağlanıyorsa G grubuna X kümesi üzerine etki ediyor yada X kümesine $G-$kümesi denir.

Örnek 7.7 X bir topolojik uzay ve $G(X)$, $f : X \longrightarrow X$ homeomorfizmlerinin grubu olsun.

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

fonksiyonu ele alınsın.

$e : X \longrightarrow X$ birim fonksiyon olmak üzere $e.x = e(x) = x$ dir ve $g, h \in G(X)$ için $g.(h.x) = g.h(x) = g(h(x)) = (gh)(x) = (gh)x = (gh).x$ elde edilir. Böylece G, X üzerine etki eder.

Yardımcı Teorem 7.4 X, bir G kümesi olsun. Bu durumda eğer $g \in G$ ise

$$\begin{array}{cccc} \theta_g & : X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & g.x \end{array}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon bire-birdir.

İspat. Tanımdan $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$ ve $\theta_e = I_X$ olduğu görülür. Böylece $\theta_g\theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \theta_e = I_X = \theta_{g^{-1}}\theta_g = \theta_{g^{-1}g}$ olur ve θ_g bire-bir bir dönüşümdür. □

Tanım 7.5 G, X üzerine etki etsin ve $x \in X$ olsun. $G.x = \{g.x : g \in G\}$ şeklinde tanımlanan X in alt kümesine x noktasının yörüngesi denir.

$G.x$ ve $G.y$ yörüngeleri ya ayrıktır yada eşittir. G nin, X üzerine etki ettiği kabul edilsin. X üzerinde aşağıdaki şekilde bir "$\sim$" denklik bağıntısı tanımlansın:

"$x \sim y$ olması için gerekli ve yeterli şart $g.x = y$ olacak şekilde $g \in G$ olmasıdır."

$G.x$ ve $G.y$ yörüngeleri ya ayrık yada eşit olduklarından dolayı $x \sim y$ olması için gerekli ve yeterli şart $y \in G.x$ biçiminde yazılmasıdır.

Tanım 7.6 Denklik sınıflarının kümesine X in G ile bölüm kümesi denir ve $X \backslash G$ şeklinde gösterilir. $X \longrightarrow X \setminus G$ ye bir örten dönüşüm vardır. Böylece X , G nin üzerine etki ettiği bir topolojik uzay ise $X \setminus G$ üzerinde bir bölüm topoljisini düşünebiliriz. Böylece $X \setminus G$ ye X in G ye bölüm uzayı denir.

Örnek 7.8 Eğer $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ üzerine

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n,x) & \longmapsto & n.x = n+x \end{array}$$

biçiminde etki ediyorsa bu durumda $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bölüm uzayı S^1 çemberidir.

Tanım 7.7 X bir topolojik uzay ve G bir grup olsun. Eğer G, X üzerine etki ediyorsa ve $\forall g\in G$ için

$$\begin{array}{ccccc} \theta_g & : & X & \longrightarrow & X \\ & & x & \longmapsto & g.x \end{array}$$

şeklinde tanımlanmış olan fonksiyon sürekli ise X topolojik uzayına $G-$uzayı denir.

Yardımcı Teorem 7.8 X bir $G-$uzayı olsun. Bu durumda

$$\pi : X \longrightarrow X\setminus G$$

kanonik projeksiyon dönüşümü bir açık dönüşümdür.

İspat. $V\subset X$ bir açık küme olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(V)) &= \{x\in X : \pi(x)\in\pi(V)\} \\ &= \{x\in X : G.x = G.y,\ y\in V\} \\ &= \{x\in X : x = g.y,\ y\in V \text{ ve } g\in G\} \\ &= \{x\in X :\ x\in g.V,\ g\in G\} \\ &= \cup_{g\in G} g.V \end{aligned}$$

elde edilir. G-uzayı tanımından ve G içerindeki herbir g nin etkisi bir homeomorfizmdir. Böylece V açık olduğundan $\pi^{-1}(\pi(V))$ açıktır ve bu da $\pi(V)$ nin $X\setminus G$ içerisinde açık olmasını gerektirir. $\square$

Tanım 7.9 X , bir G uzayı olsun. G nin X üzerine etkisi ele alınsın. Eğer $g\neq g_1$ olacak şekildeki tüm g, $g_1\in G$ için $g.V\cap g_1.V=\emptyset$ olacak şekilde X in bir V komşuluğu varsa G nin X üzerine etkisine has süreksiz denir.

Eğer etki has süreksizse bu durumda $g\in G$, $g\neq e$ ve $x\in X$ için $g.x\neq x$ olduğu açıktır.

Teorem 7.10 Eğer G nin X üzerine etkisi has süreksiz ise bu durumda

$$\pi \ : \ X \longrightarrow X/G$$

kanonik izdüşüm fonksiyonu bir örtme dönüşümüdür.

İspat. π izdüşüm fonksiyonunun sürekli ve örten bir fonksiyon olduğu açıktır. Lemma 8.5 gereği π bir açık fonksiyondur. $x \in X$ ve V has süreksizliğin komşuluğunu sağlayan X in açık komşuluğu olsun. Böylece $\pi(V)$ açıktır ve $G.x = \pi(x)$ in bir komşuluğudur. Ayrıca $\{g.v : g \in G\}$, X in ayrık alt kümeleri olmak üzere

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \cup_{g \in G} g.v$$

dır. Dahası

$$\pi\mid_{g.V} \; : \; g.V \longrightarrow \pi(V)$$

dönüşümü sürekli bire bir ve açık bir dönüşümdür. Böylece bir homeomorfizmdir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Örnek 7.9 $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bir örtme dönüşümüdür. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \longrightarrow x+n$ biçiminde tanımlanmış $\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{R}$ üzerine etkisi has süreksizdir çünkü $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığı has süreksizlik için istenilen koşulu sağlayan x in açık komşuluğudur ve $\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{R}$ üzerine bu etkisi $\mathbb{R}$ yi bir $\mathbb{Z}$ uzayı yapar ve

$$\pi \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

bir örtme dönüşümü olur.

7.4 ÖRTME DÖNÜŞÜMLERİNİN ÖZELLİKLERİ:

Teorem 7.11 Herhangi bir $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ örtme dönüşümü açık dönüşümdür.

İspat. $V \subset \widetilde{X}$ açık olsun. $p(V)$ nin X içinde açık olduğu gösterilmelidir. $x \in p(V)$ olsun. Tanımdan x in bir p vasıtasıyla tam olarak örtülen bir U açık komşuluğu vardır. $\widetilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$ olsun. Aynı zamanda $\widetilde{x} \in p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$ olduğundan $\widetilde{x} \in U_j$ olacak şekilde $\widetilde{X}$ içinde bir U_j mevcuttur. Böylece $U_j \cap V$, U_j içerisinde açık ve $p\mid_{U_j}$ U_j den

U ya bir homeomorfizm olduğundan dolayı $p(U_j \cap V)$, U nun bir açık alt kümesidir. O halde U, X içerisinde açık ve $p(U_j \cap V)$, X içinde açıktır. Herbir x için

$$x \in p(U_j \cap V) \subset p(V)$$

olacak şekilde $p(U_j \cap V)$ açık komşuluğu bulunabildiğinden $p(V)$, X içinde açıktır. Böylece p bir açık dönüşümdür denilebilir. $\square$

Teorem 7.12 Eğer $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtme dönüşümü ise bu durumda X , p ye göre bir bölüm topolojisine sahiptir.

İspat. p sürekli ve açık bir dönüşüm olduğundan X in bir U alt kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli şart $p^{-1}(U)$ nun açık olmasıdır. $\square$

Teorem 7.13 Eğer X yerel bağlantılı ise $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonunun bir örtme dönüşüm olması için gerekli ve yeterli şart X in herbir H bileşeni için

$$p\,|_{p^{-1}(H)} \ : \ p^{-1}(H) \longrightarrow H$$

dönüşümünün örtme dönüşüm olmasıdır.

İspat. p nin bir örtme dönüşümü olduğu kabul edilsin ve H, X in bir bileşeni olsun.

$x \in H$ ve U, X in p vasıtasıyla tam olarak örtülen bir açık komşuluğu olsun. Eğer V, x i içeren U nun bir bileşeni ise X yerel bağlantılı olduğundan dolayı V, X içinde açıktır ve böylece H içinde de açıktır. Ayrıca V, $p\,|_{p^{-1}(H)}$ vasıtasıyla tam olarak örtülür. Böylece $p\,|_{p^{-1}(H)}$ bir örtme dönüşümdür.

Tersine X in herbir H bileşeni için,

$$p\,|_{p^{-1}(H)} \ : \ p^{-1}(H) \longrightarrow H$$

bir örtme dönüşümü olduğu kabul edilsin. Eğer $x \in H$ ise U, X in H içinde $p\,|_{p^{-1}(H)}$ vasıtasıyla tam olarak örtülen bir açık komşuluğu olsun. X yerel bağlantılı olduğundan dolayı H ın X içerisinde açık olduğu biliniyor böylece U, X içinde açıktır ve p vasıtasyla tam olarak örtülür. Bundan dolayı p bir örtme dönüşümdür. $\square$

Tanım 7.14 $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtme dönüşümü olsun ve $f : Y \longrightarrow X$ bir sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $p\widetilde{f} = f$ olacak şekildeki $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ sürekli fonksiyonuna f nin lifti denir.

Aşağıdaki teorem bir liftin mevcut olması durumunda tek olması gerektiğini gösterir.

Yardımcı Teorem 7.15 $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtme dönüşümü olsun ve $f_1, f_2 : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ fonksiyonları $f : Y \longrightarrow X$ fonksiyonunun iki lifti olsun.

Y nin bağlantılı olduğu ve $f_1(y_0) = f_2(y_0)$ olacak şekilde bir $y_0 \in Y$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $f_1 = f_2$ dir.

İspat. $Y_1 = \{y \in Y,\ f_1(y) = f_2(y)\}$ kümesi ele alınsın. $y_0 \in Y$ olduğundan Y_1 kümesi boş değildir. Y_1 kümesinin hem açık hemde kapalı olduğu gösterilsin. Eğer $y \in Y$ ise $f(y)$nin p vasıtasıyla tam olarak örtülen bir V açık komşuluğu vardır. $p^{-1}(V) = \cup_{j\in J} V_j$, $V_j \cap V_i = \emptyset$ dır ve herbir j için $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow V$ bir homeomorfizmdir.

Eğer $y \in Y_1$ ise bazı k lar için $f_1(y) = f_2(y) \in V_k$ dır.

$$F = f_1^{-1}(V_k) \cap f_2^{-1}(V_k)$$

kümesi y nin bir açık komşuluğudur ve Y_1 in bir alt kümesidir.

$x \in F$ olsun. Bu durumda $f_1(x)$ ve $f_2(x) \in V_k$ dır ve aynı zamanda $pf_1(x) = pf_2(x)$ dir.

$p|_{V_k}$ bir homeomorfizm olduğundan dolayı $f_1(x) = f_2(x)$ dir. Buradan Y_1 in herbir noktasının Y_1 in bir iç noktası olduğu elde edilir. Böylece Y_1 açıktır.

$y \notin Y_1$ ise $k \neq l$ olacak şekilde bazı k ve l için $f_1(y) \in V_k$ ve $f_2(y) \in V_l$ dir.

$f_1^{-1}(V_k) \cap f_2^{-1}(V_l)$ kümesi Y_1 in tümleyeni içerisinde bulunan y nin bir açık komşuluğudur. Böylece Y_1 kapalıdır. O halde Y_1 hem açık hem kapalı olduğu gösterilir. Y bağlantılı olduğundan dolayı $Y = Y_1$ elde edilir. Buna göre $f_1 = f_2$ dir. $\square$

7.5 ÖRTME UZAYININ TEMEL GRUBU:

Bu bölümü örtme uzaylarının temel grupları üzerine bir teorem vererek sonuçlandıralım.

Teorem 7.16 $\widetilde{X}$ yol bağlantılı olmak üzere $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtme dönüşümü olsun. $\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1} \in \widetilde{X}$ alınsın. Bu durumda $\Phi_f p^* \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right) = p^* \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}\right)$ olacak şekilde X içinde bir $p\left(\widetilde{x_0}\right)$ dan $p\left(\widetilde{x_1}\right)$ a bir f yolu vardır.(Φ_f , f yolu ile belirlenmiş izomorfizm ve p^* indirgenmiş homomorfizmdir.)

İspat. g , $\widetilde{X}$ içinde $\widetilde{x_o}$ yı $\widetilde{x_1}$ ya birleştiren bir yol olsun. Bu durumda,Teorem 5.1.1 gereği $\Phi_g : \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right) \longrightarrow \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}\right)$ bir izomorfizmi mevcuttur. Böylece,

$$\Phi_g(\pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right)) = \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}\right)$$

dır. Bu eşitliğe p örtme dönüşümünden elde edilen p^* indirgenmiş homomorfizmi uygulanırsa , $p^*\Phi_g(\pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right)) = p^*(\pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}\right))$ elde edilir. Buna göre Teorem 5.3.7 kullanılarak $p^*\Phi_g = \Phi_{pg} p^*$ elde edilir. Eğer $f = pg$ yazarsak f, X içinde $p\left(\widetilde{x_0}\right)$ dan $p\left(\widetilde{x_1}\right)$ a bir yoldur. O halde

$$\begin{aligned} \Phi_f p^* \left(\pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right)\right) &= p^*\Phi_g \left(\pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right)\right) \\ &= p^* \left(\pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] CROSSLEY,D., M., Essential Topology, Springer, 2005.

[2] ENGELKING,R., SIEKLUCKI,K., Topology A Geometric Approach, Heldermann Verlag Berlin, 1992.

[3] KOSNIOWSKI,C., A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press, 1980.

[4] LAHIRI,B.,K., A First Course in Algebraic Topology, Alpha Science International Ltd, 2005.

[5] MASSEY,W.,S, Algebraic Topology, Springer, Verlag New York, 1967.

[6] MURKRES,J.,R., Topology Prestice Hall, Inc., 2000.