

Bazı Öklidyen Kuadrik Yüzeylerin Taksi Uzayda Benzerleri

Latif Durak

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs 2009

Taxicab Analogues Of Some Euclidean Quadric Surfaces

Latif Durak

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

May - 2009

Bazı Öklidyen Kuadrik Yüzeylerin Taksii Uzakda Benzerleri

Latif Durak

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliđi Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Rüstem Kaya

Mayıs 2009

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Latif Durak'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “**Bazı Öklidyen Kuadrik Yüzeylerin Taksi Uzayda Benzerleri**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Danışman Üye : Prof. Dr. Rüstem Kaya

Üye : Prof. Dr. Şükrü Olgun

Üye : Prof. Dr. Mehmet Üreyen

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada üç boyutlu taksî uzayda iki odaklı ve tek odaklı kuadrik yüzeyler ele alınmıştır ve taksî yüzeylerin özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde iki odaklı kuadrik taksî yüzeyler incelenmiştir. Üçüncü bölümde iki odaklı taksî elipsoidlerin yüzey alan ve hacimleri hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde tek odaklı yüzeyler ve beşinci bölümde ise bazı taksî dik koniler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: taksî uzaklık, taksî elipsoid, taksî paraboloid, taksî hiperboloid, taksî koni

SUMMARY

In this study, two-foci and focus-directrix surfaces in three dimensional taxicab space are studied and in this type some of taxicab-surfaces investigated. In the second chapter, two-foci taxicab surfaces are examined. In the third chapter, surface areas and volumes of two-focused taxicab ellipsoids are examined. In the fourth chapter, one focus surfaces and in the fifth chapter some right taxicab cones are studied.

Keywords: taxicab distance, taxicab ellipsoid, taxicab paraboloid, taxicab hyperboloid, taxicab cone

TEŞEKKÜR

Gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan değerli danışmanım

Prof. Dr. Rüstem Kaya'ya

teşekkürlerimi sunuyorum.

Eskişehir,2009

Latif Durak

İÇİNDEKİLER

	sayfa
0.1 GİRİŞ.....	1
1. \mathbb{R}_T^3 DE BAZI KUADRİK YÜZEYLER.....	6
2. İKİ ODAKLI TAKSİ YÜZEYLER.....	7
2.1 İki Odaklı Taksi Elipsoidlerin Sınıflandırılması.....	7
2.2 İki Odaklı Taksi Elipsoidler.....	10
2.2.1 12 yüzlü taksi elipsoidler.....	11
2.2.2 18 yüzlü taksi elipsoidler.....	16
2.2.3 26 yüzlü taksi elipsoidler.....	26
2.3 İki Odaklı Taksi Hiperboloidlerin Sınıflandırılması.....	46
3. İKİ ODAKLI TAKSİ ELİPSOİDLERİN ÖKLİDYEN UZAKLIK CİNSİNDEN YÜZEY ALANLARI VE HACİMLERİ.....	51
3.1 İki Odaklı Taksi Yüzeylerin Toplam Yüzey Alanları.....	51
3.1.1 Taksi kürenin toplam yüzey alanı.....	51
3.1.2 12 Yüzlü taksi elipsoidlerin toplam yüzey alanı.....	53
3.1.3 18 Yüzlü taksi elipsoidlerin toplam yüzey alanı.....	54
3.1.4 26 Yüzlü taksi elipsoidlerin toplam yüzey alanı.....	55
3.2 İki Odaklı Taksi Yüzeylerin Hacimleri.....	57
3.2.1 Taksi kürenin hacmi.....	57
3.2.2 12 Yüzlü taksi elipsoidlerin hacmi.....	57
3.2.3 18 Yüzlü taksi elipsoidler hacmi.....	57
3.2.4 26 Yüzlü taksi elipsoidlerin hacmi.....	58
4. TEK ODAKLI TAKSİ YÜZEYLER.....	59
4.1 $0 < e < 1$ iken	60

4.2 $e = 1$ iken	66
4.3 $e > 1$ iken.....	72
5. BAZI TAKSİ DİK KONİLER.....	83
KAYNAKLAR.....	89

GİRİŞ

Analitik düzlem \mathbb{R}^2 de $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları için Minkowski [9] uzaklık fonksiyonu

$$d_M(P_1, P_2) = [(x_1 - x_2)^p + (y_1 - y_2)^p]^{1/p} \quad \text{dur.}$$

Bu metriğin özel hallerinden biri $p = 2$ değeri için analitik düzlemde karşımıza şu

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Öklidyen uzaklık fonksiyonu çıkar. Krause [7] de bu metriğin $p = 1$ değeri için şu

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

taxicab metriğini kullanarak düzlemsel taksi geometriyi geliştirmiştir. Bu uzaklık fonksiyonundan anlaşılacağı üzere P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık bu iki noktanın koordinat eksenlerine paralel doğru parçalarının Öklidyen uzaklıkları toplamıdır.

Öklidyen geometride ifade edildiği gibi taksi geometride de bazı konik kesitleri incelenmiştir. İki odak ve odak-doğrultman tanımları kullanılarak elips ve hiperboller ifade edilebildiği gibi odak doğrultman tanımları kullanılarak paraboller belirtilebilir. Laatsch [8] tarafından odak-doğrultman tanımı kullanılarak taksi konikler ve bu konik kesitleri incelenmiştir. Kaya-Akça-Günaltılı-Özcan [3] tarafından bu taksi konik için $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ odak noktalarına sahip veya $F_1 = (x_1, y_1)$ odak ve

$$Ax + By + C = 0 \text{ doğrultmanına sahip, } \alpha \in \{-1, 0, 1\}, \beta = e(\alpha^2 - 1) \left(\max\{|A|, |B|\} \right)^{-1},$$

$\gamma \leq 0$, e dış merkezliği olmak üzere

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_2| + |y - y_2|) + \beta(|Ax + By + C|) \pm \alpha\gamma = 0 \quad (1)$$

denklemleri vererek farklı katsayılarla göre sınıflandırmalar yapılmıştır. Burada $\alpha = 1$ için iki odak noktalı elips, $\alpha = -1$ için iki odaklı hiperbol, $\alpha = 0$ için ise e nin aldığı

değere göre odak-doğrultmanlı konik kesitleri olur. Bu sınıflandırmalar içerisinde taksi çemberden söz edilirken çakışık iki odak noktalı elipsin özel bir hali olarak belirtilebilir.

$F_1 = F_2 = (x_1, y_1)$ kabul ettiğimizde bu bir taksi çember denklemi olur.

$P = (x, y) \in \mathbb{R}_T^2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ için

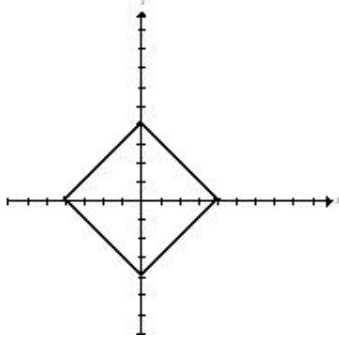
$$\{ P \in \mathbb{R}_T^2 : d_T(P, F_1) + d_T(P, F_2) = \gamma \}$$

$$\Rightarrow \{ P \in \mathbb{R}_T^2 : d_T(P, F_1) + d_T(P, F_1) = \gamma \}$$

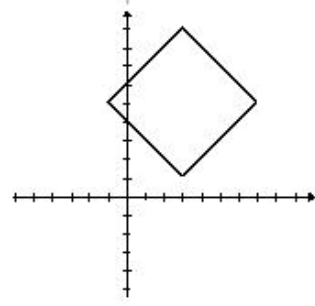
$$\Rightarrow \{ P \in \mathbb{R}_T^2 : 2 d_T(P, F_1) = \gamma \}$$

$$\Rightarrow \{ P \in \mathbb{R}_T^2 : d_T(P, F_1) = \gamma / 2 \} \text{ olur}$$

ve bu taksi çemberin şekli aşağıda gösterildiği gibidir.



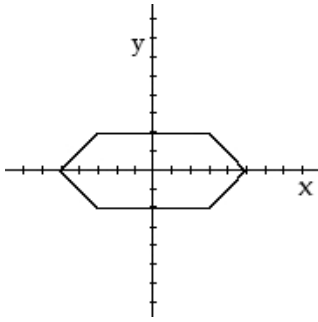
Merkezil taksi çember



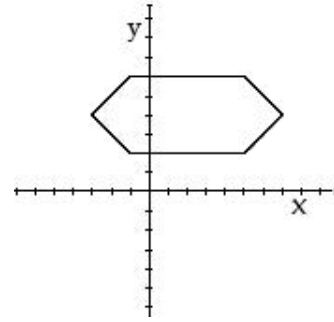
Merkezil olmayan taksi çember

S. Torun [13] bu çalışmalardan yararlanarak iki odaklı ve odak-doğrultmalı taksi elipsleri incelemiştir.

Öncelikle taksi elipsleri kısaca ifade edecek olursak, genel taksi konik denklemine (1) baktığımızda $\alpha = 1$ için iki odaklı taksi elipsi ifade eder. Odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ olan ve $\alpha = 1$ değeri için sırasıyla iki odaklı altıgen ve sekizgen taksi elipslerden söz edecek olursak öncelikle $|x_1 - x_2| = \delta_x$, $|y_1 - y_2| = \delta_y$, $\delta = \delta_x + \delta_y$ kabul edildiğinde $\delta_x > \delta_y = 0$, $\gamma > \delta$ değerleri için karşımıza şekildeki gibi altıgen taksi elipsler çıkar.

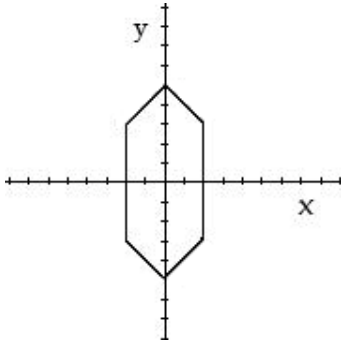


Merkezil elips

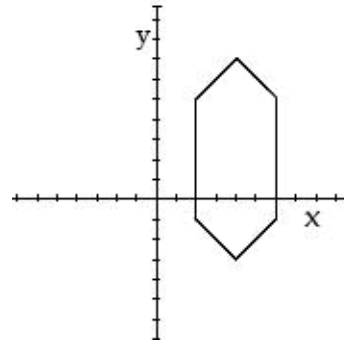


Merkezil olmayan elips

$\delta_y > \delta_x = 0$ değerleri için

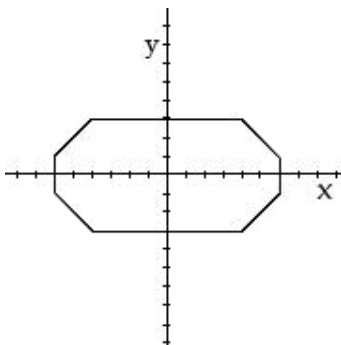


Merkezil elips

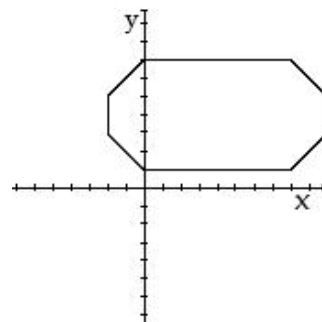


Merkezil olmayan elips

$\delta_x > \delta_y > 0$ için aşağıdaki gibi sekizgen taksit elipsleri oluşur.

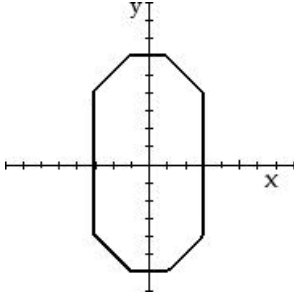


Merkezil elips

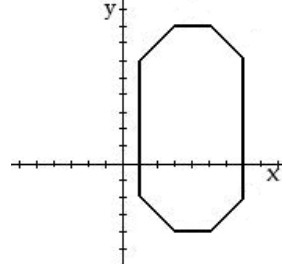


Merkezil olmayan elips

$\delta_y > \delta_x > 0$ değerleri için ise



Merkezil elips



Merkezil olmayan elips

$\alpha = 0$ iken $F = (x_1, y_1)$ odaklı $Ax + By + C = 0$ doğrultmanlı (1) denklemi

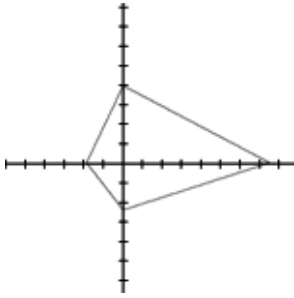
$$|x - x_1| + |y - y_1| - e(\max\{|A|, |B|\})^{-1} |Ax + By + C| = 0$$

$0 < e < 1$ için odak-doğrultmanlı taksit elipsi ifade eder. Bu elipsin tanımı; odağa olan uzaklığının doğrultmana olan uzaklığına oranı sabit ($0 < e < 1$) olan noktalar kümesidir.

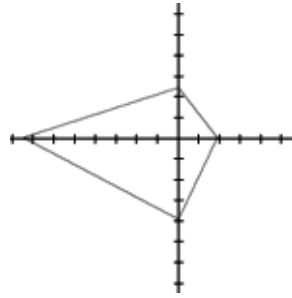
Bu odak-doğrultmanlı taksit elipsleri genel olarak incelemek üzere odak noktasını

$F = (0, 0)$ seçersek,

$A > B > 0$ için;

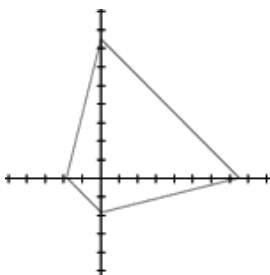


$C > 0$

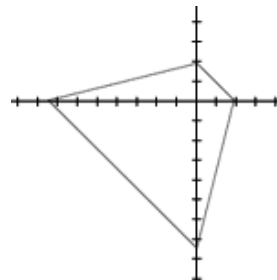


$C < 0$

$A = B > 0$ için;

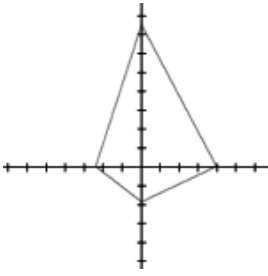


$C > 0$

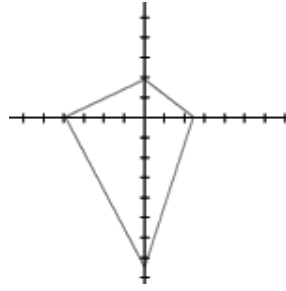


$C < 0$

$B > A > 0$ için;

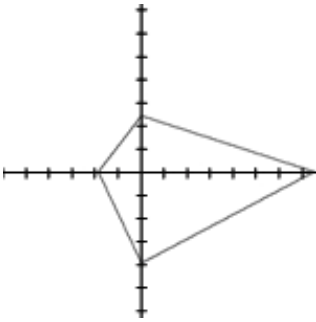


$C > 0$

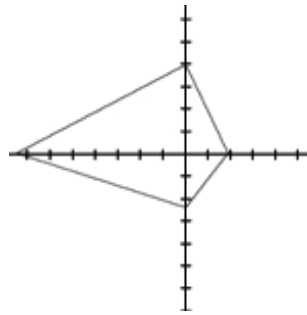


$C < 0$

$A > 0, 0 > B > -A$ için;

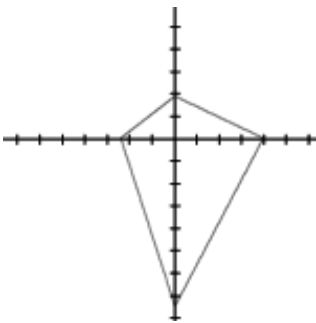


$C > 0$

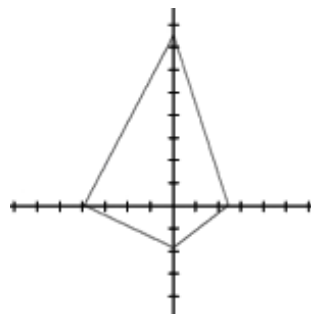


$C < 0$

$A > 0, B < -A$ için;

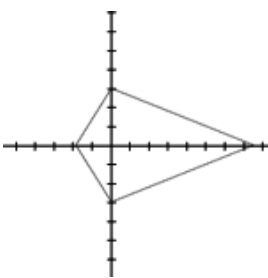


$C > 0$

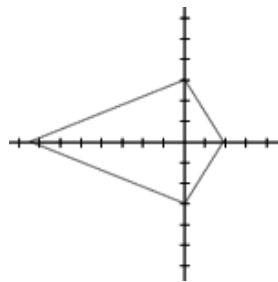


$C < 0$

$A > 0, B = 0$ için;

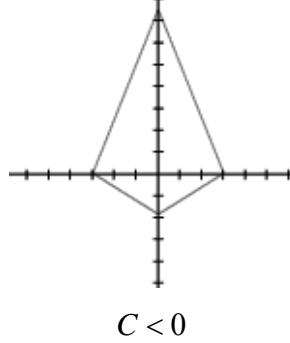
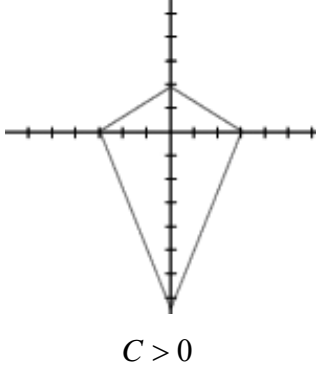


$C > 0$



$C < 0$

$A = 0, B > 0$ için;



1 \mathbb{R}_T^3 DE BAZI KUADRİK YÜZEYLER

\mathbb{R}_T^3 de yüzeyleri inceleyebilmek açısından öncelikle \mathbb{R}_T^3 taksi uzayının metriğinden söz etmek gerekir. \mathbb{R}_E^3 de (Öklidyen uzayda) alınan $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_E(P_1, P_2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right]^{1/2}$$

olarak ifade edilirken \mathbb{R}_T^3 taksi uzayda

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

şeklinde ifade edilmiştir. Yani P_1 ve P_2 noktalarının birbirine olan uzaklığı birbirini dik kesen üç koordinat eksenine paralel olan doğru parçalarının Öklidyen uzunlukları toplamı olarak ifade edilir. \mathbb{R}_T^3 ve onun yapısına ilişkin önemli özellikler Akça-Kaya [1] da verilmiştir. \mathbb{R}_T^3 ün izometrilere grubu Gelişgen-Kaya [6] de verilmiştir. Ayrıca Çolakoğlu-Kaya [2] \mathbb{R}_T^3 de dörtyüzlünün hacim formülünü taksi uzaklık cinsinden genelleştirmiştir.

Biz burada (1) denklemini \mathbb{R}_T^3 için düşünürsek odak noktaları $F_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2, z_2)$ olan veya bir odağı $F_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve doğrultmanı $Ax + By + Cz + D = 0$ olan taksi yüzeylerin genel denklemi $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e(\alpha^2 - 1) \left(\max\{|A|, |B|, |C|\} \right)^{-1}$, $\gamma \leq 0$ ve e dış merkezli olmak üzere

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| + \alpha (|x - x_2| + |y - y_2| + |z - z_2|) + \beta (|Ax + By + Cz + D|) \pm \alpha \gamma = 0 \quad (*)$$

şeklinindedir. $\alpha = 1$ için iki odaklı taksi elipsoidi belirtir. $\alpha = -1$ için iki odaklı taksi hiperboloidi belirtir. $\alpha = 0$ için ise e nin alacağı farklı değerlere göre tek odaklı elipsoid, hiperboloid ya da paraboloid belirtir.

Bu çalışmada genel olarak \mathbb{R}_T^3 de iki odaklı ve tek odaklı (odak-doğrultmanlı) taksi elipsoidler, hiperboloidler ve tek odaklı paraboloidler incelenmiş, taksi elipsoidlerin çap uzunlukları, iki odaklı elipsoidlerin yüzey alan ve hacim formülleri ve bazı taksi dik konileri incelenmiştir. İki odaklı yüzeyler ayrı bölümlerde, odak doğrultmanlı yüzeyler ise tek bölümde incelenmiştir.

2. İKİ ODAKLI TAKSİ YÜZEYLER

2.1 İki Odaklı Taksi Elipsoidlerin Sınıflandırılması

Analitik 3-uzayda taksi metriği kullanarak kapalı yüzeylerden iki odaklı taksi elipsoidler için Öklidyen halde olduğu gibi iki odak noktasına uzaklıkları toplamı sabit olan noktalar kümesi diyebiliriz.

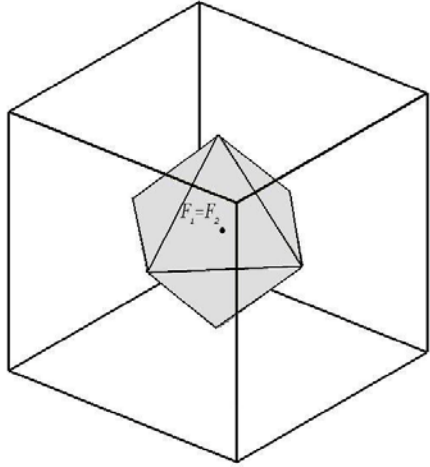
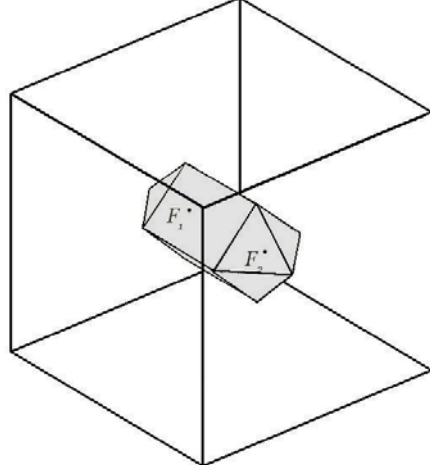
$F_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2, z_2)$ olsun. $|x_1 - x_2| = \delta_x$, $|y_1 - y_2| = \delta_y$, $|z_1 - z_2| = \delta_z$
 $\delta_x + \delta_y + \delta_z = \delta$, $\gamma > \delta$ olmak üzere

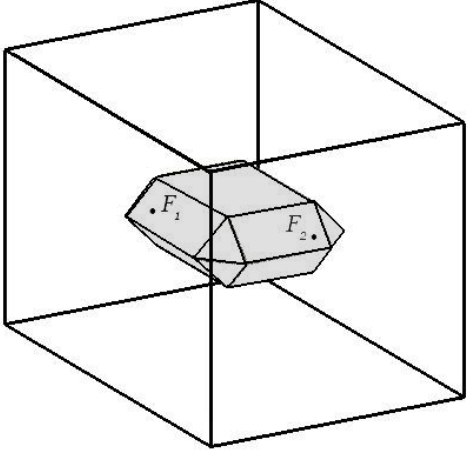
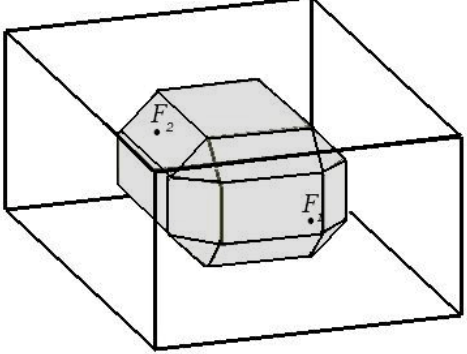
$$\{ P \in \mathbb{R}_T^3 : d_T(P, F_1) + d_T(P, F_2) = \gamma \}$$

kümesi iki odaklı bir elipsoidi gösterir.

$$P(x, y, z) = |x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| + |x - x_2| + |y - y_2| + |z - z_2| - \gamma = 0 ; \gamma > 0$$

elipsoidi için aşağıdaki sınıflandırma yapılabilir.

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	γ	$P(x, y, z) = 0$
$\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$	$\gamma > \delta$	 <p>Sekiz yüzlü bir taksi küre</p>
$\delta_x \neq 0, \delta_y = 0, \delta_z = 0$ veya $\delta_x = 0, \delta_y \neq 0, \delta_z = 0$ veya $\delta_x = 0, \delta_y = 0, \delta_z \neq 0$	$\gamma > \delta$	 <p>On iki yüzlü taksi elipsoid</p>

$\delta_x \neq 0, \delta_y \neq 0, \delta_z = 0$ veya $\delta_x = 0, \delta_y \neq 0, \delta_z \neq 0$ veya $\delta_x \neq 0, \delta_y = 0, \delta_z \neq 0$	$\gamma > \delta$	 <p style="text-align: center;">On sekiz yüzlü taksi elipsoid</p>
$\delta_x \neq 0, \delta_y \neq 0, \delta_z \neq 0$	$\gamma > \delta$	 <p style="text-align: center;">Yirmi altı yüzlü taksi elipsoid</p>

Buna göre bir taksi küreyi taksi elipsoidin özel bir hali olarak ifade edebiliriz. Elipsoidin odakları çakışık olduğu takdirde elipsoid bir taksi küre belirtir. Şöyle dersek $F_1 = F_2 = (x_1, y_1, z_1)$ odak noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar kümesi $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}_T^3$ için

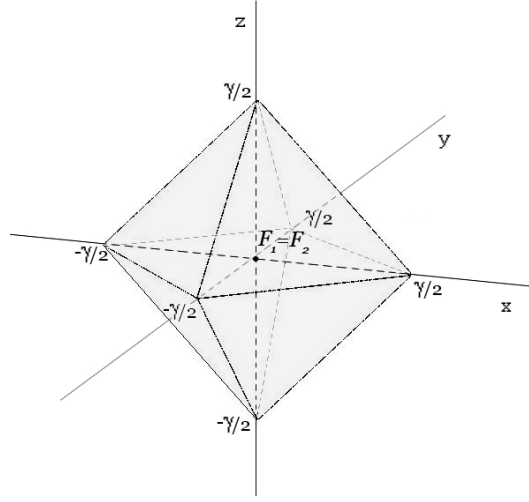
$$\{ P \in \mathbb{R}_T^3 : d_T(P, F_1) + d_T(P, F_2) = \gamma \}$$

$$\Rightarrow \{ P \in \mathbb{R}_T^3 : d_T(P, F_1) + d_T(P, F_1) = \gamma \}$$

$$\Rightarrow \{ P \in \mathbb{R}_T^3 : 2d_T(P, F_1) = \gamma \}$$

$$\Rightarrow \{ P \in \mathbb{R}_T^3 : d_T(P, F_1) = \gamma/2 \}$$

olur.



Şekil-1

Yani yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi $|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| = \gamma / 2$ şeklindeki yarıçapı $\gamma / 2$ olan bir taksi küreyi belirtir. Diğer durumların da sırasıyla 12 yüzlü, 18 yüzlü ve 26 yüzlü taksi elipsoidleri gösterdiğini göreceğiz.

2.2 İki Odaklı Taksi Elipsoidler

Bir taksi elipsoid, sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktalar kümesidir. Bu tanıma göre $F_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $F_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_T^3$ iki odaklı taksi elipsoidleri incelerken merkezi orijin olan ve $d_T(F_1, F_2) = 2a$, $2a > 2c$, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere denklemimiz şöyledir;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| + |x - x_2| + |y - y_2| + |z - z_2| = 2a > 0$$

Merkezi elipsoidlerin şekilleri odak noktalarının durumuna göre farklılık gösterir. F_1 ve F_2 nin tüm koordinat değerlerinin aynı olmasıyla yani $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ ise bu bir taksi küreyi, iki farklı eksen üzerindeki değerlerinin eşit üçüncüsünün farklı olmasıyla yani $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 \neq z_2$ veya $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2, z_1 = z_2$ veyahut $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ olmasıyla 12 yüzlü bir taksi elipsoidi, iki farklı eksen üzerindeki değerlerinin farklı üçüncüsünün aynı olmasıyla yani

$x_1 = x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ veya $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 = z_2$ veyahut $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2, z_1 \neq z_2$ olmasıyla 18 yüzlü bir taksi elipsoidi, her üç eksen üzerindeki değerlerinin farklı olmasıyla da yani $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ olmasıyla da 26 yüzlü bir taksi elipsoidi oluşturur.

2.1.1 12 yüzlü taksi elipsoidler

$x_1 \neq x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ veya $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2, z_1 = z_2$ veya $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 \neq z_2$ durumlarından sadece birini incelemek genellemek için yeterlidir. Çünkü herbiri, incelediğimiz bir tanesinin ötelenmiş ve dönmeler altındaki halleridir. İlk duruma uygun değerler aldığımızda oluşacak olan 12 yüzlü taksi elipsoidi inceleyelim.

$$P = (x, y, z) \quad F_1 = (-c, 0, 0) \quad F_2 = (c, 0, 0) \quad \text{ve } P, F_1, F_2, \in \mathbb{R}_T^3, c \in \mathbb{R}$$

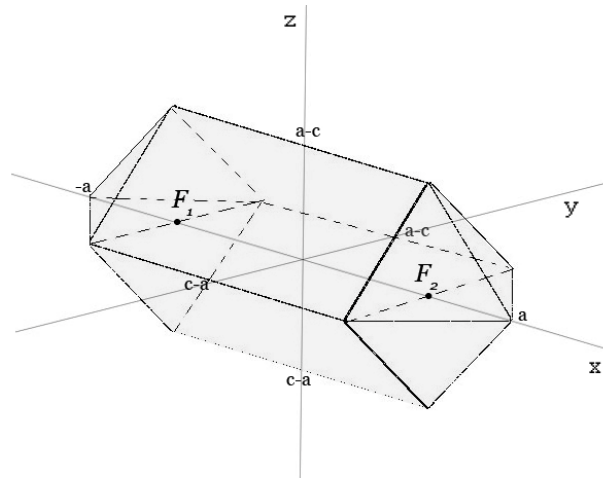
$$d_T(P, F_1) + d_T(P, F_2) = 2a$$

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| + |x - x_2| + |y - y_2| + |z - z_2| = 2a$$

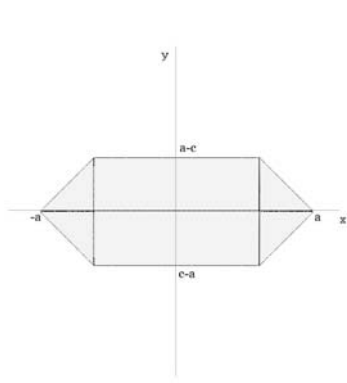
$$|x - (-c)| + |y - 0| + |z - 0| + |x - c| + |y - 0| + |z - 0| = 2a$$

$$|x + c| + |x - c| + 2|y| + 2|z| = 2a$$

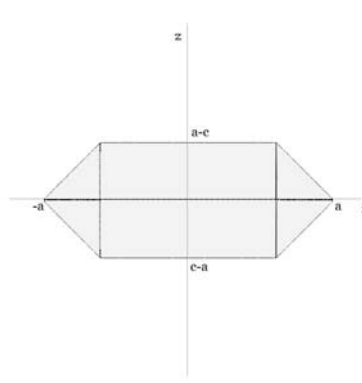
$x < -c, y < 0, z < 0 \Rightarrow x + y + z + a = 0$
$x < -c, y < 0, z \geq 0 \Rightarrow x + y - z + a = 0$
$x < -c, y \geq 0, z < 0 \Rightarrow x - y + z + a = 0$
$x < -c, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow x - y - z + a = 0$
$-c \leq x < c, y < 0, z < 0 \Rightarrow y + z = c - a$
$-c \leq x < c, y < 0, z \geq 0 \Rightarrow y - z = c - a$
$-c \leq x < c, y \geq 0, z < 0 \Rightarrow y - z = a - c$
$-c \leq x < c, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow y + z = a - c$
$x \geq c, y < 0, z < 0 \Rightarrow x - y - z - a = 0$
$x \geq c, y < 0, z \geq 0 \Rightarrow x - y + z - a = 0$
$x \geq c, y \geq 0, z < 0 \Rightarrow x + y - z - a = 0$
$x \geq c, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow x + y + z - a = 0$



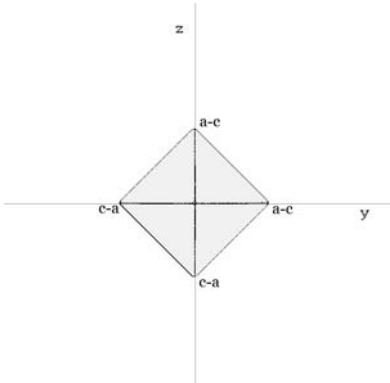
Şekil-2.1



Şekil-2.1.a



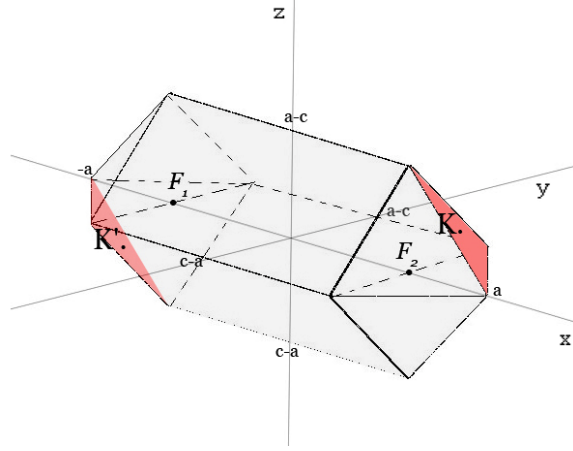
Şekil-2.1.b



Şekil-2.1.c

Taksi elipsoidin $x < -c$, $x \geq c$ aralığında bulunan karşılıklı üç yüzey, toplam altı yüzeyin üzerlerinde bulunan noktalardan keyfi olarak biri seçildiğinde bu noktanın elipsoidin merkezine göre simetriği olan noktaya uzaklığı yine asal eksen uzunluğu olan $2a$ ya eşittir.

Bu aralıkta verilen $x + y + z - a = 0$ yüzeyinin üzerindeki keyfi bir K noktası aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil-2.2

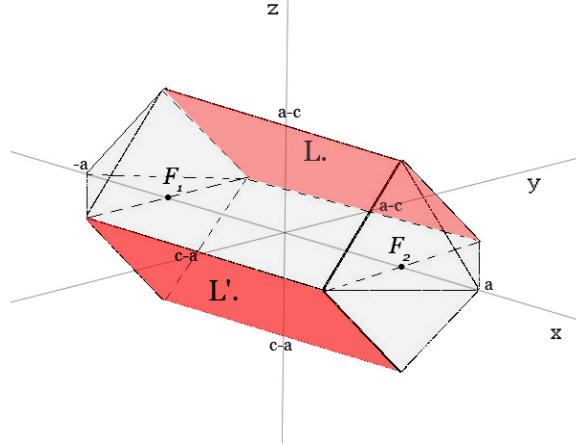
Bu $K = (c + (a - c)k, (a - c)m, (a - c)(1 - (m + k)))$, $0 < k + m < 1$, $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının orijine göre simetriği $x + y + z + a = 0$ yüzeyi üzerindeki $K' = (-c - (a - c)k, -(a - c)m, -(a - c)(1 - (m + k)))$ noktasıdır. Buna göre;

$$\begin{aligned} d_T(K, K') &= |2c + 2(a - c)k| + |2(a - c)m| + |2(a - c)(1 - (m + k))| \\ &= 2c + 2(a - c)(k + m) + 2(a - c) - 2(a - c)(m + k) \\ &= 2c + 2a - 2c \\ &= 2a \end{aligned}$$

olur.

Bu birbirine paralel iki yüzey gibi $x < -c$, $x \geq c$ aralığında bulunan diğer yüzeylerin de üzerlerinde bulunan her noktanın elipsoidin merkezine göre simetrik noktasına olan uzaklığı $2a$ dır. Yani elipsoid üzerindeki en büyük çap uzunluğudur. Öklidyen elipsoidde ise aynı odak noktaları için sadece asal eksen üzerindeki karşılıklı iki noktanın birbirine olan uzaklığı $2a$ dır.

Elipsoidin $-c \leq x \leq c$ aralığındaki karşılıklı iki, toplam dört yüzeyin üzerlerinde bulunan herhangi bir $L = (k, (a - c)m, (a - c)(1 - m))$, $-c < k < c$, $0 < m < 1$, $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının orijine göre simetrik noktası $L' = (-k, -(a - c)m, -(a - c)(1 - m))$ dir. Buna göre;



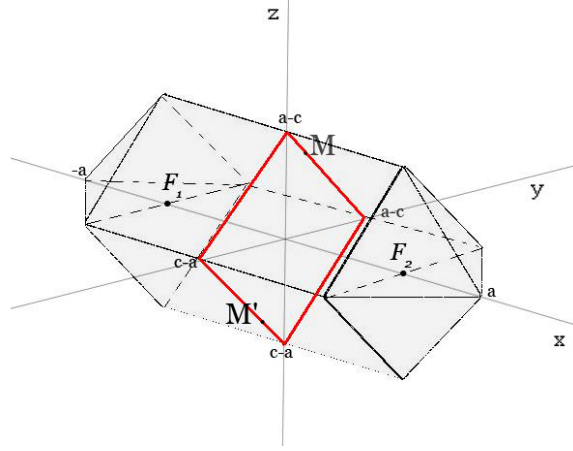
Şekil-2.3

$$\begin{aligned}
 d_T(L, L') &= |2k| + |2(a-c)m| + |2(a-c)(1-m)| \\
 &= |2k| + 2(a-c)m + 2(a-c)(1-m) \\
 &= |2k| + 2(a-c)m + 2(a-c) - 2(a-c)m \\
 &= |2k| + 2(a-c)
 \end{aligned}$$

dir.

Bu ifade $-c < k < c$ ve $0 < m < 1$ için daima $2(a-c)$ den büyük olacaktır. O halde $2(a-c)$ en küçük çap olacaktır.

Bu elipsoidün yüzeyi ile elipsoidün merkezinden geçen $x=0$ düzleminin arakesiti bir taksî çemberdir ve üzerinde alınan herhangi bir noktanın simetriğine olan uzaklığı $2(a-c)$ dir. Bu çember üzerinde alınan bir $M = (0, (a-c)k, (a-c)(1-k))$, $0 < k < 1$, $k \in \mathbb{R}$ ve bu noktanın orijine göre simetriği olan $M' = (0, -(a-c)k, -(a-c)(1-k))$ noktası arasındaki uzunluk aşağıda görüldüğü gibi daima;



Şekil-2.4

$$\begin{aligned}
 d_T(M, M') &= |2(a-c)k| + |2(a-c)(1-k)| \\
 &= 2(a-c)k + 2(a-c)(1-k) \\
 &= 2(a-c)k + 2(a-c) - 2(a-c)k \\
 &= 2(a-c) \text{ ye eşit olacaktır.}
 \end{aligned}$$

Bu da elipsoidin küçük çapıdır.

Aynı odak noktaları için Öklidyen uzayda, elipsoidin sadece x ekseninde karşılıklı iki noktanın birbirine uzaklığı en büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşitken, taksi uzayda ise $x < -c$, $x \geq c$ aralığındaki birbirine paralel 8 yüzeyin üzerlerindeki tüm noktaların orijine göre simetriklerine uzaklığı $2a$ dır. $-c \leq x < c$ aralığındaki elipsoidin karşılıklı yüzeyleri üzerindeki noktaların birbirine uzaklığı $x = 0$ değerine kadar simetrik olarak $2a$ değerinden $2(a-c)$ değerine yaklaşır. Tam $x = 0$ değerinde ise en küçük çap değerine eşit olan bir taksi çember vardır. Dolayısıyla bu çember üzerindeki çapların uzunluğu daima en küçük çap olan $2(a-c)$ ya eşittir. $-c \leq x < c$ aralığındaki çap uzunluğu Öklidyen elipsoidle aynı özelliğe sahiptir.

Böylece \mathbb{R}_T^3 de herhangi bir eksene paralel doğru üzerindeki farklı iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktalar kümesi 12 yüzlü bir döneleksi elipsoiddir.

2.2.2 18 yüzlü taksi elipsoidler

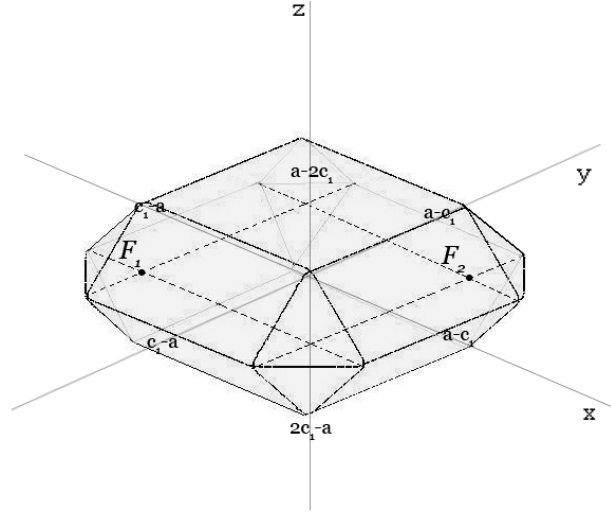
Odak noktaları koordinat düzlemlerinden birine paralel olan düzlem üzerinde olan elipsoidleri genellemek için $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 = z_2$ halini incelemek yeterlidir. Buan göre merkezi orijin ve xy -düzlemindeki odak noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \pm 1$ olan $F_1 = (-c_1, -c_1, 0)$ ve $F_2 = (c_1, c_1, 0)$ odak noktalarına sahip veya farklı eğimli $F_1 = (-c_1, -c_2, 0)$ ve $F_2 = (c_1, c_2, 0)$, $c_1 \neq c_2$ odak noktalarına sahip elipsoidleri incelemek yeterlidir.

i) $m = \pm 1$ eğimliler için $F_1 = (-c_1, -c_1, 0)$ ve $F_2 = (c_1, c_1, 0)$ şeklinde odak noktaları seçilir ve bu noktalara uzaklıkları toplamı sabit $2a$ olan noktaları araştırırsak, aşağıdaki denklem elde edilir;

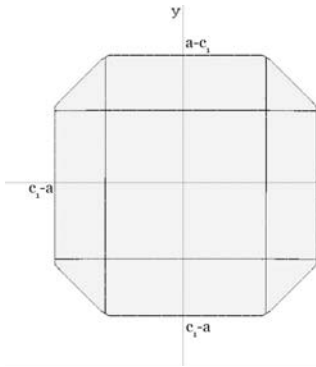
$$|x + c_1| + |x - c_1| + |y + c_1| + |y - c_1| + |z - 0| + |z - 0| = 2a > 0, \quad 2a > 4c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x + c_1| + |x - c_1| + |y + c_1| + |y - c_1| + 2|z| = 2a$$

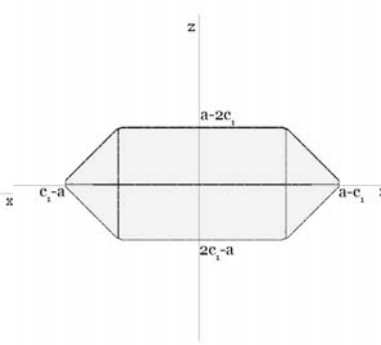
$x < -c_1, y < -c_1, z < 0$	\Rightarrow	$x + y + z + a = 0$
$x < -c_1, y < -c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$x + y - z + a = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < 0$	\Rightarrow	$x + z + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$x - z + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, z < 0$	\Rightarrow	$x - y + z + a = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$x - y - z + a = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z < 0$	\Rightarrow	$y + z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$y - z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < 0$	\Rightarrow	$z + a - 2c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$z - a + 2c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z < 0$	\Rightarrow	$y - z - a + c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$y + z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y < -c_1, z < 0$	\Rightarrow	$x - y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y < -c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$x - y + z - a = 0$
$x \geq c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < 0$	\Rightarrow	$x - z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$x + z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_1, z < 0$	\Rightarrow	$x + y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_1, z \geq 0$	\Rightarrow	$x + y + z - a = 0$



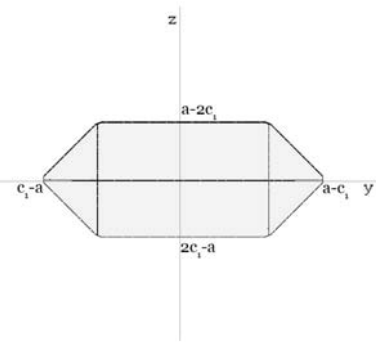
Şekil-3.1



Şekil-3.1.a

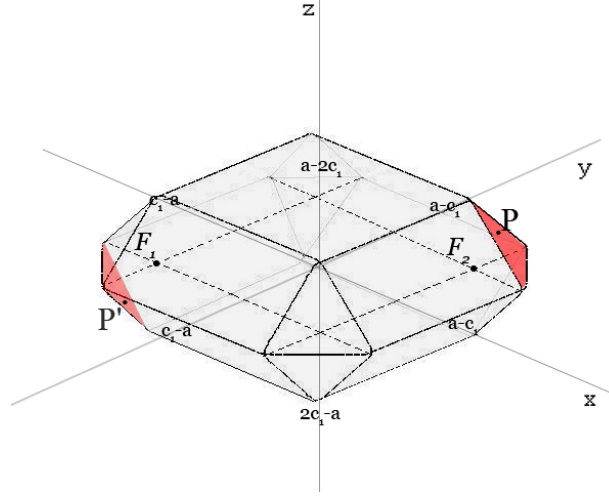


Şekil-3.1.b



Şekil-3.1.c

Yine 12 yüzlü taksi elipsoidte olduğu gibi 18 yüzlü taksi elipsoidde de karşılıklı tüm köşegenlerin birbirine olan uzaklığı büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşittir. Bunu göstermek çok basittir. Biraz daha genel bakacak olursak elipsoidin $x + y + z + a = 0$, $x + y + z - a = 0$; $x + y - z + a = 0$, $x + y - z - a = 0$; $x - y + z + a = 0$, $x - y + z - a = 0$; $x - y - z + a = 0$, $x - y - z - a = 0$ gibi karşılıklı toplam 8 üçgenel yüzeyin üzerlerinde alınan keyfi noktaların yine elipsoidin merkezine yani orijine göre simetriği olan noktalara uzaklıkları daima en büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşittir.



Şekil-3.2

Bunu göstermek için elipsoidin $x + y + z - a = 0$ yüzeyi üzerindeki keyfi bir $P = (c_1 + (a - 2c_1)k, c_1 + (a - 2c_1)m, (a - 2c_1)(1 - (k + m)))$, $0 < k + m < 1$, $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının orijine göre simetriği olan

$P' = (-c_1 - (a - 2c_1)k, -c_1 - (a - 2c_1)m, -(a - 2c_1)(1 - (k + m)))$ noktasına uzaklığı;

$$\begin{aligned}
 d_T(P, P') &= |2c_1 + 2(a - 2c_1)k| + |2c_1 + 2(a - 2c_1)m| \\
 &\quad + |2(a - 2c_1)(1 - (k + m))| \\
 &= 2c_1 + 2(a - 2c_1)k + 2c_1 + 2(a - 2c_1)m + 2(a - 2c_1) \\
 &\quad - 2(a - 2c_1)k - 2(a - 2c_1)m \\
 &= 2c_1 + 2c_1 + 2a - 4c_1 \\
 &= 2a
 \end{aligned}$$

dır.

Böylece belirttiğimiz gibi bu karşılıklı 4, toplam 8 üçgenel yüzeyin üzerlerindeki noktaların çap uzunluğu $2a$ dır.

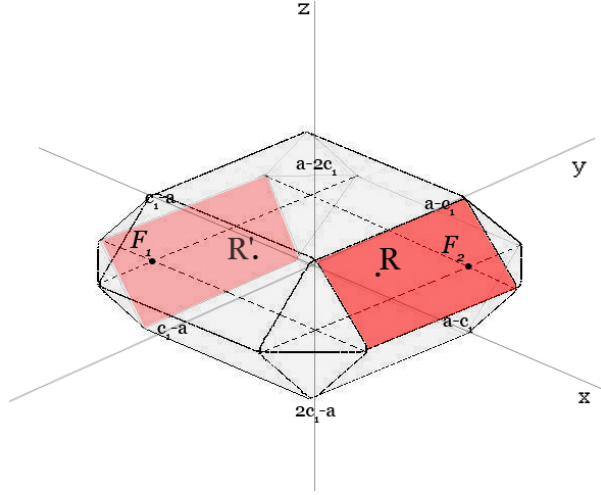
Elipsoidin bu defa $x + z + a - c_1 = 0$, $x + z - a + c_1 = 0$; $x - z + a - c_1 = 0$,
 $x - z - a + c_1 = 0$; $y + z + a - c_1 = 0$, $y + z - a + c_1 = 0$; $y - z + a - c_1 = 0$,
 $y - z - a + c_1 = 0$ yüzeyleri üzerlerinde alınan yine karşılıklı 4, toplam 8 dikdörtgenel

yüzeyin üzerinde alınan herhangi bir noktanın orijine göre simetriğine olan uzaklığı yani çapını incelemek için bu yüzeylerden biri olan $x + z - a + c_1 = 0$ yüzeyi üzerinde bir

$$R = (c_1 + (a - 2c_1)k, m, (a - 2c_1)(1 - k)), \quad 0 < k < 1, \quad -c_1 < m < c_1, \quad k, m \in \mathbb{R}$$

noktası alındığında bunun orijine göre simetriği;

$$R' = (-c_1 - (a - 2c_1)k, -m, -(a - 2c_1)(1 - k)) \text{ noktasına olan uzaklığı,}$$



Şekil-3.3

$$\begin{aligned} d_T(R, R') &= |2c_1 + 2(a - 2c_1)k| + |2m| + |2(a - 2c_1)(1 - k)| \\ &= 2c_1 + 2(a - 2c_1)k + |2m| + 2(a - 2c_1) - 2(a - 2c_1)k \\ &= 2c_1 + |2m| + 2a - 4c_1 \\ &= |2m| + 2a - 2c_1 \\ &= |2m| + 2(a - c_1) \end{aligned}$$

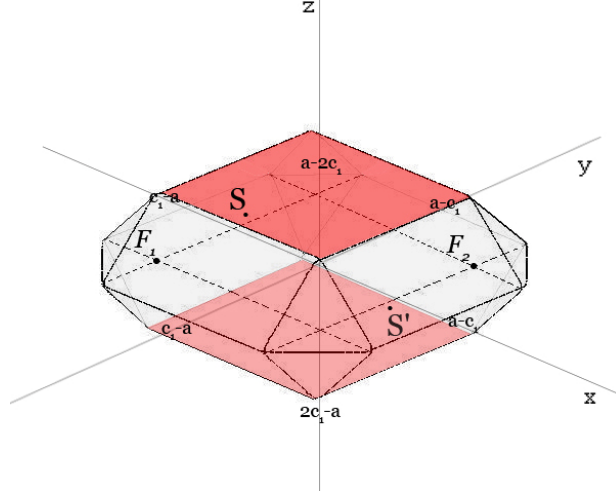
olur.

$-c_1 < m < c_1$ için $d_T(R, R') \geq 2(a - c_1)$ dir. Yani bu karşılıklı toplam 8 yüzeyin üzerlerindeki çap uzunlukları $2(a - c_1)$ değerine eşit veya büyük, $2a$ değerinden de daima küçüktür.

Bu 18 yüzlü taksi elipsoid için son olarak da karşılıklı birbirine paralel $z + a - 2c_1 = 0$, $z - a + 2c_1 = 0$ yüzeyleri üzerindeki noktaların simetrilerine olan elipsoid üzerindeki çap uzunluğunu bulmak için $z - a + 2c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki bir

$S = (k, m, a - 2c_1)$, $-c_1 < k < c_1$, $-c_1 < m < c_1$, $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının orijine göre simetriği olan $S' = (-k, -m, -(a - 2c_1))$ noktasına uzaklığına bakabiliriz.

$$\begin{aligned} d_T(S, S') &= |2k| + |2m| + |2(a - 2c_1)| \\ &= |2k| + |2m| + 2(a - 2c_1) \text{ olur.} \end{aligned}$$



Şekil-3.4

$-c_1 < k < c_1$, $-c_1 < m < c_1$ olduğunu dikkate alırsak en küçük çap uzunluğu

$2(a - 2c_1) = 2a - 4c_1$ olacaktır ki bu da sadece elipsoidin z eksenini kestiği karşılıklı iki noktanın birbirine olan uzaklığıdır.

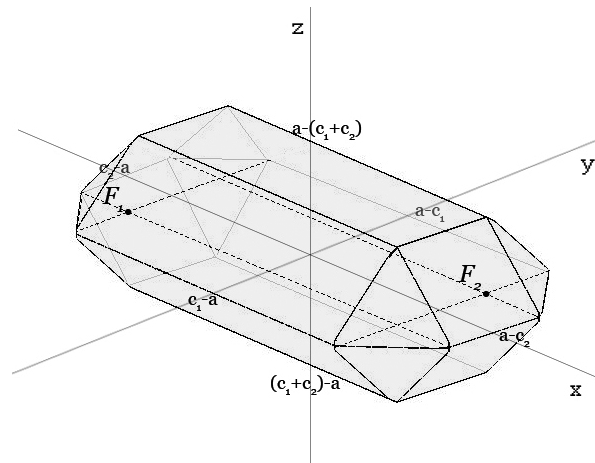
ii) $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 = z_2$ olmak üzere xy -düzleminde eğimi ± 1 den farklı olan bir doğru üzerinde orijine göre simetrik konumda $c_1 > c_2$ olacak şekilde

$F_1 = (-c_1, -c_2, 0)$ ve $F_2 = (c_1, c_2, 0)$ odak noktalarına sahip elipsoidleri incelemek yeterlidir. Çünkü diğerleri de yine bu elipsoidin dönmeler ve ötelemeler ile elde edilebilen halleri olacaktır. Bu odak noktalarına sahip elipsoid için aynı denklemde değerleri yerine koyduğumuzda;

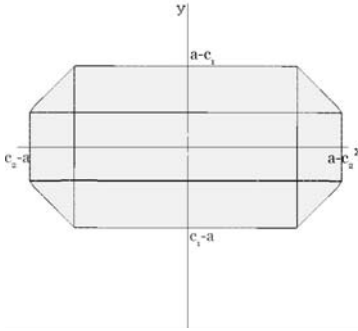
$$\begin{aligned} |x + c_1| + |y + c_2| + |z - 0| + |x - c_1| + |y - c_2| + |z - 0| &= 2a > 0, \quad 2a > 2(c_1 + c_2) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow |x + c_1| + |y + c_2| + |x - c_1| + |y - c_2| + 2|z| &= 2a \end{aligned}$$

olur.

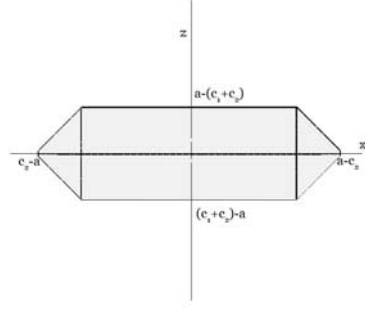
$x < -c_1, y < -c_2, z < 0$	\Rightarrow	$x + y + z + a = 0$
$x < -c_1, y < -c_2, z \leq 0$	\Rightarrow	$x + y - z + a = 0$
$x < -c_1, -c_2 \leq y < c_2, z < 0$	\Rightarrow	$x + z + a - c_2 = 0$
$x < -c_1, -c_2 \leq y < c_2, z \geq 0$	\Rightarrow	$x - z + a - c_2 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_2, z < 0$	\Rightarrow	$x - y + z + a = 0$
$x < -c_1, y \geq c_2, z \geq 0$	\Rightarrow	$x - y - z + a = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_2, z < 0$	\Rightarrow	$y + z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_2, z \leq 0$	\Rightarrow	$y - z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_2 \leq y < c_2, z < 0$	\Rightarrow	$z + a - c_1 - c_2 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_2 \leq y < c_2, z \geq 0$	\Rightarrow	$z - a + c_1 + c_2 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_2, z < 0$	\Rightarrow	$y - z - a + c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_2, z \geq 0$	\Rightarrow	$y + z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y < -c_2, z < 0$	\Rightarrow	$x - y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y < -c_2, z \leq 0$	\Rightarrow	$x - y + z - a = 0$
$x \geq c_1, -c_2 \leq y < c_2, z < 0$	\Rightarrow	$x - z - a + c_2 = 0$
$x \geq c_1, -c_2 \leq y < c_2, z \geq 0$	\Rightarrow	$x + z - a + c_2 = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_2, z < 0$	\Rightarrow	$x + y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_2, z \geq 0$	\Rightarrow	$x + y + z - a = 0$



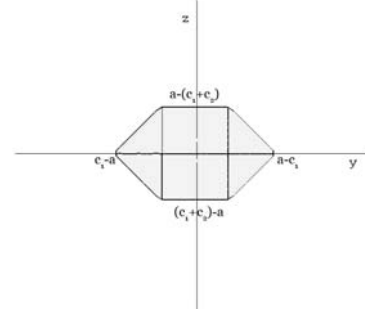
Şekil-4.1



Şekil-4.1.a



Şekil-4.1.b

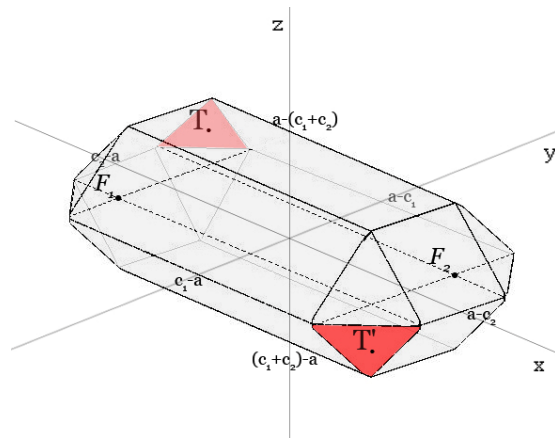


Şekil-4.1.c

Yine elipsoidin farklı yüzeyleri üzerindeki karşılıklı noktaların çap uzunluğunu incelemek üzere karşılıklı $x + y + z + a = 0$, $x + y + z - a = 0$; $x + y - z + a = 0$, $x + y - z - a = 0$; $x - y + z + a = 0$, $x - y + z - a = 0$; $x - y - z + a = 0$, $x - y - z - a = 0$ 4 yüzey toplam 8 üçgensel yüzeyin üzerinde alınan noktaların orijine göre simetrilerine olan çap uzunluklarını incelemek için $x - y - z + a = 0$ yüzeyi üzerindeki bir

$$T = (-c_1 - (a - (c_1 + c_2))k, c_2 + (a - (c_1 + c_2))m, (a - (c_1 + c_2))(1 - (k + m))),$$

$0 < k + m < 1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının orijine göre simetriği olan $x - y - z - a = 0$ yüzeyi üzerindeki $T' = (c_1 + (a - (c_1 + c_2))k, -c_2 - (a - (c_1 + c_2))m, -(a - (c_1 + c_2))(1 - (k + m)))$ noktasına uzaklığı;



Şekil-4.2

$$\begin{aligned}
d_T(T, T') &= |2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2))k| + |2c_2 + 2(a - (c_1 + c_2))m| + |2(a - (c_1 + c_2))(1 - (k + m))| \\
&= 2|c_1| + 2|(a - (c_1 + c_2))k| + 2|c_2| + 2|(a - (c_1 + c_2))m| \\
&\quad + 2|(a - (c_1 + c_2)) - (a - (c_1 + c_2))(k + m)| \\
&= 2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2))k + 2c_2 + 2(a - (c_1 + c_2))m + 2(a - (c_1 + c_2)) \\
&\quad - 2(a - (c_1 + c_2))k - 2(a - (c_1 + c_2))m \\
&= 2c_1 + 2c_2 + 2a - 2c_1 - 2c_2 \\
&= 2a
\end{aligned}$$

olur.

Görüldüğü üzere bu toplam 8 yüzey üzerindeki noktaların elipsoid üzerindeki çap uzunluğu büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşittir.

Yine karşılıklı $x + z + a - c_2 = 0$, $x + z - a + c_2 = 0$; $x - z + a - c_2 = 0$,

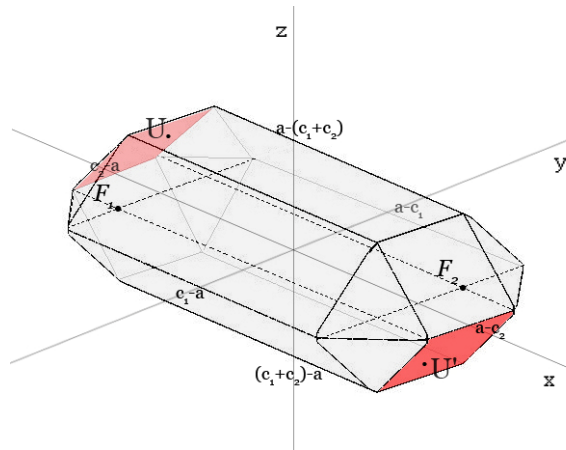
$x - z - a + c_2 = 0$ 2 yüzey toplam 4 yüzey üzerinde alınan herhangi bir noktanın

simetriğine olan uzaklığını incelemek üzere $x - z + a - c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki bir

$$U = (-c_1 - (a - (c_1 + c_2))k, m, (a - (c_1 + c_2))(1 - k)), \quad 0 < k < 1 \quad -c_2 < m < c_2$$

$k, m \in \mathbb{R}$ noktasının simetriği olan;

$$U' = (c_1 + (a - (c_1 + c_2))k, -m, -(a - (c_1 + c_2))(1 - k)) \text{ noktasına olan uzaklığı;}$$



Şekil-4.3

$$d_T(U, U') = |2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2))k| + |2m| + |2(a - (c_1 + c_2))(1 - k)|$$

$$\begin{aligned}
&= |2c_1| + |2(a - (c_1 + c_2))k| + |2m| + |2(a - (c_1 + c_2)) - (a - (c_1 + c_2))k| \\
&= 2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2))k + 2|m| + 2(a - (c_1 + c_2)) - 2(a - (c_1 + c_2))k \\
&= 2c_1 + 2|m| + 2a - 2(c_1 + c_2) \\
&= 2|m| + 2(a - c_2)
\end{aligned}$$

olur.

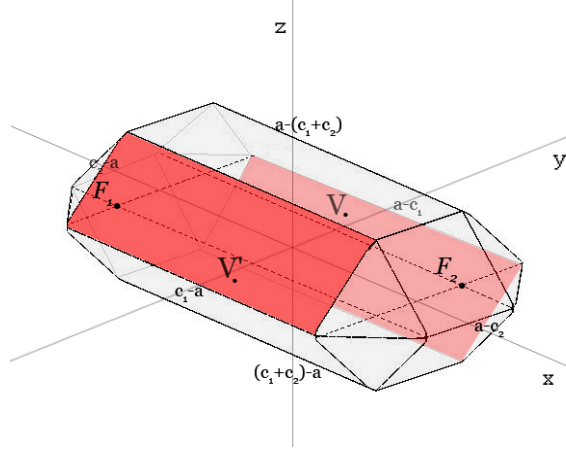
Bu çap uzunluğu $-c_2 < m < c_2$ aralığındaki m değerine göre elipsoidin büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçüktür ve $m = 0$ için de $2(a - c_2)$ değerine eşittir.

Elipsoidin karşılıklı $y + z + a - c_1 = 0$, $y + z - a + c_1 = 0$; $y - z + a - c_1 = 0$, $y - z - a + c_1 = 0$ karşılıklı 2 yüzey toplam 4 yüzey üzerinde alınan keyfi bir noktanın simetriğine olan uzaklığını incelemek için $y - z - a + c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki bir

$$V = (m, c_2 + (a - (c_1 + c_2))k, (a - (c_1 + c_2))(1 - k)) \quad 0 < k < 1 \quad -c_1 < m < c_1 \quad k, m \in \mathbb{R}$$

noktasının orijine göre simetriği olan

$$V' = (-m, -c_2 - (a - (c_1 + c_2))k, -(a - (c_1 + c_2))(1 - k)) \text{ noktasına uzaklığı;}$$



Şekil-4.4

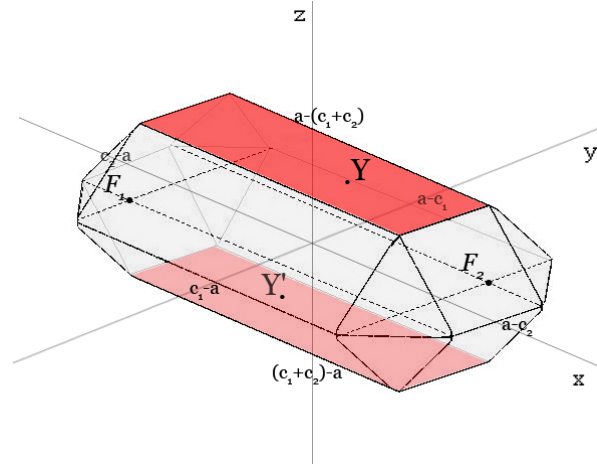
$$\begin{aligned}
d_T(V, V') &= |2m| + |2(c_2 + (a - (c_1 + c_2))k)| + |2(a - (c_1 + c_2))(1 - k)| \\
&= |2m| + |2c_2| + |2(a - (c_1 + c_2))k| + |2(a - (c_1 + c_2))| - |2(a - (c_1 + c_2))k| \\
&= 2|m| + 2|c_2| + 2|a| - 2|c_1 + c_2| \\
&= 2|m| + 2c_2 + 2a - 2c_1 - 2c_2
\end{aligned}$$

$$= 2|m| + 2(a - c_1)$$

dır.

Bu çap uzunluğu $-c_1 < m < c_1$ aralığındaki m değerine göre elipsoidin büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçüktür ve $m = 0$ için de $2(a - c_1)$ değerine eşittir.

Elipsoidin $z - a + c_1 + c_2 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan bir $Y = (k, m, (a - (c_1 + c_2)))$ $-c_1 < k < c_1$ $-c_2 < m < c_2$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $z + a - c_1 - c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $Y' = (-k, -m, -(a - (c_1 + c_2)))$ noktasına olan uzaklığı;



Şekil-4.5

$$\begin{aligned} d_T(Y, Y') &= |2k| + |2m| + |2(a - (c_1 + c_2))| \\ &= 2|k| + 2|m| + 2(a - (c_1 + c_2)) \end{aligned}$$

dır.

Görüldüğü üzere $-c_1 < k < c_1$ ve $-c_2 < m < c_2$ değerleri için bu çap uzunluğu her zaman $2a$ değerinden küçüktür. Ayrıca $k = 0$ ve $m = 0$ değerleri için bu simetrik iki noktanın birbirine olan çap uzaklığı $2(a - (c_1 + c_2))$ değerine eşittir ve bu elipsoidin en küçük çapıdır. Anlaşılacağı üzere şekildeki gibi bir merkezi orijin olan elipsoidin en küçük çap uzunluğu elipsoidin z eksenini kestiği karşılıklı iki noktanın birbirine olan uzaklığıdır.

2.2.3 26 yüzlü taksi elipsoidler

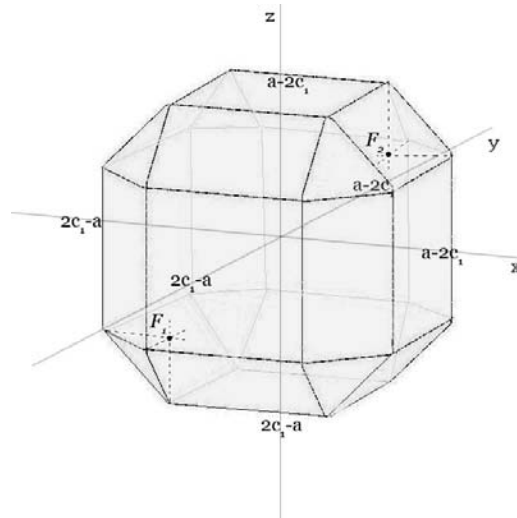
$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ olacak şekilde iki odaklı taksi elipsoidleri incelemek üzere merkezi orijin olan, $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = |z_1 - z_2|$ koşulunu sağlayacak şekilde $F_1 = (-c_1, -c_1, -c_1)$ ve $F_2 = (c_1, c_1, c_1)$ odak noktalarına sahip elipsoidler, $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| \neq |z_1 - z_2|$ koşulunu sağlayacak şekilde $F_1 = (-c_1, -c_1, -c_2)$ ve $F_2 = (c_1, c_1, c_2)$, $c_1 \neq c_2$ odak noktalarına sahip elipsoidler, $|x_1 - x_2| \neq |y_1 - y_2| \neq |z_1 - z_2|$ koşulunu sağlayacak şekilde $F_1 = (-c_1, -c_2, -c_3)$ ve $F_2 = (c_1, c_2, c_3)$, $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_1$ odak noktalarına sahip elipsoidler incelenebilir.

i) $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = |z_1 - z_2|$ koşulunu sağlayan merkezi orijin olan $F_1 = (-c_1, -c_1, -c_1)$ ve $F_2 = (c_1, c_1, c_1)$ odak noktalarına sahip elipsoidleri incelemek açısından bu nokta değerlerini $\alpha = 1$ için (*) denkleminde yerine konulduğunda şu 26 yüzlü taksi elipsoid denklemleri ortaya çıkar.

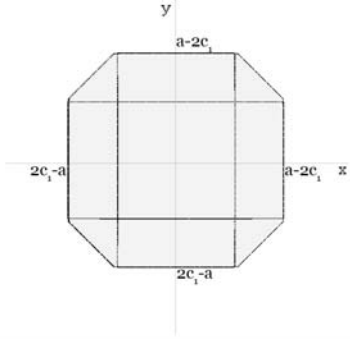
$$|x + c_1| + |y + c_1| + |z + c_1| + |x - c_1| + |y - c_1| + |z - c_1| = 2a > 0, \quad 2a > 6c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$x < -c_1, y < -c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$x + y + z + a = 0$
$x < -c_1, y < -c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$x + y + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, y < -c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$x + y - z + a = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$x + z + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$x + a - 2c_1 = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$x - z + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$x - y + z + a = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$x - y + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$x - y - z + a = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$y + z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$y + a - 2c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$y - z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$z + a - 2c_1 = 0$

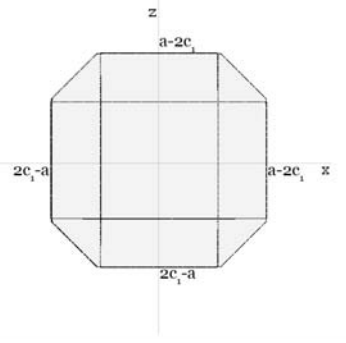
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$6c_1 = 2a$	\emptyset
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$z - a + 2c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$y - z - a + c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$y - a + 2c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$y + z - a + c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$x - y - z - a = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$x - y - a + c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$x - y + z - a = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$x - z - a + c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$x - a + 2c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$x + z - a + c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z < -c_1$	\Rightarrow	$x + y - z - a = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, -c_1 \leq z < c_1$	\Rightarrow	$x + y - a + c_1 = 0$	
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z \geq c_1$	\Rightarrow	$x + y + z - a = 0$	



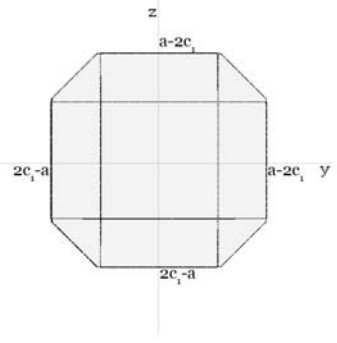
Şekil-5.1



Şekil-5.1.a



Şekil-5.1.b



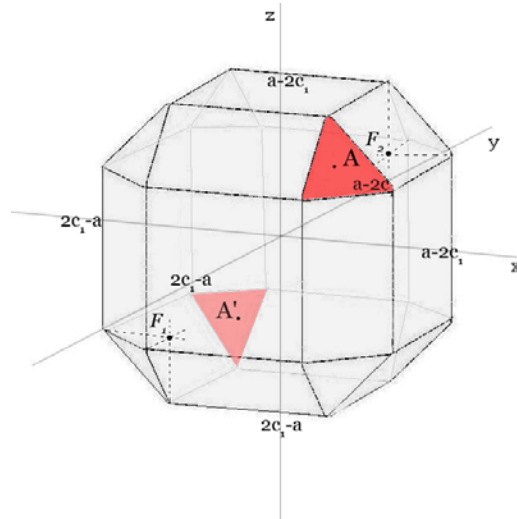
Şekil-5.1.c

Bu toplam 26 yüzey merkezi orijin olan 26 yüzlü bir taksi elipsoidi gösterir. Bu elipsoidin üzerinde alınan keyfi noktaların elipsoidin merkezine göre simetrilerine olan uzaklıklarını yani elipsoid üzerindeki çap uzunluklarını incelemek üzere öncelikle karşılıklı $x + y + z + a = 0$, $x + y + z - a = 0$; $x + y - z + a = 0$, $x + y - z - a = 0$; $x - y + z + a = 0$, $x - y + z - a = 0$; $x - y - z + a = 0$, $x - y - z - a = 0$ 4 yüzey toplam 8 yüzeyden biri olan $x - y + z - a = 0$ yüzeyi üzerindeki keyfi bir

$$A = (c_1 + (a - 3c_1)k, -c_1 - (a - 3c_1)m, c_1 + (a - 3c_1)(1 - (k + m))) \quad 0 < k + m < 1$$

$k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x - y + z + a = 0$ yüzeyi üzerindeki orijine göre simetriği olan

$$A' = (-c_1 - (a - 3c_1)k, c_1 + (a - 3c_1)m, -c_1 - (a - 3c_1)(1 - (k + m))) \text{ noktasına uzaklığı;}$$



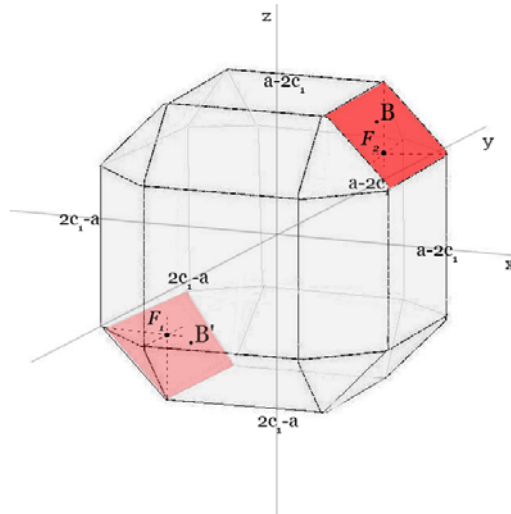
Şekil-5.2

$$\begin{aligned}
d_T(A, A') &= \left| 2(c_1 + (a - 3c_1)k) + 2(c_1 + (a - 3c_1)m) + 2(c_1 + (a - 3c_1)(1 - (k + m))) \right| \\
&= 2|c_1| + 2|(a - 3c_1)k| + 2|c_1| + 2|(a - 3c_1)m| + 2|c_1| + 2|a - 3c_1| \\
&\quad - 2|(a - 3c_1)k| - 2|(a - 3c_1)m| \\
&= 2c_1 + 2c_1 + 2c_1 + 2a - 6c_1 \\
&= 2a
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu karşılıklı toplam 8 üçgensel yüzeyin üzerindeki noktaların simetrilerine olan çap uzunlukları en büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşittir. Yani en büyük çap bu karşılıklı yüzeyler üzerindedir.

Elipsoidin karşılıklı $x + y + a - c_1 = 0$, $x + y - a + c_1 = 0$; $x + z + a - c_1 = 0$,
 $x + z - a + c_1 = 0$; $x - z + a - c_1 = 0$, $x - z - a + c_1 = 0$; $x - y + a - c_1 = 0$,
 $x - y - a + c_1 = 0$; $y + z + a - c_1 = 0$, $y + z - a + c_1 = 0$; $y - z + a - c_1 = 0$,
 $y - z - a + c_1 = 0$ 6 yüzey toplam 12 yüzey üzerinde alınan noktaların elipsoid
üzerindeki simetriğine olan uzaklığını incelemek üzere $x + z - a + c_1 = 0$ yüzeyi
üzerindeki keyfî bir $B = (c_1 + (a - 3c_1)k, m, c_1 + (a - 3c_1)(1 - k))$ $0 < k < 1$
 $-c_1 < m < c_1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x + z + a - c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriğine olan
 $B' = (-c_1 - (a - 3c_1)k, -m, -c_1 - (a - 3c_1)(1 - k))$ noktasına uzaklığı;



Şekil-5.3

$$\begin{aligned}
d_T(B, B') &= \left| 2(c_1 + (a - 3c_1)k) \right| + |2m| + \left| 2(c_1 + (a - 3c_1)(1 - k)) \right| \\
&= 2|c_1| + 2|(a - 3c_1)k| + 2|m| + 2|c_1 + (a - 3c_1) - (a - 3c_1)k| \\
&= 2|c_1| + 2|(a - 3c_1)k| + 2|m| + 2|c_1 + (a - 3c_1)| - 2|(a - 3c_1)k| \\
&= 2c_1 + 2|m| + 2c_1 + 2a - 6c_1 \\
&= 2|m| + 2(a - c_1)
\end{aligned}$$

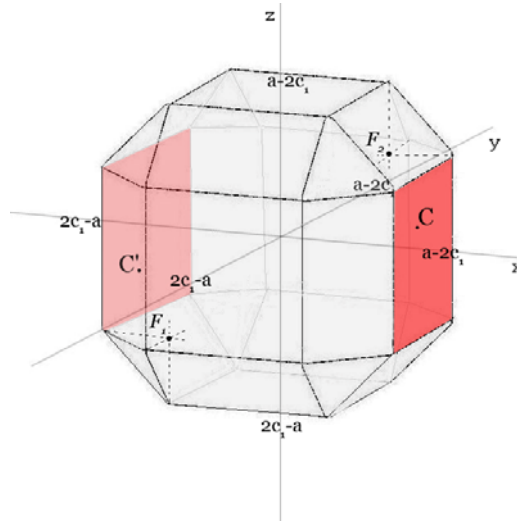
dır.

$-c_1 < m < c_1$ için $2(a - c_1) \leq d_T(B, B') < 2a$ diyebiliriz. Yani bu karşılıklı toplam 12 yüzey üzerindeki simetrilerin çap uzunlukları $2(a - c_1)$ değerine eşit ya da büyük, $2a$ değerinden de daima küçüktür.

Son olarak bu elipsoidin karşılıklı $x + a - 2c_1 = 0$, $x - a + 2c_1 = 0$;

$y + a - 2c_1 = 0$, $y - a + 2c_1 = 0$; $z + a - 2c_1 = 0$, $z - a + 2c_1 = 0$ 3 yüzey toplam 6 yüzey üzerindeki keyfi noktaların elipsoidin merkezine göre simetrilerine olan uzaklığını bulmak için, $x - a + 2c_1 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan keyfi bir $C = (a - 2c_1, k, m)$

$-c_1 < k < c_1$ $-c_1 < m < c_1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x + a - 2c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $C' = (-a + 2c_1, -k, -m)$ noktasına olan uzaklığı;



Şekil-5.4

$$\begin{aligned} d_T(C, C') &= |2(a - 2c_1)| + |2k| + |2m| \\ &= 2(a - 2c_1) + 2|k| + 2|m| \end{aligned}$$

dır.

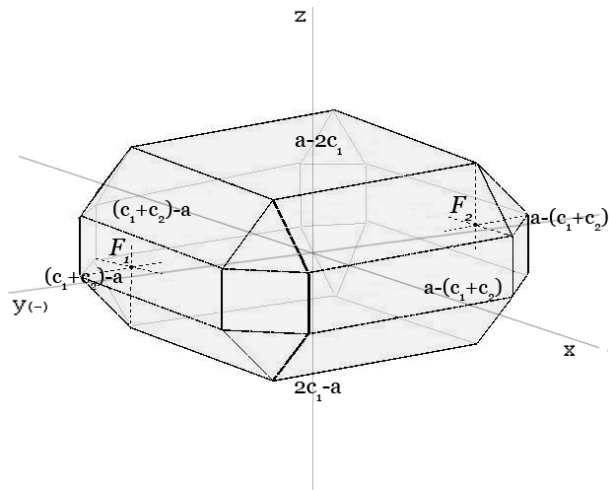
$-c_1 < k < c_1$ ve $-c_1 < m < c_1$ aralığında k ve m değerlerine göre bu çap uzunluğu değiştiğine göre bu çap uzunluğu daima, büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçüktür ve $k = m = 0$ için de elipsoidin en küçük çap uzunluğu olan $2(a - 2c_1)$ değerine eşittir. İncelediğimiz bu karşılıklı 2 yüzey gibi diğer 4 yüzey için de aynı şeyler geçerlidir. Dolayısıyla bu elipsoidin tüm eksenlerle arakesiti olan karşılıklı simetri noktaların birbirine olan çap uzunlukları elipsoidin en küçük çapıdır.

ii) $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| \neq |z_1 - z_2|$ koşulunu sağlayan merkezi orijin olan $F_1 = (-c_1, -c_1, -c_2)$ ve $F_2 = (c_1, c_1, c_2)$ odak noktalarına sahip elipsoidleri incelemek açısından bu nokta değerleri $\alpha = 1$ için (*) denkleminde yerine konulduğunda şu 26 yüzlü taksi elipsoid ortaya çıkar;

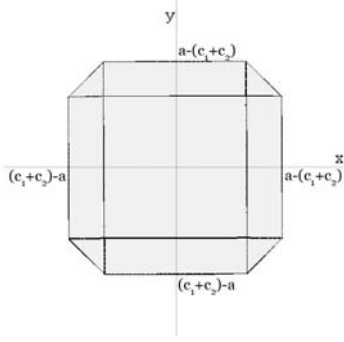
$$\begin{aligned} |x + c_1| + |y + c_1| + |z + c_2| + |x - c_1| + |y - c_1| + |z - c_2| &= 2a > 0 \\ 2a > 2(2c_1 + c_2), \quad c_1 > c_2, \quad c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$x < -c_1, y < -c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$x + y + z + a = 0$
$x < -c_1, y < -c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$x + y + a - c_2 = 0$
$x < -c_1, y < -c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$x + y - z + a = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$x + z + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$x + a - c_1 - c_2 = 0$
$x < -c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$x - z + a - c_1 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$x - y + z + a = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$x - y + a - c_2 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$x - y - z + a = 0$

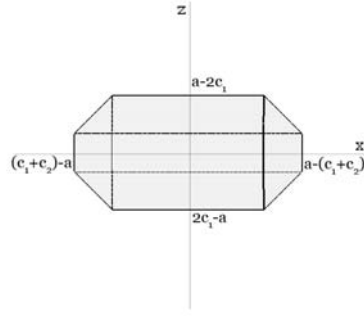
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$y + z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$y + a - c_1 - c_2 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$y - z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$z + a - 2c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$4c_1 + 2c_2 = 2a \quad \emptyset$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$z - a + 2c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$y - z - a + c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$y - a + c_1 + c_2 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$y + z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y < -c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$x - y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y < -c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$x - y - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y < -c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$x - y + z - a = 0$
$x \geq c_1, -c_1 \leq y < c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$x - z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, -c_1 \leq y < c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$x - a + 2c_1 = 0$
$x \geq c_1, -c_1 \leq y < c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$x + z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_1, z < -c_2$	\Rightarrow	$x + y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_1, -c_2 \leq z < c_2$	\Rightarrow	$x + y - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_1, z \geq c_2$	\Rightarrow	$x + y + z - a = 0$



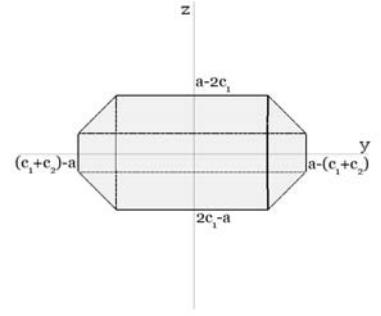
Şekil-6.1



Şekil-6.1.a



Şekil-6.1.b



Şekil-6.1.c

Şekilde gösterilen merkezi orijin olan iki odaklı 26 yüzlü taksi elipsoidin üzerindeki çap uzunluklarını incelemek üzere yine elipsoidin karşılıklı;

$$x + y + z + a = 0, x + y + z - a = 0; x + y - z + a = 0, x + y - z - a = 0; x - y + z + a = 0,$$

$$x - y + z - a = 0; x - y - z + a = 0, x - y - z - a = 0, 4 \text{ yüzey toplam } 8 \text{ yüzeyi üzerinde}$$

alınan noktaların simetrilerine olan çap uzunluklarını incelemek üzere $x - y + z - a = 0$ yüzeyi üzerinde bir

$$D = (c_1 + (a - (2c_1 + c_2))k, -c_1 - (a - (2c_1 + c_2))m, c_2 + (a - (2c_1 + c_2))(1 - (k + m)))$$

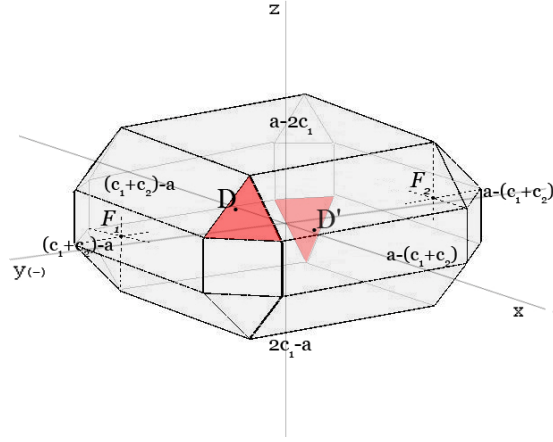
$0 < k + m < 1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktası ve $x - y + z + a = 0$ yüzeyi üzerindeki orijine göre simetriği olan

$$D' = (-c_1 - (a - (2c_1 + c_2))k, c_1 + (a - (2c_1 + c_2))m, -c_2 - (a - (2c_1 + c_2))(1 - (k + m)))$$

noktasının birbirine olan uzaklığına baktığımızda

$$\begin{aligned} d_T(D, D') &= \left| 2(c_1 + (a - (2c_1 + c_2))k) \right| + \left| 2(c_1 + (a - (2c_1 + c_2))m) \right| \\ &\quad + \left| 2(c_2 + (a - (2c_1 + c_2))(1 - (k + m))) \right| \\ &= |2c_1| + |2(a - (2c_1 + c_2))k| + |2c_1| + |2(a - (2c_1 + c_2))m| + |2c_2| \\ &\quad + |2(a - (2c_1 + c_2))| - |2(a - (2c_1 + c_2))k| - |2(a - (2c_1 + c_2))m| \\ &= 2c_1 + 2c_1 + 2c_2 + 2a - 4c_1 - 2c_2 \\ &= 2a \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil-6.2

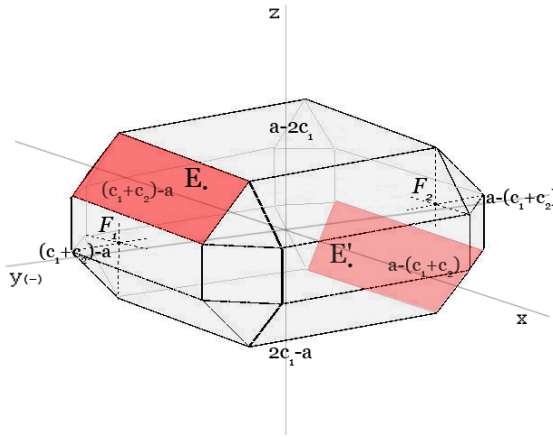
Dolayısıyla bu karşılıklı toplam 8 yüzey üzerindeki noktaların elipsoid üzerindeki simetri noktalarına olan çap uzunluğu en büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşittir. Yani elipsoidin en büyük çapı bu karşılıklı yüzeyler üzerindedir.

Elipsoidin karşılıklı; $x+z+a-c_1=0$, $x+z-a+c_1=0$; $x-z+a-c_1=0$, $x-z-a+c_1=0$; $y+z-a-c_1=0$, $y+z+a+c_1=0$; $y-z+a-c_1=0$, $y-z-a+c_1=0$ 4 yüzey toplam 8 yüzey üzerindeki keyfi noktaların simetrilerine olan çap uzunluklarını incelemek amacıyla $y-z+a-c_1=0$ yüzeyi üzerindeki bir

$$E = (m, -c_1 - (a - (2c_1 + c_2))k, c_2 + (a - (2c_1 + c_2))(1-k)) \quad 0 < k < 1, -c_1 < m < c_1,$$

$k, m \in \mathbb{R}$ noktasının elipsoid üzerindeki simetriği olan

$$E' = (-m, c_1 + (a - (2c_1 + c_2))k, -c_2 - (a - (2c_1 + c_2))(1-k)) \text{ noktasına uzaklığı;}$$



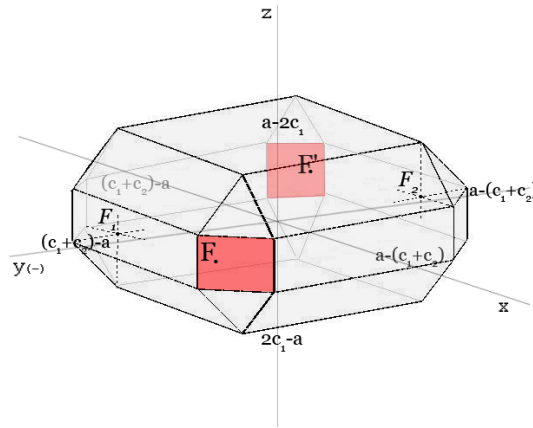
Şekil-6.3

$$\begin{aligned}
d_T(E, E') &= |2m| + \left| 2(c_1 + (a - (2c_1 + c_2))k) \right| + \left| 2(c_2 + (a - (2c_1 + c_2))(1-k)) \right| \\
&= 2|m| + 2|c_1| + 2|a - (2c_1 + c_2)k| + 2|c_2| + 2|a - (2c_1 + c_2)| \\
&\quad - 2|a - (2c_1 + c_2)k| \\
&= 2|m| + 2c_1 + 2c_2 + 2a - 4c_1 - 2c_2 \\
&= 2|m| + 2(a - c_1)
\end{aligned}$$

dır.

Bu sonuca göre $-c_1 < m < c_1$ olduğundan bu yüzeyler üzerindeki simetrik noktaların çap uzunlukları en büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçüktür ve $m = 0$ için de $2(a - c_1)$ değerine eşittir.

Elipsoidin karşılıklı $x + y + a - c_2 = 0$, $x + y - a + c_2 = 0$; $x - y + a - c_2 = 0$, $x - y - a + c_2 = 0$ 2 yüzey toplam 4 yüzeyden biri olan $x - y - a + c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki keyfi bir $F = (c_1 + (a - (2c_1 + c_2))k, -c_1 - (a - (2c_1 + c_2))(1-k), m)$ $0 < k < 1$, $-c_1 < m < c_1$, $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x - y + a - c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği $F' = (-c_1 - (a - (2c_1 + c_2))k, c_1 + (a - (2c_1 + c_2))(1-k), -m)$ noktasına olan çap uzunluğu;



Şekil-6.4

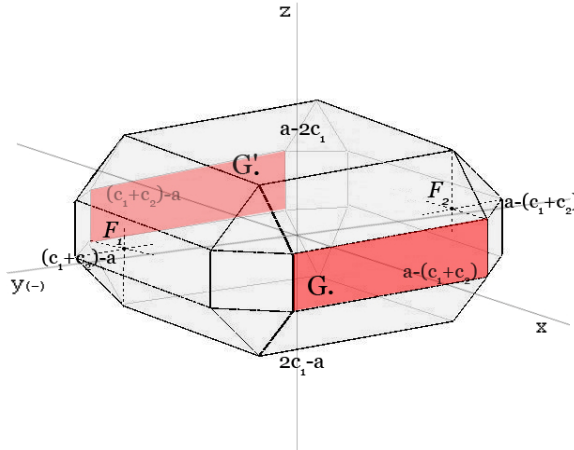
$$d_T(F, F') = \left| 2(c_1 + (a - (2c_1 + c_2))k) \right| + \left| 2(c_1 + (a - (2c_1 + c_2))(1-k)) \right| + 2|m|$$

$$\begin{aligned}
&= 2|c_1| + 2|a - (2c_1 + c_2)k| + 2|c_1| + 2|a - (2c_1 + c_2)| - 2|a - (2c_1 + c_2)k| + 2|m| \\
&= 2c_1 + 2c_1 + 2a - 4c_1 - 2c_2 + 2|m| \\
&= 2|m| + 2(a - c_2)
\end{aligned}$$

dır.

Bu sonuca göre $-c_1 < m < c_1$ olduğundan bu yüzeyler üzerindeki simetrik noktaların çap uzunlukları en büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçüktür ve $m = 0$ için de $2(a - c_2)$ değerine eşittir.

Elipsoidin karşılıklı $x + a - c_1 - c_2 = 0$, $x - a + c_1 + c_2 = 0$; $y + a - c_1 - c_2 = 0$, $y - a + c_1 + c_2 = 0$ 2 yüzey toplam 4 yüzey üzerindeki noktaların simetrilerine uzaklığını bulmak üzere elipsoidin $x - a + c_1 + c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki bir $G = (a - (c_1 + c_2), k, m)$ $-c_1 < k < c_1$, $c_2 < m < c_2$, $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x + a - c_1 - c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $G' = (-a + (c_1 + c_2), -k, -m)$ noktasına uzaklığı;



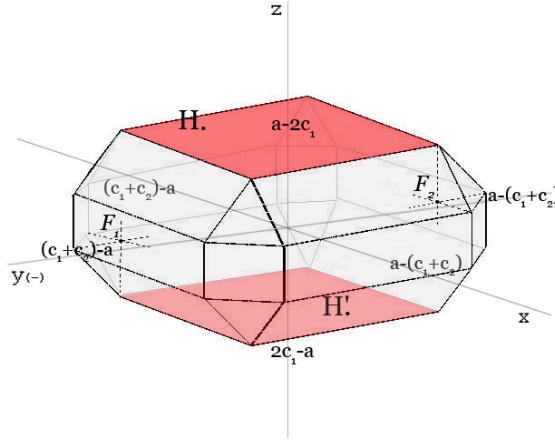
Şekil-6.5

$$\begin{aligned}
d_T(G, G') &= |2(a - (c_1 + c_2))| + 2|k| + 2|m| \\
&= 2(a - (c_1 + c_2)) + 2|k| + 2|m|
\end{aligned}$$

dır.

$-c_1 < k < c_1$ ve $c_2 < m < c_2$ değerlerine göre değişen bu çap uzunlukları en büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçüktür. $k = m = 0$ değerleri için de $2(a - (c_1 + c_2))$ ye eşittir.

Elipsoidin $z + a - 2c_1 = 0$ ve $z - a + 2c_1 = 0$ yüzeyleri üzerinde bulunan karşılıklı 2 yüzey üzerinde alınan noktaların birbirine uzaklığını incelemek üzere $z - a + 2c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki bir $H = (k, m, a - 2c_1)$ $-c_1 < k < c_1$, $-c_1 < m < c_1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $z + a - 2c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $H' = (-k, -m, -(a - 2c_1))$ noktasına olan uzaklığı;



Şekil-6.6

$$\begin{aligned} d_T(H, H') &= |2k| + |2m| + |2(a - 2c_1)| \\ &= 2|k| + 2|m| + 2(a - 2c_1) \end{aligned}$$

bulunur.

$-c_1 < k < c_1$ ve $-c_1 < m < c_1$ değerlerine göre değişen bu çap uzunluğu en büyük çap uzunluğu $2a$ dan küçük $k = m = 0$ için de $c_1 > c_2$ olduğundan en küçük çap uzunluğu $2(a - 2c_1)$ ya eşittir. Dolayısıyla bu koşullarda elipsoidin en küçük çapı elipsoidin z eksenini kesen karşılıklı iki notasından geçen çaptır.

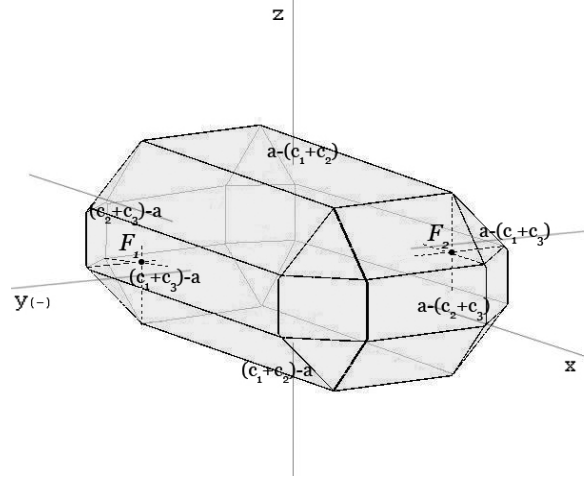
iii) $|x_1 - x_2| \neq |y_1 - y_2| \neq |z_1 - z_2|$ koşulunu sağlayan merkezi orijin olan

$F_1 = (-c_1, -c_2, -c_3)$ ve $F_2 = (c_1, c_2, c_3)$ $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_1$ odak noktalarına sahip elipsoidleri incelemek üzere bu nokta değerlerini iki odaklı taksit elipsoid denkleminde kullandığımızda aşağıdaki 26 yüzlü taksit elipsoid ortaya çıkar;

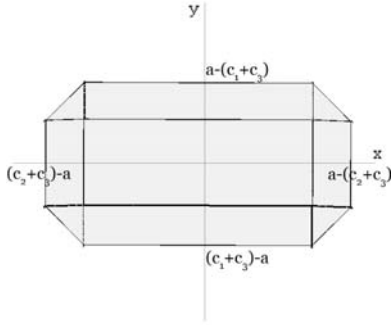
$$|x+c_1|+|y+c_2|+|z+c_3|+|x-c_1|+|y-c_2|+|z-c_3|=2a>0, \quad 2a>2(c_1+c_2+c_3),$$

$$c_1>c_2>c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

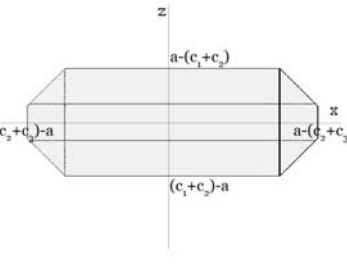
$x < -c_1, y < -c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow x + y + z + a = 0$
$x < -c_1, y < -c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow x + y + a - c_3 = 0$
$x < -c_1, y < -c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow x + y - z + a = 0$
$x < -c_1, -c_2 \leq y < c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow x + z + a - c_2 = 0$
$x < -c_1, -c_2 \leq y < c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow x + a - c_2 - c_3 = 0$
$x < -c_1, -c_2 \leq y < c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow x - z + a - c_2 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow x - y + z + a = 0$
$x < -c_1, y \geq c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow x - y + a - c_3 = 0$
$x < -c_1, y \geq c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow x - y - z + a = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow y + z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow y + a - c_1 - c_3 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y < -c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow y - z + a - c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_2 \leq y < c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow z + a - c_1 - c_2 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_2 \leq y < c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 2a \quad \emptyset$
$-c_1 \leq x < c_1, -c_2 \leq y < c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow z - a + c_1 + c_2 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow y - z - a + c_1 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow y - a + c_1 + c_3 = 0$
$-c_1 \leq x < c_1, y \geq c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow y + z - a + c_1 = 0$
$x \geq c_1, y < -c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow x - y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y < -c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow x - y - a + c_3 = 0$
$x \geq c_1, y < -c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow x - y + z - a = 0$
$x \geq c_1, -c_2 \leq y < c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow x - z - a + c_2 = 0$
$x \geq c_1, -c_2 \leq y < c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow x - a + c_2 + c_3 = 0$
$x \geq c_1, -c_2 \leq y < c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow x + z - a + c_2 = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_2, z < -c_3$	$\Rightarrow x + y - z - a = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_2, -c_3 \leq z < c_3$	$\Rightarrow x + y - a + c_3 = 0$
$x \geq c_1, y \geq c_2, z \geq c_3$	$\Rightarrow x + y + z - a = 0$



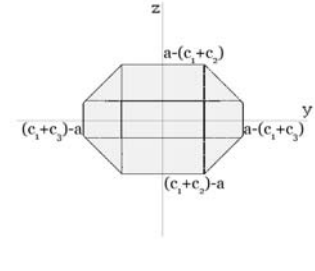
Şekil-7.1



Şekil-7.1.a



Şekil-7.1.b



Şekil-7.1.c

Son olarak inceleyeceğimiz şekilde gösterilen merkezi orijin olan 2 odak noktalı 26 yüzlü taksi elipsoidin üzerindeki çap uzunluklarını incelemek üzere öncelikle elipsoidin karşılıklı $x + y + z + a = 0$, $x + y + z - a = 0$; $x + y - z + a = 0$,

$x + y - z - a = 0$; $x - y + z + a = 0$, $x - y + z - a = 0$; $x - y - z + a = 0$, $x - y - z - a = 0$

4 yüzey toplam 8 üçgensel yüzeyin üzerlerinde alınan noktaların simetrilerine olan çap uzunluklarını incelemek üzere $x + y + z - a = 0$ yüzeyi üzerinde bulunan keyfi bir

$$K = (c_1 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, c_2 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))m, c_3 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - (k + m)))$$

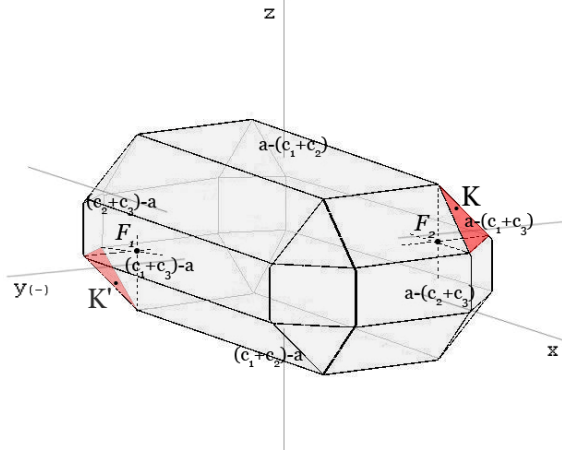
$0 < k + m < 1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının elipsoid üzerindeki simetriği olan

$$K' = (-c_1 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, -c_2 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))m, -c_3 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - (k + m)))$$

noktasına olan uzaklığı;

$$\begin{aligned}
d_T(K, K') &= \left| 2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k \right| + \left| 2c_2 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))m \right| \\
&\quad + \left| 2c_3 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - (k + m)) \right| \\
&= 2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k + 2c_2 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))m + 2c_3 \\
&\quad + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3)) - 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k - 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))m \\
&= 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2a - 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\
&= 2a
\end{aligned}$$

dır.



Şekil-7.2

Görüldüğü üzere elipsoidin bu karşılıklı toplam 8 üçgenel yüzey üzerindeki çap uzunlukları elipsoidin en büyük çap uzunluğu olan $2a$ ya eşittir. Yani elipsoidin en büyük çapı bu yüzeyler üzerindedir.

Elipsoidin karşılıklı $y + z + a - c_1 = 0$, $y + z - a + c_1 = 0$; $y - z + a - c_1 = 0$, $y - z - a + c_1 = 0$ 2 yüzey toplam 4 yüzey üzerindeki noktaların elipsoid üzerindeki çap uzunluklarını incelemek üzere $y - z + a - c_1 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan bir

$$L = (m, -c_2 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, c_3 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k)) \quad -c_1 < m < c_1,$$

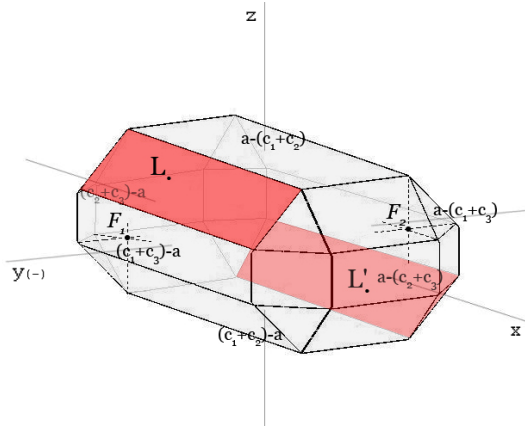
$0 < k < 1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $y - z - a + c_1 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan

$$L' = (-m, c_2 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, -c_3 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k))$$
 noktasına uzaklığı;

$$d_T(L, L') = |2m| + \left| 2c_2 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k \right| + \left| 2c_3 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= 2|m| + 2|c_2| + 2|(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| + 2|c_3| + 2|(a - (c_1 + c_2 + c_3))| \\
&\quad - 2|(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| \\
&= 2|m| + 2c_2 + 2c_3 + 2a - 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\
&= 2|m| + 2(a - c_1)
\end{aligned}$$

dır.



Şekil-7.3

Bu sonuca göre $-c_1 < m < c_1$ olduğundan bu yüzeyler üzerindeki simetrik noktaların çap uzunluğu en büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçük ve $m = 0$ için de $2(a - c_1)$ değerine eşittir.

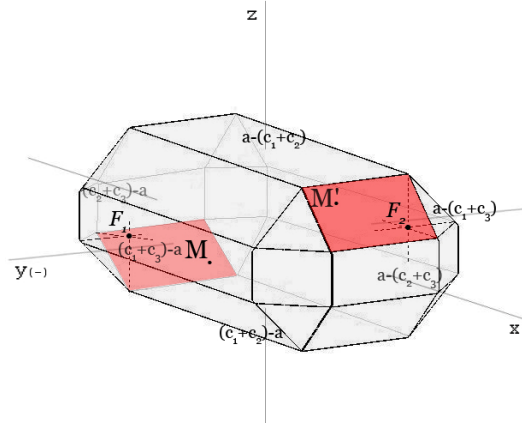
Elipsoidin karşılıklı $x + z - a + c_2 = 0$, $x + z + a - c_2 = 0$; $x - z + a - c_2 = 0$, $x - z - a + c_2 = 0$ 2 yüzey toplam 4 yüzey üzerindeki noktaların elipsoid üzerindeki çap uzunluklarını incelemek üzere elipsoidin $x + z - a + c_2 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan bir $M = (c_1 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, m, c_3 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k))$ $-c_2 < m < c_2$,

$0 < k < 1$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x + z + a - c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $M' = (-c_1 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, -m, -c_3 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k))$ noktasına uzaklığı

$$d_T(M, M') = |2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| + 2|m| + |2c_3 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k)|$$

$$\begin{aligned}
&= |2c_1| + |2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| + |2m| + |2c_3| + |2(a - (c_1 + c_2 + c_3))| \\
&\quad - |2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| \\
&= 2c_1 + 2|m| + 2c_3 + 2a - 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\
&= 2|m| + 2(a - c_2)
\end{aligned}$$

olur.



Şekil-7.4

Buna göre $-c_2 < m < c_2$ olduğundan bu yüzeyler üzerindeki simetrik noktaların çap uzunluğu daima en büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçük ve $m = 0$ için $2(a - c_2)$ değerine eşittir.

Elipsoidin karşılıklı $x + y + a - c_3 = 0$, $x + y - a + c_3 = 0$; $x - y + a - c_3 = 0$, $x - y - a + c_3 = 0$, 2 yüzey toplam 4 yüzeyi üzerindeki noktaların elipsoidin üzerindeki çap uzunluklarını incelemek üzere elipsoidin $x - y - a + c_3 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan bir $N = (c_1 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, -c_2 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k), m)$ $0 < k < 1$

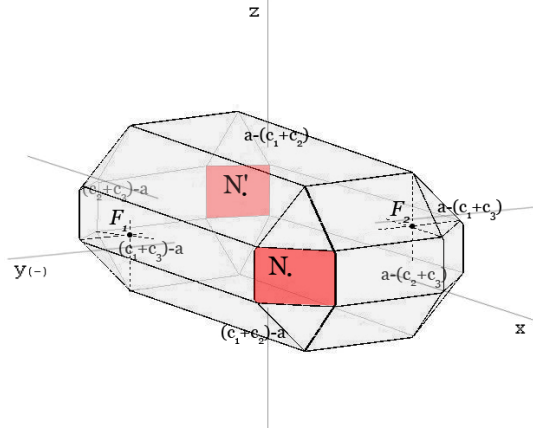
$-c_3 < m < c_3$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının elipsoidin $x - y + a - c_3 = 0$ yüzeyi üzerindeki orijine göre simetriği;

$N' = (-c_1 - (a - (c_1 + c_2 + c_3))k, c_2 + (a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k), -m)$ noktasına olan uzaklığı;

$$\begin{aligned}
d_T(N, N') &= |2c_1 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| + |2c_2 + 2(a - (c_1 + c_2 + c_3))(1 - k)| + |2m| \\
&= |2c_1| + |2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| + |2c_2| + |2(a - (c_1 + c_2 + c_3))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -|2(a - (c_1 + c_2 + c_3))k| + |2m| \\
& = 2c_1 + 2c_2 + 2a - 2c_1 - 2c_2 - 2c_3 + 2|m| \\
& = 2|m| + 2(a - c_3)
\end{aligned}$$

olur.



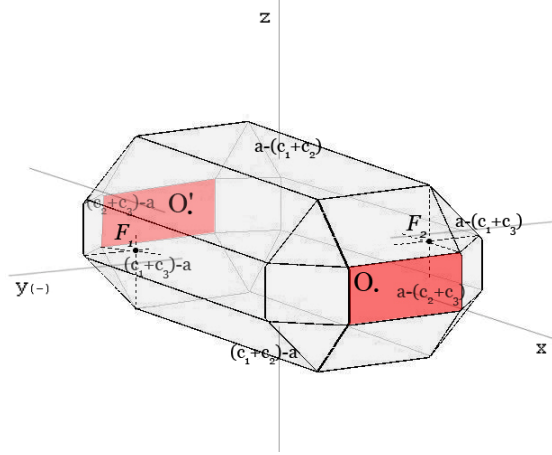
Şekil-7.5

Bu sonuca göre $-c_3 < m < c_3$ olduğundan bu yüzeyler üzerindeki simetrik noktaların çap uzunluğu en büyük çap uzunluğu olan $2a$ değerinden küçük ve $m = 0$ için $2(a - c_3)$ değerine eşittir.

Elipsoidin karşılıklı $x - a + c_2 + c_3 = 0$ ve $x + a - c_2 - c_3 = 0$ yüzeyleri üzerinde alınan noktaların simetrisine olan çap uzunluğunu incelemek üzere elipsoidin $x - a + c_2 + c_3 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan bir $O = (a - (c_2 + c_3), k, m)$ $-c_2 < k < c_2$, $-c_3 < m < c_3$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının $x + a - c_2 - c_3 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $O' = (-a + (c_2 + c_3), -k, -m)$ noktasına olan çap uzunluğu;

$$\begin{aligned}
d_T(O, O') & = |2(a - (c_2 + c_3))| + |2k| + |2m| \\
& = 2(a - (c_2 + c_3)) + 2|k| + 2|m|
\end{aligned}$$

bulunur.



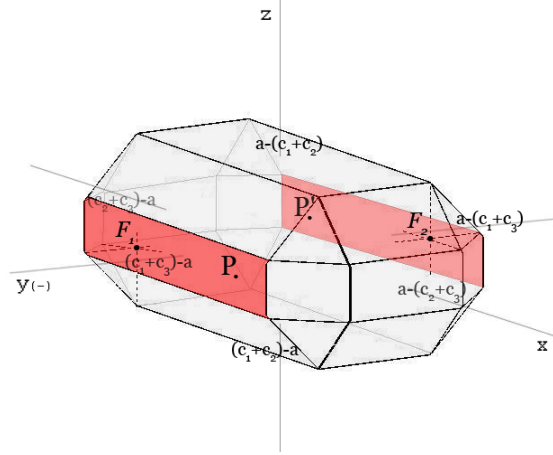
Şekil-7.6

Buna göre $-c_2 < k < c_2$ ve $-c_3 < m < c_3$ değerlerine göre bu çap uzunluğu $2a$ değerinden küçük ve $k = m = 0$ için de $2(a - (c_2 + c_3))$ değerine eşittir.

Yine elipsoidin karşılıklı $y + a - c_1 - c_3 = 0$ ve $y - a + c_1 + c_3 = 0$ yüzeyleri üzerinde alınan noktaların simetrlere olan çap uzunluğunu incelemek üzere elipsoidin $y + a - c_1 - c_3 = 0$ yüzeyi üzerinde keyfi bir $P = (k, -a + (c_1 + c_3), m)$ $-c_1 < k < c_1$ $-c_3 < m < c_3$ $k, m \in \mathbb{R}$ noktasının elipsoidin $y - a + c_1 + c_3 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriğine olan $P' = (-k, a - (c_1 + c_3), -m)$ noktasına olan uzaklığı;

$$\begin{aligned} d_T(P, P') &= |2k| + |2(a - (c_1 + c_3))| + |2m| \\ &= 2|k| + 2(a - (c_1 + c_3)) + 2|m| \end{aligned}$$

elde edilir.



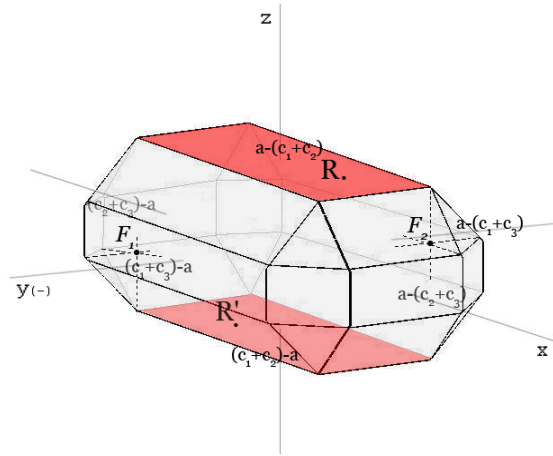
Şekil-7.7

Bu durumda da $-c_1 < k < c_1$ ve $-c_3 < m < c_3$ değerlerine göre bu çap uzunluğu $2a$ değerinden küçük ve $k = m = 0$ için de $2(a - (c_1 + c_3))$ değerine eşittir.

Son olarak da bu elipsoidin karşılıklı $z - a + c_1 + c_2 = 0$ ve $z + a - c_1 - c_2 = 0$ yüzeyleri üzerinde alınan noktaların simetrisine olan çap uzunluğunu incelemek üzere elipsoidin $z - a + c_1 + c_2 = 0$ yüzeyi üzerinde alınan bir $R = (k, m, a - (c_1 + c_2))$ noktasının elipsoidin $z + a - c_1 - c_2 = 0$ yüzeyi üzerindeki simetriği olan $R' = (-k, -m, -a + (c_1 + c_2))$ noktasına olan uzaklığı;

$$\begin{aligned} d_T(R, R') &= |2k| + |2m| + |2(a - (c_1 + c_2))| \\ &= 2|k| + 2|m| + 2(a - (c_1 + c_2)) \end{aligned}$$

olur.



Şekil-7.8

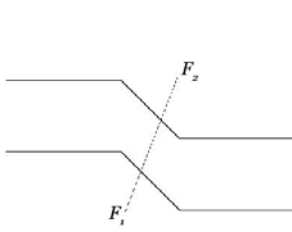
Buna göre $-c_1 < k < c_1$ ve $-c_2 < m < c_2$ değerlerine göre bu çap uzunluğu yine $2a$ değerinden küçük ve $k = m = 0$ için de $2(a - (c_1 + c_2))$ değerine eşittir. Bu sabit değerler $c_1 > c_2 > c_3$ olacak şekilde seçildiklerinden $k = m = 0$ değerleri için karşımıza çıkan $2(a - (c_1 + c_2))$ ifadesi elipsoid üzerindeki en küçük çap uzunluğudur.

2.3 İki Odaklı Taksi Hiperboloidlerin Sınıflandırılması

Öncelikle taksi hiperbolleri kısaca ifade edelim. Genel taksi konik denklemine baktığımızda odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ olan veya bir odağı $F_1 = (x_1, y_1)$ ve doğrultmanı $Ax + By + C = 0$ olan bir taksi koniğin genel denklemi; $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e(\alpha^2 - 1)(\max\{|A|, |B|\})^{-1}$, $\gamma \leq 0$, e dış merkezlik olmak üzere

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_1| + |y - y_1|) + \beta(|Ax + By + C|) \pm \alpha\gamma = 0 \quad (*)$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\alpha = -1$ denildiğinde bu daha önce sınıflandırması yapılan [3] bir taksi hiperbolü gösterir.

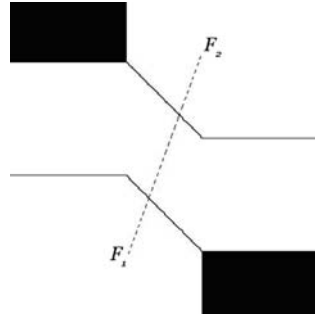


$$\alpha = -1, \gamma > 0$$

$$1 < m \neq \infty$$

$$-\gamma < x_1 - x_2 + y_2 - y_1$$

$$d_T(F_1, F_2) > -\gamma$$

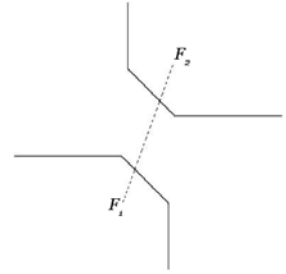


$$\alpha = -1, \gamma > 0$$

$$1 < m \neq \infty$$

$$-\gamma = |x_1 - x_2 + y_2 - y_1|$$

$$d_T(F_1, F_2) = \gamma$$



$$\alpha = -1, \gamma > 0$$

$$0 < m \neq \infty$$

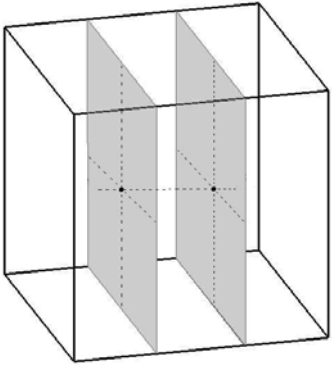
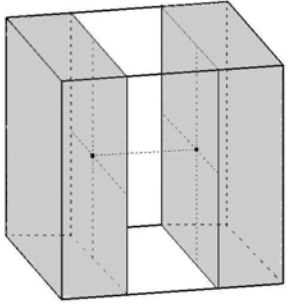
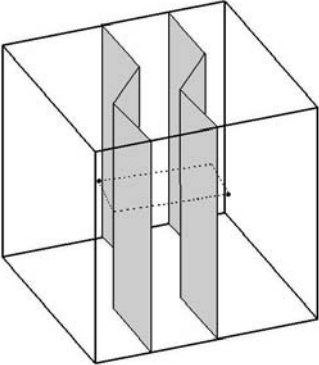
$$-\gamma > |x_1 - x_2 + y_2 - y_1|$$

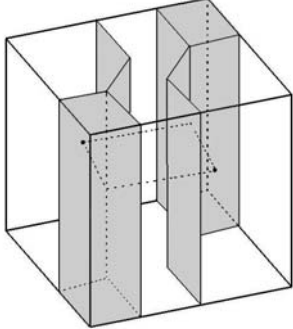
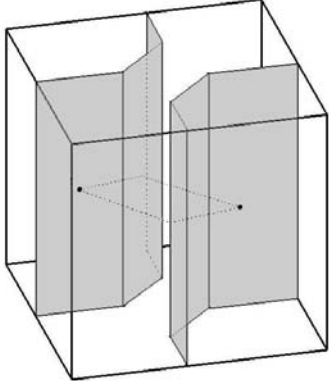
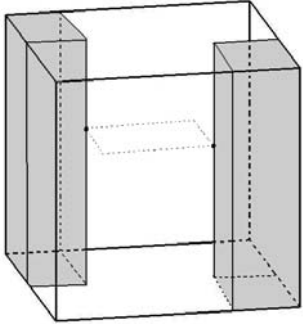
$$d_T(F_1, F_2) < -\gamma$$

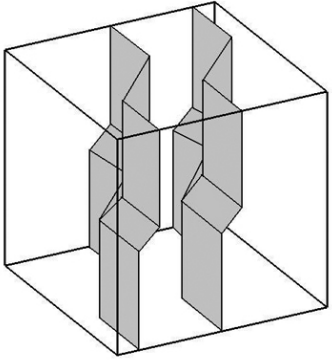
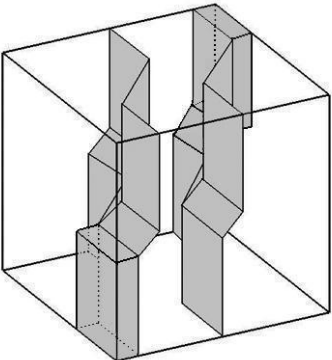
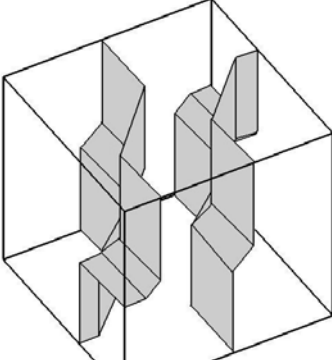
Biz de burada Taksi Hiperboloidleri inceleyelim. Yine aynı (*) denklemini kullanırsak. Aşağıdaki denkleme göre hiperboloidleri inceleyebiliriz.

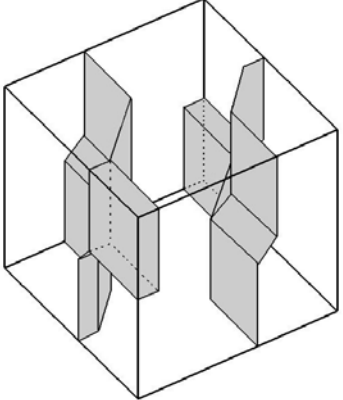
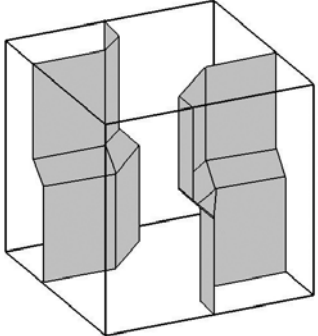
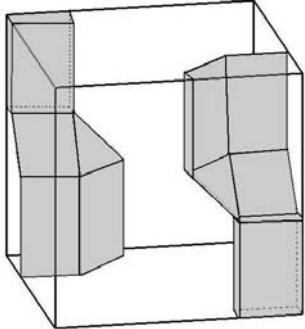
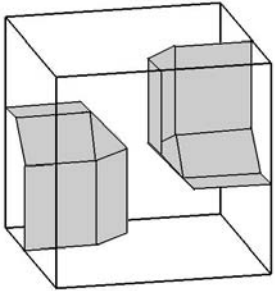
$F_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2, z_2)$ iki odak noktası olsun. $|x_1 - x_2| = \delta_x$, $|y_1 - y_2| = \delta_y$,
 $|z_1 - z_2| = \delta_z$, $\delta_x + \delta_y + \delta_z = \delta$; $i, j, k \in \{x, y, z\}$; $i \neq j \neq k \neq i$; $k_1 = \min\{\delta_i + \delta_j - \delta_k\}$,
 $k_2 = \{\delta_i + \delta_j - \delta_k\}$, $k_3 = \max\{\delta_i + \delta_j - \delta_k\}$, $k_1 < k_2 < k_3$;

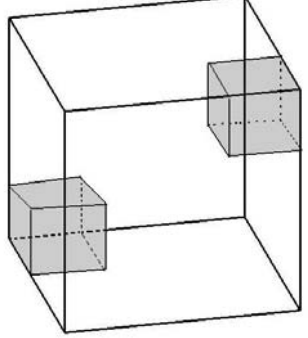
$$P(x, y, z) = \left| |x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - (|x - x_2| + |y - y_2| + |z - z_2|) \right| - \gamma ; \gamma > 0$$

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	γ	$P(x, y, z)$
$\delta_i \neq 0, \delta_j = \delta_k = 0$	$\gamma < \delta$	
	$\gamma = \delta$	
$\delta_i \neq 0, \delta_j \neq 0, \delta_k = 0$	$\gamma < \delta_i - \delta_j $	

	$\gamma = \delta_i - \delta_j $	
$\delta_i \neq 0, \delta_j \neq 0, \delta_k = 0$	$\gamma > \delta_i - \delta_j $	
	$\gamma = \delta$	

	$\gamma < k_1$	
$\delta_i \neq 0, \delta_j \neq 0, \delta_k \neq 0$	$\gamma = k_1$	
	$k_1 < \gamma < k_2$	

	$\gamma = k_2$	
$\delta_i \neq 0, \delta_j \neq 0, \delta_k \neq 0$	$k_2 < \gamma < k_3$	
	$\gamma = k_3$	
	$k_3 < \gamma < \delta$	

$\delta_i \neq 0, \delta_j \neq 0, \delta_k \neq 0$	$\gamma = \delta$	
---	-------------------	---

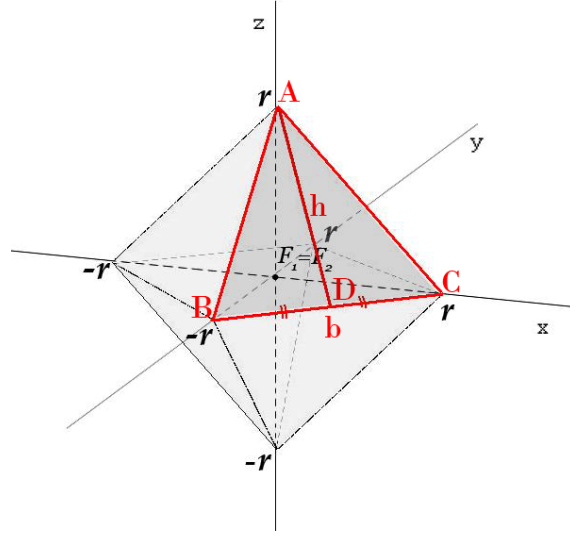
3. İKİ ODAKLI TAKSİ ELİPSOİDLERİN ÖKLİDYEN UZAKLIK CİNSİNDEN YÜZEY ALANLARI VE HACİMLERİ

3.1 İki Odaklı Taksi Yüzeylerin Toplam Yüzey Alanları

3.1.1 Taksi kürenin toplam yüzey alanı

Taksi küreyi elipsoidin çakışık odaklı özel bir hali olarak düşünebileceğimiz için bu başlık altında değerlendirebiliriz.

Taksi kürenin yüzey alanı, örnek olması açısından hem Öklidyen hem de taksi uzaklık cinsinden, diğer yüzey alanları ise sadece Öklidyen uzaklık kullanılarak hesaplanacaktır. Şekildeki gibi yarıçapı r olan bir taksi kürenin yüzey alanını bulmak için birbirine eşit ölçüdeki 8 yüzeyden birinin alanını bulalım.



şekil-8

S_1 : Kürenin 8 yüzünden biri

b : Kürenin herhangi bir kenarı

b_E : b nin Öklidyen uzunluğu

b_T : b nin taksi uzunluğu

h : b kenarına indirilen yükseklik

h_E : h nin Öklidyen uzunluğu

h_T : h nin taksi uzunluğu

3 boyutlu uzayda $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktalarının birbirine uzaklığı

$$d_E(A, B) = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \right)^{1/2}$$

$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| \text{ olduğundan}$$

$b_E = \sqrt{2} \cdot r$ $h_E = \sqrt{3/2} \cdot r$ değerlerini hemen bulabiliriz. Buna göre

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot b_E \cdot h_E = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot \sqrt{3/2} \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

Bu formül içerisindeki b_E ve h_E değerleri yerine b_T ve h_T kullanmak istersek

daha önce \mathbb{R}^3 de taksi ve Öklidyen uzaklık için verilen formülü [1] kullanabiliriz.

$A(0, 0, r)$, $B(0, -r, 0)$, $C(r, 0, 0)$, $D(r/2, -r/2, 0)$ olduğuna göre

b nin doğrultu vektörü $BC = (p_1, q_1, r_1) = (r, r, 0) = (1, 1, 0)$

h nin doğrultu vektörü $AD = (p_2, q_2, r_2) = (r/2, -r/2, -r) = (1, -1, -2)$ dir. Buna göre

$$b_E = \frac{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}}{|p_1| + |q_1| + |r_1|} \cdot b_T = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}{|1| + |1| + |0|} \cdot b_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b_T$$

$$h_E = \frac{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}{|p_2| + |q_2| + |r_2|} \cdot h_T = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}{|1| + |-1| + |-2|} \cdot h_T = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot h_T$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot b_E \cdot h_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b_T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot h_T = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot b_T \cdot h_T = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r^2 \text{ diyebiliriz.}$$

Sonuç olarak taksi kürenin toplam yüzey alanı;

$$S = 8 \cdot S_1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b_E \cdot h_E \right) = 4 \cdot b_E \cdot h_E = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot \sqrt{3/2} \cdot r = 4\sqrt{3} \cdot r^2 \text{ yada diğer yolla}$$

$$S = 8 \cdot S_1 = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot b_T \cdot h_T \right) = \sqrt{3} \cdot b_T \cdot h_T = \sqrt{3} \cdot 2r \cdot 2r = 4\sqrt{3} \cdot r^2 \text{ dir.}$$

Bundan sonraki hesaplamalarda uzaklık için doğrudan Öklidyen uzunluk kullanılacaktır.

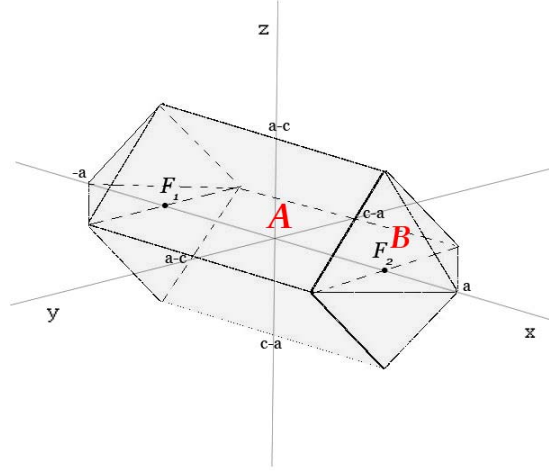
3.1.2 12 Yüzlü taksi elipsoidlerin toplam yüzey alanı

$F_1(-c, 0, 0)$, $F_2(c, 0, 0)$ odak noktalarına sahip ve büyük çap uzunluğu $2a$ olan bir elipsoidin toplam yüzey alanını şekilde gösterildiği gibi 4 tane A yüzeyi ve 8 tane de B yüzeyinden oluşur.

m : A yüzeyinin taban uzunluğu

n : A yüzeyinin yüksekliği

$$S_A = m \cdot n = 2 \cdot c \cdot \sqrt{2} \cdot (a - c) = 2\sqrt{2} \cdot c \cdot (a - c)$$



şekil-9

B yüzeyi gibi elipsoidin $x < -c$ ve $c < x$ aralığında bulunan diğer yüzeyleri birleştirdiğimizde yarıçapı $a - c$ olan bir taksit küre oluşur.

$$S_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a - c)^2 \text{ ve kürenin yüzey alanı da } S_T = 4\sqrt{3} \cdot (a - c)^2 \text{ olur.}$$

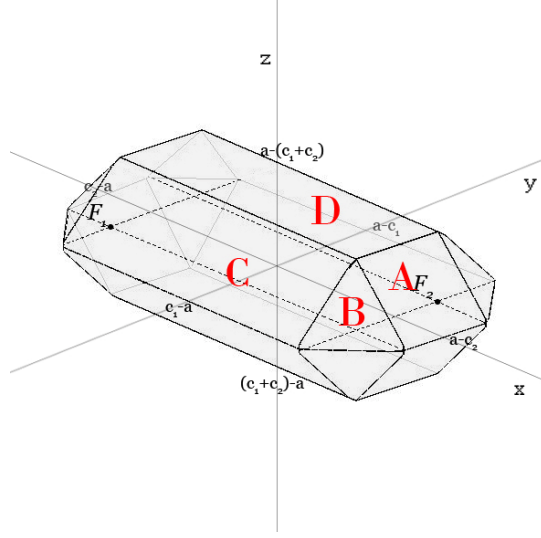
Dolayısıyla elipsoidin toplam yüzey alanı:

$$\begin{aligned} S &= 4.S_A + 8.S_B = 4.S_A + S_T = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot c \cdot (a - c) + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (a - c)^2 \\ &= 4 \cdot (a - c) \cdot (2\sqrt{2} \cdot c + \sqrt{3} (a - c)) = 4 \cdot (a - c) \cdot (\sqrt{3} \cdot a + (2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot c) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.1.3 18 Yüzlü taksit elipsoidlerin toplam yüzey alanı

$F_1(-c_1, -c_2, 0)$, $F_2(c_1, c_2, 0)$ odak noktalarına sahip ve büyük çap uzunluğu $2a$ olan aşağıdaki elipsoidi inceleyelim.



şekil-10

$$S_A = 2c_2 \cdot \sqrt{2} \cdot (a - (c_1 + c_2)) = 2\sqrt{2} \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

$$S_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a - (c_1 + c_2))^2$$

$$S_C = 2c_1 \cdot \sqrt{2} \cdot (a - (c_1 + c_2)) = 2\sqrt{2}c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

$$S_D = 2c_1 \cdot 2c_2 = 4 \cdot c_1 \cdot c_2$$

Buna göre toplam yüzey alanı

$$S = 4 \cdot S_A + 8 \cdot S_B + 4 \cdot S_C + 2 \cdot S_D$$

$$S = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2)) + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a - (c_1 + c_2))^2 + 4 \cdot 2\sqrt{2}c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

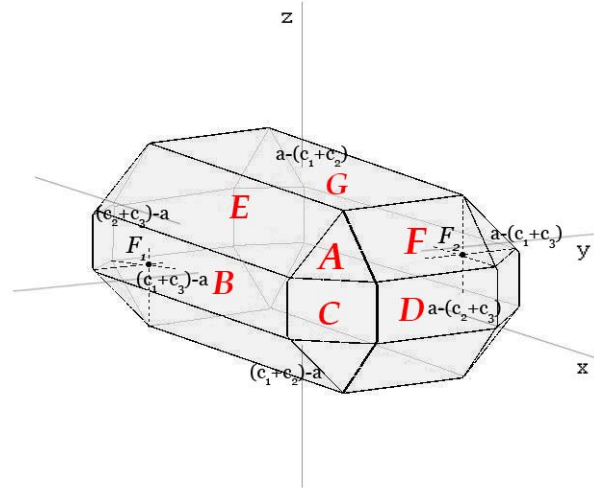
$$+ 2 \cdot 4 \cdot c_1 \cdot c_2$$

$$= 4 \left((a - (c_1 + c_2)) \cdot (2\sqrt{2} \cdot c_2 + \sqrt{3} (a - (c_1 + c_2)) + 2\sqrt{2}c_1) + 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \right)$$

olur.

3.1.4 26 Yüzlü taksi elipsoidlerin toplam yüzey alanı

Son olarak da $F_1(-c_1, -c_2, -c_3)$, $F_2(c_1, c_2, c_3)$ odak noktalarına sahip ve büyük çap uzunluğu $2a$ olan aşağıdaki elipsoidin toplam yüzey alanını inceleyelim.



şekil-11

$$S_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))^2$$

$$S_B = 2c_1 \cdot 2c_3 = 4c_1c_3$$

$$S_C = 2c_3 \cdot \sqrt{2} \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) = 2\sqrt{2} \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$S_D = 2c_3 \cdot 2c_2 = 4c_2c_3$$

$$S_E = 2c_1 \cdot \sqrt{2} \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) = 2\sqrt{2} \cdot c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$S_F = 2c_2 \cdot \sqrt{2} \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) = 2\sqrt{2} \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$S_G = 2c_1 \cdot 2c_2 = 4c_1c_2$$

Buna göre toplam yüzey alanı

$$S = 8.S_A + 2.S_B + 4.S_C + 2.S_D + 4.S_E + 4.S_F + 2.S_G$$

$$S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))^2 + 2 \cdot 4c_1c_3 + 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$+ 2 \cdot 4c_2c_3 + 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) + 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) + 2 \cdot 4c_1c_2$$

$$S = 4 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) \cdot (\sqrt{3} \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) + 2\sqrt{2} \cdot c_1 + 2\sqrt{2} \cdot c_2 + 2\sqrt{2} \cdot c_3)$$

$$+ 8 \cdot (c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3)$$

bulunur.

3.2 İki Odaklı Taksi Yüzeyleerin Hacimleri

3.2.1 Taksi kürenin hacmi

R. Kaya ve B. Çolakoğlu tarafından [2] \mathbb{R}_T^3 taksi uzayında dörtyüzlülerin hacimleri incelenirken taksi kürenin hacmi de gösterilmiştir. Buna göre yarıçapı r olan

bir taksi kürenin hacmi; $V = \frac{4}{3}r^3$ tür.

3.2.2 12 Yüzlü taksi elipsoidlerin hacmi

$F_1(-c, 0, 0)$, $F_2(c, 0, 0)$ odak noktalarına sahip ve büyük çap uzunluğu $2a$ olan bir elipsoidin toplam hacmini bulmak için elipsoidin $x < -c$ ve $c < x$ bölgelerinde kalan yüzeyleri birleştirdiğimizde ortaya taksi küre çıktığını biliyoruz. Bu yarıçapı

$(a - c)$ olan kürenin hacmi $V_1 = \frac{4}{3} \cdot (a - c)^3$ olur.

Geriye kalan yüzeyler ise bir taksi silindir oluşturur. Bu silindirin hacmi

$$V_2 = \frac{2(a-c) \cdot 2(a-c)}{2} \cdot 2c = 2(a-c)^2 \cdot 2c = 4c \cdot (a-c)^2$$

Buna göre toplam hacmi

$$V = \frac{4}{3}(a-c)^3 + 4c \cdot (a-c)^2 = 4(a-c)^2 \left(\frac{a+2c}{3} \right) = \frac{4}{3}(a-c)^2(a+2c) \text{ dir.}$$

3.2.3 18 Yüzlü taksi elipsoidlerin hacmi

$F_1(-c_1, -c_2, 0)$, $F_2(c_1, c_2, 0)$ odak noktalarına sahip ve büyük çap uzunluğu $2a$ olan elipsoidin hacmi şöyle bulunabilir. Yine karşılıklı 8 yüzeyi birleştirdiğimizde bu yarıçapı $a - (c_1 + c_2)$ olan bir taksi küre olur. Dolayısıyla hacmi $V_1 = \frac{4}{3}(a - (c_1 + c_2))^3$ dir.

$$V_2 = \left(2 \cdot (a - (c_1 + c_2)) \cdot 2 \cdot (a - (c_1 + c_2)) / 2 \right) \cdot 2c_1 = 4 \cdot c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

$$V_3 = \left(2 \cdot (a - (c_1 + c_2)) \cdot 2 \cdot (a - (c_1 + c_2)) / 2 \right) \cdot 2c_2 = 4 \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

$$V_4 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2(a - (c_1 + c_2)) = 8 \cdot c_1 \cdot c_2 (a - (c_1 + c_2))$$

Buna göre toplam hacim

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V = \frac{4}{3}(a - (c_1 + c_2))^3 + 4 \cdot c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2)) + 4 \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2)) + 8 \cdot c_1 \cdot c_2 (a - (c_1 + c_2))$$

$$V = 4 \cdot (a - (c_1 + c_2)) \cdot \left(\frac{(a - (c_1 + c_2))^2}{3} + c_1 + c_2 + 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \right)$$

olur.

3.2.4 26 Yüzlü taksi elipsoidlerin hacmi

$F_1(-c_1, -c_2, -c_3)$, $F_2(c_1, c_2, c_3)$ odak noktalarına sahip ve büyük çap uzunluğu

$2a$ olan elipsoidin hacmi şöyle bulunabilir. Yine bu karşılıklı 8 yüzeyi

birleştirdiğimizde bu yarıçapı $a - (c_1 + c_2)$ olan bir taksi küre olur. Dolayısıyla hacmi

$$V_1 = \frac{4}{3}(a - (c_1 + c_2 + c_3))^3 \text{ dir.}$$

$$V_2 = (2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) \cdot 2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) / 2) \cdot 2c_1 = 4 \cdot c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$V_3 = (2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) \cdot 2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) / 2) \cdot 2c_2 = 4 \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$V_4 = (2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) \cdot 2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) / 2) \cdot 2c_3 = 4 \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$V_5 = 2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) \cdot 2c_2 \cdot 2c_3 = 8 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$V_6 = 2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) \cdot 2c_1 \cdot 2c_3 = 8 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$V_7 = 2c_1 \cdot 2c_2 \cdot 2(a - (c_1 + c_2)) = 8 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

Buna göre toplam hacim

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7$$

$$= \frac{4}{3}(a - (c_1 + c_2 + c_3))^3 + 4 \cdot c_1 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) + 4 \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$+ 4 \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) + 8 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3)) + 8 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot (a - (c_1 + c_2 + c_3))$$

$$+ 8 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (a - (c_1 + c_2))$$

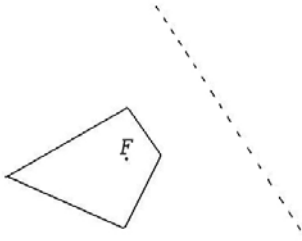
dir.

4. TEK ODAKLI TAKSİ YÜZEYLER

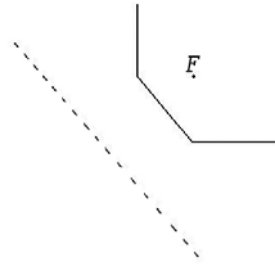
Odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ olan veya bir odağı $F_1 = (x_1, y_1)$ ve doğrultmanı $Ax + By + C = 0$ olan bir taksî koniğin genel denklemi $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e(\alpha^2 - 1)(\max\{|A|, |B|\})^{-1}$, $\gamma \leq 0$, e dış merkezlik olmak üzere;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_1| + |y - y_1|) + \beta(|Ax + By + C|) \pm \alpha\gamma = 0 \quad (*)$$

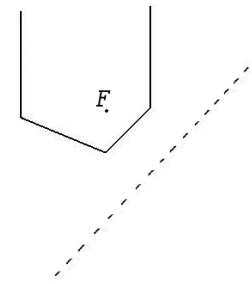
şeklinindedir. Burada $\alpha = 0$ denildiğinde e ifadesinin aldığı değerlere göre bu daha önce sınıflandırılması yapılan [3] elips, parabol veya hiperbol belirtir.



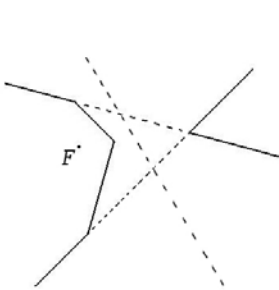
$$\alpha = 0, 0 < e < 1$$



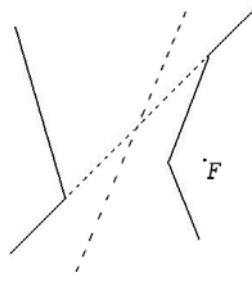
$$\alpha = 0, e = 1, \left| -\frac{A}{B} \right| = 1$$



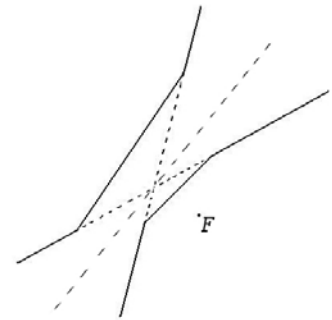
$$\alpha = 0, e = 1, \left| -\frac{A}{B} \right| < 1$$



$$\alpha = 0, \left| -\frac{A}{B} \right| > e > 1$$



$$\alpha = 0, \left| -\frac{A}{B} \right| = e > 1$$



$$\alpha = 0, e > \left| -\frac{A}{B} \right| > 1$$

\mathbb{R}_E^3 de olduğu gibi \mathbb{R}_T^3 de de tek odaklı (odak-doğrultmanlı) yüzeyleri, odak noktasına uzaklığının doğrultmanına olan uzaklığına oranı sabit (e) olan noktalar kümesi olarak tanımlayabiliriz. Odak noktası $F(x_1, y_1, z_1)$ ve doğrultmanı $E : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi olan yüzeyleri incelemek üzere (*) denkleminde $\alpha = 0$ alınırsa $P(x, y, z) \in \mathbb{R}_T^3$ için;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

denklemi bize bu istediğimiz yüzeyleri verir. Bu denklem içersindeki $0 < e < 1$ değerleri için aldığımızda elipsoid, $e = 1$ değeri için paraboloid ve $e > 1$ değerleri için de hiperboloid belirtir. Bu yüzeyleri incelerken odak noktası daima $F(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ seçilecek ve $D < 0$ alınacaktır. Diğer haller bu yüzeylerin yine ötelemeler ve bazı dönmeler altındaki halleri olacaktır. Şimdi sırasıyla $0 < e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ durumlarını inceleyelim.

4.1 $0 < e < 1$ iken

$0 < e < 1$ alındığında bulacağımız yüzeyler aşağıda görüldüğü üzere taksi elipsoidlerdir.

i) $A > 0$, $B = C = 0$, $D < 0$ için;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

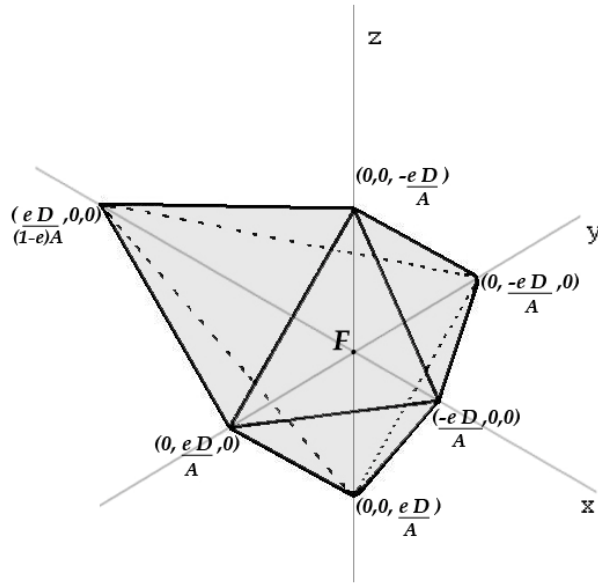
$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - e \cdot (\max\{|A|, |0|, |0|\})^{-1} \cdot (|Ax + 0 \cdot y + 0 \cdot z + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - e \cdot |A|^{-1} \cdot (|Ax + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + D/A|) = 0$$

$z < 0$	$x < 0$, $y < 0$, $Ax + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x + y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0$, $y < 0$, $Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x + y + z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0$, $y \geq 0$, $Ax + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x - y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0$, $y \geq 0$, $Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x - y + z - e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$

$z < 0$	$x \geq 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1+e)x - y - z + e.D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - y - z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1+e)x + y - z + e.D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + y - z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1-e)x + y - z - e.D/A = 0$
	$x < 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x + y - z + e.D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1-e)x - y - z - e.D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x - y - z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1+e)x - y + z + e.D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - y + z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1+e)x + y + z + e.D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + y + z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-12

Elipsoid için $A > 0$, $D < 0$ ve $0 < e < 1$ olduğu dikkate alınırsa elipsoidin x eksenindeki karşılıklı iki noktasının birbirine uzaklığı;

$$\left| \frac{-eD}{A} - \frac{eD}{(1-e)A} \right| = \frac{(e^2 - 2e)D}{(1-e)A}$$

yz -düzlemi üzerindeki karşılıklı herhangi iki noktanın birbirine uzaklığı;

$$\left| \frac{-eD}{A} - \frac{eD}{A} \right| = \frac{-2eD}{A} \text{ dır.}$$

Buradan, şekilde görülen odağı orijin olan ve doğrultman düzlemi x eksenini dik kesen (yz -düzlemine paralel) olan elipsoidin çap uzunluğunu incelediğimizde, sadece elipsoidin x eksenini kesen karşılıklı iki noktanın birbirine uzaklığı en büyük çap uzunluğuna eşittir. Ve elipsoidin yz -düzlemini kesen noktalar kümesinin oluşturduğu taksî çemberin çapı da elipsoid üzerindeki en küçük çap uzunluğudur. Ayrıca elipsoid, orijinden geçen $y=0$, $z=0$, $y=z$ ve $y=-z$ düzlemlere göre simetriktir.

ii) $A \geq B > 0$, $C = 0$, $D < 0$ ise;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

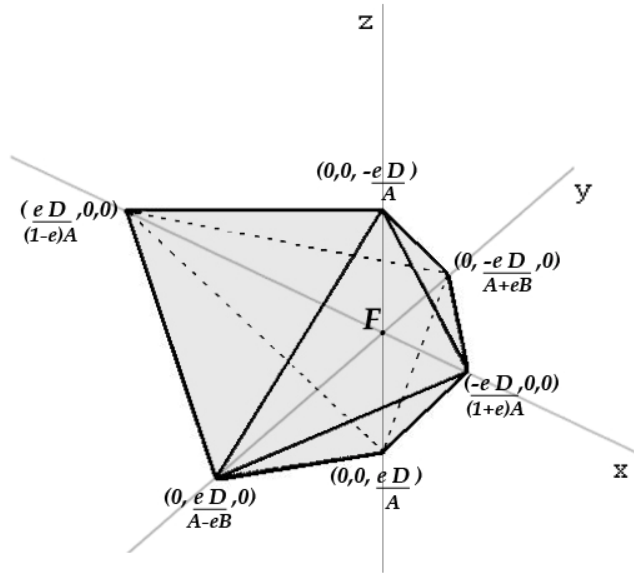
$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - e \cdot (\max\{|A|, |A|, |0|\})^{-1} \cdot (|Ax + Ay + 0z + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - e \cdot |A|^{-1} \cdot (|Ax + By + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + B/A y + D/A|) = 0$$

$z < 0$	$x < 0$, $y < 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A < 0 \Rightarrow (1 - e)x + (1 - e \cdot B/A)y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0$, $y < 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x + (1 + e \cdot B/A)y + z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0$, $y \geq 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A < 0 \Rightarrow (1 - e)x - (1 + e \cdot B/A)y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0$, $y \geq 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x - (1 - e \cdot B/A)y + z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0$, $y < 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A < 0 \Rightarrow (1 + e)x - (1 - e \cdot B/A)y - z + e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0$, $y < 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1 - e)x - (1 + e \cdot B/A)y - z - e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A < 0 \Rightarrow (1 + e)x + (1 + e \cdot B/A)y - z + e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1 - e)x + (1 - e \cdot B/A)y - z - e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0$, $y < 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A < 0 \Rightarrow (1 - e)x + (1 - e \cdot B/A)y - z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0$, $y < 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x + (1 + e \cdot B/A)y - z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0$, $y \geq 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A < 0 \Rightarrow (1 - e)x - (1 + e \cdot B/A)y - z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0$, $y \geq 0$, $x + (B/A) \cdot y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x - (1 - e \cdot B/A)y - z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$

$z \geq 0$	$x \geq 0, y < 0, x + (B/A).y + D/A < 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y + z + e.D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, x + (B/A).y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y + z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, x + (B/A).y + D/A < 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y + z + e.D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, x + (B/A).y + D/A \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y + z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-13

Doğrultman düzlemi; xy -düzlemini belli bir oranda kesen ve z eksenine paralel olan şekildeki elipsoidin, x eksenini kesen karşılıklı iki noktasının çap uzunluğu

$$\left| \frac{-eD}{(1+e)A} - \frac{eD}{(1-e)A} \right| = \frac{-2eD}{(1-e^2)A}$$

elipsoidin y eksenini kesen karşılıklı iki noktasının çap uzunluğu;

$$\left| \frac{-eD}{A+eB} - \frac{eD}{A-eB} \right| = \frac{-2A^2eD}{(A^2 - e^2B^2)A}$$

elipsoidin z eksenini kesen karşılıklı iki noktasının çap uzunluğu;

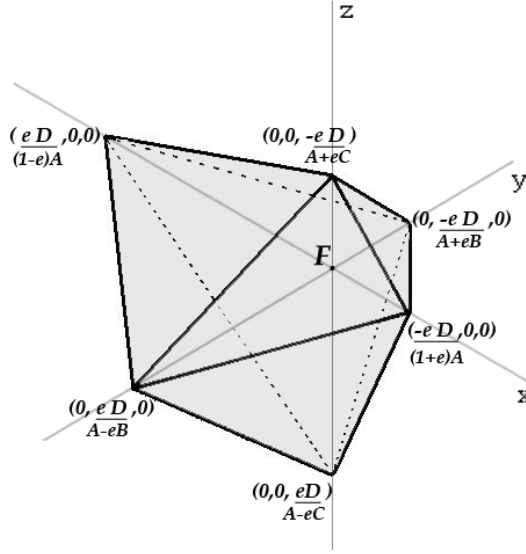
$$\left| \frac{-eD}{A} - \frac{eD}{A} \right| = \frac{-2eD}{A}$$

olur.

$A > B$, $D < 0$ ve $0 < e < 1$ olduğu dikkate alınırsa elipsoidin en büyük çapı x ekseninde en küçük çapı da z eksenindedir. Eğer $A = B$ söz konusu ise x ve y eksenleri üzerindeki çap uzunlukları birbirine eşittir ve elipsoidin en büyük çapıdır. Ayrıca bu duruma göre elipsoid $x = y$ düzlemine göre simetrik olur.

iii) $A \geq B \geq C > 0$, $A > 0$, $D < 0$ ise;

$z < 0$	$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0 \quad \emptyset$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0 \quad \emptyset$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-14

Elipsoid üzerindeki en büyük çap ve en küçük çap uzunluğunu incelemek üzere yine elipsoidin eksenleri üzerindeki çap uzunluğuna bakmamız yeterlidir.

x eksenindeki çap uzunluğu;

$$\left| \frac{-eD}{(1+e)A} - \frac{eD}{(1-e)A} \right| = \frac{-2eD}{(1-e^2)A}$$

y eksenindeki çap uzunluğu;

$$\left| \frac{-eD}{A+eB} - \frac{eD}{A-eB} \right| = \frac{-2A^2eD}{(A^2 - e^2B^2)A}$$

z eksenindeki çap uzunluğu;

$$\left| \frac{-eD}{A+eC} - \frac{eD}{A-eC} \right| = \frac{-2A^2eD}{(A^2 - e^2C^2)A}$$

olur.

Buna göre verilen koşullar altında yine en büyük çap uzunluğu x ekseninde, en küçük çap z eksenindedir. Ancak $A = B = C$ olduğu takdirde en büyük çap, elipsoidin bu üç eksen üzerinde bulunan çapları olacaktır. En küçük çap ise; doğrultman düzlemine paralel ve odak noktasından geçen düzlemin elipsoidi kestiği karşılıklı 3 köşegenin çapıdır. Bu çap uzunluğunu şu şekilde bulabiliriz.

$A = B = C$ alındığında elipsoid tüm eksenleri $\frac{-eD}{(1+e)A}$ ve $\frac{eD}{(1-e)A}$ noktasında keser. Orijinden geçen $y + x = 0$, $z = 0$ doğrusu ile $\frac{x}{\frac{eD}{(1-e)A}} + \frac{y}{\frac{-eD}{(1+e)A}} = 1$, $z = 0$

doğrusunun ortak çözümünü yaptığımızda $x = \frac{eD}{2A}$, $y = \frac{-eD}{2A}$, $z = 0$ noktasını elde

ederiz. Bu noktaya $K(\frac{eD}{2A}, \frac{-eD}{2A}, 0)$ dersek odak noktasına göre simetriği olan

$K'(\frac{-eD}{2A}, \frac{eD}{2A}, 0)$ noktasına uzaklığı;

$$d_r(K, K') = \left| \frac{eD}{2A} - \frac{-eD}{2A} \right| + \left| \frac{-eD}{2A} - \frac{eD}{2A} \right| = \left| \frac{2eD}{2A} \right| + \left| \frac{-2eD}{2A} \right| = \frac{-2eD}{A}$$

olarak bulunur.

Bu çap, elipsoid üzerindeki en küçük çaptır. Ayrıca elipsoid $y = x$, $y = z$ ve $x = z$ düzlemlerine göre simetriktir.

4.2 $e = 1$ iken

$e = 1$ alındığında bulacağımız yüzeyler aşağıda görüldüğü üzere taksii paraboloidlerdir. Ancak farklı olarak sadece $A = B = C > 0$ ve $A = B > C \geq 0$ durumları söz konusu olduğunda, (paraboloidlerden farklı olarak) sadece tek bir doğrultuda uzamayan yüzeyler oluşur. Bu durumlar konunun devamında incelenecektir.

i) $A > 0$, $B = C = 0$, $D < 0$ ise;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - 1 \cdot (\max\{|A|, |0|, |0|\})^{-1} \cdot (|Ax + 0 \cdot y + 0 \cdot z + D|) = 0$$

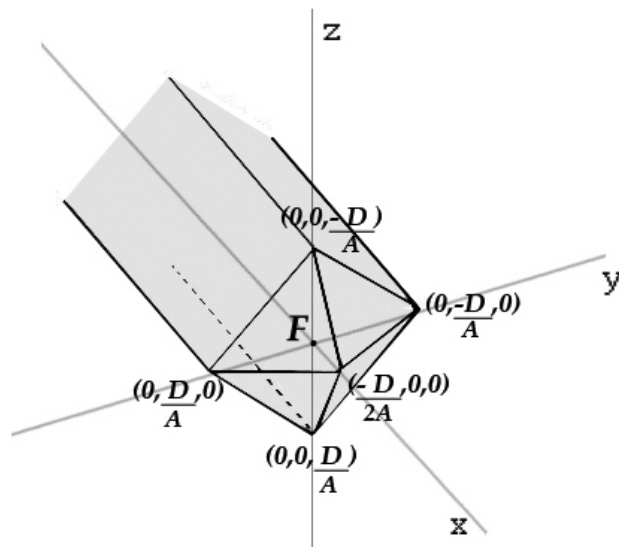
$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - 1 \cdot |A|^{-1} \cdot (|Ax + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - (|x + D/A|) = 0$$

dır. (Bkz. Şekil-15)

$z < 0$	$x < 0$, $y < 0$, $Ax + D < 0 \Rightarrow y + z - D/A = 0$
	$x < 0$, $y < 0$, $Ax + D \geq 0 \Rightarrow 2x + y + z + D/A = 0 \quad \emptyset$

$z < 0$	$x < 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow -y + z - D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow 2x - y + z - D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow 2x - y - z + D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow -y - z - D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow 2x + y - z + D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow y - z - D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow y - z - D/A = 0$
	$x < 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow 2x + y - z + D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow -y - z - D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow 2x - y - z - D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow 2x - y + z + D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow -y + z - D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow 2x + y + z + D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow y + z - D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-15

ii) $A = B > C \geq 0, D < 0$ ise;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

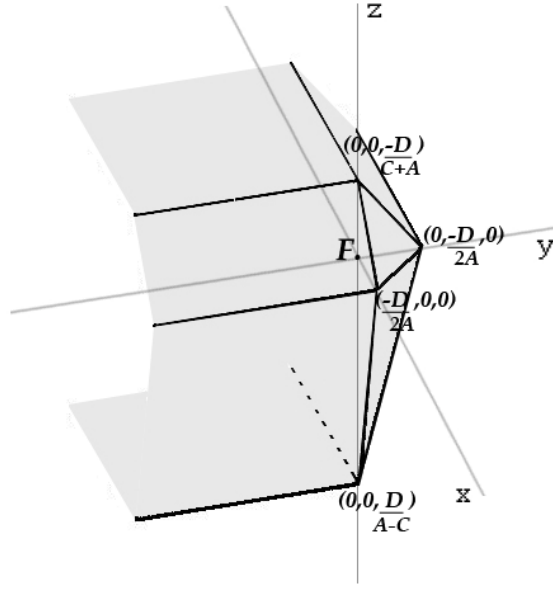
$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - 1 \cdot (\max\{|A|, |A|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + Ay + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - |A|^{-1} \cdot (|Ax + Ay + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - (|x + y + (C/A) \cdot z + D/A|) = 0$$

dir. (Bkz. Şekil-16)

$z < 0$	$x < 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow ((C/A) - 1) \cdot z + D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x + 2y + (1 + C/A) \cdot z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow 2y + ((C/A) - 1) \cdot z + D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x + (1 + C/A) \cdot z - D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x + ((C/A) - 1) \cdot z + D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2y + (1 + C/A) \cdot z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x + 2y + ((C/A) - 1) \cdot z + D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x - (1 + C/A) \cdot z - D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow ((C/A) + 1) \cdot z + D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x + 2y - (1 - C/A) \cdot z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow 2y + ((C/A) + 1) \cdot z + D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x - (1 - C/A) \cdot z - D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x + ((C/A) + 1) \cdot z + D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2y - (1 - C/A) \cdot z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x + 2y + ((C/A) + 1) \cdot z + D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x + (1 - C/A) \cdot z - D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-16

iii) $A = B = C > 0$, $D < 0$ ise;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - 1 \cdot (\max\{|A|, |A|, |A|\})^{-1} \cdot (|Ax + Ay + Az + D|) = 0$$

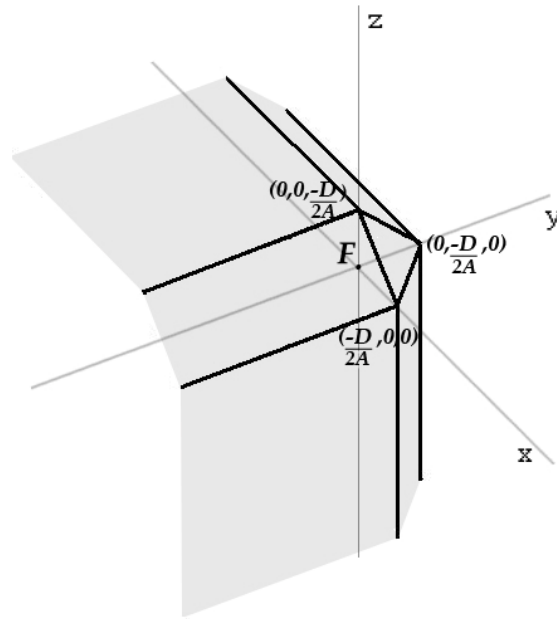
$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - |A|^{-1} \cdot (|Ax + Ay + Az + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - (|x + y + z + D/A|) = 0$$

dır. (Bkz. Şekil-17)

$z < 0$	$x < 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2x + 2y + 2z + D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2y + D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2x + 2z + D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2x + D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2y + 2z + D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2x + 2y + D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2z + D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2z + D/A = 0$
	$x < 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2x + 2y + D/A = 0 \quad \emptyset$

$z \geq 0$	$x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2y + 2z + D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2x + D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2x + 2z + D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow 2y + D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D < 0 \Rightarrow 2x + 2y + 2z + D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + Ay + Az + D \geq 0 \Rightarrow D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-17

iv) $A > B \geq C > 0, D < 0$ ise;

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e \cdot (\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

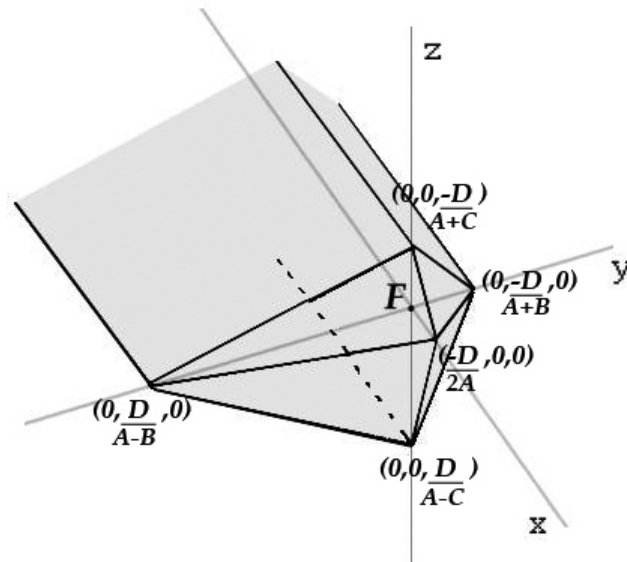
$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - 1 \cdot |A|^{-1} \cdot (|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - (|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$$

dır. (Bkz. Şekil-18)

$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1 - B/A)y + (1 - C/A).z - D/A = 0$
$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x + (1 + B/A)y + (1 + C/A).z + D/A = 0 \quad \emptyset$

$z < 0$	$x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow -(1 + B/A)y + (1 - C/A).z - D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x - (1 - B/A)y + (1 + C/A).z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x - (1 - B/A)y - (1 - C/A).z + D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow -(1 + B/A)y - (1 + C/A).z - D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x + (1 + B/A)y - (1 - C/A).z + D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1 - B/A)y - (1 + C/A).z - D/A = 0 \quad \emptyset$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1 - B/A)y - (1 + C/A).z - D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x + (1 + B/A)y - (1 - C/A).z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow -(1 + B/A)y - (1 + C/A).z - D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow 2x - (1 - B/A)y - (1 - C/A).z + D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x - (1 - B/A)y + (1 + C/A).z + D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow -(1 + B/A)y + (1 - C/A).z - D/A = 0 \quad \emptyset$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow 2x + (1 + B/A)y + (1 + C/A).z + D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1 - B/A)y + (1 - C/A).z - D/A = 0 \quad \emptyset$



şekil-18

4.3 $e > 1$ iken

$e > 1$ alındığında bulacağımız yüzeyler aşağıda görüldüğü üzere taksi hiperboloidlerdir.

Burada, $0 < e < 1$ ve $e = 1$ aralıkları için tanımsız olan bazı yüzeyler $e > 1$ için tanımlı olacaktır. Burada farklı koşullar altında oluşan hiperboloidler incelenmiştir.

$A > 0, B = C = 0, D < 0$ koşulu altında oluşacak hiperboloid $B/A = 0, C/A = 0$ ve $e > 1$ olduğundan aşağıda gösterildiği gibi bir yüzey belirtir.

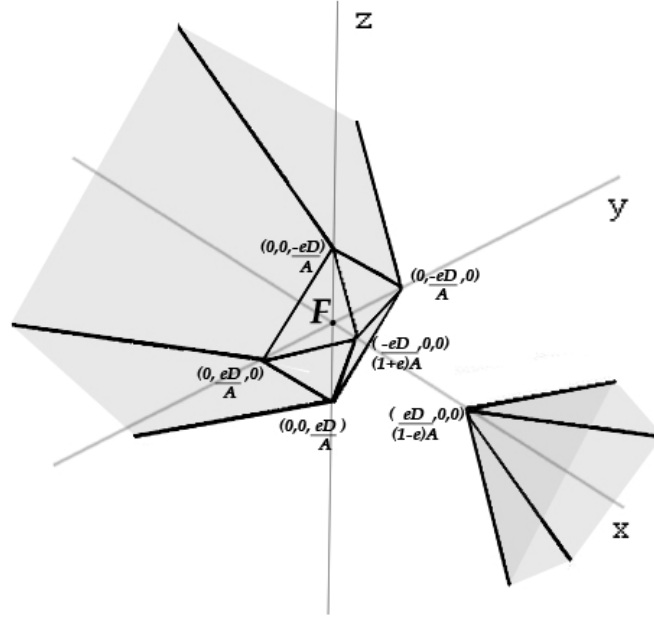
i) $A > 0, B = C = 0, D < 0$ ise;

yine $|x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + D/A|) = 0$ denklemi oluşur. $e > 1$ olduğundan

aşağıda gösterildiği gibi farklı yüzeyler tanımlıdır.

$z < 0$	$x < 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x + y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x + y + z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x - y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x - y + z - e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 + e)x - y - z + e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 - e)x - y - z - e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 + e)x + y - z + e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 - e)x + y - z - e \cdot D/A = 0$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x + y - z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x + y - z + e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x - y - z - e \cdot D/A = 0$
	$x < 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x - y - z - e \cdot D/A = 0 \quad \emptyset$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 + e)x - y + z + e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0, y < 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 - e)x - y + z - e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D < 0 \Rightarrow (1 + e)x + y + z + e \cdot D/A = 0$
	$x \geq 0, y \geq 0, Ax + D \geq 0 \Rightarrow (1 - e)x + y + z - e \cdot D/A = 0$

dır. (Bkz. Şekil-19)



şekil-19

ii) Diğer koşulları altında oluşacak farklı hiperboloidleri incelemek üzere en genel haliyle $A \geq B \geq C \geq 0$, $A > 0$, $D < 0$ koşulunu göz önünde bulundurarak aşağıdaki denklemin belirttiği tüm yüzeyleri incelersek bunların,

$$1 - e.(B/A) > 0 \Rightarrow A/B > e, 1 - e.(B/A) = 0 \Rightarrow A/B = e, 1 - e.(B/A) < 0 \Rightarrow A/B < e;$$

$$1 - e.(C/A) > 0 \Rightarrow A/C > e, 1 - e.(C/A) = 0 \Rightarrow A/C = e, 1 - e.(C/A) < 0 \Rightarrow A/C < e$$

olması durumunda farklı yüzeyler oluşturacağı aşağıdaki denklemin çözümüne bakılarak söylenebilir.

$$A \geq B \geq C \geq 0, A > 0, D < 0 \text{ ise;}$$

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| - e.(\max\{|A|, |B|, |C|\})^{-1}.(|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x - 0| + |y - 0| + |z - 0| - e.|A|^{-1}.(|Ax + By + Cz + D|) = 0$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |z| - e.(|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$$

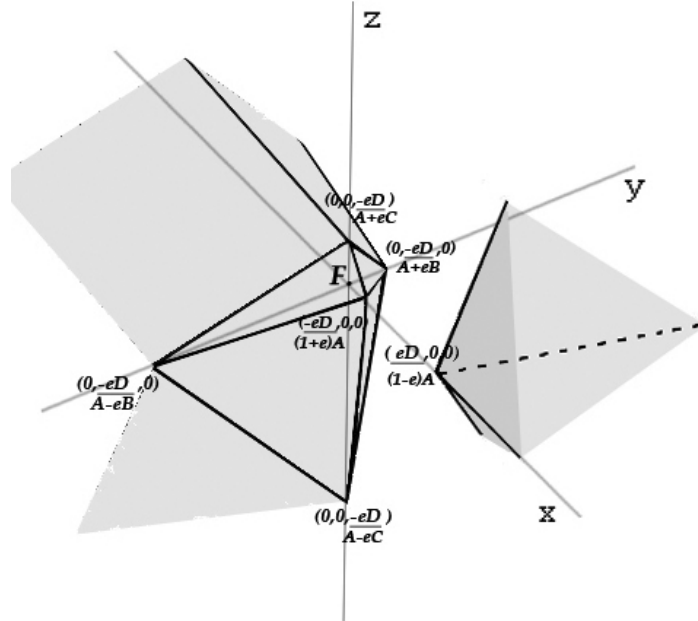
olduğundan

$z < 0$	$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1 - e)x + (1 - e.B/A)y + (1 - e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1 + e)x + (1 + e.B/A)y + (1 + e.C/A).z + e.D/A = 0$
---------	---

$z < 0$	$x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0$
$z \geq 0$	$x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y - (1+e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x < 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y - (1-e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x - (1-e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y < 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x - (1+e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D < 0 \Rightarrow (1+e)x + (1+e.B/A)y + (1+e.C/A).z + e.D/A = 0$ $x \geq 0, y \geq 0, Ax + By + Cz + D \geq 0 \Rightarrow (1-e)x + (1-e.B/A)y + (1-e.C/A).z - e.D/A = 0$

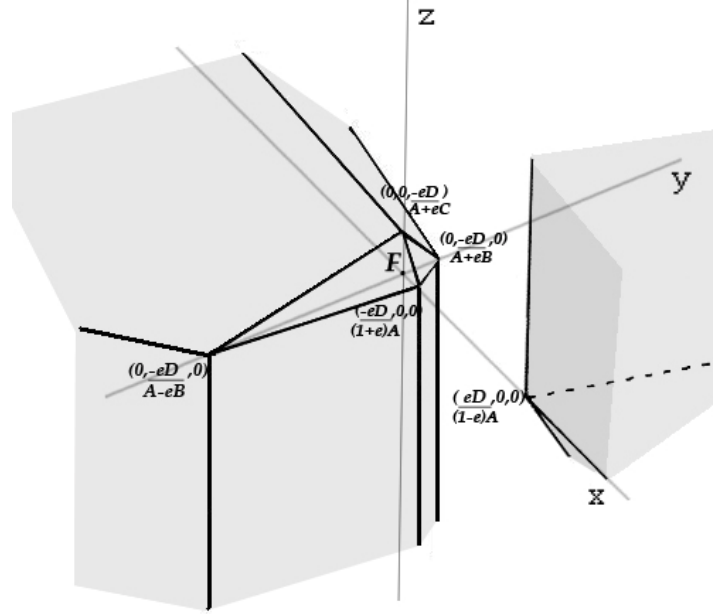
bulunur.

$A/B > e > 1$ ve $A/C > e > 1$ ise $|x| + |y| + |z| - e.(|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$ denkleminin grafiği şöyledir.



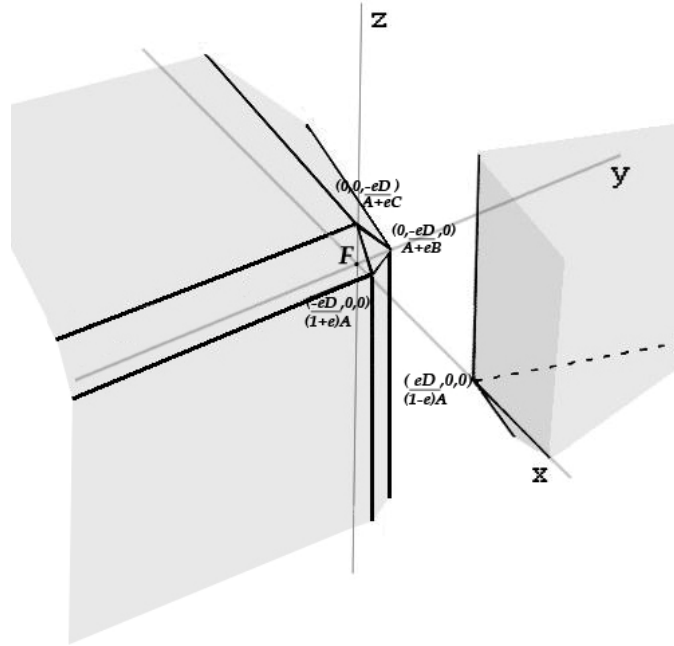
şekil-20

$A/B > e > 1$ ve $A/C = e > 1$ ise $|x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$ denkleminin grafiği şöyledir.



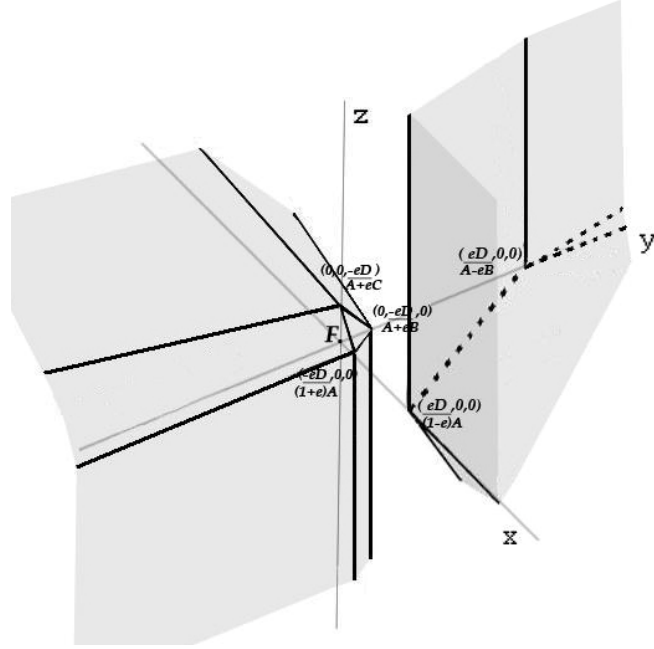
şekil-21

$A/B = e > 1$ ve $A/C = e > 1$ ise $|x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$ denkleminin grafiği şöyledir.



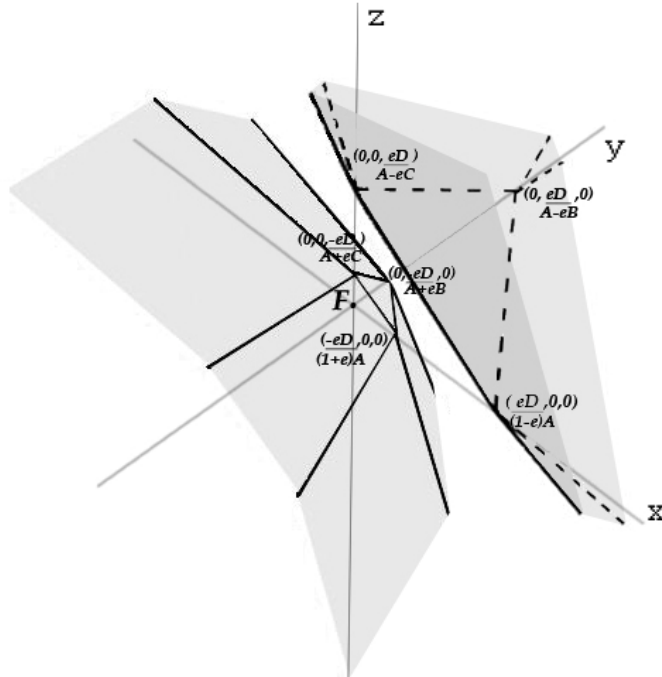
şekil-22

$e > A/B > 1$ ve $A/C = e > 1$ ise $|x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$ denkleminin grafiği şöyledir.



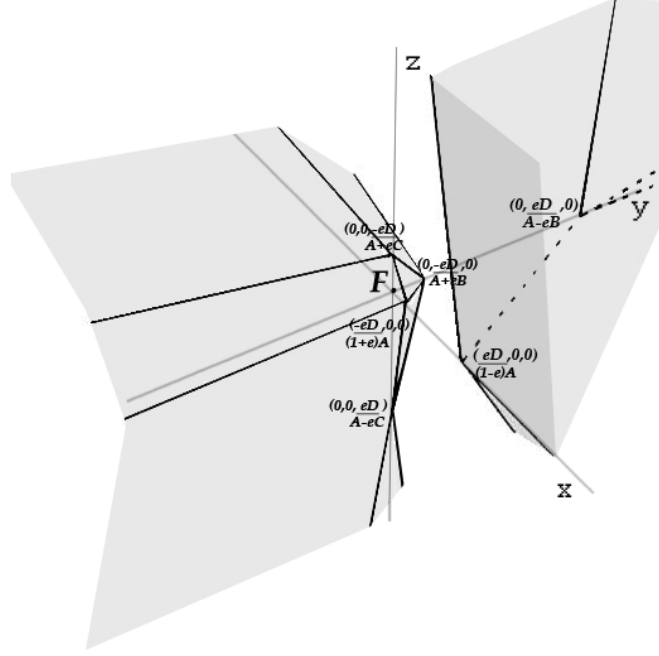
şekil-23

$e > A/B > 1$ ve $e > A/C > 1$ ise $|x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$ denkleminin grafiği şöyledir.



şekil-24

$e > A/B > 1$ ve $A/C > e > 1$ ise $|x| + |y| + |z| - e \cdot (|x + B/A y + C/A z + D/A|) = 0$ denkleminin grafiği şöyledir.



şekil-25

\mathbb{R}_T^3 de tek odaklı (odak-doğrultmanlı) yüzeyleri incelemek üzere doğrultmanı düzlem olan yüzeyleri inceledik. Şimdi ise genel olarak doğrultmanı, uzayda herhangi bir doğru olan yüzeylerden kısaca söz edeceğiz.

$P(x, y, z)$ noktasının $F(x_1, y_1, z_1)$ noktasına uzaklığının;

$$d_T(P, F) = |x - x_1| + |y - y_1| + |z - z_1| \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $l: \frac{x - x_2}{p} = \frac{y - y_2}{q} = \frac{z - z_2}{r}$ doğrusuna uzaklığı Z.Akça

ve R.Kaya [1] tarafından yapılan çalışmaya göre;

$$d_T(P_0, l) = \min \left\{ \begin{aligned} &|p^{-1}(|q(x_0 - x_2) - p(y_0 - y_2)| + |r(x_0 - x_2) - p(z_0 - z_2)|)|, \\ &|q^{-1}(|p(y_0 - y_2) - q(x_0 - x_2)| + |r(y_0 - y_2) - q(z_0 - z_2)|)|, \\ &|r^{-1}(|p(z_0 - z_2) - r(x_0 - x_2)| + |q(z_0 - z_2) - q(y_0 - y_2)|)| \end{aligned} \right\}$$

Dolayısıyla herhangi bir l doğrusuna bilinen bir uzaklıktaki $P(x, y, z)$ noktasının yerini şu eşitlikle bulabiliriz.

$$d_T(P, l) = \min \left\{ \begin{aligned} &|p^{-1}| \left(|q(x-x_2) - p(y-y_2)| + |r(x-x_2) - p(z-z_2)| \right), \\ &|q^{-1}| \left(|p(y-y_2) - q(x-x_2)| + |r(y-y_2) - q(z-z_2)| \right), \\ &|r^{-1}| \left(|p(z-z_2) - r(x-x_2)| + |q(z-z_2) - q(y-y_2)| \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Buna göre odak-doğrultmanlı yüzeyleri inlemek açısından odak noktasına uzaklığının doğrultmanına olan uzaklığına oranı e olan noktalarının geometrik yeri şudur.

$$\begin{aligned} |x-x_1| + |y-y_1| + |z-z_1| - e \min \left\{ \begin{aligned} &|p^{-1}| \left(|q(x-x_2) - p(y-y_2)| + |r(x-x_2) - p(z-z_2)| \right), \\ &|q^{-1}| \left(|p(y-y_2) - q(x-x_2)| + |r(y-y_2) - q(z-z_2)| \right), \\ &|r^{-1}| \left(|p(z-z_2) - r(x-x_2)| + |q(z-z_2) - q(y-y_2)| \right) \end{aligned} \right\} = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Burada, odak noktası; $F = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ olan ve doğrultmanı; (x_2, y_2, z_2) noktasından geçen ve doğrultu vektörü (p, q, r) olan doğru ise, bu (2) denklemi bu değerlerin farklılığına göre bize elipsoid, paraboloid veya hiperboloid yüzeyini belirtecektir. Denklem içerisindeki x_2, y_2, z_2 ve p, q, r değerleri daima \mathbb{R}^+ nın bir elemanı olarak alınacaktır.

$$|x-0| + |y-0| + |z-0| - e \cdot |p^{-1}| \left(|q(x-x_2) - p(y-y_2)| + |r(x-x_2) - p(z-z_2)| \right) = 0$$

$$|x| + |y| + |z| - e \cdot \left(\left| \frac{q}{p}x - y - \left(\frac{q}{p}x_2 + y_2 \right) \right| + \left| \frac{r}{p}x - z - \left(\frac{r}{p}x_2 + z_2 \right) \right| \right) = 0$$

$$U = \left| \frac{q}{p}x - y - \left(\frac{q}{p}x_2 + y_2 \right) \right| \text{ ve } V = \left| \frac{r}{p}x - z - \left(\frac{r}{p}x_2 + z_2 \right) \right| \text{ dersek,}$$

$z < 0$ ve

$x < 0, y < 0, U < 0, V < 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{q+r}{p} \right) x \right) + (1+e)y + (1+e)z + e \left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2 \right) = 0$$

$x < 0, y < 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) + (1+e)y + (1-e)z + e\left(\frac{q-r}{p}x_2 + y_2 - z_2\right) = 0$$

$x < 0, y < 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{r-q}{p}\right)x\right) + (1-e)y + (1+e)z + e\left(\frac{r-q}{p}x_2 - y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y < 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 + e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) + (1-e)y + (1-e)z - e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U < 0, V < 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) - (1-e)y + (1+e)z + e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) - (1-e)y + (1-e)z + e\left(\frac{q-r}{p}x_2 + y_2 - z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{r-q}{p}\right)x\right) - (1+e)y + (1+e)z + e\left(\frac{r-q}{p}x_2 - y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 + e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) - (1+e)y + (1-e)z - e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U < 0, V < 0$ için

$$-\left(1 + e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) + (1+e)y + (1+e)z + e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1 + e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) + (1+e)y + (1-e)z + e\left(\frac{q-r}{p}x_2 + y_2 - z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{r-q}{p}\right)x\right)+(1-e)y+(1+e)z+e\left(\frac{r-q}{p}x_2-y_2+z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y < 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1-e.\left(\frac{q+r}{p}\right)x\right)+(1-e)y+(1-e)z-e\left(\frac{q+r}{p}x_2+y_2+z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U < 0, V < 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{q-r}{p}\right)x\right)-(1-e)y+(1+e)z+e\left(\frac{q+r}{p}x_2+y_2+z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{q-r}{p}\right)x\right)-(1-e)y+(1-e)z+e\left(\frac{q-r}{p}x_2+y_2-z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{r-q}{p}\right)x\right)-(1+e)y+(1+e)z+e\left(\frac{r-q}{p}x_2-y_2+z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1-e.\left(\frac{q+r}{p}\right)x\right)-(1+e)y+(1-e)z-e\left(\frac{q+r}{p}x_2+y_2+z_2\right)=0$$

$z \geq 0$ ve

$x < 0, y < 0, U < 0, V < 0$ için

$$\left(1-e.\left(\frac{q+r}{p}\right)x\right)+(1+e)y-(1-e)z+e\left(\frac{q+r}{p}x_2+y_2+z_2\right)=0$$

$x < 0, y < 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$\left(1-e.\left(\frac{q-r}{p}\right)x\right)+(1+e)y-(1+e)z+e\left(\frac{q-r}{p}x_2+y_2-z_2\right)=0$$

$x < 0, y < 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$\left(1-e.\left(\frac{r-q}{p}\right)x\right)+(1-e)y-(1-e)z+e\left(\frac{r-q}{p}x_2-y_2+z_2\right)=0$$

$x < 0, y < 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 + e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) + (1-e)y - (1+e)z - e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U < 0, V < 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) - (1-e)y - (1-e)z + e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) - (1-e)y - (1+e)z + e\left(\frac{q-r}{p}x_2 + y_2 - z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$\left(1 - e \cdot \left(\frac{r-q}{p}\right)x\right) - (1+e)y - (1-e)z + e\left(\frac{r-q}{p}x_2 - y_2 + z_2\right) = 0$$

$x < 0, y \geq 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$\left(1 + e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) - (1+e)y - (1+e)z - e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U < 0, V < 0$ için

$$-\left(1 + e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) + (1+e)y - (1-e)z + e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1 + e \cdot \left(\frac{q-r}{p}\right)x\right) + (1+e)y - (1+e)z + e\left(\frac{q-r}{p}x_2 + y_2 - z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$-\left(1 + e \cdot \left(\frac{r-q}{p}\right)x\right) + (1-e)y - (1-e)z + e\left(\frac{r-q}{p}x_2 - y_2 + z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y < 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1 - e \cdot \left(\frac{q+r}{p}\right)x\right) + (1-e)y - (1+e)z - e\left(\frac{q+r}{p}x_2 + y_2 + z_2\right) = 0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U < 0, V < 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{q-r}{p}\right)x\right)-(1-e)y-(1-e)z+e\left(\frac{q+r}{p}x_2+y_2+z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U < 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{q-r}{p}\right)x\right)-(1-e)y-(1+e)z+e\left(\frac{q-r}{p}x_2+y_2-z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U \geq 0, V < 0$ için

$$-\left(1+e.\left(\frac{r-q}{p}\right)x\right)-(1+e)y-(1-e)z+e\left(\frac{r-q}{p}x_2-y_2+z_2\right)=0$$

$x \geq 0, y \geq 0, U \geq 0, V \geq 0$ için

$$-\left(1-e.\left(\frac{q+r}{p}\right)x\right)-(1+e)y-(1+e)z-e\left(\frac{q+r}{p}x_2+y_2+z_2\right)=0$$

Bu analitik çözümü yapılan yüzey denkleminin gösterdiği elipsoid, paraboloid ve hiperboloidler ayrıca incelenmeyecektir. Çünkü tek odaklı ve doğrultmanını düzlem kabul ettiğimiz yüzeyler için yeterince şekiller gösterilmiştir. Ancak buradan analitik çözüme bakılarak şundan söz edilebilir. e nin çarpanı olan mutlak değer içersindeki (doğrultman doğrusunu ifade eden) farklı iki düzlemin sabit değerlerinin her ikisi birden 0 dan farklı ise bu durumda sabit değerlerden mutlak değerce küçük olanının büyük olanına oranı daima e ye eşit ya da e den büyük olmalıdır. Aksi halde belirttiği yüzeylerin dejenere halleri karşımıza çıkar. Bu durumdan dolayı e her zaman $0 < e \leq 1$ aralığında olmak zorundadır. Ayrıca yukarıdaki denkleme göre

$$1-e\frac{q+r}{p} > 0 \text{ yani } \frac{p}{q+r} > e \text{ ise bu durumda elipsoid yüzeyi;}$$

$$1-e\frac{q+r}{p} = 0 \text{ yani } \frac{p}{q+r} = e \text{ ise bu durumda paraboloid yüzeyi;}$$

$$1-e\frac{q+r}{p} < 0 \text{ yani } \frac{p}{q+r} < e \text{ ise bu durumda da hiperboloid yüzeyi belirtir.}$$

5. BAZI TAKSİ DİK KONİLER

\mathbb{R}_T^3 de dayanak eğrisi $F(x', y', z') = 0$ ve $G(x', y', z') = 0$ yüzeylerinin arakesiti olan ve tepe noktası $T(x_0, y_0, z_0)$ olan koninin denklemini \mathbb{R}^3 de olduğu gibi;

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{z - z_0}{z' - z_0}$$

ifadesindeki x' , y' , z' değerlerini yok ederek elde edebiliriz. Birkaç taksi koni örneği vermek için $z = 0$ düzlemi üzerinde farklı dayanak eğrileri ve bu düzlem dışında bir tepe noktası seçilebilir.

Tepe noktası $T(0, 0, b)$, $b > 0$ ve dayanak eğrisi \mathbb{R}_T^3 de $|x'| + |y'| = a$, $z' = 0$ taksi çemberi olan dik koninin yerini bulmak için bu verileri

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{z - z_0}{z' - z_0}$$

denkleminde yerine konursa;

$$\begin{aligned} \frac{x - 0}{x' - 0} &= \frac{y - 0}{y' - 0} = \frac{z - b}{0 - b} \\ \Rightarrow \frac{x}{x'} &= \frac{y}{y'} = \frac{z - b}{-b} \\ \Rightarrow \frac{x}{x'} &= \frac{z - b}{-b} \quad \text{buradan} \quad x' = \frac{bx}{b - z} \\ \Rightarrow \frac{y}{y'} &= \frac{z - b}{-b} \quad \text{buradan} \quad y' = \frac{by}{b - z} \end{aligned}$$

olur.

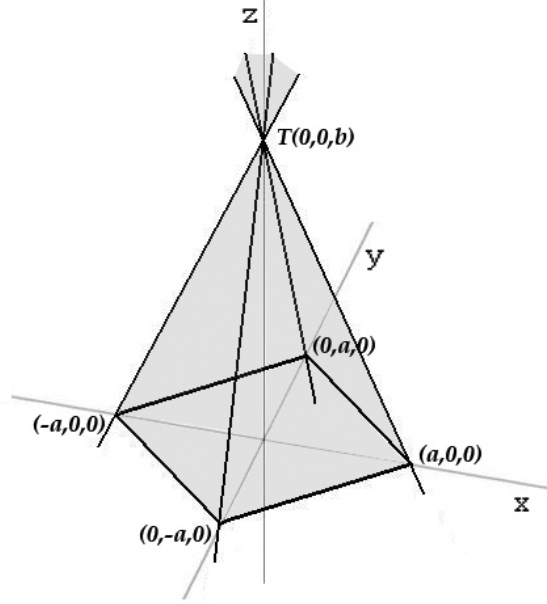
Bu x' ve y' değerleri aşağıdaki denklemde yerlerine konulursa;

$$|x'| + |y'| = a$$

denkleminde

$$\left| \frac{bx}{b-z} \right| + \left| \frac{by}{b-z} \right| = a \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{b}{b-z} \right| \cdot (|x| + |y|) = a$$

şeklinde dayanak eğrisi bir taksî çember olan koni denklemi ortaya çıkar. Şekli aşağıda gösterildiği gibidir.



şekil-26

Dayanak eğrisi; $|x'+c| + |x'-c| + 2|y'| = 2a > 0$, $2a > 2c$, $c > 0$, $z' = 0$ iki odaklı taksî elipsi ile tepe noktası $T(0,0,b)$, $b > 0$ olan koninin yerini bulmak için bu verileri yine;

$$\frac{x-x_0}{x'-x_0} = \frac{y-y_0}{y'-y_0} = \frac{z-z_0}{z'-z_0}$$

denkleminde yerine koyarsak;

$$\frac{x-0}{x'-0} = \frac{y-0}{y'-0} = \frac{z-b}{0-b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z-b}{-b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{z-b}{-b} \quad \text{buradan} \quad x' = \frac{bx}{b-z}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{z-b}{-b} \text{ buradan } y' = \frac{by}{b-z}$$

olur.

Yine bu x' ve y' değerleri $|x'+c|+|x'-c|+2|y'|=2a > 0$ denkleminde yerlerine konulursa;

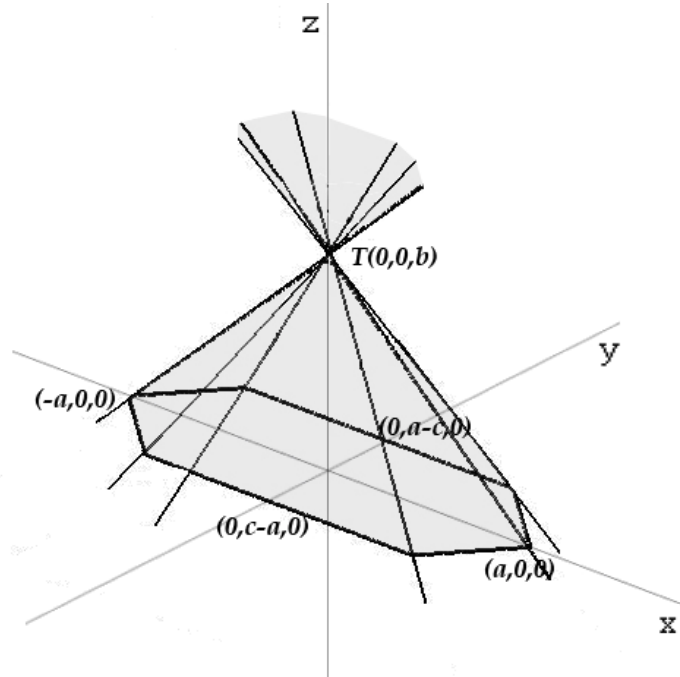
$$\left| \frac{bx}{b-z} + c \right| + \left| \frac{bx}{b-z} - c \right| + 2 \left| \frac{by}{b-z} \right| = 2a$$

$$\Rightarrow \left| \frac{bx+c(b-z)}{b-z} \right| + \left| \frac{bx-c(b-z)}{b-z} \right| + 2 \left| \frac{by}{b-z} \right| = 2a$$

$$\Rightarrow |b-z|^{-1} \cdot (|bx+c(b-z)| + |bx-c(b-z)| + 2|by|) = 2a$$

olur.

Dayanak eğrisi bir altıgen taksit elipsi olan şekildeki koni denklemini ortaya çıkar. Şekli aşağıda gösterildiği gibidir.



şekil-27

Dayanak eğrisi; $|x'+c_1|+|y'+c_2|+|x'-c_1|+|y'-c_2|=2a > 0$, $2a > 2(c_1+c_2)$,
 $c_1 > c_2 > 0$, $z'=0$ sekizgen taksi elipsi ile tepe noktası $T(0,0,b)$ olan bir koninin yerini
 bulmak için bu verileri;

$$\frac{x-x_0}{x'-x_0} = \frac{y-y_0}{y'-y_0} = \frac{z-z_0}{z'-z_0} \quad \text{denkleminde yerine koyarsak;}$$

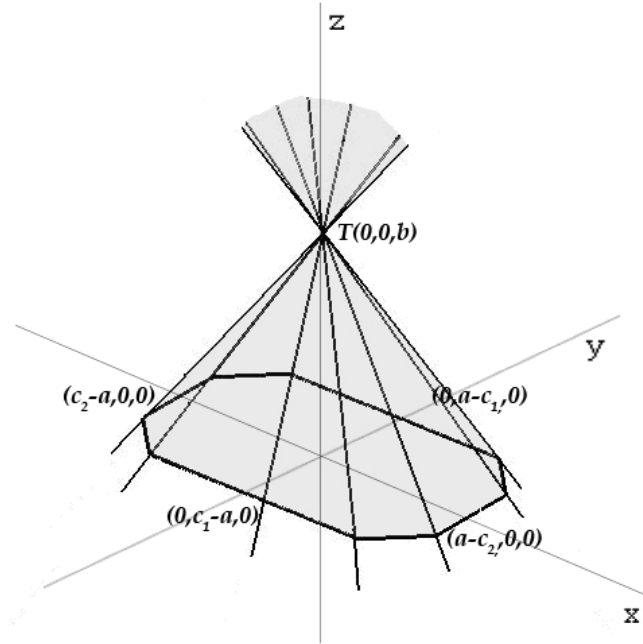
benzer şekilde

$$\frac{x-0}{x'-0} = \frac{y-0}{y'-0} = \frac{z-b}{0-b} \quad \text{den } x' = \frac{bx}{b-z} \text{ ve } y' = \frac{by}{b-z} \text{ olur.}$$

Bu x' , y' değerleri $|x'+c_1|+|y'+c_2|+|x'-c_1|+|y'-c_2|=2a$ denkleminde yerine
 konulursa;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{bx}{b-z} + c_1 \right| + \left| \frac{by}{b-z} + c_2 \right| + \left| \frac{bx}{b-z} - c_1 \right| + \left| \frac{by}{b-z} - c_2 \right| = 2a \\ \Rightarrow & \left| \frac{bx+c_1(b-z)}{b-z} \right| + \left| \frac{by+c_2(b-z)}{b-z} \right| + \left| \frac{bx-c_1(b-z)}{b-z} \right| + \left| \frac{by-c_2(b-z)}{b-z} \right| = 2a \\ \Rightarrow & |b-z|^{-1} \cdot (|bx+c_1(b-z)| + |by+c_2(b-z)| + |bx-c_1(b-z)| + |by-c_2(b-z)|) = 2a \end{aligned}$$

ifadesinde gösterildiği gibi dayanak eğrisi bir sekizgen taksi elipsi olan bir taksi koni
 ortaya çıkar. Şekli aşağıda gösterildiği gibidir.



şekil-28

Dayanak eğrisi; $F(0,0)$ odak noktası, $l: Ax'+By'+C=0$ doğrultmanına sahip $|x'-0|+|y'-0|-e(\max\{|A|,|B|\})^{-1} \cdot |Ax'+By'+C|=0$, $0 < e < 1$, $z'=0$ tek odaklı elipsi olan, tepe noktası ise $T(0,0,b)$ noktası olan koniği incelemek üzere öncelikle; $A > B > 0$, $C > 0$ koşuluna uygun koni denklemi için;

$$|x'|+|y'|-e.A^{-1} \cdot |Ax'+By'+C|=0$$

denkleminde

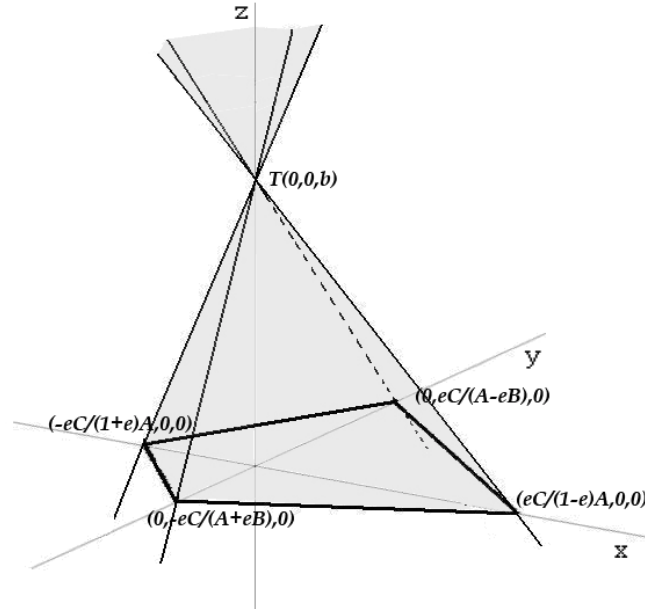
$$\frac{x-x_0}{x'-x_0} = \frac{y-y_0}{y'-y_0} = \frac{z-z_0}{z'-z_0} \Rightarrow x' = \frac{bx}{b-z}, \quad y' = \frac{by}{b-z} \text{ değerlerini}$$

kullanırsak

$$\left| \frac{bx}{b-z} \right| + \left| \frac{by}{b-z} \right| - e.A^{-1} \cdot \left| A \frac{bx}{b-z} + B \frac{by}{b-z} + C \right| = 0$$

$$\Rightarrow (b-z)^{-1} \cdot (b|x|+b|y|-e.A^{-1} |A.bx+B.by+C(b-z)|) = 0$$

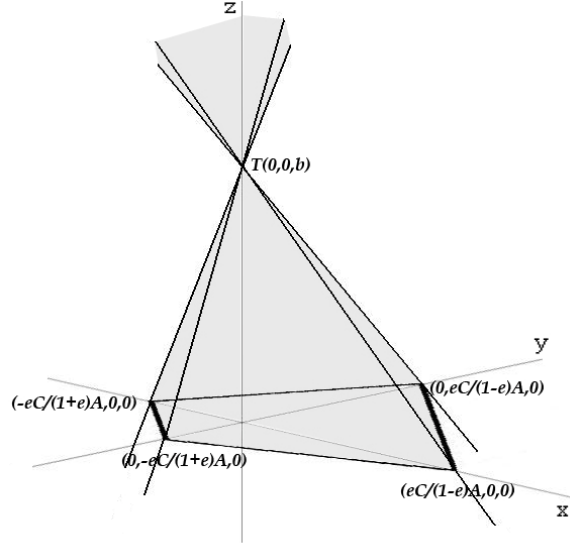
koni denklemi ortaya çıkar ve yeri şekilde gösterildiği gibidir.



Şekil-29

$A = B > 0$, $C > 0$ koşuluna uygun koni denklemi aşağıdadır ve yeri şekilde gösterildiği gibidir.

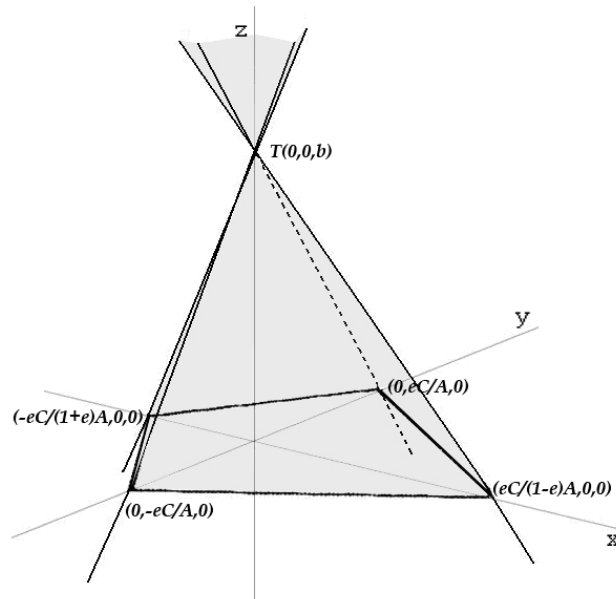
$$(b-z)^{-1} \cdot (b|x|+b|y|-e.A^{-1}|A.bx+A.by+C(b-z)|) = 0$$



şekil-30

$A > 0$, $B = 0$, $C > 0$ koşuluna uygun koni denklemi aşağıdadır ve yeri şekilde gösterildiği gibidir.

$$(b-z)^{-1} \cdot (b|x|+b|y|-e.A^{-1}|A.bx+C(b-z)|) = 0$$



şekil-31

KAYNAKLAR

- [1] Akça, Z., and Kaya, R., 2004, On the distance formulae in three dimensional Taxicab space, Hadronic Journal 27,521-532.
- [2] Çolakoğlu, H. B. and Kaya, R., Volume of a tetrahedron in the taxicab space, MJMS(Missouri Journal of Math.Sci.), to appear.
- [3] Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, I., and Özcan, M., 2000, General Equation For TaxicabConics And Their Classification, Mitt.Math.Ges.Hamburg 19,135-148.
- [4] Kaya, R., 2002 Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir.
- [5] Kaya, R., 2006, Area formula for Taxicab triangles, Pi Mu Epsilon Journal Vol. 12,No.4,219-220.
- [6] Gelişgen, Ö., Kaya, R., 2009, The Taxicab space group,Acta Mathematica Hungarica,Vol. 122, No.1-2, 187-200
- [7] Krause, E. F., 1975, Taxicab geometry, Addison-Wesley, Menlo Park.
- [8] Laatsch, R., 1982, Pyramidal section in taxicab geometry, Math. Mazazine, 55, No.4,205-212.
- [9] Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlingen, Chelsea Publishing Co. New York.
- [10] Ozcan, M., Kaya, R. , fall 2003,Area of a Triangle in Terms of The Taxicab Distance,Missori Journal of Math.Sci.vol.15, number 3
- [11] Reynolds, B. E., 1980, Taxicab geometry, Pi Mu Epsilon Journal, 7, 77-88.
- [12] So, S. S.,2002 Recent developments in taxicab Geometry, Cubo Matematica Educational,79-96.
- [13] Torun, S., 2004 Taksi elipslerin özellikleri üzerine, Yüksek lisans tezi, ESOGU