YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Mustafa Kemal YILDIZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2006

OSCILLATORY BEHAVIOR OF HIGHER ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

Mustafa Kemal YILDIZ

Ph.D. THESIS

Department of Mathematics

2006

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Mustafa Kemal YILDIZ

T.C.
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Dursun ESER

Haziran 2006

Mustafa Kemal YILDIZ'ın Doktora tezi olarak hazırladığı

"YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Yrd. Doç. Dr. Dursun ESER

Üye: Doç. Dr. Oktay DUMAN

Üye:Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Üye: Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu doktora tezi dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, fark analizi, lineer fark denklemleri teorisi, lineer homogen sabit katsayılı fark denklemlerinin çözümleri ve fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili temel bilgiler verilip bunlara ilişkin bilinen bazı teorem ve lemmalar hatırlatılmıştır.

Orjinal sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır.

Üçüncü bölümde aşağıdaki yüksek mertebeden lineer olmayan neutral gecikmeli fark denklemi ele alınmıştır.

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-l}) + q_n y_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Burada Δ operatörü $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ şeklinde tanımlanan fark operatörü, k ve l birer pozitif tamsayı, $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri ve $\alpha \in (0,1)$ pozitif tek tamsayıların bir oranıdır. Bu bölümde (1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, aşağıdaki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklemi ele alınmıştır.

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad m > 2 \tag{2}$$

Burada Δ operatörü $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ şeklinde tanımlanan fark operatörü, k pozitif bir tam sayı, $n \geq n_0 \geq 0$ için $0 \leq p_n < 1$ olmak üzere $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri ve $\alpha \in (0,\infty)$ pozitif tek tamsayıların bir oranıdır. Bu bölümde (2) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir.

SUMMARY

This thesis consists of four chapter. The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter, some main topics of difference calculus, theory of linear difference equations, solutions of linear homogeneous difference equations with constant coefficients, oscillations of difference equations have been given and some known theorems and lemmas concerning these concepts have also been reminded.

Our original results are contained in Chapter 3 and 4.

In the third chapter, we consider the following higher order nonlinear neutral delay difference equation

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-l}) + q_n y_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

where Δ operatörü $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ şeklinde tanımlanan fark operatörü, k, l are positive integers, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ are sequences of nonnegative real numbers and $\alpha \in (0,1)$ is a ratio of odd positive integers. In this chapter, our aim is to obtain sufficient conditions for the oscillation of all solutions of equation (1).

In the last chapter, we consider the following higher order nonlinear delay difference equation

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad m > 2 \tag{2}$$

where Δ operatörü $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ şeklinde tanımlanan fark operatörü, k is a positive integer, $\{p_n\}$ and $\{q_n\}$ are sequences of nonnegative real numbers, $0 \leq p_n < 1$ for $n \geq n_0 \geq 0$ and $\alpha \in (0, \infty)$ is a ratio of odd positive integers. In this chapter our aim is to obtain sufficient conditions for the oscillation of all solutions of equation (2).

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Dursun ESER'e, manevi desteklerinden dolayı bölüm başkanım Sayın Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ'ye ve Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi dekan yardımcısı Sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen eşim Emine YILDIZ'a, anneme, kardeşlerim Murat Ali ve Tolgahan'a da teşkkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı yeni dünyaya gelen oğlum Fatih Kaan ve yeğenlerim Doğukan ve Batıhan Akif'e armağan ediyorum.

Eskişehir 2006 Mustafa Kemal YILDIZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Adı**
E	Kaydırma operatörü
Δ	İleri fark operatörü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\sum$	Toplam operatörü
$\prod$	Çarpım operatörü
$x^{(k)}$	Faktöriyel polinomu
Δ^n	$\Delta^{n-1}(\Delta)$
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
λ	Karakteristik denklemin kökü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar

Bölüm 1

GİRİŞ

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır, zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların pek çoğu ayrık (kesikli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluşturur. Daha da önemlisi, fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin benzeri olan bir fark denklemi "ghost" çözümlere veya kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için söz konusudur. Sonuç olarak, fark denklemleri teorisinin ilginç olduğunu ve yakın gelecekte daha fazla öneme sahip olacağını gözlemleyebiliriz. Böylece, fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle, salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır. Ladas 1990 yılındaki çalışmasında

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

$p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer, otonom, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir. Erbe ve Zhang 1989 yılındaki çalışmalarında

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere lineer, otonom olmayan, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Yine aynı yıl 1989 yılında, Ladas, Philos ve Sficas yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Diferensiyel denklemler ile bu denklemlerin ayrık benzerleri olan fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılıkları arasında ilgi çekici benzerlikler vardır. Ancak, bu her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin;

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \tag{1.3}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(- \int_{t_0}^{t} p(s) ds \right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Fakat (1.2) fark denklemi $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p_j) \right] x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm $\forall j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı çözüme sahiptir. Daha sonraki yıllarda, örneğin 1994 yılında Yu, Zhang ve Wang, 2001 yılında Tang ve Zhang çalışmalarında (1.2) fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeni kriterler elde etmişlerdir. Ayrıca, 1993 yılında Yu, Zhang ve Qian, 2000 yılında Yu ve Tang (1.2) fark denkleminde p_n nin salınımlı bir dizi olması durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir.

Fark denklem çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili olarak literatürde bulabildiğimiz ilk çalışmalardan birisinde Ladas, Philos ve Sficas 1989 yılında,

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_{n-k} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

p_n negatif olmayan reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere, lineer gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir. Bunun sonucunda (1.4) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

yeter şartını elde etmişlerdir. 2001 yılında Tang ve Liu çalışmalarında

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

p_n negatif olmayan reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $0 < \alpha < 1$ olması durumunda yani sublineer durumunda (1.5) lineer olmayan gecikmeli fark denklemi salınımlılığı için gerek ve yeter şart olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$$

koşulunu elde etmişler ve $\alpha > 1$ durumunda yani superlineer durumunda ise yeter şartlar elde etmişlerdir. 2002 yılında Zhang çalışmasında

$$\Delta(x_n - p x_{n-l}) + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

q_n negatif olmayan reel sayı dizisi, k ve l birer pozitif tamsayı, $0 < \alpha < 1$ ve $0 \leq p < 1$ olmak üzere (1.6) neutral lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$$

eşitliğini elde etmişlerdir. 2003 yılında Thandapani, Arul ve Raja yapmış oldukları çalışmada

$$\Delta(y_n + h_n y_{n-k}) + \delta q_n y_{n-l}^{\alpha} = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

$\delta = \pm 1$ ve α pozitif tek tamsayıların bir oranı olmak üzere aşağıdaki şartlar altında (1.7) neutral lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin salınımlılık davranışlarını incelemişlerdir.

(c_1) $\{h_n\}$ pozitif bir reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı,

(c_2) $\{q_n\}$ pozitif bir reel sayı dizisi ve l herhangi bir tamsayı,

olması durumunda ve (i) $\delta = 1$, $0 < \alpha < 1$ ve $l > k$, (ii) $\delta = -1$, $\alpha > 1$ ve l negatif bir tamsayı, şartları altında (1.7) neutral lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin salınımlı olması için yeter şart olarak

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \min\left\{\frac{q_n}{1 + h_{n-l+k}^{\alpha}}, \frac{q_{n-k}}{1 + h_{n-l}^{\alpha}}\right\} = \infty$$

şartını elde etmişlerdir. Ayrıca yine bu çalışmada

$$\Delta(y_n + h_n y_{n-k}) + \delta q_n f(y_{n-l}) = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

denkleminin salınımlılığı için yukardaki şartlara ek olarak aşağıdaki şartlar verilmiştir.

(c_3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$,

(c_4) Bir $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki $u \in \mathbb{R}$ de $\varphi(u)$ azalmayan, $u \neq 0$ için $u\varphi(u) > 0$ ve $uv > 0$ için

$$|\varphi(u + v)| \leq |f(u) + f(v)|$$

dir.

(c_5) Bir $\varpi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki $u > 0$ için $|f(uv)| \leq \varpi(u)\,|f(v)|$ ve $v \in \mathbb{R}$ dir.

Bu şartlar altında (1.8) neutral lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümünün salınımlı olması için yeter şart olarak $\{\lambda_n\}$ bir reel sayı dizisi ve $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$$Q_n = \min\left\{\lambda_n q_n,\ \frac{|1-\lambda_{n-k}|\, q_{n-k}}{\varpi(h_{n-l})}\right\}$$

elde edilmiştir. Bu çalışmanın üçüncü bölümünde 1997 yılında Agarwal, Thandapani ve Wong tarafından yapılan yüksek mertebeden neutral fark denklemlerinin salınımlılığı isimli çalışma esas alınmıştır. Bu çalışmada Agarwal, Thandapani ve Wong

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-k}) + q_n f(y_{n-l}) = 0\ ,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

denkleminin çözümünün salınımlılık davranışını incelemişlerdir. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyon, K pozitif bir sabit olmak üzere $u, v > 0$ için

$$-F(-uv) \geq F(uv) \geq KF(u)F(v)$$

eşitsizliği sağlansın ve $u \neq 0$ için $f(u) \geq |F(u)|\,,\ \frac{F(u)}{u} \geq \gamma > 0$ ve $uF(u) > 0$ olsun. Bu durumda (1.9) denkleminin çözümünün salınımlılığı için aşağıdaki şartların varlığı kabul edilmiştir.

(H_1) $0 \leq p_n < 1$;

(H_2) $0 \leq p_n \leq P_1 < 1$, burada P_1 bir sabit;

(H_3) $-1 < -P_2 \leq p_n \leq 0$, burada $P_2 > 0$ bir sabit;

(H_4) $\liminf\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{s=n-l}^{n-1} q_s F\left((1-p_{s-l})\left(\frac{s-l}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right)\right] > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1}\left(\frac{1}{K^2\gamma F(1/(m-1)!)}\right)$;

(H_5) $\liminf\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{s=n-l}^{n-1} q_s F\left(\left(\frac{s-l}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\right)\right] > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1}\left(\frac{1}{K^2\gamma F(M)}\right),\ \ M \in (0,1)$;

(H_6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$.

Buradan görülür ki üçüncü bölümde çalışmış olduğumuz (1.9) denkleminin özel hali olan

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-l}) + q_n y_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

denkleminin çözümünün salınımlılığı için elde etmiş olduğumuz kriterler daha hassastır.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde ise 2000 yılında Agarval ve Grace tarafından yapılmış olan çalışma temel alınmıştır. Bu çalışmada Agarwal ve Grace

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + F(n, x_{n-k}, \Delta x_{n-h}) = 0, \quad m \text{ çift} \tag{1.10}$$

$\{p_n\}$ bir reel sayı dizisi $0 \leq p_n < 1$, $F : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, k ve h da birer pozitif tam sayı olmak üzere $\lambda > 0$ ve $\mu \geq 0$ için

$$F(n, x, y)sgn(x) \geq q_n \left|x\right|^{\lambda} \left|y\right|^{\mu} \text{ ve } xy \neq 0$$

şartı altında (1.10) denkleminin çözümünün salınımlılığı incelemişlerdir. Ayrıca bu çalışmada

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n x_{n-k} = 0, \quad m > 2 \tag{1.11}$$

yüksek mertebeden lineer gecikmeli fark denkleminin çözümünün salınımlılığı m'nin çift olması durumunda incelenmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad m > 2$$

yüksek mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümünün salınımlılık davranışı m hem çift hem de tek olduğunda $\alpha \in (0, 1)$ için denklemin sublineer olması durumunda ve $\alpha \in (1, \infty)$ için denklemin süperlineer olması durumunda incelenmiştir.

Bölüm 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, doktora tezimizde ihtiyaç duyacağımız, bilinen bazı tanım, teorem ve lemmaları vereceğiz. İlk önce fark analizi ve fark denklemleri tanıtılacak ve daha sonra fark denklemlerinin çözümleri hakkında bilgiler verilecektir. Son olarak fark denklemlerinin salınımlılığı hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi ve Genel Tanımlar

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n fonksiyonu için kaydırma (öteleme) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 1999, Agarwal 2000).

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x_n$ i hesaplamak için I özdeşlik operatörü olmak üzere, $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned}\Delta^k x_n &= (E-I)^k x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \tbinom{k}{i} E^{k-i} x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \tbinom{k}{i} x_{n+k-i}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \tbinom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \tag{2.1}$$

ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) k ıncı mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.2. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 7x_{n+1} = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3. Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.2}$$

formunda verilirse k ıncı mertebeden olan (2.1) fark denklemine **lineerdir** denir.

Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.2) fark denklemine **homogen olmayan**, lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde verilirse (2.3) fark denklemine **homogen**, lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

2.2 Lineer Fark Denklemleri Teorisi

Bu kısımda k ıncı mertebeden lineer fark denklemleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler verilecektir. k ıncı mertebeden, homogen olmayan, lineer fark denklemini

$$x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn} x_n = g_n \tag{2.4}$$

formunda yazabiliriz. Burada p_{in} ve g_n, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.1. Aşağıdaki başlangıç değer problemi bir tek x_n çözümüne sahiptir

$$x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn} x_n = g_n$$

$$x_{n_0} = a_0 \,,\; x_{n_0+1} = a_1 \,, \ldots ,\; x_{n_0+k-1} = a_{k-1}$$

(Elaydi 1999).

Şimdi (2.4) fark denkleminin

$$x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn} x_n = 0 \tag{2.5}$$

şeklindeki lineer, homogen şeklini yazalım ve aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

Tanım 2.2.1. Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sabitleri var ise $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına **lineer bağımlıdır** denir.

Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

eşitliği sadece $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına **lineer bağımsızdır** denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.2. (2.5) fark denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinin kümesine, **temel çözümler kümesi** denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.3. $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{rn}$ çözümlerinin Casoration determinantı veya kısaca Casoration, C_n ile gösterilir ve

$$C_n = \det \begin{pmatrix} x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{rn} \\ x_{1(n+1)} & x_{2(n+1)} & \ldots & x_{r(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1(n+r-1)} & x_{2(n+r-1)} & \ldots & x_{r(n+r-1)} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ile verilir. Casoration determinantı diferensiyel denklemlerdeki wronskiyenin diskret benzeridir (Elaydi 1999, Kelley ve Peterson 1991).

Lemma 2.2.1. **(Abel Lemması)** $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}$ çözümleri (2.5) fark denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda Casoration determinantı $n \geq n_0$ için

$$C_n = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_{ki} \right) C_{n_0} \tag{2.7}$$

ile verilir (Elaydi 1999).

Teorem 2.2.2. (2.5) fark denkleminin $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}$ çözümlerinin, temel çözümler kümesi olması için gerek ve yeter şart, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ için $C_{n_0} \neq 0$ olmasıdır (Elaydi 1999).

Tanım 2.2.4. $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$, (2.5) fark denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda a_i ler keyfi sabitler olmak üzere (2.5) fark denkleminin genel çözümü $x_n = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_{in}$ ile verilir (Elaydi 1999).

2.3 Lineer Homogen Sabit Katsayılı Fark Denklemlerinin Çözümleri

Bu kısımda ilk önce k ıncı mertebeden sabit katsayılı, lineer, homogen fark denkleminin çözümleri hakkında, daha sonrada k ıncı mertebeden lineer, homogen olmayan fark denkleminin çözümleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremleri hatırlatacağız. Şimdi aşağıdaki k ıncı mertebeden fark denklemini ele alalım.

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = 0 \tag{2.8}$$

Burada p_i ler sabit ve $p_k \neq 0$ dır. (2.8) denkleminde λ^n i çözüm kabul edip denklemde yerine yazarsak

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0 \tag{2.9}$$

denklemi bulunur. Buna (2.9) fark denkleminin **karakteristik denklemi** ve λ lara ise (2.9) denkleminin **karakteristik kökleri** denir. (2.8) fark denkleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak üç durum sözkonusudur;

1.Durum: (2.9) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ ifadesi (2.8) fark denkleminin temel çözümler kümesi olur ve (2.8) in genel çözümü, a_i ler keyfi sabitler olmak üzere

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n \tag{2.10}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

2.Durum: (2.9) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ kökleri reel ve sırasıyla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ katlı ise (2.8) denklemini

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\ldots(E-\lambda_r)^{m_r}x_n = 0 \tag{2.11}$$

şeklinde yazabiliriz. $(E-\lambda_i)^{m_i}x_n = 0$, $1 \leq i \leq r$ denkleminin temel çözümler kümesi $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$ olduğundan (2.11) in temel çözümler kümesi $G = \bigcup\limits_{i=1}^{r} G_i$ olur ve (2.11) in genel çözümü

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n(a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \ldots + a_{im_i-1}n^{m_i-1}) \tag{2.12}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

3.Durum: (2.9) karakteristik denklemi $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ kompleks köklerine ve $\lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \ldots \neq \lambda_k$ şeklindeki reel köklere sahip olsun. Bu durumda genel çözüm

$$x_n = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + \ldots + c_k(\lambda_k)^n$$

şeklinde olur. Burada $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$, $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$ olmak üzere

$$x_n = r^n[a_1\cos(n\theta) + a_2\sin(n\theta)] + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + \ldots + c_k(\lambda_k)^n \tag{2.13}$$

olur ve (2.13) de $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $a_1 = c_1 + c_2$, $a_2 = i(c_1 - c_2)$, $w = \tan^{-1}(\frac{a_2}{a_1})$ alarak genel çözümü

$$x_n = Ar^n\cos(n\theta - w) + c_3(\lambda_3)^n + c_4(\lambda_4)^n + \ldots + c_k(\lambda_k)^n \tag{2.14}$$

şeklinde yazarız (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

Örnek 2.3.1. $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

şeklinde olur ve karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ olarak bulunur. Böylece denklemin genel çözümünü

$$x_n = (a_0 + na_1)2^n + b_1 3^n$$

şeklinde yazarız. Verilen başlangıç şartlarını denklemde yerine yazarsak $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ ve $b_1 = -3$ bulunur. Böylece problemin çözümü

$$x_n = (3 + 2n)2^n - 33^n$$

olur.

Şimdi k ıncı mertebeden lineer, homogen olmayan

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.15}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır. (2.15) fark denkleminin çözümü, homogen kısmın genel çözümü x_{cn} ve homogen olmayan kısmın bir özel çözümü x_{pn} olmak üzere $x_n = x_{cn} + x_{pn}$ ile verilir. Aşağıdaki teorem bu gerçeği ifade eder.

Teorem 2.3.1. (2.15) fark denkleminin genel çözümü

$$x_n = x_{pn} + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$$

şeklinde verilir. Burada $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$ (2.15) fark denkleminin homogen kısmının temel çözümler kümesidir (Elaydi 1999).

(2.15) fark denklemini belirsiz katsayılar metodu ile çözerken g_n in farklı durumlarında özel çözümler genel olarak aşağıdaki şekilde aranır;

a) $g_n = a^n$ ise x$_{pn} = c_1 a^n$

b) $g_n = n^k$ ise $x_{pn} = c_0 + c_1 n + \ldots + c_k n^k$

c) $g_n = n^k a^n$ ise $x_{pn} = c_0 a^n + c_1 n a^n + \ldots + c_k n^k a^n$

d) $g_n = \sin b_n, \cos b_n$ ise $x_{pn} = c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$

e) $g_n = a^n \sin b_n, a^n \cos b_n$ ise $x_{pn} = (c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn))a^n$

f) $g_n = a^n n^k \sin b_n, a^n n^k \cos b_n$ ise $x_{pn} = (c_0 + c_1 n + \ldots + c_k n^k) a^n \sin(bn) + (d_0 + d_1 n + \ldots + d_k n^k) a^n \cos(bn)$.

2.4 Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı

Bu kısımda fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin salınımlılığı ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremler verilecek.

Tanım 2.4.1. Eğer her pozitif N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında **salınımlıdır** denir. Aksi halde x_n çözümüne **salınımlı olmayan** çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 1999).

Tanım 2.4.2. k ıncı mertebeden bir fark denklem sisteminin bir $\{x_n\}$ çözümü $x_n = [x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^r]^T$ olsun. Eğer her bir $\{x_n^i\}$ bileşeni salınımlı ise $\{x_n\}$ çözümüne **salınımlıdır** denir. Diğer durumda yani, bir $\{x_n^i\}$ bileşeni belli bir yerden sonra pozitif ya da negatif ise $\{x_n\}$ çözümüne salınımlı olmayan bir çözüm denir. Burada $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_n \in \mathbb{R}^r$ dir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.4.1. $k, l \in N$ ve $j = -k, \ldots, l$ için $p_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{j=-k}^{l} p_j x_{n+j} = 0 \ , \ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) (2.16) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) (2.16) fark denklemine ait

$$\lambda - 1 + \sum_{j=-k}^{l} p_j \lambda^j = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif kökü yoktur (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.4.2. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \tag{2.17}$$

şeklindeki $(k+1)$ inci mertebeden otonom fark denklemini gözönüne alalım. Bu durumda (2.17) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

(i) $k = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{\ldots, -3, -2\} \bigcup \{1, 2, \ldots\}$ ise $p > \dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

(Györi ve Ladas 1991, Ladas vd 1989).

Teorem 2.4.3. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty \tag{2.19}$$

dur (X. H. Tang ve Yujı Lıu 2001).

İspat. ($\Rightarrow$:) Aksini kabul edelim. Yani (2.18) denkleminin belirli bir n den sonraki pozitif çözümü $\{x_n\}$ olsun. Bu durumda bir $n_1 > 0$ tam sayısı vardır öyle ki

$$x_{n-k} > 0 \text{ ve } x_{n+1} - x_n \leq 0, \ n \geq n_1 \tag{2.20}$$

dır. Açıktır ki (2.18), (2.19) eşitliklerinden ve (2.20) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

bulunur ve

$$x_n^{1-\alpha} - x_{n+1}^{1-\alpha} \geq (1-\alpha)x_n^{-\alpha}(x_n - x_{n+1}) \geq (1-\alpha)p_n,\ n \geq n_1$$

elde edilir. Buradan

$$x_{n_1}^{1-\alpha} \geq (1-\alpha)\sum_{n=n_1}^{\infty} p_n$$

olduğu görülür. Bu da (2.19) eşitliği ile çelişir.

($\Leftarrow$:) Aksini kabul edelim. Yani (2.19) eşitliği doğru olmasın. Bu durumda bir $N > k$ tamsayısı vardır öyle ki

$$\sum_{n=N-k}^{\infty} p_n \leq \frac{1}{2}$$

dir. Bir $\{y_n\}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$y_n = \frac{1}{2} + \sum_{i=n}^{\infty} p_i, \quad n \geq N-k$$

Açıktır ki $n \geq N-k$ için $1/2 \leq y_n \leq 1$ ve

$$y_n \geq \frac{1}{2} + \sum_{i=n}^{\infty} p_i y_{i-k}^{\alpha}, \quad n \geq N$$

dır. Buradan

$$x_n = \frac{1}{2} + \sum_{i=n}^{\infty} p_i x_{i-k}^{\alpha}, \quad n \geq N$$

eşitliği belirli bir n den sonra bir $\{x_n\}$ pozitif çözümüne sahiptir. Açıktır ki $\{x_n\}$ pozitif çözümü belirli bir n den sonra (2.18) denkleminin pozitif çözümüdür. Bu da (2.18) denkleminin her çözümünün salınımlı olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.4.1. Kabul edelim ki yeterince büyük n için

$$(p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+k-1}) \neq 0 \tag{2.21}$$

olsun. Bu durumda (2.18) eşitliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir ancak ve ancak

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

eşitsizliğide belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir (X. H. Tang ve Yujı Lıu 2001).

Lemma 2.4.2. Kabul edelim ki (2.21) sağlansın ve yeterince büyük n için

$$p_n \leq q_n$$

olsun. Eğer (2.18) denkleminin her çözümü salınımlı ise bu durumda

$$x_{n+1} - x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.22}$$

eşitliğininde her çözümü salınımlıdır (X. H. Tang ve Yujı Lıu 2001).

Teorem 2.4.4. Kabul edelim ki $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

(i) Eğer bir $\lambda > k^{-1} \ln \alpha$ varsa öyle ki

$$\liminf_{n \to \infty} [p_n \exp(-e^{\lambda n})] > 0 \tag{2.23}$$

ise bu durumda (2.18) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) Eğer (2.21) sağlanır ve bir $\mu < k^{-1} \ln \alpha$ varsa öyle ki

$$\limsup_{n \to \infty} [p_n \exp(-e^{\mu n})] < \infty \tag{2.24}$$

ise bu durumda (2.18) denklemi belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir (X. H. Tang ve Yujı Lıu 2001).

Teorem 2.4.5. Aşağıdaki birinci mertebeden neutral fark denklemini ele alalım.

$$\Delta(y_n + h_n y_{n-k}) + \delta q_n y_{n-l}^{\alpha} = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.25}$$

Burada $\{h_n\}$ ve $\{q_n\}$ birer pozitif reel sayı dizisi, k bir pozitif tamsayı ve l de herhangi bir tamsayı olmak üzere

(i) $\delta = +1$, $0 < \alpha < 1$ ve $l > k$;

(ii) $\delta = -1$, $\alpha < 1$ ve l bir negatif tamsayı

şartlar altında

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \min\left\{\frac{q_n}{1+h_{n-l+k}^{\alpha}},\ \frac{q_{n-k}}{1+h_{n-l}^{\alpha}}\right\} = \infty$$

ise (2.25) denkleminin her çözümü salınımlıdır (E. Thandapani, R. Arul, P. S. Raja 2002).

Teorem 2.4.6. $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{s=n-l}^{n-1} q_s > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1}$$

ise

$$\Delta v_n + q_n v_{n+l} \geq 0 \tag{2.26}$$

eşitsizliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (E. Thandapani, R. Arul, P. S. Raja 2002).

Teorem 2.4.7. $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{s=n}^{n+l-1} q_s > \left(\frac{l}{l+1}\right)^{l+1}$$

ise

$$\Delta v_n - q_n v_{n+l} \geq 0 \tag{2.27}$$

eşitsizliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (E. Thandapani, R. Arul, P. S. Raja 2002).

Teorem 2.4.8. $\{q_n\}$ bir pozitif reel sayı dizisi ve l de pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{2.28}$$

ise

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_{n-k} = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.29}$$

fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (G. Ladas, Ch. G. Philos, Y. G. Sficas 1989).

İspat. Kabul edelim ki (2.29) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{A_n\}$ olsun. Yani $\{A_n\}$ belirli bir n den sonra pozitif olsun. Bu durumda

$$A_{n+1} - A_n = -p_n A_{n-k} \leq 0$$

bulunur ve buradan $\{A_n\}$ nin pozitif sayıların azalan bir dizisi olduğu görülür. (2.28) denkleminden ve $\{A_n\}$ nin azalan olmasından

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_n \leq 0$$

yada

$$p_n \leq 1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

elde edilir. Bunun sonucun da

$$\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \leq \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} \left(1 - \frac{A_{i+1}}{A_i}\right) \tag{2.30}$$

bulunur.

$$\alpha = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{2.31}$$

olmak üzere (2.28) den yeterince büyük n için

$$\alpha < \beta \leq \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \tag{2.32}$$

olacak şekilde bir β sabiti seçebiliriz. Böylece (2.30) dan yeterince büyük n için

$$\beta \leq \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} \left(1 - \frac{A_{i+1}}{A_i}\right) \tag{2.33}$$

elde edilir. (2.33) gözönüne alınarak, aritmetik ve geommetrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten yeterince büyük n için

$$\begin{aligned}\beta &\leq \tfrac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1-\tfrac{A_{i+1}}{A_i}\right) = 1-\tfrac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\tfrac{A_{i+1}}{A_i} \\ &\leq 1-\left(\prod_{i=n-k}^{n-1}\tfrac{A_{i+1}}{A_i}\right)^{1/k} = 1-\left(\tfrac{A_{n+1}}{A_{n-k}}\right)^{1/k}\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da yeterince büyük n için

$$\left(\frac{A_{n+1}}{A_{n-k}}\right)^{1/k} \leq 1-\beta \tag{2.34}$$

bulunur. Buda gösterir ki $0<\beta<1$ dir. Şimdi görülür ki

$$\max_{0\leq\lambda\leq 1}[(1-\lambda)\lambda^{1/k}] = \frac{k}{(k+1)^{1+\frac{1}{k}}} = \alpha^{\frac{1}{k}}$$

dır. Sonuç olarak $0<\lambda\leq 1$ için

$$1-\lambda \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\lambda^{\frac{-1}{k}}$$

elde edilir ve (2.34) den yeterince büyük n ler için

$$\frac{\beta}{\alpha}A_n \leq A_{n-k} \tag{2.35}$$

dır. (2.35) eşitsizliğinin (2.29) denkleminde kullanılmasıyla yeterince büyük n ler için

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 A_n \leq A_{n-k}$$

elde edilir. Bundan yararlanarak her $m=1,2,\ldots$ için bir N_m vardır öyle ki $n\geq N_m$ için

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m A_n \leq A_{n-k} \tag{2.36}$$

bulunur. (2.32) den görülür ki yeterince büyük n için

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \geq k\beta$$

dır. Böylece yeterince büyük n için $M \geq k\beta > 0$ olmak üzere

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq M \tag{2.37}$$

dir. Aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak sekilde m yi seçelim.

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m > \left(\frac{2}{M}\right)^2 \tag{2.38}$$

Bu eşitsizliği seçmek mümkündür. Çünkü (2.32) den $\beta > \alpha$ dır. Bu durumda yeterince büyük n için $n \geq n_0$ olmak üzere (2.38) de seçilen özel m için (2.36) sağlanır. Aynı zamanda (2.32) ve (2.37) sağlanır ve $n \geq n_0$ için $\{A_n\}$ azalandır. Şimdi (2.37) den ve $n \geq n_0 + k$ için bir $n - k \leq n^* \leq n$ olacak şekilde n^* tam sayısı vardır öyle ki

$$\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i \geq \frac{M}{2} \text{ ve } \sum_{i=n^*}^{n} p_i \leq \frac{M}{2}$$

dir. (2.29) denkleminden ve $\{A_n\}$ nin azalan olması gerçeğinden

$$\begin{aligned} A_{n^*-1} - A_{n-k} &= \sum_{i=n-k}^{n^*} (A_{i+1} - A_i) \\ &= -\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i A_{i-k} \\ &\leq -\left(\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i\right) A_{n^*-k} \\ &\leq -\tfrac{M}{2} A_{n^*-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{M}{2} A_{n^*-k} \leq A_{n-k} \tag{2.39}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_{n^*} &= \sum_{i=n^*}^{n} (A_{i+1} - A_i) \\ &= -\sum_{i=n^*}^{n} p_i A_{i-k} \\ &\leq -\left(\sum_{i=n^*}^{n} p_i\right) A_{n^*-k} \\ &\leq -\tfrac{M}{2} A_{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{M}{2}A_{n-k} \leq A_{n^*} \tag{2.40}$$

bulunur. (2.39) ve (2.40) dan

$$\left(\frac{M}{2}\right)^2 A_{n^*-k} \leq A_{n^*}$$

bulunur ki (2.36) nın uygulanmasıyla

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \leq \frac{A_{n^*-k}}{A_{n^*}} \leq \left(\frac{2}{M}\right)^2$$

elde edilir. Bu da (2.38) ile çelişir ki böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.4.8. Kabul edelim ki $0 \leq p < 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$\Delta(x_n - px_{n-l}) + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$$

dur (G. Zhang 2002).

Lemma 2.4.3. $1 \leq m \leq n-1$ olsun ve $u(k)$ fonksiyonuda $\mathbb{N}(a)$ da tanımlansın. Bu durumda,

(i) $\liminf\limits_{k\to\infty} \Delta^m u(k) > 0$ ise, $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^i u(k) = \infty$,

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} \Delta^m u(k) < 0$ ise, $0 \leq i \leq m-1$ olmak üzere $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta^i u(k) = -\infty$

dur (R. P. Agarwal, 2000).

Bölüm 3

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NEUTRAL GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK SONUÇLARI

3.1 Yüksek Mertebeden Liner Olmayan Neutral Gecikmeli Fark Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılık Analizi

Çalışmanın bu kısmında

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-l}) + q_n y_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan neutral gecikmeli fark denklemi ele alınmıştır. Burada Δ operatörü $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ şeklinde tanımlanan bilinen fark operatörü, k ve l birer pozitif tamsayı, $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri ve $\alpha \in (0,1)$ pozitif tek tamsayıların bir oranıdır.
Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılık davranışlarıyla ilgili olarak bir çok çalışma yapılmıştır. 1997 yılında Agarwal, Thandapani ve Wong, 1999 yılında Agarwal ve Grace (3.1) denkleminden farklı olan yüksek mertebeden lineer olmayan neutral fark denlemlerinin çözümünün salınımlılık davranışlarını incelemişlerdir. 2001 yılında Tang ve Liu aşağıdaki formda olan birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümünün salınımlılık davranışlarını araşırmışlardır.

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} = 0$$

Burada $\{p_n\}$ negatif olmayan reel terimli dizi, k pozitif tam sayı ve $\alpha \in (0,\infty)$ pozitif tek tamsayıların bir oranıdır. 2003 yılında Thandapani ve diğerleri

$$\Delta(y_n + h_n y_{n-k}) + \delta q_n y_{n-l}^{\alpha} = 0$$

neutral gecikmeli fark denklemini incelemişlerdir. Burada $\delta = \pm 1$, α pozitif tek tamsayıların bir oranı ve $\{h_n\}, \{q_n\}$ pozitif reel dizilerdir.
$\rho = \max\{k, l\}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümü; $n \geq 0$ için (3.1) denklemini sağlayan ve bütün $n \geq -\rho$ için tanımlı olan bir $\{y_n\}$ reel dizisidir. (3.1) in bir çözümü; belli bir n den sonra ya hep negatif yada hep pozitif olmuyorsa bu çözüm salınımlıdır. Aksi halde salınımlı değildir.
Aşağıda vereceğimiz teoremlerde (3.1) denkleminin çözümünün salınımlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir. Bunun için aşağıdaki şartların var olduğunu kabul edelim.

(C_1) $0 \leq p_n < 1$;

(C_2) $0 \leq p_n \leq P_1 < 1$, burada P_1 bir sabit;

(C_3) $-1 < -P_2 \leq p_n \leq 0$, burada $P_2 > 0$ bir sabit;

(C_4) $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \left[(1 - p_{n-k})(n-k)^{m-1}\right]^{\alpha} = \infty$;

(C_5) $\sum_{n=0}^{\infty} q_n[(n-k)^{(m-1)}]^{\alpha} = \infty$;

(C_6) $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty$.

Vereceğimiz teoremlerde (3.1) denkleminin çözümünün salınımlılık kriterlerini elde etmek için aşağıdaki lemmalar kullanılmıştır.

Lemma 3.1.1. Kabul edelimki $\alpha \in (0,1)$ pozitif tek tamsayıların bir oranı ve l pozitif bir tamsayı olsun. Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty \tag{3.2}$$

ise

$$\Delta u_n + q_n u_{n-l}^{\alpha} \leq 0$$

fark eşitsizliği belli bir n den sonra pozitif çözüme sahip değildir (X. H. Tang ve Yujı Lıu 2001).

Lemma 3.1.2. (Ayrık Kneser Teoremi) $n \geq a \in \mathbb{N}$ için z_n tanımlı olsun. Burada $n \geq a$ için $\Delta^m z_n$ sabit işaretli olmak üzere $z_n > 0$ ve z_n özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda $0 \leq j \leq m$ olmak üzere $\Delta^m z_n \leq 0$ için $(m+j)$ tek ve $\Delta^m z_n \geq 0$ için $(m+j)$ çift olacak şekilde bir j tamsayısı vardır öyle ki

$$j \leq m-1 \text{ ise } (-1)^{j+i}\Delta^i z_n > 0; \;\; n \geq a, \;\; j \leq i \leq m-1$$

ve

$$j \geq 1 \text{ ise } \Delta^i z_n > 0; \;\; n \geq a, \; 1 \leq i \leq j-1$$

dir (R. P. Agarwal, 2000).

İspat. İspat için iki durum söz konusudur.

Durum 1. $n \geq a \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m z_n \leq 0$ olsun. İlk olarak $n \geq a \in \mathbb{N}$ için $\Delta^{m-1} z_n > 0$ olduğunu ispatlayalım. Eğer bunun aksini düşünürsek $\mathbb{N}(a)$ da

$n_1 \geq a$ sayısı vardır öyle ki

$$\Delta^{m-1} z_{n_1} \leq 0$$

dır. $\Delta^{m-1} z_n$ azalan olduğundan $\mathbb{N}(a)$ da sabit olarak tanımlanamaz. Bu durumda bir $n_2 \in \mathbb{N}(n_1)$ vardır öyle ki

$$\Delta^{m-1} z_n \leq \Delta^{m-1} z_{n_2} \leq \Delta^{m-1} z_{n_1} \leq 0, \text{ bütün } n \in \mathbb{N}(n_2)$$

dır. Fakat Lemma 2.4.3'den

$$\lim_{k\to\infty} z_n = -\infty$$

bulunur. Bu da $z_n > 0$ olması ile çelişir. Böylece $\mathbb{N}(a)$ da $\Delta^{m-1} z_n > 0$ dır ve bir yeterince küçük j sayısı vardır öyle ki $m + j$ toplamı tek, $0 \leq j \leq m-1$ ve

$$(-1)^{j+i} \Delta^i z_n > 0; \;\; n \geq a, \;\; j \leq i \leq m-1$$

dir. Şimdi de $j > 1$ ve

$$\Delta^{j-1} z_n < 0, \;\; n \in \mathbb{N}(a)$$

olsun. Yine Lemma 2.4.3'den

$$\Delta^{j-2} z_n > 0, \;\; n \in \mathbb{N}(a)$$

bulunur. Bu iki eşitsizliğin sonucu olarak,

$$(-1)^{j-2+i} \Delta^i z_n > 0; \;\; n \geq a, \;\; j-2 \leq i \leq m-1$$

elde edilir. Bu da j'nin tanımıyla çelişir. Böylece $\Delta^{j-1} z_n < 0$, $n \in \mathbb{N}(a)$ eşitsizliği yanlıştır ve $\Delta^{j-1} z_n \geq 0$ dır. $(-1)^{j+i} \Delta^i z_n > 0; \;\; n \geq a, \;\; j \leq i \leq m-1$ eşitsizliğinden $\Delta^{j-1} z_n$ azalmayandır ve böylece

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{j-1} z_n > 0$$

olur. Eğer $j > 2$ ise Lemma 2.4.3'den

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^i z_n = \infty,\ 1 \le i \le j-2$$

elde edilir. Böylece bütün büyük $n \in \mathbb{N}(a)$ ve $1 \le i \le j-1$ için

$$\Delta^i z_n > 0$$

dır. Böylece ispatın birinci kısmı tamamlanır.

Durum 2. $n \ge a \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m z_n \ge 0$ olsun. $n_3 \in \mathbb{N}(n_2)$ olsun öyle ki

$$\Delta^{m-1} z_{n_3} \ge 0$$

dır. Bu durumda $\Delta^{m-1} z_n$ azalmayan olduğundan sabit olarak tanımlanamaz ve bir $n_4 \in \mathbb{N}(n_3)$ sayısı vardır öyle ki bütün $n \in \mathbb{N}(n_4)$ ler için

$$\Delta^{m-1} z_n > 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^{m-1} z_n > 0$$

bulunur ve Lemma 2.4.3'den

$$\lim_{k\to\infty} \Delta^i z_n = \infty,\ 1 \le i \le j-2$$

elde edilir. Böylece bütün büyük $n \in \mathbb{N}(a)$ ve $1 \le i \le j-1$ için

$$\Delta^i z_n > 0$$

dır. Bu $m = j$ için teoremi sağlar. Bütün $n \in \mathbb{N}(a)$ için $\Delta^{m-1} z_n < 0$ olması durumunda Lemma 2.4.3'den bütün $n \in \mathbb{N}(a)$ için

$$\Delta^{m-2} z_n > 0$$

bulunur. İspatın bundan sonraki kısmı Durum 1'in benzeridir.

Lemma 3.1.3. $n \geq a \in \mathbb{N}$ için z_n tanımlansın ve $\Delta^m z_n \leq 0$ olmak üzere $z_n > 0$ olsun ve özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda yeterince büyük bir $n_1 \geq a \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$z_n \geq \frac{(n-n_1)^{m-1}}{(m-1)!}\Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1}n} \ ; \ \ n \geq n_1$$

dir. Burada j Lemma 3.1.2 deki gibi tanımlanmıştır. Ayrıca eğer z_n artan ise

$$z_n \geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{m-1} \Delta^{m-1} z_n \ ; \ \ n \geq 2^{m-1} n_1$$

dir (R. P. Agarwal, 2000).

İspat. Lemma 3.1.2 den söyleyebiliriz ki $\mathbb{N}(a)$ da $j \leq i \leq m-1$ olmak üzere

$$(-1)^{j+i-1}\Delta^i z_n > 0, \ j \leq i \leq m-1$$

olur ve bütün büyük $n \geq n_1 \in \mathbb{N}(a)$ için $1 \leq i \leq j-1$ olmak üzere

$$\Delta^i z_n > 0$$

dır. Bu eşitsizlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-2} z_n &= -\Delta^{m-2} z_\infty + \sum_{l=n}^{\infty} \Delta^{m-1} z_l \\
&\geq \sum_{l=n}^{2n} \Delta^{m-1} z_l \\
&\geq \Delta^{m-1} z_{2n(n)^{(1)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta^{m-3} z_n &= \Delta^{m-3} z_\infty - \sum_{l=n}^{\infty} \Delta^{m-2} z_l \\
&\geq \sum_{l=n}^{2n} (l)^{(1)} \Delta^{m-1} z_{2l} \\
&\geq \sum_{l=n}^{2n} (l-n)^{(1)} \Delta^{m-1} z_{2l} \\
&\geq \Delta^{m-1} z_{2^2 n} \tfrac{1}{2!}(n)^{(2)} \\
&\ldots \quad \ldots \\
\Delta^j z_n &\geq \Delta^{m-1} z_{2^{m-j-1}n} \tfrac{1}{(m-j-1)!}(n)^{(j-m-1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Delta^{j-1}z_n &= \Delta^{m-}z_{n_1}+\sum_{l=n_1}^{n-1}\Delta^m z_l\\ &\geq \sum_{l=n_1}^{n-1}\frac{1}{(m-j-1)!}(l-n_1)^{(j-m-1)}\Delta^{m-1}z_{2^{m-j-1}l}\\ &\geq \frac{1}{(m-j)!}(n-n_1)^{(j-m)}\Delta^{m-1}z_{2^{m-j-1}n}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $(j-1)$ kez tekrardan sonra

$$z_n \geq \frac{(n-n_1)^{m-1}}{(m-1)!}\Delta^{m-1}z_{2^{m-j-1}n}\ ;\ \ n\geq n_1$$

elde edilir.

3.2 (3.1) Denkleminin Salınımlılığı için Yeter Şartlar

Teorem 3.2.1. (**a**) (3.1) denkleminde m çift olsun. Eğer (C_1) ve (C_4) sağlanırsa, (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

(**b**) (3.1) denkleminde m tek olsun. Eğer (C_2) ve (C_5) sağlanırsa, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n\to\infty$ iken sıfıra gider.

İspat. (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n\geq n_0\geq N_0$ için $y_n>0$, $y_{n-l}>0$ ve $y_{n-k}>0$ dır.

$$z_n = y_n + p_n y_{n-l}$$

olmak üzere $n\geq n_0$ için $z_n\geq y_n>0$ ve

$$\begin{aligned}&\Delta^m(y_n+p_ny_{n-l})+q_ny_{n-k}^{\alpha}=0\\ &\Delta^m z_n+q_ny_{n-k}^{\alpha}=0\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\Delta^m z_n = -q_n y_{n-k}^{\alpha} < 0 \tag{3.2}$$

dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.2 den $m \geq 2$ için

$$\Delta^{m-1} z_n > 0\,, \quad n \geq n_0 \tag{3.3}$$

olur. İddia ediyoruz ki $\Delta z_n \leq 0$ dır. Eğer $m = 1$ ise, (3.1) denkleminden bu açıktır. $m \geq 2$ için bunun aksini kabul edelim. Yani $n \geq n_1 \geq n_0$ için $\Delta z_n > 0$ olsun. Bu durumda $n \geq n_2 \geq n_1$ için

$$\begin{aligned}(1-p_n)z_n &\leq z_n - p_n z_{n-l} \\ &= y_n + p_n y_{n-l} - p_n(y_{n-l} + p_{n-l} y_{n-2l}) \\ &= y_n + p_n y_{n-l} - p_n y_{n-l} - p_n p_{n-l} y_{n-2l} \\ &= y_n - p_n p_{n-l} y_{n-2l} \\ &\leq y_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. z_n pozitif ve artan olduğundan, Lemma 3.1.3 ve (3.4) eşitsizliği gözönüne alındığında

$$y_n \geq (1-p_n)z_n \geq \frac{(1-p_n)}{(m-1)!}\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \;\;,\;\; n \geq 2^{m-1} n_2 \tag{3.5}$$

bulunur. (3.5) eşitsizliğini kullanarak $n \geq n_2 \geq n_1$ için

$$q_n y_{n-k} \geq q_n \frac{(1-p_{n-k})}{(m-1)!}\left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_{n-k}$$

elde edilir. Buradan da

$$q_n y_{n-k}^{\alpha} \geq q_n \left(\frac{1-p_{n-k}}{(m-1)!}\right)^{\alpha}\left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)\alpha} (\Delta^{m-1} z_{n-k})^{\alpha}$$

olduğundan

$$\Delta^m z_n \leq -q_n \left(\frac{1-p_{n-k}}{(m-1)!}\right)^{\alpha}\left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)\alpha} (\Delta^{m-1} z_{n-k})^{\alpha}$$

yazılır. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta^m z_n + q_n \left(\frac{1-p_{n-k}}{(m-1)!}\right)^{\alpha}\left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)\alpha} (\Delta^{m-1} z_{n-k})^{\alpha} \leq 0$$

eşitsizliğinin bir pozif çözümü olduğu görülür. Eğer burada $\Delta^{m-1} z_n = w_n$ seçilirse,

$$\Delta w_n + q_n \left(\frac{1-p_{n-k}}{(m-1)!}\right)^{\alpha} \left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)\alpha} w_{n-k}^{\alpha} \leq 0$$

olur. Bu durum (C_4) şartından bu Lemma 3.1.1 ile çelişir. Dolayısıyla $\Delta z_n \leq 0$ dır.

Lemma 3.1.2 de $\Delta z_n \leq 0$ olduğundan $j = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$(-1)^i \Delta^i z_n > 0, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad n \geq n_0 \tag{3.6}$$

bulunur. Eğer m çift ise (3.6) eşitsizliği ile (3.3) eşitsizliği çelişir. Böylece Teoremin (a) kısmının ispatı tamamlanır.

Şimdi m tek olsun. Kabul edelim ki $n \to \infty$ iken y_n sıfıra gitmesin. $\Delta z_n \leq 0$ olduğu için $n \to \infty$ iken $z_n \downarrow c$ dır. Burada $0 < c < \infty$ dır. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ ve bir $n_3 > n_0$ tamsayısı vardır öyle ki

$$o < \varepsilon < c\frac{1-P_1}{1+P_1} < c$$

ve

$$c - \varepsilon < z_n \leq z_{n-l} < c + \varepsilon, \qquad n \geq n_3 \tag{3.7}$$

bulunur. Böylece (3.4) eşitsizliği ve (3.7) eşitsizliğinden $n \geq n_3$ için

$$\begin{aligned} y_n &\geq z_n - p_n z_{n-l} \\ &\geq z_n - P_1 z_{n-l} \\ &> (c-\varepsilon) - P_1(c+\varepsilon) \\ &> \tfrac{(c-\varepsilon)-P_1(c+\varepsilon)}{(c+\varepsilon)} z_n \\ &= c_1 z_n \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Burada

$$c_1 = [(c-\varepsilon) - P_1(c+\varepsilon)]/(c+\varepsilon) \in (0,1)$$

dır. j, Lemma 3.1.3 deki gibi tanımlansın, $n \geq n_4 \geq n_3$ için

$$z_n = \frac{z_n}{z_{2^{j+1-m}n}} z_{2^{j+1-m}n} > \frac{c-\varepsilon}{c+\varepsilon} z_{2^{j+1-m}n} = c_2 z_{2^{j+1-m}n} \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada $c_2 = (c-\varepsilon)/(c+\varepsilon) \in (0,1)$ dir. Lemma 3.1.3, (3.8) ve (3.9) eşitsizlikleri kullanılarak $n \geq n_5 \geq n_4$ için

$$\begin{aligned} y_n &> c_1 c_2 z_{2^{j+1-m}n} \\ &\geq c_1 c_2 \tfrac{(2^{j+1-m}n - n_5)^{(m-1)}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq \tfrac{c_1 c_2}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} (n - 2^m n_5)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $n \geq 2^{m+1} n_5 + m - 2$ için

$$\begin{aligned} y_n &\geq \tfrac{c_1 c_2}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} \tfrac{1}{2^{m-1}} n^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq c_3 \left(\tfrac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur. Burada

$$c_3 = c_1 c_2 2^{(j-m)(m-1)}/(m-1)! \in (0,1)$$

dır. (3.10) eşitsizliğinden $n \geq n_6 \geq n_5$ için

$$q_n y_{n-k} \geq q_n c_3 \left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_{n-k}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\Delta^m z_n \leq -q_n (c_3)^\alpha \left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} \left(\Delta^{m-1} z_{n-k}\right)^\alpha$$

bulunur. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n (n-k)^{\alpha(m-1)} (c_3)^\alpha \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} w_{n-k}^\alpha \leq 0$$

eşitsizliğinin bir pozif çözümü olduğu görülür. Bu durum, (C_5) şartından dolayı Lemma 3.1.1 ile çelişir. Böylece Teoremin (b) kısmının da ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2. Eğer (C_3) ve (C_5) sağlanırsa, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider.

İspat. (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n \geq n_0 \geq N_0$ için $y_n > 0$, $y_{n-l} > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ dır. $z_n = y_n + p_n y_{n-l}$ olmak üzere $n \geq n_0$ için $z_n \leq y_n$ ve aynı zamanda (3.2) eşitsizliği sağlansın.

İddia ediyoruz ki $\Delta y_n \leq 0$ dır. Eğer $m = 1$ ise (3.1) denkleminden bu açıktır. $m \geq 2$ için bunun aksini kabul edelim yani $n \geq n_1 \geq n_0$ için $\Delta y_n > 0$ olsun. Bu durumda (C_3) şartı dikkate alındığında $n \geq n_2 \geq n_1$ için

$$z_n \geq y_n + p_n y_n \geq (1 - P_2) y_n > 0 \tag{3.11}$$

elde edilir. y_n sınırsız olduğundan (3.11) den aynı zamanda z_n de sınırsızdır. Böylece $n \geq n_2$ için $\Delta z_n > 0$ dır. Lemma 3.1.3 den dolayı,

$$y_n \geq z_n \geq \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{n}{2^{m-1}} \right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \ ; \ \ n \geq 2^{m-1} n_2$$

elde edilir. Sonuç olarak yukarıdaki son eşitsizlikten $n \geq n_3 \geq n_2$ için

$$q_n y_{n-k} \geq q_n \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{n-k}{2^{m-1}} \right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_{n-k}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta^m z_n \leq -q_n (n-k)^{\alpha(m-1)} \left(\frac{1}{(m-1)!} \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{2^{m-1}} \right)^{\alpha(m-1)} (\Delta^{m-1} z_{n-k})^{\alpha}$$

bulunur. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta^m z_n + q_n (n-k)^{\alpha(m-1)} \left(\frac{1}{(m-1)!} \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{2^{m-1}} \right)^{\alpha(m-1)} (\Delta^{m-1} z_{n-k})^{\alpha} \leq 0$$

eşitsizliğinin bir pozitif çözümü olduğu görülür. Eğer $\Delta^{m-1} z_n = w_n$ alınırsa,

$$\Delta w_n + q_n (n-k)^{\alpha(m-1)} \left(\frac{1}{(m-1)!} \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{2^{m-1}} \right)^{\alpha(m-1)} w_{n-k}^{\alpha} \leq 0 \tag{3.12}$$

bulunur. Bu durum (C_5) şartından dolayı Lemma 3.1.1 ile çelişir. Böylece $\Delta y_n \leq 0$ dır. Sonuç olarak $n \to \infty$ iken $y_n \downarrow c$ dir. Burada $0 < c < \infty$ dur. z_n nin tanımından ve (C_3) şartından

$$\liminf_{n\to\infty} z_n = (1 + \liminf_{n\to\infty} p_n) c \geq (1 - P_2) c > 0$$

bulunur. Dolayısıyla z_n pozitiftir ve (3.3) eşitsizliği sağlanır. $z_n \leq y_n$ ve y_n artmayan olduğundan z_n de artmayandır. Böylece $n \to \infty$ iken $z_n \downarrow d$ dır. Burada $0 < d < \infty$ dur. $\varepsilon \in (0, d)$ verilsin. Bir $n_4 > n_0$ tam sayısı vardır öyle ki

$$d - \varepsilon < z_n < d + \varepsilon, \qquad n \geq n_4 \tag{3.13}$$

dır. j, Lemma 3.1.3 deki gibi tanımlansın. Bu durumda $n \geq n_5 \geq n_4$ için sırasıyla (3.13) eşitsizliğinin ve Lemma 3.1.3 ün kullanımıyla

$$\begin{aligned} z_n &= \tfrac{z_n}{z_{2^{j+1-m}n}} z_{2^{j+1-m}n} \\ &> \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} z_{2^{j+1-m}n} \\ &\geq \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} \tfrac{(2^{j+1-m}n-n_5)^{(m-1)}}{(m-1)!} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} \tfrac{1}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} (n - 2^m n_5)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 2^{m+1} n_5 + m - 2$ için

$$\begin{aligned} z_n &\geq \tfrac{d-\varepsilon}{d+\varepsilon} \tfrac{1}{(m-1)!} 2^{(j+1-m)(m-1)} \tfrac{1}{2^{m-1}} n^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \\ &\geq d_1 \left(\tfrac{n}{2^{m-1}}\right)^{(m-1)} \Delta^{m-1} z_n \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada

$$d_1 = 2^{(j-m)(m-1)}(d - \varepsilon)/\left[(d + \varepsilon)(m-1)!\right] \in (0, 1)$$

dır. (3.14) den $n \geq n_6 \geq n_5$ için

$$\Delta^m z_n \leq -q_n (d_1)^\alpha \left(\frac{n-k}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} \left(\Delta^{m-1} z_{n-k}\right)^\alpha \leq 0$$

bulunur. Eğer $\Delta^{m-1} z_n = w_n$ alınırsa

$$\Delta w_n + q_n (n-k)^{\alpha(m-1)} (d_1)^\alpha \left(\frac{1}{(m-1)!}\right)^\alpha \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} w_{n-k}^\alpha \leq 0$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliğinden ve yukarıdaki son eşitsizlikten $\{\Delta^{m-1} z_n\}$ in

$$\Delta w_n + q_n (n-k)^{\alpha(m-1)} (d_1)^\alpha \left(\frac{1}{(m-1)!}\right)^\alpha \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^{\alpha(m-1)} w_{n-k}^\alpha \leq 0 \tag{3.15}$$

eşitsizliğinin bir pozitif çözümü olduğu görülür. Bu durum (C_5) şartından Lemma 3.1.1 ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3. $p_n \equiv 1$ olsun ve (C_6) sağlansın.

(**a**) Eğer m çift ise, (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

(**b**) Eğer m tek ise, (3.1) denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ iken sıfıra gider.

İspat. (1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{y_n\}$ olsun. $n \geq n_0 \geq N_0$ için $y_n > 0$, $y_{n-l} > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ dır. $z_n = y_n + p_n y_{n-l}$ olmak üzere $n \geq n_0$ için $z_n \geq y_n > 0$ ve aynı zamanda (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri sağlansın. (3.1) denkleminde n_0 dan $(n-1)$'e kadar toplam alır ve (3.3) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\Delta^{m-1} z_{n_0} = \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s y_{s-k}^{\alpha} + \Delta^{m-1} z_n > \sum_{s=n_0}^{n-1} q_s y_{s-k}^{\alpha}$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s y_{s-k}^{\alpha} < \infty \tag{3.16}$$

bulunur. İddia ediyoruz ki,

$$\liminf_{n\to\infty} z_n > 0$$

ise

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s < \infty$$

dur. Bunu ispatlamak için aksini kabul edelim. Yani

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s = \infty$$

ve

$$L = \inf_{s \geq n_0} y_{s-k}^{\alpha} > 0$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} q_s y_{s-k}^{\alpha} \geq L \sum_{s=n_0}^{\infty} q_s = \infty$$

yazılır. Böylece elde dilen bu sonuç (3.16) ile çelişir.

Durum (a) : m çift olsun. Lemma 3.1.2 den görebiliriz ki j tekdir ve böylece $\Delta z_n > 0, n \geq n_0$ dır. Buradan $n \geq n_1 \geq n_0$ için

$$0 < z_n - z_{n-k} = y_n - y_{n-2k}$$

elde edilir ve $y_n > y_{n-2k}$, $n \geq n_1$ dır. Sonuç olarak

$$\liminf_{n\to\infty} y_n > 0$$

dır. Böylece (2.16) dan

$$\sum_{s=0}^{\infty} q_s < \infty$$

dur. Bu sonuçta (C_6) şartı ile çelişir.

Durum (b) : m tek olsun ve $n \to \infty$ iken y_n sıfıra gitmesin. Lemma 3.1.2 den görebiliriz ki j çifttir. Eğer $j \geq 2$ ise yine $\Delta z_n > 0, n \geq n_0$ olduğu görülür. Durum (a) daki gibi bir çelişki elde edilecektir. Eğer $j = 0$ ise Lemma 3.1.2 den $\Delta z_n < 0, n \geq n_0$ elde edilir. Böylece $n \to \infty$ iken $z_n \to \beta$ dır. Burada $0 < \beta < \infty$ dur. $\varepsilon \in (0, \beta)$ için bir $n_1 > n_0$ tam sayısı vardır öyle ki

$$z_n = y_n + y_{n-k} > \beta - \varepsilon > 0, \quad n \geq n_1$$

dir. Böylece

$$\liminf_{n\to\infty} y_n > 0$$

dır. Buradan

$$\sum_{s=0}^{\infty} q_s < \infty$$

olduğu görülür. Bu sonuçta (C_6) şartı ile çelişir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bölüm 4

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK SONUÇLARI

4.1 Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Gecikmeli Fark Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılık Analizi

Bu bölümde

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad m > 2 \tag{4.1}$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin çözümünün salınımlılık sonuçları araştırılacaktır. Burada Δ ileri fark operatörü, k pozitif bir tam sayı, $n \geq n_0 \geq 0$ için $0 \leq p_n < 1$ olmak üzere $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri ve $\alpha \in (0, \infty)$ pozitif tek tamsayıların bir oranıdır. Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Özellikle 2001 yılında Tang ve Liu

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} = 0$$

formdaki birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümünün salınımlılık davranışlarını araştırmışlardır. Burada $\{p_n\}$ neagtif olmayan sayıların bir dizisi, k pozitif bir tam sayı ve $\alpha \in (0, \infty)$ pozitif tek sayıların bir bölümü. 2000 yılında Agarwal ve Grace $\alpha = 1$ ve m nin çift olma durumu için (4.1) denkleminin çözümünün salınımlılık özelliklerini araştırmışlardır:
(4.1) denkleminin çözümünden $n \geq 0$ için (4.1) denklemini sağlayan ve bütün $n \geq -k$ için sağlanan bir reel $\{x_n\}$ dizisini anlıyoruz. (4.1) denkleminin bir çözümüne salınımlı diyebilmemiz için bu çözümün ne hep negatif ne de hep pozitif olmaması gerekir. Aksi takdirde çözüm salınımlı değildir.
Bu bölümde amacımız (4.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartları elde etmektir.
Bu şartları elde edebilmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız vardır.
Lemma 4.1.1. Kabul edelim ki yeterince büyük n için,

$$(p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+k-1}) \neq 0$$

olsun. Bu durumda

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemi belirli bir n den sonra bir pozitif çözüme sahiptir ancak ve ancak

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eşitsizliğide belirli bir n den sonra bir pozitif çözüme sahipse (G. Zhang ve Y. Gao 1999).

4.2 (4.1) Denkleminin m'nin Çift Olması Durumunda Salınımlılık Şartları

Teorem 4.2.1. $n \geq n_0 \geq 0$ için $\Delta p_n \leq 0$, $k > 1$, m bir pozitif çift tamsayı,

$$Q_n = \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j\right), \qquad \theta = \frac{1}{2^{(m-2)^2}}$$

ve

$$R_n = \sum_{j=n-k}^{n-1} q_j \left(\sum_{s=j-k}^{n-1} \frac{1}{(m-3)!} (s+m+k-3)^{(m-3)}\right)^{\alpha}$$

olmak üzere

$$C_n = \min\{Q_n, R_n\} > p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha}, \quad \text{yeterince büyük } n \text{ ler için}$$

olsun.

$$c_n = \min\left\{C_n - p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha}, \ \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{(m-1)^2}}\right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-1)} q_n\right\} \tag{4.2}$$

olmak üzere

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} = 0 \tag{4.3}$$

fark denklemi salınımlı ise (4.1) denklemi de salınımlıdır.

İspat. (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{x_n\}$ ve $n \geq n_0 \geq 1$ için $x_n > 0$ olsun. İlk olarak $\{\Delta^{m-1} x_n\}$ nin belirli bir n den sonra tek işaretli olduğunu iddia edelim. Bunun sonucunda kabul edelim ki $\{\Delta^{m-1} x_n\}$ salınımlı olsun. Bu durumda bir $N \geq n_0 + k$ vardır öyle ki

$$\Delta^{m-1} x_N < 0$$

dır. (4.1) denkleminde $n = N$ olmak üzere, (4.1) denklemini $\Delta^{m-1} x_N$ ile çarpalım. Bu durumda,

$$\Delta^m x_N \Delta^{m-1} x_N + p_N (\Delta^{m-1} x_N)^2 + q_N x_{N-k}^{\alpha} \Delta^{m-1} x_N = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\Delta^m x_N \Delta^{m-1} x_N = -p_N (\Delta^{m-1} x_N)^2 - q_N x_{N-k}^{\alpha} \Delta^{m-1} x_N$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$-q_N x_{N-k}^{\alpha} \Delta^{m-1} x_N \geq 0$$

olduğundan

$$\Delta^m x_N \Delta^{m-1} x_N = -p_N (\Delta^{m-1} x_N)^2 - q_N x_{N-k}^{\alpha} \Delta^{m-1} x_N \geq -p_N (\Delta^{m-1} x_N)^2$$

yazılır. Buradan

$$\Delta^m x_N \Delta^{m-1} x_N \geq -p_N (\Delta^{m-1} x_N)^2$$

$$\Delta^{m-1} x_{N+1} \Delta^{m-1} x_N \geq (1 - p_N)(\Delta^{m-1} x_N)^2 > 0$$

elde edilir. $\Delta^{m-1} x_N < 0$ olduğundan

$$\Delta^{m-1} x_{N+1} < 0.$$

olmalıdır. Buradan $n \geq N$ için $\Delta^{m-1} x_n < 0$ elde edilir. Bu da kabulümüz olan $\{\Delta^{m-1} x_n\}$ in salınımlılığı ile çelişir.

Bir sonraki adım olarak bir $N^* \geq n_0 + k$ sayısı vadır öyle ki

$$\Delta^{m-1} x_{N^*} = 0$$

dır. Yine (4.1) denkleminde $n = N^*$ alınırsa,

$$\Delta^m x_{N^*} + q_N x_{N^*-k}^{\alpha} = 0$$

olduğundan

$$\Delta^m x_{N^*} = -q_{N^*} x_{N^*-k}^{\alpha} \leq 0$$

bulunur. Böylece,

$$\Delta^m x_{N^*} \leq 0$$

$$\Delta^{m-1}x_{N^*+1} \leq \Delta^{m-1}x_{N^*} = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki durumda olduğu gibi elde edilen bu sonuçun kabulümüz olan $\{\Delta^{m-1}x_n\}$ in salınımlılığı ile çeliştiği görülür.

Şimdi aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

(A) $\Delta^{m-1}x_n < 0$, belirli bir n den sonra.

(B) $\Delta^{m-1}x_n > 0$, belirli bir n den sonra.

Durum A. Kabul edelim ki $n \geq n_1 \geq n_0$ için $\Delta^{m-1}x_n < 0$ olsun. Lemma 3.1.2 den bir $n_2 \geq n_1$ sayısı vardır öyle ki $n \geq n_2$ için

$$\Delta^{m-2}x_n > 0, \text{ ve ya (i) } \Delta x_n > 0 \text{ ya da (ii) } \Delta x_n < 0$$

dır.

(i) Kabul edelim ki $n \geq n_2$ için $\Delta x_n > 0$ olsun. Lemma 3.1.3 ün uygulanmasıyla, bir $n_3 \geq 2^{m-1}n_2$ sayısı vardır öyle ki

$$x_n \geq \frac{1}{(m-2)!}\left(\frac{n}{2^{m-2}}\right)^{m-2}\Delta^{m-2}x_n, \quad n \geq n_3$$

dir. Bir $n_4 \geq n_3$ sayısı vardır öyle ki

$$x_{n-k}^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{(m-2)!}\frac{1}{2^{(m-2)^2}}\right)^{\alpha}(n-k)^{\alpha(m-2)}\left(\Delta^{m-2}x_{n-k}\right)^{\alpha}, \quad n \geq n_4 \quad (4.4)$$

bulunur. (4.4) eşitsizliğini (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\Delta^m x_n + p_n\Delta^{m-1}x_n + q_n\left(\frac{1}{(m-2)!}\frac{1}{2^{(m-2)^2}}\right)^{\alpha}(n-k)^{\alpha(m-2)}\left(\Delta^{m-2}x_{n-k}\right)^{\alpha} \leq 0, \ n \geq n_4$$

elde edilir. Buradan $z_n = \Delta^{m-2}x_n$, $n \geq n_4$ ve $\theta = 1/2^{(m-2)^2}$ olmak üzere

$$\Delta^2 z_n + p_n\Delta z_n + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha}(n-k)^{\alpha(m-2)}q_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq n_4 \quad (4.5)$$

bulunur. (4.5) eşitsizliğinde her iki tarafta $n-k$ dan $n-1'$e kadar toplam alınırsa,

$$\sum_{j=n-k}^{n-1}\Delta^2 z_j + \sum_{j=n-k}^{n-1}p_j\Delta z_j + \sum_{j=n-k}^{n-1}\left[\left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha}(j-k)^{\alpha(m-2)}q_j z_{j-k}^{\alpha}\right] \leq 0$$

bulunur. Burada
$$\sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta^2 z_j = \Delta z_n - \Delta z_{n-k}$$
ve
$$\begin{aligned}
\sum_{j=n-k}^{n-1} p_j \Delta z_j &= p_{n-k}\Delta z_{n-k} + p_{n-k-1}\Delta z_{n-k-1} + \ldots + p_{n-1}\Delta z_{n-1} \\
&= p_{n-k}(z_{n-k+1} - z_{n-k}) + p_{n-k-1}(z_{n-k} - z_{n-k-1}) + \ldots + p_{n-1}(z_n - z_{n-1}) \\
&= -p_{n-k}z_{n-k} - z_{n-k+1}(p_{n-k+1} - p_{n-k}) - \ldots - z_{n-1}(p_{n-1} - p_{n-2}) + z_n p_{n-1} \\
&= -p_{n-k}z_{n-k} + z_n p_{n-1} - \sum_{j=n-k}^{n-1} z_j \Delta p_{j-1} - z_n p_n + z_n p_n \\
&= z_n p_n - p_{n-k} z_{n-k} - \sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1}
\end{aligned}$$
olduğundan, bu değerler yerlerine yazılırsa,
$$\Delta z_n - \Delta z_{n-k} + z_n p_n - p_{n-k} z_{n-k} - \sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1} + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j z_{j-k}^{\alpha} \leq 0$$
bulunur. $z_n = \Delta^{m-2} x_n$ azalan olduğundan,
$$-\Delta z_{n-k} \geq 0 \text{ ve } z_{n-k} \leq z_{n-k-1} \leq z_{n-k-2} \leq \cdots \leq z_{n-2k+1} \leq z_{n-2k}$$
elde edilir. Buradan
$$\Delta z_n - \Delta z_{n-k} + \sum_{j=n-k}^{n-1} p_j \Delta z_j + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j z_{j-k}^{\alpha} \leq 0$$
veya
$$\Delta z_n + \left[p_n z_n - p_{n-k} z_{n-k} - \sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1}\right] + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j\right) z_{n-k}^{\alpha} \leq 0$$
bulunur. $z_n \geq 0$, $p_n \geq 0$, $z_n p_n \geq 0$, $\Delta p_n \leq 0$ olduğundan $-\sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1} \geq 0$ olur. Buradan $n_5 \geq n_4$ için
$$\Delta z_n + \left[\left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{(m-2)\alpha} q_j\right) - p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha}\right] z_{n-k}^{\alpha} \leq 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. Böylece (4.2) den

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq n_5$$

yazılır. Sonuç olarak, Lemma 4.1.1 gereğince (4.3) denklemi belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir. Dolayısıyla bir çelişki bulunur.

(ii) Kabul edelim ki $n \geq n_2$ için $\Delta x_n < 0$ olsun. Lemma 3.1.2 den kolaylıkla görülebilir ki

$$(-1)^i \Delta^i x_n > 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1 \text{ ve } n \geq n_3 \geq n_2 \tag{4.7}$$

dır. Taylor formülünden (Agarwal, R. P. 2000)

$$g \in N(n_3, z) = \{n_3, n_3+1, \ldots, z\} \text{ ve } z \in N(n_3) = \{n_3, n_3+1, \ldots\}$$

olmak üzere, x_g aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_g = \sum_{i=0}^{m-3} \frac{(z+i-1-g)^{(i)}}{i!} (-1)^i \Delta^i x_z + \frac{1}{(m-3)!} \sum_{s=g}^{z-1} (s+m-g-3)^{(m-3)} \Delta^{m-2} x_s \tag{4.8}$$

(4.8) eşitliğinde (4.7) eşitsizliğinin kullanılması ve $z-1 = n-k$ alınmasıyla

$$x_g \geq \frac{1}{(m-3)!} \sum_{s=g}^{n-k} (s+m-g-3)^{(m-3)} \Delta^{m-2} x_s, \quad n \geq n_3$$

elde edilir. $g = j-k$ olmak üzere, $\Delta^{m-2} x_n$ azalan olduğundan $\Delta^{m-2} x_{n-k} \leq \Delta^{m-2} x_{n-k-1} \leq \cdots \leq \Delta^{m-2} x_{g+1} \leq \Delta^{m-2} x_g$ elde edilir. Bu ifadenin en küçükdeğerinin yerine yazılmasıyla eşitsizliğin sağ tarafı daha da küçülür. Bunu kullanarak,

$$x_{j-k}^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{(m-3)!} \right)^{\alpha} \left(\sum_{s=j-k}^{n-k} (s+m-j+k-3)^{(m-3)} \right)^{\alpha} \left(\Delta^{m-2} x_{n-k} \right)^{\alpha} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.1) denkleminde her iki tarafın $n-k$ dan $n-1$'e kadar toplamı alınırsa,

$$\sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta^m x_j + \sum_{j=n-k}^{n-1} p_j \Delta^{m-1} x_j + \sum_{j=n-k}^{n-1} q_j x_{j-k}^{\alpha} = 0$$

olur. Burada

$$\sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta^m x_j = \Delta^{m-1} x_n - \Delta^{m-1} x_{n-k}$$

ve

$$\sum_{j=n-k}^{n-1} p_j \Delta^{m-1} x_j = p_n \Delta^{m-2} x_n - p_{n-k} \Delta^{m-2} x_{n-k} - \sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta p_{j-1} \Delta^{m-2} x_j$$

elde edilir.

$$-\Delta^{m-1} x_{n-k} \geq 0, \; p_n \Delta^{m-2} x_n \geq 0$$

ve

$$-\sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta p_{j-1} \Delta^{m-2} x_j \geq 0$$

olduğundan (4.1) denkleminin her iki tarafının $n-k$ dan $n-1$'e kadar toplamı alınırsa,

$$\Delta^{m-1} x_n - p_{n-k} \Delta^{m-2} x_{n-k} + \sum_{j=n-k}^{n-1} q_j x_{j-k}^{\alpha} \leq 0 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) eşitsizliğinde (4.9) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} &\Delta^{m-1} x_n - p_{n-k} \Delta^{m-2} x_{n-k} + \\ &+ \left[\sum_{j=n-k}^{n-1} q_j \left(\frac{1}{(m-3)!} \right)^{\alpha} \left(\sum_{s=j-k}^{n-1} (s+m-j+k-3)^{(m-3)} \right)^{\alpha} \right] (\Delta^{m-2} x_{n-k})^{\alpha} \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n \geq n_4 \geq n_3$ için $z_n = \Delta^{m-2} x_n$ olmak üzere

$$\Delta z_n + \left[\sum_{j=n-k}^{n-1} q_j \left(\frac{1}{(m-3)!} \right)^{\alpha} \left(\sum_{s=j-k}^{n-1} (s+m-j+k-3)^{(m-3)} \right)^{\alpha} - p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha} \right] z_{n-k}^{\alpha} \leq 0$$

bulunur. Şimdi (4.2) den

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \qquad n \geq n_4$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Lemma 4.1.1 den (4.3) eşitliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir. Sonuç olarak bu da bir çelişkidir.

Durum B. Kabul edelim ki $n \geq n_1$ için $\Delta^{m-1}x_n > 0$ olsun. (4.1) denkleminden

$$\Delta^m x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \qquad n \geq n_1 \tag{4.11}$$

elde edilir. Lemma 3.1.3 ün uygulanmasıyla bir $n_2 \geq 2^{m-1}n_1$ sayısı vardır öyle ki

$$x_n \geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{n}{2^{m-1}}\right)^{m-1}\Delta^{m-1}x_n, \quad n \geq n_2$$

dir. Bir $n_3 \geq n_2$ sayısı vardır öyle ki

$$x_{n-k} \geq \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^{m-1}(n-k)^{m-1}\Delta^{m-1}x_{n-k}, \quad n \geq n_3$$

dır. Buradan

$$x_{n-k}^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{2^{(m-1)^2}}\right)^{\alpha}(n-k)^{\alpha(m-1)}\left(\Delta^{m-1}x_{n-k}\right)^{\alpha}, \quad n \geq n_3 \tag{4.12}$$

bulunur. (4.11) eşitsizliğinde (4.12) eşitsizliğini kullanarak $n \geq N_1$ için $z_n = \Delta^{m-1}x_n$ olmak üzere

$$\Delta z_n + \left(\frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{2^{(m-1)^2}}\right)^{\alpha}(n-k)^{(m-1)\alpha}q_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \qquad n \geq N_1$$

bulunur. (4.2) den

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq N_1$$

elde edilir. İspatın bu kısmı yukardaki duruma benzerdir. Yani Lemma 4.1.1 den (4.3) eşitliği belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir. Bu ise bir çelişkidir.

Buraya kadar yapılanlardan $n \geq N$ için

$$\Delta^{m-1}x_n < 0$$

elde edilir. Böylece, bu sonuç kabulümüz olan $\{\Delta^{m-1}x_n\}$ nin salınımlılığı ile çelişir.

4.3 (4.1) Denkleminin m'nin Tek Olması Durumunda Salınımlılık Şartları

Theorem 4.3.1. $n \geq n_0 \geq 0$ için $\Delta p_n \leq 0$, $k > 1$, m bir pozitif tek tamsayı,

$$K_n = \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{(m-1)^2}} \right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-1)} q_n$$

ve

$$Q_n = \left(\frac{\theta}{(m-2)!} \right)^{\alpha} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j \right), \qquad \theta = \frac{1}{2^{(m-2)^2}}$$

olmak üzere

$$C_n = \min\{Q_n\} > p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha}, \quad \text{yeterince büyük } n \text{ ler için}$$

olsun. .

$$c_n = \min \left\{ C_n - p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha},\ K_n,\ q_n \left(\frac{(m-2)^{(m-2)}}{(m-2)!} \right)^{\alpha} \right\} \tag{4.13}$$

olmak üzere

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} = 0 \tag{4.14}$$

fark denklemi salınımlı ise (4.1) denklemi de salınımlıdır.

İspat. $n \geq n_0 \geq 1$ için $x_n > 0$ olmak üzere (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü $\{x_n\}$ olsun. Teorem 4.2.1 de olduğu gibi belirli bir n'den sonra $\{\Delta^{m-1} x_n\}$ in tek işaretli olduğu görülür. Bunun sonucunda Teorem 4.2.1 deki gibi iki durum vardır. Ya $\Delta^{m-1} x_n < 0$ ya da $\Delta^{m-1} x_n > 0$ dır.

Durum A. Kabul edelim ki $n \geq n_1 \geq n_0$ için $\Delta^{m-1} x_n < 0$ olsun. Lemma 3.1.2'den bir $n_2 \geq n_1$ sayısı vardır öyle ki $n \geq n_2$ için

$$\Delta^{m-2} x_n > 0 \text{ ve } \Delta x_n > 0$$

dır. $n \geq n_2$ için $\Delta x_n > 0$ olduğundan x_n artandır. Bu durumda Lemma 3.1.3'ün uygulanmasıyla bir $n_3 \geq 2^{m-1} n_2$ sayısı vardır öyle ki

$$x_n \geq \frac{1}{(m-2)!}\left(\frac{n}{2^{m-2}}\right)^{m-2} \Delta^{m-2} x_n, \quad n \geq n_3$$

dır. Buradan bir $n_4 \geq n_3$ sayısı vardır öyle ki

$$x_{n-k}^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{(m-2)!}\frac{1}{2^{(m-2)^2}}\right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-2)} \left(\Delta^{m-2} x_{n-k}\right)^{\alpha}, \quad n \geq n_4 \quad (4.15)$$

bulunur. (4.1) denkleminde (4.15) eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n \left(\frac{1}{(m-2)!}\frac{1}{2^{(m-2)^2}}\right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-2)} \left(\Delta^{m-2} x_{n-k}\right)^{\alpha} \leq 0, \ n \geq n_4$$

bulunur. Buradan $z_n = \Delta^{m-2} x_n$, $n \geq n_4$ ve $\theta = 1/2^{(m-2)^2}$ olmak üzere

$$\Delta^2 z_n + p_n \Delta z_n + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-2)} q_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq n_4 \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) eşitsizliğinde her iki tarafın $n-k$ dan $n-1$'e kadar toplamı alınırsa

$$\Delta z_n - \Delta z_{n-k} + \sum_{j=n-k}^{n-1} p_j \Delta z_j + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j z_{j-k}^{\alpha} \leq 0$$

elde edilir.

$$\sum_{j=n-k}^{n-1} p_j \Delta z_j = z_n p_n - p_{n-k} z_{n-k} - \sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1}$$

eşitliğinden, $\Delta^{m-2} x_n$'nin azalan olması gerçeğinden ve

$$z_{n-k}^{\alpha} \leq z_{n-k+1}^{\alpha} \leq z_{n-k+2}^{\alpha} \leq \ldots \leq z_{n-2k}^{\alpha}$$

olduğundan

$$\Delta z_n + \left[p_n z_n - p_{n-k} z_{n-k} - \sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1}\right] + \left(\frac{\theta}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j\right) z_{n-k}^{\alpha} \leq 0$$

elde edilir. $p_n z_n \geq 0$ ve $\Delta p_n \leq 0$ olduğundan

$$-\sum_{j=n-k}^{n} z_j \Delta p_{j-1} \geq 0$$

olup bir $n_5 \geq n_4$ sayısı vardır öyle ki

$$\Delta z_n + \left[\left(\frac{\theta}{(m-2)!} \right)^{\alpha} \left(\sum_{j=n-k}^{n-1} (j-k)^{\alpha(m-2)} q_j \right) - p_{n-k} z_{n-k}^{1-\alpha} \right] z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \ n \geq n_5 \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.13) den

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq n_5$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma 4.1.1'den (4.14) denklemi belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir. Bu ise bir çelişkidir.

Durum B. Kabul edelim ki $n \geq n_1$ için $\Delta^{m-1} x_n > 0$ olsun. Bu durumda (4.1) denkleminden

$$\Delta^m x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \qquad n \geq n_1 \tag{4.18}$$

elde edilir. Lemma 3.1.2'den bir $n_2 \geq n_1$ sayısı vardır öyle ki $n \geq n_2$ için

$$\Delta^{m-2} x_n < 0$$

ve

$$\text{(i) } \Delta x_n > 0 \text{ veya (ii) } \Delta x_n < 0$$

dır.

(i) Kabul edelim ki $n \geq n_2$ için $\Delta x_n > 0$ olsun. Lemma 3.1.3'ün uygulanmasıyla bir $n_3 \geq 2^{m-1} n_2$ sayısı vardır öyle ki

$$x_n \geq \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{n}{2^{m-1}} \right)^{m-1} \Delta^{m-1} x_n, \quad n \geq n_3$$

dir. Bir $n_4 \geq n_3$ sayısı vardır öyle ki

$$x_{n-k}^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{(m-1)^2}} \right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-1)} \left(\Delta^{m-1} x_{n-k} \right)^{\alpha}, \ n \geq n_4 \tag{4.19}$$

dır. (4.1) denkleminde (4.19) eşitsizliğinin kullanılmasıyla ve

$$p_n \Delta^{m-1} x_n \geq 0$$

olduğundan

$$\Delta^m x_n + q_n \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{(m-1)^2}} \right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-1)} \left(\Delta^{m-1} x_{n-k} \right)^{\alpha} \leq 0, \ n \geq n_4$$

elde edilir. Buradan $z_n = \Delta^{m-1} x_n$, $n \geq n_4$ olmak üzere

$$\Delta z_n + \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{(m-1)^2}} \right)^{\alpha} (n-k)^{\alpha(m-1)} q_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \ n \geq n_4 \tag{4.20}$$

bulunur. (4.13) den $n_5 \geq n_4$ için

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq n_5$$

elde edilir. Bunun sonucunda Lemma 4.1.1'den (3.14) denklemi belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir, bu da bir çelişkidir.

(ii) Kabul edelim ki $n \geq n_2$ için $\Delta x_n < 0$ olsun. Lemma 3.1.2'nin uygulanmasıyla bu şartlarda $j = 0$ olur. Buradan kolaylıkla görülebilir ki

$$(-1)^i \Delta^i x_n > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1 \text{ ve } n \geq n_3 \geq n_2 \tag{4.21}$$

dır. Taylor formülünden (Agarwal, R. P. 2000) bütün $g \in N(n_3, z) = \{n_3, n_3+1, \ldots, z\}$ için ve $z \in N(n_3) = \{n_3, n_3+1, \ldots\}$ olmak üzere x_g aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x_g = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(z+i-1-g)^{(i)}}{i!} (-1)^i \Delta^i x_z + \frac{1}{(m-2)!} \sum_{s=g}^{z-1} (s+m-g-2)^{(m-2)} \Delta^{m-1} x_s \tag{4.22}$$

(4.22) eşitliğinde (4.21) eşitsizliğini kullanarak ve $z - 1 = n - k$ alarak

$$x_g \geq \frac{1}{(m-2)!} \sum_{s=g}^{n-k} (s+m-g-2)^{(m-2)} \Delta^{m-1} x_s, \quad n \geq n_3$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte özel olarak $g = j - k$ alırsak ve $\Delta^{m-1} x_n$ nin azalması gerçeğinden

$$x_{j-k}^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{(m-2)!} \right)^{\alpha} \left(\sum_{s=j-k}^{n-k} (s+m+k-j-2)^{(m-2)} \right)^{\alpha} \left(\Delta^{m-1} x_{n-k} \right)^{\alpha} \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.18) eşitsizliğinde (4.23) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\Delta^m x_n + q_n \left(\frac{1}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \left(\sum_{s=j-k}^{n-k} (s+m+k-j-2)^{(m-2)}\right)^{\alpha} \left(\Delta^{m-1} x_{n-k}\right)^{\alpha} \leq 0,\ n \geq n_4$$

elde edilir. $z_n = \Delta^{m-1} x_n$, $n \geq n_4 \geq n_3$ olmak üzere

$$\Delta z_n + q_n \left(\frac{1}{(m-2)!}\right)^{\alpha} \left(\sum_{s=n-k}^{n-k} (s+m+k-n-2)^{(m-2)}\right)^{\alpha} z_{n-k}^{\alpha} \leq 0, \quad n \geq n_4$$

dır. Buradan

$$\Delta z_n + q_n \left(\frac{(m-2)^{(m-2)}}{(m-2)!}\right)^{\alpha} z_{n-k}^{\alpha} \leq 0,\ \ n \geq n_4 \qquad (4.24)$$

elde edilir. (4.13) den $n_5 \geq n_4$ için

$$\Delta z_n + c_n z_{n-k}^{\alpha} \leq 0,\ n \geq n_5$$

bulunur. Bunun sonucunda Lemma 4.1.1'den (4.14) denklemi belirli bir n den sonra pozitif çözüme sahiptir. Bu da bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., 2000, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York.

Agarwal, R. P., Grace, S. R. and O'Regan, D., 2000, Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Agarwal, R. P., Thandapani, E., Wong, P.J.Y., 1997, Oscillations of higher-order neutral difference equations, Appl. Math. Lett. **10** (1), 71-78.

Agarwal, R. P., Grace, S.R., 1999, Oscillation of higher-order nonlinear difference equations of neutral type, Appl. Math. Lett. **12**, 77-83.

Agarwal, R. P. and Grace, S.R., 2000, Oscillation of higher-order difference equations, Appl. Math. Lett. **13**, 81-88.

Agarwal, R. P. and Grace, S.R., 1999, Oscillation of certain difference equations, Mathematical and Computer Modelling, **29**, 1-8.

Agarwal, R. P. and Patricia, Y. J. W. 1997. Advanced topics in difference equations. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Chuanxi, Q. , Kuruklis, S. A. and Ladas, G. 1990. Oscillations of linear autonomous systems of difference equations. Applicable Analysis, 36; 51-63

Elaydi, S. 1999. An introduction to difference equations. Springer-Verlag, Newyork.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations. Differential and Integral Equations, 2; 300-309.

Goldberg, S. 1958. Introduction to difference equations. Newyork.

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation theory of delay differential equations. Clarendon press. ,Oxford.

Kelley, W. C. and Peterson, A. C. 1991. Difference equations an introduction with applications. Academic Press. , San Diego.

Ladas, G. , Philos, Ch. G. and Sficas, Y. G. 1989. Sharp condition for the oscillation of delay difference equations. Journal of Applied Mathematics and Simulation, 2; 101-112.

Ladas, G. 1990. Explicit conditions for the oscillation of difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153; 276-287.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1988. Theory of difference equations; Nümerical methods and applications. Academic Press. , San Diego.

Tang, X. H. and Zhang, R. Y. 2001. New oscillation criteria for delay difference equations. Computers and Mathematics With Applications, 42; 1319-1330.

Tang, X. H. and Liu, Y. J., 2001, Oscillation for nonlinear delay difference equations, Tamkang J. Math. **32**, 275-280.

Thandapani, E., Arul, R. and Raja, P. S., 2003, Oscillation of first order neutral delay difference equations, Applied Mathematics E-Notes, **3**, 88-94.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Qian, X. Z. 1993. Oscillations of delay difference equations with oscillating coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 177; 432-444.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Wang, Z. C. 1994. Oscillation of delay difference equations. Applicable Analysis, 53; 117-124.

Yu, J. S. and Tang, X. H. 2000. Sufficient conditions for the oscillation of linear delay difference equations with oscillating coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 250; 735-742.

Zhang, G, 2002, Oscillation for nonlinear difference equations, Applied Mathematics E-Notes, **2**, 22-24.

Zhang, G. and Gao, Y., 1999, Positive solution of higer order nonlinear difference equation, Sys. Sci & Math. Scis **19**, 157-167.

EKLER

1. Bu çalışmanın üçüncü bölümünde ele alınan

$$\Delta^m(y_n + p_n y_{n-l}) + q_n y_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan neutral gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını araştırdığımız "Oscillation results of higher order nonlinear neutral delay difference equations" isimli çalışma Applied Mathematics Letters isimli dergiye yayınlanması için gönderilmiş ve yayına kabul edilmiştir.

2. Ayrıca bu çalışmanın dördüncü bölümüde ele alınan

$$\Delta^m x_n + p_n \Delta^{m-1} x_n + q_n x_{n-k}^{\alpha} = 0, \quad m > 2$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını araştırdığımız ”Oscillation results of higher order nonlinear delay difference equations” isimli çalışma yayın için gönderilmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Tokat'ın Reşadiye ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 1995 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 1996 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. 2000 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansını tamamladı. 2006 yılı Haziran ayında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında doktorasını tamamladı. Halen aynı enstitüde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.