

Q-Deforme Fermiyonik Newton Osilatörlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri

Emine Arslan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

ŞUBAT 2009

Bu çalışma 106T593 nolu TÜBİTAK araştırma projesi tarafından desteklenmiştir.

Statistical Mechanical Properties of the q -Deformed Fermionic Newton Oscillators

Emine Arslan

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Physics

FEBRUARY 2009

This work was supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under the project number 106T593.

Q-Deforme Fermiyonik Newton Osilatörlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri

Emine Arslan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Fizik Anabilim Dalı
Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Abdullah Algın

ŞUBAT 2009

ONAY

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Emine Arslan'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Q-Deforme Fermiyonik Newton Osilatörlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Abdullah Algın

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç.Dr. M. Celalettin Baykul

Üye : Doç.Dr. Cem Yüce

Üye : Yrd.Doç.Dr. Sertaç Eroğlu

Üye : Yrd.Doç.Dr. Bülent Saka

Üye : Danışman Doç.Dr. Abdullah Algın

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, ilk olarak doğada bulunan temel parçacık sistemlerine fiziksel ve matematiksel bakış açısı kazandıran simetriler üzerinde durulmaktadır. Özellikle, üniter gruplar ve özellikleri ele alınmaktadır. Bir sonraki kısımda, özdeş parçacıklar sistemi ve kuantum mekaniksel özellikleri incelenmektedir. Bozon ve fermiyon parçacık sistemleriyle ilgili çeşitli operatörler ve özel olarak çok-boyutlu fermiyon osilatörleri sistemi üzerinde durulmaktadır.

Ardından, ideal Fermi gazının termodinamik ve istatistiksel özellikleri yüksek ve düşük sıcaklık limitlerinde incelenmektedir. Ayrıca, ideal Fermi gazına ait büyük üleşim fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, iç enerji, ısı kapasitesi, entropi gibi termodinamik fonksiyonlar türetilmektedir.

Daha sonra, bu tezin temel çalışma konusu olan çok-boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin termo-istatistiksel özellikleri ele alınmaktadır. Bu osilatörlerin çok-boyutlu olması onların önemli bir özelliğidir. Bu sistemin termo-istatistiksel özelliklerini incelemek için dağılım fonksiyonu ve bunun yardımıyla büyük üleşim fonksiyonu bulunmaktadır. Böylece, fermiyonik Newton osilatör gazının iç enerji, kimyasal potansiyel, entropi gibi termodinamik karakteristikleri q -deformasyon parametresi cinsinden elde edilmektedir. Sistemin kimyasal potansiyeli, fermiyonların q -deformasyonunun yalnızca sonlu sıcaklıklarda etkili olduğu sonucunu vermektedir. Ayrıca, fermiyonik Newton osilatör gazının dağılım ve entropi fonksiyonlarının q -deformasyon parametresinin çeşitli değerlerine göre değişimleri incelenmiştir. Bununla birlikte, bu fonksiyonlar, hem ideal hemde deforme Fermi sistemlerinin sonuçları ile kıyaslanmaktadır. q -deforme fermiyonik Newton osilatör gazının tüm termo-istatistiksel fonksiyonları $q = 1$ limitinde standart (deforme olmayan) fermiyon gazı sonuçlarını vermektedir.

Son olarak, q -deforme fermiyonik Newton osilatör gazının uygulama alanları ve bu çalışmanın önemi belirtilmektedir.

SUMMARY

In this thesis, first of all, it is emphasized on symmetry which gains physical and mathematical point of view on systems of fundamental particles in nature. In particular, unitary group and its properties are discussed. Also, system of identical particles and their conclusions are examined. Several kind of operators related to the fermion and boson particle systems and particularly the multi-dimensional fermion oscillators algebra are discussed.

Moreover, thermodynamic and statistical properties of the usual Fermi gas are examined in the low-and high-temperature limits. Also, thermodynamic functions of the ideal fermion gas, such as the grand partition function, the distribution function, the internal energy, the specific heat, the entropy are derived.

Furthermore, thermo-statistical properties of the multi-dimensional q -deformed fermionic Newton oscillators which covers the original part of this thesis are investigated. An important property of this system is its multi-dimensional nature. In order to investigate thermodynamical properties of the system, the grand partition function is derived by means of the distribution function. Hence, thermodynamic characteristics of the fermionic Newton oscillators such as the internal energy, the chemical potential, the entropy are obtained in terms of the real deformation parameter q . The chemical potential of this system gives that the q -deformation of fermions is just a finite temperature effect. Also, the plots of the distribution and entropy functions of a gas of the fermionic Newton oscillators are drawn in terms of several values of the deformation parameter q . However, these functions are compared with other deformed and undeformed Fermi systems in the literature. In the limit $q = 1$, all thermostatistical functions of the q -deformed fermionic Newton oscillator gas are reduced to the standard (undeformed) fermion gas results.

Finally, some application areas of the q -deformed fermionic Newton oscillator gas and the importance of this thesis are highlighted.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Doç. Dr. Abdullah Alğın'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca, bu çalışmayı 106T593 nolu "Çok-Boyutlu Kuantum Grup Simetrlili Genelleştirilmiş Bozon ve Fermiyon Kuantum Gazlarının Termo-İstatistiksel Özelliklerinin İncelenmesi" isimli proje ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ ve AMAÇ	1
2. SİMETRİ VE DÖNÜŞÜMLER	6
2.1 Grup Teorisinin Rolü	7
2.2 Simetri Tipleri	9
2.3 Korunum Yasaları ve Değişmezlikler	12
2.4 Üniter Grup ve Özellikleri	13
2.4.1 Sürekli grupların üreteçleri	15
2.4.2 SO(2) ve SO(3) dönme grupları	18
2.4.3 Fonksiyonların dönmesi ve yörüngesel açıl momentum	19
2.4.4 SU(2)-SO(3) homomorfizmi	20
2.4.5 Basamak operatör yaklaşımı	22
3. FERMİYON SİSTEMLERİNİN GENEL KUANTUM MEKANİKSEL	
ÖZELLİKLERİ	29
3.1 Permütasyon Simetrisi	29
3.2 Simetrileştirme Prensipleri	31
3.3 Yaratma ve Yoketme İşlemcileri	32
3.3.1 Fermiyonlar	33
3.3.2 Bozonlar	38
3.4 Çok Boyutlu Fermiyon Osilatörleri	41

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4. İDEAL FERMİ GAZININ TERMODİNAMİK VE İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ	43
4.1 İdeal Gazlar: Mikrokanonik Dağılım.....	44
4.2 İdeal Gazlar: Büyük Kanonik Dağılım	49
4.2.1 İdeal Fermi gazı	50
4.3 İdeal Fermi Gazının Hal Denklemi.....	54
5. Q-DEFORME FERMİYONİK NEWTON OSİLATÖRLERİNİN TERMODİNAMİK VE İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ	65
5.1 Çok Boyutlu q -Deforme Fermiyonik Newton Osilatörleri	65
5.2 Fermiyonik Newton Osilatörlerinin Thermo-İstatistiği.....	67
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	79
7. KAYNAKLAR DİZİNİ	82

EKLER

- EK 1. Standart $f_n(z)$ fonksiyonlarının Fortran yazılımları.
- EK 2. Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK 3. Düşük sıcaklıklarda $x = \beta\varepsilon_p$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak ideal sistemde Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun Fortran yazılımları.
- EK 4. Düşük sıcaklıklarda $q \geq 1$ ve $q \leq 1$ durumu için $x = \beta\varepsilon$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun Fortran yazılımları.

EKLER (devam)

- EK 5. $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{3/2}(q, z)$ nin Fortran yazılımları.
- EK 6. $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{5/2}(q, z)$ nin Fortran yazılımları.
- EK 7. $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme entropi fonksiyonu S/Nk 'nin Fortran yazılımları.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Denklem (2.5) in ifadesi	16
4.1 Standart $f_n(z)$ fonksiyonları.....	52
4.2 Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonu.....	59
4.3 Düşük sıcaklıklarda $x = \beta\varepsilon_p$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak ideal sistemde Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu	63
5.1 Düşük sıcaklıklarda $q \geq 1$ durumu için $x = \beta\varepsilon$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu.....	69
5.1 Düşük sıcaklıklarda $q \leq 1$ durumu için $x = \beta\varepsilon$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu.....	70
5.2 $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{3/2}(q, z)$	72
5.3 $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{5/2}(q, z)$	73
5.4 $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme entropi fonksiyonu S/Nk	78

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Basit simetriler ve sonuçları	11
4.1 Temel parçacık fiziğindeki en önemli gruplar	15

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\hat{A}	Gözlemlenebilir dinamik değişken
b	Bozonlar için yoketme operatörü
b^*	Bozonlar için yaratma operatörü
f	Fermiyonlar için yoketme operatörü
f^*	Fermiyonlar için yaratma operatörü
\hat{C}	Parçacık-antiparçacık simetri operatörü
C_V	Isı kapasitesi
c	q -deforme fermiyonlar için yoketme operatörü
c^*	q -deforme fermiyonlar için yaratma operatörü
E	Toplam enerji
ε_F	Fermi enerjisi
F	Serbest enerji fonksiyonu
$f_n(z)$	Fermi-Dirac fonksiyonları
$f_n(q, z)$	q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu
$[f_i^q]$	FN-osilatör gazının dağılım fonksiyonu
g_i	Çakışma sayısı
h	Planck sabiti
\hbar	$h/2\pi$
\hat{H}	Hamiltonyen operatörü
\hat{J}_i	Toplam açısal momentum operatörü
k	Boltzmann sabiti
\hat{L}	Yörüngesel açısal momentum operatörü
$\langle n_p \rangle$	Ortalama işgal sayısı
N	Toplam parçacık sayısı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$[\hat{N}]$	Toplam deforme sayı operatörü
\hat{N}	Sayı operatörü
P_{12}	Permütasyon operatörü
\vec{P}_i	i. parçacığın momentum vektörü
P	Basınç
\hat{P}	Parite operatörü
q	Reel deformasyon parametresi
\vec{r}	Konum vektörü
S	Entropi
$SU(n)$	n -boyutta özel üniter grup
$SO(n)$	n -boyutta özel ortogonal grup
S_n	Permütasyon grubu
T	Sıcaklık
T_3	Öteleme grubu
\hat{T}	Zaman tersinirliği operatörü
U	İç enerji
$Z(z, V, T)$	Büyük üleşim fonksiyonu
z	Fugasite
σ_i	Pauli spin matrisleri
λ	Termal dalga boyu
ν	Parçacık başına hacim
$\xi(n)$	Riemann-zeta fonksiyonu
$Q_N(V, T)$	Üleşim fonksiyonu
$ \alpha \dots\rangle$	Çok-parçacık kuantum durumu
$ 0\rangle$	Vakum durumu
μ	Kimyasal potansiyel

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\hat{\Omega}$	Gözlemlenebilir bir operatör
$\phi_\alpha(x)$	Tek parçacık dalga fonksiyonu
$\psi(x_1, x_2)$	İki-parçacık dalga fonksiyonu
1_n	n -boyutta birim matris

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
FN	Fermiyonik Newton
BN	Bozonik Newton

BÖLÜM 1

GİRİŞ ve AMAÇ

Simetri, genel olarak, bir sistem üzerine uygulandığında onu değişmez bırakan operasyon olarak tanımlanabilir. Fizikte simetri, ilk olarak yirminci yüzyılın başlarında nesnelerin yapısındaki ve özellikle yıldızların hareketlerindeki simetrilerin fark edilmesiyle başlamıştır (Gross, 1996). Daha sonra Einstein'ın özel görelilik kuramı (1905) ve kuantum mekaniğinin gelişmesiyle simetri ilkeleri fizikte daha önemli bir hal almıştır. Fizikteki simetrilerin en önemli sonucu korunum yasalarının varlığıdır (Griffiths, 1987). Yani, doğada her bir simetri bir korunumlu niceliği verirken, her korunum yasasında bir simetriyi belirtmektedir. Simetri ve korunum yasaları arasındaki bu ilişki ilk kez Emmy Noether (1918) tarafından ifade edilmiştir.

Doğanın bize sunduğu bir fırsat olan simetriler, karmaşık bir yapıya sahip olan evrenin tanımlanabilmesi için büyük kolaylık sağlamaktadır. Evrenin ilk oluşumu ve gelecekteki hali doğadaki parçacıklar ile anlaşılabilir. Bununla birlikte, doğada var olan daha küçük parçacıklar için daha kısa uzaklıkların incelenmesi gerekir (Gross, 1996). Bu da çok yüksek enerjiler gerektirir ve böylece daha fazla simetri keşfedilir. Düşük enerjilerde ise simetriler saklı olabilmektedir. Böylece, doğanın daha yeni ve daha temel yasaları araştırıldığında yeni simetrilerin de bulunabileceği anlamına gelir.

Simetriler sürekli ya da kesikli olabilirler. Sürekli simetriler, sürekli olarak değişebilen parametrelerin bir seti ile belirtilir. Ayna yansıması ve zaman tersinirliği değişmezliği gibi örnekleri olan kesikli simetriler ise yeni bir korunumlu niceliğe neden olmazlar (Arfken and Weber, 1995; Gross, 1996).

Simetri operasyonlarının her bir seti bir grup oluşturur (Arfken and Weber, 1995). Grup teorisi, fizikte simetri ve değişmezlikler için kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Ayrıca parite, açısal momentum gibi konularda önemli uygulamaları olması nedeniyle fizikçiler tarafından yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte, grup teorisi ile simetrilerin birçok sonuçları ortaya çıkmaktadır (Gross, 1996). Örneğin, atom spektrumunda kullanılan seçim kuralları dönme simetrisinin bir sonucudur. Geometride grup teorisinin en temel rolü matematikçiler tarafından ondokuzuncu yüzyılda fark

edilmiştir. Bunun bir örneği de öklidyen grubudur (Arfken and Weber, 1995). Fizikte ise grup teorisi en çok kuantum mekaniğinin cebirsel ve temsilsel özelliklerinde kendine yer bulur (Sakurai, 1994).

Kuantum teoride değişmezlik ilkeleri klasik mekanikte ulaşılanlardan daha önemli sonuçlar vermektedir. Klasik mekanikte simetri yeni bir durumun oluşması için kullanılabilirken, kuantum mekaniğindeki simetri dönüşümlerinin lineerliği ve süperpozisyon durumu ile iki yeni durum oluşturulabilir. Dönmelerle ilgili olan üst üste binmiş bütün durumlar dönmeler altında değişmez olan bir durum verir. Elde edilen bu durum dönme grubunun singlet (tekli) temsilidir. Örneğin, en düşük enerjideki Hidrojen atomunun taban durumu singlet ve dönmeler ile değişmezdir. Böylece, dönmelerin farklı süperpozisyonları simetri grubunun farklı bir indirgenebilir temsili verecektir (Gross, 1996).

Kuantum mekaniği, özdeş parçacıkların değişimi ile yeni bir tür simetriye neden olur (Gross, 1996). Buna göre, bütün temel parçacıkların dalga fonksiyonları böyle bir değişim altında ya işaret değiştirir (antisimetrik) ya da değişmeden kalır (simetrik) kalır. Belinfante (1939) ve Pauli (1940) parçacıkların bu simetri özellikleri ile spinleri arasında bir ilişki olduğunu göstermişlerdir (Greiner et al., 1994). Spin-istatistik teoremi olarak bilinen bu teoreme göre (Karaoğlu, 2003):

- (i) Spinleri buçuklu olan parçacıklar antisimetrik dalga fonksiyonları ile temsil edilirler ve bu gruptaki parçacıklar fermiyonlar olarak adlandırılır.
- (ii) Spinleri tamsayı olan parçacıklar simetrik dalga fonksiyonu ile temsil edilirler ve bu parçacıklara bozonlar denilir.

Kuantum mekaniğine göre, Hilbert uzayında fermiyonlar ve bozonların operatörler ile temsil edilmesi mümkündür (Shankar, 1994). Fermiyon ve bozonların farklı bir yapıya sahip olmaları nedeniyle bu operatörler farklı tanımlıdır. Fermiyonlara ait operatörler antikomütasyon ilişkisini sağlarken, bozonlara ait operatörler ise komütasyon ilişkisine uyarlar. Üçüncü bölümde, Hilbert uzayında bu parçacıklara ait Hamiltonyen ve sayı operatörleri temsilleri de yer almaktadır (Landau and Lifshitz, 1991; Ballentine, 1998).

Birçok bozondan oluşan bir sistemde herhangi bir kuantum durumuna istenildiği kadar parçacık konulabilir. Fermiyonlar ise Pauli dışarılama ilkesine uyarlar. Deneysel gözlemlerle de doğrulanan bu ilkeye göre bir kuantum sisteminde iki fermiyon aynı

anda aynı kuantum durumunda bulunamaz (Taylor and Zafaritos, 1996). Örneğin, çekirdek enerji düzeyleri ve metallerin birçok özellikleri bu ilke ile açıklanır. Pauli ilkesi sadece özdeş parçacıklar için bir kısıtlamadır; farklı türden iki parçacık için bir kısıtlama yoktur.

Bugün, bütün leptonlar ($e, \mu, \tau, \nu_e, \dots$) ve bütün kuarklar (u, d, s, \dots) temel fermiyonlar olarak sayılmaktadır (Greiner et al., 1994). Etkileşmelerin aracı parçacıkları (elektromanyetik etkileşmeler için fotonlar, zayıf etkileşmeler için W^\pm, Z^0 ve güçlü etkileşmeler için gluonlar) ise bozonlardır. Temel olmayan parçacıklar için yalnızca parçacığın içerdiği fermiyon sayısının bilinmesi yeterlidir. Eğer bu sayı çift ise birleşik parçacık bir bozon (mezonlar), eğer tek ise fermiyon (baryonlar) olarak davranır.

Dalga fonksiyonlarının simetri karakteri bir sistemin istatistiksel özellikleri bakımından önemli sonuçlara sahiptir. Bu yüzden, bozonlar için Bose-Einstein ve fermiyonlar için Fermi-Dirac istatistiği şeklinde bahsedilir. Eğer düşük yoğunluk ve yüksek sıcaklığa sahip bir sistem ile çalışılıyorsa o zaman kuantum istatistiği (Bose-Einstein ve Fermi-Dirac), klasik Maxwell-Boltmann istatistiğine dönüşür. Çünkü parçacıkların dalga paketleri arasındaki ortalama uzaklık çok büyük olduğundan üst üste binmeler fazla değildir, bu yüzden parçacıklar yaklaşık olarak ayırtedilebilirler. Yani kuantum etkiler, düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluklu durumlarda önemli rol oynarlar.

Düşük sıcaklıklarda Fermi gazını oluşturan fermiyon parçacıkları en düşük enerjili duruma gitmeye çalışırlar ve bu durumda gaz dejenere olarak adlandırılır. Bir metaldeki elektron gazı, beyaz cüceler, nötron yıldızları, süpernovalar gibi teorilerde dejenere Fermi gazı iyi bir yaklaşım olmaktadır (Huang, 1987; Beiser, 1997).

Birbiriyle etkileşmeyen bağımsız bozonlardan oluşan boze gazı modeli sıfır sıcaklıkta önemli bir kuantum istatistiksel özellik sergiler. Parçacık sayısının korunumlu olduğu durumda, sıcaklık düşürüldükçe parçacıklar taban durumunda toplanmaya başlarlar. Yani sıfır sıcaklıkta bozonlar hep birlikte sıfır enerjili ve momentumlu taban durumuna inerler ve bu durumda Bose-Einstein gazının basınca katkısı yoktur. Bose-Einstein yoğunlaşması denilen bu olay kuantum etkinin makroskobik olarak boy gösterdiği ender olaylardan biridir. Momentum uzayında bir yoğunlaşma olan bu olay aynı zamanda faz geçişi olayını da belirtmektedir (Huang,

1987; Greiner et al., 1994; Pathria, 1996). İdeal Fermi gazında Pauli dışarlama ilkesinden dolayı böyle bir faz geçişi olayı olmaz. Yani, iki fermiyon hiçbir zaman aynı kuantum sayıları setine sahip olamaz. Bu da fermiyonların düşük sıcaklıklarda taban durumunda toplanamayacağını ifade eder. Böylece, düşük sıcaklıklarda fermiyonlar bütün düşük enerjili momentum durumlarını doldurmaya başlarlar ve $T=0$ K de bile yüksek momentuma sahip olan birçok parçacık olabilmektedir. Bundan dolayı, Fermi gazı $T=0$ K de bile büyük basınca sahip olabilmektedir (Reichl, 1998).

Bir denge konumu etrafında harmonik salınımlar yapan bir parçacığın hareketi fiziğin en temel problemlerinden birini oluşturmaktadır. Salıncı problemine iki farklı şekilde yaklaşılabilir: İlk yöntem Schrödinger dalga denklemini doğrudan çözmektir, diğeri bir yöntem ise Hilbert uzayında operatör cebiri yardımıyla çözmektir (Shankar, 1994; Karaoğlu, 2003).

n -boyutta standart bozonik osilatörler sistemi $SU(n)$ grubu altında değişmezlik özelliği göstermektedir (Griffiths, 1987). Örneğin, iki-boyutta bozonik osilatör sistemi $SU(2)$ grubu altında değişmez kalır (Arfken and Weber, 1995). Klasik Lie grubu olan $SU(n)$, determinantı (+1) olan $n \times n$ boyutlu üniter matrislerden oluşur. Yine fermiyon parçacıklarının oluşturduğu standart fermiyon osilatörleri sistemi de $SU(n)$ grubu altında değişmezlik göstermektedir.

Klasik Lie grup ve Lie cebirlerinin reel veya kompleks bir deformasyon parametresi ile genelleştirilmesi kuantum grup ve cebirleri olarak düşünülebilir (Jimbo, 1986; Drinfeld, 1987; Faddeev et al., 1988). q -deforme sistemler matematiksel fizik, istatistik fizik ve yüksek enerji fiziği gibi geniş bir spektrumda birçok uygulama alanına sahiptir. Özellikle bunlar, tam olarak çözülebilen istatistiksel modeller (de Vega, 1989; Pasquier and Saleur, 1990), kuantum mekaniği (Ubricco, 1992; Bonatsos and Daskoloyannis, 1999) gibi teorik fiziğin araştırma alanlarında önemli sonuçlar vermektedirler.

Standart kuantum harmonik osilatör cebirinin q -deformasyonu ilk defa Arık ve Coon tarafından yapılmıştır (Arık and Coon, 1976). Daha sonra q -deforme bozonik osilatörlerinin oluşturduğu sistem için kanonik dağılım kullanılarak q -parametresinin fiziksel yorumu bulunmaya çalışılmıştır (Martin-Delgado, 1991; Neskovic and Urosevic, 1992; Bonatsos, 1992). Daha sonra bu gelişmeler, q -deforme bozonik

osilatör sistemlerinin fermiyonik versiyonlarının çalışmasına yol açmıştır. Buradan hareketle, bozonlar kadar deforme fermiyonlarında termodinamik ve istatistiksel özellikleri geniş bir ilgi görmüştür.

Çok-boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörleri, standart fermiyon sisteminin farklı bir geliştirilmesinden ibarettir (Arik and Dobie, 2001). Ayrıca, bu sistemin önemli özelliklerinden biri çok-boyutlu yeni bir q -fermion osilatör sistemi meydana getirmesidir. Literatürde genellikle bu fermiyon osilatörlerinin bir-boyutlusu çalışılmıştır (Hayashi, 1990; Chaichian and Kulish, 1990; Jing and Xu, 1991; Viswanathan et al., 1992; Swamy, 2006a, 2006b, 2006c).

Bu tez çalışmasının amacı, çok-boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin termodinamik ve istatistiksel özelliklerinin incelenmesidir. Bununla birlikte, q -deformasyon parametresinin bu sistemin özelliklerine etkisi yorumlanmaya çalışılacaktır.

İkinci bölümde, simetri ve simetrilerin kullanımı üzerinde durulmuştur. Ayrıca, simetrilerin matematiksel tanımı olan grup teori ve özellikle üniter grupların özellikleri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, özdeş parçacıklar sisteminin özellikleri ele alınmıştır. Bu bağlamda, fermiyon ve bozon sistemlerinin genel kuantum mekaniksel özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ideal gazların mikrokanonik ve büyük kanonik dağılımda incelenmesi yapılmıştır. Buradan hareketle, ideal Fermi gazının termodinamik ve istatistiksel özellikleri ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, ilk olarak çok-boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatör cebirinin bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra, çok-boyutlu fermiyonik Newton osilatör gazının termo-istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde özel olarak, q -deforme sistemler ve bunların fiziksel önemi üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda, bu çalışmanın temelini oluşturan çok-boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin termodinamik ve istatistiksel özellikleri yorumlanmıştır. Bu özelliklerin idealden ve diğer q -deforme fermiyon çalışmalarından farkları belirtilmiştir. Bununla birlikte, sistemin özelliklerine q -deformasyon parametresinin etkileri tartışılmıştır.

BÖLÜM 2

SİMETRİ VE DÖNÜŞÜMLER

Fiziksel sistemlerin ve özellikle mekanik sistemlerin matematiksel incelenmesi, keyfi olarak seçilmiş de olsalar, bir koordinat sisteminin ve bir de zaman ölçeğinin göz önünde bulundurulmasını ve olayların bunlara göre açıklanmalarını zorunlu kılar (Özemre, 1976). Fakat öyle haller vardır ki sistemi tasvir eden matematiksel ifadeler bazı koordinat dönüşümlerine veya zaman ölçeğine bağlı olmaksızın geçerli olmaya, şekillerini korumaya devam edebilirler; örneğin Newton'un hareket kanununun birbirine göre düzgün doğrusal hareket yapan eylemsizlik sistemlerinde korunduğu gibi.

Mekanik bir sistemi tasvir eden hareket denklemlerinin koordinat sistemine de, zaman ölçeğine de, koordinat eksenlerine de ve eylemsizlik sistemlerine (yani birbirine göre düzgün doğrusal hareket yapan sistemlere) de bağlı olmamaları yani bütün bu dönüşümlere göre şeklen invariant kalmaları halinde göz önüne alınan sisteme kapalı sistem denilir. Kapalı mekanik sistemleri tasvir eden denklemlerin bu tür dönüşümlerde değişmez oldukları söylenir. Fiziksel bir sistemin belirli bir dönüşüm grubuna göre sahip olduğu invariant özelliklerine, o sistemi tasvir eden matematiksel şemanın simetri özellikleri adı verilir (Özemre, 1976).

Bu bölüm simetriler ve simetrilerin kullanımları ile ilgili özel konuların bulunduğu bir topluluk olarak düşünülebilir (Griffiths, 1987). İlk kısım simetrinin matematiksel tanımı ("grup teorisi") hakkında genel bilgiler, simetri tipleri, simetri ve korunum yasaları ("Noether teoremi") arasındaki ilişkiyi içerir. Bu bağlamda, bahsedilen dönme simetrisi ve bu simetrilerin açısal momentum ve spin ile ilişkisinin sonucu oluşan izospin, $SU(3)$ ve $SU(6)$ gibi "iç simetriler", fermiyon ve bozonların sahip olduğu simetri gruplarını içerirler. Bunların dışında parite, yük eşleniği ve zaman yansıması gibi örneklendirilebilen "kesikli simetriler" hakkında da yüzeysel bilgiler verilecektir. Son olarak simetri gruplarından olan üniter (birimsel) grup özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1 Grup Teorisinin Rolü

Fiziksel sistemlerin tanımlayan teorileri, ya teorinin ayrıntılı dinamiğine bakarak ya da teorinin sağladığı simetri özelliklerine bakarak yaklaşım yapılabilir (Lichtenberg, 1978). Bu yaklaşımları açıklamak için kuantum elektrodinamiğin (QED) elektron-elektron saçılmasının diferensiyel tesir kesitini veren örneği ele alınabilir. Eğer paralel-antiparalel şeklinde kutuplanmış elektronlar için diferensiyel tesir kesiti hesaplanırsa, her iki tesir kesit için cevaplar aynıdır. Fakat bu sonuç iki elektronun permütasyon ve dönmeler altında değişmezlik teorisinden de elde edilebilir. Bu durumda iki tesir kesitinin eşitliğini elde etmek için simetrilerin kullanımı uygun olur fakat gerekli değildir. Bununla birlikte, sistemde hesaplar yapılamayacak kadar karışık ya da dinamik teorisi yoksa o zaman simetrilerin kullanımı gereklidir. Örneğin, proton-proton saçılmalarında diferensiyel tesir kesitini doğru olarak veren bir teori olmadığından, simetri kullanarak paralel-antiparalel kutuplanmış protonlar için diferensiyel tesir kesitinin eşit çıkması tahmin edilebilir (Lichtenberg, 1978). Böylece, temel parçacıkların bazı etkileşmelerinde dinamik teori yoksa o zaman simetrinin sonuçlarını anlamak önem taşır.

Bir simetri fiziksel dünyanın doğal bir davranışdır ve böylece her fiziksel yasanın başlangıç noktasıdır (Stancu, 1996). Bir fiziksel sistemin simetrisi dinamiğin temel denklemi olan Lagrangian ya da Hamilton denklemlerinin belirli dönüşümler altında değişmezliği ile ifade edilir. Bu dönüşümler grup oluşturduğu zaman grup teorisi ile simetrileri çalışmak çok faydalı olur. Örneğin, dönmelerin bazı özellikleri düşünülebilir (Lichtenberg, 1978):

- (1) Eğer bir fiziksel sistem döndürülürse, sonra bir daha döndürülürse elde edilen dönüşüm yine bir dönmedir.
- (2) Üç kez ard arda dönmeler uygulandığında bunların hangisinin önce ya da sonra yapılacağı önemli değildir. Çünkü aynı sonuçları verirler. Diğer bir deyişle, bir sistemin dönmesi birleşmeli bir operasyondur.
- (3) Bir sistem sıfır açı ile döndürüldüğünde onun konumu değişmez. Bu işlem bir birim operatördür.
- (4) Eğer bir sistem belirli bir açı ile döndürülürse, ilk duruma gelmesi için geri döndürülmesi gerekir. Bu ikinci operasyon ilk operasyonun tersidir.

Dönmenin bu dört özelliği bir grubun özellikleridir. Uzay ve zamandaki ötelemeler ve aslında bir fiziksel sistem üzerindeki birçok simetri dönüşümleri grup özellikleri taşırlar. Bu sebeplerden dolayı, grup teorisi çalışmak fiziksel sistemlerin simetrilerinin anlaşılabilmesi için önemli ve uygun bir matematiksel yöntemdir.

Dönmelerin diğer özelliklerine bakılırsa: Eğer sisteme bir kez dönme uygulanırsa sonra bir kez daha uygulanırsa sistem sanki ters operasyon uygulanmış gibi başlangıçtaki konumu ile sonlanması gerekli değildir. Diğer bir deyişle, bir sistemin dönme operasyonu komütatif değildir. Böylece, çalışılan grubun elemanları komüt olabilirler ya da olmayabilirler. Eğer grubun bütün elemanları komüt ise bu gruba komütatif ya da abelyen denilir. Uzay ve zamandaki ötelemeler abelyendir, fakat dönmeler abelyen değildir.

Ötelemeler ve dönmeler arasındaki tek fark dönmeler sonlu açılı alanda deyişirken, uzay ve zamandaki ötelemeler sonsuz alanda deyişirler. Bu özellikler farklı matematiksel özellikteki grupların oluşmasına neden olur.

Böylece, grup teori gözlenen düzenlilikleri açıklayabilir ve farklı sistemlerin fiziksel özelliklerini birleştirmek ve basitleştirmek için yardımcı olur (Stancu, 1996). Ayrıca grup teori, simetri bulunan sistemlerin davranışlarının tahmin edilmesinde yardımcı olan faydalı bir araçtır.

Bütün simetriler arasından geometrik dönüşümlerle ilgili olanlar daha belirgindir. Bunlar öteleme grubu, dönme grubu, bir düzlem ya da bir noktadaki yansıma grubu ve bir kristaldeki simetrilerin grubu gibi dönüşüm gruplarına karşılık gelmektedir. Kristaller bunlar arasından fizikteki en açık örneklerdir (Arfken and Weber, 1995). Bir kristal için simetri grubu yansımalar ya da açılarının kesikli değerleri ile yalnızca sonlu sayıdaki dönmeleri içerir. İlk kez matematiğin bir dalı olarak gelişen bu kesikli ya da sonlu grup teorileri yoğun madde fiziğinin gelişmesinde yararlı bir araçtır. Öte yandan, eğer dönmeler sürekli değişen açılara bağlı ise dönme grubu sonsuz sayıda elemana sahiptir. Bu tür gruplara ise sürekli gruplar adı verilir. Karışık sürekli grup ise kesikli değerler içerebilen bir gruptur. Sürekli gruplara en belirgin örneklerden biri de Lie gruplarıdır (Lichtenberg, 1978; Stancu, 1996).

Kuantum mekaniğinde bunlardan başka simetriler de vardır (Stancu, 1996). İlk olarak, özdeş parçacıkların simetrik gruplarla ilgili olan permütasyon simetrisi vardır. Bu simetrik grubun rolü ayırte dilmezliğin özelliğini doğru şekilde veren dalga

fonksiyonunu sağlamaktır. Kuantum sistemler ayrıca spin, izospin, tat ve renk gibi iç serbestlik derecesi ile ilgili simetrilere sahiptir. Bu simetriler üniter gruplar ile ilgilidirler.

Matematiğin bir dalı olarak grup teorisinin ilk fikri ondukuzuncu yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır. Daha sonra Frobenius, Schur, Lie ve Cartan tarafından önemli gelişmeler yapılmıştır. Fizikteki grup teorisinin en önemli rolü, kuantum mekaniğinin de başlangıcı olarak 1920'den sonra fark edilmiştir. Bu gelişmeler H. Weyl (1946, 1950) ve E. Wigner (1959) in yaptıkları klasik çalışmaları da içermektedir (Stancu, 1996). Şu anda fiziğin diğer dallarında olduğu gibi yüksek enerji fiziğinde de simetriler ayar (ölçek) teorileri bağlamında önemli bir rol oynamaktadırlar (Stancu, 1996).

2.2 Simetri Tipleri

Kuantum mekaniğinde en çok karşılaşılan simetriler beş ana kategoriye ayrılabilir (Stancu, 1996):

(1) Kesikli permütasyon simetriler: Kuantum mekaniğinde her fiziksel gözlemlenebilirin beklenen değeri özdeş parçacıkların permütasyonu ile değişmez kalır. Permütasyonlar, S_n simetrik grubu olarak adlandırılan bir grup oluştururlar. Simetrik grupların rolü ayırtedilmezliğin özelliğini doğru şekilde veren dalga fonksiyonunu sağlamaktır. Deneylerden bilindiği gibi buçuklu spine sahip parçacıklar iki parçacığın değişimi ile her zaman antisimetrik durumda bulunurlarken (Fermi-Dirac istatistiği), tam spine sahip özdeş parçacıklar bu değişim altında simetrik durumda (Bose-Einstein istatistiği) olurlar. Özdeş parçacıkların durumlarının bu özellikleri spin-istatistik teoremi olarak adlandırılan bir teoremi sağlar (Lichtenberg, 1978).

(2) Sürekli uzay-zaman simetrileri: Sürekli uzaysal simetriler kendi içinde dörde ayrılır. İlki, uzayın homojenliği ile ilgili olan ötelemelerdir ($\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho}$). Simetri grubu ise T_3 öteleme grubudur ve bu simetrinin sonucu lineer momentumun korunumudur.

İkincisi, zamanın homojenliği varsayımına dayanan zaman ötelemesidir ($t' = t + t_0$). Bu durumda sistemin Lagrangian ya da Hamiltonyeni zamana bağlı değildir ve bunun sonucu enerjinin korunumudur. Üçüncüsü, uzayın izotropisi varsayımı ile kurulan üç-boyutlu uzaydaki dönmelerdir ($x_i' = R_{ij}x_j$ $i, j = 1,2,3$). R_3 dönme grubu ile temsil edilir ve dönmeler altındaki değişmezlikten açısal momentum korunumu elde edilir. Son olarak görelilik teorisi ile incelenen Lorentz dönüşümleri verilebilir. Bu dönüşümler Lorentz grubunu tanımlar ve dönüşümler altındaki değişmezlik Lorentz grubunun üreteçleri ile ilgili korunum yasalarına yol açar (Stancu, 1996).

(3) Kesikli uzay-zaman simetrisi: İlk olarak uzay yansımaları ele alınabilir ($\hat{P}\vec{r} = \vec{r}' = -\vec{r}$). İki kez ard arda yansıma uygulandığında başlangıç noktasına geri dönülür, böylece $\hat{P}^2 = I$ dır. \hat{P} ile birlikte \hat{I} birim operatörü iki elemanlı en basit kesikli grup oluşturur. Bununla birlikte, kuantum mekaniğinde parite (P) olarak isimlendirilen bir kuantum sayısına neden olur. İlk başta birçok fizikçi ayna simetrisi (“parite değişmezliği”) nin doğanın bir yasası olduğunu düşünmelerine rağmen, 1956 yılında Lee ve Yang’ın önerdiği C.S. Wu tarafından gerçekleştirilen bir deneyle paritenin zayıf etkileşmelerde değişmez (korunumlu) olmadığı bulunmuştur (Griffiths, 1987). Bir diğeri ise, zamanın akış yönünün değişimi olan zaman yansımasıdır ($t \rightarrow -t$). Bu dönüşüm anti-üniter operatör olarak adlandırılan \hat{T} ile kuantum mekaniğinde etkili olmaktadır. Fizik yasaları nötral kaon bozunumu gibi durumlar haricinde \hat{T} ye göre simetriktirler (Stancu, 1996). Son olarak, nokta grupları, katıhal ve molekül fiziğinde sıkça kullanılan simetri dönüşümü örneklerindedir.

(4) İç sürekli simetrisi: Bu simetrisi parçacığın spin, tat ya da renk gibi iç serbestlik derecesi uzayındaki dönüşüm hareketleriyle ilgilidir. İç simetrisi hangi simetri grubuna uydukları açık olmadığından bu simetrisiyle uğraşmak daha zordur. Bununla ilgili yapılan araştırmalar, ilgili dönüşümlerin bir üniter grup oluşturduğunu gösterir. Özellikle $U(1)$ üniter grup ile tanımlanan dönüşümler altında değişmezlik yük ya da parçacık sayısı (leptonlar, baryonlar) korunumuna neden olur. Güçlü etkileşmelerin izospin uzayındaki dönmeler ile değişmezliği anlamında olan $SU_I(2)$ izospin simetrisi

proton ve nötronun kütlelerinin birbirine çok yakın olmasını ifade eder. $SU_F(2)$ simetrisi ise aşağı ve yukarı kuarkların kütlelerinin benzerliğinin bir ifadesidir. Güçlü etkileşmelerdeki $SU_F(3)$ simetrisi aşağı, yukarı ve acayip kuarkların hafifliğinin bir sonucudur (Griffiths, 1987; Stancu, 1996).

(5) İç kesikli simetriler: Bu simetrilerin bir örneği, elektrik yükünün işaretini pozitiften negatife ya da tam tersi bir şekilde değişimlerle ilgili olan yük eşleniği ifadesidir. Bu parçacık-antiparçacık simetrisi olarak tanımlanır ve dönüşümün operatörü \hat{C} ile gösterilir.

Tablo 2.1’ de bazı simetriler ve bunların sonuçlarını gösterilmektedir (Stancu, 1996).

Tablo 2.1. Bazı simetriler ve sonuçları (Stancu, 1996)

Teorik Varsayım	Simetri dönüşümü	Sonuç
Özdeş parçacıkların ayırtedilmezliği	Permütasyon	Fermi-Dirac ya da Bose-Einstein istatistiği
Uzayın homojenliği	Uzay ötelemesi ($\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho}$).	Lineer momentum korunumu
Zamanın homojenliği	Zaman ötelemesi ($t' = t + t_0$).	Enerji korunumu
Uzayın izotropisi	Dönme ($x_i' = R_{ij} x_j$, $i, j = 1, 2, 3$)	Açısal momentum korunumu
Mutlak üniform hızın olmaması	Lorentz dönüşümü	Görelî açısal momentum tensörü korunumu

Yukarıda bahsedilen bütün sürekli simetriler evrensel simetrilerdir. Bu simetriler uzay-zamandan bağımsız olan sonlu sayıda parametreler ile tanımlanırlar.

Parametreleri uzay-zamana bağılı olan simetri dönüşümleri de vardır. Bunlar yerel simetriler ya da ayar (ölçek) simetrileri (Weyl 1929) olarak adlandırılırlar. Bugün doğadaki bütün temel etkileşmelerin tutarlı bir ayar (ölçek) teorisi yardımı ile tanımlanabileceği düşünülmekte ve araştırılmaktadır (Stancu, 1996).

2.3 Korunum Yasaları ve Değişmezlikler

Kuantum mekaniğindeki simetri kavramı klasik mekanikteki ile benzerdir. Özellikle geometrik dönüşümler (öteleme, dönme, Lorentz dönüşümleri) hem klasik hem de kuantum mekaniğinde benzer bir rol oynar. Bir simetri, bazı dönüşüm gruplarına göre hareket denkleminin ya da Lagrangian veya sistemin Hamiltonyeninin değişmezliği ile ifade edilir. Klasik ya da kuantum davranışa bakmaksızın, sürekli simetri ile ilgili Lagrangian ya da Hamiltonyenin değişmezliği korunum yasaları setini ifade eder (Tablo 2.1). Klasik mekanikten farklı olarak kuantum mekaniğinde, Hamiltonyen ve dönüşümlerin oluşturduğu grup elemanları operatörlerdir. Göreli ya da göreli olmayan kuantum mekaniği formalizminde bir korunum yasası, durum vektörlerinin zamandan bağımsız olduğu Heisenberg temsilinde açık olarak görülebilir (Stancu, 1996). Hareket denklemi

$$\frac{d\hat{\Omega}}{dt} = \frac{\partial\hat{\Omega}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{\Omega}, \hat{H}]$$

ile ifade edilir. Burada $\hat{\Omega}$ gözlemlenebilir bir operatörü belirtir, \hat{H} sistemin Hamiltonyenidir ve $[\hat{\Omega}, \hat{H}] = \hat{\Omega}\hat{H} - \hat{H}\hat{\Omega}$ dır. Eğer $\frac{\partial\hat{\Omega}}{\partial t} = 0$ ve $[\hat{\Omega}, \hat{H}] = 0$ oluyorsa $\frac{d}{dt}\langle\hat{\Omega}\rangle = 0$ olur. O zaman $\hat{\Omega}$ korunumludur (Tablo 2.1 sütun 3). Bununla ilgili birkaç durum incelenirse:

- (i) $\hat{\Omega} = \hat{H}$. Eğer sistem zaman ötelemesi ile değişmez kalıyorsa, $\frac{\partial\hat{H}}{\partial t} = 0$ olur.

Bu yüzden \hat{H} nın özdeğerleri sabittir yani enerji korunumludur.

- (ii) $\hat{\Omega} = \hat{P}$. Burada \hat{P} her \vec{r} vektörünü $\vec{r}' = -\vec{r}$ ye dönüştüren parite operatörüdür. Parite operatörü zamandan bağımsızdır ve $\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = 0$ olur. \hat{H} ile tanımlanan sistemin iki koordinat sistemleri arasında farklı olabilecek hiçbir eleman içermediği düşünülürse $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ olur. Böylece \hat{P} nin beklenen değeri $\langle \hat{P} \rangle$ zaman ile sabit kalır.
- (iii) $\hat{\Omega} = \hat{J}_i (i = 1, 2, 3)$, açısal momentumun üç bileşenidir. Grup teorisi bakımından \hat{J}_i, R_3 dönme grubunun üreteçleridir. Eğer \hat{H} dönmeler altında değişmez ise, üç-boyutta bütün olası dönmeler ile ya komüttür ya da R_3 ün üreteçlerine eşittir. Bu yüzden \hat{H} nin dönmeler ile değişmezliği açısal momentumun bileşenlerinin her birinin korunumlu olmasına neden olur.

Fiziksel sistemlerin görünüşte birbiriyle ilişkili olmayan iki özelliği olan simetri ve korunum yasaları arasındaki bağlantı 1842 de Jacobi tarafından klasik mekanikte ilk defa fark edilmiştir (Lichtenberg, 1978). Jacobi (1884) klasik Lagrangian ile tanımlı olan sistemler için ötelemeler ile Lagrangian'ın değişmezliğinin lineer momentumun korunumlu olduğunu, dönmeler altında değişmezliğin ise açısal momentumun korunumlu olduğunu göstermiştir. Daha sonra Schütz (1897) zaman ötelemeleri ile Lagrangian'ın değişmezliğinden enerjinin korunumlu olduğunu bulmuştur.

1917 ye kadar simetrinin dinamik anlamı henüz tam olarak bilinmiyordu. Aynı yıl, değişmezlik ve korunum yasaları arasındaki bağlantı Emmy Noether tarafından ifade edilmiştir (Griffiths, 1987).

2.4 Üniter Grup ve Özellikleri

Bir grup örneği olarak, φ açısı boyunca saatin tersi yönünde dönmeler verilebilir (Arfken and Weber, 1995):

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$R(\varphi_1)R(\varphi_2)$ şeklindeki iki dönmenin çarpımı, önce φ_2 açısı ile sonra φ_1 açısı ile yapılan dönmeleri tanımlar. 2×2 ortogonal matrislerin çarpımında trigonometrik fonksiyonların çarpımı kullanılır. Bu çarpım $(\varphi_1 + \varphi_2)$ açılı ortogonal matrisler ile temsil edilen bir dönmedir. Çarpım birleşmeli matris çarpımıdır ve komütatif (abelyen) dir. φ açılı dönmenin tersi $(-\varphi)$ açısıdır. $\varphi = 0$ açısı ile üniter yapılabilir. Eğer φ açısı 0 dan 2π ye değişiyorsa, o zaman denklem (2.1) deki elemanların gurubu $SO(2)$ dir (Arfken and Weber, 1995).

Ortogonal $n \times n$ matris $O(n)$ grubunu oluşturur ve eğer determinanı +1 ise $SO(n)$ şeklinde ifade edilir. Ortogonal matrisin tersi onun transpozuna eşittir ($\tilde{O}_i = O_i^{-1}$). $SO(n)$ n -boyutlu uzaydaki dönmelerin bir grubu olarak düşünülebilir (Griffiths, 1987). Böylece, $SO(3)$ dünyamızın dönme simetrisini tanımlar ve bu simetri açısal momentumun korunumu için Noether teoremiyle ilgilidir.

Temel parçacık fiziğinde en çok kullanılan gruplardan biri ise $n \times n$ üniter matrislerden oluşan $U(n)$ grubudur. Eğer determinanı +1 ise $SU(n)$, özel üniter grup olarak ifade edilir. Üniter matrislerin özelliğinden $U_i^+ = U_i^{-1}$ ise

$$(U_1 U_2)^+ = U_2^+ U_1^+ = U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2)^{-1}$$

bu çarpım üniterdir ve $SU(n)$ nin bir elemanıdır (Arfken and Weber, 1995).

Tablo 2.2 Temel parçacık fiziğindeki en önemli gruplardan bazıları (Griffiths, 1987).

Grup ismi	Gruptaki matrisler
$U(n)$	$n \times n$ üniter ($U^+U = 1$)
$SU(n)$	$n \times n$ üniter ve determinanı 1
$O(n)$	$n \times n$ ortogonal ($\tilde{O}O = 1$)
$SO(n)$	$n \times n$ ortogonal ve determinanı 1

Özel olarak aşağıda, klasik Lie gruplarından $SU(n)$ üniter grubu ile $SO(n)$ dönme grubu incelenecektir.

2.4.1 Sürekli grupların üreteçleri

Lie grubu olarak bilinen sürekli grupların bir özelliği, iki elemanın çarpımı olan diğer eleman bu iki elemanın analitik fonksiyonu olmasıdır (Arfken and Weber, 1995). Fonksiyonun analitik olması (türevlerinin olması) üreteç fikrinin gelişmesine ve tüm grubu çalışmak yerine birim eleman komşuluğundaki grup elemanlarıyla çalışılmasını sağlar. Lie'nin temel düşüncesi G nin bire yakın olan sonsuz küçük R elemanlarını çalışmaktır. Örnek olarak $SO(2)$ grubu düşünülebilir. Denklem (2.1) deki 2×2 dönme matrisleri Euler açıları kullanılarak üstel şekilde

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = 1_2 \cos \varphi + i\sigma_2 \sin \varphi = e^{i\sigma_2\varphi} \quad (2.2)$$

yazılabilir. Şüphesiz ki bire yakın dönmeler küçük açıları ($\varphi \approx 0$) ima etmektedir. Buradan, bire yakın $R \in G$ grup elemanı için

$$R = e^{i\varepsilon S}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

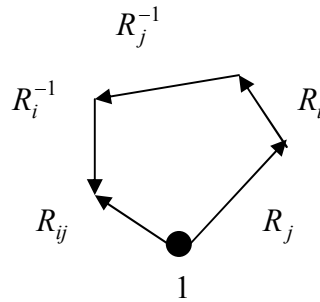
üstel temsili yazılabilir. Sonsuz küçük dönüşümler olan S , G nin üreteçleri olarak adlandırılır. Üreteçler, boyutu G nin boyutunda olan bir lineer vektör uzayı oluştururlar. Bu durum $SO(n)$ dönme grupları için geçerlidir. $SU(n)$ üniter grupları için aşağıdaki gibi bir inceleme yapılabilir. Dört adımda birim eleman etrafında dolaşacak şekilde grup elemanları genişletilirse:

$$\begin{aligned} R_i &= e^{i\varepsilon_i S_i} = 1 + i\varepsilon_i S_i - 0.5\varepsilon_i^2 S_i^2 + \dots \\ R_i^{-1} &= e^{-i\varepsilon_i S_i} = 1 - i\varepsilon_i S_i - 0.5\varepsilon_i^2 S_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

ε çok küçük olduğundan karesi, küpü,... gibi terimler daha küçük olacağından ihmal edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned} R_i^{-1} R_j^{-1} R_i R_j &= 1 + \varepsilon_i \varepsilon_j [S_j, S_i] + \dots, \\ &= 1 + \varepsilon_i \varepsilon_j \sum_k c_{ji}^k S_k + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

yazılabilir ki, bu da şekil 2.1 de görülmektedir.



Şekil 2.1 Denklem (2.5) in ifadesi (Arfken and Weber, 1995).

Denklem (2.5) deki çarpımda G grubunun bire yakın R_{ij} elemanını verir. Bunun üstel formu, S_k üreteçlerinin lineer kombinasyonu olmalıdır. (2.5) denkleminde G Lie grubunun üreteçlerinin kapalı bir bağıntısı bulunabilir:

$$[S_i, S_j] = \sum_k c_{ij}^k S_k \quad (2.6)$$

c_{ij}^k katsayıları G grubunun yapı sabitleridir. (2.6) denklemindeki komütatör i ve j ile antisimetrik olduğundan

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad (2.7)$$

yazılabilir. Denklem (2.6) daki komütatör üreteçlerin çarpım yasası olarak alınır, üreteçlerin vektör uzayı G Lie grubunun Lie cebirini oluşturur. $SU(l+1)$ için Lie cebiri A_l , $SO(2l+1)$ için B_l ve $SO(2l)$ için D_l olarak adlandırılır. Burada $l=1,2,\dots$ pozitif tamsayılarıdır ve Lie grubunun rankı olarak isimlendirilir. Lie grubunun rankı, birbiriyle komüt olan üreteçlerin en büyük sayısı şeklinde tanımlanır. Örneğin, abelyen (komüt) öteleme grubunun birbiriyle komüt olan üç lineer momentum operatörleri onun üreteçleri olduğundan, rankı üçtür (Greiner and Müller, 2001).

Jacobi özdeşliğinden

$$[[S_i, S_j], S_k] + [[S_j, S_k], S_i] + [[S_k, S_i], S_j] = 0 \quad (2.8)$$

yazılabilir. (2.8) denklemini (2.6) ile birlikte kullanıldığında

$$\sum_m \{c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n\} = 0 \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.6), (2.7) ve (2.9) eşitlikleri Lie cebirinin temel bağıntılarını oluştururlar (Arfken and Weber, 1995). Örneğin,

$$[S, H] = 0 \quad (2.10)$$

ilişkisi düşünülebilir. Eğer S ve H kuantum mekaniğindeki açısal momentum ve Hamiltonyen gibi diferensiyel operatörleri temsil ederse, (2.10) denkleminde ortak

özfonksiyonlara sahip oldukları söylenebilir. Bu kuantum mekaniğindeki grup teorisinin en önemli uygulamalarından birini verir.

2.4.2 SO(2) ve SO(3) Dönme Grupları

Denklem (2.1) ve (2.2) den

$$-i \frac{dR(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \quad (2.11)$$

Pauli matrislerinden σ_2 üretici elde edilir (Arfken and Weber, 1995). Üç-boyutlu koordinat sistemi için z-ekseni yönündeki dönmeler $R_z(\varphi)$,

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

şeklinde verilir ve bunun $\varphi = 0$ daki diferensiyeli S_z ' yi verir (Arfken and Weber, 1995). $\delta\varphi$ sonsuz küçük açısı ile $R_z(\delta\varphi)$ dönmesi Maclaurin-Taylor açılımı yapılabilir. Burada, $(\delta\varphi)$ nin karesi, küpü,... gibi terimler ihmal edildiğinde

$$R_z(\delta\varphi) = 1_3 + i\delta\varphi S_z, \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir.

φ sonlu açılı dönme, ardışık sonsuz küçük dönmelerin bir birleşimi olabilir. Böylece, $N \rightarrow \infty$ için N kez sonsuz küçük dönme $\varphi = \delta\varphi N$ olacağından (Arfken and Weber, 1995),

$$R_z(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{i\varphi}{N} \right) S_z \right]^N = e^{iS_z} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu, R_z grubunun üretici olarak S_z yi belirler. R_z grubu ise $SO(3)$ grubunun abelyen bir alt grubudur. Bunlar 3 boyutta determinantı +1 olan dönmelerin grubudur. Her bir (3×3) lük $R_z(\varphi)$ matrisi, ortogonal ve izi sıfırdır. z-ekseni yönünde yapılan bu çalışmalar x ve y-eksenleri içinde tekrarlanabilir (Arfken and Weber, 1995).

2.4.3 Fonksiyonların Dönmesi ve Yörüngesel Açısıl Momentum

Yukarıda grup elemanları matrislerden ibaret idi. Bunlar da koordinatları dönme operasyonuna maruz bırakıyorlardı. Dolayısıyla inceleme altındaki fiziksel sistem sabit tutulmuştu. Şimdi ise koordinatlar sabit tutulup, bu sabit koordinatlara göre $\psi(x, y, z)$ fonksiyonunun dönmeler altında davranışı incelenecektir. Koordinatların dönmesini veren R

$$\vec{x}' = R\vec{x},$$

ile

$$R\psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) \rightarrow \psi(\vec{x}')$$

ifadesi bir fonksiyon dönmesini tanımlar (Arfken and Weber, 1995). Diğer bir deyişle, R bir ψ fonksiyonuna uygulandığında yeni bir ψ' fonksiyonu oluşur. Bu ψ' fonksiyonu $\psi(\vec{x}')$ ile eşdeğerdir ve buradaki \vec{x}' , R ile döndürülmüş koordinatları ifade eder.

(2.12) denklemini kullanılarak, $\varphi \rightarrow \delta\varphi$ sonsuz küçük dönmeler

$$R_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) = \psi(x + y\delta\varphi, y - x\delta\varphi, z) \quad (2.15)$$

şeklinde x-y eksenindeki R_z nin etkisi elde edilir (Arfken and Weber, 1995). Bu denklemin sağ tarafı $\delta\varphi$ ye göre Taylor açılımı yapıldığında

$$\begin{aligned} R_z(\delta\varphi)\psi(x,y,z) &= \psi(x,y,z) - \delta\varphi \left\{ x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right\} + 0(\delta\varphi)^2 \\ &= (1 - i\delta\varphi L_z)\psi(x,y,z), \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir. z-ekseni yönünde önce φ sonra $\delta\varphi$ açısı dönme

$$(R_z(\varphi + \delta\varphi) - R_z(\varphi))/\delta\varphi = -iL_z R_z(\varphi) \quad (2.17)$$

ile verilir. Bu denklemin sol tarafı, $\delta\varphi \rightarrow 0$ için $\frac{dR_z(\varphi)}{d\varphi}$ 'yi verir. Böylece, (2.17)

denkleminde integral alındığında

$$R_z(\varphi) = e^{-i\varphi L_z} \quad (2.18)$$

bulunur. Burada, $R_z(\varphi)$ operatörü sabit koordinatlara göre fonksiyonları dönme işlemine tabi tutar ve L_z de yörüngesel açısal momentumunun z-bileşenidir. Böylece, dönmenin üreteçlerinin L yörüngesel açısal momentum olduğu gösterilmiş olur. Yörüngesel açısal momentum bileşenleri,

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \quad (2.19)$$

komütasyon ilişkilerini sağlarlar ve S_x , S_y ve S_z ile aynı yapı sabitine sahiptirler (Arfken and Weber, 1995; Greiner and Müller, 2001).

2.4.4 SU(2)-SO(3) Homomorfizmi

Determinantı +1 olan üniter 2×2 matrislerin grubu olan $SU(2)$ özel üniter grubu, üreteçler olarak üç σ_i Pauli spin matrislerine sahiptir. $SU(2)$ nin üç üreteci, Cayley-Klein parametreleri olarak bilinen ξ, η, ζ üç gerçel sürekli parametrelere bağlıdır. Genel bir elemanı ise

$$U_2(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \sin \eta \\ -e^{-i\zeta} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

şeklinde verilir (Arfken and Weber, 1995). Bu elemanın, $\text{Det}(U_2) = 1$ ve $U_2^+ U_2 = 1 = U_2 U_2^+$ ilişkilerini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Üreteçleri elde etmek için U_2 nin diferensiyeli alınmalıdır

$$\begin{aligned} -i\partial U_2 / \partial \xi \Big|_{\xi=0, \eta=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \\ \left[-i\partial U_2 / \partial \zeta \Big|_{\zeta=0} \right] / \sin \eta &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \\ -i\partial U_2 / \partial \eta \Big|_{\eta=0, \zeta=0} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Buradaki σ_i Pauli matrislerinin izleri sıfırdır ve hermitikdirler. $SU(2)$ nin (U_1, U_2, U_3) elemanları, üreteçleri olan Pauli matrisleri ile

$$U_1 = e^{ia_1\sigma_1/2}, \quad U_2 = e^{ia_2\sigma_2/2}, \quad U_3 = e^{ia_3\sigma_3/2} \quad (2.22)$$

şeklinde yazılabilir (Arfken and Weber, 1995).

Buradaki üç a_i parametresi gerçeldir. Burada $\hat{s}_i = \hat{\sigma}_i/2$ olup, bunlar (2.19) denklemindeki açısal momentum ile benzer komütasyon ilişkilerini sağlarlar ($\hbar = 1$)

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k. \quad (2.23)$$

Sabit koordinatlara göre, spin 1/2 parçacığın ya da iki-bileşenli vektör dalga fonksiyonu (spinör) nun dönmesi için, (2.18) eşitliğine göre dönme operatörü $R_z(\varphi) = e^{-i\varphi \sigma_3/2}$ dir.

Şimdiye kadar görüldüğü gibi, $SU(2)$ nin elemanları $(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ifadesini değişmez bırakan iki-boyutlu kompleks uzaydaki dönmeleri tanımlar. $SU(2)$ nin determinanı (+1) dir ve üç bağımsız parametreye bağlıdır. $SO(3)$ gerçel ortogonal grubunun determinanı (+1) dir ve $(x^2 + y^2 + z^2)$ formunu değişmez bırakan üç-boyutlu uzaydaki dönmeleri tanımlarlar. $SO(3)$ grubu da üç-bağımsız parametreye bağlıdır. Dönmelerin olması ve parametre sayılarının eşit olması $SU(2)$ ve $SO(3)$ arasında yapısal bir benzerlik (homomorfizm) bulunmaktadır (Arfken and Weber, 1995).

Böylece spin-1/2 parçacıklar $SU(2)$ nin iki-boyutlu temsiline uygun dönmeler ile dönüşürler. Benzer olarak vektörler ile tanımlı olan spin-1 parçacıklar $SU(2)$ nin üç-boyutlu temsiline aittir; dört bileşenli nesne ile tanımlı olan spin-3/2 parçacıklar $SU(2)$ nin dört boyutlu temsili ile dönüşürler. O zaman, farklı spinli parçacıkların dönme grubunun farklı temsiline ait oldukları söylenebilir (Griffiths, 1987).

2.4.5 Basamak Operatör Yaklaşımı

\hat{L}^2 ve \hat{L}_z operatörlerinin ortak özfonksiyonları olan Y_l^m fonksiyonları küresel harmonikler adıyla bilinirler (Karaoğlu, 2003). $Y_l^m(\theta, \varphi)$ küresel harmonikleri $|lm\rangle$ ket vektörüyle gösterilirse,

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |lm\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle \\ \hat{L}_z |lm\rangle &= \hbar m |lm\rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

olduğu ve l kuantum sayısının tamsayılar olması gerektiği bilinmektedir.

Burada tamamen başka bir yol izlenecektir. Açısal momentum operatörünün bileşenleri arasındaki sıra değiştirme bağıntıları

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \quad (2.29)$$

şeklinde yazılabilir (Karaoğlu, 2003). Bu sıra değiştirme bağıntıları tamamen cebirsel olup, yörünge açısal momentumunun $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ tanımından daha genel bağıntılardır. O halde, bu sıra değiştirme bağıntıları esas alınıp genel bir \hat{J} açısal momentum operatörü

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y \quad (2.30)$$

bağıntılarıyla tanımlanırsa, bu cebire ait genel özellikler aşağıdaki gibi belirtilebilir.

Önce, \vec{J} nin bileşenleri yardımıyla iki yeni basamak operatörleri aşağıdaki gibi

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad (2.31)$$

tanımlanabilir. (2.30) sıra değiştirme bağıntıları kullanılarak basamak operatörlerinin sıra değiştirme özellikleri bulunabilir (Karaoğlu, 2003):

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= \hbar\hat{J}_+, \\ [\hat{J}_z, \hat{J}_-] &= -\hbar\hat{J}_-, \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2\hbar\hat{J}_z, \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_+] &= [\hat{J}^2, \hat{J}_-] = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ayrıca ($\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$) operatörü bu basamak operatörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 &= \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z \\
&= \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z
\end{aligned} \tag{2.33}$$

şeklinde yazılabileceği kontrol edilebilir (Karaoğlu, 2003).

Bu özellikler \hat{J}^2 ve \hat{J}_z operatörlerinin özdeğer spektrumunu bulmaya yeterlidir. $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$ olduğundan, bu iki operatör ortak özvektörlere sahiptirler. Bu normlanmış özvektörler $|\lambda m\rangle$ olarak gösterilirse

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 |\lambda m\rangle &= \lambda \hbar^2 |\lambda m\rangle \\
\hat{J}_z |\lambda m\rangle &= m \hbar |\lambda m\rangle
\end{aligned} \tag{2.34}$$

olur. Burada, \hat{J}^2 nin özdeğerleri λ , \hat{J}_z nin özdeğerleri de m dir (Karaoğlu, 2003). Bir $|\lambda m\rangle$ özdeğer durumunda bu \hat{J}^2 operatörünün beklenen değerleri gözönüne alınırsa, m nin bir üst (m_{\max}) ve bir de alt limiti (m_{\min}) olduğu bulunabilir. Bir $|\lambda m\rangle$ özvektörüne $\hat{J}_z \hat{J}_+$ operatörünün etkisi hesaplanabilir. Yukarıdaki $[\hat{J}_z, \hat{J}_+]$ bağıntısı kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z \hat{J}_+ |\lambda m\rangle &= (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+) |\lambda m\rangle \\
&= m \hbar \hat{J}_+ |\lambda m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\lambda m\rangle
\end{aligned} \tag{2.35}$$

ve

$$\hat{J}_z (\hat{J}_+ |\lambda m\rangle) = (m+1) \hbar (\hat{J}_+ |\lambda m\rangle)$$

olur. Bu ifadeye bir özdeğer denklemi gözüyle bakıldığında $\hat{J}_+ |\lambda m\rangle$ nin, \hat{J}_z operatörünün $(m+1)\hbar$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu anlaşılmaktadır. O halde

$$\hat{J}_+ |\lambda m\rangle = |\lambda m+1\rangle$$

yazılabilir. Bu ifadeye bir kez daha \hat{J}_+ operatörüyle etki ettirilirse,

$$\hat{J}_+(J_+|\lambda m\rangle) = \hat{J}_+|\lambda m+1\rangle = |\lambda m+2\rangle$$

olacağı görülebilir. Benzer şekilde \hat{J}_- basamak operatörünün etkisinin

$$\begin{aligned}\hat{J}_-|\lambda m\rangle &= |\lambda m-1\rangle, \\ \hat{J}_-(J_-|\lambda m\rangle) &= |\lambda m-2\rangle,\end{aligned}$$

olacağı kolayca gösterilebilir. Buradan çıkan sonuç, basamak operatörleri \hat{J}_\pm yardımıyla, \hat{J}_z operatörünün m özdeğerlerinin

$$\dots, m-2, m-1, m, m+1, m+2, \dots,$$

şeklinde birer farklı ardışık özdeğerleri ve özvektörlerinin türetilbilir olmasıdır (Karaoğlu, 2003). Ancak, m özdeğerinin m_{\max} gibi bir maksimum değeri olduğu görülmüştü. Bu maksimum özdeğerli vektöre bir kez daha \hat{J}_+ ile etki ettirildiğinde

$$\hat{J}_+|\lambda m_{\max}\rangle = 0$$

olmak zorunda olduğu görülür. Aynı özvektöre \hat{J}^2 operatörü etki ettiğinde:

$$\hat{J}^2|\lambda m_{\max}\rangle = \lambda\hbar^2|\lambda m_{\max}\rangle.$$

Bu ifade de $\hat{J}^2 = \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_z^2$ kullanılırsa, özdeğerler arasında şu bağıntı elde edilir:

$$m_{\max}^2 + m_{\max} = \lambda.$$

Benzer şekilde, \hat{J}_- operatörü kullanılarak m_{\min} için şöyle bir bağıntı bulunur:

$$m_{\min}^2 - m_{\min} = \lambda.$$

Bu iki denklem çözümünden $m_{\min} = -m_{\max}$ çözümü bulunur. O halde, m özdeğerinin alt ve üst limiti aynı sayının zıt işaretlisi olurlar. Bu maksimum değere $m_{\max} = j$ denilirse, m sayısı $-j$ değerinden $+j$ değerine kadar birim aralıklarla yer almaktadır. λ özdeğeri ($\lambda = m_{\max}^2 + m_{\max}$) kullanılarak $\lambda = j(j+1)$ bulunur. Buradan, j açısal momentum kuantum sayısının tamsayı ve yarım tamsayılar alabileceği sonucuna da ulaşılır (Karaoğlu, 2003).

\hat{J}^2 ve \hat{J}_z operatörleri sıra değiştirdiği için ortak baz vektörleri kümesine sahiptirler. Bu baz vektörleri Dirac notasyonunda $|j m\rangle$ ile gösterilirse ve bu bazda \hat{J}^2 , \hat{J}_x , \hat{J}_y , \hat{J}_z nin matris temsilleri elde edilebilir (Karaoğlu, 2003).

$$\langle j m' | \hat{J}^2 | j m \rangle = j(j+1)\hbar^2 \delta_{m m'}$$

$$\langle j m' | \hat{J}_z | j m \rangle = m\hbar \delta_{m m'}$$

\hat{J}_x ve \hat{J}_y nin matris temsillerini bulmak için basamak operatörlerinin etkisine bakılırsa:

$$\hat{J}_+ |j m\rangle = c_+ |j m+1\rangle$$

olduğu görülmüştü. Burada normlama katsayısı c_+ değeri bulunmalıdır. \hat{J}_- ve \hat{J}_+ operatörlerinin birbirlerinin hermitik eşleniği olduğu kullanılırsa,

$$|c_+|^2 = [j(j+1) - m^2 - m]\hbar^2$$

bulunur. Bu bağıntı, c_+ katsayısının sadece mutlak değeri karesini belirler. Buradan, $|c_+|^2$ 'nin pozitif olan kökü alınır, \hat{J}_+ 'nin etkisi şöyle yazılabilir:

$$\hat{J}_+ |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \hbar |j m+1\rangle.$$

Benzer şekilde, \hat{J}_- operatörünün etkisi bulunabilir:

$$\hat{J}_- |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \hbar |j m-1\rangle$$

\hat{J}_x ve \hat{J}_y nin operatörleri cinsinden ifadeleri kullanılarak, \hat{J}_x ve \hat{J}_y nin matris elemanları (Shankar, 1994)

$$\begin{aligned} \langle j' m' | \hat{J}_x | j m \rangle &= \langle j' m' | \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} | j m \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \{ \delta_{jj'} \delta_{m', m+1} [j(j+1) - m(m+1)]^{1/2} + \delta_{jj'} \delta_{m', m-1} [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j' m' | \hat{J}_y | j m \rangle &= \langle j' m' | \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} | j m \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2i} \{ \delta_{jj'} \delta_{m', m+1} [j(j+1) - m(m+1)]^{1/2} - \delta_{jj'} \delta_{m', m-1} [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2} \} \end{aligned}$$

bu formülleri kullanarak kolayca bulunabilir.

$j = 1/2$ için \vec{S} ile gösterilen açısal momentum vektörü ise;

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde \hat{S}_x ve \hat{S}_y operatörlerinin matris temsilleri bulunabilir. Bu temsillerden daha kullanışlı olan Pauli spin matrisleri burada tanımlanırsa (Karaoğlu, 2003):

$$\vec{\sigma} = \frac{2}{\hbar} \vec{S}$$

\vec{S} nin bileşenleri için bulunan ifadeler burada kullanılırsa, Pauli spin matrislerinin temsilleri denklem (2.21) deki gibi elde edilebilir.

BÖLÜM 3

FERMİYON SİSTEMLERİNİN GENEL KUANTUM MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ

N tane benzer parçacıktan oluşan bir sistem düşünüldüğünde, klasik fizik açısından parçacıkların izledikleri yollar takip edilebilir. Bu bağlamda, parçacıklar ayırtedilebilirler. Oysa kuantum mekaniğinde durum farklıdır. Kuantum mekaniksel bakış açısıyla mikro dünyada parçacıklar özdeş olduklarından ayırtedilemezdirler (Webber and Cooper, 2004).

Bu bölümde, özdeş parçacıklar sistemleriyle ilgili önemli özelliklerden permütasyon simetrisi, simetrileştirme prensibi ile birlikte bunların kuantum mekaniksel özellikleri üzerinde durulacaktır (Ballentine, 1998).

3.1 Permütasyon Simetrisi

Bütün elektronların özellikleri benzerdir. Bu bütün protonlar ve nötronlar içinde aynıdır. İki özdeş parçacığın yerdeğişmesiyle fiziksel durum değişmez. Başka bir deyişle, böyle bir fiziksel sistemi tarif eden Hamiltonyen parçacıkların permütasyonu altında değişmez kalır.

İki özdeş parçacıktan oluşan bir sistem düşünüldüğünde, durum uzayı için baz vektörleri tek parçacık baz vektörlerinin çarpımıyla yapılandırılabilir (Ballentine, 1998). α birinci parçacığın özdeğeri, β ise ikinci parçacığın özdeğeri olmak üzere, $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ çarpımıyla tarif edilen fiziksel durum ayırtedilebilir. \hat{P}_{12} permütasyon operatörü $\hat{P}_{12}|\alpha\rangle|\beta\rangle = |\beta\rangle|\alpha\rangle$ ile tanımlanır. Permütasyon operatörünün tersi kendisine eşittir ve aynı zamanda üniter ve hermityen bir operatör olduğu açıktır. İki parçacık durum fonksiyonu üzerine permütasyon operatörünün etkisi

$$\hat{P}_{12}\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

olur. Eğer Hamiltonyeni iki parçacığın değişimi ile değişmez kalıyorsa, $\hat{P}_{12}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{12}$ durumunda olur. Böylece \hat{H} ve \hat{P}_{12} ortak özvektörlere sahip olurlar. $(\hat{P}_{12})^2 = I$ olduğundan, \hat{P}_{12} nin özdeğerleri (+1) ve (-1) dir ve iki parçacığın değişimi altında özfonksiyonları ya simetrik ($\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$) ya da antisimetrik ($\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = -\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$) olabilir. Bu yüzden, iki özdeş parçacık sistemi için \hat{H} nin özvektörleri parçacıkların permütasyonu altında ya simetrik ya da antisimetrik olarak seçilebilir. Böylece vektör uzayı invaryant alt uzaylara bölünebilir. Simetrik alt uzay, bütün permütasyonlar altında değişmez kalırken, antisimetrik alt uzay, permütasyon çift değişimleri ile işaret değiştirir.

Eğer bir parçacık seti ayırtedilemez ise, onların Hamiltonyeni parçacıkların permütasyonu altında değişmez olmak zorundadır. Fakat bunun tersi doğru değildir. Bir elektron ve bir pozitrondan oluşan bir pozitronyum atomunun Hamiltonyeni $\hat{H} = (\hat{P}_e^2 + \hat{P}_p^2)/2M - e^2/r$, iki parçacığın değişimi altında değişmezdir. Fakat, elektron ve pozitron özdeş parçacıklar değildir ve onlar elektrik ya da manyetik alan uygulandığında fark edilebilirler.

Messiah ve Greenberg (1964) in yaptıkları çalışmalar ile, özdeş parçacıkların ayırtedilmezlik ilkesi şu şekilde belirtilebilir (Ballentine, 1998): Yalnızca özdeş parçacıkların permütasyonu ile farklı olan dinamik durumlar bir gözlemci tarafından fark edilemez. \hat{A} operatörü, gözlemlenebilir dinamik değişken ve $|\psi\rangle$ özdeş parçacıklar sisteminin bir durumunu temsil etsin. i ve j parçacıklarının değişmesiyle elde edilen durum $\hat{P}_{ij}|\psi\rangle$ vektörü ile tanımlanır. Ayırtedilmezlik ilkesine göre,

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{P}_{ij})^+ \hat{A}\hat{P}_{ij}|\psi\rangle \quad (3.2)$$

yazılabilir. Bu denklem her $|\psi\rangle$ vektörü için sağlanmak zorundadır. Böylece

$$\hat{A} = (\hat{P}_{ij})^+ \hat{A}\hat{P}_{ij} \text{ ve } (\hat{P}_{ij})^+ = (\hat{P}_{ij})^{-1} \text{ olduğundan}$$

$$\hat{P}_{ij}\hat{A} = \hat{A}\hat{P}_{ij} \quad (3.3)$$

bulunur. \hat{A} keyfi bir gözlemlenebilir olduğundan, bütün fiziksel gözlemlenebilirler permütasyon-invaryant olmak zorunda oldukları sonucuna varılır (Ballentine, 1998).

Hamiltonyen bir gözlemlenebilir olduğundan permütasyon-invaryant olmak zorundadır. Daha önce belirtilen simetri çeşitleri, simetrinin korunumu gibi sonuçlar parçacıkların ayırtedilmezlik ilkesi ile açıklanır. Bu özelliklerin dışında, farklı permütasyon simetrisi ile oluşturulan durumun gözlemlenebilir olmadığını belirten süperseçim kuralı vardır. Simetrik ve antisimetrik bileşenlerin süperpozisyonu için süperseçim kuralının sağladığı gösterilebilir (Ballentine, 1998).

3.2 Simetrileştirme Postülası

Durum vektörlerinin onların permütasyon simetri tipine göre sınıflandırılabilmesini ifade eden, özdeş parçacıkların permütasyonu altında Hamiltonyenin değişmezliği bu bölümün ilk kısmında gösterildi. Daha sonra, farklı permütasyon simetri durumlarının bir karışımı olamayacağını ifade eden ayırtedilmezliğin ilkesinden bahsedildi. Bu kısımda ise, parçacıkların bazı türlerinin durumları yalnızca tek bir permütasyon simetrisi taşıyabileceğini veren ilkeden bahsedilecektir. Bu ilke simetrileştirme postülası olarak bilinir ve şu şekilde verilebilir (Ballentine, 1998):

- (a) Spinleri \hbar in tam katlarına sahip olan parçacıklar yalnızca simetrik durumda bulunurlar. (Bu parçacıklar bozonlar olarak adlandırılırlar.)
- (b) Spinleri \hbar in buçuklu katlarına sahip olan parçacıklar yalnızca antisimetrik durumda bulunurlar. (Bu parçacıklar fermiyonlar olarak isimlendirilir.)
- (c) Kısmi simetrik haller yoktur.

Simetrileştirme postülasının sonuçlarından bazıları şunlardır: $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ üç-parçacıklı antisimetrik dalga fonksiyonu olsun (Ballentine, 1998). Eğer $\alpha = \beta$ koyulursa, $\psi_{\beta\beta\gamma} = \vec{0}$ elde edilir. Benzer sonuç her sayıda parçacık için antisimetrik çarpımlı

durum vektörleri için de sağlanır. Bu, özdeş fermiyonlar sisteminde birden fazla parçacığın, aynı tek parçacık kuantum sayısına sahip olamayacağını belirten Pauli dışarılama ilkesi prensibidir. Dışarılama ilkesi, atom yapısı ve atom spektrumu teorisi temelinde oluşmuştur. Böylece, elektronların fermiyonlar olduğunu gösteren güçlü bir deneysel delil bulunmuştur. Simetristirme postülatlarının bu öngörülerini moleküler spektroskopi ile doğrulanmıştır. Ayrıca, özdeş parçacıkların saçılma olayı simetristirme postülatları için bir çıkarım sağlamaktadır (Ballentine, 1998).

3.3 Yaratma ve Yok etme İşlemcileri

Simetristirme postülası, çift değişimi altında ya simetrik ya da antisimetrik olacak şekilde, tek bir permütasyon simetri tipi için parçacık çeşitlerinin durumlarını kısıtlar. Bu, çok-parçacık durum teorisini büyük ölçüde basitleştirir ve yaratma ve yok etme işlemcileri ile ilgili formalizmin çalışmasını sağlar. Bu formalizm parçacık sayısı sabit olan sistemlerle kısıtlama yapmadığından, dinamik değişkenler olarak parçacık sayısını ele alır ve her parçacık sayısına sahip parçacık durumlarıyla ilgilidir.

Fock uzayı olarak bilinen durum uzayının ortonormal baz vektörleri şu ifadelerden oluşur (Ballentine, 1998): Vakum ya da hiçbir parçacığın bulunmadığı durum, $|0\rangle$; tek parçacık durum vektörlerinin toplam seti, $\{|\phi_\alpha\rangle : (\alpha = 1,2,3,\dots)\}$ (burada α tek bir durumu belirlemek için gerekli olan bütün kuantum sayılarının kısaltmasıdır); iki-parçacık durum vektörlerinin toplam seti; üç-parçacık durum vektörlerinin toplam seti... .

Yaratma ve yok etme işlemcileri, çok-parçacıklı durumların doğru permütasyon özelliklerini sağlayan birçok bozon ve fermiyon sistemlerinin matematiksel tanımlanması için önemli bir araç olan ikinci kuantumlanma operatörleri olarak bilinirler (Schulten, 2000). Bu operatörler, permütasyon simetrisini korurken aynı zamanda çok-parçacık dalga fonksiyonlarının değerlendirilmesini ve yapılandırılmasını sağlarlar. Bozonlar ve fermiyonların formalizminde onların davranışlarına uygun olarak teknik farklılıklar vardır (Ballentine, 1998). Buna rağmen, bu iki formalizm arasında güçlü benzerlikler olduğu da görülecektir.

3.3.1 Fermiyonlar

Aşağıdaki ilişkileri sağlayan \hat{f}_α^+ , yaratma operatörü olarak tanımlanırsa:

$$\hat{f}_\alpha^+|0\rangle = |\alpha\rangle \equiv |\phi_\alpha\rangle \quad (3.4.a)$$

$$\hat{f}_\alpha^+|\beta\rangle = \hat{f}_\alpha^+\hat{f}_\beta^+|0\rangle = |\alpha\beta\rangle = -|\beta\alpha\rangle \quad (3.4.b)$$

$$\hat{f}_\alpha^+|\beta\gamma\rangle = \hat{f}_\alpha^+\hat{f}_\beta^+\hat{f}_\gamma^+|0\rangle = |\alpha\beta\gamma\rangle \quad (3.4.c)$$

olacaktır (Ballentine, 1998). Bu vektörler $|\alpha\beta\gamma\rangle = -|\alpha\gamma\beta\rangle = |\gamma\beta\alpha\rangle$ şeklinde antisimetrikdirler.

Koordinat temsilinde bu vektörler

$$\begin{aligned} \langle x|\alpha\rangle &= \phi_\alpha(x), \\ \langle x_1, x_2|\alpha\beta\rangle &= \frac{\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2) - \phi_\beta(x_1)\phi_\alpha(x_2)}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir (Ballentine, 1998). Bundan sonra, bir orbital olarak $\phi_\alpha(x)$ fonksiyonu ve $|\alpha\beta\gamma\rangle$ vektöründeki α , β , γ orbitalleri işgal edilmişken diğer bütün orbitaller işgal edilmemiş olarak alınacaktır. Bu durum, N -antisimetrik parçacık için

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_N|\alpha\beta\gamma\dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(x_1) & \phi_\beta(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \phi_\alpha(x_2) & \phi_\beta(x_2) & \dots & \phi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_\alpha(x_N) & \phi_\beta(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde genelleştirilebilir (Schulten, 2000). Determinant şeklinde çok-parçacık sistemlerin antisimetrik özelliğini veren bu ifade John Clarke Slater tarafından 1929 yılında verilmiştir. Bu determinantın özelliği, herhangi iki işgal edilmiş durumu

(α, β, \dots) değiştirildiğinde determinantın iki sütunu yer değiştirmiş olur (Schulten, 2000). İki sütunu yer değiştiren determinantın işareti değiştiğinden bu da antisimetrik davranışı gösterir. Ayrıca herhangi iki parçacık aynı konumda bulunursa, determinantın iki satırı aynı olur ve determinant sıfırdır. Bu da, iki parçacığın aynı konumda olamayacağını belirtir.

(3.4) denklemleri,

$$\hat{f}_\alpha^+ | \dots \rangle = | \alpha \dots \rangle \quad (3.7)$$

şeklinde özetlenebilir. Burada "..." ifadesi eşitliğin her iki yanında aynıdır (her uzunlukta ya da boş olabilir). α orbitalindeki bir vektöre \hat{f}_α^+ uygulanırsa, $\hat{f}_\alpha^+ | \alpha \dots \rangle = | \alpha \alpha \dots \rangle$ elde edilir. $| \alpha \alpha \dots \rangle$ vektörü ilk iki argümanın değişimiyle işaret değiştirdiğinden, $| \alpha \alpha \dots \rangle = - | \alpha \alpha \dots \rangle$ olur ve buradan

$$\hat{f}_\alpha^+ | \alpha \dots \rangle = 0 \quad (3.8)$$

olmak zorunda olduğu görülür. Bu durum, bir orbitalin birden fazla işgal edilmiş durumda bulunmasının imkansız olduğunu belirten Pauli dışarılama ilkesini sağlar.

(3.7) ve (3.8) bağıntıları ile tanımlanan \hat{f}_α^+ operatörünün hermitik eşleniği \hat{f}_α yok etme operatörüdür. (3.7) ve (3.8) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \alpha \dots | \hat{f}_\alpha^+ | \dots (\sim \alpha) \rangle &= 1, \\ \langle \psi | \hat{f}_\alpha^+ | \dots (\sim \alpha) \rangle &= 0, \quad (\text{eğer } \langle \psi | \alpha \dots \rangle = 0 \text{ ise}) \end{aligned}$$

elde edilir. $| \dots (\sim \alpha) \rangle$ notasyonu, α orbitalinin işgal edilmemiş durumunu belirtir. (3.8) denklemlerinden,

$$\langle \alpha \dots | \hat{f}_\alpha = 0$$

bulunur. Yukarıdaki bu üç ilişki sırasıyla

$$\langle (\sim \alpha) \dots | \hat{f}_\alpha | \alpha \dots \rangle = 1, \quad (3.9)$$

$$\langle (\sim \alpha) \dots | \hat{f}_\alpha | \psi \rangle = 0, \quad (\text{eğer } \langle \psi | \alpha \dots \rangle = 0 \text{ ise}) \quad (3.10)$$

$$\langle \alpha \dots | \hat{f}_\alpha | \psi \rangle = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. (3.10) ve (3.11) denklemlerine $|\psi\rangle = |0\rangle$ durumu uygulandığında, $\hat{f}_\alpha |0\rangle$ vektörü α orbitali işgal edilmemiş durumda iken

$$\hat{f}_\alpha |0\rangle = 0 \quad (3.12)$$

sonucu elde edilir. $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$ ilişkisi (3.11) ve (3.10) denklemlerine uygulandığında, $\hat{f}_\alpha |\alpha\rangle$ vektörünün α orbitali işgal edilmiş durumları için

$$\hat{f}_\alpha |\alpha\rangle = |0\rangle \quad (3.13)$$

olduğu bulunur. Buradan, benzer bir anlayışla

$$\hat{f}_\alpha |\alpha \dots\rangle = |\dots(\sim \alpha)\rangle \quad (3.14)$$

sonucu çıkarılır. Son olarak (3.11) ve (3.10) denklemlerinde $|\psi\rangle = |\dots(\sim \alpha)\rangle$ durumu incelenirse,

$$\hat{f}_\alpha |\dots(\sim \alpha)\rangle = 0 \quad (3.15)$$

bulunur. Böylece, \hat{f}_α operatörünün etkisi; eğer α orbitali işgal edilmiş ise o orbitali boş duruma getirmesi ve orbital işgal edilmemiş ise vektörü yok ettiği şeklinde ifade edilebilir.

Özetlemek gerekirse, \hat{f}_α^+ yaratma operatörü α orbitali boş ise orbitale bir parçacık ekler ve \hat{f}_α yok etme operatörü orbital işgal edilmiş ise α orbitalinden bir parçacık siler. Aksi halde, (3.15) deki gibi bir sonuç elde edilir.

Eğer \hat{f}_α^+ yaratma operatörü keyfi bir vektör üzerine iki kez ard arda uygulanırsa, $\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha^+ |\psi\rangle = |\alpha\alpha\psi\rangle$ elde edilir ve böylece (3.8) denkleminde anlaşılacağı gibi bu sonuç sıfırdır. $|\psi\rangle$ vektörü keyfi olduğundan,

$$\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha^+ = 0 \quad (3.16)$$

yazılabilir. Bu denklemin hermitik eşleniği

$$\hat{f}_\alpha \hat{f}_\alpha = 0 \quad (3.17)$$

şeklindedir.

Keyfi bir vektör üzerine etkiyen $(\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\beta^+ + \hat{f}_\beta^+ \hat{f}_\alpha^+)$ lineer kombinasyonu (f_α^+ ve \hat{f}_β^+ nın antikomütatörü olarak isimlendirilir) düşünülürse:

$$\begin{aligned} (f_\alpha^+ f_\beta^+ + f_\beta^+ f_\alpha^+) |\psi\rangle &= |\alpha\beta\gamma\rangle + |\beta\alpha\gamma\rangle \\ &= |\alpha\beta\gamma\rangle - |\alpha\beta\gamma\rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunabilir (Ballentine, 1998). Buradan,

$$\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\beta^+ + \hat{f}_\beta^+ \hat{f}_\alpha^+ = 0 \quad (3.18)$$

$$\hat{f}_\alpha \hat{f}_\beta + \hat{f}_\beta \hat{f}_\alpha = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde operatör ilişkileri elde edilir.

Son olarak, bir yaratma ve bir yok etme operatörünün antikomütasyonu $(\hat{f}_\alpha \hat{f}_\beta^+ + \hat{f}_\beta^+ \hat{f}_\alpha)$ düşünülürse, bu komütasyon $(\alpha \neq \beta)$ eğer α orbitali boş ya da

β orbitali işgal edilmiş durumları için sıfır olacağı önceki sonuçlardan kolayca çıkartılabilir. Bu yüzden, bu komütasyon için yalnızca $|\alpha\dots(\sim\beta)\rangle$ vektörünün etkisine bakılması yeterlidir (Ballentine, 1998):

$$\begin{aligned} (\hat{f}_\alpha \hat{f}_\beta^+ + \hat{f}_\beta^+ \hat{f}_\alpha) |\alpha\dots(\sim\beta)\rangle &= \hat{f}_\alpha |\beta\alpha\dots\rangle + \hat{f}_\beta^+ |\dots(\sim\alpha, \sim\beta)\rangle \\ &= -\hat{f}_\alpha |\alpha\beta\dots\rangle + \hat{f}_\beta^+ |\dots(-\alpha, \sim\beta)\rangle \\ &= -|\beta\dots(\sim\alpha)\rangle + |\beta\dots(\sim\alpha)\rangle = 0 \end{aligned}$$

$\alpha = \beta$ için boş ya da işgal edilmiş durumda olan α orbitalinin durumları ayrı incelenirse:

$$\begin{aligned} (\hat{f}_\alpha \hat{f}_\alpha^+ + \hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha) |\alpha\dots\rangle &= 0 + \hat{f}_\alpha^+ |\dots(\sim\alpha)\rangle = |\alpha\dots\rangle \\ (\hat{f}_\alpha \hat{f}_\alpha^+ + \hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha) |\dots(\sim\alpha)\rangle &= \hat{f}_\alpha |\alpha\dots\rangle + 0 = |\dots(\sim\alpha)\rangle \end{aligned}$$

ilişkileri bulunur. Böylece, $\hat{f}_\alpha \hat{f}_\alpha^+ + \hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha$ komütasyonunun birim operatör olduğu açıkça görülür. Bulunan bu son sonuçlar

$$\hat{f}_\alpha \hat{f}_\beta^+ + \hat{f}_\beta^+ \hat{f}_\alpha = \delta_{\alpha\beta} I \quad (3.20)$$

denklemleri ile özetlenebilir.

Fock uzayındaki baz vektörlerinin hepsi $\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha$ operatörünün özvektörleridir. Bu durum, eğer α orbitali boş ise $\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha$ operatörü sıfır özdeğerine sahip olduğu ve eğer α orbitali işgal edilmiş ise $\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha$ operatörü 1 özdeğerine sahip olduğu gösterilerek ispatlanabilir. Böylece $\hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha$, α orbitali için sayı operatörü olarak isimlendirilir (Ballentine, 1998). Toplam sayı operatörü ise

$$\hat{N} = \sum_{\alpha} \hat{f}_\alpha^+ \hat{f}_\alpha \quad (3.21)$$

ifadesine eşittir.

3.3.2 Bozonlar

Fock uzayı baz vektörlerinin yapısı fermiyonlar için yapılan durum ile çok benzerdir. Fakat burada sistemin çok parçacık kuantum durumları parçacıkların değişimi altında simetrik olmak zorundadır. Bu da orbitallerin birden fazla işgal durumunda bulunabileceğini ifade eder. Eğer tek parçacık baz vektörleri $\{|\phi_\alpha\rangle : (\alpha = 1, 2, 3, \dots)\}$ şeklinde orbital setinden oluşuyorsa, çok-parçacık durum vektörleri $|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$ olarak gösterilebilir (Ballentine, 1998). Burada n_α pozitif tamsayısı ϕ_α orbitalinin işgal edilmiş durumudur. (Bu notasyon, n_α nın yalnızca 0 ve 1 değerleri ile kısıtlanmasıyla fermiyonlar içinde kullanılabilir.)

Bozonlar için yaratma operatörleri

$$\begin{aligned}\hat{b}_\alpha^+|0\rangle &= |\phi_\alpha\rangle = |0, 0, \dots, n_\alpha = 1, 0, \dots\rangle, \\ \hat{b}_\alpha^+|n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle &\propto |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle.\end{aligned}\quad (3.23)$$

özellikleri ile tanımlıdır. Bu vektörler, parçacıkların permütasyonu altında simetrik olduklarından, $\hat{b}_\alpha^+\hat{b}_\beta^+ = \hat{b}_\beta^+\hat{b}_\alpha^+$ olmak zorundadır. Yaratma operatörünün hermitik eşlenik operatörü yok etme operatörü olarak işlev görür ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned}\hat{b}_\alpha|\phi_\alpha\rangle &= |0\rangle, \\ \hat{b}_\alpha|n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle &\propto |n_1, n_2, \dots, n_\alpha - 1, \dots\rangle, \quad (n_\alpha > 0), \\ \hat{b}_\alpha|n_1, n_2, \dots, n_\alpha = 0, \dots\rangle &= 0.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Bu eşitliklerdeki belirlenmemiş orantı faktörü, α orbitali için sayı operatörü olan $\hat{b}_\alpha^+\hat{b}_\alpha$ çarpımından dolayı bir sabittir:

$$\hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = n_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle. \quad (3.25)$$

Böylece

$$(\langle n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots | \hat{b}_\alpha^+) (\hat{b}_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle) = n_\alpha$$

ilişkisinden

$$\hat{b}_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = (n_\alpha)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_\alpha - 1, \dots\rangle \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.23) denklemindeki orantı faktörünü belirlemek için

$$\hat{b}_\alpha^+ |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = c |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle. \quad (3.27)$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadeye \hat{b}_α operatörü uygulandığında ve (3.26) denklemini kullanıldığında

$$\hat{b}_\alpha \hat{b}_\alpha^+ |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = (n_\alpha + 1)^{1/2} c |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle$$

elde edilir. Tekrar \hat{b}_α^+ operatörü etki ettirildiğinde ve (3.27) denkleminin kullanımıyla

$$\hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha \hat{b}_\alpha^+ |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = c^2 (n_\alpha + 1)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle \quad (3.28)$$

bulunur. (3.25) denklemini kullanarak bu denklemin sol tarafı

$$(\hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha) \hat{b}_\alpha^+ |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = (n_\alpha + 1) c |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle \quad (3.29)$$

elde edilebilir. (3.28) ve (3.29) un eşitliğinden $c = (n_\alpha + 1)^{1/2}$ bulunur. Bu yüzden, \hat{b}_α^+ operatörü

$$\hat{b}_\alpha^+ |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = (n_\alpha + 1)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_\alpha + 1, \dots\rangle \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir.

(3.26) ve (3.30) denklemlerinden

$$\hat{b}_\alpha \hat{b}_\beta^+ - \hat{b}_\beta^+ \hat{b}_\alpha = \delta_{\alpha\beta} I \quad (3.31)$$

komütasyon ilişkisi ortaya çıkar ve daha önceki sonuçlardan

$$\hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\beta^+ - \hat{b}_\beta^+ \hat{b}_\alpha^+ = \hat{b}_\alpha \hat{b}_\beta - \hat{b}_\beta \hat{b}_\alpha = 0 \quad (3.32)$$

ilişkileri belirlenebilir (Ballentine, 1998).

Bu sonuçlar (3.19), (3.20) ve (3.21) ile kıyaslandığında, fermiyonlar ve bozonlar için yaratma ve yok etme operatörleri arasında farklılık olduğu görülür. Yani, bozonlar komütasyon ilişkilerini sağlarken, fermiyonlar antikomütasyon ilişkilerini sağlarlar. Ayrıca bozon yaratma ve yok etme operatörleri harmonik osilatörün alçaltma ve yükseltme operatörleri ile matematiksel olarak izomorfiktir.

3.4 Çok Boyutlu Fermiyon Osilatörleri

Kuantum mekaniğinin ilk yıllarında Jordan ve Wigner fermiyonik sistemleri tanımlamak için kanonik antikomütasyon ilişkilerini keşfetmişlerdir (Freed and Uhlenbeck, 1995). İlk olarak tek bir fermiyondan oluşan sistem ele alınmıştır. Bu bağlamda, işgal edilmiş ve işgal edilmemiş olan iki durumdan oluşan Hilbert uzayının nasıl yapılandırılacağı sorusu oluşmuştur. Böylece, antikomütatif olan \hat{f} ve \hat{f}^+ operatörleri düşünülmüştür. Burada \hat{f} operatörü fermiyon sayısını bir azaltır, \hat{f}^+ ise fermiyon sayısını bir artırır. Bu yaratma ve yok etme operatörleri ile oluşturulan Hilbert uzayı fermiyonik Fock uzayı olarak bilinir. Böylece, tek-boyutlu fermiyon osilatör cebiri (Freed and Uhlenbeck, 1995):

$$\begin{aligned}
\{\hat{f}, \hat{f}^+\} &= 1, \\
\{\hat{f}^+, \hat{f}^+\} &= 0, \\
\{\hat{f}, \hat{f}\} &= 0, \\
[\hat{N}, \hat{f}] &= -\hat{f}, \\
[\hat{N}, \hat{f}^+] &= \hat{f}^+,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

komütasyon ve antikomütasyon ilişkileri ile tanımlanır. Bu sistemin Hamiltonyeni ise

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{f}^+ \hat{f} - \hat{f} \hat{f}^+) \tag{3.34}$$

ve sayı işlemcisi ise

$$\hat{N} = \hat{f}^+ \hat{f} \tag{3.35}$$

ile tanımlanır (Freed and Uhlenbeck, 1995).

Etkileşmeyen birden fazla fermiyondan oluşan fermiyonik osilatör cebiri ise

$$\begin{aligned}
\{\hat{f}_i, \hat{f}_j^+\} &= \delta_{ij}, \\
\{\hat{f}_i^+, \hat{f}_j^+\} &= 0, \\
\{\hat{f}_i, \hat{f}_j\} &= 0, \\
[\hat{N}, \hat{f}_j] &= -\hat{f}_j, \\
[\hat{N}, \hat{f}_j^+] &= \hat{f}_j^+, \\
\hat{H} &= \frac{\hbar}{2} \sum_j w_j (\hat{f}_j^+ \hat{f}_j - \hat{f}_j \hat{f}_j^+), \\
\hat{N} &= \sum_j \hat{f}_j^+ \hat{f}_j
\end{aligned} \tag{3.36}$$

ilişkileri ile tanımlıdır (Freed and Uhlenbeck, 1995).

BÖLÜM 4

İDEAL FERMİ GAZININ TERMODİNAMİK VE İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Doğadaki birçok sistem eğer izole (dış dünya ile enerji ve madde alışverişi yapmıyor) ise, makroskobik özelliklerinin birkaç durum değişkeni ile tanımlandığı zamandan bağımsız bir duruma (termodinamik denge) yöneleceklerdir (Reichl, 1995). Durgun durumlar için entropi maksimum ve enerji sabittir. Bununla birlikte, enerji sabit olmasına rağmen sistem uygun enerjiye sahip farklı mikroskobik durumlarda bulunabilir. Eğer yalnızca toplam enerji biliniyorsa, bu mikrodurumları ayırt etmek için hiçbir yol yoktur. Fakat sistemin mekanik özellikleri üzerine kurulu olan çeşitli mikroskobik durumların olasılığı belirlenebilir. Dağılım fonksiyonu verildiği zaman ise, enerji, entropi,... gibi çeşitli niceliklerin beklenen değerleri kolayca hesaplanabilir.

Çeşitli dış kısıtlamalar altında sistemlerin davranışlarının tanımlanabilmesi mümkündür. Bunlardan ilki, toplam enerji ve parçacık sayısının sabit olduğu kapalı izole sistemlerdir. Bu sistemler mikrokanonik dağılım ile incelenirler. Örneğin, denge durumundaki termodinamik niceliklerin dalgalanmaları için olasılık dağılımı türetmek için mikrokanonik dağılım kullanılabilir (Reichl, 1995). Birdiğeri ise, sıcaklığın ve parçacık sayısının sabit fakat enerjinin değişebildiği kapalı sistemlerdir. Bu sistemler kanonik dağılım ile tanımlıdır. Kapalı sistemlere örnek olarak, katıların termodinamik özelliklerine örgü titreşimlerinin etkileri düşünülebilir. Son olarak, enerji ve parçacık sayısının değişken olduğu fakat sıcaklık ve kimyasal potansiyelin sabit olduğu açık sistemler düşünülebilir. Bu gibi sistemler büyük kanonik dağılım ile tanımlıdır. Bu sistemin sahip olduğu özellikler, süperakışkanlık ve süperiletkenlik gibi faz geçişlerinin olduğu sistemler ile uğraşıldığında önemli hale gelir (Reichl, 1995).

Bu bölümde, daha çok büyük kanonik dağılımda ideal Fermi gazı üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda, gazın düşük ve yüksek sıcaklık limitlerinde termostatistiksel özellikleri incelenmiştir.

4.1 İdeal Gazlar: Mikrokanonik Dağılım

N tane etkileşmeyen özdeş parçacıktan oluşan bir sistemin Hamiltoniyeni

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{P}_i^2}{2m} \quad (4.1)$$

ile verilir (Huang, 1987). Burada \hat{p}_i , i . parçacığın momentum operatörüdür.

Doğada, iki tip parçacık sistemi vardır: Bosonlar ve Fermiyonlar. Bose-Einstein dağılımına uyan bosonik parçacıklar için özfonksiyonların toplam seti, parçacık koordinatlarının her bir çiftinin değişimi altında simetrik olan \hat{H} nın özfonksiyonlarının toplamıdır. Fermiyonik parçacıkların özfonksiyonlarının toplam seti, parçacık koordinatlarının her bir çiftinin değişimi altında antisimetrik olan \hat{H} nın özfonksiyonlarının toplamıdır. Bose-Einstein dağılımına uyan parçacıklar bozonlar olarak adlandırılırlar. Bozonlara örnek olarak α parçacığı, foton, döteron, ... verilebilir. Fermi-Dirac dağılımına uyan parçacıklar fermiyonlar olarak adlandırılır ve örnek olarak elektron, proton, nötron, ... verilebilir.

Bu iki sisteme ek olarak, matematiksel bir kıyaslama için Boltzmann sistemi tanımlanır. Bu sistem özfonksiyonları, \hat{H} nın bütün özfonksiyonları olan parçacıklar sistemi olarak tanımlanır. Boltzmann sistemi için özfonksiyonların seti Bose, Fermi gibi sistemleri içerir. Doğada bu tip bilinen sistem yoktur. Ayrıca, yüksek sıcaklıklarda Bose ve Fermi sistemlerinin termodinamik davranışları Boltzmann sistemine yaklaştığından dolayı yararlı bir modeldir (Huang, 1987).

Etkileşmeyen özdeş parçacıklar için üç durum vardır: İdeal Bose gazı, ideal Fermi gazı ve ideal Boltzmann gazı. Burada ilk olarak mikrokanonik dağılımda bu ideal gazların termodinamiği incelenecektir. Bunun için, değeri E ile $E + \Delta E$ arasında olan enerji özdeğerlerine sahip sistemin $\Gamma(E)$ durumlarının sayısı her üç durum için bulunması gereklidir.

Ele alınan gazın periyodik sınır koşulları olan bir kutu içerdiği düşünülebilir (Reichl, 1998). Böylece tek parçacık için momentum operatörü

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L} \vec{n} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Burada \vec{n} bileşenleri 0 ya da \pm tamsayılar olan bir vektördür ve $L = V^{1/3}$ tür. $V \rightarrow \infty$ ve $N \rightarrow \infty$ limitlerinde parçacığın enerji düzeyleri birbirine çok yaklaşır ve sürekli bir durum gibi düşünülebilir (Huang, 1987). Böylece, \vec{p} üzerinden alınan toplam

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 p \quad (4.3)$$

integral ile yerdeğiştirebilir.

Bir ideal sistemin durumu, \vec{p} momentumuna sahip $n_{\vec{p}}$ parçacıklarının oluşturduğu $\{n_{\vec{p}}\}$ işgal sayılarının seti ile tanımlanır. Yani, N parçacıkların toplam sayısı ve E toplam enerji

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \\ N &= \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ile verilir. Her $n_{\vec{p}}$ için izinli değerler

$$n_p = \begin{cases} 0,1,2,\dots & (\text{bosonlar için}) \\ 0,1 & (\text{fermiyonlar için}) \end{cases} \quad (4.5)$$

şeklinde verilebilir.

$V \rightarrow \infty$ limitinde enerji seviyeleri bir süreklilik oluşturuyordu. Bu enerji seviyeleri g_1, g_2, \dots şeklinde hücrelere ya da enerji durumlarına ayrılabilir. $\{n_i\}$ işgal sayılarının setine karşılık gelen sistemin durumlarının sayısı $W\{n_i\}$ ile tanımlanır ve buradan

$$\Gamma(E) = \sum_{\{n_i\}} W\{n_i\} \quad (4.6)$$

ifadesi bütün tamsayıların setleri üzerinden toplam olarak belirtilebilir. Ayrıca,

$$E = \sum_i \varepsilon_i n_i \quad (4.7)$$

$$N = \sum_i n_i \quad (4.8)$$

koşullarını sağlar. Fermiyon ve Bozon gazları için farklı hücrelerdeki parçacık değişimi yeni bir duruma yol açmadığından, $W\{n_i\} = \prod_j w_j$ biçiminde düşünülebilir. Aşağıda bu iki gazın durumları ayrı ayrı incelenmiştir.

Bose Gazı: Her bir enerji seviyesi, her sayıda parçacık ile işgal edilebilir. i . enerji düzeyi, g_i alt hücreye sahip olsun. w_i , n_i tane parçacığın enerji düzeylerine en olası biçimde nasıl dağılacağını veren bağıntı

$$W\{n_i\} = \prod_i w_i = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \quad (4.9)$$

şeklinde bulunabilir (Huang, 1987; Apaydın, 2004).

Fermi Gazı: i . enerji düzeyindeki g_i alt hücrelerinin her birindeki parçacıkların sayısı 0 ya da 1 dir. Böylece w_i için

$$W\{n_i\} = \prod_i w_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!} \quad (4.10)$$

ifadesi bulunabilir (Huang, 1987).

Buradan ortalama parçacık sayısı

$$\bar{n}_i = \begin{cases} \frac{g_i}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i} + 1} & \text{Fermi} \\ \frac{g_i}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i} - 1} & \text{Bose} \end{cases} \quad (4.11)$$

bulunur (Huang, 1987). Bu ifade, kuantum durumları yerine momentum cinsinden

$$\bar{n}_p = \begin{cases} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_p} + 1} & \text{Fermi} \\ \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_p} - 1} & \text{Bose} \end{cases} \quad (4.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, z ve β Lagrange çarpanlarıdır ve

$$\begin{aligned} \sum_p \varepsilon_p \bar{n}_p &= E \\ \sum_p \bar{n}_p &= N \end{aligned} \quad (4.13)$$

koşullarından belirlenir. İlk koşuldan $\beta = 1/kT$ ve diğerinden fugasite olarak tanımlanan $z = e^{\beta\mu}$ bulunabilir.

Entropiyi elde etmek için $S = k \log \Gamma(E)$, işgal sayıları seti $\{n_i\}$ üzerinden $W\{n_i\}$ toplamı bulunmalıdır. Bununla birlikte, $\Gamma(E)$ için ortalama işgal sayısı seti üzerinden $W\{\bar{n}_i\}$ yaklaşımı yapılabilir (Huang, 1987). Böylece entropi

$$S = k \log W\{\bar{n}_i\} \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan Stirling yaklaşımı kullanılarak, (4.11) ve (4.14) bağıntılarından

$$\frac{S}{k} = \log W \{ \bar{n}_i \} = \begin{cases} \sum_i g_i \left[\frac{\beta \varepsilon_i - \log z}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} - 1} - \log(1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}) \right] & \text{Bose} \\ \sum_i g_i \left[\frac{\beta \varepsilon_i - \log z}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} + 1} + \log(1 + z e^{-\beta \varepsilon_i}) \right] & \text{Fermi} \end{cases}$$

elde edilebilir.

Yukarıda yapılan çalışmaların tümü Boltzmann gazı için de incelenebilir (Huang, 1987). Ayrıca toplam parçacık ve toplam enerji ifadeleri incelendiğinde entropi

$$\frac{S}{k} = \frac{3}{2} N - N \log \left[\frac{1}{\nu} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \right] \quad (4.15)$$

bulunabilir ($\nu = V/N$). Bu ifade Sackur-Tetrode eşitliği olarak bilinir (Huang, 1987).

$\lambda = (2\pi \hbar^2 / mkT)^{3/2}$ ise termal dalgaboyu olarak tanımlanır. Termal dalgaboyu, $k_B T$ kinetik enerjili bir kuantum parçacığın de Broglie dalga boyudur. λ ortalama parçacıklar arası boşluktan daha kısa ise, parçacıkların kuantum istatistiği gazın termodinamik özelliklerine önemli bir etki yapmayacaktır. Bununla birlikte, λ ortalama parçacıklar arası uzaklık ile hemen hemen benzer olduğu durumda, gazın termodinamik özellikleri parçacıkların bozon ya da fermiyon olup olmamasına bağlı olmaya başlayacaktır (Reichl, 1998).

4.2 İdeal Gazlar: Büyük Kanonik Dağılım

Bose ve Fermi gazı için büyük üleşim fonksiyonu $Q_N(V, T)$ kullanarak (Huang, 1987),

$$\begin{aligned}
Z(z, V, T) &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}} z^N e^{-\beta \sum_p n_p \epsilon_p} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}} \prod_p (ze^{-\beta \epsilon_p})^{n_p} \\
&= \sum_{n_0} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots [(ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \dots] \\
&= [\sum_{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0}] [\sum_{n_1} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1}] \dots \\
&= \prod_p [\sum_n (ze^{-\beta \epsilon_p})^n] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki n üzerinden toplam, bozonlar için $n=0,1,2,\dots$ ve fermiyonlar için $n=0,1$ değerleri ile yapılır. Buna göre

$$Z(z, V, T) = \begin{cases} \prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_p}} & \text{Bose} \\ \prod_p (1 + ze^{-\beta \epsilon_p}) & \text{Fermi} \end{cases}$$

ifadeleri bulunabilir. Hal denklemi ise

$$\frac{PV}{kT} = \log Z(z, V, T) = \begin{cases} - \sum_p \log(1 - ze^{-\beta \epsilon_p}) & \text{(Bose)} \\ \sum_p \log(1 + ze^{-\beta \epsilon_p}) & \text{(Fermi)} \end{cases} \tag{4.17}$$

şeklinde kolayca elde edilir. Toplam parçacık sayısı ise

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log Z(z, V, T) = \begin{cases} \sum_p \frac{ze^{-\beta \epsilon_p}}{1 - ze^{-\beta \epsilon_p}} & \text{Bose} \\ \sum_p \frac{ze^{-\beta \epsilon_p}}{1 + ze^{-\beta \epsilon_p}} & \text{Fermi} \end{cases} \tag{4.18}$$

ifadelerine eşittir. $\langle n_p \rangle$ ortalama işgal sayısı,

$$\begin{aligned} \langle n_{\bar{p}} \rangle &\equiv \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\bar{p}}\} \\ \sum n_{\bar{p}}=N}} n_{\bar{p}} e^{-\beta \sum \varepsilon_{\bar{p}} n_{\bar{p}}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\bar{p}}} \log z \\ &= \frac{ze^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}}}{1 \pm ze^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}}} \quad (\text{Bose ve Fermi}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

ifadesi (4.12) ile benzerdir. (4.18) denkleminde

$$N = \sum_{\bar{p}} \langle n_{\bar{p}} \rangle \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir.

$V \rightarrow \infty$ limitinde, (4.3) de gösterildiği gibi \bar{p} üzerinden toplam \bar{p} üzerinden integral ile yer değiştirir. Bu yer değiştirme, eğer toplam bütün \bar{p} ler için sonlu ise geçerlidir. (4.17) ve (4.18) deki z fugasite ideal Fermi gazı için negatif değildir. Eğer z negatif olursa, (4.18) deki parçacık sayısı pozitif olmaz. Bundan dolayı fugasitenin durumu Fermi ve Bose gazı için ayrı ayrı incelenmelidir.

4.2.1 İdeal Fermi Gazı

Atomlardaki çekirdekler, metallerdeki elektronlar, ... gibi sistemler ilk yaklaşımda ideal Fermi gazı olarak düşünülmektedir (Greiner et al., 1994). Bu yüzden, Fermi parçacıklarının oluşturduğu etkileşmeyen Fermi gazı çok kullanışlı bir modeldir. İdeal Fermi gazının termodinamik özellikleri büyük üleşim fonksiyonunun logaritmasından elde edilebilir. Bununla birlikte, fugasite ($z = e^{\beta\mu}$) ise (4.18) denklemindeki parçacık sayısından bulunabilir. Burada μ bütün değerleri alabilir ve $0 \leq z \leq \infty$ aralığında değişir. Kimyasal potansiyel, sisteme bir parçacık eklemek için gerekli ortalama enerji olduğundan, sabit hacimde parçacık sayısı ile artar (Greiner et

al., 1994). Bunun sebebi, her yeni parçacık için yüksek enerjili durumları gerektiren Pauli dışarılama ilkesidir. Enerji öz durumları, büyük hacimde birbirine yakın olduklarından \vec{p} üzerinden alınan toplamlar integrale dönüşür. Böylece,

$$\begin{cases} \frac{P}{kT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \log(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) \\ \frac{1}{\nu} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + 1} \end{cases} \quad (4.21)$$

sırasıyla hal denklemi ve birim hacim başına parçacık sayısı ifadeleri bulunur (Huang, 1987). Bu denklemler

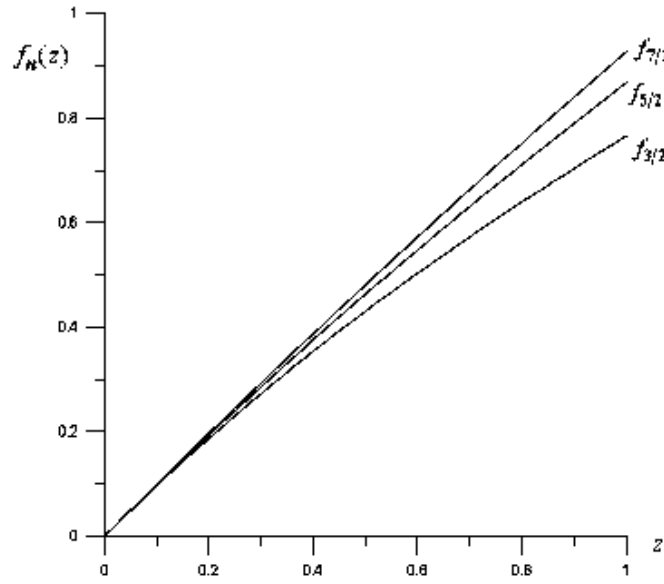
$$\begin{cases} \frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \\ \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \end{cases} \quad (4.22)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada

$$f_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \log(1 + ze^{-x^2}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \quad (4.23)$$

$$f_{3/2}(z) \equiv z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \quad (4.24)$$

şeklinde Fermi-Dirac fonksiyonları kullanılmıştır. Bu $f_n(z)$ fonksiyonları incelendiğinde monoton artan fonksiyon oldukları görülebilir ve genel davranışları şekil 4.1 de gösterilmiştir (Greiner et al., 1994; EK-1).



Şekil 4.1 Standart $f_n(z)$ fonksiyonları

İdeal Fermi gazı için iç enerji

$$U(z, V, T) = \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n\} \\ \sum n_{\bar{p}} = N}} [e^{-\beta \sum \varepsilon_p n_p} \sum_p \varepsilon_p n_p] = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\log Z(z, V, T)] \quad (4.25)$$

ifadesi aynı zamanda ideal Bose gazı içinde geçerlidir. Buradan, $\log Z = PV/kT$ olduğundan (4.22) sonucu kullanılarak

$$\frac{1}{V} U(z, V, T) = \frac{3}{2} \frac{kT}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) ve (4.22) denklemleri arasındaki kıyaslama ile

$$U = \frac{3}{2} PV \quad (4.27)$$

iç enerjinin basınç ile ilişkisi görülebilir.

Isı kapasitesi, sıcaklığa göre iç enerjinin diferensiyeli ile elde edilir. Bunun için T ye göre z nin türevi (zincir kuralı) kullanılır. İdeal Fermi gazı için ısı kapasitesinin elde edilmesi için kullanılan yardımcı bağıntılar (4.22) denkleminde (Greiner et al., 1994):

$$\frac{\partial}{\partial T} f_{3/2}(z) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial T} (f_{3/2}(z)) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) = \frac{N}{V} \frac{\partial}{\partial T} \lambda^3 = -\frac{3}{2T} f_{3/2}(z),$$

ya da

$$\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V,N} = -\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}$$

şeklinde bulunabilir. Buradan sabit hacimde ısı kapasitesi,

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2} NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right) = \frac{3}{2} Nk \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} + \frac{3}{2} NkT \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right),$$

şeklinde yazılabilir. Burada denklemin sağ tarafındaki türev işlemi yapıldığında,

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} Nk \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} + \frac{3}{2} NkT \left[-\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \frac{1}{z} \left(1 - \frac{f_{5/2}(z)f_{1/2}(z)}{(f_{3/2}(z))^2} \right) \right]$$

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \quad (4.28)$$

ısı kapasitesi ifadesi elde edilebilir. Ayrıca, (4.28) denklemi $z \rightarrow 0$ giderken klasik değerini vermektedir.

İdeal Fermi gazı için serbest enerji $F = U - TS = N\mu - PV$ şeklindedir. Burada $\mu = kT \log z$ ve (4.22) denklemindeki P kullanılarak

$$F = N\mu - PV = NkT \left\{ \log z - \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right\} \quad (4.29)$$

kolayca hesaplanabilir. Buradan entropi

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{T}(U - F) = \frac{1}{T} \left(\frac{3}{2} NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - NkT \log z + NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right) \\ &= Nk \left(\frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \log z \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde elde edilebilir (Greiner et al., 1994).

4.3 İdeal Fermi Gazının Hal Denklemi

Spinsiz parçacıklardan oluşan ideal Fermi gazının hal denklemi (4.21) denklemlerinden fugasite ($z = e^{\beta\mu}$) yok edilerek elde edilir (Huang, 1987). İlk olarak (4.21) eşitliklerinin ikincisi ile belirlenen z nin davranışına bakılabilir:

$$\frac{\lambda^3}{\nu} = f_{3/2}(z) \quad (4.31)$$

burada

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} + 1} \quad (4.32)$$

olup, z nin monoton artan bir fonksiyonudur. Küçük z ler için kuvvet serisi açılımı

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (4.33)$$

yapılabilir. Büyük z ler için açılım Sommerfeld metodu ile elde edilebilir (Greiner et al., 1994). Uygunluk olması için $z = e^\nu$ kullanılır ve burada ν

$$\nu = \log z = \mu/kT \quad (4.34)$$

kimyasal potansiyel (μ) ile ilişkilidir.

$$\begin{aligned} f_{3/2}(z) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{x^2-\nu} + 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{\sqrt{y}}{e^{y-\nu} + 1} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{2\sqrt{y}} \frac{y}{e^{y-\nu} + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{e^{y-\nu} + 1} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^{1/2} (e^{y-\nu} + 1)^{-1} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} [(e^{y-\nu} + 1)^{-1} \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2}{3} y^{3/2} (e^{y-\nu} + 1)^{-2} e^{y-\nu} dy] \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu} + 1)^2} \left(\nu^{3/2} + \frac{3}{2} \nu^{1/2} (y-\nu) + \frac{3}{8} \nu^{-1/2} (y-\nu)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\nu}^\infty dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \left(\nu^{3/2} + \frac{3}{2} \nu^{1/2} t + \frac{3}{8} \nu^{-1/2} t^2 + \dots \right) \\ &\quad \left(\int_{-\nu}^\infty = \int_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^{-\nu} \right) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \left(\nu^{3/2} + \frac{3}{2} \nu^{1/2} + \frac{3}{8} \nu^{-1/2} t^2 + \dots \right) + 0(e^{-\nu}) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(I_0 \nu^{1/3} + \frac{3}{2} I_1 \nu^{1/2} + \frac{3}{8} I_2 \nu^{-1/2} + \dots \right) + 0(e^{-\nu}) \end{aligned}$$

burada

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{t^n e^t}{(e^t + 1)^2}$$

dir ve t^n faktörü dışında, integral t 'nin çift fonksiyonudur. Bu yüzden tek n ler için $I_n = 0$ dir. $n = 0$ için

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} = \int_{-\infty}^0 -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^t + 1} \right) + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^t + 1} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{e^t + 1} \right) \Big|_{-\infty}^0 + \left(-\frac{1}{e^t + 1} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= -\left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Çift sayılı n ' ler için ($n > 0$);

$$\begin{aligned} I_n &= -2 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{n-1}}{e^{\lambda t} + 1} \right]_{\lambda=1} \\ &= -2 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} \frac{du}{\lambda} \frac{(u/\lambda)^{n-1}}{(e^u + 1)} \right]_{\lambda=1} \\ &= -2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{-n} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{(e^u + 1)} \right)_{\lambda=1} \\ &= -2(-n) \lambda^{-n-1} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{(e^u + 1)} \Big|_{\lambda=1} \\ &= 2n \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u + 1}. \end{aligned}$$

Burada

$$\frac{u^{n-1}}{e^u + 1} \frac{e^{-u}}{e^{-u}} = \frac{u^{n-1} e^{-u}}{1 + e^{-u}}$$

kullanılarak,

$$I_n = 2n \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1} e^{-u}}{1 + e^{-u}}$$

ve buradaki paydadaki terim için $(1 + e^{-u})^{-1} = 1 - e^{-u} + \frac{2}{2!}(e^{-u})^2 - \dots$ ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_n &= 2n \int_0^{\infty} du u^{n-1} e^{-u} (1 - e^{-u} + e^{-2u} - \dots) \\ &= 2n \int_0^{\infty} du u^{n-1} (e^{-u} - e^{-2u} + e^{-3u} - \dots) \\ &= 2n \int_0^{\infty} u^{n-1} (-1)^{r+1} e^{-ur} du \\ &= 2n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-ur} du \\ &= 2n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \int_0^{\infty} \left(\frac{k}{r}\right)^{n-1} e^{-k} \frac{dk}{r} \\ &= 2n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{1}{r^n} \underbrace{\int_0^{\infty} k^{n-1} e^{-k} dk}_{\Gamma(n)=(n-1)!} \\ &= 2n(n-1)! \sum_0^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{1}{r^n} \\ &= 2n(n-1)! \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots\right) \\ &= 2n(n-1)! \left[\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \dots\right)\right] \\ &= 2n(n-1)! \left(\sum_r \frac{1}{r^n} - 2\sum_r \frac{1}{(2r)^n}\right) \\ &= 2n(n-1)! \sum_r \frac{1}{r^n} \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) \\ &= 2n(n-1)! \xi(n) (1 - 2^{1-n}). \end{aligned}$$

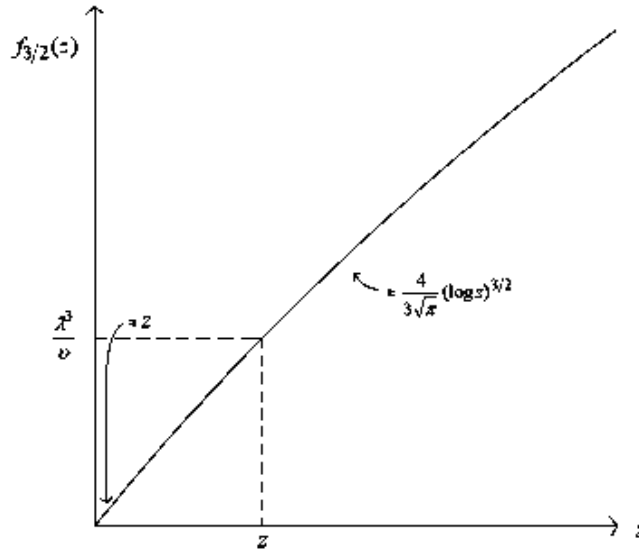
Burada $\xi(n)$ Riemann zeta fonksiyonudur ve bazı özel değerleri (Huang, 1987)

$$\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \xi(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \xi(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

ile verilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} f_{3/2}(z) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(v^{3/2} + \frac{3}{8} I_2 v^{-1/2} + \dots \right) + 0(e^{-v}) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left((\log z)^{3/2} + \frac{3}{8} \frac{\pi^2}{8} 4 \frac{1}{2} (\log z)^{-1/2} + \dots \right) + 0(z^{-1}) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right) + 0(z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 4.2 Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonu

$f_{3/2}(z)$ nin grafiği şekil 4.2 de gösterilmiştir (EK-2). λ^3/v nün her pozitif değeri için z nin değeri grafikten okunabilir. Buradan, artan z değerleri ile λ^3/v nün monoton

artan bir fonksiyon olduğu görülür. Sabit ν değeri için z , sıcaklık azaldıkça monoton olarak artar (Huang, 1987; Pathria, 1996).

İdeal Fermi gazı yüksek ve düşük sıcaklık limitleri için sergilediği davranışlar aşağıda incelenmiştir (Huang, 1987).

Yüksek sıcaklık ve düşük yoğunluk ($\lambda^3/\nu \ll 1$): $\lambda^3/\nu \ll 1$ için ortalama parçacıklar arası uzaklık $\nu^{1/3}$, λ termal dalga boyundan daha büyüktür. Böylece kuantum etkiler ihmal edilebilir. (4.31) ve (4.33) denklemlerinden

$$\frac{\lambda^3}{\nu} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots$$

yazılabilir ve bunun için

$$z = \frac{\lambda^3}{\nu} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^2 + \dots \quad (4.36)$$

ifadesi bir çözüm olabilir. Böylece, $T \rightarrow \infty$ ($\lambda^3 \rightarrow 0$) olduğunda z Boltzmann gazına indirger. Ortalama işgal sayısı veren (4.19) denklemi

$$\langle n_p \rangle \approx \frac{\lambda^3}{\nu} e^{-\beta \epsilon_p} \quad (4.37)$$

Maxwell-Boltzmann ifadesine yaklaşır (Huang, 1987).

(4.21) hal denklemi

$$\frac{P\nu}{kT} = \frac{\nu}{\lambda^3} f_{5/2}(z) = \frac{\nu}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} - \dots \right)$$

yazılabilir ve uygun olan z çözümünün yerine koyulmasıyla

$$\frac{P\nu}{kT} = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right) + \dots \quad (4.38)$$

bulunan ifade virial açılımı şeklindedir.

Düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluk ($\lambda^3/\nu \gg 1$): $\lambda^3/\nu \gg 1$ için bir parçacığın ortalama de Broglie dalga boyu parçacıklar arası ortalama uzaklıktan daha büyüktür. Böylece, kuantum etkiler özellikle Pauli dışarılama etkisi önemli hale gelir (Huang, 1987).

Mutlak sıfır civarında (4.31) ve (4.35) denklemlerinden

$$\frac{1}{\nu} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \quad (4.39)$$

$$z \approx e^{\beta\varepsilon_F} \quad (4.40)$$

yazılabilir. Burada ε_F sıfır sıcaklıkta kimyasal potansiyeldir ve

$$\varepsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{2/3} \quad (4.41)$$

Fermi enerjisi olarak adlandırılır. Fermi enerjisinin fiziksel önemini anlamak için, sıfır sıcaklık yakınında inceleme yapıldığında

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon_p < \varepsilon_F) \\ 0 & (\varepsilon_p > \varepsilon_F) \end{cases} \quad (4.43)$$

olarak yazılabilir. Pauli dışarılama ilkesinden dolayı iki parçacık aynı durumda olamaz. Böylece sistemin taban durumunda parçacıklar en yüksek enerji seviyesi ε_F ile birlikte mümkün olan düşük enerji seviyelerini işgal ederler. Böylece ε_F , aşağısında N

durumun olduğu tek parçacık enerji seviyesidir. Momentum uzayında parçacıklar p_F yarıçaplı bir küreyi doldururlar ve bu kürenin yüzeyi Fermi yüzeyi olarak adlandırılır (Huang, 1987).

Daha genel koşullar altında Fermi enerjisi bağımsız olarak hesaplanabilir. Bunun için bütün tek parçacık enerji seviyelerinin g -katlı dejenere olduğu durum ele alınabilir. Örneğin, s spinli bir parçacık için $g = 2s + 1$ dir. O zaman ε_F yi belirleme koşulu

$$g \sum_p \langle n_{\vec{p}} \rangle_{T=0} = N \quad (4.43)$$

olur. Bu, Fermi enerjisinin altında N durumun olduğunu belirtir. $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ ifadesinden

$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{N}{V} \quad (4.44)$$

burada

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{gV} \right)^{2/3} \quad (4.45)$$

ve $g = 1$ olduğunda (4.41) denklemini verir (Huang, 1987).

Düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluk durumunda termodinamik fonksiyonları elde etmek için (4.31) ve (4.35) denklemlerinden kimyasal potansiyel için

$$\mu = kT \nu = kT \log z = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.46)$$

açılımı elde edilir. Açılım parametresi kT/ε_F dir. T_F Fermi sıcaklığı olarak tanımlanırsa,

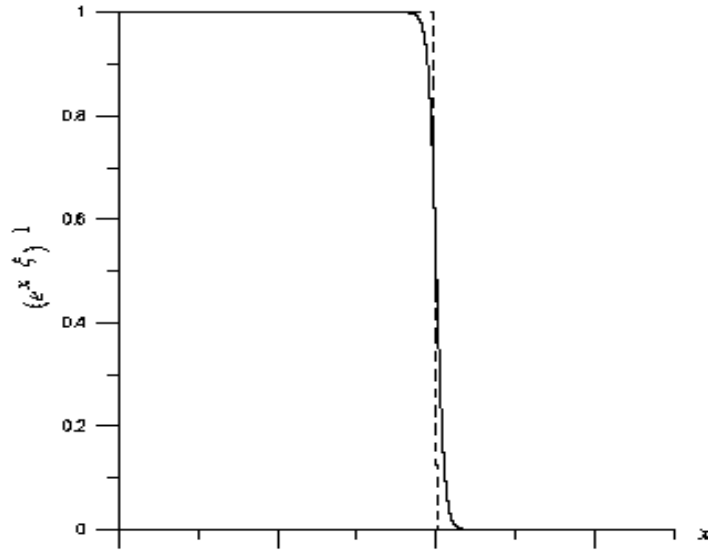
$$kT_F = \varepsilon_F \quad (4.47)$$

şeklinde olup düşük sıcaklıklar $T \ll T_F$ anlamına gelir. Bu durumda gaz dejenere olarak söylenir, çünkü parçacıklar en düşük enerji seviyelerine gitmek için yönelirler. Bu nedenle T_F , dejenere sıcaklık olarak isimlendirilir (Huang, 1987).

Ortalama işgal sayısı

$$\langle \bar{n}_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p - \nu} + 1} \quad (4.48)$$

ile ifade edilir. Burada ν (4.46) denklemi ile belirlidir. \bar{n}_p nin grafiği şekil 4.3 de gösterilmiştir (EK-3).



Şekil 4.3 Düşük sıcaklıklarda $x = \beta\varepsilon_p$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak ideal sistemde Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu (Pathria, 1996).

İdeal Fermi gazının iç enerjisi,

$$U = \sum_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m_0} \int_0^\infty dp p^4 \langle n_{\vec{p}} \rangle$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada kısmi integrasyon ve (4.35) denklemini elde etmek için uygulanan işlemler tekrarlandıktan sonra

$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.49)$$

iç enerji ifadesinin açılımı elde edilir (Huang, 1987). Burada, ilk terim Fermi gazının taban durum enerjisidir. İdeal Fermi gazının sabit hacimde ısı kapasitesi (4.49) denkleminde

$$\frac{C_V}{Nk} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\varepsilon_F} \quad (4.50)$$

elde edilebilir. Isı kapasitesi, $T \rightarrow 0$ durumunda doğrusal olarak yok olur. Böylece termodinamiğin üçüncü yasası doğrulanır. Yüksek sıcaklıklarda ($T \rightarrow \infty$) ise C_V/Nk , $3/2$ ye yaklaşır. $T > 0$ sıcaklığında $\langle n_{\vec{p}} \rangle$, $T = 0$ dan farklıdır. Çünkü belirli sayıdaki parçacıklar $\varepsilon_{\vec{p}} > \varepsilon_F$ enerji seviyelerine uyarılırlar. Yani ε_F nin altındaki kT enerjili parçacıklar ε_F nin üstündeki kT enerjilerine uyarılırlar. Böylece, taban durumu üstündeki toplam uyarılma enerjisi $\Delta U \approx \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right) NkT$ olur ve buradan

$C_V \approx \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right) Nk$ bulunur (Huang, 1987).

(4.27) ve (4.49) denklemlerinden hal denklemi

$$P = \frac{2U}{3V} = \frac{2}{5} \frac{\varepsilon_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.51)$$

bulunur (Huang, 1987).

BÖLÜM 5

Q-DEFORME FERMİYONİK NEWTON OSİLATÖRLERİNİN TERMODİNAMİK VE İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Çok boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörleri, Fermi sistemlerinin farklı bir genelleştirilmesidir. Bu bölümde ilk olarak çok boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin bazı temel cebirsel özellikleri verilecektir. Daha sonra q -deforme fermiyonik Newton osilatör gazının q -deformasyon parametresine bağlı dağılım fonksiyonu bulunacaktır. Bu bağlamda, sistemin yüksek ve düşük sıcaklık limitlerinde termo-istatistiksel özellikleri incelenecektir.

5.1 Çok Boyutlu q -Deforme Fermiyonik Newton Osilatörleri

Bu bölümde, çok boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatör sistemi incelenecektir. Ayrıca, bundan sonra çok boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörleri FN-osilatörleri olarak belirtilecektir.

FN-osilatörleri sistemini tanımlayan cebir (Arik and Peker-Dobie, 2001; Algin and Arik, 2001)

$$\begin{aligned}
 c_i c_j^* + q c_j^* c_i &= q^{\hat{N}} \delta_{ij}, & i, j = 1, 2, \dots, n \\
 c_i c_j + c_j c_i &= 0 \\
 c_j \hat{N} &= (\hat{N} + 1) c_j
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

bağıntılarından oluşur (Arik and Peker-Dobie, 2001). Burada c , deforme yok etme operatörü, c^* deforme yaratma operatörüdür. \hat{N} , n -boyutta toplam sayı operatörü ve pozitif bir reel sayı olan q ise deformasyon parametresini temsil eder.

Denklem (5.1) deki FN-osilatör sistemi sağladığı bazı cebirsel özellikler şöyledir:

(i) $q = 1$ limitinde n -boyutta standart fermiyonik osilatör sistemi elde edilebilir.

$$(ii) \quad c'_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} c_j \quad (5.2)$$

lineer dönüşümü (5.1) denkleminde uygulandığında sistemi değişmez bırakır. Burada $T \in U(n)$ olan bir matristir. T nin hermitik eki \bar{T} ile gösterilirse $T\bar{T} = 1$ şeklinde üniterlik koşulunu sağlar. Bu özellikten dolayı bu sisteme Newton isminin eklenmesi uygun olmaktadır. Benzer özellikler FN-osilatörünün bozonik versiyonu için de sağlanır (Arik et al., 1999).

(iii) FN-osilatörleri

$$c_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

ilişisine sahiptir. Bu özellik Pauli dışarılama ilkesinin FN-osilatör sistemi için sağlandığını gösterir.

(iv) Denklem (5.1) deki FN-osilatör cebirinin n -boyutta toplam deforme fermiyonik sayı operatörü

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + \dots + c_n^* c_n = [\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \dots + \hat{N}_n] = [\hat{N}] \quad (5.4)$$

şeklinde olup, bunun spektrumu ise

$$[N] = Nq^{N-1} \quad (5.5)$$

ile verilir. Burada $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ ve her bir N_i yalnızca 0 ve 1 özdeğerlerini alabilir (Arik and Peker-Dobie, 2001; Algin and Arslan, 2008a).

(vi) Bir boyutta q -deforme fermiyonik Newton osilatörleri

$$\begin{aligned}
cc^* + qc^*c &= q^{\hat{N}}, \\
c\hat{N} &= (\hat{N} + 1)c, \\
c^2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

bağıntılarını sağlarlar. Bu bağıntıların,

$$\begin{aligned}
cc^* + c^*c &= 1, \\
c^2 &= 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklinde ifade edilen bir boyutlu standart fermiyonik osilatör cebiriyle uyumludur (Arik and Peker-Dobie, 2001). Bir boyutlu fermiyonik Newton osilatörü, standart (deforme olmayan) fermiyon osilatörüne eşit olmasına rağmen, denklem (5.1) deki çok boyutlu FN-osilatörü farklı bir genelleştirilmiş fermiyon sistemini verir.

5.2 FN-Osilatörlerinin Termo-İstatistiği

Bu kısımda (5.1) ve (5.5) denklemleriyle tanımlı $U(n)$ -simetrisine sahip FN-osilatörlerinin yüksek ve düşük sıcaklıklarda termo-istatistiksel özellikleri araştırılacaktır (Algin and Arslan, 2008a). q -deforme fermiyonik osilatörleri birbiriyle etkileşmediğinden, FN-osilatörlerini içeren sistem “serbest” q -deforme fermiyonik gaz sisteminden oluşur. Büyük kanonik dağılımda, serbest q -deforme fermiyonik Newton osilatör gazının Hamiltonyeni

$$\hat{H}_F = \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{N}_i, \tag{5.8}$$

şeklinde seçilebilir. Burada ε_i , i . kuantum durumundaki bir parçacığın kinetik enerjisi ve μ kimyasal potansiyeldir. Benzer Hamiltonyenler farklı birçok çalışmalarda da kullanılmıştır (Ge and Su, 1891; Chaichian, 1990; Lee and Yu, 1990, 1992; Song et al., 1993 Tuszynski et al., 1993; Chaichian et al., 1993; Su and Ge 1993; Birman, 1992;

Gong, 1995; Daoud and Kibler, 1995; Kaniadakis et al., 1997; Lavagno and Swamy, 2002; Swamy, 2006a, 2006b, 2006c).

q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunu türetmek için ilk olarak denklem (5.1) deki cebir ile birlikte (Lee and Yu, 1990, 1992; Altherr and Grandou, 1993; Altherr, 1993; Tukahashi and Umezawa, 1996) çalışmalarındaki yol takip edilir. Daha sonra, denklem (5.1) deki ilk bağıntının her iki tarafının ısı ortalaması

$$\langle c_i c_i^* \rangle + q \langle c_i^* c_i \rangle = \langle q^{\hat{N}} \rangle, \quad (5.9)$$

olacaktır. FN-osilatörleri sistemi için $[f_i^q]$ istatistik dağılım fonksiyonu

$$[f_i^q] \equiv \langle c_i^* c_i \rangle = \frac{\langle q^{\hat{N}} \rangle}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + q} \quad (5.10)$$

bulunur. Denklem (5.5) in yardımıyla bu dağılım fonksiyonu

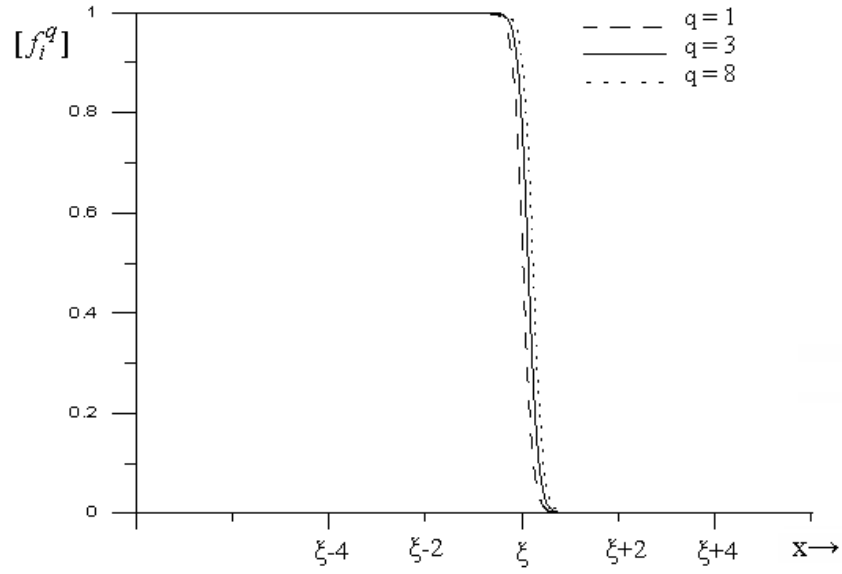
$$[f_i^q] = \frac{q}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + q} \quad (5.11)$$

şeklinde ifade edilebilir (Algin and Arslan, 2008a). Benzer sonuç ayrıntılı denge yasası kullanılarak (Lee and Yu, 1990, 1992)

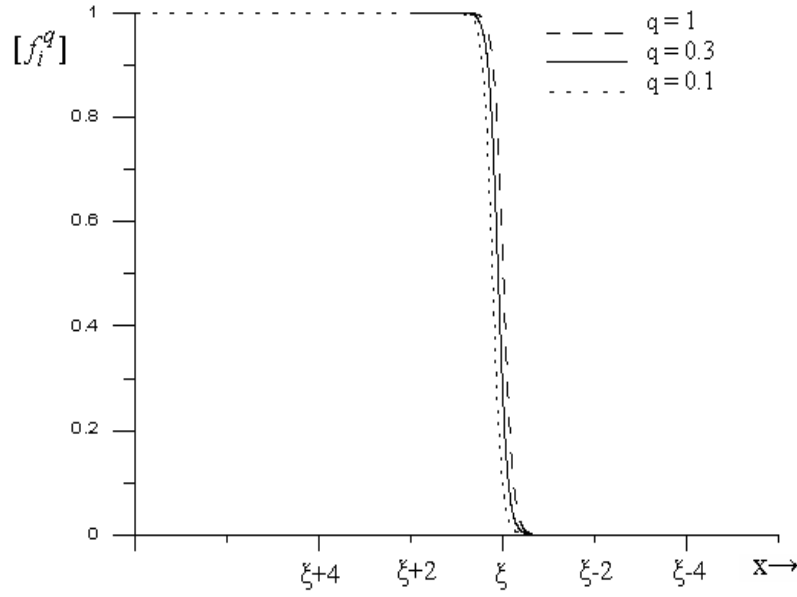
$$\frac{[f_i^q]}{[1 - f_i^q]} = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \quad (5.12)$$

da elde edilebilir. Burada $[1 - f_i^q] = q^N (1 - N_i)$ dir. $q = 1$ limitinde $[f_i^q]$ dağılım fonksiyonu standart (deforme olmayan) Fermi-Dirac dağılımını vermektedir. Ayrıca denklem (5.1) de bulunan çok boyutlu fermiyonik osilatörleri kullanıldığından, denklem (5.11) deki $[f_i^q]$, q -deforme dağılım fonksiyonu literatürdeki diğer çalışmalarda elde edilen dağılım fonksiyonlarından farklıdır (Swamy, 2006a, 2006b).

Şekil (5.1) ve (5.2) de $[f_i^q]$, q -deforme dağılım fonksiyonu x in bir fonksiyonu olarak düşük sıcaklıklar için sırasıyla $q \geq 1$ ve $q \leq 1$ durumları için gösterilmiştir (EK-4).



Şekil 5.1 Düşük sıcaklıklarda $q \geq 1$ durumu için $x = \beta\varepsilon$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu.



Şekil 5.2 Düşük sıcaklıklarda $q \leq 1$ durumu için $x = \beta\varepsilon$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu.

Denklem (5.11) deki q -deforme istatistik dağılım fonksiyonu kullanılarak, fermiyonik büyük üleşim fonksiyonunun logaritması

$$\log Z_F = \sum_i \log(1 + zq e^{-\beta\varepsilon_i}) \quad (5.13)$$

bulunabilir. Bulunan üleşim fonksiyonu bütün termo-istatistiksel fonksiyonları q -deformasyon parametresi cinsinden verir. Çok büyük hacim ve parçacık sayısı durumunda toplamlar integral ile yerdeğıştirebilir. Buradan hareketle, standart yollar (Huang, 1987; Greiner et al., 1994; Pathria, 1996) takip edilerek hal denklemi $(PV/kT) = \log Z_F$

$$\frac{P}{kT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \log(1 + zq e^{-\beta p^2/2m}) \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer olarak, FN-osilatörleri için parçacık yoğunluğu

$$\frac{1}{\nu} = \frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} p^2 dp \left(\frac{q}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + q} \right) \quad (5.15)$$

bulunabilir. (5.14) ve (5.15) denklemleri

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(q, z) \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(q, z) \quad (5.17)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. $f_{5/2}(q, z)$ ve $f_{3/2}(q, z)$ genelleştirilmiş Fermi-Dirac fonksiyonları

$$f_{5/2}(q, z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \log(1 + zqe^{-x^2}) x^2 dx = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(zq)^r}{r^{5/2}} \quad (5.18)$$

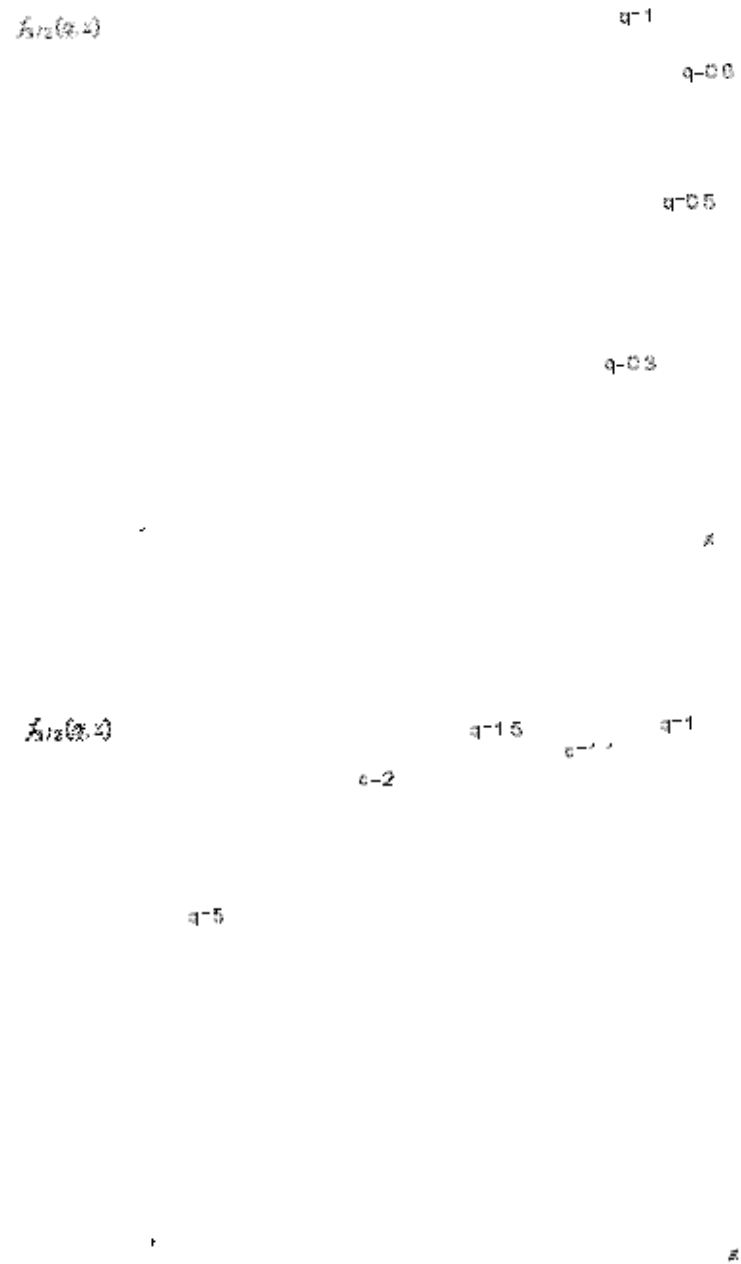
$$f_{3/2}(q, z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 q dx}{z^{-1} e^{x^2} + q} = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{(zq)^r}{r^{3/2}} \quad (5.19)$$

bağıntıları ile verilirler (Algin and Arslan, 2008a). Burada $x^2 = \beta\varepsilon$ ve $\varepsilon = p^2/2m$ dir. Bu genelleştirilmiş fonksiyonlar $q=1$ limitinde standart $f_n(z)$ Fermi-Dirac fonksiyonlarını verirler (Huang, 1987). Denklem (5.19)

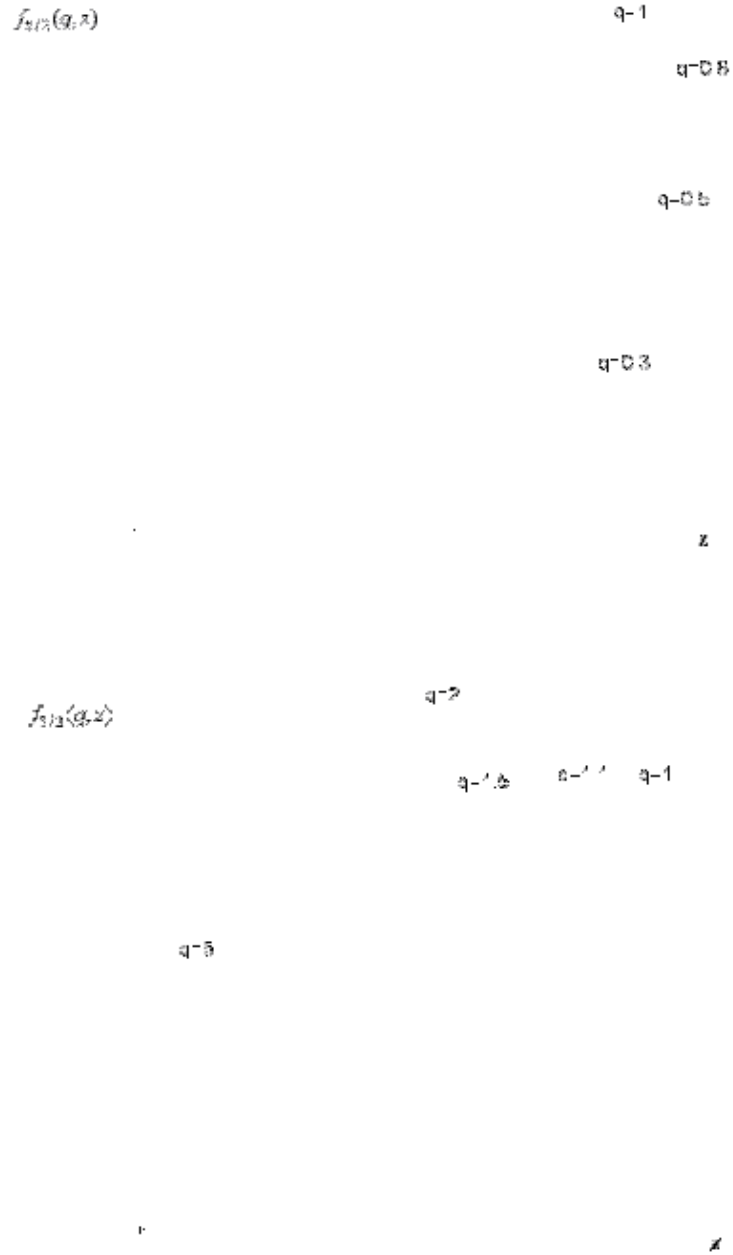
$$f_{3/2}(q, z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\log(qz))^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log(qz))^{-1/2} + \dots \right] \quad (5.20)$$

ifadesi şeklinde de yazılabilir.

Şekil 5.3 ve 5.4 de $f_{3/2}(q, z)$ ve $f_{5/2}(q, z)$ q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları q -deformasyon parametresinin birkaç değeri ile z nin bir fonksiyonu olarak sırasıyla $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için gösterilmiştir (EK-5; EK-6).



Şekil 5.3 $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{3/2}(q, z)$.



Şekil 5.4 $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{5/2}(q, z)$.

Şekil 5.3 ve 5.4 deki durumlar $q = 1$ ile kıyaslandığında, $f_{3/2}(q, z)$ ve $f_{5/2}(q, z)$ q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarının değerleri $q < 1$ için azalırken, $q > 1$ için artmaktadır.

FN-osilatör gazı için iç enerji $U = (-\partial \log Z_F / \partial \beta)$ formülü kullanılarak

$$\frac{U}{V} = \frac{3}{2} kT \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(q, z) \quad (5.21)$$

şeklinde bulunabilir.

Yüksek sıcaklıklar için ($\lambda^3/\nu \ll 1$ limitinde) denklem (5.17) ve (5.19) kullanılarak q -deformasyon parametresi bakımından fugasite

$$z = q^{-1} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right) + \frac{1}{2^{3/2}} q^{-1} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^2 + \dots \quad (5.22)$$

bulunabilir. (5.16) ve (5.17) denklemlerinden FN-osilatör sistemi için hal denklemi,

$$\frac{P\nu}{kT} = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right) + \dots \quad (5.23)$$

şeklinindedir. Burada virial katsayıları q deformasyon parametresinden bağımsızdırlar. Bu sonuç (Swamy, 2006) çalışmasındaki sonuçlar ile uyumlu, fakat virial katsayılarının iki bağımsız deformasyon parametreleri ile ifade edildiği (Algin et al., 2002; Arik and Kornfilt, 2002; Algin and Arik, 2003) çalışmalarındaki sonuçlar ile uyumlu değildir.

Mutlak sıfır civarında bir inceleme için denklem (5.17) ve (5.20) den

$$\frac{1}{\nu} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log(qz))^{3/2} \quad (5.24)$$

yaklaşım yazılabilir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$qz \approx e^{\beta\varepsilon_F} \quad (5.25)$$

bulunur. Burada ε_F Fermi enerjisidir ve

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3} \quad (5.26)$$

ile tanımlıdır. $T = 0$ limitinde denklem (5.11) den

$$[f_i^q] = \frac{q}{e^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_F)} + q} \quad (5.27)$$

ifadesi yazılabilir. Sıfır sıcaklık limitinde yukarıda elde edilen q -deforme dağılım fonksiyonu

$$[f_i^q]_{T=0} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon_i < \varepsilon_F) \\ 0 & (\varepsilon_i > \varepsilon_F) \end{cases} \quad (5.28)$$

şeklinde bir incelemeyle q deformasyon parametresinden bağımsız olduğu görülür. Buradan ε_F nin sistemin taban durumundaki standart (deforme olmayan) Fermi yüzeyini tanımlamaktadır.

Düşük sıcaklık limitinde parçacık yoğunluğu

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} (\log(qz))^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\log(qz))^{-2} + \dots \right] \quad (5.29)$$

yazılabilir. Denklem (5.25) veya (5.29) dan

$$\mu \approx \varepsilon_F - kT \log q \quad (5.30)$$

şeklinde sıfırncı yaklaşımda μ kimyasal potansiyel elde edilebilir. Burada ε_F denklem (5.26) da tanımlandığı gibidir. Bu ifade q -bağımlılığının yalnızca sonlu sıcaklıklarda etkili olduğunu gösterir. Birinci yaklaşımdaki kimyasal potansiyel için

$$\mu \approx -kT \log q + \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right) \quad (5.31)$$

bağıntısı bulunabilir ve bu kimyasal potansiyel $q < 1$ ve $q > 1$ durumları için deforme olmayan fermiyon gazının kimyasal potansiyelinden farklıdır. Fakat $q = 1$ limitinde bu kimyasal potansiyel deforme olmayan fermiyon gazının standart μ kimyasal potansiyelini verir. Denklem (5.29) ve (5.31) deki sonuçlar, bir boyutlu q -fermionik osilatör sisteminin farklı olarak tanımlandığı (Swamy, 2006a, 2006b, 2006c) çalışmalarından farklıdır.

Düşük sıcaklıklarda FN-osilatör gazının U iç enerjisi

$$U = \frac{3}{5} NkT \log(qz) \left[1 + \frac{\pi^2}{2} (\log(qz))^{-2} + \dots \right], \quad (5.32)$$

ve sistemin basıncı ($P = 2U/3V$) bağıntısından

$$P = \frac{2}{5} \frac{kT}{v} \log(qz) \left[1 + \frac{\pi^2}{2} (\log(qz))^{-2} + \dots \right] \quad (5.33)$$

olarak bulunabilir.

Düşük sıcaklıklar için FN-osilatör gazının ısı kapasitesi denklem (5.32) den

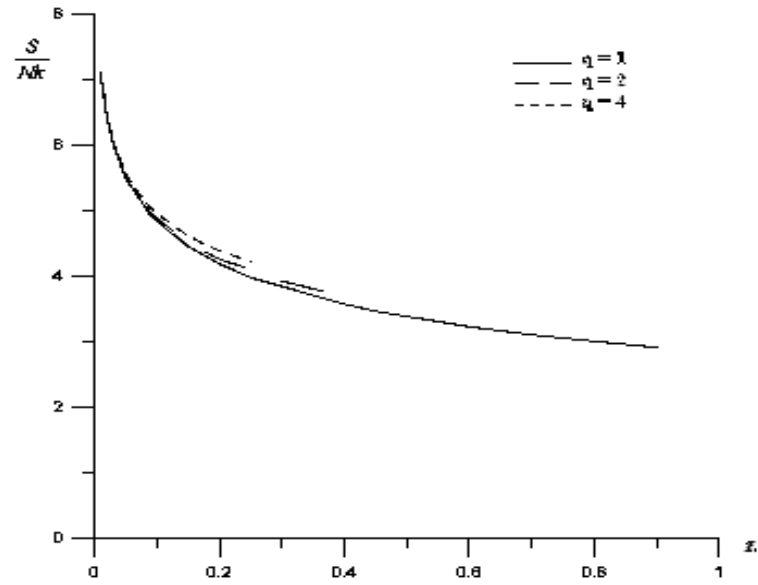
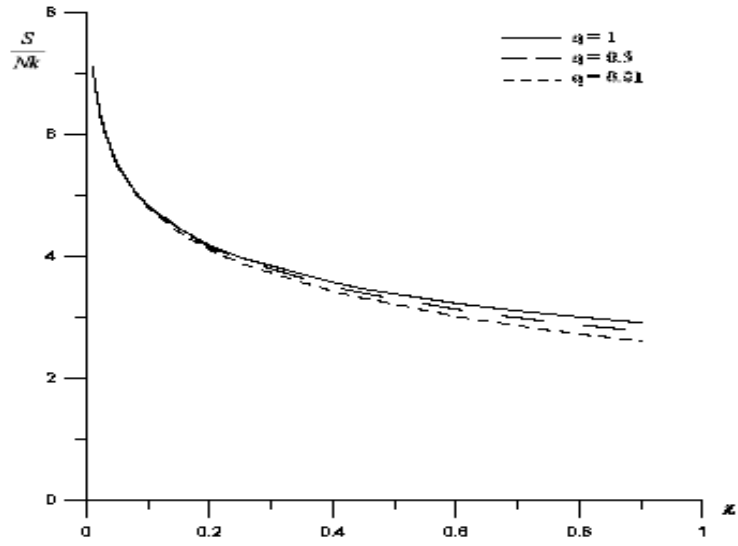
$$\frac{C_V}{Nk} \approx \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right) \quad (5.34)$$

bulunabilir. Bu ifade q -deformasyon parametresinden bağımsızdır ve standart fermiyon gazında olduğu gibi T ye doğrusal olarak bağlıdır.

FN-osilatör gazı için entropi $S = (U - F)/T$

$$\frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(q, z)}{f_{3/2}(q, z)} - \log z \quad (5.35)$$

şeklinde türetilir. Ayrıca entropi $q = 1$ limitinde deforme olmayan fermiyon gazı ile benzer sonucu verir (Huang, 1987; Greiner et al., 1994; Pathria, 1996). Şekil 5.5 de q -deforme entropi fonksiyonu S/Nk , $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için q -deformasyon parametresinin birkaç değerinde z nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir (EK-7). Aynı fugasite (z) değerinde, $q < 1$ için FN-osilatör gazının entropi değerleri deforme olmayan fermiyon gazınınkinden daha düşük iken, $q > 1$ için entropi değerleri deforme olmayan fermiyon gazınınkinden daha büyüktür. Bu sonuçlar da (Swamy, 2006a, 2006b) çalışmalarından farklıdır.



Şekil 5.5 $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme entropi fonksiyonu S/Nk .

Deforme olmayan fermiyon gazı sonuçları yukarıda elde edilen bütün denklemler için $q = 1$ limitinde elde edilebilir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, çok-boyutlu q -deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin yüksek ve düşük sıcaklık limitlerinde termo-istatistiksel özellikleri incelenmiştir. FN-osilatör sistemi, fermiyonik Newton osilatörlerinin oluşturduğu deforme bir fermiyon gazıdır. Bu sistem, deformasyon parametresi $0 < q < \infty$ aralığında değerler alabilen denklem (5.1) deki osilatör cebiri ile tanımlıdır. Bu cebirin önemli bir özelliği deforme olmasına rağmen $U(n)$ -simetrisini koruyor olmasıdır. Ayrıca, cebirin çok-boyutlu olması sahip olduğu diğer bir önemli özelliğidir. Bu özelliklerinden dolayı, FN-osilatörleri tamamen yeni sonuçlar vermektedir.

Burada, öncelikle sistemin q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu yardımıyla büyük üleşim fonksiyonu bulunmuştur. Buradan hareketle, sistemin çeşitli termo-istatistik fonksiyonları türetilmiştir. Sistemin yüksek sıcaklıklar limitinde hal denklemini virial açılımı şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca, sistemin basınç (P), entropi (S), kimyasal potansiyel (μ) gibi termodinamik nicelikleri q -deformasyon parametresine bağlı olarak belirlenmiştir. Bulunan bütün sonuçlar $q = 1$ limitinde deforme olmayan Fermi gazının sonuçlarını vermektedir (Huang, 1987; Greiner et al., 1994; Reichl, 1998).

FN-osilatör sisteminin termo-istatistiksel özellikleri dağılım fonksiyonunun bulunmasıyla incelenebilmektedir. Bu amaçla ilk olarak sisteme uygun fermiyon sayı operatörüyle lineer olarak değişen bir Hamiltonyen seçilmiştir. Buradan da gazın birbiriyle etkileşmeyen q -deforme fermiyonik parçacıklardan oluştuğu söylenebilir (Algin and Arslan, 2008a).

FN-osilatör gazının ortalama parçacık sayısı denklem (5.11) da q -deformasyon parametresine bağlı bulunmuştur. Böylece, q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun $q \neq 1$ değerleri için standart Fermi-Dirac dağılım fonksiyonundan farklı olduğu açıktır. Ayrıca, q -deforme dağılım fonksiyonu sıfır sıcaklıkta standart basamak fonksiyonu halini alır (Greiner et al., 1994). Bu nedenle, fermiyonların q -

deformasyonunun yalnızca sonlu sıcaklıklarda etkili olduğu söylenebilir. Bu sonuç literatürde yapılan çalışmalarda da görülmektedir (Lavagno and Swamy, 2002; Swamy, 2006a, 2006b, 2006c). Şekil 5.1 ve 5.2 de düşük sıcaklıklarda q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için davranışı gösterilmiştir. $q < 1$ durumunda q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu standart Fermi-Dirac fonksiyonundan daha büyüktür ve artan q -değerleri ile dağılım fonksiyonu artmaktadır. $q < 1$ durumunda ise q -deforme dağılım fonksiyonu standarda göre daha küçüktür ve q değerleri küçüldükçe dağılım fonksiyonu da azalmaktadır.

Bu çalışmada, bazı q -deforme termo-istatistik fonksiyonların davranışları grafikler ile gösterilmiştir. Bunun için ilk önce ilgili fonksiyonun Compaq Visual Fortran 6.5 de verileri oluşturulmuş, daha sonra bu veriler Grapher 4 programında kullanılarak iki-boyutlu grafikler elde edilmiştir (EK 1-8).

FN-osilatörleri için bulunan denklem (5.18) ve (5.19) daki $(f_n(q, z))$ q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları standart Fermi gazınınkinden farklıdır. Çünkü farklı q -değerleri ile bu fonksiyonların değerleri değişmektedir. Şekil 5.3 ve 5.4 te gösterildiği gibi bu fonksiyonlar $q = 1$ standart durum ile kıyaslandığında $q < 1$ durumunda azaldığı, $q > 1$ için arttığı görülmektedir.

FN-osilatör gazı için bulunan diğer bir termodinamik nicelik ise denklem (5.35) deki q -deforme entropi fonksiyonudur. Şekil 5.5 te q -deforme entropi fonksiyonu $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumlarında farklı q -değerleri için z nin bir fonksiyonu olarak gösterilmiştir. Böylece, aynı fugasite değerinde inceleme yapıldığında FN-osilatör gazının entropisi $q < 1$ durumu için deforme olmayan entropiden daha küçük ve q -değerleri azaldıkça entropi azalmaktadır. Benzer bir inceleme ile $q \geq 1$ için entropi değerleri artan q -değerleri ile artmakta olduğu görülmüştür (Algin and Arslan, 2008a).

Denklem (5.16) dan FN-osilatör gazı için basıncın davranışı gözlenebilir. Buradan, $q < 1$ durumu için FN-osilatör gazının basıncı deforme olmayan fermiyon gazının basınç değerlerine göre daha düşük, $q > 1$ durumunda sonuçlar standarda göre daha yüksek değerler olduğu bulunur.

Sonuç olarak, fermiyonik Newton osilatörleri gazı standart fermiyon gazından farklı özelliklere sahiptir. Bu özellikler kuantum istatistik mekaniğinde yeni sonuçlar

vermektedir. Bu yeni sonuçların yoğun madde fiziğinde örneğin; süperakışkan, etkileşmeli elektron sistemleri gibi olaylara yeni bakış açısı katabileceği düşünülmektedir.

Denklem (5.1) deki FN-osilatörlerinin bozonik versiyonu, çok-boyutlu bozonik Newton osilatörleri olarak isimlendirilir (Arik et al., 1999; Penson and Solomon, 1999). Çok-boyutlu bozonik Newton osilatörleri sistemi, $U(n)$ -simetrisine sahiptir. Bozonik Newton osilatörleri, cebiri çok-boyutlu olup, pozitif gerçel bir deformasyon parametresine sahiptir. Bozonik Newton osilatörleri gazı sisteminin düşük ve yüksek sıcaklıklar limitinde termo-istatistiksel incelenmiştir (Algin and Arslan, 2008b). Özellikle sistem, $q = 1$ limitinde standart bozon gazı davranışı sergilemektedir. Ayrıca böyle bir sistemde düşük sıcaklıklarda Bose-Einstein yoğunlaşmasının oluşma koşulları ve sistemin özelliklerine q -deformasyon parametresinin etkileri tartışılmıştır. Bu bağlamda, sistemin gösterdiği ilginç bir özellikte $q \approx 0.9$ değeri için bulunan ısı kapasitesindeki gap değeri ile Rubidyum atomunun oluşturduğu seyreltik gazın ısı kapasitesi gap değerinin yaklaşık sonuçlar vermesidir (Ensher et al., 1996). Bununla birlikte, ideal olmayan lazer sistemlerinde kuantum istatistiksel özelliklerini çalışmak için q -deforme bozonik osilatörlerinden yararlanılmaktadır. Böyle çalışmalarda q -parametresi sistemin doğrusallıktan sapma ölçüsünü adeta temsil etmektedir (Kathriel and Solomon, 1994).

Sonuç olarak, fermiyonik Newton osilatörlerinin istatistik mekaniksel özelliklerini içeren bu tez çalışmasının ileride farklı simetrik Fermi sistemlerinin araştırılmasında yardımcı olacağı ümit edilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Algin, A. and Arik, M., 2001, q -deformed supersymmetric Newton oscillators, Eur. Phys. J.C., 19, 583-586.
- Algin, A., Arik, M. and Arıkan A.S., 2002, High temperature behaviour of a two-parameter deformed quantum group fermion gas, Phys. Rev. E, 65, 026140.
- Algin, A. and Arik, M., 2003, Quantum group invariant fermionic gases: $GL_{p,q}(2)$ and $SU_{p,q}(2)$ invariances, Physica A, 330, 442-450.
- Algin, A. and Arslan, E., 2008a, Thermostatistics of the multi-dimensional q -deformed fermionic Newton oscillators, Phys. Lett. A, 372, 2767-2773.
- Algin, A. and Arslan, E., 2008b, Bose-Einstein condensation in a gas of the bosonic Newton oscillators, J. Phys. A : Math. and Theor., 41, 36.
- Apaydın, F., 2004, İstatistik fizik, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, 64 s, 152 s.
- Arfken, G.B. and Weber, H.J., 1995, Mathematical methods for physicists, Academic Press, California, 223 p.
- Arik, M. and Coon, D.D., 1976, Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states, J. Math. Phys., 17, 524-527.
- Arik, M., Atakishiyev, N.M. and Wolf, K.B., 1999, Quantum algebraic structures compatible with the harmonic oscillator Newton equation, J. Phys. A. : Math. and Gen., 32, L371-L376.
- Arik, M. and Perker-Dobie, A., 2001, Particle-antiparticle symmetry of the multi-dimensional fermionic Newton oscillator, J. Phys. A. : Math. and Gen., 34, 725-730.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Arik , M. and Kornfilt, J., 2002, Thermodynamics of a two parameter quantum group gases, Phys. Lett. A, 300, 392-396,
- Altherr, T., 1993, Introduction to thermal field-theory, Int. J. Mod. Phys. A, 8, 5605-5628.
- Altherr, T. and Grandou, T., 1993, Thermal field-theory and infinite statistics, Nuc. Phys. B, 402, 195-216.
- Ballentine, L.E., 1998, Quantum mechanics: a modern development, World Scientific, Singapore, 470 p.
- Beiser, A., 1997, Modern fiziğin kavramları, Ayhan Matbaası, İstanbul, 326 s.
- Birman, J.L., 1992, Many-body green-functions of q -deformed oscillators, Phys. Lett. A, 167, 363-366.
- Bonatsos, D., 1992, Are q -bosons suitable for the description of correlated fermion pairs, J. Phys. A : Math. and Gen., 25, L101-L108.
- Bonatsos, D. and Daskoloyannis, C., 1999, Quantum groups and their applications in nuclear physics, Prog. Part. Nucl. Phys., 43, 537-618.
- Chaichian, M., Ellinas, D. and Kulish, P., 1990, Quantum algebra as the dynamic symmetry of the deformed Jaynes-Cummings model, Phys. Rev. Lett., 65, 980-983.
- Chaichian, M. and Kulish, P., 1990, Quantum Lie superalgebras and q -oscillators, Phys. Lett. B, 234, 72-80.
- Chaichian, M., Gonzalez Felipe, R. and Montonen, J., 1993, Statistics of q -oscillators, quons and relations to fractional statistics, J. Phys. A, 26, 4017-4034.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Daoud, M. and Kibler, M., 1995, Statistical-mechanics of qp -bosons in d-dimensions, Phys. Lett. A, 206, 13-17.
- de Vega, H.J., 1989, Yang-Baxter algebras, integrable theory and quantum groups, Int. J. Mod. Phys., 4, 2371-2463.
- Drinfeld, V.G., 1987, Quantum groups in: Proceedings of the ICM, vol. 1, Berkeley, 798 p.
- Ensher, J.R., Jin, D.S., Matthews, M.R., Wieman, C.E. and Cornell, E.A., 1996, Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground state occupation, Phys. Rev. Lett. 77, 4984-4987.
- Faddeev, L.D., Reshetikhin, N.Y. and Takhtajan, L.A., 1988, Quantization of Lie groups and Lie algebras, Algebraic Analysis, 1, 129-139.
- Freed, D.S. and Uhlenbeck, K.K., 1995, Geometry and quantum field theory, American Mathematical Society, 283 p.
- Ge, M.L. and Su, G., 1991, The statistical distribution function of the q -deformed harmonic-oscillator, J. Phys. A, 24, L721-L723.
- Gong, R.-S., 1995, Thermodynamic characteristics of the (p, q) -deformed ideal Bose-gas, Phys. Lett. A, 199, 81-85.
- Greiner, W., Neise, L. and Stöcker, H., 1994, Thermodynamics and statistical mechanics, Springer-Verlag, New York, 285 p, 314 p, 341 p.
- Greiner, W., Müller, B., 2001, Quantum mechanics: symmetries, Springer, Berlin, 92 p.
- Gross, D.J., 1996, The role of symmetry in fundamental physics, Proc. Natl Acad. Sci. USA, Colloquium paper, 93, 14256-14259.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Griffiths, D., 1987, Introduction to elementary particles, John Wiley and Sons, New York, 103 p.
- Hayashi, T., 1990, Q -analogs of Clifford and Weyl algebras-spinor and oscillator representations of quantum enveloping-algebras, Commun. Math. Phys., 127, 129-144.
- Huang, K., 1987, Statistical mechanics, John Wiley and Sons, New York, 170 p, 243 p, 286 p.
- Jing, S. and Xu, J.J., 1991, Comment on the q -deformed fermionic oscillators, Phys. Lett. B, 234, 72-80.
- Jimbo, M., 1986, A q -analog of $U(GL(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys., 11, 247-252.
- Kaniadakis, G., Lavagno, A. and Quarati, P., 1997, Kinetic model for q -deformed bosons and fermions, Phys. Lett. A, 227, 227-231.
- Karaoğlu, B., 2003, Kuantum mekaniğine giriş, Seyir Yayıncılık, 79 s, 212 s, 229 s.
- Kathriel, J. and Solomon, A.I., 1994, Nonideal lasers, nonclassical light, and deformed photon states, Phys. Rev. A, 49, 5149-5151.
- Landau and Lifshitz, 1991, Quantum mechanics, Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 227 p.
- Lavagno, A. and Swamy, P.N., 2002, Generalized thermodynamics of q -deformed bosons and fermions, Phys. Rev. E, 036101.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Lee, C.R. and Yu, J.-P., 1990, On q -analogs of the statistical distribution, Phys. Lett. A, 150, 63-66.
- Lee, C.R. and Yu, J.-P., 1992, On q -deformed free-electron gases, Phys. Lett. A, 164-166.
- Lichtenberg, D.B., 1978, Unitary symmetry and elementary particles, Academic Press, New York, 1 p.
- Martin-Delgado, M.A., 1991, Planck distribution for a q -boson gas, J. Phys. A : Math. and Gen., 24, L1285-L1291.
- Neskovic, P.V. and Urosevic, B.V., 1992, Quantum oscillators-applications in statistical-mechanics, Int. J. Mod. Phys. A, 7, 3379-3388.
- Özemre, A.Y., 1976, Klasik teorik mekanik, İstanbul Üniversitesi Fen-Fakültesi Yayınları, 236 p.
- Pathria, R.K., 1996, Statistical mechanics, Butterworth-Heinemann, Oxford, 157 p, 195 p.
- Pasquier, V. and Saleur, H., 1990, Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups, Nucl. Phys. B, 330, 523-556.
- Penson, K.A. and Solomon, A.I., 1999, New generalized coherent states, J. Math. Phys., 40, 2354-2363.
- Reichl, L.E., 1998, A modern course in statistical physics, John Wiley and Sons, Canada, 341 p, 381 p.
- Sakurai, J.J., 1994, Modern quantum mechanics, Addition-Wesley Publishing Company, Inc, 376 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Shankar, R., 1994, Principles of quantum mechanics, Plenum Press, 676 p.
- Schulten, K., 2000, Notes on quantum mechanics, Department of Physics and Beckman Institute University of Urbana-Champaign, 239 p.
- Stancu, F.L., 1996, Group theory in subnuclear physics, Clarendon Press, Oxford, 1p.
- Song, H.S., Ding, S.-X., 1993, Statistical mechanical properties of the q -oscillator system, J. Phys. A: Math. Gen., 26, 5197-5205.
- Su, G. and Ge, M.L., 1993, Thermodynamics characteristics of the q -deformed ideal bose-gas, Phys. Lett. A, 173, 17-20.
- Swamy, P.N., 2006a, q -deformed fermions, Eur. Phys. B, 50, 291-294.
- Swamy, P.N., 2006b, Interpolating statistics and q -deformed oscillator algebras, Int. J. Mod. B, 2006, 20, 697-713.
- Swamy, P.N., 2006c, q -deformed fermions: Algebra, fock space and thermodynamics, Int. J. Mod. Phys. B, 20, 2537-2550.
- Takahashi, Y. and Umezawa, H., 1996, Thermo field dynamics (Reprinted from collective phenomena, vol 2, pg 55-80, 1975), Int. J. Mod. Phys. B, 10, 1755-1805.
- Taylor, J.R. and Zafaritos, C.D., 1996, Modern fizik, Arte BilgiTek, 219 s, 239s.
- Tuszynski, J.A., Rubin, J.L., Meyer, J. and Kibler, M., 1993, Statistical mechanics of a q -deformed boson gas, Phys. Lett. A, 175, 173-177.
- Ubriaco, M.R., 1992, Noncommutative differential calculus and q -analysis, J. Phy. A: Math. and Gen., 25, 169-173.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Viswanathan, K.S., Parthasarathy, R. and Jagenathan, R., 1992, Generalized q -fermion oscillators and q -coherent states, J. Phys. A: Math. and Gen., 25, L335-L339.

Webber, B.R. and Cooper, N.R., 2004, Theoretical physics 2, Lecture notes and examples, 131 p.

EKLER

EK 1. Standart $f_n(z)$ fonksiyonlarının Fortran yazılımları

$f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran komutu

```
double precision z,n
open (8,file='f3b2y.dat')
n=3./2.
do 7 z=0,1,0.02
f=0
do 5 i=1,100
f=f+((-1)**(i-1))*(((z)**i)/(i**n))
5 continue
write (8,50) z,f
7 continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```

$f_{5/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran komutu

```
double precision z,n
open (8,file='f5b2y.dat')
n=5./2.
do 7 z=0,1,0.02
f=0
do 5 i=1,100
f=f+((-1)**(i-1))*(((z)**i)/(i**n))
5 continue
write (8,50) z,f
7 continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```

$f_{7/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran komutu

```
double precision z,n
open (8,file='f7b2y.dat')
n=7./2.
do 7 z=0,1,0.02
f=0
do 5 i=1,100
f=f+((-1)**(i-1))*(((z)**i)/(i**n))
5 continue
write (8,50) z,f
7 continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```


EKLER (devam)

EK 2. Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı

```
double precision z,n
open (8,file='f3b2y.dat')
n=3./2.
do 7 z=0,1,0.02
f=0
do 5 i=1,100
f=f+((-1)**(i-1))*((z)**i)/(i**n))
5 continue
write (8,50) z,f
7 continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```

EKLER (devam)

EK 3. Düşük sıcaklıklarda $x = \beta\varepsilon_p$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak ideal sistemde Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun Fortran yazılımları

```
double precision t
open (8,file='ifdf.dat')
do 7 t=-80,80,0.01
f=1/(exp(t)+1)
write(8,50)t,f
7 continue
50 format (2X,F8.4,2(F12.8,1X))
end
```

EKLER (devam)

EK 4. Düşük sıcaklıklarda $q \geq 1$ ve $q \leq 1$ durumu için $x = \beta\varepsilon$ ve $\xi = \beta\mu$ nün bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun Fortran yazılımları.

Burada q değerleri yerine 1,3,8 koyulabilir.

```
double precision q,t
open (8,file='sekil51q3.dat')
q=3.
do 7 t=-80,80,0.01
f=(q)/(exp(t)+q)
write(8,50)t,f
7 continue
50 format (2X,F8.4,2(F12.8,1X))
end
```

Burada q değeri yerine 1, 0.3, 0.1 değerleri koyulabilir.

```
double precision q,t
open (8,file='sekil51q03.dat')
q=3./10.
do 7 t=-20,20,0.01
f=(q)/(exp(t)+q)
write(8,50)t,f
7 continue
50 format (2X,F8.4,2(F12.8,1X))
end
```

EKLER (devam)

EK 5. $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{3/2}(q, z)$ nin Fortran yazılımı

Burada q değeri yerine 1, 3, 8 değerleri koyulabilir.

```
double precision z,n,q
open (8,file='seki153q08.dat')
n=3./2.
q=8./10.
do 7 z=0,0.99,0.01
f=0
do 5 i=1,50
f=f+((( -1)**(i-1))*(((q*z)**i)/(i**n)))
5 continue
write (8,50) z,f
7 continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```

EKLER (devam)

EK 6. $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{5/2}(q, z)$ Fortran yazılımı

Burada q değeri yerine 1, 0.8, 0.5, 0.3, 1.1, 1.5, 2, 5 değerleri koyulabilir.

```
double precision z,n,q
open (8,file='seki54q1.dat')
n=5./2.
q=1.
do 7 z=0,0.99,0.01
f=0
do 5 i=1,50
f=f+((-1)**(i-1))*(((q*z)**i)/(i**n))
5 continue
write (8,50) z,f
7 continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```

EKLER (devam)

EK 7. $q \leq 1$ ve $q \geq 1$ durumları için z nin bir fonksiyonu olarak q -deforme entropi fonksiyonu S/Nk 'nın Fortran yazılımları

Burada q yerine 1, 0.5, 0.01, 2, 4 değerleri koyulabilir.

```
double precision z,n,q
open (8,file='seki155entq4.dat')
q=40./10.
do 7 z=0.01,0.25,0.01
  f=0
  do 5 i=1,50
    f=f+((-1)**(i-1))*(((q*z)**i)/(i**(5./2.)))
5  continue
  g=0
  do 3 i=1,50
    g=g+((-1)**(i-1))*(((q*z)**i)/(i**(3./2.)))
3  continue
  s=((5./2.)*((f)/(g)))-log(z)
  write (8,50) z,s
7  continue
50 format (2(f12.6,2x))
end
```