

Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark ve Sonlu Eleman
Yöntemleriyle Çözümü

Burcu Mercan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Eylül 2008

Solution of Partial Differential Equation by Using Finite Difference and
Finite Element Methods

Burcu Mercan

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

September 2008

Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark ve Sonlu Eleman Yöntemleriyle Çözümü

Burcu Mercan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman : Yrd.Doç. Dr. Dursun ESER

Eylül 2008

Burcu Mercan'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark ve Sonlu Eleman Yöntemleriyle Çözümü” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Yrd.Doç. Dr. Dursun ESER(Danışman)

Üye : Yrd.Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Yrd.Doç . Dr. İbrahim GÜNALTILI

Üye : Yrd.Doç. Dr .Salih KÖSE

Üye : Yrd.Doç. Dr. Ömer ÖZBAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan başlangıç ve sınır değer problemleri ele alınmıştır. Birinci bölümde, sonlu fark yöntemleri verilerek kısmi türevli denklemlerin sonlu farkları formüle edilmiştir. İkinci bölümde sonlu eleman yöntemi ile aynı denklemler ele alınmıştır. Son bölümde de bu iki yöntemin karşılaştırılması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi türevli denklemler, sonlu farklar, sonlu elemanlar, sayısal çözümler.

SUMMARY

In this study, initial and boundary value problems in applied mathematics, physics and engineering science are investigated by using finite difference and finite element methods. In the first chapter, finite difference method is given and partial differential equations are formulated in turn of finite differences. In the second chapter, same equations are worked by using finite element method. In the last chapter, comparison of these two methods are done.

Keywords: Partial differential equations, finite differences, finite elements, numerical solutions.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde gerekse tez çalışmalarımnda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım, sayın hocam Yrd.Doç. Dr. Dursun ESER'e, ayrıca yardımlarını benden esirgemeyen aileme ve dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2008

Burcu Mercan

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
1. GİRİŞ	
2. SONLU FARK YAKLAŞIMLARI.....	2
2.1. Notasyon.....	2
2.2. Taylor Serileri Açılımı.....	3
2.3. $u(x)$ İçin operatör Notasyonu	5
2.4. İki boyutlularda Sonlu Fark Yaklaşımı.....	9
2.5. Ek Kavramlar.....	11
3. SONLU ELEMAN YAKLAŞIMI.....	17
3.1. Ağırlık Rezidü Metodu	17
3.2. Ağırlık Rezidü Metodunun Uygulanması.....	21
3.3. Temel Fonksiyonların Seçimi.....	28
4. SONLU ELEMAN ve SONLU FARK METODLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	48
5. Kaynaklar Dizini.....	53

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. h aralığını sabit tutan u nun sonlu fark gösterimi.....	2
Şekil 2.2. 5 ve 7 noktalı sonlu farklar.....	3
Şekil 2.3. Seçilmiş sonlu fark yaklaşımları için sayısal moleküller.....	13
Şekil 3.1. Galerkin, subdomain ve collocation metodları için bir boyutlu ağırlık fonksiyonlarının şematik gösterimi.....	19
Şekil 3.2. t nin 0-1 aralığı üzerinde sıcaklık dağılımının hesaplanmasında kullanılan temel fonksiyon.....	21
Şekil 3.3. Kuadratik temel fonksiyonlar.....	30
Şekil 3.4. Yeni koordinat sisteminde kuadratik ve kübik temel fonksiyonlar.....	32
Şekil 3.5. Lokal ve global koordinatlarda Hermite kübik polinomu.....	41
Şekil 3.6. Hermite taban fonksiyonları örnek problem için tanımlanmıştır.....	43
Şekil 4.1. İki boyutlu ısı akışı için belirlenen bölge.....	50

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışma da sonlu fark ve sonlu eleman tekniklerinin temel kavramları verilmiştir. Sonlu fark metodları, noktalar ve düğümlerin bir kümesiyle temsil edildiğinde Taylor serileri açılımı kullanılarak elde edilmiştir.

Karşıt olarak sonlu eleman metodu düğüm noktaları arasında enterpole etmek için parçalı sürekli fonksiyonları sağlar. Burada noktalar ve doğrular sonlu eleman teorisinde önemli rol oynarlar.

Son olarak her iki method arasındaki ilişki incelenmiştir.

Eskişehir, 2008

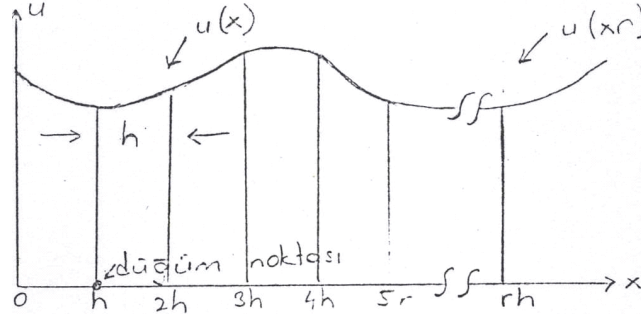
Burcu Mercan

BÖLÜM 2

SONLU FARK YAKLAŞIMLARI

Sonlu fark tekniklerini anlamak için bu yaklaşım formunda karşılaşılan temel kavramları dikkate almak gerekir. Temel kavramlar oldukça basittir. Verilen kısmi diferensiyel denklemin çözümü alt bölümlere ayrılır. Herbir noktadaki türev o zamanki sonlu fark yaklaşımıdır. Alternatif olarak, interpolate edilen bir polinom ve bu polinomun farkı ile kısmi diferensiyel denklemin çözümünün yer değiştirmesi bu prosedürü gösterebilir.

Burada tek bir bağımsız değişken için kullanılan Taylor serileri açılımının kesin sonlu fark temsillerini geliştireceğiz. Daha sonra iki bağımsız değişkenli sisteme bu sonuçları genişleteceğiz. Kısmi Türevli denklemlerin uygulamasındaki prosedürü şekilde gösterebiliriz.



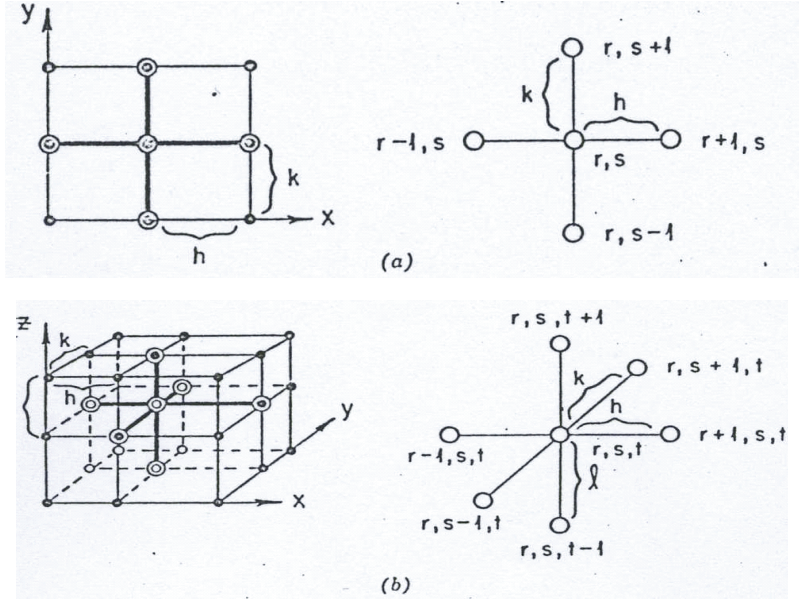
Şekil 2.1. h aralığını sabit tutan $u = u(x)$ in sonlu fark gösterimi

2.1 Notasyon

İlk olarak u nun sadece x bağımsız değişkeninin sürekli bir fonksiyonu olduğunu gözönüne alalım. Noktaların veya düğümlerin bir kümesini x ile şöyle gösteririz.

$$u(x_r) \equiv u(rh) \equiv u_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad 2.1$$

Burada r bir tamsayı, h da aralığı göstermek üzere x yerine rh alırız. r tamsayısı belirlenen başlangıç noktası ile ilgili x koordinatı boyunca düğümün pozisyonunu gösterir. Genellikle $x = 0$ iken, $r = 0$ olur. h bir sabit olduğunda $u(rh)$, u_r ile temsil edilir.



Şekil 2.2a. 5 noktalı standart iki boyutlu sonlu fark. **b.** 7 nokta kullanılarak üç boyutlu sonlu fark

İki boyutlu durumda $u(x, y)$ fonksiyonu herhangi bir düğüm noktasında x yönündeki aralık h ve y yönündeki aralık k olmak üzere .

$$u(x_r, y_s) \equiv u(rh, sk) \equiv u_{r,s}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad 2.2$$

ile tanımlanabilir. x eksenindeki bir sonraki düğümü aşağıdaki şekilde ifade ederiz.

$$u_{r+1,s} \equiv u[(r+1)h, sk].$$

2.2 Taylor Serileri Açılımı

Taylor serileri açılımı sonlu fark planının formülünde çok önemli bir rol oynar. Böylece $u(x)$ için Taylor serileri açılımı x noktasında şöyle yazılabilir.

$$u(x_r + h) = u(x_r) + hu_x|_r + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_r + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_r + \dots \quad 2.3a$$

veya

$$u(x_r - h) = u(x_r) - hu_x|_r + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_r + \dots \quad 2.3b$$

Denklemleri düzenlersek şöyle yazılabilir.

$$u_x|_r = \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}|_r - \dots \quad 2.4a$$

$$u_x|_r = \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}|_r + \dots \quad 2.4b$$

Böylece x noktasında u nun ilk türevi için iki muhtemel yaklaşım 1.4 deki gibi verilir. Bunuda

$$u_x|_r \approx \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} \equiv \frac{u_{r+1} - u_r}{h} \quad 2.5a$$

$$u_x|_r \approx \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} \equiv \frac{u_r - u_{r-1}}{h} \quad 2.5b$$

olarak yazarız. Seri belli terimlerde kesildiğinden oluşan hata E_r ile gösterilir ve kesme hatası olarak adlandırılır. Bu hata serilerin en büyük terimleriyle karakterize edilebilir, yani

$$E_r = \pm \frac{h}{2}u_{xx}|_{\xi} = O(h), \quad \begin{array}{l} x_r \leq \xi \leq x_r + h \\ x_r - h \leq \xi \leq x_r \end{array} \quad 2.6$$

dir ve h mertebesindedir diyebiliriz. Eğer (1.4a) ve (1.4b) yi taraf tarafa toplarsak, $u_x|_r$ için çözüm

$$u_x|_r = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} \quad 2.7$$

olup, ilk kesilen terim

$$-\frac{h^2}{6}u_{xxx}|_\xi, \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

dir. Böylece (1.7) deki hata $O(h^2)$ dir. (1.4a) dan (1.4b) yi çıkarırsak $u_{xx}|_r$ için çözümü şöyle elde ederiz.

$$u_{xx}|_r = \frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2} \quad 2.8$$

kesilen ilk terim

$$-\frac{h^2}{12}u_{4x}|_\xi, \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

dir. Benzer olarak daha karmaşık formüller geliştirmek mümkündür.

2.3 $u(x)$ İçin Operatör Notasyonu

Yaklaşık türev formları lineer operatörlerin kullanımı ile elde edilenlere benzer. Bu yaklaşım basit ve mümkün bütün formlara sahiptir. Sonuçlar bununla birlikte Taylor serileriyle elde edilenlere benzer.

Tablo 2.1. Lineer Sonlu Fark Operatörlerinin Tanımı

	Operatör	Sembol	Fark Gösterimi
(2.1.9a.)	İleri fark	Δ	$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r$
(2.1.9b.)	Geri fark	∇	$\nabla u_r = u_r - u_{r-1}$
(2.1.9c.)	Merkezi fark	δ	$\delta u_r = u_{r+1/2} - u_{r-1/2}$
(2.1.9d.)	Öteleme	E	$E u_r = u_{r+1}$
(2.1.9e.)	Ortalama	μ	$\mu u_r = \frac{u_{r+1/2} + u_{r-1/2}}{2}$
(2.1.9f.)	Türev	D	$D u_r = \frac{du}{dx} _r \equiv u_x _r$

İlk önce tablo 2.1 de kullanılan lineer operatörleri tanımladık. Farklı operatörler arasında birçok ilişki vardır.

$$\mu\delta u_r = \frac{\delta u_{r+1/2} + \delta u_{r-1/2}}{2} = \frac{\mu_{r+1} - \mu_{r-1}}{2} \quad 2.9a$$

$$\begin{aligned} \delta^2 u_r &= \delta(\delta u_r) = \delta(u_{r+1/2} - u_{r-1/2}) = \delta u_{r+1/2} - \delta u_{r-1/2} \\ &= u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1} \end{aligned} \quad 2.9b$$

$$\mu\delta^3 u_r = \frac{u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}}{2} \quad 2.9c$$

Taylor serilerinden şuna dikkat edelim:

$$\begin{aligned} u_{r+1} &= u_r + hu_x|_r + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_r + \dots \\ &= \left[1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots \right] u_r \\ &= \exp[hD] u_r \end{aligned}$$

$Eu_r = u_{r+1}$ olduğundan

$$E = \exp[hD] \quad 2.10$$

veya

$$hD = \ln E = \left\{ \begin{array}{l} \ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots \\ -\ln(1 - \nabla) = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \dots \end{array} \right\} \quad 2.11$$

Aynı zamanda daha basit gösterimi

$$\delta = 2 \sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

veya

$$hD = 2 \sin h^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \delta - \frac{1}{2^2 3!}\delta^3 + \frac{3^2}{2^4 5!}\delta^5 - \dots \quad 2.12$$

olarak yazarız. Şimdi hD için formüllerin değişikliğini u_r veya $u_{r+1/2}$ ye uygulayabiliriz. Eğer kare, küp ve formülleri u_r veya $u_{r+1/2}$ ye uygulandığında h^2D^2 , h^3D^3 , h^4D^4 alabiliriz. Bu işlemlerin kesinleşmiş sonuçları şöyle gösterilebilir.

$$hu_x \Big|_{r=} = \left\{ \begin{array}{l} [\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots] u_r \\ [\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \dots] u_r \\ [\mu\delta - \frac{1}{3!}\mu\delta^3 + \frac{1}{30}\mu\delta^5 - \dots] u_r \end{array} \right\} \quad 2.13$$

$$h^2u_{xx} \Big|_{r=} = \left\{ \begin{array}{l} [\Delta^2 + \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \dots] u_r \\ [\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \dots] u_r \\ [\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 + \dots] u_r \end{array} \right\} \quad 2.14$$

$$h^3u_{xxx} \Big|_{r=} = \left\{ \begin{array}{l} [\Delta^3 + \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \dots] u_r \\ [\nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5 + \dots] u_r \\ \mu [\delta^3 - \frac{1}{4}\delta^5 + \frac{7}{120}\delta^7 - \dots] u_r \end{array} \right\} \quad 2.15$$

$$h^4u_{4x} \Big|_{r=} = \left\{ \begin{array}{l} [\Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{17}{6}\Delta^6 - \dots] u_r \\ [\nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{6}\nabla^6 + \dots] u_r \\ [\delta^4 - \frac{1}{6}\delta^6 + \frac{7}{240}\delta^8 - \dots] u_r \end{array} \right\} \quad 2.16$$

(1.14)-(1.17) nin yaklaşık değerlerini alacak, aynı zamanda $r + \frac{1}{2}$ de aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} hu_x \Big|_{r+1/2} &= \left[\delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \frac{3}{640}\delta^5 - \dots \right] u_{r+1/2} \\ h^2u_{xx} \Big|_{r+1/2} &= \mu \left[\delta^2 - \frac{5}{24}\delta^4 + \frac{259}{5760}\delta^6 - \dots \right] u_{r+1/2} \\ h^3u_{xxx} \Big|_{r+1/2} &= \left[\delta^3 - \frac{1}{8}\delta^5 + \frac{37}{1920}\delta^7 - \dots \right] u_{r+1/2} \\ h^4u_{4x} \Big|_{r+1/2} &= \mu \left[\delta^4 - \frac{7}{24}\delta^6 + \frac{47}{640}\delta^8 - \dots \right] u_{r+1/2} \end{aligned}$$

Yukarıdaki $hu_x|_r, h^2u_{xx}|_r, \dots$ gösterimlerinden sonsuz serilerin kesilmesinden yaklaşık formüllerini elde edebiliriz. Örneğin (1.14) ün ileri fark formülünde ilk farktan sonra kesersek sonuç

$$hu_x|_r = \Delta u_r = u_{r+1} - u_r$$

olup, buradanda

$$u_x|_r = \frac{u_{r+1} - u_r}{h}$$

elde ederiz. (2.5a) Taylor serileri yaklaşımı gibi elde edilir. Bu yaklaşımla ilgili kesme hatası $\frac{1}{2}\Delta^2 u_r$ nin durumunda sıfır olmayan katsayı ile ilk ihmal edilen fark tarafından belirlenir. Bu terimden hata Taylor serileri analizi boyunca kurulan h^2 ile orantılıdır. Denklem türev yaklaşımıyla elde edilen h ile bölüldüğünde hata $O(h)$ tır.

Tablo 2.2 de hatanın mertebesiyle yaklaşımların sayısı belirlenmiştir. Sonsuz kümeden elde edilen yaklaşım kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanışlı olabilir.

Tablo 2.2. Bir Bağımlı Değişkenli Sonlu Fark Yaklaşımları

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Hata Mertebesi
$u_x _r$	$\frac{u_{r+1} - u_r}{h}$	$O(h)$
$u_x _r$	$\frac{u_r - u_{r-1}}{h}$	$O(h)$
$u_x _r$	$\frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h}$	$O(h^2)$
$u_x _r$	$\frac{-u_{r+2} + 4u_{r+1} - 3u_r}{2h}$	$O(h^2)$
$u_x _r$	$\frac{-u_{r+2} + 8u_{r+1} - 8u_{r-1} + u_{r-2}}{12h}$	$O(h^2)$
$u_{xx} _r$	$\frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2}$	$O(h^2)$
$u_{xx} _r$	$\frac{-u_{r+2} + 16u_{r+1} - 30u_r + 16u_{r-1} + u_{r-2}}{12h^2}$	$O(h^4)$
$u_{xxx} _r$	$\frac{u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}}{2h^3}$	$O(h^2)$
$u_{4x} _r$	$\frac{u_{r+2} - 4u_{r+1} + 6u_r - 4u_{r-1} + u_{r-2}}{h^4}$	$O(h^2)$

2.4 İki Boyutlularda Sonlu Fark Yaklaşımı

Önceki bölümün bir sonucu olarak $u(x, y)$ için sonlu bir çok fark yaklaşımları hesaplanabilir. Yeni kavram u_r yerine $u_{r,s}$ kullanımını içerir ve x e göre kısmi türevde y sabittir.

(2.5a), şekil 2.2a gösterimiyle doğrudan şöyle yazılabilir.

$$\frac{\partial u_{r,s}}{\partial x} \equiv u_x |_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} + O(h) \quad 2.17a$$

$$\frac{\partial u_{r,s}}{\partial y} \equiv u_y |_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - u_{r,s}}{k} + O(k) \quad 1.17b$$

$u_x |_{r,s}$ için yaklaşımda, $u_y |_{r,s}$ iken s sabitini elde ederiz. (2.18) in iki boyutlu denklemi

$$u_{xx} |_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2}$$

aynı yoldan elde edilir.

$$u_{xx} |_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + O(h^2) \quad 2.18a$$

$$u_{yy} |_{r,s} = \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + O(k^2) \quad 2.18b$$

Şimdi istenilen en önemli olay, karışık türevleri hesaplamaktır. u_{xy} için sonlu fark gösterimine ihtiyaç duyulduğu varsayılır.

$$u_{xy} |_{r,s} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} |_{r,s} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} |_{r,s} \right] \quad 2.19$$

(2.20) nin sonlu fark gösterimi (2.7) kullanılarak elde edilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r,s} \right] = \frac{1}{2h} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r+1,s} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{r-1,s} \right] + O(h^2)$$

böylece y deki diğer türevlere benzer bir yolla yaklaşılabilir.

$$u_{xy} \Big|_{r,s} = \frac{1}{2h} \left[\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1}}{2k} + \frac{k^2}{3!} u_{yyy} \Big|_{r+1,s} + \dots \right. \\ \left. - \frac{u_{r-1,s+1} - u_{r-1,s-1}}{2k} - \frac{k^2}{3!} u_{yyy} \Big|_{r-1,s} + \dots \right] + O(h^2)$$

Şimdi formun merkezi fark yaklaşımını gösterelim.

$$u_{xyyy} \Big|_{r,s} = \frac{1}{2h} (u_{yyy} \Big|_{r+1,s} - u_{yyy} \Big|_{r-1,s}) + O(h^2)$$

Çarpım türevinin sağlanması için ifadenin içinde bu formları yerine koyalım.

$$u_{xy} \Big|_{r,s} = \frac{1}{2h} \left[\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1}}{2k} \right] + O(h^2) + O(k^2)$$

h ve k eşit olduğu zaman denklem

$$u_{xy} \Big|_{r,s} = \frac{1}{4h^2} [u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} - u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1}] + O(h^2) \quad 2.20$$

Tablo 2.3. $h=k$ İki Bağımsız Değişkenli Sonlu Fark Yaklaşımları

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Hatanın Mertebesi
$u_x \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h}$	$O(h)$
$u_x \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r,s} - u_{r-1,s}}{h}$	$O(h)$
$u_x \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - u_{r-1,s}}{2h}$	$O(h^2)$
$u_x \mid_{r,s}$	$\frac{-u_{r+2,s} + 4u_{r+1,s} - 3u_{r,s}}{2h}$	$O(h^2)$
$u_x \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s-1}}{4h}$	$O(h^2)$
$u_{xx} \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2}$	$O(h^2)$
$u_{xx} \mid_{r,s}$	$\frac{-u_{r+2,s} + 16u_{r+1,s} - 30u_{r,s} + 16u_{r-1,s} - u_{r-2,s}}{12h^2}$	$O(h^4)$
$u_{4x} \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r+2,s} - 4u_{r+1,s} + 6u_{r,s} - 4u_{r-1,s} + u_{r-2,s}}{h^4}$	$O(h^2)$
$u_{xy} \mid_{r,s}$	$\frac{u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1}}{4h^2}$	$O(h^2)$
$u_{xxyy} \mid_{r,s}$	$\frac{1}{h^4} [u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s+1} + u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s-1} - 2u_{r+1,s} - 2u_{r-1,s} - 2u_{r,s+1} - 2u_{r,s-1} + 4u_{r,s}]$	$O(h^2)$

$u(x, y)$ için en çok kullanılan sonlu fark yaklaşımları tablo 1.3 de listelenmiştir.

İki boyutlu sonlu fark yaklaşımları üç boyutlulara benzetilebilir. Üç boyutlularda türev yaklaşımı (2.18), (2.19) ve (2.20) de verilenlere benzer. İkinci mertebeden türev, örneğin şekil 1.2b nin gösterimi kullanılarak yazılabilir.

$$u_{zz} \mid_{r,s,t} = \frac{u_{r,s,t+1} - 2u_{r,s,t} + u_{r,s,t-1}}{l^2} + O(l^2)$$

2.5 Ek Kavramlar

Önceki bölümdeki kısmi türevlerin nasıl kullanıldığını göstermek için

$$u_x = u_{yy}$$

2.21

ısı denklemini,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 2.22a$$

Laplace denklemini ve

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad 2.22b$$

Poisson denklemini göz önüne alalım.

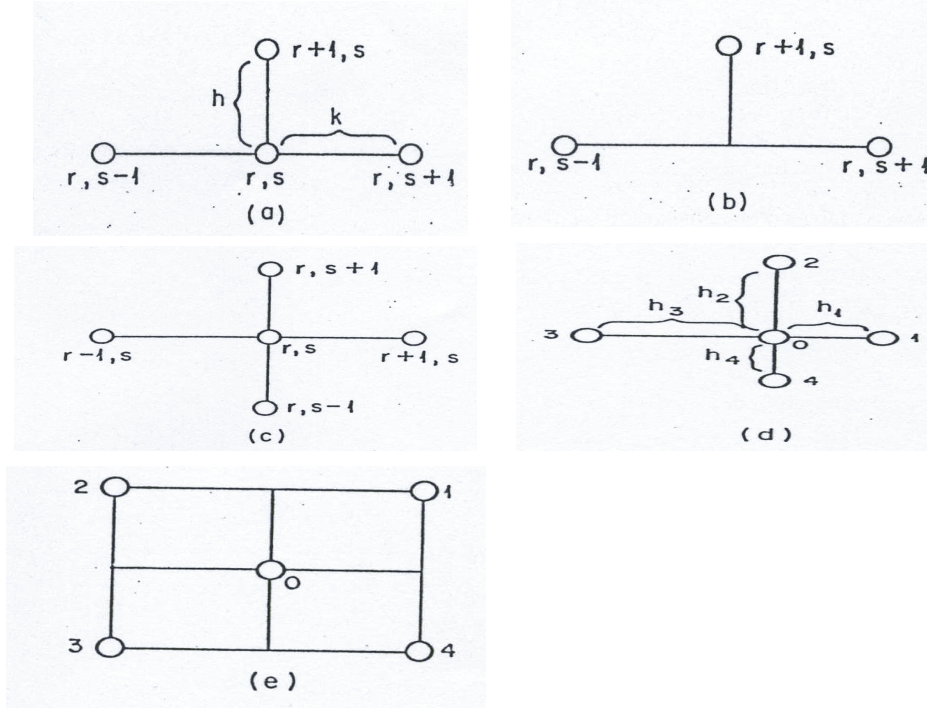
Kısmi diferensiyel denklem için bazı sonlu fark formlarının türevlerinde başlangıç ve sınır koşullarını ihmal ederiz. Aynı zamanda sonlu fark yaklaşımının belirsiz katsayılarının kullanımını gösterebiliriz.

(2.22) nin sonlu fark gösterimi tablo 2.3 den edinilen bilgi kullanılarak elde edilir. Terim terime yerdeğiştirmeyele elde edilen

$$[u_x - u_{yy}]_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h} - \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + O(h, k^2) = 0$$

Kesme hatasını ihmal edelim, $r + 1$ seviyesindeki s . düğüm için sonlu fark denklemini, $p = \frac{h}{k^2}$ iken

$$u_{r+1,s} = pu_{r,s+1} + (1 - 2p)u_{r,s} + pu_{r,s-1} \quad 2.23$$



Şekil 2.3. Seçilmiş sonlu fark yaklaşımları için sayısal moleküller

(2.24) ile ilgili hata $O(h + k^2)$ veya $O(h)$ ve $O(k^2)$ ile gösterilebilir. (2.24) denklemini ısı denkleminin sonlu fark gösterimidir. Şekil 2.2 nin şeması kullanılarak şekil 2.3a.daki dört noktayı içeren denklemi görebiliriz. Özel durumda $p = \frac{1}{2}$ iken (2.24) ün sadeleşmiş hali

$$u_{r+1,s} = \frac{u_{r,s+1} + u_{r,s-1}}{2}$$

ve böylece $u_{r+1,s}$, $u_{r,s+1}$ ile $u_{r,s-1}$ in ortalamasıdır. Laplace denklemini tablo 2.3 kullanılarak benzer bir biçimde gösterilebilir. Elde ettiğimiz

$$[u_{xx} + u_{yy}]_{r,s} = \frac{u_{r+1,s} - 2u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + \frac{u_{r,s+1} - 2u_{r,s} + u_{r,s-1}}{k^2} + O(h^2 + k^2) = 0$$

düzenlenince

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} [u_{r+1,s} + u_{r-1,s}] + \frac{1}{k^2} [u_{r,s+1} + u_{r,s-1}] \\ &= \frac{2(h^2 + k^2)}{h^2 k^2} u_{r,s} + O(h^2 + k^2) \end{aligned} \quad 2.24$$

elde edilir. (2.25) için oluşturulan diyagram şekil 2.3c de verilmiştir. $h = k$ iken (2.25) in indirgenmiş

$$u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1} = 4u_{r,s} + O(h^2) \quad 2.25$$

olup bu aynı zamanda ikinci mertebededir. Şimdi şekil 2.3c den farklı bir durumu göz önüne alalım, Bu durum için ayrı bir diyagram şekil 2.3d de gösterilmiştir. Biz burada 4 farklı h_i , $0 < h_i \leq h$ ve 0,1,2,3,4 numaralı düğüm noktalarını belirleyeceğiz. Amacımız Laplace denklemini sağlayacak sonlu fark yaklaşımını bulmaktır. Benimsediğimiz prosedür belirsiz katsayılar metodudur.

$$u_{xx} + u_{yy} = \sum_{i=0}^4 \alpha_i u_i \quad 2.26$$

Beş tane seçilmiş farklı noktanın ağırlık lineer birleşimi olarak yorumlanabilir. $\alpha_0, \dots, \alpha_4$ ağırlıkları Taylor serileri açılımı kullanılarak belirlenebilir. Bu açılımı

$$u_1 = u_0 + h_1 u_x|_0 + \frac{h_1^2}{2!} u_{xx}|_0 + \frac{h_1^3}{3!} u_{xxx}|_0 + \dots \quad 2.27a$$

$$u_2 = u_0 + h_2 u_y|_0 + \frac{h_2^2}{2!} u_{yy}|_0 + \frac{h_2^3}{3!} u_{yyy}|_0 + \dots \quad 2.27b$$

$$u_3 = u_0 - h_3 u_x|_0 + \frac{h_3^2}{2!} u_{xx}|_0 - \frac{h_3^3}{3!} u_{xxx}|_0 + \dots \quad 2.27c$$

$$u_4 = u_0 - h_4 u_y|_0 + \frac{h_4^2}{2!} u_{yy}|_0 - \frac{h_4^3}{3!} u_{yyy}|_0 + \dots \quad 2.27d$$

Aslında kullandığımız u_1, u_0 ve u_3 ün aynı y koordinatında, u_2, u_0 ve u_4 ün aynı x koordinatında olduğudur. (1.27) nin içinde (1.28) i yerine koyarsak

$$\begin{aligned} [u_{xx} + u_{yy}]_0 &= [\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4] u_0 + [\alpha_1 h_1 - \alpha_3 h_3] u_x |_0 \\ &+ [\alpha_2 h_2 - \alpha_4 h_4] u_y |_0 + \frac{1}{2} [\alpha_1 h_1^2 - \alpha_3 h_3^2] u_{xx} |_0 \\ &+ \frac{1}{2} [\alpha_2 h_2^2 - \alpha_4 h_4^2] u_{yy} |_0 + \sum_{i=0}^4 [O(\alpha_i h_i^3)] \end{aligned} \quad 2.28$$

elde edilir. $O(h^3)$ için sağdan ve soldan eşitlik için gereken

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 h_1 - \alpha_3 h_3 &= 0 \\ \alpha_2 h_2 - \alpha_4 h_4 &= 0 \\ \alpha_1 h_1^2 - \alpha_3 h_3^2 &= 2 \\ \alpha_2 h_2^2 - \alpha_4 h_4^2 &= 2 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu 5 denklemin çözümü

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -2 \left[\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right], \quad \alpha_1 = \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)} \\ \alpha_3 &= \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)}, \quad \alpha_4 = \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)} \end{aligned}$$

olup bu α değerleri (2.27) de yerine koyulduğunda sonlu fark yaklaşımı elde edilir. (2.29) un son terimi ve hata $O(h)$ olarak gösterilir. Yaklaşımın sağladığı $h_2 = h_4 = k$ ve $h_1 = h_3 = h$ dır.

Şimdi şekil 1.3e deki düğümler veya noktalar ele alalım. Bütün boşluklar h olsun. Simetrik formdan şöyle yazabiliriz.

$$[u_{xx} + u_{yy}]_0 = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 [u_1 + u_2 + u_3 + u_4]$$

Taylor serileriyle

$$u_i = u_0 + h [u_x|_0 + u_y|_0] + \frac{h^2}{2!} [u_{xx}|_0 + 2u_{xy}|_0 + u_{yy}|_0] + \dots$$

α_0, α_1 katsayıları belirlenebilir. Detayları göstermeden aşağıdaki denklemler sağlanmalıdır.

$$\alpha_0 + 4\alpha_1 = 0, \quad 2\alpha_1 h^2 = 1$$

böylece

$$[u_{xx} + u_{yy}]_0 = \frac{1}{2h^2} [u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0] + O(h^2) = 0 \quad 2.29$$

elde edilir. Bu Laplace denklemi için sonlu fark gösterimidir. Eğer Laplace denklemi yerine Poisson denklemini ele alırsak sonlu fark gösterimi

$$\frac{1}{h^2} [u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0] = 2f_0 + O(h^2) \quad 2.30$$

aynı mertebededir. Önceden gösterilen notasyonlarla

$$\frac{1}{h^2} (u_{r+1, s+1} + u_{r-1, s+1} + u_{r-1, s-1} + u_{r+1, s-1} - 4u_{r, s}) = 2f_{r, s} + O(h^2)$$

yazılır. Birçok sonlu fark gösterimini sağlamak için belirsiz katsayılar metodu kullanılabilir. Eliptik kısmi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi hiperbolik ve parabolik kısmi diferensiyel denklemlerde de kullanılabilir.

BÖLÜM 3

SONLU ELEMAN YAKLAŞIMI

Sonlu fark planı ayrı noktaların yer değiştirmesiyle ilgilidir. Sonlu eleman metodunda u bilinmeyen fonksiyonu polinomlarla gösterilir, elemanların türevleri boyunca hareket eder. Daha önce benzer polinom yaklaşımı sonlu fark planını elde etmek için kullanıldı. Genel olarak interpolasyon fonksiyonu düşük mertebededir. Böylece sonlu eleman metodunda temel ilke elemanlardır.

Buna rağmen sonlu fark planı Taylor serileri kullanılarak gösterilebilir. Sonlu fark formüllerine benzer cebirsel denklemleri formüle etmek amacıyla fonksiyonel analiz ve varyasyon metodlarında karşılaşılan kavramları tanıtmak gerekir.

3.1 Ağırlık Rezidü Metodu

Aynı sonlu eleman formülüne sahip çeşitli yollar vardır. Sonlu eleman tekniklerinin tartışmasında ilk önce ağırlık rezidü metodunun iki özel durumunu göz önüne alacağız, Galerkin ve collocation metodları. Ağırlık rezidü metodundan istenen $u(\cdot)$ fonksiyonu bir $\hat{u}(\cdot)$ sonlu seri yaklaşımıyla gösterilebilir.

$$u(\cdot) \approx \hat{u}(\cdot) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(\cdot) \quad 3.1$$

Genelde $\phi_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonlarının kümesi her iki zamandada tanımlanabilir ve u_j belirsiz katsayılarıdır. (3.1) denklemi

$\hat{u}(\cdot) = u_0 \phi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(\cdot)$ olarak yazılabilir. Sonlu eleman metodunda $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonu problemdeki sınır koşullarını kesin sağlayan polinomlardan

seçilir. Bu fonksiyonlar şekil fonksiyonları, temel fonksiyonlar ve interpolasyon fonksiyonları olarak tanımlanır. Hatta problemde temel fonksiyonlarda bütün sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilir. Kısmi diferensiyel denklemlerde $\hat{u}(\cdot)$ yer değiştirmesiyle, R rezidü

$$L\hat{u}(\cdot) - f = R(\cdot) \quad 3.2$$

elde edilir. Amaç minimize edilen u_j belirsiz katsayılarını seçmektir.

$$\int_t \int_v R(\cdot) dv dt = 0 \quad 3.3$$

Bu plan N bilinmeyen u_j katsayısı için yalnız bir denklemden oluşur. Ağırlık rezidü integrali kurarak ve herbiri sıfıra eşitlenerek bağımsız n denklem sağlanır.

$$\int_t \int_v R(\cdot) w_i(\cdot) dv dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad 3.4$$

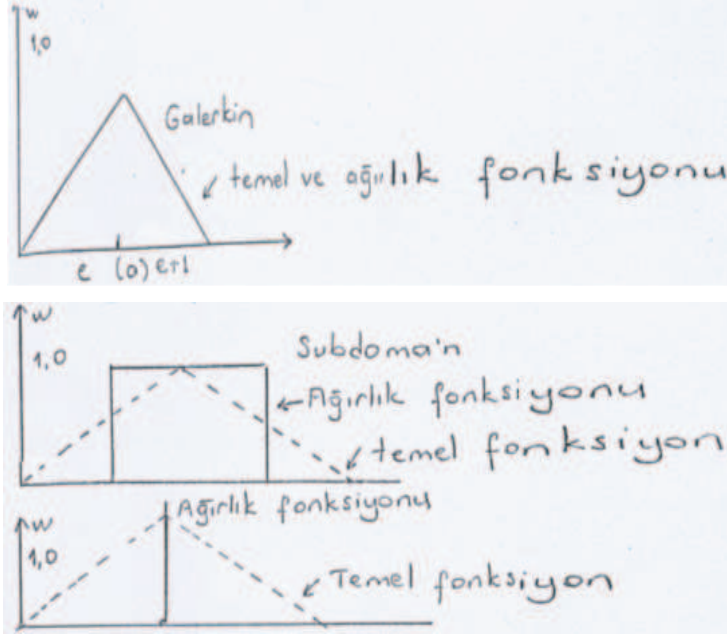
En azından (3.4) bilinmeyen katsayılar için çözülebilir. Denklem (3.4) ağırlık rezidü metodunu tanımlayan genel denklemdir.

Bu ağırlık rezidü metodlarının arasında Galerkin, subdomain ve collocation planları mühendislik hesaplarında en çok karşılaşılanlarıdır. Şekil 2.4 de herbiri için bir boyutlu ağırlık fonksiyonları gösterilmiştir. Herbir metod için bu fonksiyonların nasıl değiştiğine dikkat ediniz.

Galerkin Metodu: Galerkin metodunun sonucu ağırlık rezidü fonksiyonu temel fonksiyon olarak seçildiğinde (3.1) ile tanımlanır. Böylece elde ettiğimiz

$$\int_t \int_v R(\cdot) \phi_i(\cdot) dv dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad 3.5$$

elde edilir.



Şekil 3.1. Galerkin, subdomain, collocation metodları için bir boyutlu ağırlık fonksiyonlarının şematik gösterimi

Temel fonksiyonların, fonksiyonların tam bir kümesinin üyeleri olması gerekir. Çünkü fonksiyonlar kümesi verilen herhangi bir fonksiyonu tam olarak temsil edebilir. Tam olma şartı Galerkin fonksiyonunun alternatif yorumuna izin verir. (3.5) iki fonksiyonun ortogonalliğinin tanımıdır.

Şekil 3.1a. ağırlık fonksiyonu parçalı lineer fonksiyondur. Çünkü benzerliklerinden dolayı bazen Chapeau fonksiyonu olarak adlandırılır. Sonlu eleman metodu formülasyonunda sık sık kullanılır. Sonlu fark planına benzediği için kısaca ispat edilebilir.

Subdomain Metodu:

Subdomain metodunda ağırlık fonksiyonu V_i bölgesinde seçilir ve her yerde sıfırdır. (3.4) de bu matematiksel bir durum olabilir.

$$\int_v R(\cdot)w_i(\cdot)dv = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad 3.6a$$

iken

$$w_i = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad (x, y, z) V_i' de \\ 0, \quad (x, y, z) V_i' de de\u011fil \end{array} \right\} \quad 3.6b$$

w_i ve ϕ_j için aynı oldu\u011funda bu metodun varyansıda hesaplanmı\u015ftır. Bu planda ger\u00e7ekle\u015ftirmek için integraller Galerkin metodundakilerden daha iyidir.

Collocation Metodu:

Bu metod a\u011fırlık rezidü metodunun en kolayıdır. Bu methodda a\u011fırlık fonksiyonu w_i Dirac deltası olarak se\u00e7ilir.

$$w_i = \delta(x - x_i)$$

Dirac delta fonksiyonunun önemli bir özelli\u011fi vardır.

$$\int_t \int_v a(\cdot)\delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i, t - t_i)dvd t \equiv a |_{x_i, y_i, z_i, t_i} \quad 3.7$$

Bunun için zamanı t ile gösterelim. Böylece collocation metodu için ortogonalite

$$\int_t \int_v R(\cdot)\delta_i(\cdot)dvd t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad 3.8$$

olarak yazılır. (x_i, y_i, z_i, t_i) belirlenmi\u015f noktalarındaki matematiksel ifadedir.

(3.7) ba\u011fıntısından dolayı (3.8) için bu noktadaki rezidü de\u011ferini kolayca hesaplarız. İntegral gerekmez ve belirsiz katsayılı N denklem oluşur.

3.2 Ağırlık Rezidü Metodunun Uygulaması

Ağırlık rezidü metodları önceki bölümde sunulan kapalı notasyonların uygulamasıdır. İnceleyeceğimiz örnek bunu ispat etmek ve temel kavramları aydınlatmak için verilmiştir. Örnekte olduğu gibi T_e sıcaklığında çevre sıcaklığı T ile nesnenin soğuma oranını veren denklemleri göz önüne alalım. Newton'un soğuma kanunu

$$\frac{dT}{dt} + k(T - T_e) = 0 \quad 3.9$$

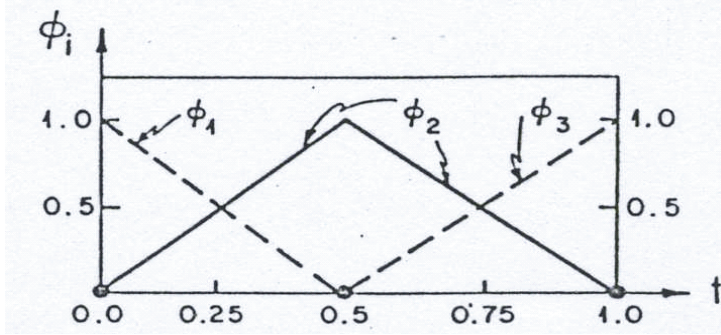
T = nesne sıcaklığı

T_e = çevresel sıcaklık

t = zaman

k = orantı sabiti

ile verilir.



Şekil 3.2. $0 \leq t \leq 1$ aralığı üzerinde sıcaklık dağılımının hesaplanmasında kullanılan temel fonksiyon

Şekil 3.2 de gösterilenin fonksiyonel formu

$$\phi_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{array} \right\} \quad 3.10$$

dir. Daha önce sonlu farkta kullanılan düğüm değerine başvurur. $T_1 = 1$ iken seçimin \hat{T} deneme fonksiyonu $T(0) = 1$ ile tutarlıdır. Aşağıda geliştirilen genel ağırlık rezidü metodu problemlerinin 1. ve 2. adımlardaki formülleridir. Özel ağırlık rezidü metodu planının seçimi 3. adımda oluşur.

Adım 1:

$$T \approx \hat{T} = \sum_{j=1}^3 T_j \phi_j(t) \quad 3.11$$

deneme fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\phi_j(t)$ nin tanımından dolayı T_j , j. düğüm noktasındaki \hat{T} nin değeridir.

Adım 2: Ağırlık rezidü metodunun integral denklemini

$$\int_t R(t) w_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.12$$

olarak formüle edelim. Burada

$$R(t) \equiv \frac{d\hat{T}}{dt} + k(\hat{T} - T_e)$$

dir. (3.12) de (3.11) i yerine yazarsak

$$\int_t \left\{ \sum_{j=1}^3 T_j \left(\frac{d\phi_j}{dt} + k\phi_j \right) - kT_e \right\} w_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.13$$

olup böylece 3 denklem elde ederiz.

Adım 3: Ağırlık fonksiyonlarının seçimi

1- Galerkin: Galerkin metodundaki ağırlık fonksiyonu yaklaşımında $\phi_i(t)$ temel fonksiyonudur. (3.13) de w_i yazarak

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_0^1 \left\{ \frac{d\phi_j}{dt} + k\phi_j \right\} \phi_i dt = \int_0^1 kT_e \phi_i dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.14$$

elde edip, bundanda açılımından şu matris denklemini elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \int_0^{1/2} \left(\frac{d\phi_1}{dt} \phi_1 + k\phi_1\phi_1 \right) dt & \int_0^{1/2} \left(\frac{d\phi_2}{dt} \phi_1 + k\phi_2\phi_1 \right) dt & 0 \\ \int_0^{1/2} \left(\frac{d\phi_1}{dt} \phi_2 + k\phi_1\phi_2 \right) dt & \int_0^{1/2} \left(\frac{d\phi_2}{dt} \phi_2 + k\phi_2\phi_2 \right) dt & \int_{1/2}^1 \left(\frac{d\phi_3}{dt} \phi_2 + k\phi_3\phi_2 \right) dt \\ 0 & \int_{1/2}^1 \left(\frac{d\phi_2}{dt} \phi_3 + k\phi_2\phi_3 \right) dt & \int_{1/2}^1 \left(\frac{d\phi_3}{dt} \phi_3 + k\phi_3\phi_3 \right) dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{1/2} kT_e\phi_1 dt \\ 0 \\ \int_0^1 kT_e\phi_2 dt \\ 0 \\ \int_{1/2}^1 kT_e\phi_3 dt \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad 3.15$$

(3.15) deki integral uygulamasının hesabı

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 + \frac{k}{3} & 1 + \frac{k}{6} & 0 \\ -1 + \frac{k}{6} & \frac{2k}{3} & 1 + \frac{k}{6} \\ 0 & -1 + \frac{k}{6} & 1 + \frac{k}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{kT_e}{2} \\ kT_e \\ \frac{kT_e}{2} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

dir. Burada T_i nin hesabı için başlangıç koşullarını kullandık. (3.16) denklemini k ve T_e için özel değerler verilerek çözülebilir. Yalnızca 3 denklemin ikisi tam olarak bulunur. Sonuçta çözüm iki denklemin seçimine bağlıdır. 2. ve 3. denklemlerden elde edilen çözüm

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.678, 0.571]$$

1. ve 3. denklemlerden

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.625, 0.550]$$

1. ve 2. denklemlerden

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.625, 0.625]$$

dir. Bu problem için analitik çözüm

$$T(t) = T(0)e^{-kt} + T_e(1 - e^{-kt})$$

olup buradan da

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.684, 0.568]$$

sonucu elde edilir. Daha doğru çözümün 2. ve 3. denklemler kullanılarak hesaplandığı açıktır. Pratikte bu seçim belirlenmiş veya bilinen katsayılar ile ilgili matris denkleminin satır ve sütunları elimine edilerek yapılır.

2- Subdomain: Bu metod için ağırlık fonksiyonu yaklaşımı şöyle verilir.

$$w_i = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \leq t \leq \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \\ 0, \quad \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad 3.17$$

(3.13) de (3.17) yi yerine koyarsak şu integral denklemleri sonuçları elde edilir.

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_0^{0.25} \left\{ \frac{d\phi_j}{dt} + k\phi_j \right\} dt = \int_0^{0.25} kT_e dt \quad 3.18a$$

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_{0.25}^{0.75} \left\{ \frac{d\phi_j}{dt} + k\phi_j \right\} dt = \int_{0.25}^{0.75} kT_e dt \quad 3.18b$$

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_{0.75}^{1.0} \left\{ \frac{d\phi_j}{dt} + k\phi_j \right\} dt = \int_{0.75}^{1.0} kT_e dt \quad 3.18c$$

(3.18) denklemi

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \int_0^{0.25} \left(\frac{d\phi_1}{dt} + k\phi_1 \right) dt & \int_0^{0.25} \left(\frac{d\phi_2}{dt} + k\phi_2 \right) dt & 0 \\ \int_{0.25}^{0.75} \left(\frac{d\phi_1}{dt} + k\phi_1 \right) dt & \int_{0.25}^{0.75} \left(\frac{d\phi_2}{dt} + k\phi_2 \right) dt & \int_{0.25}^{0.75} \left(\frac{d\phi_3}{dt} + k\phi_3 \right) dt \\ 0 & \int_{0.75}^{1.0} \left(\frac{d\phi_2}{dt} + k\phi_2 \right) dt & \int_{0.75}^{1.0} \left(\frac{d\phi_3}{dt} + k\phi_3 \right) dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \int_0^{0.25} kT_e dt \\ \int_{0.25}^{0.75} kT_e dt \\ \int_{0.75}^{1.0} kT_e dt \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19.) daki integralin hesabı matris denkleminin son formunu verir.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 + \frac{3k}{8} & 1 + \frac{k}{8} & 0 \\ -1 + \frac{k}{8} & \frac{3k}{4} & 1 + \frac{k}{8} \\ 0 & -1 + \frac{k}{8} & 1 + \frac{3k}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{kT_e}{2} \\ kT_e \\ \frac{kT_e}{2} \end{bmatrix} \tag{3.20.}$$

(3.20.) den elde edilen çözümün doğruluğu denklemlerin seçimine bağlıdır.

2. ve 3. denklemlerden

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.684, 0.579]$$

1. ve 3. denklemlerden

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.600, 0.543]$$

1. ve 2. denklemlerden

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.600, 0.680]$$

elde edilir. Denklem Dirichlet düğümlelerinde yazıldığında Galerkin formülünden elde edilen çözümlerin daha az doğru olduğu anlaşılır. Çözüm en iyi Galerkin ve subdomain formülleri kullanılarak belirlenir.

3- Collocation: Bu metod (3.13) ağırlık fonksiyonu için Dirac delta fonksiyonunun yerine konmasıyla elde edilir. Bu şu ifadeyi sağlar.

$$\sum_{j=1}^3 T_j \int_t \left\{ \frac{d\phi_j}{dt} + k(\phi_j - T_e) \right\} \delta(t - t_i) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.21$$

Seçilen noktalar için problemi belirleyelim, 3 belirsiz katsayı bulunur. Bununla birlikte $t = 0$ da bir nokta seçilmiş başlangıç koşulları bir bilinmeyeni belirler. Kalan iki nokta herhangi bir aralıkta yerleştirilebilir.

$$0 < t < 0.5 \text{ ve } 0.5 < t < 1.0$$

$t = 0.5$ deki bir nokta ek belirlemelerle gösterilebilir. Deneme fonksiyonu noktalarda süreklidir. Fakat türevi süresizdir, seçilen değer keyfidir.

Daha doğru collocation planı bu noktalardaki Gaussian integrasyonu kullanılarak geliştirilebilir. Çünkü bu örnekte kullandığımız lineer fonksiyondur, her eleman için bir Gaussian nokta vardır ve bu noktalar $t = 0.25$ ve $t = 0.75$ de yerleştirilir. (3.21) denklemini matris formunda şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{dt} + k\phi_1 |_{0.0} & 0 & 0 \\ \frac{d\phi_1}{dt} + k\phi_1 |_{0.25} & \frac{d\phi_2}{dt} + k\phi_2 |_{0.25} & 0 \\ 0 & \frac{d\phi_2}{dt} + k\phi_2 |_{0.75} & \frac{d\phi_3}{dt} + k\phi_3 |_{0.75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} kT_e |_{0.0} \\ kT_e |_{0.25} \\ kT_e |_{0.75} \end{bmatrix} \quad 3.22
\end{aligned}$$

Collocation planının en önemli özelliği bu ifadede gösterilmiştir. Böylece (3.22) deki ikinci denklem T_1 için T_3 e bağlıdır. Katsayılar matrisinin hesabı ve başlangıç koşulunun birleşimi ile

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + \frac{k}{2} & 2 + \frac{k}{2} & 0 \\ 0 & -2 + \frac{k}{2} & 2 + \frac{k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ kT_e \\ kT_e \end{bmatrix} \quad 3.23$$

elde edilir. Katsayılar için denklem (3.23.) şu çözümü sağlar.

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.667, 0.555]$$

Collocation planının performansının bu örnekte yetersiz olmasına karşın, bu metod görünen çeşitli noktalardan daha ilginçtir. Katsayılar matrisi kolayca genelleştirilebilir. Matris yapısı eşitlik çözümünün olasılığını önerir. Aynı zamanda yüksek mertebeden sürekli temel fonksiyonlara genelleştirilir.

Collocation ve Galerkin metodları arasındaki ilişkiyi inceleyelim. Bunu yapmak için (3.15.) den oluşan matris denklemini yeniden ele alalım. Bir noktalı Gaussian katsayılar matrisinde integral hesabı için kullanılır.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \left(\frac{d\phi_1}{dt} \phi_1 + k\phi_1\phi_1 \right) dt \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{d\phi_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \phi_1 + k\phi_1\phi_1 \right) \frac{dt}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \left(4 \frac{d\phi_1}{d\xi} \phi_1 + k\phi_1\phi_1 \right) \frac{1}{4} d\xi \\
&= \frac{d\phi_1}{d\xi} \phi_1 \Big|_{\xi=0} (2) + \frac{k\phi_1\phi_1}{4} \Big|_{\xi=0} (2) = 2 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{k}{16} \right) = \frac{2}{4} \left(-1 + \frac{k}{4} \right)
\end{aligned}$$

Gaussian noktası $\xi = 0$ da verildiğinde ve ağırlık fonksiyonu 2 olduğunda.

(3.15) in kalan elemanları için tek noktalı Gaussian integrali

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 + \frac{k}{4} & 1 + \frac{k}{4} & 0 \\ -1 + \frac{k}{4} & (-1 + \frac{k}{4}) + (-1 + \frac{k}{4}) & 1 + \frac{k}{4} \\ 0 & -1 + \frac{k}{4} & 1 + \frac{k}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{kT_e}{2} \\ kT_e \\ \frac{kT_e}{2} \end{bmatrix} \quad 3.24$$

dir. Gaussian $-1 \leq \xi \leq 1$ aralığında daha iyidir. Denklem (3.24), (3.16) ya benzer, Galerkin denkleminin tam integralinden elde edilir. Gerçekten sınır koşulundan dolayı belirlenen 2. ve 3. noktalar eşittir. Bunu elde etmek için $\frac{1}{4}$ çarpanı ile (3.23) ün çarpılması ve (3.24) ün 2. ve 3. satırlara eklenmesi gerekir.

3.3 Temel Fonksiyonların Seçimi

Bir ağırlık rezidü metodunun doğruluğu ve verim oranı temel fonksiyonun seçimine bağlıdır. Bu bölümde esas olarak yüksek dereceden polinomları tanı-
tacağız.

Lineer Polinom Tabanları: Chapeau fonksiyonları herbir eleman üstünde düğümlerin bilgisini lineer olarak interpolate ederler. Bir başka deyişle düğümlerde sadece verilen eleman içinde herhangi bir yerde çözüm elde edilebilir.

Örneğin önceki bölümde Galerkin yaklaşımını kullanarak elde ettiğimiz çok doğru bir sonuçtur. Düğümelerde bulduğumuz

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.678, 0.571]$$

Çözümün düğüm değerine uymayan $t = 0.25$ noktasında istendiğini varsayalım. (3.11.) den elde ettiğimiz

$$T \approx \hat{T} = \sum_{j=1}^3 T_j \phi_j(t)$$

$t = 0.25$ durumunun gerektirdiği çözüm

$$\begin{aligned} T \big|_{0.25} &\approx \hat{T} \big|_{0.25} = T_1 \phi_1 \big|_{0.25} + T_2 \phi_2 \big|_{0.25} + T_3 \phi_3 \big|_{0.25} \\ &= (1)(0.5) + (0.678)(0.5) + (0.571)(0.0) = 0.839 \end{aligned}$$

dir Analitik çözüm ise $T(0.25) = 0.803$ dür.

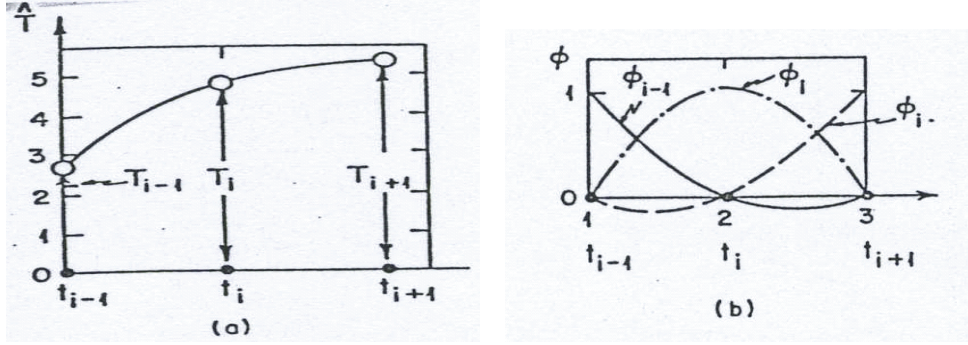
Kuadratik Polinom Tabanları: Herbir eleman üzerindeki bir kuadratik interpolasyon tanımını göz önüne alalım. İnterpolasyon fonksiyonu aynı zamanda bir temel fonksiyondur.

$$\phi = a + bt + ct^2 \tag{3.25}$$

Çünkü bu kuadratik bir fonksiyondur, a, b, c katsayılarını tanımlamak gerekir. Herbir kuadratik elemanda istenen 3 düğüm şekil 3.3 da gösterilmiştir. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_{i-1} & t_{i-1}^2 \\ 1 & t_i & t_i^2 \\ 1 & t_{i+1} & t_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

dir.



Şekil 3.3. Kuadratik temel fonksiyonlar

Verilen denklemi şöyle çözebiliriz.

$$a = \frac{t_i t_{i+1}}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})} \quad 3.27a$$

$$b = \frac{-(t_i + t_{i+1})}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})} \quad 3.27b$$

$$c = \frac{1}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})} \quad 3.27c$$

Temel fonksiyonlar (3.25) de (3.27) nin yerine konmasıyla

$$\phi_{i-1} = \left(\frac{t_i t_{i+1}}{\Delta_{i-1}} \right) - \left(\frac{t_i + t_{i+1}}{\Delta_{i-1}} \right) t + \frac{t^2}{\Delta_{i-1}} \quad 3.28a$$

elde edilir. Burada $\Delta_{i-1} \equiv (t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_{i-1})$ alındı. Temel fonksiyonlar,

$\Delta_i \equiv (t_i - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)$ olduğunda.

$$\phi_i = \left(\frac{t_{i-1} t_{i+1}}{\Delta_i} \right) - \left(\frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{\Delta_i} \right) t + \frac{t^2}{\Delta_i} \quad 3.28b$$

$\Delta_{i+1} \equiv (t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})$ olduğunda.

$$\phi_{i+1} = \left(\frac{t_i t_{i+1}}{\Delta_{i+1}} \right) - \left(\frac{t_{i-1} + t_i}{\Delta_{i+1}} \right) t + \frac{t^2}{\Delta_{i+1}} \quad 3.28c$$

olarak bulunur. Oysa kuadratik temel fonksiyonlar (3.28) tanımıyla ağırlık rezidü metodunda doğrudan kullanılabilir. Önceki bölümde tanımlanan ξ koordinat sistemindeki yüksek dereceden polinomları geliştirmek gerekir. Koordinat sisteminin bu seçimi Gaussian yoluyla sayısal integralleri kolaylaştırır.

Kuadratik temel fonksiyonlar t koordinatı için benzer bir yolla ξ koordinat sistemindeki gibi geliştirilebilir. Sonuç fonksiyonları tablo 3.4 de tanımlanmıştır ve şekil 3.4 de gösterilmiştir.

$$\phi(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 \quad 3.29$$

kuadratik polinomun belli bir noktadaki kullanımıyla

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad 3.30$$

matris denkleminin a, b, c için aşağıdaki çözüm sağladığı görülür.

$$[a, b, c] = \left[0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad 3.31$$

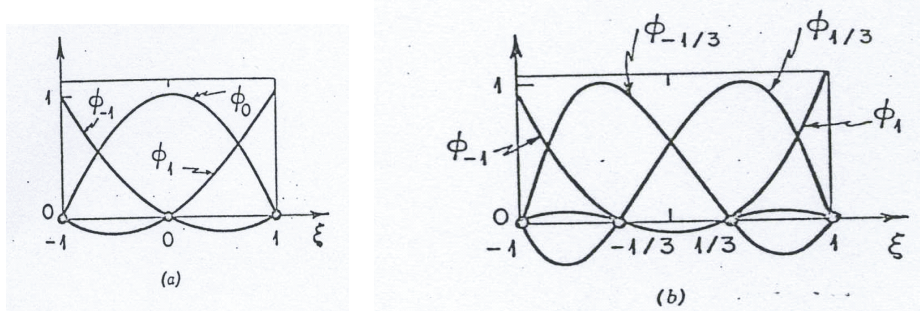
(3.29) de (3.31) i yerine koyarak gerekli temel fonksiyon

$$\phi_{-1}(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \quad 3.32a$$

olarak bulunur.

Tablo 3.1. ξ Koordinat Sisteminde Tanımlı Lineer, Kuadratik ve Kübik Temel Fonksiyonlar

Derece	Fonksiyon	Form ($-1 \leq \xi \leq 1$)
Lineer	$\phi_{-1}(\xi)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$
Lineer	$\phi_1(\xi)$	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$
Kuadratik	$\phi_{-1}(\xi)$	$-\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)$
Kuadratik	$\phi_0(\xi)$	$1 - \xi^2$
Kuadratik	$\phi_1(\xi)$	$\frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$
Kübik	$\phi_{-1}(\xi)$	$\frac{1}{16}(-9\xi^3 + 9\xi^2 + \xi - 1)$ veya $\frac{1}{16}(1 - \xi)(9\xi^2 - 1)$
Kübik	$\phi_{-1/3}(\xi)$	$\frac{9}{16}(3\xi^3 - \xi^2 - 3\xi + 1)$ veya $\frac{9}{16}(3\xi - 1)(\xi^2 - 1)$
Kübik	$\phi_{1/3}(\xi)$	$\frac{9}{16}(-3\xi^3 - \xi^2 + 3\xi + 1)$ veya $-\frac{9}{16}(3\xi + 1)(\xi^2 - 1)$
Kübik	$\phi_1(\xi)$	$\frac{1}{16}(9\xi^3 + 9\xi^2 - \xi - 1)$ veya $\frac{1}{16}(1 + \xi)(9\xi^2 - 1)$



Şekil 3.4. ξ koordinat sisteminde tanımlı **a.** kuadratik **b.** kübik temel fonksiyonlar

Kalan iki taban benzer bir yoldan formüle edilebilir ve sonuç denklemleri

$$\phi_0(\xi) = 1 - \xi^2 \quad 3.32b$$

ve

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \quad 3.32c$$

olarak elde edilir. ξ koordinat sisteminde tanımlı yüksek dereceden temel fonksiyonların kullanımını göstermek için kuadratik tabanları kullanalım. $T(0) = 1$, $T_e = 0.5$, $k = 2$ ve $0 \leq t \leq 1$ dir. Yaklaşım denklemleri Galerkin metodları kullanılarak (3.15) e benzer bir şekilde genelleştirilir. Çünkü bir tek eleman bütün $0 \leq t \leq 1$ alanını oluşturur. Katsayı matrisi

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1}{dt} \phi_1 + k\phi_1\phi_1 \right) dt & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_2}{dt} \phi_1 + k\phi_2\phi_1 \right) dt & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_3}{dt} \phi_1 + k\phi_3\phi_1 \right) dt \\ \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1}{dt} \phi_2 + k\phi_1\phi_2 \right) dt & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_2}{dt} \phi_2 + k\phi_2\phi_2 \right) dt & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_3}{dt} \phi_2 + k\phi_3\phi_2 \right) dt \\ \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1}{dt} \phi_3 + k\phi_1\phi_3 \right) dt & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_2}{dt} \phi_3 + k\phi_2\phi_3 \right) dt & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_3}{dt} \phi_3 + k\phi_3\phi_3 \right) dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 kT_e\phi_1 dt \\ \int_0^1 kT_e\phi_2 dt \\ \int_0^1 kT_e\phi_3 dt \end{bmatrix} \quad 3.33$$

dir. Katsayılar matrisindeki integraller ξ uzayında tanımlı tabanlar kullanılarak hesaplanabilir. t den ξ ye bir dönüşümle

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1(\xi)}{dt} \phi_1(\xi) + k\phi_1(\xi)\phi_1(\xi) \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \phi_1(\xi) + k\phi_1(\xi)\phi_1(\xi) \right) \frac{d\xi}{dt} dt \end{aligned} \quad 2.34$$

olur. $\frac{d\xi}{dt} = 2$ olduğundan ve (3.34.) den

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{d\phi_1(\xi)}{dt} \phi_1(\xi) + k\phi_1(\xi)\phi_1(\xi) \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} \phi_1(\xi) + \frac{k}{2} \phi_1(\xi)\phi_1(\xi) \right) dt \end{aligned} \quad 3.35$$

yazabiliriz. Nümerik integrali sağlamak için veya bu noktada doğrudan birleştirmek için bir seçenek vardır. Bunu son matris denklemi için (3.33) de yerine koyalım.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{2k}{15} & \frac{2}{3} + \frac{k}{15} & -\frac{1}{6} - \frac{k}{30} \\ -\frac{2}{3} + \frac{k}{15} & 0 + \frac{8k}{15} & \frac{2}{3} + \frac{k}{15} \\ \frac{1}{6} - \frac{k}{30} & -\frac{2}{3} + \frac{k}{15} & \frac{1}{2} + \frac{2k}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_e k \\ \frac{4}{6}T_e k \\ \frac{1}{6}T_e k \end{bmatrix} \quad 3.36$$

(3.36) nın çözümü

$$[T_1, T_2, T_3] = [1, 0.696, 0.571]$$

dir. Şimdi düğümlerin değerini bulmak için

$$\begin{aligned} \hat{T}(0.25) &= T_1\phi_1(0.25) + T_2\phi_2(0.25) + T_3\phi_3(0.25) \\ &= (1)\left(\frac{3}{8}\right) + (0.696)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.571)\left(-\frac{1}{8}\right) = 0.826 \end{aligned}$$

kuadratik interpolasyon fonksiyonunu kullanalım. Benzer olarak $\hat{T}(0.75) = 0.611$ olarak bulunur.

Bu örnekte kuadratik eleman formülü lineer elemanların düğümlerinden daha az doğruluk sağlar, fakat orta değerler çok daha doğrudurlar. Bu durumda lineer ve kuadratik elemanların her ikisinde $O(h^2)$ mertebededir.

Kübik Polinom Tabanları: Polinomların derecesi için limit olmamasına rağmen temel fonksiyon yerine getirilebilir, kübik genel kullanımda bulunan en yüksek derecedir. Sebepleri 3 tanedir.

1- Polinomların yüksek derecelileri ağırlık rezidü metodundaki cebirsel denklemleri çözmek için daha uygundur.

2- Sayısal amaç, polinom artışının derecesinde sayısal integral artışını kullanan katsatı matrisini üretmektir.

3- Yüksek dereceden polinomlar homojen olmayan problemlerde sakıncalı olabilen geniş eleman boyutlarına sebep olur. Kübik temel fonksiyonlar tablo 3.4 de tanımlanmıştır, şekil 3.4b de gösterilmiştir ve kuadratik tabanlar gibi elde edilirler.

Lagrange Polinomları: Böyle geliştirilen temel fonksiyon Lagrange polinomları kullanılarak doğrudan formüle edilebilir. Lagrange polinomu $l_i(\xi)$ ile verilir.

$$l_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0) \cdots (\xi - \xi_{i-1}) (\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_0) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1}) (\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_n)}$$

$n = 1$ ve yalnız bir terim içeren lineer temel fonksiyonların durumunu göz önüne alalım. Çünkü yalnız iki düğüm vardır, $i = -1$ ile $\phi_i(\xi)$ için $\xi_{i+1} = 1$ ve $\xi_i = -1$ olduğunu biliyoruz, $i = 1$ ile $\xi_{i-1} = -1$ ve $\xi_i = 1$ de benzer olarak bulunur. Bu değerleri kullanarak

$$\phi_{-1} = l'_i |_{\xi=-1} = -\frac{\xi - \xi_{i+1}}{\xi_{i+1} - \xi_i} = \frac{1 - \xi}{2}$$

ve

$$\phi_1 = l'_i |_{\xi=1} = -\frac{\xi - \xi_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} = \frac{\xi + 1}{2}$$

elde ederiz. İkinci örnekteki kuadratik tabanları göz önüne alalım. Merkez düğüm için temel fonksiyonlar tanımlanmıştır. $\xi = 0$, ξ_k nın bu değerleri için $\xi_{i-1} = 1$, $\xi_i = 0$, $\xi_{i+1} = 1$ olarak göz önüne alınabilir. Lagrange polinomlarının seçilen terimleri bu değerleri içerir.

$$\phi_0 = l_i^2 |_{\xi=0} = \frac{(\xi - \xi_{i-1}) (\xi - \xi_{i+1})}{(\xi_i - \xi_{i-1}) (\xi_i - \xi_{i+1})} = \frac{\xi + 1}{1} \frac{1 - \xi}{1} = 1 - \xi^2$$

ϕ_{-1} temel fonksiyonu ξ_k nın şu değerlerini içerir.

$$\xi_i = -1, \xi_{i+1} = 0, \xi_{i+2} = 1$$

l_i^n nin tanımından

$$\phi_{-1} = l_i^2 |_{\xi=-1} = \frac{(\xi - \xi_{i+1})(\xi - \xi_{i+2})}{(\xi_i - \xi_{i+1})(\xi_i - \xi_{i+2})} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{\xi^2 - \xi}{2}$$

yazılabilir. ϕ_1 fonksiyonu benzer bir yoldan elde edilebilir.

Hermite Polinom Tabanları: Hermite polinomları eleman üzerinde ikinci dereceden (C^2) türev, sürekli olan ve elemanlar arasında birinci dereceden (C') türevinde süreklilik gösterirler. Böylece Hermite interpolasyonu yalnızca fonksiyonun düğüm değerlerini interpolate etmezler, aynı zamanda ardışık türevlerin verilen sayısının düğüm değerlerindeki de interpolate ederler. Bir simülasyon adımından sonuçlanan çözüm ikinci adımda kullanım için ilgi çekicidir. Bu durumlar difüzyon denklemindeki kullanılan parametreler bilindiğinde hızı bulmak için potansiyel denklemini diferensiyellenir.

Çünkü Hermite bir kübik polinomdur, 4 parametrenin tekliğinin tanımlanması gerekir. Böylece dört koşul bu parametreleri hesaplamak için kullanılmalıdır. Lagrange ın kübik tanımında kalan 3 düğümün tanımlı olduğu temel fonksiyonları sadeleştirmiştik. Bu koşullar Hermite te de geçerlidir. Bu alternatif kısıtlamaların nasıl oluştuğunu görmek için Hermite tabanlarındaki bir T fonksiyonunun genel ifadesini göz önüne alalım.

$$T \approx \hat{T} = \sum_{j=1}^N T_j \phi_{0j} + \frac{dT_j}{dt} \phi_{1j} \quad 3.37$$

burada N düğümlerin sayısıdır.

(3.37) ifadesi Hermite açılımının iki önemli yolda farklılık gösterdiğini meydana çıkarır.

1- Herbir düğüm iki belirsiz katsayıya sahiptir. (T_j ve $\frac{dT_j}{dt}$ gibi)

2- Herbir düğüm iki temel fonksiyonu ϕ_{0j} ve ϕ_{1j} ile tanımlanırlar.

C^0 polinomları durumunda ϕ_{0j} ve ϕ_{1j} temel fonksiyonları $\hat{T} |_{t=j\Delta t} = T_j$ de tanımlıdır. Ek olarak, türevde benzer kısıtlamalar getiririz.

$$\frac{d\hat{T}}{dt} |_{t=j\Delta t} = \frac{dT_j}{dt}$$

Temel fonksiyon ve türev kısıtlaması arasındaki ilişkiyi kurmak için (3.37) nin türevini inceleyelim.

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{d\hat{T}}{dt} = \sum_{j=1}^N T_j \frac{d\phi_{0j}}{dt} + \frac{dT_j}{dt} \frac{d\phi_{1j}}{dt}$$

Temel fonksiyonlar için ξ koordinatında daha uygun ifadeler vardır, t koordinat sisteminde çözümümüz, türevin zincir kuralı uygulanarak elde edilir.

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{d\hat{T}}{dt} = \sum_{j=1}^N T_j \frac{d\phi_{0j}}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{dT_j}{dt} \frac{d\phi_{1j}}{d\xi} \frac{d\xi}{dt}$$

$$T_j \frac{d\phi_{0j}}{d\xi} \frac{d\xi}{dt}$$

terimi düğümlerde her zaman yok edilecek, çünkü $\frac{d\phi_{0j}}{d\xi}$ bütün düğümlerde sıfır olarak tanımlıdır. Göstermek için

$$\frac{d\hat{T}}{dt} |_{t=j\Delta t} = \frac{dT_j}{dt}$$

olup, o zaman

$$\frac{d\phi_{1j}}{d\xi} \frac{d\xi}{dt}$$

j düğümünde tek ve diğer düğümlerde sıfır olmalıdır. Bu j . düğüm dışında bütün düğümleri yok etmek için $\frac{d\phi_{1j}}{d\xi}$ yi zorlamaktır ve $\frac{d\phi_{1j}}{d\xi} = \frac{dt}{d\xi}$ eşitliği sağlanır.

$$\frac{dt}{d\xi} \approx \frac{\Delta t}{\Delta \xi} = \frac{\Delta t}{2}$$

olduğunu varsayalım. $\frac{dt}{d\xi} \approx \frac{\Delta t}{\Delta \xi}$ nin sürekli olmadığına dikkat ediniz. Bu ϕ_{0j} ve ϕ_{1j} nin formunu kuralım.

İnterpole fonksiyonunu ξ koordinat sisteminde $-1 \leq \xi \leq 1$ tanımlı bir kübik polinomun terimlerinde yazalım.

$$\phi_{0j} = a_0 + b_0\xi + c_0\xi^2 + d_0\xi^3 \quad 3.38$$

ve

$$\frac{d\phi_{0j}}{d\xi} = b_0 + 2c_0\xi + 3d_0\xi^2 \quad 3.39$$

olur. Kısıtlamalardan dolayı ϕ_{0j} de kalırız, ϕ_{01} in özel bir durumu için şunları düzenleyebiliriz.

$$\phi_{01} |_{-1} = 1 = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 \quad 3.40a$$

$$\phi_{01} |_{1} = 0 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 \quad 3.40b$$

$$\frac{d\phi_{01}}{d\xi} |_{-1} = 0 = 0 + b_0 - 2c_0 + 3d_0 \quad 3.40c$$

$$\frac{d\phi_{01}}{d\xi} |_{1} = 0 = 0 + b_0 + 2c_0 + 3d_0 \quad 3.40d$$

Bu denklemler .

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.41$$

matris formunda yazılabilir Bu denklemin çözümü

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

katsayılar vektörünü sağlar. ϕ_{01} temel fonksiyonu yer değiştirmeyeyle

$$\phi_{01} = \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 2) \quad 3.42a$$

olarak elde edilir. Benzer tartışma elemandaki diğer düğüm için geliştirilebilir.

Sonuç denklemi

$$\phi_{02} = \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 2) \quad 3.42b$$

dir. Birinci türev için interpolasyon fonksiyonu bir kübik polinomdan türevlenmiştir.

$$\phi_{11} = a_1 + b_1\xi + c_1\xi^2 + d_1\xi^3 \quad 3.43$$

(3.43) de uygun kısıtlamalarla

$$\phi_{11} |_{-1} = 0 = a_1 - b_1 + c_1 - d_1 \quad 3.44a$$

$$\phi_{11} |_{1} = 0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \quad 3.44b$$

$$\frac{d\phi_{11}}{d\xi} \Big|_{-1} = \frac{\Delta t}{2} = 0 + b_1 - 2c_1 + 3d_1 \quad 3.44c$$

$$\frac{d\phi_{11}}{d\xi} \Big|_1 = 0 = 0 + b_1 + 2c_1 + 3d_1 \quad 3.44d$$

yazılır. (3.44) den elde ettiğimiz matris denklemi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.45$$

olup burada

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta t}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. T 'nin türevi ile ilgili temel fonksiyon (3.43.) de yerine koymayla elde edilir.

$$\phi_{11} = \frac{\Delta t}{8} (\xi + 1) (\xi - 1)^2 \quad 3.46a.$$

Benzer gelişme elemandaş diğer düğümle ilgili fonksiyonda oluşur.

$$\phi_{12} = \frac{\Delta t}{8} (\xi + 1)^2 (\xi - 1) \quad 3.46b$$

ξ açısından temel fonksiyonu tanımlamak için bazı avantajlar vardır. Böylece ifade yeni temel fonksiyondur.

$$\phi_{11} = \frac{dt}{d\xi} \phi'_{11}$$

ϕ'_{11} verildiğinde

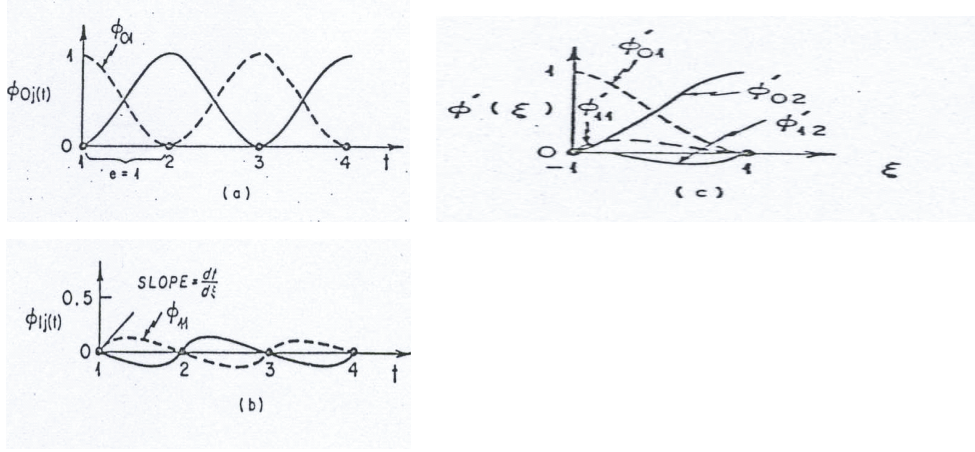
$$\phi'_{11} = \frac{1}{4} (\xi + 1) (\xi - 1)^2 \quad 3.47$$

şekil 2.8c de gösterilmiştir. Benzer olarak ϕ_{12} fonksiyonundan

$$\phi'_{12} = \frac{1}{4} (\xi + 1)^2 (\xi - 1) \quad 3.48$$

elde ederiz. Kavramları aydınlatmak Hermite polinomlarının kullanımını içerir.

Bir kez daha Galerkin metodunun kullanıldığı örneği göz önüne alacağız.



Şekil 3.5. Lokal ve global koordinatlarda Hermite kübik polinomu

Amaç denklemi çözmektir. Bunun için

$$T(0) = 1, \quad T_e = 0.5, \quad k = 2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

alalım. Cebirsel denklem yaklaşımının genelleştirilmesinde ilk adım verilen için bilinmeyen fonksiyonun açılımıdır.

$$T \approx \hat{T} = \sum_{j=1}^2 T_j \phi_{0j} + \frac{dT_j}{dt} \phi_{1j} \quad 3.49$$

Problem sadece bir elemandan oluşur, iki düğüm noktası vardır. Çünkü Hermite polinomlarını kullanıyoruz. Şekil 3.5 da gösterilmiştir. Galerkin

metodu (3.9) de (3.49) un yerine konmasıyla bütün tabanlara ortogonal olur.

Bu cebirsel olarak şöyle ifade edilir.

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d\hat{T}}{dt} + k(\hat{T} - T_e) \right\} \phi_{\alpha i} dt = 0, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 0, 1 \quad 3.50$$

(3.50) de (3.49) un yerine konmasıyla elde edilen

$$\sum_{j=1}^2 T_j \int_0^1 \left\{ \frac{d\phi_{0j}}{dt} + k\phi_{0j} \right\} \phi_{\alpha i} dt + \sum_{j=1}^2 \frac{dT_j}{dt} \int_0^1 \left(\frac{d\phi_{1j}}{dt} + k\phi_{1j} \right) \phi_{\alpha i} dt - \int_0^1 kT_e \phi_{\alpha i} dt = 0 \quad 3.51$$

(3.51) denklemini matris formunda

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{d\phi_{01}}{dt} + k\phi_{01} \right) \phi_{01} & \left(\frac{d\phi_{11}}{dt} + k\phi_{11} \right) \phi_{01} & \left(\frac{d\phi_{02}}{dt} + k\phi_{02} \right) \phi_{01} & \left(\frac{d\phi_{12}}{dt} + k\phi_{12} \right) \phi_{01} \\ \left(\frac{d\phi_{01}}{dt} + k\phi_{01} \right) \phi_{11} & \left(\frac{d\phi_{11}}{dt} + k\phi_{11} \right) \phi_{11} & \left(\frac{d\phi_{02}}{dt} + k\phi_{02} \right) \phi_{11} & \left(\frac{d\phi_{12}}{dt} + k\phi_{12} \right) \phi_{11} \\ \left(\frac{d\phi_{01}}{dt} + k\phi_{01} \right) \phi_{02} & \left(\frac{d\phi_{11}}{dt} + k\phi_{11} \right) \phi_{02} & \left(\frac{d\phi_{02}}{dt} + k\phi_{02} \right) \phi_{02} & \left(\frac{d\phi_{12}}{dt} + k\phi_{12} \right) \phi_{02} \\ \left(\frac{d\phi_{01}}{dt} + k\phi_{01} \right) \phi_{12} & \left(\frac{d\phi_{11}}{dt} + k\phi_{11} \right) \phi_{12} & \left(\frac{d\phi_{02}}{dt} + k\phi_{02} \right) \phi_{12} & \left(\frac{d\phi_{12}}{dt} + k\phi_{12} \right) \phi_{12} \end{bmatrix}$$

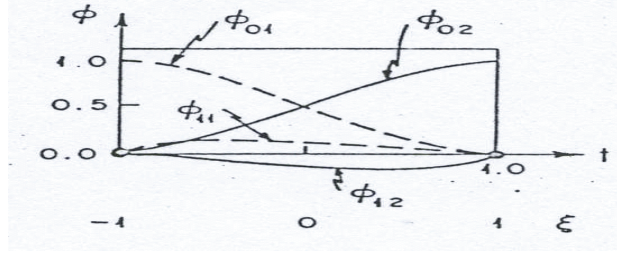
ve

$$B = \begin{bmatrix} T_1 \\ \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A.B = \begin{bmatrix} \int_0^1 kT_e \phi_{01} dt \\ 0 \\ \int_0^1 kT_e \phi_{11} dt \\ 0 \\ \int_0^1 kT_e \phi_{02} dt \\ 0 \\ \int_0^1 kT_e \phi_{12} dt \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 3.6. Hermite taban fonksiyonları örnek problem için tanımlanmıştır.

T_j ve $\frac{dT_j}{dt}$ belirsiz katsayıları için (3.52) yi çözmek için, katsayılar matrisindeki integralleri çözmek gerekir. T_1 başlangıç koşulunda ($T(0) = 1$) biliniyor. Matris denkleminde

$$\begin{bmatrix} 0.242 & 0.205 & 0.757 & -0.162 \\ 0.00476 & 0.0190 & 0.162 & -0.0309 \\ -0.243 & -0.0381 & 1.24 & -0.00476 \\ 0.0381 & 0.00238 & -0.205 & 0.0190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.0833 \\ 0.500 \\ -0.0833 \end{bmatrix} \quad 3.53a.$$

ilk satır elimine edilirse

$$\begin{bmatrix} 0.0190 & 0.162 & -0.0309 \\ -0.0381 & 1.24 & -0.00476 \\ 0.00238 & -0.205 & 0.0190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0833 \\ 0.500 \\ -0.0833 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00476 \\ -0.243 \\ 0.0381 \end{bmatrix} \quad 3.53b.$$

elde edilir.(3.53b) nin sağ tarafındaki ikinci terimin içerdiği bilgiler başlangıç koşulunda türevlenmiştir. Katsayılar matrisinin tersiyle bilinmeyen parametreler bulunur.

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.3 & 7.45 & 89.7 \\ 1.68 & 0.996 & 2.48 \\ 11.1 & 9.80 & 68.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0785 \\ 0.743 \\ -0.121 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.937 \\ 0.570 \\ -0.131 \end{bmatrix} \quad 3.54$$

$T_2 = 0.570$ parametresi $t = 1$ deki sıcaklığıdır ve 0.568 analitik değeriyle karşılaştırılırsa oldukça iyi bir sonuçtur. Orta noktadaki ($t = 0.5$) sıcaklık (3.49) açılımından hesaplanır.

$$T \approx \hat{T} = \sum_{j=1}^2 T_j \phi_{0j} + \frac{dT_j}{dt} \phi_{1j}$$

$\xi = 0$ da ϕ_{0j} ve ϕ_{1j} nin hesaplaması T_j ile $\frac{dT_j}{dt}$ değerlerinin yerine konmasıyla

$$\hat{T}(0.5) = (1.00)(0.500) - (0.937)(0.125) + (0.570)(0.500) + (0.131)(0.125) = 0.684$$

olarak bulunur. Şekiller için bu sonuç analitikle özdeştir. Hermite kübiğini çalıştıran Galerkin metodunun diğer metodlardan üstün olduğu problemimizden kolayca anlaşılır. Unutulmamalıdır ki bu yaklaşım üç eşitlik üretti, oysa önceden göz önüne aldığımız planlar sadece iki eşitlik üretti.

(3.52) nin katsayılar matrisinden Galerkin metodunda içerilen daha karmaşık tabanların olduğu açıktır. Sonuç olarak collocation metoduyla birlikte Hermite'in kullanımını incelemek gerekir.

Collocation yaklaşımında ağırlık rezidü metodu formülü şöyle verilir.

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d\hat{T}}{dt} + k(\hat{T} - T_e) \right\} \delta(t - t_i) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad 3.55$$

t_i belirlenen noktaların yeridir. Noktalar Gauss noktaları olarak seçildiğinde daha doğru nümerik planlar elde edilir. Önceden bu ortogonal olarak biliniyordu. Elemanda iki Gauss noktası kullanırız ve sınır koşullarında iki ek

nokta vardır. Eğer problemde elemanların sayısı arttırılırsa buna dikkat etmek gerekir, bütün noktalar Gauss noktasında seçilebilirler. (3.52.) nin aksine bu ξ koordinat sisteminde hesaplamaları gerçekleştirir. Böylece (3.55) gibi yazabiliriz.

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{d\hat{T}}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + k(\hat{T} - T_e) \right\} \delta(\xi - \xi_i) \frac{dt}{d\xi} d\xi = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.56)$$

(3.56) denklemini şu matris denklemini sağlar.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{d\phi_{01}}{d\xi} + k\phi_{01} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-1} & \frac{d\phi_{11}}{d\xi} + k\phi_{11} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-1} & \frac{d\phi_{02}}{d\xi} + k\phi_{02} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-1} & \frac{d\phi_{12}}{d\xi} + k\phi_{12} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-1} \\ \frac{d\phi_{01}}{d\xi} + k\phi_{01} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-0.5} & \frac{d\phi_{11}}{d\xi} + k\phi_{11} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-0.5} & \frac{d\phi_{02}}{d\xi} + k\phi_{02} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-0.5} & \frac{d\phi_{12}}{d\xi} + k\phi_{12} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=-0.5} \\ \frac{d\phi_{01}}{d\xi} + k\phi_{01} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=0.5} & \frac{d\phi_{11}}{d\xi} + k\phi_{11} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=0.5} & \frac{d\phi_{02}}{d\xi} + k\phi_{02} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=0.5} & \frac{d\phi_{12}}{d\xi} + k\phi_{12} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=0.5} \\ \frac{d\phi_{01}}{d\xi} + k\phi_{01} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=1} & \frac{d\phi_{11}}{d\xi} + k\phi_{11} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=1} & \frac{d\phi_{02}}{d\xi} + k\phi_{02} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=1} & \frac{d\phi_{12}}{d\xi} + k\phi_{12} \frac{dt}{d\xi}_{\xi=1} \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} T_1 \\ \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A.B = \begin{bmatrix} kT_e \frac{dt}{d\xi} \\ kT_e \frac{dt}{d\xi} \\ kT_e \frac{dt}{d\xi} \\ kT_e \frac{dt}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

(3.57) nin katsayılar matrisi (3.42) ve (3.46) dan verilen temel fonksiyon tanımları kullanılarak şimdi hesaplanabilir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 + 0.500k & 0.500\Delta t + 0 & 0 + 0 & 0 + 0 \\ -0.500 + 0.442k & 0.144\Delta t + 0.0657k & 0.500 + 0.0576k & -0.144\Delta t - 0.0176k \\ -0.500 + 0.0576k & -0.144\Delta t + 0.0176k & 0.500 + 0.442k & 0.144\Delta t - 0.0657k \\ 0 + 0 & 0 + 0 & 0 + 0.500k & 0.500\Delta t + 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} T_1 \\ \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A.B = \begin{bmatrix} \frac{kT_e}{2} \\ \frac{kT_e}{2} \\ \frac{kT_e}{2} \\ \frac{kT_e}{2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

k ve T_e nin yaklaşık değerlerini yerine koyarsak

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.500 & 0 & 0 \\ 0.384 & 0.275 & 0.615 & -0.179 \\ -0.384 & -0.109 & 1.384 & 0.0126 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.500 \\ 0.500 \\ 0.500 \end{bmatrix} \quad 3.59$$

T_1 in değerinden dolayı sınır koşullarıyla verilir, tekrar 1. satırı elimine edelim ve son matris denklemini çözelim.

$$\begin{bmatrix} 0.275 & 0.615 & -0.179 \\ -0.109 & 1.384 & 0.0126 \\ 0 & 1.00 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 - 0.384 \\ 0.500 + 0.384 \\ 0.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.116 \\ 0.884 \\ 0.500 \end{bmatrix} \quad 3.60.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ T_2 \\ \frac{dT_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.83 & -2.03 & 1.06 \\ 0.227 & 0.573 & 0.0669 \\ -0.454 & -1.15 & 1.86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.936 \\ 0.566 \\ 0.139 \end{bmatrix}$$

T_2 nin değerini (0.566) hesaplayıp analitik değeriyle (0.568) karşılaştıralım. Katsayılar T için yaklaşım serisinde yerine konduğunda ve sonuç $t = 0.5$ de hesaplandığında, $T|_{0.5}$ in değeri 0.683 hesaplanır ve 0.684 analitik çözümüyle karşılaştırılır.

Tablo 3.2 de nümerik planların doğruluğu özetlenmiřtir.

Tablo 3.2. Çeşitli Ağırlık Rezidü Planlarıyla Elde Edilen özüm-lerin Karşılaştırılması:

Method	özüm $t = 0.0$	çözüm $t = 0.5$	çözüm $t = 1.0$
Galerkin lineer tabanlar	1.00	0.678	0.571
Collocation lineer tabanlar	1.00	0.667	0.555
Subdomain lineer tabanlar	1.00	0.684	0.579
Galerkin kuadratik tabanlar	1.00	0.696	0.571
Galerkin Hermite kübik tabanlar	1.00	0.684	0.570
Collocation Hermite kübik tabanlar	1.00	0.683	0.566
Analitik	1.00	0.684	0.568

Türevlerin Hesaplanması: Yalnızca bilinmeyen fonksiyonların elde edilmesi değil, aynı zamanda türevleriyle de ilgilidir. Hermite formülü doğrudan bu bilgiyi sağlar ama aynı zamanda mevcut kullanım için erkendir. Yaklaşık ifadeyi türevlemek gereklidir.

$$\hat{T} = \sum_{j=1}^3 T_j \phi_j(t)$$

elde etmek için

$$\frac{d\hat{T}}{dt} \sum_{j=1}^3 T_j \frac{d\phi(t)}{dt} = \sum_{j=1}^3 T_j \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \quad 3.61$$

T_j katsayılarından dolayı bilinir ve temel fonksiyonun türevleri elde edilir, (2.61) kolayca hesaplanır. $t = 0$ da türev için lineer tabanlar kullanıldı.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{dt} \Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^3 T_j \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= T_1\left(-\frac{1}{2}\right)(4) + T_2\left(\frac{1}{2}\right)(4) = -2.00 + 1.36 = -0.640 \end{aligned}$$

Benzer olarak, kuadratik tabanları kullanarak bulduğumuz

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{dt} \Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^3 T_j \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= T_1\left(-\frac{3}{2}\right)(2) + T_2(2)(2) + T_3\left(-\frac{1}{2}\right)(2) = -0.787 \end{aligned}$$

$t = 0$ da türevin analitik değeri -1.00 dır. Özet olarak lineer, kuadratik ve Hermite tabanları Galerkin formülüyle kullanıldığında -0.640 , -0.787 , -0.987 türev değerlerini sağlar, sırasıyla -1.00 doğru değeriyle karşılaştırılır.

Şimdi $t = 0.5$ de türevin hesabını göz önüne alalım. Bu önemlidir çünkü lineer temel fonksiyonlar için sınırları belirler. Çünkü lineer tabanlar sürekli-
lidir. $\frac{d\phi_j}{d\xi} \Big|_{t=0.5}$ türevi tanımlı değildir. Bu noktada kullanılan en uygun türev yaklaşımı $0 < \varepsilon < \Delta t$ olmak üzere $\frac{d\phi_j}{d\xi} \Big|_{t=0.5+\varepsilon}$ ve $\frac{d\phi_j}{d\xi} \Big|_{t=0.5-\varepsilon}$ un ortalamasıdır. Türevler tablo 3.3 da özetlenen 3 taban kullanılarak hesaplanır. Hermite tabanları türev için çözümde daha doğruluk sağlar, kuadratik plan lineer durumlardan daha iyidir.

Tablo 3.3. Lineer, Kuadratik ve Hermite Kübik Temel Fonksiyonları Kullanılarak Sıcaklık ve Sıcaklık Türevlerinin Hesabı:

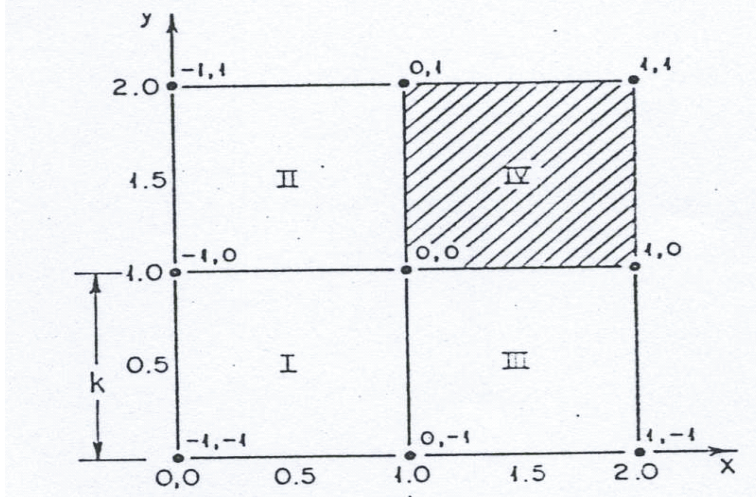
Fonksiyon	\hat{T}	\hat{T}	$\frac{d\hat{T}}{dt}$	$\frac{d\hat{T}}{dt}$
Yer	$t = 0.5$	$t = 1.0$	$t = 0.0$	$t = 0.5$
Analitik	0.684	0.569	-1.00	-0.368
Lineer	0.678	0.571	-0.640	-0.429
Kuadratik	0.696	0.571	-0.787	-0.429
Hermite	0.684	0.570	-0.937	-0.378

BÖLÜM 4

SONLU ELEMEN ve SONLU FARK METODLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

3.1 ve 3.2 bölümlerinde çeşitli ağırlık rezidü yaklaşımları arasındaki ilişkileri göz önüne aldık. Şimdi her ikisine mahsus hangi özellikler olduğunu anlamak için sonlu eleman ve sonlu fark metodlarını karşılaştıralım.

Bir önceki bölümün bir boyutlu ısı akış problemini tekrar göz önüne alalım, fakat düğümler şekil 4.1 de gösterildiği gibi yeniden numaralandırılmıştır. Çünkü (0, 0) düğümü bölgenin içindedir.



Şekil 4.1. İki boyutlu ısı akışı için belirlenen bölge

Denklemlerle ilgili düğümler sonlu eleman yaklaşımının genel formunda gösterilebilir. Matris denkleminin bu satırının açılımı

$$\frac{1}{3} (T_{-1,-1} + T_{-1,0} + T_{-1,1} + T_{0,-1} - 8T_{0,0} + T_{1,-1} + T_{1,0} + T_{1,1}) = \Phi_w \quad 4.1$$

Bu ifadeyi sonlu fark notasyonu açısından göstermenin zor olmasına rağmen, düzenleyerek daha kolay anlaşılabilir. Düzenlenen form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \{(T_{1,1} - 2T_{0,1} + T_{-1,1}) + 4(T_{1,0} - 2T_{0,0} + T_{-1,0}) + (T_{1,-1} - 2T_{0,-1} + T_{-1,-1})\} \\ & + \frac{1}{6} \{(T_{1,1} - 2T_{1,0} + T_{1,-1}) + 4(T_{0,1} - 2T_{0,0} + T_{0,-1}) \\ & + (T_{-1,1} - 2T_{-1,0} + T_{-1,-1})\} = \Phi_w \end{aligned} \quad 4.2$$

$h = k = 1$ özel durumunda daha genel bir ifadeyle gösterilebilir.

$$\begin{aligned} & \frac{hk}{6} \left\{ \frac{T_{1,1} - 2T_{0,1} + T_{-1,1}}{h^2} + 4 \frac{T_{1,0} - 2T_{0,0} + T_{-1,0}}{h^2} + \frac{T_{1,-1} - 2T_{0,-1} + T_{-1,-1}}{h^2} \right\} \\ & + \frac{hk}{6} \left\{ \frac{T_{1,1} - 2T_{1,0} + T_{1,-1}}{k^2} + 4 \frac{T_{0,1} - 2T_{0,0} + T_{0,-1}}{k^2} + \frac{T_{-1,1} - 2T_{-1,0} + T_{-1,-1}}{k^2} \right\} = \Phi_w \end{aligned} \quad 4.3$$

Son olarak (i, j) nin daha genel noktası olması için $(0, 0)$ düğümünü varsayarsak, sonlu fark yaklaşımı ile ilgili ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \frac{hk}{6} \left\{ \frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}}{h^2} + 4 \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i-1,j-1}}{h^2} \right\} \\ & + \frac{hk}{6} \left\{ \frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i+1,j} + T_{i+1,j-1}}{k^2} + 4 \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2} + \frac{T_{i-1,j+1} - 2T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1}}{k^2} \right\} = \Phi_w \end{aligned} \quad 4.4$$

Denklem (3.4.) tablo 2.1 in sembolik notasyonu kullanılarak daha kapalı biçimde yazılabilir.

$$\frac{hk}{6h^2} \{ \delta_x^2 T_{i,j+1} + 4\delta_x^2 T_{i,j} + \delta_x^2 T_{i,j-1} \} + \frac{hk}{6h^2} \{ \delta_y^2 T_{i+1,j} + 4\delta_y^2 T_{i,j} + \delta_y^2 T_{i-1,j} \} = \Phi_w \quad 4.5$$

Sonlu Eleman denklemlerinin ağırlık ortalaması açısından sonlu fark yaklaşımlarıyla yorumlanabildiği (3.5) den kolayca anlaşılır. Fakat ağırlık ortalamaları standart sonlu fark teorisi açısından gösterilebilir. Bu ilişkiyi göstermek için nümerik integralin Simson kuralını göz önüne alalım.

$$\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} dy = \frac{k}{3} \left\{ \frac{\partial^2 T_{i,j-1}}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 T_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{i,j+1}}{\partial x^2} \right\} - \frac{k^5}{90} \frac{\partial^6 T}{\partial x^2 \partial y^4} + \dots \quad 4.6$$

3 değer kullanılarak 4. mertebeden daha doğru bir integral sağlanır. Fark karşıtları yoluyla (4.6) nın sürekli türevlerinin yer değiştirmesi şunu sağlar.

$$\frac{1}{h^2} \int_{y_k=y_{j-1}}^{y_k=y_{j+1}} \delta_x^2 T_{i,k} dy_k = \frac{k}{3h^2} \left\{ \delta_x^2 T_{i,j-1} + 4\delta_x^2 T_{i,j} + \delta_x^2 T_{i,j+1} \right\} - \frac{k^5}{90} \frac{\partial^6 T}{\partial x^2 \partial y^4} + \dots \quad 4.7$$

(4.7), (4.5) içinde yerine konduğunda

$$\frac{1}{2h} \int_{y_k=y_{j-1}}^{y_k=y_{j+1}} \delta_x^2 T_{i,k} dy_k + \frac{1}{2h} \int_{x_k=x_{j-1}}^{x_k=x_{j+1}} \delta_y^2 T_{k,j} dx_k = \Phi_w$$

Verilen alternatif form hk ile bölünürse

$$\frac{1}{2k} \int_{y_k=y_{j-1}}^{y_k=y_{j+1}} \frac{\delta_x^2 T_{i,k}}{h^2} dy_k + \frac{1}{2h} \int_{x_k=x_{j-1}}^{x_k=x_{j+1}} \frac{\delta_y^2 T_{k,j}}{k^2} dx_k = \frac{\Phi_w}{hk} \quad 4.8$$

Sonlu eleman denklemleri dikdörtgen biçiminde tanımlandığında daha kolay anlaşılır. Çünkü bu yaklaşımda $O(h^2)$ dir. Sonlu fark metoduyla gerçekleştirilenle aynıdır. Bununla birlikte, iki yaklaşım her zaman aynı doğruluğu vermez. Bundan başka, doğruluğun mertebesi sadece sayısal performansının bir göstergesidir, gerçekten çözümler sonlu eleman metodu ve sonlu fark metoduyla oldukça farklı olabilirler. İkinci dereceden türevler içermesine rağmen diğer mertebeden türevler için yüksek boyutlarda mümkündür.

KAYNAKLAR

Gustafson, Karl E., Introduction to Partial Differential equations, John Wiley & Sons (1987).

Powers, David L., Boundary Value Problems, Academic Press, Inc., (1972).

Numerical Methods in Engineering Practice, Tooley, John R., (1986).

Gerald, Curtis F., Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company (1994).

Cheney, Ward & Kincaid, David, Numerical Mathematics and Computing, Brooks/Cole Publishing Company, (1980).