

Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin  
Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu ile Çözümleri

Hasan Dalman

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2009

Solutions of the Some Partial Differential Equations  
by using Quartic B-spline Collocation Method

Hasan Dalman

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics

January 2009

Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin  
Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu ile Çözümleri

Hasan Dalman

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Bülent Saka

Ocak 2009

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hasan Dalman'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

**İkinci Danışman** :

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

**Üye** : Prof. Dr. İdris DAĞ

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. İ. İlker AKÇA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu tezde, B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar metodu kullanılarak bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri ile ilgilenilmiştir.

İlk bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir. İlk olarak solitary ve soliton dalgaları hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. Daha sonra lineer olmayan oluşum denklemleri, korunum kanunları, sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları tanımlanmıştır. Spline fonksiyonlar kavramı verildikten sonra, kuartik B-spline fonksiyonları tanımlanmıştır. Son olarak sayısal çözümleri araştırılacak olan, regularized long wave (RLW), Burger ve Schrödinger denklemleri başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, RLW denklemi kuartik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Metot, klasik test problemleri; tek dalga çözümü, iki pozitif dalganın çarpışması ve dalga oluşumu ile test edildi.  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları ve RLW denkleminin üç korunum sabiti algoritmanın güvenilirliğini göstermek için hesaplandı.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, Burger ve Schrödinger denklemlerinin sayısal çözümleri için kuartik B-spline kolokeyşin metodu verilmiştir. Önerilen metot klasik problemler kullanılarak test edilmiştir.

Son bölümde ise önerilen metotlar hakkında sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuartik B-spline, Sonlu elemanlar metodu, Kolokeyşin, Solitary dalgaları, Kısmi diferensiyel denklemler

## SUMMARY

In this thesis, the numerical solution of some partial differential equations is dealt with by using B-spline finite element collocation method.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. Firstly, a brief history for solitary and soliton waves are given and the nonlinear evolution equation, conservation laws, the finite difference and the finite element methods are described. After the concept of the spline functions is outlined, quartic B-spline functions are described and constructed. Finally, the regularized long wave (RLW) equation, the Burgers' equation and Schrödinger equation together with their test problems are introduced.

In the second chapter, RLW equation is solved numerically by using quartic B-spline collocation method. The method is tested by classical test problems such as solitary wave solution, interaction of two solitary waves and evolution of solitary waves.  $L_2$ ,  $L_\infty$  error norms and three conservation laws of RLW equation are computed for the accuracy.

The numerical solutions of the Burgers' and Schrödinger equations via the collocation method are presented by the help of quartic B-spline functions in the third and fourth chapters. The proposed method is examined by using classic problems.

In the last chapter a discussion about the proposed methods is given.

Keywords: Quartic B-spline, Finite element method, Collocation, Solitary waves, Partial differential equations

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA' ya ve değerli fikirlerine başvurduğum hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	x
TABLolar DİZİNİ.....	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. TEMEL KAVRAMLAR .....	1
1.1 Dalga Teorisi.....	1
1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....	5
1.3 Korunum Kanunları .....	7
1.4 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları.....	8
1.4.1 Sonlu farklar metodu .....	9
1.4.2 Sonlu elemanlar metodu .....	12
1.5 Spline Fonksiyonlar .....	15
1.5.1 Kuartik B-spline İnterpolasyon Polinomları.....	17
1.6 RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları.....	19
1.7 Burger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları .....	22
1.8 Schrödinger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları .....	25
2. RLW DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	28
2.1 RLW Denklemine Sayısal Çözümü İçin Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu	28
2.2 Başlangıç Durumu .....	33
2.3 Test Problemleri.....	36
2.3.1 Tek dalga çözümü.....	36
2.3.2 İki pozitif dalganın çarpışması.....	42
2.3.3 Ardışık dalgaların gelişimi.....	44
2.4 Sonuç .....	49



**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)**

	<b><u>Sayfa</u></b>
3. BURGER DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	51
3.1 Burger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin	
Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	51
3.2 Başlangıç Durumu .....	56
3.3 Test Problemleri.....	56
3.4 Sonuç .....	62
4. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....	64
4.1 Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin	
Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	64
4.2 Başlangıç Durumu .....	70
4.3 Test Problemleri.....	70
4.3.1 Tek soliton çözümü.....	70
4.3.2 İki solitonun çarpışması .....	73
4.3.3 Solitonların oluşumu.....	75
4.4 Sonuç .....	79
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	80
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	82

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Basit bir dalga profili ..... 1
1.2	Bir solitary dalgasının hareketi..... 3
1.3	Crank-Nicolson yaklaşımı ..... 11
1.4	$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanında $\phi_{m-2}, \dots, \phi_{m+2}$ kuartik B-spline fonksiyonları ..... 18
2.1	Tek dalga çözümü ..... 37
2.2	Tek dalga çözümü ..... 37
2.3	Genlik 0.3 için hata ..... 38
2.4	Genlik 0.09 için hata ..... 38
2.5	İki tek dalganın çarpışması ..... 43
2.6	Zaman-Genlik grafiği ..... 43
2.7	Ardışık dalga profilleri, d=5 ..... 45
2.8	Ardışık dalga profilleri, d=2 ..... 45
2.9	Ardışık dalgaların profilleri, d=5 ..... 46
2.10	Ardışık dalgaların profilleri, d=2 ..... 46
3.1	Ardışık dalgaların profilleri, d=2 ..... 58
3.2	Ardışık dalgaların profilleri, d=5 ..... 58
3.3	$v=h=0,005$ için hata ..... 59
3.4	$v=h=0,0005$ için hata ..... 59
3.5	$v=0,005, h=0,005$ için hata ..... 60
3.6	$v=0,01$ için şok yayılımı ..... 62
3.7	$v=0,005, h=0,005$ için hata ..... 62
4.1	Tek soliton simülasyonu ..... 71
4.2	$t=2.5$ zamanındaki hata ..... 71
4.3	İki solitonun çarpışması ..... 73
4.4	İki solitonun çarpışması ..... 73
4.5	İki solitonun çarpışması ..... 74
4.6	Zaman-Genlik grafiği ..... 74
4.7	Duran soliton oluşumu ..... 77

**ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)**

<b><u>Sekil</u></b>		<b><u>Sayfa</u></b>
4.8	Duran soliton oluşumu .....	77
4.9	İlerleyen soliton oluşumu .....	78
4.10	İlerleyen soliton oluşumu .....	78
4.11	Başlangıç koşulu (4.12).....	78
4.12	Başlangıç koşulu (4.13).....	78

## TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Bölünme noktalarındaki kuartik B-spline değerleri..... 18
2.1	Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri, genlik= 0.3, $\Delta t=0.1$ , $h=0.125$ , $-40 \leq x \leq 60$ ..... 39
2.2	Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri, genlik= 0.09, $\Delta t=0.1$ , $h=0.125$ , $-40 \leq x \leq 60$ ..... 39
2.3	Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri, genlik= 0.3, $-40 \leq x \leq 60$ ..... 40
2.4	Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri, genlik= 0.09, $-40 \leq x \leq 60$ ..... 40
2.5	Genlik =0.3, $-40 \leq x \leq 60$ için sayısal hız ..... 41
2.6	Genlik =0.09, $-40 \leq x \leq 60$ için sayısal hız ..... 41
2.7	İki tek dalganın çarpışması ..... 44
2.8	$t=250$ zamanında ardışık dalgaların genlikleri..... 47
2.9	$d=5$ için korunum sabitlerinin sayısal değerleri..... 47
2.10	$d=2$ için korunum sabitlerinin sayısal değerleri..... 48
3.1	$\Delta t = 0.01$ için farklı zamanlarda arasındaki $L_2$ ve $L_\infty$ hata normlarının değerleri ..... 57
3.2	$t= 0.5$ zamanında metodun sonuçları ile analitik sonuçların karşılaştırılmasının sayısal değerleri..... 61
4.1	Korunum sabitleri ve hata normları ..... 72
4.2	$t=1$ zamanında genlik=1 için sonuçlar ..... 72
4.3	$t=1$ zamanında genlik=2 için sonuçlar ..... 73
4.4	İki soliton için korunum sabitleri ..... 75
4.5	İki soliton simülasyonu ..... 75
4.6	Duran soliton için korunum sabitleri ..... 77
4.7	İlerleyen soliton için korunum sabitleri ..... 78

**KISALTMALAR DİZİNİ****Kısaltmalar   Açıklama**

KdV	Korteweg-de Vries
NLS	Lineer Olmayan Schrödinger
RLW	Regularized Long Wave

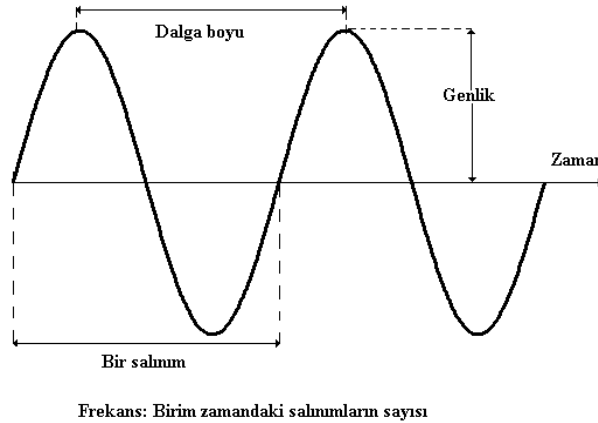
## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlardan, Irk' ın (2007) tezinden de alıntılar yapılarak kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak solitary (tek) dalgaları, lineer olmayan oluşum denklemleri ve korunum kanunları hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları özetlendikten sonra, spline fonksiyonların tanımı verilerek, kuartik B-spline interpolasyon polinomları tanıtılmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri araştırılacak olan, RLW, Burger ve NLS denklemleri başlangıç ve sınır şartları ile birlikte tanıtılmıştır.

#### 1.1 Dalga Teorisi

Dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta

bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalğanın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, F., 1968).

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalğanın bulunduğu ortam dalğanın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, M., 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarakta tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılabilirler. Solitary dalgalarını keşfeden Russel, laboratuvarında su tankları oluşturmuş ve su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak ötelenme dalgalarını (solitary dalgaları) elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır (Falkovich, 2007):

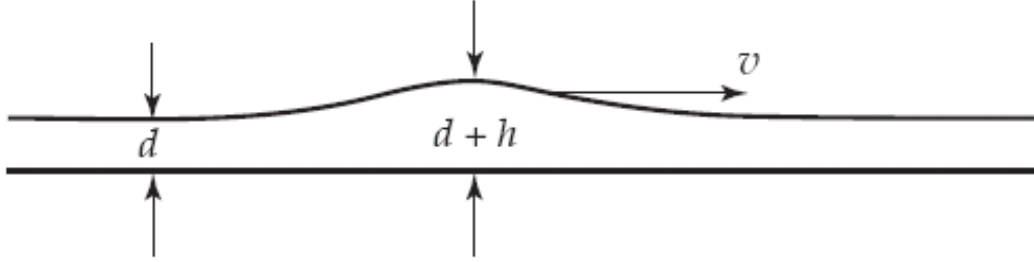
- (i) Solitary dalgaları  $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$  şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak

şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

- (iv)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d+h)} \quad (1.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bkz. Şekil 1.2).



Şekil 1.2: Bir solitary dalgasının hareketi

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederek elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.



O yıllarda Russel'in sonuçları deneysel olarak kaldı ve bir denklemin çözümü olarak solitary dalgaları elde edilemedi. Bununla birlikte, bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu oldu. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

formundan sığ su dalgalarının hareketi modelleyen denklem üzerine çalışmaya başlamışlardır. Denkleme

- $u(x, t)$ , dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$ , küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$ , dağılma parametresine,
- $\gamma$ , lineer olmayan parametreye,
- $T$ , yüzey gerilimine;
- $\rho$ , suyun yoğunluğuna;

karşılık gelmektedir. Korteweg ve de Vries, (1.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Buradaki  $\tilde{u}(x - vt)$  terimi, Russell'in solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries, solitary dalgaların varlığını kanıtlamış oldular ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınladılar (Korteweg and de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir

(Zabusky and Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarakta verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

Soliton çözümleri, hem analitik hemde sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerindeki çalışmalar daha da hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası artık soliton olarak; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, laser fiziği, süperiletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında kullanılmaktadır (Chaohao, 1995). Solitonlar ayrıca uzun mesafelere yol alabildiğinden, teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır. 2006 yılında Harvard üniversitesi elektrik mühendisliğinde görevli olan Donhee Ham ve iki doktora öğrencisi David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından geliştirilen elektronik bir aygıt sayesinde, soliton dalgaları elde edilmiştir. Bu buluş ile normal dalgalar yerine soliton dalgalarının kullanılmasının yolu açılmıştır ve yakın gelecekte radar, iletişim sektörü gibi bir çok yerde solitonlar kullanılacaktır (Harvard Gazette archives, 2006).

## 1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri  $t$  zamanı olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri,  $K[u]$ ;  $u$  ve  $u$ 'nun  $x$  değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere

$$u_t = K[u] \quad (1.4)$$

formundadır. Eğer  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve  $K[u]$ ,  $u$  terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir.

Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum

denklemleri ise, mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok daldaki problemlerde gözlenmektedir. Aşağıda bu tip denklemlere bir kaç örnek verilmiştir (Zheng, 2004):

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda  $u(x, t)$ ,  $t$  zamanında  $x$  konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.5) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için bir model denklem olarakta kullanılmaktadır.

(ii) İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşabiliriz. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferini incelersek

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \nabla u) + f(u) \quad (1.6)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denkleminde ulaşırız.

Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alırsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) \quad (1.7)$$

formundaki lineer olmayan dalga denkleminde ulaşabiliriz.

Kuantum mekaniğinde, aşağıdaki formlardaki lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir:

Sine-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0 \quad (1.8)$$

Klein-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0 \quad (1.9)$$

Kübik Schrödinger denklemi:

$$iu_t - \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (1.10)$$

(iii) İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen

Cahn-Hilliard denkleminin ulaşılır:

$$u_t + \epsilon \Delta^2 u = \Delta \phi(u) \quad (1.11)$$

Bu denklemde  $\epsilon$  belirli bir küçük sabit ve genellikle  $\phi(u) = u^3 - u$  olarak alınmaktadır. (1.11) denkleminin dördüncü merteden bir oluşum denklemi olduğunu belirtelim. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.12)$$

formundaki meşhur KdV denklemdir.

### 1.3 Korunum Kanunları

(1.4) lineer olmayan oluşum denklemlerinin korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \quad (1.13)$$

formundadır. Burada  $\mathcal{T}[u]$  ve  $\mathcal{X}[u]$  sırasıyla,  $u$  ve  $u$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır.  $\mathcal{T}_t$  ve  $\mathcal{X}_x$  sırasıyla  $t$  ve  $x$  değişkenlerine göre tam türevi ifade ederler ve

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + \dots, \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer  $\mathcal{T}$ ,  $u$ 'nun lokal bir fonksiyonu ise, yani; herhangi bir  $\mathcal{T}$ 'nin değeri yalnızca  $x$ 'in küçük bir komşuluğundaki  $u$ 'ya bağlı ise, bu durumda  $\mathcal{T}$  lokal korunumlu yoğunluktur denir.

Eğer  $\mathcal{X}$  de lokal ise, bu durumda (1.13), lokal korunum kanunudur.

Özel olarak, eğer  $\mathcal{T}$  ifadesi açık olarak,  $x$  veya  $t$ 'ye bağlı olmayıp,  $u$  ve  $u$ 'nun  $x$  değişkenine göre türevlerine bağlı ise,  $\mathcal{T}$  ifadesine polinomsal korunumlu yoğunluk denir.  $\mathcal{X}$  de polinomsal ifade ise, (1.13) polinomsal korunum kanunudur. Uygun

sınır koşulları kullanıldığında, lokal korunum kanunları ile hareket sabitleri arasında yakın ilişki ortaya çıkar.

(1.13) denkleminin  $x$  değişkenine göre, bir  $(A, B)$  aralığında integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = 0 \quad (1.15)$$

elde edilir.  $(B - A)$ 'nın periyodun tam katı olduğu veya  $u(x, t)$ 'nin  $x \rightarrow \mp\infty$  ve  $(A, B) = (-\infty, \infty)$  iken sifra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında, (1.15) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan  $t$  değişkenine göre integral alındığında

$$\int_A^B \mathcal{T} dx = \text{sabit}$$

hareket sabiti elde edilir (Fordy, 1990; Irk, 2007).

Soliton teoride en fazla ilgilenilen (1.12) KdV denkleminin sonsuz sayıda korunum kanunları vardır. Bunlardan bir kaçı

$$\mathcal{T}_0 = u, \quad \mathcal{X}_0 = -u_{xx} - 3u^2,$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2}u^2, \quad \mathcal{X}_1 = -uu_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_x - 2u^3,$$

$$\mathcal{T}_2 = u^3 - \frac{1}{2}(u^2)_x, \quad \mathcal{X}_2 = u_x u_{xxx} - \frac{1}{2}(u^2)_{xx} - 3u^2 u_{xx} - 6u(u^2)_x - \frac{9}{2}u^4,$$

şeklinindedir. Burada  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  ifadeleri KdV denklemi için sırasıyla kütle, momentum ve enerjidir.

## 1.4 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferensiyel denklemler, kısmi türevli diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri ile ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin

olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları bu yöntemlerden ikisidir.

### 1.4.1 Sonlu farklar metodu

Sonlu farklar metodunun temeli, bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a, b]$  tanım aralığı için,  $N$  bir pozitif tamsayı,  $h = \frac{b-a}{N}$  ve parçalanma noktaları

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda,  $U(x)$  fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere,  $U(x_i + h)$  ve  $U(x_i - h)$  ifadelerinin  $x_i$  noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i + h) = U(x_i) + hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots, \quad (1.16)$$

$$U(x_i - h) = U(x_i) - hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.17)$$

olarak bulunabilir. Sırasıyla, (1.16-1.17) eşitlikleri

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) - \dots, \quad (1.18)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.19)$$

olarak yazılabileceğinden  $U$  ifadesinin  $x_i$  noktasındaki birinci türevi

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.20)$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i - h)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.21)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.20-1.21) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü

gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve  $\mathcal{O}(\cdot)$  ile gösterilir.

Eğer (1.17) eşitliği, (1.16) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} U_x(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - U(x_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_x(x_i) &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.22)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca, (1.16) ve (1.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} U_{xx}(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - 2U(x_i) + U(x_i - h))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ U_{xx}(x_i) &= \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

Benzer şekilde, iki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımları da Taylor serisi kullanılarak bulunabilir.  $N, M$  pozitif tamsayılar,  $a \leq x \leq b$ ,  $a' \leq y \leq b'$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $k = \frac{b'-a'}{M}$  ve parçalanma noktaları

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{ve} \quad y_j = a' + jk, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

olsun. Bu durumda,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre birinci türev için ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.24)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.25)$$

$$U_x(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.26)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (1.27)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (1.28)$$

$$U_y(x_i, y_j) = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + \mathcal{O}(k^2) \quad (1.29)$$

olarak bulunabilir. İkinci ve üçüncü türev için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde bulunabilir. Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995) incelenebilir.

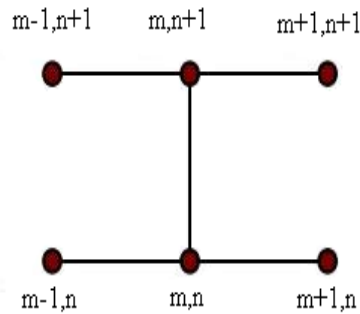
### Crank-Nicolson Metodu

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, zamana göre ikinci dereceden ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank and Nicolson, 1947). Crank ve Nicolson metotlarında, diferensiyel denklemin sonlu fark metoduyla sayısal çözümünü araştırmak için

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

Bir boyutlu problemler için Crank-Nicolson yaklaşımı Şekil 1.3'de gösterilmiştir.



Şekil 1.3: Crank-Nicolson yaklaşımı



Crank-Nicolson metodunun uygulanmasını basit bir örnek üzerinde incelersek,  $a$  reel bir sabit olmak üzere

$$u_t = au_{xx}$$

formundaki kısmi türevli diferensiyel denklem, konum artımı  $h$  ve zaman artımı  $\Delta t$  olmak üzere, ilgili türevler için sonlu fark yaklaşımlarının kullanılması sonucunda

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= a \frac{(u_{xx})_m^{n+1} + (u_{xx})_m^n}{2} \\ \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= \frac{a}{2} \left[ \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right] \end{aligned}$$

eşitliğine dönecektir.

#### 1.4.2 Sonlu elemanlar metodu

Sonlu farklar metodunda, üzerinde çalışılan tanım aralığı birbirlerinden farklı olan noktalar kümesi ile yer değiştirilirken, sonlu elemanlar metodunda, tanım bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan alt tanım bölgelerine ayrılır. Ayrıca sonlu elemanlar metodunda aranan çözüm fonksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları arasında bir takım farklılıklar vardır. Bu farklılıklar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Sonlu farklar metodunda, diferensiyel denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar metodunda ise diferensiyel denklemin çözümü için bir yaklaşım yapılır.
- Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar metodu ile çözümleri zordur. Ayrıca sonlu farklar metodu, problemin çözüm bölgesinin düzgün geometrik şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık, sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hemde düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir.

- Sonlu farklar metodunun en önemli özelliği uygulanmasının kolay olmasıdır.
- Bölünme noktaları arasındaki bir değer için, sonlu farklar metodu ile bir yaklaşım yapılamazken, sonlu elemanlar metodunda her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir.
- Sonlu elemanlar yaklaşımı, genelde sonlu farklar yaklaşımından daha iyidir. Fakat bu durum probleme bağlıdır ve aksi örnekler bulunabilir.
- Sonlu farklar metodlarını elde etmek için Taylor serileri yeterli olurken, sonlu elemanlar metodlarını elde etmek daha zor işlemler ve daha fazla bilgi gerektirir.

Ayrıntıya girmeden sonlu elemanlar metodunun temeli sayılan ağırlıklı rezidüler metodunu ve kolokeyşin metodunu inceleyelim.

### Ağırlıklı Rezidüler Metodu

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.30)$$

şeklinde ifade edilen bir diferensiyel denklemde;  $L$  bir lineer diferensiyel operatör,  $f(x)$  bilinen bir fonksiyon ve  $u(x)$  aranan çözüm olsun. (1.30) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında, aranan  $u(\cdot)$  ifadesi yerine

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.31)$$

formundaki  $\tilde{u}(\cdot)$  sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(1.31) eşitliğinde verilen  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonksiyonu, diferensiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlıdır ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda,  $\phi_j(\cdot)$  fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemini sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidüler metodu,  $\tilde{u}(x)$  yaklaşık çözümünüyle orijinal denklem arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçütü rezidü ile tanımlanır:

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x) \quad (1.32)$$

$W_j$  ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (1.32) ile verilen rezidü ifadesi;  $W_j(x)$  ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki integrali anılırsa

$$\int_{\Omega} W_j(x)R(x)dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.33)$$

formunda  $N$  bilinmeyen  $N$  denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden  $a_j$  bilinmeyenleri bulunarak (1.31) eşitliğinde yerine yazılırsa  $\tilde{u}(x)$  yaklaşık çözümüne ulaşılır.

### Kolokeyşin Metodu

Kolokeyşin metodu, ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta  $W_j$  ağırlık fonksiyonları olarak

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad (1.34)$$

dirac delta fonksiyonları seçilir. Dirac delta fonksiyonları

$$\delta(x - x_j) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.35)$$

özelliğine sahiptirler ve  $R(x_j) = 0, j = 1, \dots, N$  olduğunda, (1.33) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşin metodu için çözüm, (1.31) eşitliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} L\tilde{u}(x) - f(x) &= 0 \\ L\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)\right) - f(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

formunda elde edilir (Lapidus and Pinder, 1982).

## 1.5 Spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayısı çoğaldıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda ardı ardına gelen iki veri arasında birinci, ikinci, üçüncü yada daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır:

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve bilgisayar programlarının yapılması kolaydır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

Spline fonksiyonların bir özel hali B-spline fonksiyonlarıdır. Farklı dereceden B-spline fonksiyonları vardır. Örneğin 0. dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.37)$$

formunda tanımlanır. Burada

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty = -\lim_{i \rightarrow \infty} x_i \quad (1.38)$$

B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesidir.  $B_i^0$  B-spline fonksiyonunun süreksiz olduğu açıktır. Diğer yandan sıçramanın olduğu her noktada

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) &= 1 = B_i^0(x_i) \\ \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) &= 0 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \right\} \text{ her } i \text{ ve } x_i \text{ için} \quad (1.39)$$

olduğundan  $B_i^0$  B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir. Yukarıdaki verilen iki eşitlikten dolayıda  $B_i^0(x)$  B-spline fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \text{Her } i \text{ ve } x_i \text{ için, } B_i^0(x) &\geq 0, \\ \text{Her } x \text{ için, } \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) &= 1 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

özelliklerini sağladığı ve sadece  $[x_i, x_{i+1})$  aralığında değer aldığı açıktır.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} B_i^k &= \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ k &= 1, 2, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.41)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir (Höllig, 2003).  $B_i^k$  B-spline fonksiyonu aynı nokta dizileri için tanımlı ve derecesi  $k$  olan spline fonksiyonlar için tabandır.

Ayrıca derecesi  $k$  olan B-spline fonksiyonu,  $-\infty \leq i \leq \infty$  ve

$$(x - x_{m+i})_+^k = \begin{cases} (x - x_{m+i})^k & , x_{m+i} \leq x \\ 0 & x_{m+i} > x \end{cases} \quad (1.42)$$

olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{k=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} (-1)^m (x - x_{m+i})_+^k \quad (1.43)$$

formülü kullanılarak elde edilebilir. (1.43) ifadesi,  $x \leq x_i$  ve  $x \geq x_{i+m+1}$  olduğunda  $B_i^k(x) = 0$  durumunu sağlar ve derecesi  $k$  olan B-spline,  $k - 1$  kez sürekli türevelere sahip olur.

### 1.5.1 Kuartik B-spline interpolasyon polinomları

$[a, b]$  aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.44)$$

düğüm noktaları kullanılarak  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  eşit uzunluklu  $N$  sonlu eleman ile ayrıştırılsın.  $\phi_m$  kuartik B-spline fonksiyonları, çözüm bölgesi  $[a, b]$  aralığının dışında 8 ilave düğüm noktası ile birlikte  $N + 1$  düğüm noktası kullanılarak tanımlanır. Bu ilave düğüm noktaları

$$x_{-4} < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \text{ ve } x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3} < x_{N+4}$$

dir. Kuartik B-spline fonksiyonların bir kümesi  $\{\phi_{-2}, \dots, \phi_{N+1}\}$ ,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter, 1975).

$\phi_m$  kuartik B-spline fonksiyonları,  $m = -2, -1, \dots, N + 1$  için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.45)$$

$\phi_m(x)$  B-spline fonksiyonu ve onun ilk üç türevi,  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  aralığının dışında sıfırdır.  $'$ ,  $''$  ve  $'''$ ,  $x$ 'e göre birinci, ikinci ve üçüncü türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  aralığında  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_m'(x)$ ,  $\phi_m''(x)$  ve  $\phi_m'''(x)$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.1'de verilmiştir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kuartik B-spline değerleri

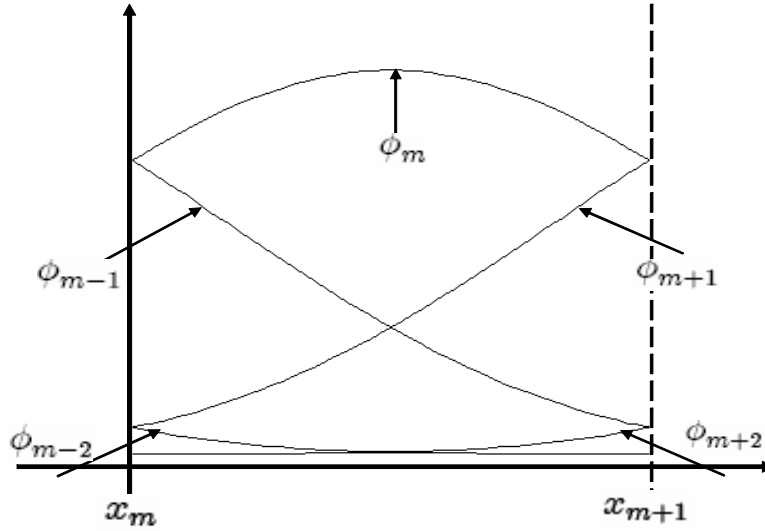
$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\phi_m(x)$	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	24	-72	72	-24	0

Kuartik B-spline kolokeyşin metodunda, kuartik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonları olarak kullanılarak,  $U(x, t)$  analitik çözümü için yaklaşık çözüm

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (1.46)$$

formunda aranır.

$[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 5 ardışık  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kuartik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.4'de gösterilmiştir.

Şekil 1.4:  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanında  $\phi_{m-2}, \dots, \phi_{m+2}$  kuartik B-spline fonksiyonları

Ayrıca  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde, 5 ardışık  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kuar-

tik B-spline fonksiyonu dışındaki diğer tüm kuartik B-spline fonksiyonları sıfır olduğundan, bu eleman üzerindeki  $U_N$  yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (1.47)$$

eşitliğine indirgenecektir.

Tablo 1.1 ve (1.47) yaklaşık çözümünün kullanılması ile  $x_m$  bölünme noktasında  $U_N$  ve ilk üç türevi

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi'_j(x) \delta_j(t) = \frac{4}{h} (\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\ U''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi''_j(x) \delta_j(t) = \frac{12}{h^2} (\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}), \\ U'''_N(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi'''_j(x) \delta_j(t) = \frac{24}{h^3} (\delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

olarak hesaplanabilir.

## 1.6 RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 2 de,

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.49)$$

formundaki lineer olmayan RLW denkleminin sayısal çözümlerini bulmaya çalışacağız. Bu denklemdeki  $\varepsilon$  ve  $\mu$  reel sabitler,  $t$  ve  $x$  indisleri ise türevleri göstermektedir. Sınır koşulları ve başlangıç şartı ise sırasıyla

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \alpha_1, & U(b, t) &= \alpha_2, \\ U_x(a, t) &= 0, & U_x(b, t) &= 0, \\ U_{xx}(a, t) &= 0, & U_{xx}(b, t) &= 0, & t &\in (0, T] \end{aligned} \quad (1.50)$$



$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.51)$$

olarak alınacaktır. Buradaki  $f(x)$  fonksiyonu test problemleri çalışılırken verilecektir.

Bu denklem lineer olmayan bir dalga denklemdir. Özellikle ilerleyen dalgaları modellemek için kullanılır. Denklem lineer olmadığından analitik çözümü bazı kısıtlı başlangıç koşulları altında vardır. Bazende elde edilen analitik çözümler kullanışlı olmayabilir. Bundan dolayıdır ki, RLW denklemini sayısal olarak, değişik başlangıç ve sınır şartları kullanılarak pek çok defa farklı yöntemlerle çözülmüştür. İlk olarak Peregrine (1966), ardışık dalgaların gelişimini modellemek için RLW denklemini önermiştir ve denklemin sonlu farklar metodu ile ilk sayısal çözümlerini elde etmiştir. Benjamin, Bona ve Mahony (1972) ise, RLW denkleminin dalga denklemini çözümlerinin daha yaygın olarak bilinen KdV denkleminin dalga denklemini çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir. Eilbeck ve McGuire (1975), birinci ve ikinci mertebeden iki adım ve ikinci mertebeden üç adım sonlu farklar metodlarını kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca 1977 yılında, üç adım sonlu farklar yöntemi üzerinde daha ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır (Eilbeck and McGuire, 1977). Padam ve Iskandar (1979), farklı formdaki sonlu farklar yöntemini kullanarak, RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Alexander ve Morris (1979), kübik spline kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü uğraşmışlardır. Gardner, Gardner (1990) ve Gardner, Dağ (1995), kübik B-spline kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Problem (1.49) - (1.51) un varlık ve teklik özellikleride Bona ve Bryant (1993) tarafından ele alınmıştır. Chang, Wang ve Guo (1995), RLW denklemini için korunumlu fark yöntemini vermişlerdir. Yöntemin yakınsaklık ve kararlılığı ispatlamışlardır. Jain, Shankar ve Singh (1993), RLW denklemini parçalayıp kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümlerini bulmuşlardır. Gardner, Gardner ve Dağ (1995), kuadratik B-spline kullanarak Galerkin metoduyla, RLW denkleminin sayısal çözümünü yapmışlardır. Gardner,

Gardner ve Doğan (1996), lineer şekil fonksiyonları kullanarak, RLW denkleminin en küçük kareler metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Gardner, Gardner, Ayoub ve Ameen (1997), kuintik B-spline kullanarak, Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini yapmışlardır. Bhardwaj ve Shankar (2000), RLW denklemini parçalayıp kuintik spline kullanarak, sonlu farklar metoduyla sayısal çözümünü, yerel kesme hatasını ve kararlılığı çalışmışlardır. Dağ (2000), kuadratik B-spline kullanarak, en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümüyle uğraşmıştır. Dağ ve Özer (2001), kübik B-spline kullanarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü yapmışlardır. Doğan (2001; 2002), kuadratik B-spline kullanarak, Petrov-Galerkin metoduyla ve lineer şekil fonksiyonları kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini çalışmıştır. RLW denkleminin yaklaşık çözümünü elde edebilmek için yapılan çalışmalar bugünde devam etmektedir ve değişik algoritmalar ile en iyi sayısal çözüm bulmak amaçlanmaktadır (Dağ, et al., 2003; Saka, et al., 2004; Avilez-Valente, et al., 2004; Raslan, 2005; Dağ, et al., 2006).

Olver (1979), RLW denkleminin

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu(U_x)^2) dx, \quad C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^3 + 3U^2) dx$$

üç korunum kuralına sahip olduğunu göstermiştir. Bu korunum kuralları ve ortalama hata normu

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{\text{tam}} - U_j^{\text{numerik}}|^2}$$

ile maksimum hata normu

$$L_{\infty} = \|U^{\text{tam}} - U^{\text{numerik}}\|_{\infty} = \max_j |U_j^{\text{tam}} - U_j^{\text{numerik}}|$$

algoritmanın doğruluğunu test etmek için kısım 2.3 de hesaplanacaktır.

(1.49) denkleminde konuma göre parçalanmanın etkisini görebilmek için, denkleminde  $V(x, t) = U_{xx}(x, t)$  dönüşümü uygulanmıştır. Bu dönüşümle; RLW denkleminin, sınır şartları ve başlangıç şartı sırasıyla

$$\begin{aligned} U_t + (1 + \varepsilon U)U_x - \mu V_t &= 0 \\ V - U_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} U(a, t) = \alpha_1, \quad V(a, t) &= 0 \\ U(b, t) = \alpha_2, \quad V(b, t) &= 0, \quad t \in (0, T] \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad V(x, 0) = f''(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.54)$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradaki  $V$  analitik çözümü içinde yaklaşık çözüm

$$V_N(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(x) \sigma_j(t) \quad (1.55)$$

formunda aranacaktır.

## 1.7 Burger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 3 de,

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0 \quad (1.56)$$

formundaki lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümlerini bulmaya çalışacağız. Bu denklemdeki  $\nu$  viskozite sabiti,  $t$  ve  $x$  indisleri ise türevleri göstermektedir. Sınır şartları ve başlangıç şartı ise sırasıyla

$$\begin{aligned} U(a, t) = \alpha_1, \quad U(b, t) &= \alpha_2, \\ U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) &= 0, \\ U_{xx}(a, t) = 0, \quad U_{xx}(b, t) &= 0, \quad t \in (0, T] \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.58)$$

olarak alınacaktır. Buradaki  $f(x)$  fonksiyonu test problemleri çalışılırken verilecek-

tir.

Burger denklemi matematiksel bir model olarak pek çok alanda karşımıza çıkar. Hopf (1950) ve Cole (1951), Burger denklemini lineer hale getirip, keyfi başlangıç ve sınır koşulları kullanarak denklemin tam çözümünü bulmuşlardır. Bu yüzden denklem, sayısal metotlar için test denklemi olarak kullanılmaktadır. Burger denklemi bir kaç analitik çözüme sahiptir. Fakat bu çözümler genelde seri çözümü olduğundan küçük viskozite sabiti için yavaş yakınsamaktadırlar ve dolayısı ile bu çözümleri kullanmak pratik olmamaktadır. Bu yüzden Burger denkleminin çözümlerini elde edebilmek için sayısal çalışmalar zorunluluk olmuştur. Sayısal metotlar ile de Burger denkleminin yaklaşık çözümleri küçük viskozite sabiti için her zaman bulunamamaktadır. Bugüne kadar pek çok çalışma denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak için önerilmiştir. Bu çalışmaların en ilgi çekenleri küçük viskozite sabiti için de çözüm bulabilenleridir. Bizde Bölüm 3 de önereceğimiz algoritma ile bunu test edeceğiz.

Jain ve Holla (1978), kübik spline kullanarak bir ve iki boyutlu Burger denkleminin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain ve Lohar (1979), bir ve iki boyutlu Burger denklemlerini ikiye parçaladıktan sonra kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümünü elde etmiştir. Fletcher (1983), bir ve iki boyutlu Burger denkleminin beş ve yedi noktalı sonlu farklar metoduyla, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonlarını kullanarak sonlu elemanlar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmış ve bulduğu sonuçları birbirleriyle kıyaslamıştır. Evans (1984), sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan aşikar grup metodunu kullanarak, Burger denklemini sayısal olarak çözmüşler ve metodun kararlılığını incelemişlerdir. Iskandar (1992), Burger denklemini ikiye parçalayarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain (1995), Burger denklemini üçe parçaladıktan sonra sonlu farklar metodunu kullanarak sayısal çözümü üzerinde çalışmışlar ve yerel kesme hatasını bularak metotlarının kararlılığını incelemişlerdir. Kutluay (1999), sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan aşikar metodu kullanarak Burger denkleminin sayısal çözümünü vermiştir. Son olarak değişik dereceden B-spline fonksiyonları kullanılarak sonlu

elemanlar metotların değişik tipleri inşa edilmiştir. Ağırlık ve interpolasyon fonksiyonu olarak ikinci dereceden spline fonksiyonlar kullanılarak Bubnov-Galerkin metodun temelinde bir çalışma yapılmıştır (Ali, et al., 1990). Sonlu elemanlar temelinde kübik ve kuintik B-spline kolokeyşin yöntemleri ile de Burger denkleminin sayısal çözümleri bulunmuştur (Ali, et al., 1992; Zaki, 2000). İkinci dereceden B-spline fonksiyonları kullanılarak en küçük kareler metodu ile de Burger denkleminin sayısal çözümleri bulunmuştur (Kutluay, et al., 2004). Hem kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile hemde kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonları deneme ve ağırlık fonksiyonları olarak kullanılarak Galerkin yöntemi ile Burger denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir (Dağ, et al., 2005; Dağ, et al., 2005).

RLW denkleminde olduğu gibi (1.56) denkleminde de konuma göre parçalanmanın etkisini görebilmek için, denklemde  $V(x, t) = U_{xx}(x, t)$  dönüşümü uygulanmıştır. Bu dönüşümle; Burger denklemini, sınır şartları ve başlangıç şartı sırasıyla

$$\begin{aligned} U_t + UU_x - \nu V &= 0 \\ V - U_{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \alpha_1, \quad V(a, t) = 0 \\ U(b, t) &= \alpha_2, \quad V(b, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{aligned} \tag{1.60}$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad V(x, 0) = f''(x), \quad a \leq x \leq b \tag{1.61}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Bölüm 3 de verilecek algoritmanın doğruluğunu ve güvenilirliğini görebilmek için, sayısal ve analitik sonuçlar arasındaki hatalar ölçülecektir. Bunun için

$$L_2 = |U - U_N|^2 = h \sum_{j=0}^N |(U_j - (U_N)_j^n)|^2, \quad L_\infty = |U - U_N|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j^n|$$

hata normları kullanılacaktır.

## 1.8 Schrödinger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

Bölüm 4 de,

$$iU_t + U_{xx} + q|U|^2 U = 0 \quad (1.62)$$

formundaki Schrödinger denkleminin sayısal çözümlerini bulamaya çalışacağız. Bu denklemde  $x$  ve  $t$  indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre kısmi türevleri göstermekte olup,  $i = \sqrt{-1}$  ve  $q$  reel bir parametredir. Burada  $U$  kompleks değerli bir fonksiyondur.

NLS denklemi, plazmalardaki dalgaları, su dalgalarını, görsel titreşimlerin yayılması gibi pek çok fiziksel olayı tanımlar. Bu denklem, yeterince büyük  $x$  ler için türevleri göz ardı edilen bir  $U(x, t_0)$  başlangıç koşulu kullanılarak ters saçılma metodu ile analitik olarak çözülmüştür (Karpman et al., 1969; Zakharov et al., 1972; Scott et al., 1973). Bu metot, sadece kompakt destekli başlangıç verileri için uygulanabilir olduğundan, NLS denkleminin analitik çözümü genel başlangıç şartları için bilinmemektedir.  $\tanh$  fonksiyon, Adomian ayrıştırma ve değişken iterasyon gibi metotlar ile NLS denkleminin yaklaşık-analitik çözümleri verilmiştir (Khuri, 2004; El-Sayed et al., 2006; Wazwaz, 2008). Bu yüzden, NLS denklemini çözmek için değişik sayısal metotlar uygulanmıştır. Bu amaçla, değişik dereceden spline fonksiyonlar, etkili ve doğru sayısal yöntemler geliştirerek NLS denkleminin çözümlerini bulmak için de kullanılmıştır (Gardner et al., 1993; Robinson, 1997; Dağ, 1999; Sheng et al., 2001).

Bölüm 4 de, (1.62) formundaki Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} U(a, t) &= 0, & U(b, t) &= 0, \\ U_x(a, t) &= 0, & U_x(b, t) &= 0, \\ U_{xx}(a, t) &= 0, & U_{xx}(b, t) &= 0, & t \in (0, T] \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.64)$$

sınır ve başlangıç şartları kullanılacaktır. Buradaki  $f(x)$  fonksiyonu test problemlerine bağlı olarak daha sonra verilecektir.

$r(x, t)$  ve  $s(x, t)$  reel değerli fonksiyonlar olmak üzere  $U$  çözümü

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) \quad (1.65)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlara ayrıştırılıp, (1.62) denkleminde yerine yazıldığında

$$s_t - r_{xx} - q(r^2 + s^2)r = 0, \quad (1.66)$$

$$r_t + s_{xx} + q(r^2 + s^2)s = 0. \quad (1.67)$$

formunda reel diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

Schrödinger denklemi için korunum kanunları

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( |U_x|^2 - \frac{1}{2}q|U|^4 \right) dx \quad (1.68)$$

formundadır. Sayısal metodun doğruluğu, verilen bölünme noktalarındaki analitik ve sayısal değerlerin hesaplanmasının ardından  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları ile korunum kanunları yardımıyla incelenecektir.  $r(x, t)$  ve  $s(x, t)$  için yaklaşık çözümler, kuartik B-spline fonksiyonlar  $\phi_m(x)$  ve zamana bağlı  $\delta_m$ ,  $\sigma_m$  parametrelerine bağlı olarak

$$s_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t)\phi_m(x), \quad r_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \sigma_m(t)\phi_m(x), \quad (1.69)$$

formunda aranacaktır. Buradaki  $s_N(x, t)$ ,  $r_N(x, t)$  değişkenlerinin bölünme noktalarındaki  $r_m$ ,  $s_m$  değerleri ve türevleri  $r'_m$ ,  $s'_m$ ,  $r''_m$ ,  $s''_m$

$$\begin{aligned}
s_m &= s(x_m) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\
s'_m &= s'(x_m) = \frac{4}{h} (\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\
s''_m &= s''(x_m) = \frac{12}{h^2} (\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}),
\end{aligned} \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned}
r_m &= r(x_m) = \sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1}, \\
r'_m &= r'(x_m) = \frac{4}{h} (\sigma_{m+1} + 3\sigma_m - 3\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2}), \\
r''_m &= r''(x_m) = \frac{12}{h^2} (\sigma_{m+1} - \sigma_m - \sigma_{m-1} + \sigma_{m-2})
\end{aligned}$$

dir.



## BÖLÜM 2

### RLW DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, konuma göre parçalanmış RLW denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline kolokeyşin metodu verilmiştir. Metot açıklandıktan sonra, önerilen bu metodun doğruluğu üç problem üzerinde test edilmiştir. Bunun için hata normları, korunum sabitleri ve grafikler kullanılmıştır.

#### 2.1 RLW Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu

◦ zamana bağlı türev ve  $z_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}$  olmak üzere,  $U_N$ ,  $V_N$  nin bölüm noktalarındaki (1.48) değerleri, (1.52) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \overset{\circ}{\delta}_{m-2} + 11\overset{\circ}{\delta}_{m-1} + 11\overset{\circ}{\delta}_m + \overset{\circ}{\delta}_{m+1} + \frac{4d}{h} (\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ & - \mu \left( \overset{\circ}{\sigma}_{m-2} + 11\overset{\circ}{\sigma}_{m-1} + 11\overset{\circ}{\sigma}_m + \overset{\circ}{\sigma}_{m+1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1} - \frac{12}{h^2} (\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) = 0$$

birinci mertebeden  $2N + 2$  diferensiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir.

Burada  $d = 1 + \varepsilon z_m$  dir.  $\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametreleri ve bunların zamana göre türevleri Crank-Nicolson formülü yardımıyla

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2} \quad (2.2)$$

ve

$$\overset{\circ}{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_m = \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir. Bu ifadeler (2.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n + 11\delta_{m-1}^{n+1} - 11\delta_{m-1}^n + 11\delta_m^{n+1} - 11\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) \\
& + \frac{2d}{h} (\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n + 3\delta_m^{n+1} + 3\delta_m^n - 3\delta_{m-1}^{n+1} - 3\delta_{m-1}^n - \delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) \\
& - \frac{\mu}{\Delta t} (\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} - 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} - 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n) = 0, \\
& \frac{1}{2} (\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} + 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} + 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) \\
& - \frac{6}{h^2} (\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - \delta_m^{n+1} - \delta_m^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) = 0
\end{aligned}$$

sistemi bulunur. Bu sistem  $m = 0, \dots, N$  için,

$$\begin{aligned}
& \beta_1 \delta_{m-2}^{n+1} - h\mu \sigma_{m-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{m-1}^{n+1} - 11h\mu \sigma_{m-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_m^{n+1} - 11h\mu \sigma_m^{n+1} + \beta_4 \delta_{m+1}^{n+1} - h\mu \sigma_{m+1}^{n+1} = \\
& \beta_4 \delta_{m-2}^n - h\mu \sigma_{m-2}^n + \beta_3 \delta_{m-1}^n - 11h\mu \sigma_{m-1}^n + \beta_2 \delta_m^n - 11h\mu \sigma_m^n + \beta_1 \delta_{m+1}^n - h\mu \sigma_{m+1}^n, \\
& -12\delta_{m-2}^{n+1} + h^2 \sigma_{m-2}^{n+1} + 12\delta_{m-1}^{n+1} + 11h^2 \sigma_{m-1}^{n+1} + 12\delta_m^{n+1} + 11h^2 \sigma_m^{n+1} - 12\delta_{m+1}^{n+1} + h^2 \sigma_{m+1}^{n+1} = \\
& 12\delta_{m-2}^n - h^2 \sigma_{m-2}^n - 12\delta_{m-1}^n - 11h^2 \sigma_{m-1}^n - 12\delta_m^n - 11h^2 \sigma_m^n + 12\delta_{m+1}^n - h^2 \sigma_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak yeniden düzenlenirse,  $2N + 8$  bilinmeyenli  $2N + 2$  cebirsel denklemden oluşan

bir sistem bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= h - 2d\Delta t, & \beta_2 &= 11h - 6d\Delta t, \\
\beta_3 &= 11h + 6d\Delta t, & \beta_4 &= h + 2d\Delta t
\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sistemindeki  $\delta_{-2}, \sigma_{-2}, \delta_{-1}, \sigma_{-1}, \delta_{N+1}, \sigma_{N+1}$  eleman parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  boyutlu 8 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(1.53) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1 &= \alpha_1, \\
\sigma_{-2} + 11\sigma_{-1} + 11\sigma_0 + \sigma_1 &= 0, \\
\delta_1 + 3\delta_0 - 3\delta_{-1} - \delta_{-2} &= 0, \\
\sigma_1 + 3\sigma_0 - 3\sigma_{-1} - \sigma_{-2} &= 0, \\
\delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1} &= \alpha_2, \\
\sigma_{N-2} + 11\sigma_{N-1} + 11\sigma_N + \sigma_{N+1} &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{33}{4}\delta_0 + \frac{7}{4}\delta_1 - \frac{3}{8}\alpha_1, \\
\sigma_{-2} &= \frac{33}{4}\sigma_0 + \frac{7}{4}\sigma_1, \\
\delta_{-1} &= -\frac{7}{4}\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{8}\alpha_1, \\
\sigma_{-1} &= -\frac{7}{4}\sigma_0 - \frac{1}{4}\sigma_1, \\
\delta_{N+1} &= \alpha_2 - \delta_{N-2} - 11\delta_{N-1} - 11\delta_N, \\
\sigma_{N+1} &= -\sigma_{N-2} - 11\sigma_{N-1} - 11\sigma_N
\end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \beta_4\delta_{-2}^n - h\mu\sigma_{-2}^n + \beta_3\delta_{-1}^n - 11h\mu\sigma_{-1}^n + \beta_2\delta_0^n - 11h\mu\sigma_0^n + \beta_1\delta_1^n - h\mu\sigma_1^n, \\
F_2 &= 12\delta_{-2}^n - h^2\sigma_{-2}^n - 12\delta_{-1}^n - 11h^2\sigma_{-1}^n - 12\delta_0^n - 11h^2\sigma_0^n + 12\delta_1^n - h^2\sigma_1^n, \\
F_3 &= \beta_4\delta_{-1}^n - h\mu\sigma_{-1}^n + \beta_3\delta_0^n - 11h\mu\sigma_0^n + \beta_2\delta_1^n - 11h\mu\sigma_1^n + \beta_1\delta_2^n - h\mu\sigma_2^n, \\
F_4 &= 12\delta_{-1}^n - h^2\sigma_{-1}^n - 12\delta_0^n - 11h^2\sigma_0^n - 12\delta_1^n - 11h^2\sigma_1^n + 12\delta_2^n - h^2\sigma_2^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2N+1} &= \beta_4 \delta_{N-2}^n - h\mu \sigma_{N-2}^n + \beta_3 \delta_{N-1}^n - 11h\mu \sigma_{N-1}^n + \beta_2 \delta_N^n - 11h\mu \sigma_N^n + \beta_1 \delta_{N+1}^n - \\
&\quad h\mu \sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N+2} &= 12\delta_{N-2}^n - h^2 \sigma_{N-2}^n - 12\delta_{N-1}^n - 11h^2 \sigma_{N-1}^n - 12\delta_N^n - 11h^2 \sigma_N^n + 12\delta_{N+1}^n - \\
&\quad h^2 \sigma_{N+1}^n
\end{aligned}$$

olmak üzere, (2.4) denklem sisteminden,  $m = 0$  için,

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \delta_{-2}^{n+1} - h\mu \sigma_{-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{-1}^{n+1} - 11h\mu \sigma_{-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_0^{n+1} - 11h\mu \sigma_0^{n+1} + \beta_4 \delta_1^{n+1} - \\
&h\mu \sigma_1^{n+1} = F_1 \\
&-12\delta_{-2}^{n+1} + h^2 \sigma_{-2}^{n+1} + 12\delta_{-1}^{n+1} + 11h^2 \sigma_{-1}^{n+1} + 12\delta_0^{n+1} + 11h^2 \sigma_0^{n+1} - 12\delta_1^{n+1} + \\
&h^2 \sigma_1^{n+1} = F_2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$m = 1$  için,

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \delta_{-1}^{n+1} - h\mu \sigma_{-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_0^{n+1} - 11h\mu \sigma_0^{n+1} + \beta_3 \delta_1^{n+1} - 11h\mu \sigma_1^{n+1} + \beta_4 \delta_2^{n+1} - \\
&h\mu \sigma_2^{n+1} = F_3 \\
&-12\delta_{-1}^{n+1} + h^2 \sigma_{-1}^{n+1} + 12\delta_0^{n+1} + 11h^2 \sigma_0^{n+1} + 12\delta_1^{n+1} + 11h^2 \sigma_1^{n+1} - 12\delta_2^{n+1} + \\
&h^2 \sigma_2^{n+1} = F_4
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ve  $m = N$  için,

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \delta_{N-2}^{n+1} - h\mu \sigma_{N-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{N-1}^{n+1} - 11h\mu \sigma_{N-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_N^{n+1} - 11h\mu \sigma_N^{n+1} + \beta_4 \delta_{N+1}^{n+1} - \\
&h\mu \sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+1} \\
&-12\delta_{N-2}^{n+1} + h^2 \sigma_{N-2}^{n+1} + 12\delta_{N-1}^{n+1} + 11h^2 \sigma_{N-1}^{n+1} + 12\delta_N^{n+1} + 11h^2 \sigma_N^{n+1} - 12\delta_{N+1}^{n+1} + \\
&h^2 \sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

yazılır. (2.6) eleman parametreleri (2.7-2.9) denklemlerinde yerlerine yazılıp, denklemler düzenlenirse ilk dört denklem,



olmak üzere,  $(a = \frac{33}{4}\beta_1 - \frac{7}{4}\beta_2 + \beta_3, b = \frac{7}{4}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 + \beta_4, c = -\frac{7}{4}\beta_1 + \beta_2, d = -\frac{1}{4}\beta_1 + \beta_3, e = \beta_1 - \beta_4, f = \beta_2 - 11\beta_4, g = \beta_3 - 11\beta_4)$ ,

$$Ad_{n+1} = F \quad (2.10)$$

matris formunda bulunmuş olur. Burada

$$B = \begin{bmatrix} \beta_4 & -h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_1 & -h\mu & & & \\ 12 & -h^2 & -12 & -11h^2 & -12 & -11h^2 & 12 & -h^2 & 0 & & \\ & 0 & \beta_4 & -h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_1 & -h\mu & \\ & & 12 & -h^2 & -12 & -11h^2 & -12 & -11h^2 & 12 & -h^2 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \beta_4 & -h\mu & \beta_3 & -11h\mu & \beta_2 & -11h\mu & \beta_1 & -h\mu \\ & & & & 12 & -h^2 & -12 & -11h^2 & -12 & -11h^2 & 12 & -h^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$d_n = [\delta_{-2}^n, \sigma_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \sigma_{-1}^n, \delta_0^n, \sigma_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \sigma_{N+1}^n]^T$$

dir.  $\delta_{-2}, \sigma_{-2}, \delta_{-1}, \sigma_{-1}, \delta_{N+1}$  ve  $\sigma_{N+1}$  sınır parametreleri her zaman adımında (2.6)

denklemlerinden hesaplanabilir.

## 2.2 Başlangıç Durumu

$\delta_m^n$  ve  $\sigma_m^n$  parametrelerini, (2.10) denklem sisteminden elde edebilmek için  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için  $U(x, 0)$  ve  $V(x, 0)$  başlangıç koşullarından  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Başlangıç koşulu için (1.48) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
U_N(x, 0) &= \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m^0 \phi_m(x) \\
V_N(x, 0) &= \sum_{m=-2}^{N+1} \sigma_m^0 \phi_m(x)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

yazılabilir. Bu sistemdeki  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  belirlenecek parametrelerdir. Başlangıç koşullarının bölünme noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) = f(x_m), \quad V_N(x_m, 0) = V(x_m, 0) = f''(x_m), \quad m = 0, \dots, N$$

değerleri kullanılarak,  $\delta$  parametresi için,

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1, \\
U(x_1, 0) &= \delta_{-1} + 11\delta_0 + 11\delta_1 + \delta_2, \\
U(x_2, 0) &= \delta_0 + 11\delta_1 + 11\delta_2 + \delta_3, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
U(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-3} + 11\delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + \delta_N, \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

ve aynı şekilde  $\sigma$  parametresi içinde,

$$\begin{aligned}
V(x_0, 0) &= \sigma_{-2} + 11\sigma_{-1} + 11\sigma_0 + \sigma_1, \\
V(x_1, 0) &= \sigma_{-1} + 11\sigma_0 + 11\sigma_1 + \sigma_2, \\
V(x_2, 0) &= \sigma_0 + 11\sigma_1 + 11\sigma_2 + \sigma_3, \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
V(x_{N-1}, 0) &= \sigma_{N-3} + 11\sigma_{N-2} + 11\sigma_{N-1} + \sigma_{N-2}, \\
V(x_N, 0) &= \sigma_{N-2} + 11\sigma_{N-1} + 11\sigma_N + \sigma_{N+1}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$N + 4$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan sistemler elde edilir. Bu denklem sistemlerinde

$$\begin{aligned}
U'_N(a, 0) = U''_N(a, 0) = V'_N(a, 0) = V''_N(a, 0) &= 0, \\
U'_N(b, 0) = V'_N(b, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

türevli sınır koşulları kullanılır ve  $\delta_{-2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+1}$  parametreleri yok edilirse,  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerinin

çözümü Thomas algoritmaları (Rosenberg, 1969) ile kolayca elde edilebilir. (2.14)

sınır koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{4}{h} (\delta_1 + 3\delta_0 - 3\delta_{-1} - \delta_{-2}) &= 0 \\
\frac{4}{h} (\sigma_1 + 3\sigma_0 - 3\sigma_{-1} - \sigma_{-2}) &= 0 \\
\frac{12}{h^2} (\delta_1 - \delta_0 - \delta_{-1} + \delta_{-2}) &= 0 \\
\frac{12}{h^2} (\sigma_1 - \sigma_0 - \sigma_{-1} + \sigma_{-2}) &= 0 \\
\frac{4}{h} (\delta_{N+1} + 3\delta_N - 3\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) &= 0 \\
\frac{4}{h} (\sigma_{N+1} + 3\sigma_N - 3\sigma_{N-1} - \sigma_{N-2}) &= 0
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan elde edilen

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= 3/2\delta_0 - 1/2\delta_1, & \sigma_{-2} &= 3/2\sigma_0 - 1/2\sigma_1, \\
\delta_{-1} &= 1/2\delta_0 + 1/2\delta_1, & \sigma_{-1} &= 1/2\sigma_0 + 1/2\sigma_1, \\
\delta_{N+1} &= \delta_{N-2} + 3\delta_{N-1} - 3\delta_N, & \sigma_{N+1} &= \sigma_{N-2} + 3\sigma_{N-1} - 3\sigma_N
\end{aligned}$$

(2.12) ve (2.13) denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 6 & & & & \\ 11.5 & 11.5 & 1 & & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 11 & 11 & 1 \\ & & & 2 & 14 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$b = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{N-1}), U(x_N)]^T,$$

$$\sigma^0 = [\sigma_0^0, \sigma_1^0, \dots, \sigma_N^0]^T,$$



$$c = [U''(x_0), U''(x_1), \dots, U''(x_{N-1}), U''(x_N)]^T$$

olmak üzere, her iki eleman parametresi için matris formunda

$$A\delta^0 = b \quad \text{ve} \quad A\sigma^0 = c$$

denklemler elde edilir. Dolayısıyla her iki eleman parametresi içinde ayrı ayrı  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde 4 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur.

## 2.3 Test Problemleri

RLW denkleminin sayısal çözümünü elde edebilmek için kısım 2.1 de verilen kuartik B-spline kolokeyşin yöntemi sayısal problemler kullanılarak bu kısımda test edilecektir. Bu yöntem ile elde edilen sayısal sonuçlar, tek dalga analitik çözümünün sonuçları ile karşılaştırılacaktır. Ayrıca iki dalganın çarpışması ve ardışık dalgaların gelişimi test problemlerinde bu kısımda çalışılacaktır.

### 2.3.1 Tek Dalga Çözümü

(1.49) denkleminin tek dalga çözümü

$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x - x_0 - vt)) \quad (2.15)$$

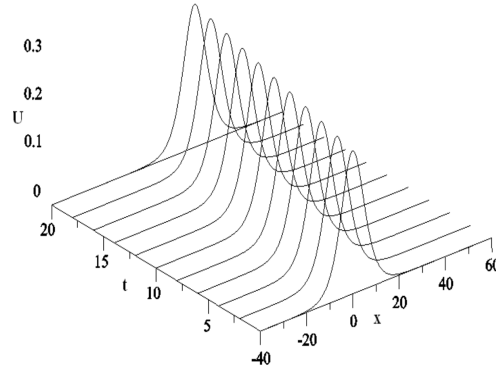
dir. Bu tek dalga çözümünde  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $k = \frac{1}{2}(\varepsilon c / \mu(1 + \varepsilon c))^{1/2}$  parametre değerleri ve  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  sınır koşulları kullanılmıştır. Bu parametrelere göre  $-40 \leq x \leq 60$  aralığı içinde sola yerleştirilen  $3c$  genlikli tek dalganın  $v = 1 + \varepsilon c$  hızla sağa doğru hareketi  $0 \leq t \leq 20$  zaman aralığında gözlenecektir.

(2.15) tek dalga çözümünde  $t = 0$  kullanılarak elde edilen

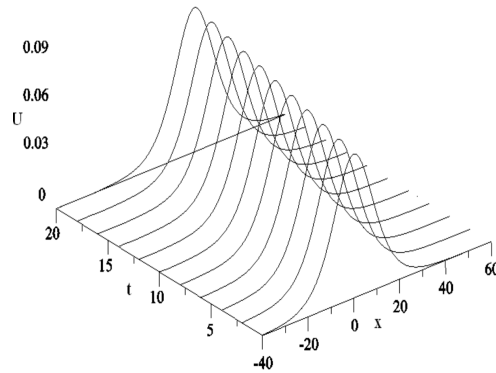
$$U(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x - x_0)) \quad (2.16)$$

başlangıç koşulu olarak kullanıldı.

Hesaplama konum artımı  $h = 0.125$  ve zaman artımı  $\Delta t = 0.1$  kullanılmıştır. Program  $t = 20$  zamanına kadar çalıştırıldı. Sayısal çözümler değişik zamanlarda grafiksel olarak  $c = 0.1$  ve  $c = 0.03$  için sırasıyla Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de verilmiştir.



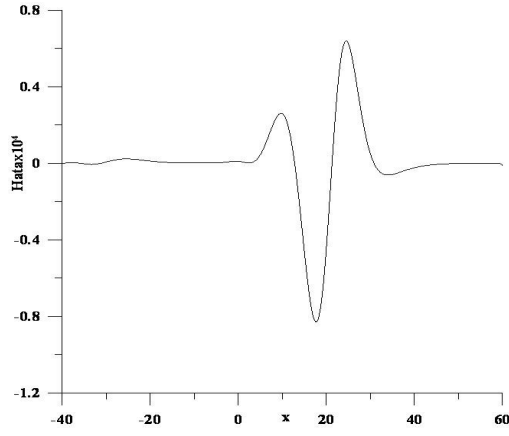
Şekil 2.1: Tek dalga çözümü



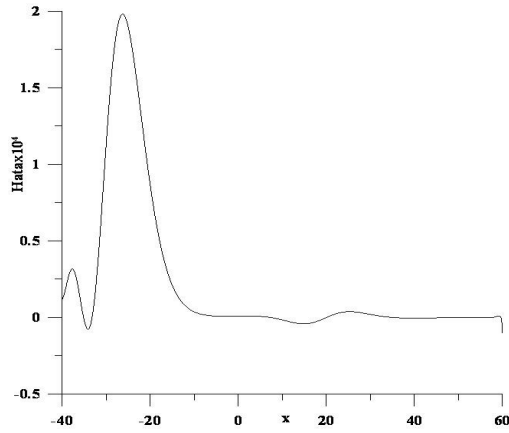
Şekil 2.2: Tek dalga çözümü

Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 de de 0.3 ve 0.09 genlikleri için  $t = 20$  zamanındaki analitik ve sayısal çözümler arasındaki hatalar grafiksel olarak çizilmiştir. Genlik 0.3 olduğu zaman, maksimum hatanın dalganın tepe noktasının  $x$  konumu etrafında olduğu gözlenmiştir. Daha küçük dalga boyu için maksimum hatanın ise, sol taraftaki sınır boyunca olduğu gözükmektedir. Bazı zamanlar için  $L_\infty$ ,  $L_2$  hataları ve korunum sabitleri Tablo 2.1 ve Tablo 2.2 de verilmiştir. Tabloları incelediğimizde 0.3 genlik için bulduğumuz  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının 0.09 genlikli  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarından daha küçük olduğunu görürüz. Ayrıca bu tablolarda, ikinci ve üçüncü sütunları karşılaştırdığımızda  $L_\infty$  hatasının  $L_2$  hatasından daha küçük olduğunu görürüz. Programın çalışması boyunca 0.3 genlik için korunum sabitleri  $C_2$  ve  $C_3$

ün hiç değişmediğini,  $C_1$  in ise 3 basamakta korunduğunu görebiliriz. Genlik 0.09 için ise korunum sabitlerinde biraz değişme gözlenmiştir.



Şekil 2.3: Genlik 0.3 için hata



Şekil 2.4: Genlik 0.09 için hata

Tablo 2.1: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri genlik= 0.3, $\Delta t = 0.1$ , $h = 0.125$ , $-40 \leq x \leq 60$					
Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0.0	0.0	3.9799271	0.8104625	2.5790075
4	0.45823	0.17885	3.9799300	0.8104625	2.5790075
8	0.90421	0.36016	3.9799284	0.8104625	2.5790075
12	1.33667	0.53032	3.9799261	0.8104625	2.5790075
16	1.75247	0.68650	3.9799185	0.8104625	2.5790075
20	2.15062	0.82941	3.9798883	0.8104625	2.5790075

Tablo 2.2: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri genlik= 0.09, $\Delta t = 0.1$ , $h = 0.125$ , $-40 \leq x \leq 60$					
Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0.0	0.0	2.1070719	0.1273013	0.3888047
4	4.12368	2.29978	2.1071013	0.1273011	0.3888041
8	5.10956	2.21060	2.1069070	0.1273011	0.3888040
12	5.34117	2.12527	2.1065748	0.1273011	0.3888040
16	5.37013	2.04783	2.1059766	0.1273010	0.3888037
20	5.38449	1.98059	2.1047053	0.1273006	0.3888025

Değişik zaman ve konum artımları alarak iki farklı genlik 0.3 ve 0.09 için  $t = 20$  zamanındaki hata ve korunum sabitleri ile ilgili bir karşılaştırma yaptık. Hesaplamaları Tablo 2.3 ve Tablo 2.4 de verdik. 0.09 genliğini kullandığımızda,  $L_\infty$  ve  $L_2$

hata normları için farklı konum ve zaman artımlarıyla tüm çalışma boyunca hemen hemen aynı hatayı elde ettik. 0.3 genlik için ise, bu özelliğin geçerli olmadığı, özelliklede büyük zaman artımı 0.5 kullanıldığında hataların çok arttığı görülmektedir.

Tablo 2.3: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri						
genlik= 0.3, $-40 \leq x \leq 60$						
$h$	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0.5	0.1	3.9798909	0.8104626	2.5790077	2.10325	0.80413
0.2	0.1	3.9798888	0.8104625	2.5790075	2.14960	0.82868
0.1	0.1	3.9798881	0.8104625	2.5790075	2.15073	0.82942
0.125	0.1	3.9798883	0.8104625	2.5790075	2.15062	0.82941
0.125	0.2	3.9798886	0.8104625	2.5790074	8.59015	3.31364
0.125	0.5	3.9798891	0.8104625	2.5790024	53.26687	20.52178

Tablo 2.4: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri						
genlik= 0.09, $-40 \leq x \leq 60$						
$h$	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.5	0.1	2.1047870	0.1273006	0.3888026	5.38503	1.97746
0.2	0.1	2.1047219	0.1273006	0.3888025	5.38460	1.98054
0.1	0.1	2.1046997	0.1273006	0.3888025	5.38444	1.98053
0.125	0.1	2.1047053	0.1273006	0.3888025	5.38449	1.98059
0.125	0.2	2.1047243	0.1273006	0.3888025	5.36585	1.96346
0.125	0.5	2.1012472	0.1272980	0.3887949	6.79154	1.84133

Tablo 2.5 ve Tablo 2.6 yı kullanarak sayısal hızlarında inceleyebiliriz. 0.3 genlikli dalga için analitik dalga hızı  $v = 1 + \varepsilon c = 1 + 1 \times 0.1 = 1.1$  dir. Sayısal hız,  $v = \text{konum/zaman} = 22/20 = 1.1$  analitik hızla aynı hesaplanmıştır. 0.09 genlikli dalga için analitik dalga hızı ise,  $v = 1 + \varepsilon c = 1 + 1 \times 0.03 = 1.03$  dür. Farklı konum ve zaman artımları için yükseklik, dalga konumu ve sayısal dalga hızları tablolarda verilmiştir. 0.09 genlik için dalga konumlarında küçük faz farkı ve dalga sayısal hızlarında farklılıklar oluşmuştur.

Tablo 2.5: Genlik= 0.3,  $-40 \leq x \leq 60$

$h$	$\Delta t$	Yükseklik	Konum	Sayısal hız
0.5	0.1	0.299978	22.000	1.1
0.2	0.1	0.299977	22.000	1.1
0.1	0.1	0.299977	22.000	1.1
0.125	0.1	0.299977	22.000	1.1
0.125	0.2	0.299907	22.000	1.1
0.125	0.5	0.299407	22.000	1.1

Tablo 2.6: Genlik= 0.09,  $-40 \leq x \leq 60$

$h$	$\Delta t$	Yükseklik	Konum	Sayısal hız
0.5	0.1	0.089993	20.500	1.025
0.2	0.1	0.089999	20.600	1.03
0.1	0.1	0.089999	20.600	1.03
0.125	0.1	0.089999	20.625	1.03125
0.125	0.2	0.089997	20.625	1.03125
0.125	0.5	0.089979	25.750	1.2875

Önerilen sayısal metodu kullanarak, konuma göre parçalanmış RLW denkleminin sayısal çözümlerini küçük hatalar ile elde ettik. Korunum sabitleri  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  bilgisayar çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldı. Sonuç olarak tek dalganın yayılımının önerilen bu metodla çok güzel bir şekilde temsil edildiğini söyleyebiliriz.

### 2.3.2 İki Pozitif Dalganın Çarpışması

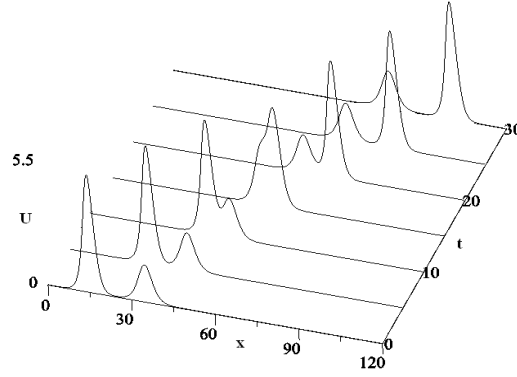
Bu kısımda,

$$U(x, 0) = U_1 + U_2$$

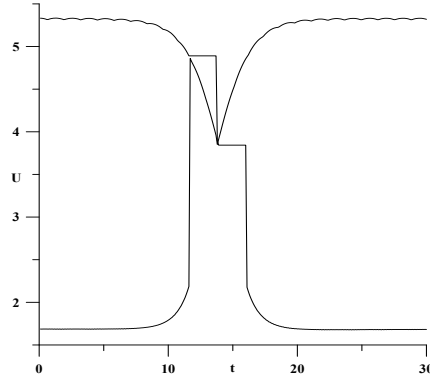
$$U_j = 3A_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - \tilde{x}_j)), \quad A_j = \frac{4k_j^2}{1 - 4k_j^2}, \quad j = 1, 2 \quad (2.17)$$

başlangıç koşulunu ve  $U(0, t) = U(120, t) = 0$ ,  $U_x(0, t) = U_x(120, t) = 0$  sınır koşullarını kullanarak, iki pozitif tek dalganın çarpışmasını çalıştık. Parametre değerleri olarak  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $k_1 = 0.4$ ,  $\tilde{x}_1 = 15$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $\tilde{x}_2 = 35$ ,  $A_1 = 4k_1^2/(1 - 4k_1^2) = 1.77778$ ,  $A_2 = 4k_2^2/(1 - 4k_2^2) = 0.5625$  seçtik. Bu parametreler (2.17) de yerlerine yazıldığında tek dalgaların boyları 5.33334 ve 1.6875 olarak bulunmuştur. Bu tek dalgaların tepeleri  $x = 15$  ve 35 konumundadır. Hesaplamayı zaman artımı  $\Delta t = 0.1$  ve konum artımı  $h = 0.3$  alarak,  $0 \leq x \leq 120$  bölgesi üzerinde uyguladık. Başlangıçta fonksiyon, Şekil 2.5 deki gibi bölgenin solundadır. Ayrıca şekilden de görüldüğü gibi daha büyük dalga daha küçük dalganın soluna yerleşmiştir. Her iki dalganın boylarına bağlı hızla sağa doğru hareket ettiği gözlenmiştir. Buna göre  $t = 15$  zamanında iki dalganın girişiminde, küçük dalganın büyük dalga tarafından içerildiği gözlenmiştir. Zaman ilerledikçe, Şekil 2.5 den söyleyebiliriz ki, daha büyük tek dalga daha küçük tek dalgadan ayrılmaktadır. Şekil 2.6 da ise her iki dalganın zamana karşı büyüklükleri gösterildi. Şekle bakıldığında, daha büyük dalganın  $t = 10$  civarında daha küçük dalgayı yakaladığı görülür. Daha sonra bu iki tek dalga  $t = 20$  zamanına kadar üst üste bindiler. Son olarak iki tek dalganın girişimden çıkarak eski şekillerine ve genliklerine yeniden ulaştığı görülmüştür.  $t = 30$  zamanında küçük dalganın maksimum noktası  $x = 78$  konumunda ve yüksekliği 1.6821, büyük dalganın maksimum noktası  $x = 100.8$  konumunda ve yüksekliği 5.32339 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak genliklerdeki fark küçük dalga için  $5.4 \times 10^{-3}$ , büyük

dalga için  $9.95 \times 10^{-3}$  dir. Böylece algoritmanın iki pozitif dalganın çarpışmasını iyi bir şekilde modellediği söylenebilir



Şekil 2.5: İki tek dalganın çarpışması



Şekil 2.6: Zaman-Genlik grafiği

Korunum sabitleri  $C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_3$  ün değerleri seçilmiş farklı zamanlar için Tablo 2.7 de verilmiştir. Korunum sabitlerinin de önerilen metot ile güvenilir bir şekilde elde edildiği söylenebilir.



Tablo 2.7: İki tek dalğanın çarpışması

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	37.91652	120.52337	744.08136
5	37.91692	120.52442	744.08017
10	37.91729	120.52534	744.93718
15	37.91763	120.52606	744.56282
20	37.91771	120.52557	744.05931
25	37.91798	120.52614	744.09799
30	37.91827	120.52681	744.10466

### 2.3.3 Ardışık Dalgaların Gelişimi

Bu kısımda, başlangıç koşulu

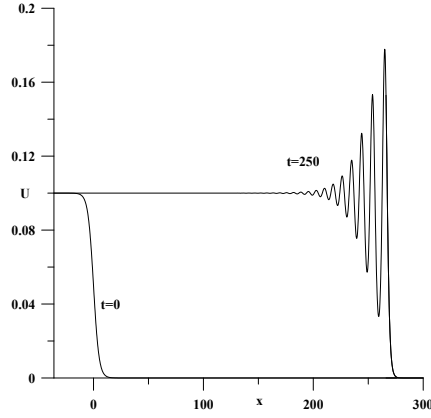
$$U(x, 0) = \frac{U_0}{2} [1 - \tanh(\frac{x - x_c}{d})] \quad (2.18)$$

ve sınır koşulları

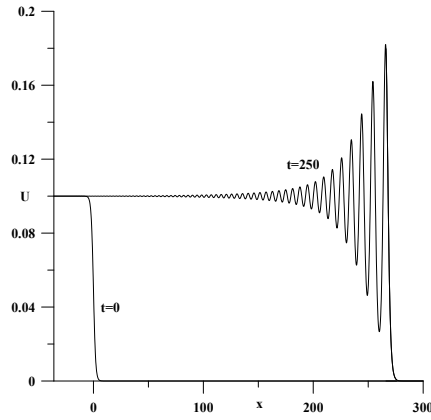
$$U(a, t) = U_0, \quad V(a, t) = 0 \quad \text{ve} \quad U(b, t) = V(b, t) = 0 \quad (2.19)$$

kullanarak ardışık dalgaların gelişimini çalışacağız. Buradaki  $U(x, 0)$ ,  $t = 0$  zamanındaki durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yükseltisini gösterir.  $d$  ise, durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. Su seviyesindeki yükseklik değişimi  $U(x, 0)$ ,  $x = x_c$  noktasına yerleştirilmiştir. Böylece durgun su bölgenin sağında yer alır ve  $U = 0$  yüzeyinden  $U_0$  ilave yükseltisinde suyun sahip olduğu akış soldan durgun suyun içine doğru hareket eder. Sayısal metodu uygulayabilmek için fiziksel sınır koşulları  $x \rightarrow \infty$  için  $U \rightarrow 0$  ve  $x \rightarrow -\infty$  için  $U \rightarrow U_0$  yapay sınır koşulları (2.19) ile yer değiştirildi. Parametrelerin değerleri olarak  $\varepsilon = 1.5$ ,  $\mu = 0.16666667$ ,  $U_0 = 0.1$ ,  $x_c = 0$ ,  $a = -36$ ,  $b = 300$ ,  $h = 0.24$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $d = 2, 5$  alınmıştır. Programı  $t = 250$  zamanına kadar çalıştırdık.  $d = 5$  için  $t = 0$  ve  $t = 250$  zamanlarındaki

ardışık dalgaların profillerini Şekil 2.7 de,  $d = 2$  içinde  $t = 0$  ve  $t = 250$  zamanlarında ardışık dalgaların profillerinide Şekil 2.8 de gösterdik. Yüksek eğim başlangıç koşulunda kullanıldığında, şekilde biraz daha fazla ardışık dalgalar görüldü. Bilindiği gibi, ardışık dalgaların sayısının artması başlangıç fonksiyonunun formunun etkisinden dolayıdır. Yüksek ve düşük eğim için en öndeki dalgaların büyüklükleri çalışmalarıyla birlikte birbirine daha çok yaklaşmıştır.



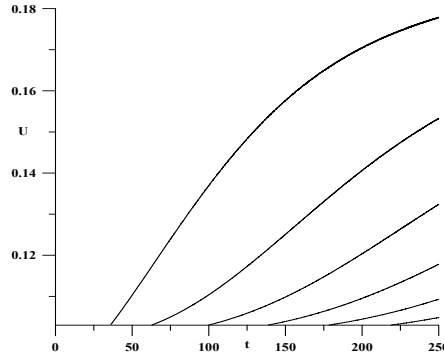
Şekil 2.7: Ardışık dalgaların profilleri,  $d = 5$



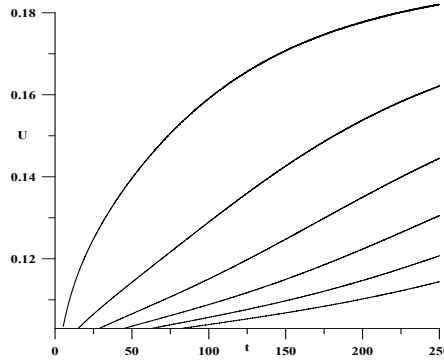
Şekil 2.8: Ardışık dalgaların profilleri,  $d = 2$

$d = 5$  ve  $d = 2$  için ilk altı dalganın büyüklüklerinin zamana karşı gelişimi Şekil

2.9 ve Şekil 2.10 da verilmiştir. Bu grafiklere bakılarak yüksek eğim başlangıç koşullarında kullanıldığında ardışık dalgaların gelişimlerinin daha hızlı olduğu söylenebilir. Zaman ilerledikçe eğim farketmeksizin bu ardışık dalgaların hemen hemen aynı maksimum yüksekliğe sahip olduğu elde edilmiştir.



Şekil 2.9: Ardışık dalgaların profilleri,  $d = 5$



Şekil 2.10: Ardışık dalgaların profilleri,  $d = 2$

Oluşan ilk dört dalganın dalga boylarını ve maksimum dalga boylarının tepe noktalarının  $x$  koordinatları Tablo 2.8 de verilmiştir. Zaman ilerledikçe, ardışık dalgaların büyüklüklerinin ilk ardışık dalga için üç ondalık noktada ve diğerlerinin iki ondalık noktada aynı kaldığı gözlenmiştir.  $t = 250$  zamanında ardışık dalgaların çok yakın bulunan tepe konumundan, tüm ardışık dalgaların hızlarının çok yakın

olduğu tahminine varabiliriz.

Tablo 2.8: $t = 250$ zamanında ardışık dalgaların genlikleri				
	$d = 2$		$d = 5$	
	Konum	Genlik	Konum	Genlik
İlk Dalga	265.92	0.181985	264.96	0.177874
İkinci Dalga	254.16	0.162042	253.92	0.153334
Üçüncü Dalga	244.08	0.144551	244.08	0.132415
Dördüncü Dalga	234.72	0.130528	234.96	0.117816

Korunum sabitlerinin değerleride aşağıdaki Tablo 2.9 ve Tablo 2.10 da verilmiştir.

Tablo 2.9: $d = 5$			
Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	3.61200	0.33631	1.04097
50	8.98700	0.88631	2.74646
100	14.36200	1.43631	4.45167
150	19.73700	1.98631	6.15656
200	25.11200	2.53631	7.86128
250	30.48700	3.08631	9.56594

Tablo 2.10:  $d = 2$ 

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	3.61200	0.35148	1.08822
50	8.98700	0.90148	2.79326
100	14.36200	1.45148	4.49806
150	19.73700	2.00148	6.20275
200	25.11200	2.55148	7.90739
250	30.48700	3.10148	9.61202

Bu korunum sabitlerinin zamana göre değişimi analitik olarak aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$M_1 = \frac{d}{dt}C_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2}U_0^2 = 0.1075$$

$$M_2 = \frac{d}{dt}C_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu(U_x)^2) dx = U_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3}U_0^3 = 0.011$$

$$M_3 = \frac{d}{dt}C_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^3 + 3U^2) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon)U_0^3 + \frac{3\varepsilon}{4}U_0^4 = 0.034113$$

Sayısal korunum sabitlerinin zamana göre değişimi Tablo 2.9 ve Tablo 2.10 dan elde edilmiştir. Ayrıca bu tablolar incelendiğinde, korunum sabitlerinin lineer bir değişim gösterdiği söylenebilir.

Korunum sabitlerinin değişimi  $d = 5$  için Tablo 2.9 dan,

$$M_1 = \frac{30.48700 - 3.61200}{250} = 0.1075$$

$$M_2 = \frac{3.08631 - 0.33631}{250} = 0.011$$

$$M_3 = \frac{9.56594 - 1.04097}{250} = 0.03409988$$

ve  $d = 2$  için Tablo 2.10 dan,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{30.48700 - 3.61200}{250} = 0.1075 \\ M_2 &= \frac{3.10148 - 0.35148}{250} = 0.011 \\ M_3 &= \frac{9.61202 - 1.08822}{250} = 0.0340952 \end{aligned}$$

olarak hesaplandı. Böylece sayısal değişmeler analitik sonuçlarla hemen hemen aynı bulunmuştur.

## 2.4 Sonuç

Bu bölümde, kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile konuma göre parçalanmış RLW denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. RLW denklemini zamana göre ayrıştırmak için Crank-Nicolson metodundan ve konuma göre ayrıştırmak için de kuartik B-spline interpolasyon fonksiyonlarından yararlanılmış ve denklem sistemine ulaşılmıştır.  $UU_x$  teriminden dolayı denklem lineer olmadığından, bu terimdeki  $U$  yerine iterasyonda bir önceki  $n$ . adımdaki değerler kullanılarak lineerleştirme yapılmıştır. Sonuç olarak her bir satırında 8 eleman haricinde diğer elemanları sıfır olan denklem sistemi elde edilmiştir. Denklem sisteminde, bilinmeyen sayısı  $2N + 8$  ve denklem sayısı  $2N + 2$  olduğundan, sınır koşulları kullanılarak 6 eleman parametresi elimine edildikten sonra, önerilen algoritmanın güvenilirliği üç test problemi kullanılarak test edilmiştir.

RLW denkleminin tek dalga çözümünü içeren ilk test probleminde, ilk olarak zaman adımı  $\Delta t$  ve konum adımı  $h$  sabit tutularak metot için hata normları ve korunum sabitleri hesaplanmıştır. Tablo 2.1 ve Tablo 2.2 de bu hesaplamalar verilmiştir. Tablolara baktığımızda, genlik 0.3 iken korunum sabitlerinde çok az değişim olduğunu, 0.09 genlik için ise biraz değişme olduğunu söyleyebiliriz. Hata normlarının da yeterince küçük elde edildiği tablolarda görülmektedir. Daha sonra değişik zaman-konum artımı için sayısal deney uygulandı ve sonuçların iyileşip iyileşmediğine bakıldı. Özellikle zaman artımı küçüldüğünde 0.3 genlik için hata normlarının küçüldüğü görülmüştür.  $t = 20$  zamanında 0.3 genlik için çizilen hata grafiğinde, oluşan maksimum hatanın o andaki oluşan dalganın tepe noktasına karşılık gelen konum değeri civarında oluştuğu, dolayısıyla sınır şartlarının

seçiminden dolayı bir hatanın oluşmadığı, oluşsa bile maksimum hatayı etkilemediği görülmüştür. 0.09 genlik için ise maksimum hata sol sınıra yakın ortaya çıkmıştır.  $t = 0$  anında oluşan dalgaların, zaman içindeki hareketi her iki genlik için de incelendiğinde, dalgaların hareketinin iyi modellendiği Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 ye bakılarak söylenebilir. İlk test probleminde ayrıca, sayısal hız ile analitik hızın bir karşılaştırması yapılarak faz hatasının oluşup oluşmadığına bakılmıştır. Son olarak üç korunum sabitinin sayısal değerleri hesaplandığında da, kuartik B-spline kolokeyşin metodunun kullanılması sonucunda bulunan korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere yakın olduğu belirlenmiştir.

İkinci test probleminde genlikleri, hızları ve tepe noktalarının karşılık geldiği konum değerleri farklı olan iki tek dalganın hareketi incelenmiştir. İki tek dalganın zaman içindeki hareketi uygun bir şekilde modellemiştir. İki tek dalganın çarpışma sonrasında genliklerinde oluşan değişme miktarı incelendiğinde, önerilen yöntemin test problemini iyi modellediği söylenebilir. Ayrıca, korunum sabitlerinin sayısal değerleri bu test problemi için de hesaplanmış ve ilk test probleminde olduğu gibi kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile elde edilen değerlerin analitik değerlere yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Son test probleminde ise, ardışık dalgaların gelişimi modellenmiştir. Bu dalgaların zaman içinde gelişimi şekillerde gösterilmiştir. Farklı eğim için ilk dört dalganın konum ve genlikleri  $t = 250$  zamanı için tablolarda verilmiştir. Diğer test problemlerinde olduğu gibi, korunum sabitlerinin değeri hesaplanmış, son olarak ise korunum sabitlerindeki değişim incelenmiştir.

Sonuç olarak fazla işlem yükü gerektirse de elde edilen iyi sonuçlar nedeniyle, konuma göre parçalanmış RLW denkleminin kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümünde izlenen yöntem, farklı denklemlerin sayısal çözümünü bulmak için de güvenle kullanılabilir.

## BÖLÜM 3

### BURGER DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, yine konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kuartik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, iki test problemi kullanılarak hata normları ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

#### 3.1 Burger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kuartik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümlerini elde etmeye çalışacağız. Bölüm 2 de olduğu gibi,  $\circ$  zamana bağlı türevi gösterebiliriz ve  $d = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}$  olsun.  $U_N, V_N$  nin bölüm noktalarındaki (1.48) değerleri ve türevleri, (1.59) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \delta_{m-2}^{\circ} + 11\delta_{m-1}^{\circ} + 11\delta_m^{\circ} + \delta_{m+1}^{\circ} + \frac{4d}{h} (\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ & -\nu (\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1}) = 0, \\ & \sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1} - \frac{12}{h^2} (\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

birinci mertebeden  $2N + 2$  diferensiyel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir.  $\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametrelerinin (2.2) ve türevlerinin (2.3) değerleri, (3.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n + 11\delta_{m-1}^{n+1} - 11\delta_{m-1}^n + 11\delta_m^{n+1} - 11\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) \\
& + \frac{2d}{h} (\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n + 3\delta_m^{n+1} + 3\delta_m^n - 3\delta_{m-1}^{n+1} - 3\delta_{m-1}^n - \delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) \\
& - \frac{\nu}{2} (\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} + 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} + 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) = 0, \\
& \frac{1}{2} (\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} + 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} + 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) \\
& - \frac{6}{h^2} (\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - \delta_m^{n+1} - \delta_m^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) = 0
\end{aligned}$$

sistemi bulunur. Bu sistem  $m = 0, \dots, N$  için,

$$\begin{aligned}
& \beta_1 \delta_{m-2}^{n+1} - \nu h \Delta t \sigma_{m-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{m-1}^{n+1} - 11\nu h \Delta t \sigma_{m-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_m^{n+1} - 11\nu h \Delta t \sigma_m^{n+1} + \beta_4 \delta_{m+1}^{n+1} \\
& - \nu h \Delta t \sigma_{m+1}^{n+1} = \beta_4 \delta_{m-2}^n + \nu h \Delta t \sigma_{m-2}^n + \beta_3 \delta_{m-1}^n + 11\nu h \Delta t \sigma_{m-1}^n + \beta_2 \delta_m^n + 11\nu h \Delta t \sigma_m^n \\
& + \beta_1 \delta_{m+1}^n + \nu h \Delta t \sigma_{m+1}^n, \\
& -12\delta_{m-2}^{n+1} + h^2 \sigma_{m-2}^{n+1} + 12\delta_{m-1}^{n+1} + 11h^2 \sigma_{m-1}^{n+1} + 12\delta_m^{n+1} + 11h^2 \sigma_m^{n+1} - 12\delta_{m+1}^{n+1} \\
& + h^2 \sigma_{m+1}^{n+1} = 12\delta_{m-2}^n - h^2 \sigma_{m-2}^n - 12\delta_{m-1}^n - 11h^2 \sigma_{m-1}^n - 12\delta_m^n - 11h^2 \sigma_m^n \\
& + 12\delta_{m+1}^n - h^2 \sigma_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak yeniden düzenlenirse,  $2N + 8$  bilinmeyenli  $2N + 2$  cebirsel denklemden oluşan

bir sistem bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 2h - 4d\Delta t, & \beta_2 &= 22h - 12d\Delta t, \\
\beta_3 &= 22h + 12d\Delta t, & \beta_4 &= 2h + 4d\Delta t
\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sistemindeki  $\delta_{-2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+1}$  eleman parametreleri

sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  boyutlu 8 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

$$F_1 = \beta_4 \delta_{-2}^n + \nu h \Delta t \sigma_{-2}^n + \beta_3 \delta_{-1}^n + 11 \nu h \Delta t \sigma_{-1}^n + \beta_2 \delta_0^n + 11 \nu h \Delta t \sigma_0^n + \beta_1 \delta_1^n \\ + \nu h \Delta t \sigma_1^n,$$

$$F_2 = 12 \delta_{-2}^n - h^2 \sigma_{-2}^n - 12 \delta_{-1}^n - 11 h^2 \sigma_{-1}^n - 12 \delta_0^n - 11 h^2 \sigma_0^n + 12 \delta_1^n - h^2 \sigma_1^n,$$

$$F_3 = \beta_4 \delta_{-1}^n + \nu h \Delta t \sigma_{-1}^n + \beta_3 \delta_0^n + 11 \nu h \Delta t \sigma_0^n + \beta_2 \delta_1^n + 11 \nu h \Delta t \sigma_1^n + \beta_1 \delta_2^n \\ + \nu h \Delta t \sigma_2^n,$$

$$F_4 = 12 \delta_{-1}^n - h^2 \sigma_{-1}^n - 12 \delta_0^n - 11 h^2 \sigma_0^n - 12 \delta_1^n - 11 h^2 \sigma_1^n + 12 \delta_2^n - h^2 \sigma_2^n,$$

$$F_{2N+1} = \beta_4 \delta_{N-2}^n + \nu h \Delta t \sigma_{N-2}^n + \beta_3 \delta_{N-1}^n + 11 \nu h \Delta t \sigma_{N-1}^n + \beta_2 \delta_N^n + 11 \nu h \Delta t \sigma_N^n \\ + \beta_1 \delta_{N+1}^n + \nu h \Delta t \sigma_{N+1}^n,$$

$$F_{2N+2} = 12 \delta_{N-2}^n - h^2 \sigma_{N-2}^n - 12 \delta_{N-1}^n - 11 h^2 \sigma_{N-1}^n - 12 \delta_N^n - 11 h^2 \sigma_N^n \\ + 12 \delta_{N+1}^n - h^2 \sigma_{N+1}^n$$

olmak üzere, (3.2) denklem sisteminden,  $m = 0$  için,

$$\beta_1 \delta_{-2}^{n+1} - \nu h \Delta t \sigma_{-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{-1}^{n+1} - 11 \nu h \Delta t \sigma_{-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_0^{n+1} - 11 \nu h \Delta t \sigma_0^{n+1} + \beta_4 \delta_1^{n+1}$$

$$- \nu h \Delta t \sigma_1^{n+1} = F_1$$

$$-12 \delta_{-2}^{n+1} + h^2 \sigma_{-2}^{n+1} + 12 \delta_{-1}^{n+1} + 11 h^2 \sigma_{-1}^{n+1} + 12 \delta_0^{n+1} + 11 h^2 \sigma_0^{n+1} - 12 \delta_1^{n+1}$$

$$+ h^2 \sigma_1^{n+1} = F_2$$

(3.3)

$m = 1$  için,

$$\begin{aligned}
& \beta_1 \delta_{-1}^{n+1} - \nu h \Delta t \sigma_{-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_0^{n+1} - 11\nu h \Delta t \sigma_0^{n+1} + \beta_3 \delta_1^{n+1} - 11\nu h \Delta t \sigma_1^{n+1} + \beta_4 \delta_2^{n+1} \\
& - \nu h \Delta t \sigma_2^{n+1} = F_3 \\
& -12\delta_{-1}^{n+1} + h^2 \sigma_{-1}^{n+1} + 12\delta_0^{n+1} + 11h^2 \sigma_0^{n+1} + 12\delta_1^{n+1} + 11h^2 \sigma_1^{n+1} - 12\delta_2^{n+1} \\
& + h^2 \sigma_2^{n+1} = F_4
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ve  $m = N$  için,

$$\begin{aligned}
& \beta_1 \delta_{N-2}^{n+1} - \nu h \Delta t \sigma_{N-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{N-1}^{n+1} - 11\nu h \Delta t \sigma_{N-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_N^{n+1} - 11\nu h \Delta t \sigma_N^{n+1} + \beta_4 \delta_{N+1}^{n+1} \\
& - \nu h \Delta t \sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+1} \\
& -12\delta_{N-2}^{n+1} + h^2 \sigma_{N-2}^{n+1} + 12\delta_{N-1}^{n+1} + 11h^2 \sigma_{N-1}^{n+1} + 12\delta_N^{n+1} + 11h^2 \sigma_N^{n+1} - 12\delta_{N+1}^{n+1} \\
& + h^2 \sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılır. (2.6) eleman parametreleri (3.3-3.5) denklemlerinde yerlerine yazılıp, den-

klemler düzenlenirse ilk dört denklem,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{33}{4} \beta_1 - \frac{7}{4} \beta_2 + \beta_3 \right) \delta_0^{n+1} + \left( \frac{7}{4} \beta_1 - \frac{1}{4} \beta_2 + \beta_4 \right) \delta_1^{n+1} = F_1 + \frac{3}{8} \alpha_1 \beta_1 - \frac{1}{8} \alpha_1 \beta_2, \\
& -108\delta_0^{n+1} - 36\delta_1^{n+1} = F_2 - 6\alpha_1, \\
& \left( -\frac{7}{4} \beta_1 + \beta_2 \right) \delta_0^{n+1} - \frac{37}{4} \nu h \Delta t \sigma_0^{n+1} + \left( -\frac{1}{4} \beta_1 + \beta_3 \right) \delta_1^{n+1} \\
& - \frac{43}{4} \nu h \Delta t \sigma_1^{n+1} + \beta_4 \delta_2^{n+1} - \nu h \Delta t \sigma_2^{n+1} = F_3 - \frac{1}{8} \alpha_1 \beta_1, \\
& 33\delta_0^{n+1} + \frac{37}{4} h^2 \sigma_0^{n+1} + 15\delta_1^{n+1} + \frac{43}{4} h^2 \sigma_1^{n+1} - 12\delta_2^{n+1} + h^2 \sigma_2^{n+1} = F_4 + \frac{3}{2} \alpha_1
\end{aligned}$$

ve son iki denklem,

$$(\beta_1 - \beta_4) \delta_{N-2}^{n+1} + (\beta_2 - 11\beta_4) \delta_{N-1}^{n+1} + (\beta_3 - 11\beta_4) \delta_N^{n+1} = F_{2N+1} - \beta_4 \alpha_2,$$

$$144\delta_{N-1}^{n+1} + 144\delta_N^{n+1} = F_{2N+2} + 12\alpha_2$$

olarak bulunur.

Buna göre denklem sistemi,

$$F = B d_n,$$

$$d_{n+1} = [\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \sigma_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}]^T$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & & & & & & & & \\ -108 & 0 & -36 & 0 & & & & & & & & \\ c & -\frac{37}{4}\nu h\Delta t & d & -\frac{43}{4}\nu h\Delta t & \beta_4 & -\nu h\Delta t & & & & & & \\ 33 & \frac{37}{4}h^2 & 15 & \frac{43}{4}h^2 & -12 & h^2 & 0 & & & & & \\ \beta_1 & -\nu h\Delta t & \beta_2 & -11\nu h\Delta t & \beta_3 & -11\nu h\Delta t & \beta_4 & -\nu h\Delta t & & & & \\ -12 & h^2 & 12 & 11h^2 & 12 & 11h^2 & -12 & h^2 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 0 & 0 & e & 0 & f & 0 & g & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 & 144 & 0 & \end{bmatrix}$$

olmak üzere,  $(a = \frac{33}{4}\beta_1 - \frac{7}{4}\beta_2 + \beta_3, b = \frac{7}{4}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 + \beta_4, c = -\frac{7}{4}\beta_1 + \beta_2, d = -\frac{1}{4}\beta_1 + \beta_3, e = \beta_1 - \beta_4, f = \beta_2 - 11\beta_4, g = \beta_3 - 11\beta_4)$ ,

$$A d_{n+1} = F \tag{3.6}$$

matris formunda bulunmuş olur. Burada



ve sınır şartları  $U(0, t) = U_x(0, t) = 0$  ve  $U(1, t) = U_x(1, t) = 0$  kullanıldı.

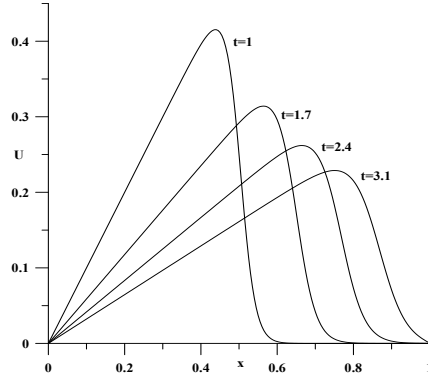
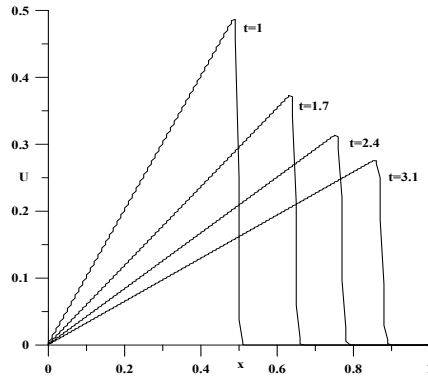
Burger denkleminin şok dalga çözümü  $t_0 = e^{1/(8\nu)}$  olmak üzere,

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} e^{x^2/(4\nu t)}}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.7)$$

dir. Bu problemdeki zorluk  $\nu$  nin seçimi ile ilgilidir. Eğer  $\nu$  nin küçük değerleri için sayısal algoritma iyi sonuçlar veriyor ise bu yöntemin başarısını gösterir. Bunu aşağıdaki deneyde görmeye çalışacağız.

Burger denkleminin şok dalga sayısal çözümleri  $t = 3.1$  zamanına kadar  $[0, 1]$  çözüm bölgesi üzerinde araştırıldı. Bu test problemi için hata normları, farklı zamanlarda, farklı konum adımı ve değişik viskozite değerleri için Table 3.1 de verildi. Bu tabloya baktığımızda mevcut kolokeyşin metodu ile bulunan Burger denkleminin sayısal çözümlerinin küçük hatalar ile elde edildiğini söyleyebiliriz.  $h = 0.005$  konum adımı ve  $\Delta t = 0.01$  zaman adımı kullanılarak  $\nu = 0.005$  ve  $\nu = 0.0005$  değerleri için şok dalgasının yayılımı Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 de gösterildi.  $\nu = 0.005$  için başlangıç şok  $t = 1$  zamanında düzgündür ve zaman ilerledikçe bu şokun daha keskin olduğu görülmektedir.

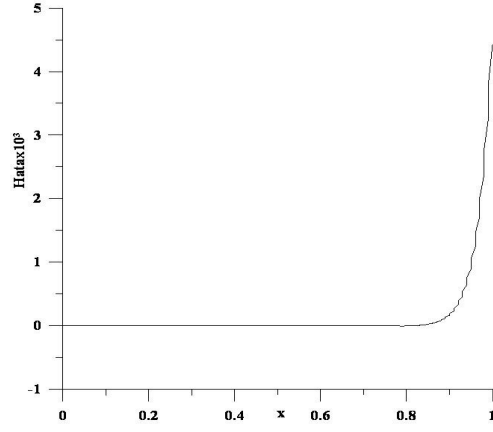
Tablo 3.1: Farklı zamanlarda $L_2$ ve $L_\infty$ hata normlarının değerleri, $\Delta t = 0.01$						
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$h = 0.005,$ $\nu = 0.005$	$t = 1.7$ 0.01063	$t = 1.7$ 0.03987	$t = 2.4$ 0.00890	$t = 2.4$ 0.05837	$t = 3.1$ 0.60207	$t = 3.1$ 4.43484
$h = 0.02,$ $\nu = 0.005$	$t = 1.8$ 0.01514	$t = 1.8$ 0.06078	$t = 2.4$ 0.01041	$t = 2.4$ 0.04371	$t = 3.2$ 0.93041	$t = 3.2$ 5.54997
$h = 0.02,$ $\nu = 0.01$	$t = 1.7$ 0.01281	$t = 1.7$ 0.07195	$t = 2.1$ 0.16504	$t = 2.1$ 0.91204	$t = 2.6$ 1.30769	$t = 2.6$ 6.73720

Şekil 3.1:  $\nu = 0.005$  için şok yayılımıŞekil 3.2:  $\nu = 0.0005$  için şok yayılımı

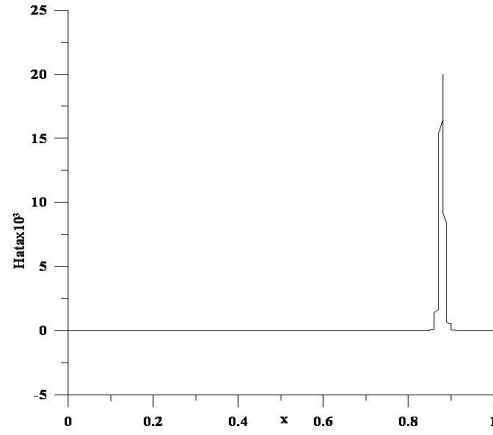
Daha küçük viskozite sabiti  $\nu = 0.0005$  başlangıç şokta kullanıldığı zaman, başlangıç şok keskindir ve zaman ilerledikçe aynı kalmaktadır. İlaveten yukarıdaki şekillerden söylenebilir ki, daha büyük viskozite sabiti kullanıldığında, şok yayılımı daha hızlıdır ve şokun kalınlığındaki artış daha küçük  $\nu$  den elde edilen şoklardan daha büyüktür. Bu gözlemler analitik sonuçlardaki uyumludur.

Önerilen algoritma ile  $t = 3.1$  zamanında çözüm bölgesi üzerinde elde edilen hatalar Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de çizilmiştir.  $\nu = 0.005$  için maksimum hatanın sağ sınırdaki ortaya çıktığını Şekil 3.3 e bakarak söyleyebiliriz. Bunun sebebi büyük viskozite sabiti için şokun hızlı ilerlemesi ve sağ sınıra çarpmasıdır. Eğer çözüm bölgesi Şekil 3.5 de olduğu gibi sağa doğru genişletilirse bu hata hem küçülecek

hemde sağ sınırdan ortaya çıkmayacaktır.

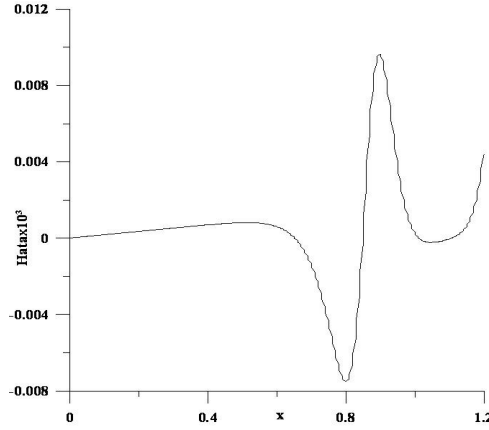


Şekil 3.3:  $\nu = h = 0.005$  için hata



Şekil 3.4:  $\nu = h = 0.0005$  için hata





Şekil 3.5:  $\nu = h = 0.005$  için hata

(b) Burger denkleminin ilerleyen dalga çözümü

$$U(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha)e^\eta}{1 + e^\eta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

formundadır. Burada

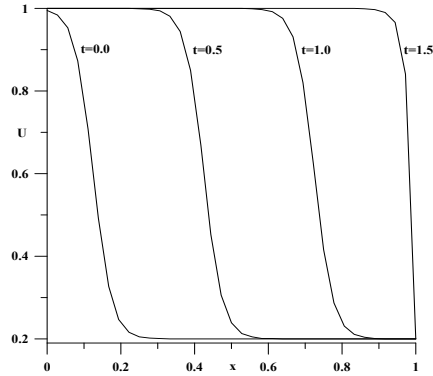
$$\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu},$$

ve  $\alpha, \mu, \gamma$  keyfi sabitlerdir. Sınır şartları  $U(0, t) = 1, U_x(0, t) = 0, U(1, t) = 0.2, U_x(1, t) = 0$  kullanıldı. Başlangıç şartı olarak ise (3.8) denkleminin  $t = 0$  zamanındaki değeri kullanıldı. Analitik çözüm maksimum 1 ve minimum 0.2 değerine sahiptir. Başlangıç şok  $x = \gamma$  konumunda yerleşmiştir. Bu deneyde bu şokun  $\mu$  hızla sağa doğru hareketi gözlenecektir.

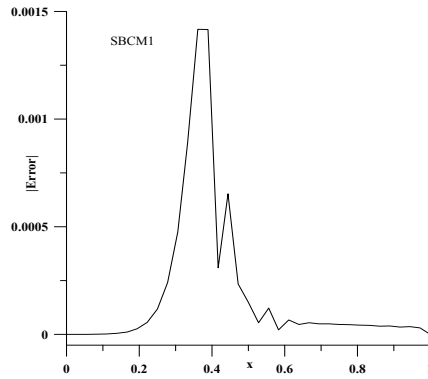
Denklem (3.8) deki sabitler  $\alpha = 0.4, \mu = 0.6, \gamma = 0.125$  ve  $\nu = 0.01$  olarak seçildi. Simulasyon  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $t=0.5$  zamana kadar konum adımı  $h = 1/36$  ve zaman adımı  $\Delta t = 0.01$  alınarak gerçekleştirildi. Sayısal sonuçlar ile analitik değerler arasında bir karşılaştırma Tablo 3.2 de verilmiştir. Bu tabloya baktığımızda, mevcut algoritma ile elde edilen sonuçların analitik sonuçlara çok yakın olduğunu söyleyebiliriz.

Table 3.2: $t = 0.5$ zamanındaki sonuçlar		
$x$	metodun sonuçları	analitik sonuçlar
0.000	1.	1.
0.056	1.	1.
0.111	1.	1.
0.167	1.	1.
0.222	0.9998	0.9998
0.278	0.9980	0.9978
0.333	0.9810	0.9801
0.389	0.8487	0.8473
0.444	0.4512	0.4518
0.500	0.2381	0.2379
0.556	0.2044	0.2043
0.611	0.2005	0.2005
0.667	0.2001	0.2001
0.722	0.2001	0.2000
0.778	0.2	0.2
0.833	0.2	0.2
0.889	0.2	0.2
0.944	0.2	0.2
1.000	0.2	0.2

Hem sayısal hemde analitik çözümler Şekil 3.6 da çizildi. Bu şekle baktığımızda analitik ile sayısal çözümlerin aynı olduğunu görebiliriz. Önerilen algoritmanın  $t = 0.5$  zamanındaki hata değişimi ise Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.6:  $\nu = 0.01$  için şok yayılımı



Şekil 3.7:  $\nu = 0.01$  için hata

### 3.4 Sonuç

Bu bölümde, kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile Burger denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır.

Burger denkleminde, zaman parçalanması için Crank-Nicolson metodu ve konum aralığının bölünme noktalarında kuartik B-spline değerleri kullanılarak bir denklem sistemi elde edilmiştir. Elde edilen denklem sisteminde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı sınır koşulları kullanılarak eşitlendikten sonra, bulunan denklem sistemi fortran kodları kullanılarak ve her bir zaman adımında bir iç iterasyon yardımıyla iyileştirme de yapılarak çözülmüştür.

Kısım 3.1 de verilen metodun güvenilirliği, iki test problemi kullanılarak kontrol edilmiştir. İlk test problemi olarak Burger denkleminin şok dalga çözümü kullanılmıştır. Bu test problemi için zorluk  $\nu$  viskozite sabitinin küçük seçilmesi halinde ortaya çıktığından, bu küçük  $\nu$  için önerilen algoritmanın test problemini modelleyip modelleyemediği gözlenmiştir. Bu test probleminde öncelikle  $\Delta t$  zaman artımı 0.01 alınarak farklı konum artımı ve farklı viskozite değerleri için hesaplamalar yapılmış, bunlar Tablo 3.1 de verilmiştir. Ayrıca  $\nu = 0.005$  ve  $\nu = 0.0005$  küçük viskozite değerleri için algoritmanın çalıştığı Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 den söylenebilir. Bu değerler için oluşan hatalar ise Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de verilmiştir.  $\nu = 0.005$  için hatanın sağ sınırdaki ortaya çıktığı gözlenmiştir. Bunun sebebi, şok dalganın hızlı ilerlemesi ve sağ sınıra çarpmasıdır. Oluşan bu hatayı küçültmek için bölge sağa doğru genişletilmiş ve hatanın bu şekilde indirgenmediği gözlenmiştir.

İkinci test probleminde; Burger denkleminin ilerleyen dalga çözümü kullanılmış, çözümün zaman içindeki hareketi incelenmiştir. Metot ile elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile Tablo 3.2 de kıyaslanmıştır.  $\nu = 0.01$  için ilerleyen dalga profili ve elde edilen hata sırasıyla Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 de verilmiştir. Bu test probleminde kullanılan viskozite sabiti için hatanın sınırlarda olmadığı gözlenmiş, dolayısıyla sınır parametreleri elimine edilirken her hangi bir hata yapılmadığı söylenebilir.

Sonuç olarak incelenen iki test problemine göre, Burger denkleminin sayısal çözümü elde etmek için önerdiğimiz kuartik B-spline kolokeyşin metodunun farklı denklemler içinde güvenilir bir şekilde kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

## BÖLÜM 4

### SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin kuartik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak sayısal çözümü araştırılmıştır. Metot uygulandıktan sonra, elde edilen algoritmanın doğruluğu, üç test problemi kullanılarak hata normları, korunum sabitleri ve grafikler yardımıyla incelenmiştir.

#### 4.1 Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuartik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda Schrödinger denkleminin kuartik B-spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümlerini elde etmeye çalışacağız.  $\circ$  zamana göre türev ve

$$z_m = (\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1})^2 + (\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1})^2$$

olmak üzere, (1.66) ve (1.67) denklemlerinde (1.70) değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{m-2} + 11\dot{\delta}_{m-1} + 11\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} - \frac{12}{h^2}(\sigma_{m+1} - \sigma_m - \sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}) \\ -qz_m(\sigma_{m-2} + 11\sigma_{m-1} + 11\sigma_m + \sigma_{m+1}) = 0, \\ \dot{\sigma}_{m-2} + 11\dot{\sigma}_{m-1} + 11\dot{\sigma}_m + \dot{\sigma}_{m+1} + \frac{12}{h^2}(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ +qz_m(\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

birinci mertebeden  $(2N + 2)$  diferensiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir.

$\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametreleri ve bunların zamana göre türevleri (2.2) ile (2.3), (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n + 11\delta_{m-1}^{n+1} - 11\delta_{m-1}^n + 11\delta_m^{n+1} - 11\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) \\
& - \frac{6}{h^2} (-\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n - \sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n - \sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) \\
& - \frac{1}{2} qz_m (\sigma_{m-2}^{n+1} + \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} + 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} + 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) = 0, \\
& \frac{1}{\Delta t} (\sigma_{m-2}^{n+1} - \sigma_{m-2}^n + 11\sigma_{m-1}^{n+1} - 11\sigma_{m-1}^n + 11\sigma_m^{n+1} - 11\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} - \sigma_{m+1}^n) \\
& + \frac{6}{h^2} (\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - \delta_m^{n+1} - \delta_m^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) = 0 \\
& + \frac{1}{2} qz_m (\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n + 11\delta_{m-1}^{n+1} + 11\delta_{m-1}^n + 11\delta_m^{n+1} + 11\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) = 0,
\end{aligned}$$

sistemleri bulunur. Bu sistem  $m = 0, \dots, N$  için,

$$\begin{aligned}
& 2h^2\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_1\sigma_{m-2}^{n+1} + 22h^2\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_2\sigma_{m-1}^{n+1} + 22h^2\delta_m^{n+1} + \beta_2\sigma_m^{n+1} + \\
& 2h^2\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_1\sigma_{m+1}^{n+1} = 2h^2\delta_{m-2}^n - \beta_1\sigma_{m-2}^n + 22h^2\delta_{m-1}^n - \beta_2\sigma_{m-1}^n + \\
& 22h^2\delta_m^n - \beta_2\sigma_m^n + 2h^2\delta_{m+1}^n - \beta_1\sigma_{m+1}^n, \\
& -\beta_1\delta_{m-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m-2}^{n+1} - \beta_2\delta_{m-1}^{n+1} + 22h^2\sigma_{m-1}^{n+1} - \beta_2\delta_m^{n+1} + 22h^2\sigma_m^{n+1} - \\
& \beta_1\delta_{m+1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{m+1}^{n+1} = \beta_1\delta_{m-2}^n + 2h^2\sigma_{m-2}^n + \beta_2\delta_{m-1}^n + 22h^2\sigma_{m-1}^n + \\
& \beta_2\delta_m^n + 22h^2\sigma_m^n + \beta_1\delta_{m+1}^n + 2h^2\sigma_{m+1}^n,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak yeniden düzenlenirse,  $(2N + 8)$  bilinmeyenli  $(2N + 2)$  cebirsel denklemden

oluşan bir sistem elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -12\Delta t - dh^2\Delta t, & \beta_2 &= 12\Delta t - 11dh^2\Delta t, \\
d &= qz_m
\end{aligned}$$

dir. Bu denklem sisteminde  $\delta_{-2}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-2}^{n+1}$ ,  $\delta_{-1}^{n+1}$ ,  $\sigma_{-1}^{n+1}$ ,  $\delta_{N+1}^{n+1}$  ve  $\sigma_{N+1}^{n+1}$  eleman parametreleri  $r(a, t) = r_x(a, t) = s(a, t) = s_x(a, t) = r(b, t) = s(b, t) = 0$  sınır koşulları

kullanılarak yok edilecektir. Böylece  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  boyutlu 8 band matris sistemi elde edilir. (1.63) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden (1.70) değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1 &= 0, \\
\sigma_{-2} + 11\sigma_{-1} + 11\sigma_0 + \sigma_1 &= 0, \\
\delta_1 + 3\delta_0 - 3\delta_{-1} - \delta_{-2} &= 0, \\
\sigma_1 + 3\sigma_0 - 3\sigma_{-1} - \sigma_{-2} &= 0, \\
\delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1} &= 0, \\
\sigma_{N-2} + 11\sigma_{N-1} + 11\sigma_N + \sigma_{N+1} &= 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{33}{4}\delta_0 + \frac{7}{4}\delta_1, & \sigma_{-2} &= \frac{33}{4}\sigma_0 + \frac{7}{4}\sigma_1, \\
\delta_{-1} &= -\frac{7}{4}\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_1, & \sigma_{-1} &= -\frac{7}{4}\sigma_0 - \frac{1}{4}\sigma_1, \\
\delta_{N+1} &= \alpha_2 - \delta_{N-2} - 11\delta_{N-1} - 11\delta_N, & \sigma_{N+1} &= -\sigma_{N-2} - 11\sigma_{N-1} - 11\sigma_N
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
F_1 &= 2h^2\delta_{-2}^n - \beta_1\sigma_{-2}^n + 22h^2\delta_{-1}^n - \beta_2\sigma_{-1}^n + 22h^2\delta_0^n - \beta_2\sigma_0^n + 2h^2\delta_1^n - \beta_1\sigma_1^n, \\
F_2 &= \beta_1\delta_{-2}^n + 2h^2\sigma_{-2}^n - \beta_2\delta_{-1}^n + 22h^2\sigma_{-1}^n - \beta_2\delta_0^n + 22h^2\sigma_0^n - \beta_1\delta_1^n + 2h^2\sigma_1^n, \\
F_3 &= 2h^2\delta_{-1}^n - \beta_1\sigma_{-1}^n + 22h^2\delta_0^n - \beta_2\sigma_0^n + 22h^2\delta_1^n - \beta_2\sigma_1^n + 2h^2\delta_2^n - \beta_1\sigma_2^n, \\
F_4 &= \beta_1\delta_{-1}^n + 2h^2\sigma_{-1}^n + \beta_2\delta_0^n + 22h^2\sigma_0^n + \beta_2\delta_1^n + 22h^2\sigma_1^n + \beta_1\delta_2^n + 2h^2\sigma_2^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2N+1} &= 2h^2\delta_{N-2}^n - \beta_1\sigma_{N-2}^n + 22h^2\delta_{N-1}^n - \beta_2\sigma_{N-1}^n + 22h^2\delta_N^1 - \beta_2\sigma_N^n \\
&\quad + 2h^2\delta_{N+1}^n - \beta_1\sigma_{N+1}^n, \\
F_{2N+2} &= \beta_1\delta_{N-2}^n + 2h^2\sigma_{N-2}^n + \beta_2\delta_{N-1}^n + 22h^2\sigma_{N-1}^n + \beta_2\delta_N^n + 22h^2\sigma_N^n \\
&\quad + \beta_1\delta_{N+1}^n + 2h^2\sigma_{N+1}^n,
\end{aligned}$$

olmak üzere, (4.3) denkleminde  $m = 0$  için,

$$\begin{aligned}
&2h^2\delta_{-2}^{n+1} + \beta_1\sigma_{-2}^{n+1} + 22h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_2\sigma_{-1}^{n+1} + 22h^2\delta_0^{n+1} + \beta_2\sigma_0^{n+1} + \\
&2h^2\delta_1^{n+1} + \beta_1\sigma_1^{n+1} = F_1 \\
&-\beta_1\delta_{-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-2}^{n+1} - \beta_2\delta_{-1}^{n+1} + 22h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \beta_2\delta_0^{n+1} + 22h^2\sigma_0^{n+1} - \\
&\beta_1\delta_1^{n+1} + 2h^2\sigma_1^{n+1} = F_2,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$m = 1$  için,

$$\begin{aligned}
&2h^2\delta_{-1}^{n+1} + \beta_1\sigma_{-1}^{n+1} + 22h^2\delta_0^{n+1} + \beta_2\sigma_0^{n+1} + 22h^2\delta_1^{n+1} + \\
&\beta_2\sigma_1^{n+1} + 2h^2\delta_2^{n+1} + \beta_1\sigma_2^{n+1} = F_3 \\
&-\beta_1\delta_{-1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{-1}^{n+1} - \beta_2\delta_0^{n+1} + 22h^2\sigma_0^{n+1} - \beta_2\delta_1^{n+1} + 22h^2\sigma_1^{n+1} - \\
&\beta_1\delta_2^{n+1} + 2h^2\sigma_2^{n+1} = F_4,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$m = N$  için,

$$\begin{aligned}
&2h^2\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_1\sigma_{N-2}^{n+1} + 22h^2\delta_{N-1}^{n+1} + \beta_2\sigma_{N-1}^{n+1} + 22h^2\delta_N^{n+1} + \beta_2\sigma_N^{n+1} + \\
&2h^2\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_1\sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+1} \\
&-\beta_1\delta_{N-2}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N-2}^{n+1} - \beta_2\delta_{N-1}^{n+1} + 22h^2\sigma_{N-1}^{n+1} - \beta_2\delta_N^{n+1} + 22h^2\sigma_N^{n+1} - \\
&\beta_1\delta_{N+1}^{n+1} + 2h^2\sigma_{N+1}^{n+1} = F_{2N+2}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılır. (4.4) eleman parametreleri (4.5-4.7) denklemlerinde yerlerine yazılıp düzen-



lenirse, ilk dört denklem

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{33}{4}\beta_1 - \frac{3}{4}\beta_2 \right) \sigma_0^{n+1} + \left( \frac{11}{4}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2 \right) \sigma_1^{n+1} = F_1, \\
& \left( -\frac{33}{4}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_2 \right) \delta_0^{n+1} + \left( -\frac{11}{4}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_2 \right) \delta_1^{n+1} = F_2, \\
& \frac{37}{2}h^2\delta_0^{n+1} - \left( \frac{7}{4}\beta_1 - \beta_2 \right) \sigma_0^{n+1} + \frac{43}{2}h^2\delta_1^{n+1} - \left( \frac{1}{4}\beta_1 - \beta_2 \right) \sigma_1^{n+1} \\
& + 2h^2\delta_2^{n+1} - \beta_1\sigma_2^{n+1} = F_3, \\
& \left( \frac{7}{4}\beta_1 - \beta_2 \right) \delta_0^{n+1} + \frac{37}{2}h^2\sigma_0^{n+1} + \left( \frac{1}{4}\beta_1 - \beta_2 \right) \delta_1^{n+1} \\
& + \frac{37}{2}h^2\sigma_1^{n+1} - \beta_1\delta_2^{n+1} + 2h^2\sigma_2^{n+1} = F_4,
\end{aligned}$$

ve son iki denklem

$$\begin{aligned}
& (11\beta_1 - \beta_2) \sigma_{N-1}^{n+1} - (\beta_2 - 11\beta_1) \sigma_N^{n+1} = F_{2N+1}, \\
& (-\beta_2 + 11\beta_1) \delta_{N-1}^{n+1} + (-\beta_2 + 11\beta_1) \delta_N^{n+1} = F_{2N+2},
\end{aligned}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Buna göre denklem sistemi,

$$F = Bd_n,$$

$$d_{n+1} = [\delta_0^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \sigma_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \sigma_N^{n+1}]^T$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b & & & & & & & \\ c & 0 & d & 0 & & & & & & & \\ \frac{37}{2}h^2 & e & \frac{43}{2}h^2 & f & 2h^2 & -\beta_1 & & & & & \\ g & \frac{37}{2}h^2 & p & \frac{43}{4}h^2 & -\beta_1 & 2h^2 & & & & & \\ 2h^2 & \beta_1 & 22h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_2 & 2h^2 & \beta_1 & & & \\ -\beta_1 & 2h^2 & -\beta_2 & 22h^2 & -\beta_2 & 22h^2 & -\beta_1 & 2h^2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & l \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & n & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,  $(a = \left(\frac{33}{4}\beta_1 - \frac{3}{4}\beta_2\right), b = \left(\frac{11}{4}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2\right), c = \left(-\frac{33}{4}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_2\right),$

$d = \left(-\frac{11}{4}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_2\right), e = -\left(\frac{7}{4}\beta_1 - \beta_2\right), f = -\left(\frac{1}{4}\beta_1 - \beta_2\right), g = \left(\frac{7}{4}\beta_1 - \beta_2\right),$   
 $p = \left(\frac{1}{4}\beta_1 - \beta_2\right), k = (11\beta_1 - \beta_2), l = (-\beta_2 + 11\beta_1), m = (-\beta_2 + 11\beta_1), n = (-\beta_2 + 11\beta_1),$

$$Ad_{n+1} = F \quad (4.8)$$

matris formunda bulunmuş olur. Burada

$$B = \begin{bmatrix} 2h^2 & -\beta_1 & 22h^2 & -\beta_2 & 22h^2 & -\beta_2 & 2h^2 & -\beta_1 & & & & & \\ \beta_1 & 2h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_1 & 2h^2 & 0 & & & & \\ & 0 & 2h^2 & -\beta_1 & 22h^2 & -\beta_2 & 22h^2 & -\beta_2 & -2h^2 & -\beta_1 & & & \\ & & \beta_1 & 2h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_1 & 2h^2 & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 2h^2 & -\beta_1 & 22h^2 & -\beta_2 & 22h^2 & -\beta_2 & 2h^2 & -\beta_1 & \\ & & & & \beta_1 & 2h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_2 & 22h^2 & \beta_1 & 2h^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$d_n = [\delta_{-2}^n, \sigma_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \sigma_{-1}^n, \delta_0^n, \sigma_0^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \sigma_{N+1}^n]^T$$

dir.  $\delta_{-2}, \sigma_{-2}, \delta_{-1}, \sigma_{-1}, \delta_{N+1}$  ve  $\sigma_{N+1}$  sınır parametreleri her zaman adımında (4.4)

denklemlerinden hesaplanabilir.

## 4.2 Başlangıç Durumu

$\delta_m^n$  ve  $\sigma_m^n$  parametrelerini, (4.8) denklem sisteminden elde edebilmek için  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için  $r(x, 0)$  ve  $s(x, 0)$  başlangıç koşullarından  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bölüm 2 de başlangıç durumu için yapılan işlemlerin benzerleri yapılarak  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  değerleri bulunabilir.

## 4.3 Test Problemleri

Bu kısımda, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde edebilmek için bir önceki kısımda tanımlanan sayısal yöntemin doğruluğunu ve güvenilirliğini görebilmek için üç test problem çalışıldı.

### 4.3.1. Tek Soliton Çözümü

Schrödinger denkleminin tek soliton çözümü

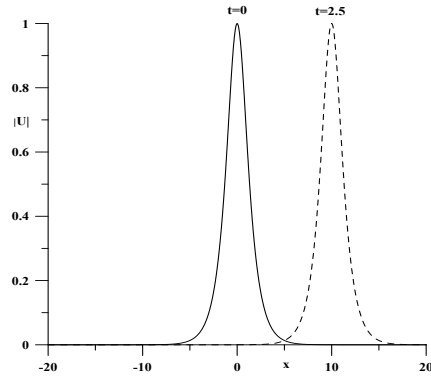
$$U(x, t) = \alpha \sqrt{2/q} e^{i(\frac{S}{2}x - \frac{1}{4}(S^2 - \alpha^2)t)} \operatorname{sech} \alpha(x - St) \quad (4.9)$$

ile verilir. Bu çözüm,  $S$  hızıyla ilerleyen ve büyüklüğü  $\alpha$  reel parametresine bağlı bir solitonu gösterir. Genlik ve hız parametrelerden bağımsızdır. Tek soliton çözümünün simülasyonu bazı sayısal metotlar ile herhangi bir problem olmaksızın çalışılmıştır. Mevcut bazı çalışmalarla aynı sonuçları elde edebilmek için hesaplamalar,  $-20 \leq x \leq 20$  aralığı içinde  $q = 2$ ,  $S = 4$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$ ,  $\Delta t = 0.005$ ,  $h = 0.05$  parametreleri ile yapılmıştır.  $\alpha = 1$  olmak üzere kompleks değerli  $U$  fonksiyonunun modülü

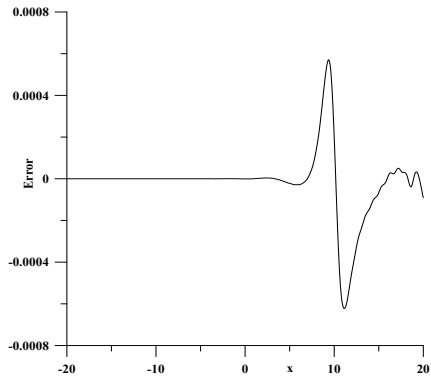
$$|U| = \operatorname{sech}(x - 4t),$$

şeklinde herhangi bir değişme olmaksızın 4 hızıyla sağa doğru ilerleyen bir soliton gösterir. Simülasyon  $t = 2.5$  zamanına kadar çalıştırıldı.  $L_\infty$ ,  $L_2$  hata normları ve

farklı korunum sabitleri Tablo 4.1 de gösterilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, hata normları algoritmanın çalışması esnasında çok küçük kalmıştır. Bu yüzden solitonun yayılması iyi bir şekilde gerçekleşmiştir. İlerleyen solitonun modülünün simülasyonu  $t = 2.5$  zamanında Şekil 4.1 de gösterilmiştir. Hata (sayısal çözüm–analitik çözüm) dağılımı  $t = 2.5$  zamanında Şekil 4.2 de verilmiştir. Şekle bakıldığında, maksimum hatanın solitonun tepe konumu olan  $x = 10$  civarında ortaya çıktığı görülmektedir. Önerilen metotla simülasyon esnasında  $C_1$  korunum sabiti değişmezken,  $C_2$  sabiti  $\%2 \times 10^{-5}$  den az bir değişimle elde edilmiştir.



Şekil 4.1: Tek soliton simülasyonu



Şekil 4.2:  $t = 2.5$  zamanındaki hata

Zaman	$C_1$	$C_2$	$L_\infty$	$L_2$
0.0	2.0	7.3333333	0.0000	0.0000
0.5	2.0	7.3333334	0.0002	0.0002
1.0	2.0	7.3333334	0.0003	0.0004
1.5	2.0	7.3333335	0.0004	0.0006
2.0	2.0	7.3333335	0.0005	0.0008
2.5	2.0	7.3333335	0.0006	0.0009

$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0.05	0.005	0.0003	0.0000000	0.0000000
0.3125	0.02	0.002	0.0000000	0.0000063
0.03	0.005	0.0003	0.0000000	0.0000000
0.05	0.001	0.00001	0.0000000	0.0000000
0.08	0.002	0.00003	0.0000000	0.0000000
0.3125	0.0026	0.006	0.0000000	0.0000198

Tablo 4.2 ve 4.3 de genlik 1 ve 2 için farklı zaman ve konum adımları alınarak  $L_\infty$  hata normu ile  $\hat{C}_1$  ve  $\hat{C}_2$  nin değerleri verilmiştir.  $C_{10}$  ve  $C_{20}$   $t = 0$  zamanındaki  $C_1$  ve  $C_2$  nin değerleri olmak üzere  $\hat{C}_1 = \frac{C_1 - C_{10}}{C_{10}}$ ,  $\hat{C}_2 = \frac{C_2 - C_{20}}{C_{20}}$  dir. Mevcut metotla elde edilen korunum sabitlerinin ilgili hatalarının küçük olduğu hesaplanan sonuçlardan anlaşılmaktadır.

Tablo 4.3 :  $t = 1$  zamanda genlik = 2 için sonuçların karşılaştırması

$h$	$\Delta t$	$L_\infty$	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0.1	0.005	0.0007	0.0000000	0.0000000
0.1563	0.0048	0.002	0.0000000	0.0000026
0.015	0.005	0.001	0.0000000	0.0000001
0.02	0.0025	0.0003	0.0000000	0.0000000
0.02	0.0001	0.0000	0.0000000	0.0000000
0.07	0.012	0.006	0.0000000	0.0000027

### 4.3.2 İki solitonun çarpışması

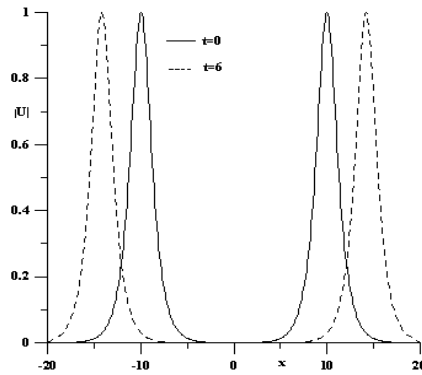
İki solitonun çarpışması

$$U_j(x, 0) = \alpha_j \sqrt{2/q} e^{i(\frac{S}{2}(x-x_j))} \operatorname{sech} \alpha_j (x - x_j)$$

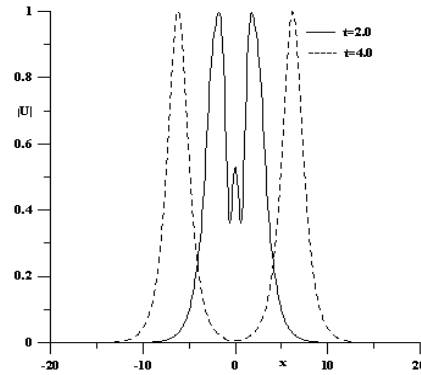
ile verilir. Burada

$$U(x, 0) = U_1(x, 0) + U_2(x, 0) \quad (4.10)$$

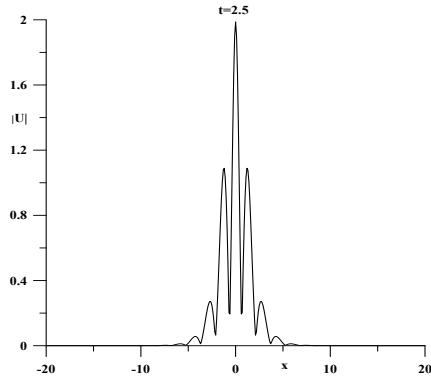
başlangıç koşullarıyla, zıt yönde hareket eden iki solitonun çarpışması  $-20 \leq x \leq 20$  çözüm bölgesi içinde  $q = 2$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $S_1 = -4.0$ ,  $x_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 1.0$ ,  $S_2 = 4.0$ ,  $x_2 = -10$  parametreleri ile gözlemlenmiştir.



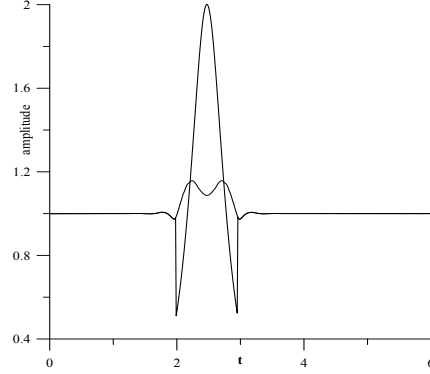
Şekil 4.3: İki solitonun çarpışması



Şekil 4.4: İki solitonun çarpışması



Şekil 4.5: İki solitonun çarpışması



Şekil 4.6: Zaman-Genlik grafiği

Yukarıdaki şart (4.10) ve parametreler daha önceki mevcut çalışmalarla aynı olarak seçilmiştir. Bu başlangıç koşulu, 1 eşit genliğe sahip iki soliton tanımları ve bu iki solitondan biri  $x = -10$  konumu civarında diğeri ise  $x = 10$  konumu civarında yerleşmiştir. 4 hıza sahip aynı büyüklükteki iki solitonun ters yönde hareketi gözlemlenmiştir. Program  $t = 6$  zamanına kadar çalıştırılmış ve iki solitonun birbiriyle çarpışması Şekil 4.3-4.5 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması çözüm bölgesinin ortasında meydana gelmiştir. Bu durum  $t = 2.5$  zamanında Şekil 4.5 de verilmiştir. Aynı zamanda, bu solitonların çarpışmadan sonraki biçimlerinin aynı kaldığını Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 e bakarak söyleyebiliriz.

Tablo 4.4 de iki soliton problemi için korunum sabitlerinin değerleri farklı zamanlar için verilmiştir. Algoritmanın çalışması boyunca,  $C_1$  sabit kalırken,  $C_2$  başlangıç durumuna göre %0.11 den daha az bir değişime uğramıştır. Çarpışmanın ardından  $C_2$  korunum sabiti başlangıçtaki değerine dönmektedir. Bu yüzden, mevcut algoritma ile korunum sabitlerinin tatmin edici bir biçimde bulunduğunu söyleyebiliriz. Çarpışmanın daha iyi gözlemlenebilmesi için zamana karşı solitonların genlikleri Şekil 4.6 da gösterilmiştir.

Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0.0	4.00000	14.66666	3.5	4.00000	14.66667
0.5	4.00000	14.66667	4.0	4.00000	14.66667
1.0	4.00000	14.66667	4.5	4.00000	14.66667
1.5	4.00000	14.66667	5.0	4.00000	14.66667
2.0	4.00000	14.66663	5.5	4.00000	14.66667
2.5	4.00000	14.66556	6.0	4.00000	14.66672
3.0	4.00000	14.66665			

$t = 1$  zamanında de genlik= 1 için iki soliton simülasyonunun sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$h$	$\Delta t$	Zaman	$\hat{C}_1$	$\hat{C}_2$
0.1	0.01	1.5	0.000000	0.000000
		2.5	0.000000	-0.000008
		3.5	0.000000	0.000000
		4.5	0.000000	0.000000

### 4.3.3 Solitonların oluşumu

(a) **Duran soliton oluşumu:**  $U(x, 0)$  başlangıç koşuluyla, eğer

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, 0) dx \geq \pi \quad (4.11)$$

ise, zamanla bir soliton ortaya çıkacağı, aksi takdirde soliton oluşmayacağı teorik olarak bilinmektedir. Bu kısımda aynı gözlemi Maxwell başlangıç koşulu



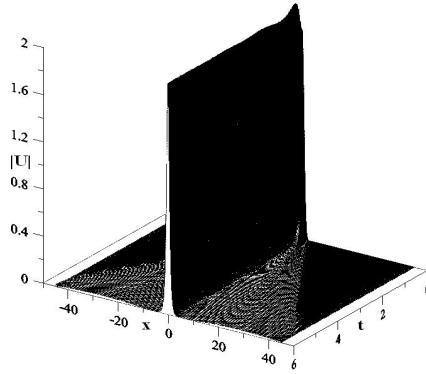
$$U(x, 0) = Ae^{-x^2} \quad (4.12)$$

yi kullanarak  $C = A\sqrt{\pi}$  için yapmaya çalışacağız. Böylece (4.12) başlangıç koşuluyla  $A \geq \sqrt{\pi} = 1.7725$  için solitonun oluşacağını,  $A < \sqrt{\pi}$  için ise solitonun oluşmayacağını tahmin etmekteyiz.

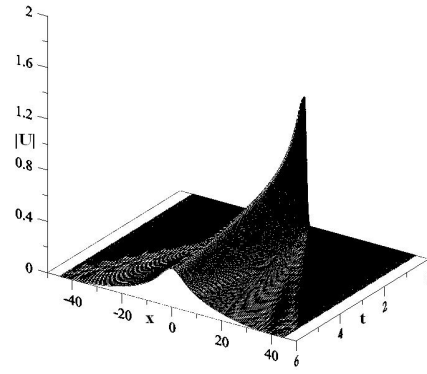
Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesinde  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.04$ ,  $A = 1$ ,  $1.78$  ve  $q = 2$  parametrelerinin kullanılmasıyla incelenmiştir. Program, solitonun üretildiği  $t = 30$  zamana kadar çalıştırılmıştır. Solitonun maksimumu Şekil 4.7 de gösterilmiştir. Bu şekle baktığımızda,  $A = 1.78$  ile elde edilen solitonun genliğinin  $\sqrt{\pi} = 1.7725$  den daha büyük olduğunu söyleyebiliriz. Şekil 4.8 e baktığımızda ise,  $A = 1$  ile elde edilen başlangıç titreşimlerinin zamanla söndüğünü görebiliriz.

$A = 1.78$  için korunum sabitlerinin analitik değerleri  $C_1 = A^2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3.97100$  ve  $C_2 = \frac{1}{4}A^2(2\sqrt{2} - qA^2)\sqrt{\pi} = -4.92562$  olarak hesaplanmıştır. Mevcut algoritma ile elde edilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri ise Tablo 4.6 da verilmiştir. Bu verilere baktığımızda  $A = 1.78$  için  $C_1$  değerinin analitik değer ile aynı kaldığını,  $C_2$  nin ise biraz değiştiğini söyleyebiliriz.

Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3.97100	-4.92562	7	3.97100	-4.93287
1	3.97100	-4.93240	8	3.97100	-4.93279
2	3.97100	-4.93377	9	3.97100	-4.93289
3	3.97100	-4.93326	10	3.97100	-4.93306
4	3.97100	-4.93335	15	3.97100	-4.93375
5	3.97100	-4.93346	20	3.97100	-4.93304
6	3.97100	-4.93298	30	3.97100	-4.93445



Şekil 4.7 : Duran soliton oluşumu



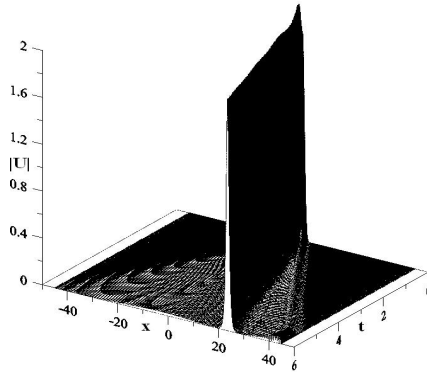
Şekil 4.8 : Duran soliton oluşumu

**(b) İlerleyen soliton oluşumu:** Önceki test problemindeki parametreler kullanılarak ilerleyen soliton oluşumu

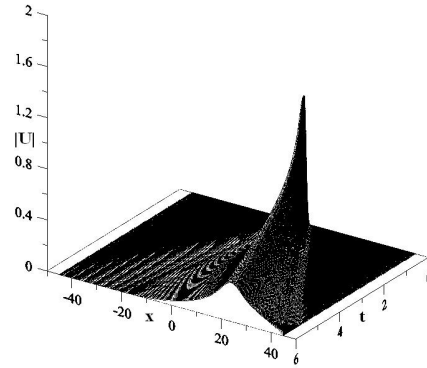
$$U(x, 0) = Ae^{-x^2+2ix} \quad (4.13)$$

Maxwell başlangıç koşulu ile araştırılmıştır. Böylece  $A = 1.78$  iken 2 yüksekliğine ve 4 hızına sahip hareketli soliton zaman içinde gelişmiştir.  $t = 6$  zamanında,  $x$  pozitif doğrultuda hareket eden solitonun tepe noktasının konumu  $x = 24$  olarak kaydedilmiştir. Böylece sayısal hız  $v = \text{alınan mesafe/zaman} = 24/6$  olarak bulunur. İlerleyen solitonun korunum sabitlerinin analitik değerleri  $A = 1.78$  ve  $q = 2$  için  $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 = 3.97100$  ve  $C_2 = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}qA^4 = 10.95838$  olarak hesaplanmıştır. İlerleyen soliton Şekil 4.9 ve 4.10 da çizilmiştir. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 4.7 de verilmiştir. Görüldüğü gibi,  $C_1$  sabit kalmış,  $C_2$  ise %1.95 den daha az bir değişiklikle bulunmuştur. Başlangıç koşulunda  $A = 1$  kullanılırsa, Şekil 4.10 dan da görüldüğü gibi, yine solitonun zamanla söndüğü görülmektedir.  $A = 1$  ve  $A = 1.78$  ( $A = 1.78$  nokta ve  $A = 1$  çizgi) için Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 de hem duran hemde ilerleyen solitonların maksimumları gösterilmiştir.

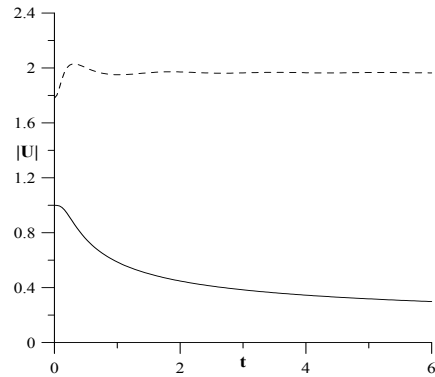
Zaman	$C_1$	$C_2$	Zaman	$C_1$	$C_2$
0	3.97100	10.95837	7	3.97100	10.97496
1	3.97100	10.97104	8	3.97100	10.97452
2	3.97100	10.97294	9	3.97100	10.97467
3	3.97100	10.97289	10	3.97100	10.97557
4	3.97100	10.97336	15	3.97100	10.97222
5	3.97100	10.97374	20	3.97100	10.97533
6	3.97100	10.97592	30	3.97100	10.97788



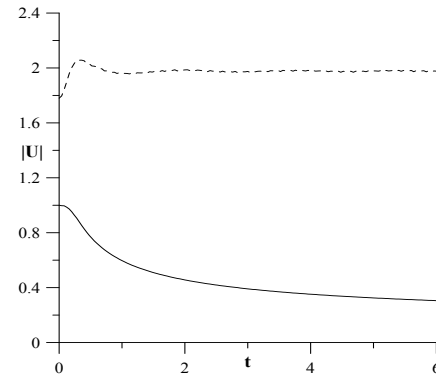
Şekil 4.9 : İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 4.10 : İlerleyen soliton oluşumu



Şekil 4.11 : Başlangıç koşulu (4.12)



Şekil 4.12 : Başlangıç koşulu (4.13)

#### 4.4 Sonuç

Bu bölümde, kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile sınırlı bir aralıkta Schrödinger denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Schrödinger denkleminde, zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson metodu ve konum ayrıştırması için de kuartik B-spline fonksiyonları kullanılmıştır. Böylece bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı sınır koşulları kullanılarak eşitlendikten sonra, elde edilen denklem sistemi fortran kodları kullanılarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında her bir zaman adımında iç iterasyon yardımıyla iyileştirme de yapılmıştır. Tek soliton çözümü, iki solitonun çarpışması ve soliton oluşumu gibi standart test problemleri ile verilen metodun doğruluğu ve güvenilirliği kanıtlanmıştır. Sonuçlar analitik değerler ile karşılaştırılmıştır. Korunum sabitlerini hesaplarken geliştirilmiş dikdörtgenler yöntemi kullanmamıza rağmen, tablolardanda görüldüğü gibi bu sabitler programın çalışması boyunca yeterince korunmuştur. Hata dağılımı çeşitli zamanlar için hesaplanmış,  $C_1$  sabitinde değişiklik olmazken  $C_2$  sabitinde çok az değişiklik olduğu görülmüştür. Aynı hıza sahip iki solitonun çarpışması sonrasında bile her iki dalganın şekli değişmeksizin aynı kalmıştır. Soliton oluşumu  $-45 \leq x \leq 45$  çözüm bölgesi üzerinde  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.04$ ,  $A = 1$ ,  $1.78$  ve  $q = 2$  parametreleri kullanılarak incelenmiş, solitonun maksimumu  $\sqrt{\pi} = 1.7725$  den daha büyük bir genlikle zaman içinde gelişmiş. Genel olarak, kuartik B-spline kolokeyşin metodunun kullanılması sonucunda bulunan korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin analitik değerlere yakın olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak incelenen üç test problemine göre, Schrödinger denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için önerdiğimiz kuartik B-spline kolokeyşin metodunun farklı denklemler içinde güvenilir bir şekilde kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

## BÖLÜM 5

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada konuma göre parçalanmış RLW, Burger ve NLS denklemlerinin kuartik B-spline sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümleri araştırılmış, çözümlerin doğruluğu tek dalga çözümü, iki dalganın çarpışması, ardışık dalgaların gelişimi, şok dalgaları, ilerleyen dalgalar ve dalga oluşumu gibi test problemleri kullanılarak kontrol edilmiştir.

Birinci bölümde; solitary, soliton, ilerleyen dalgalar, lineer olmayan oluşum denklemleri ve korunum kanunları ile ilgili kısa bilgiler verildikten sonra, sonlu farklar, sonlu elemanlar ve spline kavramları ile birlikte sayısal çözümleri araştırılacak olan RLW, Burger ve NLS denklemleri tanıtılmıştır. İkinci bölümde RLW denkleminin sayısal çözümü, üçüncü bölümde Burger denkleminin sayısal çözümü, dördüncü bölümde ise NLS denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. İkinci ve üçüncü bölümlerde denklemlerin konuma göre parçalanıp çözülmesindeki esas amaç, parçalanmanın sayısal çözümlerdeki etkisini görmektir. Bilindiği gibi bazı fiziki olayları modelleyen denklemlerde konuma göre yüksek mertebeden türevler bulunmaktadır. Bu şekilde içinde yüksek mertebeden türev bulunduran denklemler türevin mertebesi düşürülerek bizim önerdiğimiz şekilde çözümlenip çözülemeyeceğini test ettik. Sonuç olarak gördük ki, önerdiğimiz yöntemler ilgili bazı denklemlerde güvenle uygulanabilecektir.

Diğer bölümlerde sırasıyla RLW, Burger ve NLS denklemlerinin sayısal çözümleri araştırılmış ve sayısal çözümlerin doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir. İkinci bölümdeki ilk test probleminde, konum aralığı bölünme sayısı sabitken, zaman artım uzunluğu azaltıldığında yada zaman artımı sabitken konum aralığı bölünme sayısı arttırıldığında, hata normlarında azalması gibi benzer sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca iki dalganın çarpışması test probleminde de çarpışmadan sonra dalgaların genliklerinde fazla bir değişme olmadığı gözlenmiş, yani, çarpışma işleminden önce ve çarpışma işleminden sonra her durum için de büyük genlikli ve küçük genlikli dalgaların şekilleri korunmuş, korunum sabitlerinin iyi bir şekilde

elde edildiği görülmüş, böylece algoritmanın bu test problemini de iyi modellediği sonucuna varılmıştır. İlaveten ardışık dalgaların gelişimi test problemi de önerilen yöntem ile iyi bir şekilde modellenmiştir. Üçüncü bölümde de yine Burger denklemi için uygulanan algoritma, şok dalgaları ve ilerleyen dalgalar sayısal problemleri kullanılarak test edilmiş ve yöntemin bu denklem içinde güvenilir sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir. Son bölümde ise Schrödinger denkleminin sayısal çözümlerini elde edebilmek için kurulan algoritmanın güvenilirliği, solitonların ilerlemesi, iki solitonun çarpışması ve solitonların oluşumu gibi test problemleri kullanılarak incelenmiştir.

Sonuç olarak bu çalışmadan, kuartik B-spline kolokeyşin metodu, hem uygulamadaki kolaylığı ve hemde her iki denklemin sayısal çözümlerinde verdiği iyi sonuçlar nedeniyle, benzer tipteki kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak uygun bir metot olduğu sonucuna varılabilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alexander, M. E. and Morris, J. LL, 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive Waves, *J. Comput. Physics.*, 30, 428-451.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, A Galerkin approach to the solution of Burgers' equation, University of Wales, Bangor, Math. Preprint, 90.04.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1992, A collocation method for Burgers' equation using cubic B-splines, *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 100,325-337.
- Avilez-Valente, P. and Seabra-Santos, F. J., 2004, A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation, *Comput. Mech.*, 34, 256-270.
- Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J., 1972, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A272, 47-78.
- Bhardwaj, D. and Shankar, R., 2000, A computational method for regularised long wave equation, *Comp. Math. Appl.*, 40, 1397-1404.
- Bona, J. L. and Bryant, P. J., 1993, A mathematical model for long waves in nonlinear dispersive system, *Proc. Cambridge Phill. Soc.* 73, 391.
- Chang, Q. Wang, G. and Guo, B. 1995, Conservative scheme for a model of non-linear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary motion, *J. Comput. Physics.*, 93, 360-375.
- Chaohao, G., 1995, Soliton theory and its applications, Springer, 403 p.
- Cole, J. D., 1951, On a quasi-linear parabolic in aerodynamics, *Quarterly of Applied Math.*, 9, 225-236.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

- Crank J. and Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 43, 50–64.
- Crawford, F., 1968, Waves: Berkeley Physics Course, Vol. 3 Waves, Mcgraw-Hill College, 600 p.
- Dağ, İ., 1999, A quadratic B-spline finite element method for solving nonlinear Schrödinger equation, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 174, 247-258.
- Dağ, İ., 2000, Least squares quadratic B-spline finite element method for the Regularized long wave equation, Comp. Methods Appl. Mech. Eng, 182, 205-215.
- Dağ, İ. and Özer, M. N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, Appl. Math. Modelling, 25, 221-231.
- Dağ, İ., Doğan, A. and Saka, B., 2003, B-spline collocation methods for numerical solutions of RLW equation, Int. J. Comput. Math., 80, 743-757.
- Dağ, İ., Irk, D. and Saka, B., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, Appl. Math. Comput., 163, 199-211.
- Dağ, İ., Saka, B. and Boz, A., 2005, B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation, Appl. Math. Comput., 166, 506-522.
- Dağ, İ, Saka, B. and and Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, J. Comput. Appl. Math., 190, 532-547.
- Doğan, A, 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, Comm. Numer. Methods Eng., 17, 485-494.
- Doğan, A. 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, Applied Mathematical Modelling, 26 (7), 771-783.



### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Eilbeck, J. C and McGuire, G. R., 1975, Numerical study of the RLW equation I: Numerical Methods, *J. Comput. Physics.*, 19, 43-57.
- Eilbeck, J. C and McGuire, G. R., 1977, Numerical study of the RLW equation II: Interaction of Solitary Waves, *J. Comput. Physics.*, 23, 63-73.
- El-Sayed, S.M. and Kaya, D., 2006, A numerical solution and an exact explicit solution of the NLS equation, *Appl. Math. Comput.*, 172, 1315-1322.
- Evans, D. J. and Abdullah, A. R., 1984, The group explicit method for the solution of Burger equation, *Computing*, 32, 239-253.
- Falkovich, G., 2007, Soliton: A brief history of , <http://www.weizmann.ac.il/~home/fnfal/soliton.pdf>.
- Fletcher, C. A. J., 1983, A comparison of finite element and finite difference solutions of the one- and two-dimensional Burgers' equations, *Jour. Comp. Physics*, 51, 159-188.
- Fordy, A.P., 1990, Soliton theory: a survey of results, Manchester Univ Pr, 300 p.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters* 19, 1095-1097.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, Solitary wave of the regularised long wave equation, *J. Comput. Physics.*, 91, 441- 459.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Zaki, S.I. and Sharawi, Z., 1993, A Leapfrog algorithm and stability studies for the nonlinear Schrödinger equation, *Arab. J. Sci. Eng.*, 18, 23-32.
- Gardner, L. R. T. and Dağ, İ., 1995, The boundary-forced regularised long-wave equation, *Il Nuova Cimento*, Vol. 110 B, N. 12, 1487-1496.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Dağ, İ., 1995, A B-spline finite element method for the Regularized long wave Equation, *Commun. Numer. Methods Eng.*,11, 59-68.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 12(11), 795-804.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A. and Amein, N. K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, *Comput Methods in Appl. Mech. Eng.*, 147, 147-152.
- Harvard Gazette Archives, April 20, 2006, Solitons: next wave in electronics, <http://www.news.harvard.edu/gazette/2006/04.20/10-soliton.html>.
- Hopf, E., 1950, The partial differential equation  $U_t + UU_x = U_{xx}$ , *Comm. Pure App. Math.*, 3, 201-230.
- Höllig, K., 2003, Finite element methods with B-splines, *Society for Industrial & Applied Mathematics*, 145 p.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.
- Iskandar, L. and Mohsen, A, 1992, Some numerical experiments on the splitting of Burgers' equation, *Num. Meth. Par. Diff. Eq.*, 8, 267-276.
- Jain, P. C. and Holla, D. N., 1978, Numerical solutions of coupled Burgers' equation, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 13, 213-222.
- Jain, P. C. and Lohar, B. L., 1979, Cubic spline technique for coupled non-linear parabolic equations, *Comp. & Maths. with Appl.*, 5, 179-185.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Jain, P. C., Shankar, R. and Singh, T. V., 1993, Numerical solution of regularized long-wave equation, *Commun. Numer., Methods Eng.*, 9, 579-586.
- Jain, P. C., Shankar, R. and Singh, T. V., 1995, Numerical technique for solving convective-reaction-diffusion equation, *Math. Comput. Modelling*, 22 (9), 113-125.
- Karpman, V.I. and Krushkal, E.M., 1969, Modulated waves in nonlinear dispersive media, *Soviet Phys. JETP*, 28, 277-281.
- Khuri, S.A., 2004, A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type, *Chaos, Solitons and Fractals*, 20, 1037-1040.
- Korteweg, D.J and De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine*, 39, 422-443.
- Kutluay, S., Bahadır, A. R. and Özdeş, A., 1999, Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *J. Comp. App. Maths.*, 103, 251-261.
- Kutluay, S., Esen, A. and Dağ, I., 2004, Numerical solutions of the Burgers' equation by the least squares quadratic B-spline finite element method, *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21-33.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons, 677 p.
- Olver, P. J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 143-159.
- Padam, C. J. and Iskandar, L., 1979, Numerical solutions of the regularized long wave equation, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 20, 195-201.
- Peregrine, D. H, 1966, Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid. Mech.* 25 (2), 321-330.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

- Prenter, P. M., 1975, Splines and variational methods, John Wiley&Sons, 336 p.
- Raslan, K.R., 2004, A computational method for the equal width equation, International Journal of Computer Mathematics 81(1), 63-72.
- Raslan, K. R., 2005, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, Appl. Math. Comput., 167, 1101-1118.
- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement. of Science (John Murray, London) pp 311–390.
- Robinson, M.P., 1997, The solution of nonlinear Schrödinger equations using orthogonal spline collocation, Comput. Math. Appl., 33, 39-57.
- Rosenberg, V., 1969, Methods for solution of partial differential equations, 113, American Elsevier Publishing Inc., New York, 1969.
- Saka, B., Dağ, İ. and Doğan, A., 2004, A Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quadratic B-splines, Int. J. Comput. Math., 81, 727-739.
- Scott, A.C., Chu, F.Y.F. and McLaughlin, D.W., 1973, The soliton: A new concept in applied science, Proc. IEEE, 61, 1443-1483.
- Sheng, Q., Khaliq, A.Q.M. and Al-Said, E.A., 2001, Solving the generalized nonlinear Schrödinger equation via quartic spline approximation, J. Comput. Phys., 166, 400-417.
- Smith, G.D., 1978, Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press, 304 p.
- Thomas, J.W., 1995, Numerical partial differential equations, Springer, 437 p.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)**

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics* 57(5), 841-847.

Wazwaz, A.M., 2008, A study on linear and nonlinear Schrödinger equations by the variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals*.

Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D, 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, *Physical Review Letters* 15, 240-243.

Zakharov, V.E. and Shabat, A.B., 1972, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Phys. JETP*, 34, 62-69.

Zaki, S. I., 2000, A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation, *Comput. Method. Appl. Engrg.*, 188, 121-134.

Zheng, S., 2004, *Nonlinear evolution equations*, Chapman & Hall/CRC, 304 p.