3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Coşkun AĞARI

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006

CLASSIFICATION OF RULED SURFACES IN 3-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Coşkun AĞARI

Department of Mathematics

The Thesis for Master Degree

2006

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Coşkun AĞARI

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Temmuz 2006

Coşkun AĞARI 'nın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı

"3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu$'$ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bu çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar tanımlandı ve ilgili teoremler verildi.

İkinci bölümde regle yüzey ve ikinci Gauss eğriliği tanımı verilerek Minkowski uzayında regle yüzeyin ikinci kuadratik formu ve Riemann veya Pseudo Riemann manifoldunun ikinci Gauss eğriliğinin matris gösterimi elde edildi.

Üçüncü bölümde ise Young Ho Kim, Dae Won Yoon tarafından yapılan [4] nolu çalışma ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ uzayında regle yüzeylerin ikinci Gauss eğriliği K_{II} incelendi. H ortalama eğrilik $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $aK_{II} + bH =$ sabit ise regle yüzey helicoid, $K_{II} = 2H$ ise canoid olduğu gösterildi ve bunlar sınıflandırıldı.

SUMMARY

This thesis contains three chapters.

In the first chapter, we give fundamental definitions and some theorems that it needs for our study.

In the Second chapter, we obtained the second Gaussian curvature. In addition, we obtained second gaussian curvature of matrix representation on Pseudo-Riemannian manifold.

In the third chapter, we have studied the study of by Young Ho Kim, Dae Won Yoon [4]. In addition we have study of the second Gaussian curvature K_{II} of ruled surfaces in the 3- dimensional space $\mathbb{R}^3_1$. It has been showed that if $aK_{II} + bH$, $a, b \in \mathbb{R}$, is a constant then the ruled surface is a helicoid and if $K_{II} = 2H$ then it is a conoid. Where H is the mean curvature. Furthermore the helicoid and conoid have been classified.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında, büyük yardımlarını ve desteğini gördüğüm hocam

Yrd.Doç.Dr.Cumali EKİCİ'ye

teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006 Coşkun AĞARI

İçindekiler

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

1.1 Riemann Uzayı

Bu kısımda kaynak verilmeyen temel kavram ve teoremler (Hacısalihoğlu, 1994) den alınmıştır.

Tanım 1.1.1 (Lagrange Özdeşliği):

Uzayda herhangi a, b, c, d vektörleri için

$$\langle (a \times b), (c \times d) \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

özdeşliği geçerlidir (Kaya, 1996).

Tanım 1.1.2 (Regle Yüzey):

$M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir.

Tanım 1.1.3 (Kapalılık):

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi : \ Ix\mathbb{R} & \rightarrow & E^3 \\
(t,v) & \rightarrow & \varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)
\end{array}
$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t+2\pi, v) \;=\; \varphi(t,v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Yani, bir periyod sonra her anadoğru kendi üzerine gelir.

Tanım 1.1.4 (Ortogonal Yörünge):

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

Tanım 1.1.5 (Striksiyon Noktası):

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir.

Tanım 1.1.6 (Striksiyon Eğrisi):

Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir.

Tanım 1.1.7 (Striksiyon Çizgisi):

$c \neq 0$ olmak üzere kapalı M regle yüzeyi

$$\varphi(t,v) \;=\; \alpha(t) + vX(t)$$

için atlas

$$\{(I \times R, \varphi)\}$$

olarak verilsin. M nin herbir doğrultmanı üzerinde

$$v = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

değerine karşılık gelen noktaya o doğrultman üzerindeki merkez nokta (boğaz noktası) ve M nin merkez noktalarının geometrik yerine de M nin striksiyon çizgisi denir.

Tanım 1.1.8 (Dağılma Parametresi):

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir.

$$P_x = \frac{\det(t, X, X')}{\|X'\|^2}$$

Tanım 1.1.9 (Açılabilirlik):

Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir.

Tanım 1.1.10 (Hareketler):

E^n, n-boyutlu Öklid uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^ndeki bir $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f nin matris gösterimi $A \in 0(n)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. f ye E^nde bir hareket adı verilir. $A \in 0(n)$ olduğundan $\det A = \pm 1$ dir. Böylece $\det A = 1$ ise f hareketine direkt hareket, $\det A = -1$ ise f hareketine karşıt hareket adı verilir.

Hareket denilince direkt hareketi anlayacağız. Direkt hareketler iki tür hareketin birleşimidir: Direkt dönme ve öteleme.

Tanım 1.1.11 (Dönme):

E^n Öklid uzayının bir f izometrisi için

$$f(0) = 0$$

olacak şekilde bir $0 \in E^n$ noktası var ise f ye (sıfır) noktası etrafında bir dönme denir.

Tanım 1.1.12 (Öteleme):

E^n Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için

$$f(X) = X + h$$

olacak şekilde bir tek $h \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in h ile belirtilen bir ötelemesi denir.

Tanım 1.1.13 (Çatı Alanları):

V_1, V_2, V_3 E^3 Öklid uzayında üç vektör alanı olsun.

Eğer $\forall P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayının bir bazı ise bu vektör alanları üçlüsüne E^3 de bir çatı alanı denir.

E^3 Öklid uzayında $\forall P \in E^3$ için

$$\begin{aligned} e_1(P) &= (1,0,0)|_P \\ e_2(P) &= (0,1,0)|_P \\ e_3(P) &= (0,0,1)|_P \end{aligned}$$

şeklindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanına doğal çatı alanı denir.

E^3 de diğer bir ortonormal çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

olarak alırsak $A \in 0(3)$ olmak üzere

$$E = Ae$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.1.14 (1-Form):

Bir

$$\varphi : E \to \bigcup_{P \in E^3} T^*_{E^3}(P)$$

$$P \to \varphi(P) \in T^*_{E^3}(P)$$

(1:1, örten) dönüşümüne E^3 üzerinde bir 1-form denir.

Tanım 1.1.15 (Çizgiler Uzayında Hareketler):

E^3 Öklid uzayındaki 1-parametreli hareketlerde E^3 ün doğruları regle yüzeyler için önemlidir.

Doğrular E^3 ün lineer nokta cümleleridir. Bu yüzden E^3 Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş olarak düşünerek E^3 e çizgiler uzayı adını vereceğiz.

Uzayda hareketin gözlenebilmesi için bir referans noktasına ihtiyaç vardır. Bu noktanın sabit veya aynı noktada bulunan gözlemciye göre sabit olduğu farzedilir. Bu noktayı $0 \in E^3$ ile gösterelim.

Hareketi inceleyebilmek için

$$\{\overrightarrow{e}_1(0), \overrightarrow{e}_2(0), \overrightarrow{e}_3(0)\} \quad = \quad \{0; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$$

ortonormal sistemini tespit edelim.

Bu uzayda bütün noktaların sabit kaldığı farzedilerek bu E^3 uzayına sabit çizgiler uzayı denir ve H' ile gösterilir.

$$H' \quad = \quad S_P\{\overrightarrow{e}_1(0), \overrightarrow{e}_2(0), \overrightarrow{e}_3(0)\}$$

Tanım 1.1.16 (Bir Parametreli Uzay Hareketi):

H/H' uzay hareketinin,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen $A \in 0(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri,

$$A \quad = \quad A(t)$$

$$C \quad = \quad C(t)$$

olacak şekilde bir tek reel t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H/H' uzay hareketine bir parametreli uzay hareketi denir.

Tanım 1.1.17 (Kapalı ve Açık Hareketler):

H/H' hareketini belirleyen $A \in 0(n)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri $\forall t \in R$ için,

$$A(t + 2\pi) \quad = \quad A(t)$$

$$C(t + 2\pi) \quad = \quad C(t)$$

olacak şekilde periyodik iseler H/H' uzay hareketine kapalı, aksi halde açık hareket adı verilir.

Tanım 1.1.18. (H/H$'$ Hareketinin Değişimi):

$$E = Ae \ , \quad A \in O(3)$$

olduğundan diferensiyelini alırsak,

$$dE = dAe$$

olur. Ayrıca

$$e = A^T E$$

olduğundan

$$dE = dAA^T E$$

bulunur. Bağ formlarının

$$\Omega = dAA^T$$

matrisini kullanarak

$$dE = \Omega E$$

yazılabilir.

Şimdi hareketli uzayda bir $(\overrightarrow{a}, \vec{a}^*)$ doğrusunu düşünelim. $\overrightarrow{a}$ birim doğrultman vektörünü $\forall P \in H$ için,

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} , \ E = \begin{bmatrix} \overrightarrow{E_1} \\ \overrightarrow{E_2} \\ \overrightarrow{E_3} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\overrightarrow{a} = a^T E$$

şeklinde yazalım. Doğru hareketinin değişimi için diferensiyel alırsak,

$$d\overrightarrow{a} = da^T E + a^T dE$$

ve

$$dE = \Omega E$$

eşitliğini yerine yazarsak

$$d\overrightarrow{a} = da^T E + a^T \Omega E$$

elde edlilr.

$$(a^T)^T = a$$

eşitliğini gözönünde bulundurarak E ortak parantezine alırsak

$$d\overrightarrow{a} = (da + \Omega^T a)^T E$$

elde edilir. $(\overrightarrow{a}, \vec{a}^*)$ doğrusu H hareketli uzayında sabit bir doğru ise

$$d\overrightarrow{a} = 0$$

olacağından

$$d\overrightarrow{a} = a^T \Omega E$$

bulunur. Eğer bir w vektörünü

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

şeklinde alacak olursak bu ifade

$$d\overrightarrow{a} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{a}$$

şeklinde yazılabilir. Diferensiyel geometrideki Darboux Dönme Vektörünün rolünü oynayan $\overrightarrow{w}$ vektörüne H/H' hareketinin ani Pfaffian vektörü (diferensiyel vektör) denir.

1.2 Lorentz Uzayı

Bu kısımda kaynak verilmeyen temel kavram ve teoremler (O'Neill, 1983) den alınmıştır.

Tanım 1.2.1 (Skalar Çarpım Uzayı):

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g \ : \ V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir **skalar çarpım uzayı** denir.

Tanım 1.2.2 (Simetrik Bilineer Form):

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g \ : \ V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her $a, b \in R$ ve her $u, v, w \in V$ için,

(i) $g(u, v) = g(v, u)$

(ii) $g(au + bv, w) = ag(u, v) + bg(v, w)$

$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahip ise bu durumda g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

Tanım 1.2.3 (Pozitif-Negatif,Yarı Pozitif-Yarı Negatif Bilineer Form)

V bir reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

$i)$ Her $v \in V, v \neq 0$ için $g(u, v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlı

$ii)$ Her $v \in V, v \neq 0$ için $g(u, v) < 0$ ise g ye negatif tanımlı

$iii)$ Her $v \in V, v \neq 0$ için $g(u, v) \geq 0$ ise g ye yarı-pozitif tanımlı

$iv)$ Her $v \in V, v \neq 0$ için $g(u,v) \leq 0$ ise g ye yarı-negatif tanımlı bilineer form denir.

Tanım 1.2.4 (Simetrik Bilineer Formun Non-Dejenere, Dejenere Olma Durumu):

V bir reel vektör uzayı ve

$$g \;:\; V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

$i)$ g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(u,v) = 0$ ve her $v \in V$ için $u = 0$ olmasıdır.

$ii)$ g nin dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(w,v) = 0$ ve her $v \in V$ için $w \neq 0$ olmasıdır.

Tanım 1.2.5.(Simetrik Bilineer Formun İndeksi):

V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow R; V$ üzerinde simetrik bilineer form olsun.

$$g|_W \;:\; W \times W \rightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve q ile gösterilir. Ayrıca q ya V vektör uzayının da indeksi denir ve $indV = q$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.6 (Lorentz Uzayı) :

V skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir.

Tanım 1.2.7 (Spacelike, Timelike ve Null Vektör):

V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için $g\,(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

$g\,(v,v) < 0$ ise v ye timelike vektör,

$g(v,v)=0$ ve $v=0$ ise v ye null vektör ve $\|v\| = |g(v,v)|^{1/2}$ reel sayısına v vektörünün normu denir.

Tanım 1.2.8 (Spacelike, Timelike ve Null Altuzay):

V bir Lorentz uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

$g \mid W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,

$g \mid W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike altuzay,

$g \mid W$ dejenere ise W ya null altuzay denir.

1.3 Yarı-Riemann Manifoldları

Bu kısımda kaynak verilmeyen temel kavram ve teoremler (O'Neill, 1983) den alınmıştır.

Tanım 1.3.1 (Metrik Tensör):

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0,2)$-tipinden g tensör alanına bir **metrik tensör** denir.

Başka bir deyişle g, M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır.

Tanım 1.3.2 (Yarı-Öklidyen Uzayı):

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^n$ ve v_p, $w_p \in Tp\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$< v_p, w_p > \;=\; \sum_{i=1}^{n-v} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^{n} v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen v-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_v$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla, v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerin bileşenidir.

Tanım 1.3.3 (Minkowski Uzayı):

$\mathbb{R}_v^n$ yarı-Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_v^n$ yarı-Öklidyen uzayına **Minkowski n-uzay** denir.

Tanım 1.3.4 (Yarı-Riemann Monifoldu):

M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere $(M,\ g)$ ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $(M,\ g)$ yarı-Riemann manifoldunu sadece M ile göstereceğiz.

Tanım 1.3.5 (Yarı-Riemann Manifoldunun İndeksi):

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.

Tanım 1.3.6 (Lorentz Manifoldu):

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $boyM \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir.

Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için

$$g_p(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \mid_p w_i \mid_p - v_n \mid_p w_n \mid_p \ ; \ p \in M \ , \ v_p, w_p \in T_pM$$

dir.

Tanım 1.3.7 (Spacelike, Timelike ve Null Eğri):

M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$g(T,\ T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

$g(T,\ T) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,

$g(T,\ T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir.

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu gözönüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur.

Tanım 1.3.8 (Yarı-Riemann Altmanifoldu):

M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, M nin bir altmanifoldu olsun. $j : \overline{M} \rightarrow M$ dönüşümü olmak üzere her $p \in \overline{M}$ için

$$(j^{\cdot}(g))(p) \quad = \quad g(j(p))$$

şeklinde tanımlı $j^{\cdot}(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir **yarı-Riemann altmanifoldu** denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensörü g ile göstereceğiz.

Tanım 1.3.9 (İndirgenmiş Konneksiyon):

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D \quad : \quad \chi\left(\overline{M}\right) \times \overline{\chi}\left(\overline{M}\right) \quad \rightarrow \quad \overline{\chi}\left(\overline{M}\right)$$

indirgenmiş fonksiyona $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir. Burada $\overline{\chi}\left(\overline{M}\right)$ ile, $\overline{M}$ nin her bir p noktasına T_pM de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\Im\left(\overline{M}\right)$ modülü gösterilmektedir.

Teorem 1.3.1

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olsun. Her $V,\ W \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$\overline{D}_v W \;=\; \tan D_v W$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur.

Tanım 1.3.10 (Şekil Tensörü):

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} II:\ \chi\left(\overline{M}\right)\times\chi\left(\overline{M}\right) &\rightarrow \chi\left(\overline{M}\right)^{\perp} \\ (V,W) &\rightarrow II\,(V,W) = nor D_v W \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\Im\left(\overline{M}\right)$-bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\overline{M}$ nin **şekil tensörü** (veya ikinci temel form tensörü) denir.

Tanım 1.3.11 (Yarı-Riemann Hiperyüzeyi):

n-boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun $(n-1)-$ boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin **yarı-Riemann hiperyüzeyi** denir.

Tanım 1.3.12 (Şekil Operatörü):

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V,\ W \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$g\left(S\left(V\right),W\right) \;=\; g\left(II\left(V,W\right),N\right)$$

şeklindeki $(1,1)$-tipinden tensör alanı S ye $\overline{M}$ nin N den elde edilen şekil operatörü denir.

Diğer bir deyişle, S şekil operatörü $\overline{M}$ nin her p noktasında

$$S \ : \ T_p\left(\overline{M}\right) \to T_p\left(\overline{M}\right)$$

bir lineer operatördür.

Tanım 1.3.13 (Asimptotik çizgi):

M nin bir yarı -Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü S ve $\alpha : \ I \longrightarrow \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$g\left(S\left(T\right), T\right) \ = \ 0$$

ise α eğrisine **asimptotik çizgi** (eğri) denir.

Tanım 1.3.14 (Jeodezik Eğri):

M nin bir yarı- Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\overline{D}$ ve $\alpha : \ I \longrightarrow \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\overline{D}_T T \ = \ 0$$

ise α eğrisine $\overline{M}$ üzerinde bir **jeodezik eğri** denir.

1.4 3-Boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

Bu kısımda kaynak verilmeyen temel kavram ve teoremler (Turgut, A., 1995) den alınmıştır.

Tanım 1.4.1 (Minkowski Uzayı):

n -boyutlu, v- indeksli $\mathbb{R}^n_v$ yarı- Öklidyen uzayın, boyutunu 3 ve indeksini 1 olarak alalım. O zaman $\mathbb{R}^3$ üzerinde her $P \in \mathbb{R}^3$ ve $v_p,\ w_p \in T_P\mathbb{R}^3$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$$

eşitliğiyle verilen 1 - indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya 3 - boyutlu Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.2 (Vektörel çarpım)

$\mathbb{R}^3_1$, Minkowski uzayında iki vektör v ve w olsun. $v = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ ve $w = (w_1,\, w_2,\, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3 w_2 - v_2 w_3,\, v_1 w_3 - v_3 w_1,\, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne v ve w nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir ve $v \times w$ veya $v \wedge w$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & , i = j \text{ ise} \\ 0 & , i \neq j \text{ ise} \end{Bmatrix}$$

ve

$$e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \times w = -\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

veya

$$v \times w = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$e_1 \times e_2 \;=\; e_3 \;,\; e_2 \times e_3 \;=\; -e_1 \;,\; e_3 \times e_1 \;=\; -e_2$$

dir. Saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Bu ifadeyi $\overrightarrow{a}$ şeklinde sembolize edebiliriz.

Saat yönünün tersi, negatif yön olarak alınırsa

$$e_1 \times e_2 \;=\; -e_3 \;,\; e_2 \times e_3 \;=\; e_1 \;,\; e_3 \times e_1 \;=\; e_2$$

olur ve bu durumda

$$v \times w \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde sembolize edilir.

Tanım 1.4.3 (Karma çarpım)

Uzayda herhangi a, b, c vektörlerinin bir vektörel ve bir skalar çarpımının bileşimi olan

$$\langle a, b \times c \rangle$$

skalar değerine bu üç vektörün **karma çarpımı** denir. Bu karma çarpım

$$\langle a, b \times c \rangle = \det(a, b, c)$$

şeklinde de tanımlanabilir (Kaya, R., 1996).

Teorem 1.4.4

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olsun. Bu durumda

i) $\langle u \times v, w \rangle = -\det(u, v, w)$

$ii)$ $(u \times v) \times w = -\langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u$

$iii)$ $\langle u \times v, u \rangle = 0$ ve $\langle u \times v, v \rangle = 0$

$iv)$ $\langle u \times v, u \times v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$

dir.

Teorem 1.4.5

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör u ve v olsun.

$i)$ u ve v spacelike vektör ise $u \times v$ bir timelike vektördür.

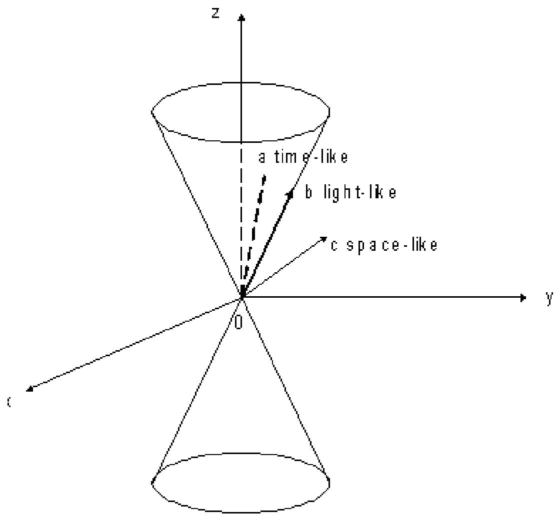
$ii)$ u spacelike ve v timelike vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür.

$iii)$ u spacelike ve v null vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \times v$ null vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \times v$ spacelike vektördür.

$iv)$ u ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür.

$v)$ u timelike ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür.

$vi)$ u ve v timelike vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür



Şekil 1.1

V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun. $u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma : g(v, u) < 0\}$$

kümesine u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının **time-konisi** denir.

E_1^3 , $\langle , \rangle = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ öyleki (x_1, x_2, x_3) bir standart dik koordinat sistemi ile verilen 3- boyutlu Minkowski uzayının bir iç çarpımı olsun. E_1^3 de bir x vektörüne, sırasıyla, $\langle x, x\rangle > 0$ veya $x = 0$ ise spacelike, $\langle x, x\rangle < 0$ ise timelike ve $x \neq 0$ olmak üzere $\langle x, x\rangle = 0$ ve ise lightlike veya null vektör denir.

Bölüm 2

YÜZEYLER ÜZERİNDE İKİNCİ GAUSS EĞRİLİĞİ

Minimal yüzeyler uzun zamandan beri geometricilerin ilgisini çeken temel objelerden biridir. Özellikle E^3 3-boyutlu Öklid uzayında minimal regle yüzeyler sadece düzlem ve helicoidlerdir. 1983 yılında Kobayashi E_1^3 de 3-boyutlu Minkowski uzayında minimal regle yüzeyleri sınıflandırdı ve Woestijne ise 1988 yılında Lorentz versiyonuna aktardı. Diğer yandan yazarlar E^3 de 1. tip Gauss dönüşümünü son zamanlarda minimal regle yüzeyleri 1-tipli pointwise açısından sınıflandırmıştır. M,K Gauss eğriliği pozitif olan üç boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olsun. Eğer yüzey uygun bir şekilde yönlendirilmiş ise yüzey pozitif tanımlı ikinci temel forma (II) sahiptir. Bir Riemann metriği ile verilen ikinci temel formun K_{II} Gauss eğriliğini gözönüne alabiliriz. Eğer bir yüzeyin Gauss eğriliği her yerde sıfırından farklı ise, K_{II} formal olarak tanımlanabilir ve bu eğrilik Riemann veya pseudo-Riemann manifold (M, II) eğriliğidir.

Doğal olarak böyle bir kavramı 3-boyutlu Minkowski uzayının yüzeyine kadar uzatabiliriz. Klasik bir notasyon kullanarak, ikinci temel formun katsayılar fonksiyonlarını e, f ve g ile gösterelim.

Şimdi ikinci Gauss eğriliğini hesaplayalım;

$$\vec{\varphi}(u,v),(u=u(t),v=v(t))$$

yüzeyini, bu yüzeyin normal $\vec{\xi}$ vektörünü ve bu yüzey üzerinde $\vec{\varphi}(t)$ regüler eğrisini alalım.

$\{\vec{\varphi}(t),\vec{\xi}(t)\}$ gibi yüzey elemanlarının bir şerit teşkil edebilmeleri için, yüzey elemanlarının daima $\vec{\varphi}(t)$ eğrisinin teğetinden geçmelidir; yani eğrinin $\vec{\varphi}'$ teğet vektörü $\vec{\xi}$ vektörüne dik olmalıdır. Yani

$$\left\langle \vec{\varphi}'(t),\vec{\xi}(t)\right\rangle = 0$$

dir. Şimdi $\{\vec{\varphi}(t),\vec{\xi}(t)\}$ şeridinin t parametresini de kendi $\vec{\varphi}(s)$ eğrisinin s yayı $(t=s)$ olarak seçelim. Bu takdirde (2.1) bağıntısından başka

$$\left\langle \vec{\varphi}'(s),\vec{\varphi}'(s)\right\rangle = 1 \tag{2.2}$$

eşitliği bulunur. Burada $\vec{\varphi}'(s)\neq 0$ olarak kabul edilmiştir. Diğer taraftan $\vec{\varphi}'(s)$ ve $\vec{\xi}(s)$ vektörlerine

$$\vec{\eta} = \vec{\xi}\times\vec{\varphi}' \tag{2.3}$$

üçüncü birim vektör de dahil edilirse bu vektör, $\vec{\varphi}$ deki $\vec{\varphi}'$ (eğri) teğetine diktir. O halde (2.3) e göre $\vec{\varphi}'$, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ için aşağıdaki skalar çarpımlar yazılabilir.

$$\left\langle \vec{\varphi}',\vec{\varphi}'\right\rangle = \left\langle \vec{\xi},\vec{\xi}\right\rangle = \langle\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle = 1 \tag{2.4}$$

$$\left\langle \vec{\varphi}',\vec{\xi}\right\rangle = \left\langle \vec{\xi},\vec{\eta}\right\rangle = \left\langle \vec{\eta},\vec{\varphi}'\right\rangle = 0 \tag{2.5}$$

Öyle ise (2.3) e göre

$$\vec{\eta}\times\vec{\xi} = \vec{\varphi}'$$

ve

$$\vec{\varphi}' \times \vec{\eta} = \vec{\xi}$$

olur. Bundan başka (2.3), (2.4) ve (2.5) den

$$\det(\vec{\varphi}', \vec{\eta}, \vec{\xi}) = 1 \tag{2.6}$$

bulunur. Şimdi şeridimizin vektörleri için türev denklemlerini oluşturalım.

$\left\{\vec{\varphi}', \vec{\eta}, \vec{\xi}\right\}$ şerit üçyüzlüsünün türevleri ile kendileri arasında

$$\begin{aligned}
\vec{\varphi}'' &= a_1\vec{\varphi}' + a_2\vec{\eta} + a_3\vec{\xi} \\
\vec{\eta}' &= b_1\vec{\varphi}' + b_2\vec{\eta} + b_3\vec{\xi} \\
\vec{\xi}' &= c_1\vec{\varphi}' + c_2\vec{\eta} + c_3\vec{\xi}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitlikleri vardır. Buradan

$$\left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\varphi}' \right\rangle = a_1 \ , \ \left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\eta} \right\rangle = a_2 \ , \ \left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\xi} \right\rangle = a_3$$

$$\left\langle \vec{\eta}', \vec{\varphi}' \right\rangle = b_1 \ , \ \left\langle \vec{\eta}', \vec{\eta} \right\rangle = b_2 \ , \ \left\langle \vec{\eta}', \vec{\xi} \right\rangle = b_3 \tag{2.8}$$

$$\left\langle \vec{\xi}', \vec{\varphi}' \right\rangle = c_1 \ , \ \left\langle \vec{\xi}', \vec{\eta} \right\rangle = c_2 \ , \ \left\langle \vec{\xi}', \vec{\xi} \right\rangle = c_3$$

eşitliklerini alalım.

$$\left\langle \vec{\varphi}', \vec{\varphi}' \right\rangle = 1$$

ifadesinin türevini alırsak

$$\left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\varphi}' \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}', \vec{\varphi}'' \right\rangle = 0$$

$$2\left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\varphi}' \right\rangle = 0$$

buradan

$$\left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\varphi}' \right\rangle = 0$$

olur. Ohalde

$$a_1 = 0 \tag{2.9}$$

dır. Benzer şekilde

$$\left\langle \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{\xi} \right\rangle = 1$$

ifadesinin türevini alırsak

$$\left\langle \overrightarrow{\xi}', \overrightarrow{\xi} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{\xi}' \right\rangle = 0$$

$$2\left\langle \overrightarrow{\xi}', \overrightarrow{\xi} \right\rangle = 0$$

olup

$$\left\langle \overrightarrow{\xi}', \overrightarrow{\xi} \right\rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$c_3 = 0 \tag{2.10}$$

bulunur. Son olarak

$$\langle \overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\eta} \rangle = 1$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\langle \overrightarrow{\eta}', \overrightarrow{\eta} \rangle + \langle \overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\eta}' \rangle = 0$$

$$2\langle \overrightarrow{\eta}', \overrightarrow{\eta} \rangle = 0$$

eşitliğinden

$$\langle \overrightarrow{\eta}', \overrightarrow{\eta} \rangle = 0$$

olur. Buradan

$$b_2 = 0 \tag{2.11}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi}', \overrightarrow{\xi} \right\rangle = 0$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\xi} \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}', \vec{\xi}' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{\varphi}'', \vec{\xi} \right\rangle = -\left\langle \vec{\varphi}', \vec{\xi}' \right\rangle$$

ve

$$a_3 = -c_1 \tag{2.12}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\left\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \right\rangle = 0$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\left\langle \vec{\xi}', \vec{\eta} \right\rangle + \left\langle \vec{\xi}, \vec{\eta}' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{\xi}', \vec{\eta} \right\rangle = -\left\langle \vec{\xi}, \vec{\eta}' \right\rangle$$

ve

$$c_2 = -b_3 \tag{2.13}$$

olur. Ayrıca

$$\left\langle \vec{\eta}, \vec{\varphi}' \right\rangle = 0$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\left\langle \vec{\eta}', \vec{\varphi}' \right\rangle + \left\langle \vec{\eta}, \vec{\varphi}'' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{\eta}', \vec{\varphi}' \right\rangle = -\left\langle \vec{\eta}, \vec{\varphi}'' \right\rangle$$

ve

$$b_1 = -a_2 \tag{2.14}$$

bulunur. (2.9),(2.10), (2.11), (2.12), (2.13) ve (2.14) eşitlikleri (2.7) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\varphi}'' &= a_2\overrightarrow{\eta} - c_1\overrightarrow{\xi} \\
\overrightarrow{\eta}' &= -a_2\overrightarrow{\varphi}' + b_3\overrightarrow{\xi} \\
\overrightarrow{\xi}' &= c_1\overrightarrow{\varphi}' - b_3\overrightarrow{\eta}
\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan şeridimizin c_1 normal eğriliği,

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left\langle \overrightarrow{\varphi}', \overrightarrow{\xi}' \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{ds}, \frac{d\overrightarrow{\xi}}{ds} \right\rangle \qquad (2.15) \\
&= \frac{1}{ds^2}\left\langle d\overrightarrow{\varphi}, d\overrightarrow{\xi} \right\rangle
\end{aligned}$$

eşitliği ile bulunur. Ayrıca

$$\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{ds} = \overrightarrow{\varphi}_u\frac{du}{ds} + \overrightarrow{\varphi}_v\frac{dv}{ds} \qquad (2.16)$$

ve

$$d\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}_u du + \overrightarrow{\xi}_v dv \qquad (2.17)$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{ds}, \frac{d\overrightarrow{\xi}}{ds} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{\varphi}_u\frac{du}{ds} + \overrightarrow{\varphi}_v\frac{dv}{ds}, \overrightarrow{\xi}_u\frac{du}{ds} + \overrightarrow{\xi}_v\frac{dv}{ds} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\xi}_u \right\rangle \frac{du^2}{ds^2} + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\xi}_v \right\rangle \frac{du}{ds}\frac{\overrightarrow{dv}}{ds} + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_v, \overrightarrow{\xi}_u \right\rangle \frac{dv}{ds}\frac{du}{ds} + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_v, \overrightarrow{\xi}_v \right\rangle \frac{dv^2}{ds^2} \\
&= \frac{1}{ds^2}\left[\left\langle \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\xi}_u \right\rangle du^2 + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\xi}_v \right\rangle dudv + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_v, \overrightarrow{\xi}_u \right\rangle dvdu + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_v, \overrightarrow{\xi}_v \right\rangle dv^2\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{ds^2}\left\langle d\overrightarrow{\varphi}, d\overrightarrow{\xi} \right\rangle = \frac{1}{ds^2}\left[\left\langle \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\xi}_u \right\rangle du^2 + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\xi}_v \right\rangle dudv + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_v, \overrightarrow{\xi}_u \right\rangle dvdu + \left\langle \overrightarrow{\varphi}_v, \overrightarrow{\xi}_v \right\rangle dv^2\right]$$

olur. Elde edilen bu eşitliğin her iki tarafı -1 sayısı ile çarpıp, gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$-\left\langle d\vec{\varphi}, d\vec{\xi}\right\rangle = -\left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_u\right\rangle du^2 - \left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_v\right\rangle dudv - \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_u\right\rangle dvdu - \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_v\right\rangle dv^2$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} L &= -\left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_u\right\rangle \\ 2M &= -\left[\left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_v\right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_u\right\rangle\right] \\ N &= -\left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_v\right\rangle \end{aligned}$$

denilirse

$$\begin{aligned} -\left\langle d\vec{\varphi}, d\vec{\varepsilon}\right\rangle &= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \\ Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 &= II \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğe ikinci Kuadratik Form denir. Diğer taraftan

$$\left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}\right\rangle = 0 \tag{2.18}$$

ve

$$\left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}\right\rangle = 0 \tag{2.19}$$

eşitliklerinin sırasıyla v ve u ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$\left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\xi}\right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_v\right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\xi}\right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_u\right\rangle = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da

$$\left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_v\right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_u\right\rangle = -2\left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\xi}\right\rangle$$

olup

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{\varphi_{uv}}, \overrightarrow{\xi} \right\rangle &= -\frac{1}{2}\left[\left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\xi_v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\xi_u} \right\rangle\right] \\ &= M\end{aligned} \tag{2.20}$$

olur. Ayrıca (2.18) ve (2.19) eşitliklerinin sırasıyla u ve v ye göre türevleri alınırsa

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{\mathrm{uu}}}, \overrightarrow{\xi} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\xi_u} \right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{vv}}, \overrightarrow{\xi} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\xi_v} \right\rangle = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{\mathrm{uu}}}, \overrightarrow{\xi} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\xi_u} \right\rangle = L \tag{2.21}$$

ile

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{vv}}, \overrightarrow{\xi} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\xi_v} \right\rangle = N \tag{2.22}$$

olur. Teğet düzlem, yüzey normali olan

$$\overrightarrow{\xi} = \frac{\overrightarrow{\varphi_u} \times \overrightarrow{\varphi_v}}{\left\| \overrightarrow{\varphi_u} \times \overrightarrow{\varphi_v} \right\|}$$

birim vektörüne diktir.

$$E = \left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\varphi_u} \right\rangle \;,\; F = \left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle \;,\; G = \left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle \tag{2.23}$$

olsun.

$$< \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} > \;=\; < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} > - < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} > \tag{2.24}$$

Lagrange özdeşliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\xi} &= \frac{\overrightarrow{\varphi_u} \times \overrightarrow{\varphi_v}}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{\varphi_u} \times \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\varphi_u} \times \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle}} \\ &= \frac{\overrightarrow{\varphi_u} \times \overrightarrow{\varphi_v}}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\varphi_u} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle}}\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan (2.23) eşitlikleri yukarıdaki son ifade de yerlerine yazılırsa

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca (2.20), (2.21) ve (2.22) eşitlikleri tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} L &= \left\langle \vec{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \vec{\xi} \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle \\ &= \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} N &= -\left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\xi}_v \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\xi} \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle \\ &= \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} M &= -\left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\xi}_v \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\xi} \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right\rangle \\ &= \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

şeklinde yazılabilir. Yüzeyin bir noktasındaki normal kesitlerin eğrilikleri $\dfrac{1}{R}$

olmak üzere

$$\frac{1}{R} = \frac{II}{I}$$

$$= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

denklemine sahibiz. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$(RL - E)du^2 + 2(RM - F)dudv + (RN - G)dv^2 = II$$

elde ederiz. Bu denklemin önce u ya göre sonra v ye göre türevlerini alalım.

$$(RL - E)du + (RM - F)dv = 0$$

veya

$$(RM - F)du + (RN - G)dv = 0$$

bulunur.

$$\begin{vmatrix} RL - E & RM - F \\ RM - F & RN - G \end{vmatrix} = 0$$

determinantı hesaplanırsa

$$R^2LN - RLG - RNE + EG - (R^2M^2 - RMF - RM + F^2) = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(EG - F^2)\frac{1}{R^2} - (EN - 2FM + GL)\frac{1}{R} + (LN - M^2) = 0$$

olur. Bu denklem ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem olup yüzeyin asli eğrilikleri $\frac{1}{R_1}$ ve $\frac{1}{R_2}$ olmak üzere kökler çarpımı

$$\frac{1}{R_1}.\frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2.28}$$

ve kökler toplamı

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \tag{2.29}$$

dır. Buna göre sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1}.\frac{1}{R_2} &= K \\ \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} &= 2H \end{aligned} \tag{2.30}$$

yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri olur.

$$\sqrt{EG-F^2} = W \tag{2.31}$$

olur. (2.28), (2.29) ve (2.30) birlikte kullanılırsa

$$K = \frac{LN-M^2}{W^2} \tag{2.32}$$

elde edilir. (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) eşitlikleri (2.32) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K &= \frac{\dfrac{\left\langle \overrightarrow{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} \dfrac{\left\langle \overrightarrow{\varphi}_{vv}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} - \left(\dfrac{\left\langle \overrightarrow{\varphi}_{uv}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} \right)^2}{W^2} \\ &= \frac{\left\langle \overrightarrow{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\varphi}_{vv}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\varphi}_{uv}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle^2}{W^4} \end{aligned} \tag{2.33}$$

bulunur. K sadece, E, F, G ve bu fonksiyonların u ve v ye göre ikinci mertebeden türevleri cinsinden belirtilebilir. Şimdi (2.33) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\varphi}_v) &= \left\langle \overrightarrow{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle \\ \det(\overrightarrow{\varphi}_{vv}, \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\varphi}_v) &= \left\langle \overrightarrow{\varphi}_{vv}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle \end{aligned}$$

ve

$$(\det(\overrightarrow{\varphi}_{uv}, \overrightarrow{\varphi}_u, \overrightarrow{\varphi}_v))^2 = \left\langle \overrightarrow{\varphi}_{uv}, \overrightarrow{\varphi}_u \times \overrightarrow{\varphi}_v \right\rangle^2$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa ve

$$\det(x,y,z).\det(x',y',z') = \begin{vmatrix} \langle x,x'\rangle & \langle x,y'\rangle & \langle x,z'\rangle \\ \langle y,x'\rangle & \langle y,y'\rangle & \langle y,z'\rangle \\ \langle z,x'\rangle & \langle z,y'\rangle & \langle z,z'\rangle \end{vmatrix}$$

determinantlar özellikleri iki defa uygulanırsa

$$W^4K = \begin{vmatrix} \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{vv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{vv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle \end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradan da (2.23) eşitliği kullanılırsa

$$W^4K = \begin{vmatrix} \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{v} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{vv} \right\rangle & E & F \\ \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{vv} \right\rangle & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle & \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & E & F \\ \left\langle \vec{\varphi}_{v}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle & F & G \end{vmatrix} \tag{2.34}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$E = \left\langle \vec{\varphi}_{u}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle$$

olup bu eşitliğin sırasıyla u ve v ye göre türevi alınırsa

$$E_u = \left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle = 2\left\langle \vec{\varphi}_{\mathrm{uu}}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle$$

veya

$$\left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle = \frac{1}{2}E_u \tag{2.35}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$E_v = \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle = 2\left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{u} \right\rangle$$

eşitliği de

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{uv}}, \overrightarrow{\varphi_u} \right\rangle = \frac{1}{2}E_v \qquad (2.36)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$G = \left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle$$

eşitliğinin u ve v ye göre türevi alınırsa

$$G_u = \left\langle \overrightarrow{\varphi_{vu}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_{vu}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle = 2\left\langle \overrightarrow{\varphi_{vu}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle$$

olup

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{vu}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle = \frac{1}{2}G_u \qquad (2.37)$$

olur. Böylece

$$G_v = \left\langle \overrightarrow{\varphi_{vv}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_v}, \overrightarrow{\varphi_{vv}} \right\rangle = 2\left\langle \overrightarrow{\varphi_{vv}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle$$

eşitliğinden

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{vv}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle = \frac{1}{2}G_v \qquad (2.38)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$F = \left\langle \overrightarrow{\varphi_u}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle \qquad (2.39)$$

eşitliğinin u ya göre türevi alınırsa

$$F_u = \left\langle \overrightarrow{\varphi_{\mathrm{uu}}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_{vu}}, \overrightarrow{\varphi_u} \right\rangle$$

olur. Buradan

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = \left\langle \overrightarrow{\varphi_{uu}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\varphi_{vu}}, \overrightarrow{\varphi_u} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\varphi_{uv}}, \overrightarrow{\varphi_u} \right\rangle$$

olup

$$\left\langle \overrightarrow{\varphi_{uu}}, \overrightarrow{\varphi_v} \right\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \qquad (2.40)$$

bulunur. Benzer şekilde (2.40) in v ye göre kısmi türevi alınırsa

$$F_v = \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_v \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u \right\rangle$$

olur. Buradan

$$F_v - \frac{1}{2}G_u = \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_v \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\varphi}_u \right\rangle - \left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\varphi}_v \right\rangle$$

olup

$$\left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\varphi}_u \right\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \tag{2.41}$$

bulunur. Şimdi de (2.37) eşitliğinin u ya göre kısmi türevi alınırsa

$$\left\langle \vec{\varphi}_{uvu}, \vec{\varphi}_v \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle = \frac{1}{2}G_{uu} \tag{2.42}$$

olur. Benzer şekilde (2.40) eşitliğinin v ye göre kısmi türevi de

$$\left\langle \vec{\varphi}_{uuv}, \vec{\varphi}_v \right\rangle + \left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_{uu} \right\rangle = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} \tag{2.43}$$

bulunur. Ayrıca (2.42) eşitliği (-1) ile çarpılırsa

$$-\left\langle \vec{\varphi}_{uvu}, \vec{\varphi}_v \right\rangle - \left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle = -\frac{1}{2}G_{uu}$$

olur. Elde edilen bu eşitlik (2.43) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa

$$\left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{vv} \right\rangle - \left\langle \vec{\varphi}_{vu}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_{vv} \right\rangle - \left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_{uv} \right\rangle = -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} \tag{2.44}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikler (2.34) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$W^4K = \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\} \tag{2.45}$$

elde edilir.

Bir M Riemann manifoldunun ikinci Gauss eğriliği K_{II} olmak üzere

$$\vec{\varphi} \; : \; U \subset \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R}_1^3$$

Riemann yüzeyinin parametrik gösterimi

$$\vec{\varphi}(u,v) \;=\; (\vec{\varphi}_1(u,v), \vec{\varphi}_2(u,v), \vec{\varphi}_3(u,v))$$

olsun. $\mathbb{R}^3$ de skalar çarpım $\langle , \rangle$ ve

$$D = \sqrt{EG - F^2}$$

için

$$E \;=\; \left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_u \right\rangle, \; F \;=\; \left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v \right\rangle \;, \; G \;=\; \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\varphi}_v \right\rangle \tag{2.46}$$

ayrıca,

$$II = Ldu^2 - 2Mdudv + Ndv^2$$

ifadesindeki L, M ve N sırasıyla ikinci temel formun tamamlayıcıları,

$$e = \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{D} \quad , \; f = \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{D} \quad , \; g = \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{D} \tag{2.47}$$

olmak üzere

$$K_{II} = \frac{1}{|eg - f^2|^2} \left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}g_{uu} + f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Bunlara dayanarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem : M, $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır:

a) $\mathbf{K}_{II} = H \Rightarrow K = H = 0$

b) $\mathbf{K}_{II}$ =sabit $\Rightarrow K_{II} = 0 \Leftrightarrow H = 0$.

Bölüm 3

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

$\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında M pseudo-Riemann manifoldunun ikinci gauss eğriliği K_{II} olmak üzere

$$\overrightarrow{\varphi} \; : \; U \subset \mathbb{R}^2 \;\; \rightarrow \;\; \mathbb{R}^3_1$$

pseudo Riemann yüzeyinin parametrik gösterimi

$$\overrightarrow{\varphi}(u,v) \;\; = \;\; (\overrightarrow{\varphi_1}(u,v), \overrightarrow{\varphi_2}(u,v), \overrightarrow{\varphi_3}(u,v))$$

olsun. $\mathbb{R}^3_1$ de skalar çarpım $\langle , \rangle$ ve

$$D \;\; = \;\; \begin{cases} \sqrt{EG - F^2}, \text{ eğer } M \text{ spacelike ise} \\ \sqrt{F^2 - EG}, \text{ eğer } M \text{ timelike ise} \end{cases}$$

için

$$E = \left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_u \right\rangle, \ F = \left\langle \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v \right\rangle, \ G = \left\langle \vec{\varphi}_v, \vec{\varphi}_v \right\rangle \tag{3.1}$$

ayrıca,

$$II = Ldu^2 - 2Mdudv + Ndv^2$$

ifadesindeki L, M ve N sırasıyla ikinci temel formun tamamlayıcıları,

$$e = \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{uu}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{D}, \ f = \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{uv}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{D}, \ g = \frac{\left\langle \vec{\varphi}_{vv}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \right\rangle}{D} \tag{3.2}$$

olmak üzere

$$K_{II} = \frac{1}{|eg - f^2|^2} \left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}g_{uu} + f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir minimal yüzeyin ikinci Gauss eğriliğinin ihmal edilebilir (sıfır) olduğu bilinmektedir, fakat İkinci Gauss eğriliği sıfır olan bir yüzeyin minimal olması gerekmez. İkinci Gauss eğriliği için yapılan çalışmalarda, Koufogiorgos eğer bazı c sabitleri için $K_{II} = cK$ veya $K_{II} = \sqrt{K}$ oluyorsa, bir kapalı elipsoidin küre olduğunu göstermiştir. Koufogiorgos ve Hasanis kürenin, H ortalama eğrilik olmak üzere kürenin şartını sağlayan bir kapalı elipsoid olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca Kuhlel ise $K_{II} = H$ şartını sağlayan revolte yüzeyleri çalışmıştır. Revolte yüzeylerin doğal genelleştirmelerinden biri helicoid yüzeylerdir. Baikoussis ve Koufogiorgos [14] nolu referansta $K_{II} = H$ şartını sağlayan helicoidal yüzeylerin kısmi olarak temel eğrilik oranının sabitliği ile karakterize edilebileceğini ispatlamıştır. Diğer yandan Blair ve Koufogiorgos E^3 de $aK_{II} + bH$, $2a + b \neq 0$ sabitiyle verilen ayrılabilir olmayan regle yüzeyi araştırmışlardır. Ayrıca, İkinci Gauss eğriliği ihmal edilebilir bir regle yüzeyin bir helicoid olduğunu ispatlamışlardır.

$$aK_{II} + bH = sabit \qquad 2a - b \neq 0 \tag{3.3}$$

$$aH + bK = sabit \qquad a \neq 0 \tag{3.4}$$

$$aK_{II} + bK = sabit \qquad a \neq 0 \tag{3.5}$$

şartını sağlayan E_1^3 Minkowski üç uzayında ayrılabilir olmayan regle yüzeyleri araştırıp sınıflandıracağız

M, E_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzey olsun. J_1, reel sayılar ekseninde açık bir cümle olsun. $\alpha = \alpha(s)$ E_1^3 uzayında J_1 üzerinde tanımlı bir eğri ve $\beta = \beta(s)$, α boyunca bir ortogonal vektör alanı olsun. $\mathbb{R}$ de bir açık olan J_2 için M nin bir parametrizasyonu

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

$s \in J_1$, $t \in J_2$ şeklindedir. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi dayanak eğirisi olarak adlandırılır.

$\beta = \beta(s)$ eğrisine de doğrultman eğri denir.

Öncelikle dayanak eğrisi olan α yı spacelike veya timelike olarak gözönüne alalım. Bu durumda doğrultman eğri olan β yı α eğrisine dik olacak şekilde seçebiliriz. Bundan başka, α eğrisinin karakterine ve β doğrultman eğrisinin seçimine göre 5 farklı türden regle yüzey yazılır. Eğer dayanak eğrisi α spacelike veya timelike ise M regle yüzeyi, sırasıyla M_+ tipli veya M_- tipli regle yüzey olarak adlandırılır. Ayrıca M_+ regle yüzeyi üç tipe bölünebilir. Eğer β spacelike ise bu tipe M_+^1 tipli veya β' eğrisi lightlike (null) veya null olmayan eğriler ise M_+^2 tipindedir. β eğrisi timelike olduğu zaman, β' eğrisi causal karekterden dolayı spacelike olmalıdır. Bu durumda M, M_+^3 tipli olarak adlandırılır. Bundan başka, M_- tipli regle yüzey için eğer β' sırasıyla, null olmayan veya lightlike (null) ise M_-^1 veya M_-^2 tipli regle yüzey olarak isimlendirilir. M_- tipli durumda β doğrultman eğrisinin her zaman spacelike olduğunu belirtelim. M_+^1 veya M_+^2 tipli regle yüzeyin spacelike ve M_+^3, M_-^1 ve M_-^2 için timelike olduğu açıktır. Fakat α dayanak eğrisi lightlike ve β vektör alanı α boyunca bir lightlike vektör alanı ise o zaman M regle yüzeyine bir null-scroll denir.

M, E_1^3 Minkowski uzayında bir pseudo-Riemannian yüzey ve

$$G \quad : \quad M \longrightarrow M^2(\varepsilon) \subset E_1^3 \ , \quad (\varepsilon = \mp 1)$$

biçiminde bir Gauss dönüşümü olsun. Bu takdirde herhangi bir $x \in M$ için $G(x)$, $M^2(\varepsilon)$ da bir nokta olarak bulunabilir. M nin (x_i) lokal koordinatlarındaki Laplacian'ı

$$\Delta \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \sum_{i\ ,\ j} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{|\mathcal{G}|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\mathcal{G}= \det(g_{ij})$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ matrisidir. g_{ij} ler (x_i) lokal koordinatları cinsinden M deki metriğin elemanlarıdır. E_1^3 de M

$$x(s,t) \quad = \quad \alpha(s) + \beta(s) \qquad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R}$$

biçiminde ifade edilen bir regle yüzey olsun. Burada $\alpha = \alpha(s)$ dayanak eğrisi $\beta(s)$ de doğrultman vektörüdür. $\beta(s)$, $\alpha(s)$ ye dik olsun.

Sonuç : α dayanak eğrisinin ve $\beta(s)$ doğrultman vektörünün spacelike veya timelike olması durumunda 5 değişik yüzey elde edilir. $\alpha(s)$ dayanak eğrisi spacelike ise yüzey M_+, timelike ise yüzeyi M_- ile göstereceğiz. Ayrıca $\beta(s)$ doğrultman vektörünün durumuna göre M_+ nın 3, M_- nin iki değişik durumu elde edilir. Yani

α **spacelike iken** M_+**,**

1) β spacelike ve β' non-null ise M_+^1,

2) β spacelike ve β' null ise M_+^2,

3) β timelike ise M_+^3, (β' spacelike olur.)

α **timelike iken** M_-**,**

1) β spacelike ve β' non-null ise M_-^1

2) β spacelike ve β' null ise M_-^2

dir. M regle yüzeyi M_+^1 ve M_+^2 için spacelike, M_+^3, M_-^1 ve M_-^2 için M regle yüzeyi timelike olur. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ null ve $\beta(s)$, α boyunca null ise regle yüzeye null scroll yüzey denir. [18]

$\alpha = \alpha(s)$ spacelike veya timelike diferensiyellenebilir eğri ve $\beta = \beta(s)$, α ya ortogonal olan ve α boyunca birim sabit bir spacelike veya timelike vektör olsun. Bu takdirde $\beta' = 0$ olup non-null olur. Silindirik regle yüzeyler sadece M_+^1, M_+^3 veya M_-^1 tipindedir. G, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere

$$G = \frac{\alpha' \times \beta}{\|\alpha' \times \beta\|} \quad , \quad \langle G, G\rangle = \varepsilon(\mp 1)$$

dir.

Önerme :

E_1^3 de $\Delta G = AG$ şartını sağlayan M_+^1 tipindeki silindirik regle yüzeyler lokal olarak ya düzlem veya hiperbolik silindirdir. Eğer M, M_-^1 tipinde ise sadece Minkowski düzlemi veya Lorentz dairesel silindirdir.

Diğer taraftan pek çok geometrici sınırlı immersiyon tipi şeklinde adlandırılan Öklidyen ve pseudo-Öklidyen uzaylardaki alt manifoldlara ilgi duymuşlardır. Ayrıca Gauss dönüşümü alt manifoldların düzgün haritalarına da genişletilebilir. Bu açıdan yazarlar Gauss dönüşümünü 1-tipli pointwise olarak tanımlamışlardır.

Teorem 3.1 :

M üç boyutlu Minkowski uzayında timelike veya spacelike dayanak eğrili silindirik olmayan regle yüzey olsun. Bu durumda Gauss dönüşümü 1-tipli bir pointwisedır ancak ve ancak M aşağıdaki sıralanan yüzeylerin açık bir parçasıdır.

1) Yüzey olarak birinci çeşit helicoidin spacelike veya timelike
2) Yüzey olarak ikinci çeşit helicoidin spacelike veya timelike
3) Yüzey olarak üçüncü çeşit helicoidin spacelike veya timelike
4) 2. çeşit Ennepper'in conjugatesi spacelike veya timelike yüzeydir.

İSPAT :

Bunu iki değişik durumda inceleyeceğiz .

1. DURUM :

M silindirik olmayan regle yüzeyi, α dayanak eğrisinin ve β doğrultman eğrisinin karakterine göre 3 türünden biri M_+^1 , M_+^3 veya M_-^1 tipinden birisidir.

1) $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike ve $\beta = \beta(s)$ bir spacelike
2) $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike ve $\beta = \beta(s)$ bir timelike
3) $\alpha = \alpha(s)$ bir timelike ve $\beta = \beta(s)$ bir spacelike

Burada s , β doğrultman eğrisinin yay uzunluğudur. Burada özellikle M regle yüzeyi katı hareket ile parametrelenmiştir. Yani,

$$x = x(s,t) \;=\; \alpha(s) + t\beta(s) \tag{3.6}$$

ayrıca $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$, $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_2 (= \mp 1)$ ve $\langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_3 (= \mp 1)$ ve doğal çatımız olan $\{x_s, x_t\}$, $x_s = \alpha'(s) + t\beta'(s)$ ve $x_t = \beta$ tarafından verilmektedir. Daha sonra kullanacağımız q, u, ve v diferensiyellenebilir fonksiyonları şu şekildedir.

$$q = \|x_s\|^2 = \varepsilon_4 \langle x_s, x_s \rangle \ , \quad u = \langle \acute{\alpha}, \beta \rangle, \quad v = \langle \acute{\alpha}, \acute{\alpha} \rangle \tag{3.7}$$

ve x_s vektörünün işareti $\varepsilon_4 (= \mp 1)$ dir. M 'deki pseudo-Riemann metriği ile elde edilen $\langle x_s, x_s \rangle = \varepsilon_4 q$, $\langle x_s, x_t \rangle = 0$ ve $\langle x_t, x_t \rangle = \varepsilon_2$ dir. Eğer q , u ve v fonksiyonları ile M nin laplasını bir arada kullanırsak $\mathcal{G} = \det(g_{ij})$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ olmak üzere

$$\Delta \ = \ -\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \sum_{i\ ,\ j} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{|\mathcal{G}|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{3.8}$$

$\{x_s, x_t\}$ bazına göre (g_{ij}) matrisi

$$(g_{ij}) = \begin{vmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_4 q & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} g_{ss} &= \varepsilon_4 q \\ g_{st} &= 0 \\ g_{ts} &= 0 \\ g_{tt} &= \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$(g_{ij})^{-1} = \left(g^{ij}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon_4 q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_2} \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} (g^{ss}) &= \frac{1}{\varepsilon_4 q} \\ (g^{st}) &= 0 \\ (g^{ts}) &= 0 \\ (g^{tt}) &= \frac{1}{\varepsilon_2} \end{aligned}$$

ve

$$|\mathcal{G}| \;=\; \det(g^{ij}) \;=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde i ve j değerlerini kullanırsak

$$\Delta \;=\; -\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}\right|}}\frac{\partial}{\partial x^s}\{(\sqrt{\left|\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}\right|}g^{ss}\frac{\partial}{\partial x^s}+\sqrt{\left|\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}\right|}.g^{st}.\frac{\partial}{\partial x^t}) \tag{3.11}$$

$$+(\frac{\partial}{\partial x^t}(\sqrt{\left|\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}\right|}g^{ts}\frac{\partial}{\partial x^s}+\sqrt{\left|\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}\right|}.g^{tt}.\frac{\partial}{\partial x^t})\}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) ifadelerindeki eşitlikler (3.11) de kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\Delta \;=\; \frac{1}{2}(-\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q^2})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\varepsilon_4}{q}\frac{\partial}{\partial s}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}}.(-\frac{\varepsilon_4}{q^2}\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s})$$

$$+\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4}{q}}\frac{\varepsilon_4}{q}\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4 q}}[\frac{\partial}{\partial s}\left\{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4 q}.\frac{\varepsilon_4}{q}.\frac{\partial}{\partial s}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\left\{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4 q}.\varepsilon_2.\frac{\partial}{\partial t}\right\}]$$

olur. Ayrıca

$$\Delta \;=\; -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_2\varepsilon_4\frac{\partial q}{\partial s}}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4 q}}.\frac{\varepsilon_4}{q}\frac{\partial}{\partial s}+\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4 q}.(\frac{\varepsilon_4}{q^2}).\frac{\partial q}{\partial s}.\frac{\partial}{\partial s}-\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4 q}.\frac{\varepsilon_4}{q}.\frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

veya

$$\Delta = -\frac{\varepsilon_4}{2q^2}.\frac{\partial q}{\partial s}.\frac{\partial}{\partial s}+\frac{2\varepsilon_4}{2q^2}.\frac{\partial q}{\partial s}.\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\varepsilon_4}{q}.\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_4}{q^2}.\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\varepsilon_4}{q}.\frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Delta \;=\; -\varepsilon_4\left[+\frac{1}{q}.\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{q^2}.\frac{\partial q}{\partial s}.\frac{\partial}{\partial s}\right]-\varepsilon_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{q}.\frac{\partial q}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\right] \tag{3.12}$$

elde edilir. Bundan başka M deki G Gauss dönüşümü

$$G = \left(\frac{1}{\|X_s \times X_t\|}\right)\|X_s \times X_t\| = q^{-1}(A + tB) \tag{3.13}$$

ve q düzgün fonksiyonu

$$q = \varepsilon_4(\varepsilon_3 t^2 + 2ut + v) \tag{3.14}$$

şeklinde verilir. Burada

$$A = \alpha' \times \beta \quad \text{ve} \quad B = \beta' \times \beta$$

dır. G, Gauss dönüşümünün ΔG laplacian hesaplamaları

$$\Delta G = -\varepsilon_4\left(\frac{1}{q}.\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{q^2}.\frac{\partial q}{\partial s}.\frac{\partial G}{\partial s}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial^2 G}{{}_2\partial s^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{q}.\frac{\partial q}{\partial t}.\frac{\partial G}{\partial t}\right) \tag{3.15}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi gerekli türev hesapları yapalım.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\varepsilon_4(2u't + v')\right] = \varepsilon_4(2u't + v')$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon_4(2\varepsilon_3 t + 2u) = 2\varepsilon_4(\varepsilon_3 t + u)$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = -\frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial q}{\partial s}(A + tB) + q^{-\frac{1}{2}}(A' + tB')$$

ve

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = (\frac{3}{4}.q^{-\frac{5}{2}}(\frac{\partial q}{\partial s})^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}).(A + tB) - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial q}{\partial s}.(A' + tB')$$

$$+q^{-\frac{1}{2}}.(A' + tB') - \frac{1}{2}.q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial q}{\partial s}.(A' + tB')$$

veya

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = [\frac{3}{4}.q^{-\frac{5}{2}}(2\acute{u}t+\acute{v})^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(2\acute{u}t+\acute{v}).(A+tB)$$

$$+q^{-\frac{1}{2}}(\acute{A}+t\acute{B}) - q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(2\acute{u}t+\acute{v}).(\acute{A}+t\acute{B})]$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial q}{\partial t}.(A+tB) + q^{-\frac{1}{2}}.B$$

ve

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \left[\frac{3}{4}.q^{-\frac{5}{2}}(\frac{\partial q}{\partial t})^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial^2 q}{\partial t^2})\right].(A+tB) - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial q}{\partial t}.B - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\frac{\partial q}{\partial t}.B$$

bulunur. Bulunan bu değerler ΔG de yerine yazılırsa

$$\Delta G = -\varepsilon_4\frac{1}{q}\{(\frac{3}{4}.q^{-\frac{5}{2}}.(2\acute{u}t+\acute{v})^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(2\acute{u}t+\acute{v}).(A+tB)$$

$$+q^{-\frac{1}{2}}(\acute{A}+t\acute{B}) - q^{-\frac{3}{2}}.(2\acute{u}t+\acute{v}).(\acute{A}+t\acute{B})\}$$

$$-\frac{1}{2q^2}\varepsilon_4(2\acute{u}t+\acute{v}).\left\{\frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(2\acute{u}t+\acute{v}).(A+tB)+q^{-\frac{1}{2}}(\acute{A}+t\acute{B})\right\}$$

$$-\varepsilon_2.\{\left[\frac{3}{4}q^{-\frac{5}{2}}(4(\varepsilon_3 t+u)^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}.2\varepsilon_3\varepsilon_4\right].(A+tB)$$

$$-\frac{2}{2}q^{-\frac{5}{2}}.2\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)B + \frac{1}{2q}.2\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)[-\frac{2}{2}q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u).(A+tB)$$

$$-2q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)B - 2q^{-\frac{3}{2}}.\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)B\}$$

ve

$$\Delta G = -\varepsilon_4(\frac{3}{4}.q^{-\frac{7}{2}}.(2u\acute{t}+\acute{v})^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}.\varepsilon_4(2u\acute{t}+\acute{v}).(A+tB)$$

$$-\varepsilon_4 q^{-\frac{3}{2}}(\acute{A}+t\acute{B}) - q^{-\frac{5}{2}}.\varepsilon_4(2u\acute{t}+\acute{v}).(\acute{A}+t\acute{B})$$

$$+(2u\acute{t}+\acute{v}).\left\{-\frac{1}{4}q^{-\frac{7}{2}}\varepsilon_4(2u\acute{t}+\acute{v}).(A+tB)+\frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}(\acute{A}+t\acute{B})\right\}$$

$$-\varepsilon_2(3q^{-\frac{5}{2}}(\varepsilon_3 t+u)^2 - 2q^{-\frac{3}{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4)(A+tB)$$

$$-\varepsilon_2(-\frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)B) - \varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)(q^{-\frac{5}{2}}\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)(A+tB)$$

$$-2q^{-\frac{7}{2}}\varepsilon_4(\varepsilon_3 t+u)B$$

veya gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\Delta G \quad = \quad & q^{-\frac{1}{2}}\{(A+tB)\varepsilon_4\frac{3}{4}q^{-3}(2u\acute{t}+\acute{v})^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-2}(2u\acute{t}+\acute{v}) \\ & -\frac{1}{4}\varepsilon_4 q^{-3}(2u\acute{t}+\acute{v})^2 - 2\varepsilon_2 q^{-2}(\varepsilon_3 t+u)^2 + 2\varepsilon_2 q^{-1}\varepsilon_3\varepsilon_4\} \\ & +\frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}\{2[\varepsilon_4 q(\acute{A}+t\acute{B})] + 3(2u\acute{t}+\acute{v})(\acute{A}+t\acute{B}) \\ & +\frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}(2[\varepsilon_4\varepsilon_2 q(\varepsilon_3 t+u)B\}\end{aligned}$$

elde eldilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\Delta G &= \{-\varepsilon_4 q^{-3}(2u\acute{t}+\acute{v})^2+\frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-2}(2u\acute{t}+\acute{v})-2\varepsilon_2(\varepsilon_3 t+u)^2+2\varepsilon_4\varepsilon_2\varepsilon_3 q^{-1}\} \\ &\quad +\frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}\{-2\varepsilon_4 q(\acute{A}+t\acute{B})+2\varepsilon_4\varepsilon_2 q(\varepsilon_3 t+u)B+3(2u\acute{t}+\acute{v})(\acute{A}+t\acute{B})\}\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler

$$\Delta G \;-\; \varepsilon\left\langle \Delta G, G\right\rangle G \;=0$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\{-\varepsilon_4 q^{-3}(2u\acute{t}+\acute{v})^2+\frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-2}(2u\acute{t}+\acute{v})-2\varepsilon_2(\varepsilon_3 t+u)^2+2\varepsilon_4\varepsilon_2\varepsilon_3 q^{-1}\}$$

$$+\frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}\{-2\varepsilon_4 q(\acute{A}+t\acute{B})+2\varepsilon_4\varepsilon_2 q(\varepsilon_3 t+u)B+3(2u\acute{t}+\acute{v})(\acute{A}+t\acute{B})\}-$$

$$\varepsilon\langle\{-\varepsilon_4 q^{-3}(2u\acute{t}+\acute{v})^2+\frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-2}(2u\acute{t}+\acute{v})-2\varepsilon_2(\varepsilon_3 t+u)^2+2\varepsilon_4\varepsilon_2\varepsilon_3 q^{-1}\}$$

$$+\frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}}\{-2\varepsilon_4 q(\acute{A}+t\acute{B})+2\varepsilon_4\varepsilon_2 q(\varepsilon_3 t+u)B+3(2u\acute{t}+\acute{v})(\acute{A}+t\acute{B})\},$$

$$q^{-1}(A+tB)\rangle=0$$

Sol taraftaki direkt toplam bir polinom verir, q fonksiyonunun katsayısı 0 olmak zorundadır. O halde

$$B''-\varepsilon\varepsilon_4\varepsilon_3\left\langle B'',B\right\rangle B \;=\; 0 \tag{3.16}$$

olduğundan

$$A''+(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle B'',B\rangle)A+4\varepsilon\varepsilon_3 B''-3\varepsilon\varepsilon_3 u'B'$$

$$-(\varepsilon_2 u+\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle A'',B\rangle+\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle A,B''\rangle+2\varepsilon\varepsilon_4 u\langle B,B''\rangle B=0$$

olur. Ortak paranteze alırsak

$$8\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 A'' - 6\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 u'A' + (8\varepsilon_2\varepsilon_4 u - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A'', B\rangle - 2\varepsilon\varepsilon_3 \langle A, B''\rangle - 4\varepsilon u \langle B, B''\rangle)A$$

$$+(4\varepsilon_3\varepsilon_4 v + 8\varepsilon_4 u^2)B'' - \varepsilon(12\varepsilon_4 u.u'' + 3\varepsilon_3\varepsilon_4 v')B'$$

$$-(8\varepsilon_2\varepsilon_3 u^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3 u^2 - 2\varepsilon v + 6\varepsilon\varepsilon_2 u'^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3 \langle A, A''\rangle + 4\varepsilon u \langle A'', B\rangle + 4\varepsilon u \langle A'', B\rangle$$

$$+4\varepsilon u \langle A, B''\rangle + 2\varepsilon v \langle B'', B\rangle)B = 0$$

veya

$$\varepsilon_4(4\varepsilon_3 v + 8u^2)A'' - \varepsilon\varepsilon_4(12u.u'' + 3\varepsilon_3 v')A' + (4\varepsilon_2\varepsilon_4 v + 8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 u^2 +$$

$$2\varepsilon v - 2\varepsilon\varepsilon_3 u^2 - 6\varepsilon\varepsilon_2 u'^2 - 2\varepsilon\varepsilon_3 \langle A, A''\rangle - 4\varepsilon u \langle A'', B\rangle - 4\varepsilon u \langle A, B''\rangle$$

$$-2\varepsilon v \langle B'', B\rangle)A + 8\varepsilon_4 u.vB'' - \varepsilon\varepsilon_4(6u'v + 6uv')B' - (4\varepsilon_4\varepsilon_3\varepsilon_2 u.v$$

$$+8\varepsilon_4\varepsilon_2 u^3 - 4\varepsilon\varepsilon_3 uv + 4\varepsilon u^3 + 6\varepsilon\varepsilon_2 u'v' + 4\varepsilon u \langle A, A''\rangle + 2\varepsilon v \langle A, B''\rangle)B = 0$$

ve

$$16\varepsilon_4 uvA'' - \varepsilon\varepsilon_4(12u'v + 12uv')A' + (16\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 uv + 8\varepsilon\varepsilon_3 uv$$

$$-8\varepsilon u^3 - 12\varepsilon\varepsilon_2 u'v' - 8\varepsilon u \langle A, A''\rangle - 4\varepsilon v \langle A'', B\rangle - 4\varepsilon v \langle A, B''\rangle)A$$

$$+4\varepsilon_4 v^2 B'' - 6\varepsilon\varepsilon_4 vv'' B' - (16\varepsilon_2\varepsilon_4 u^2 v - 4\varepsilon\varepsilon_3 v^2 + 4\varepsilon u^2 v$$

$$+3\varepsilon\varepsilon_2 v'^2 + 4\varepsilon v \langle A, A''\rangle)B = 0$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} &4\varepsilon_4 v^2 A'' - 6\varepsilon\varepsilon_4 vv'' A' + (4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 v^2 + 4\varepsilon\varepsilon_3 v^2 \\ &-4\varepsilon u^2 v - 3\varepsilon\varepsilon_2 v'^2 - 4\varepsilon v \langle A, A''\rangle)A - 4\varepsilon_2\varepsilon_4 uv^2 B = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. (3.16) dan

$$\langle B'', B' \rangle = 0$$

dır. Ayrıca

$$\langle B', B' \rangle = c \tag{3.18}$$

bazı c için sabit alınır ve iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle B'', B' \rangle + \langle B', B'' \rangle &= 0 \\ \langle B', B'' \rangle &= -\langle B'', B' \rangle \end{aligned}$$

$$\langle B'', B' \rangle = -c \tag{3.19}$$

olur. (3.6) dan

$$B'' = -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 cB \tag{3.20}$$

yazılabilir.

$$\langle A, B'' \rangle = \varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 cu \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlanır. Sonuç olarak (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) den A', A'' ve B' yi yok edebiliriz, çünkü

$$(v'^2 - 4\varepsilon_3 u'^2 v)A + (8u.u''^2 v - 4\varepsilon_3 u'vv')B = 0 \tag{3.22}$$

$$(4u'vv' - 2uv'^2)A + (vv'^2 - 4\varepsilon_3 u'^2 v^2)B = 0 \tag{3.23}$$

dır. İlk olarak A ve B nin bazı $s \in I$ için lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. $\alpha' - k_1\beta' = k_2\beta$ olacak şekilde k_1, k_2 sabitleri vardır. α ve β nın özelliklerini kullanarak $u = \varepsilon_3 k_1$ve $v = \varepsilon_3 k_1^2$ elde ederiz. Bu q fonksiyonunun tanımı ile tezattır. Bu nedenle A ve B, bütün s ler için lineer bağımsızdırlar. (3.22) ve (3.23) den

$$v'^2 - 4\varepsilon_3 u'^2 v = 0 \tag{3.24}$$

$$u'v(2u.u'' - \varepsilon_3 v') = 0 \quad (3.25)$$

$$2u'v.v'' - uv'^2 = 0 \quad (3.26)$$

$$v.v'^2 - 4\varepsilon_3 u'^2 v^2 = 0 \quad (3.27)$$

olduğunu biliyoruz. Farz edelimki $U = \{p \in M \mid u'(p) \neq 0\}$ açık alt kümesi boş olmasın. (3.25) den $v' = 2\varepsilon u.u'$ olduğunu verir. Ayrıca U 'da kastedilen $u^2 = \varepsilon_3 v$ dir. Buda bir tezattır. Bu durumda U da boştur. Diğer bir deyimle $u' = 0$ dır. Buna ilaveten (3.25) den biz $v' = 0$ olduğunu biliyoruz.

(3.20) dikkate alınırsa $\langle \beta'' \times \beta', \beta \rangle = 0$ dır. $\beta = k_1\beta' + k_2\beta''$ da k_1 ve k_2 fonksiyonları vardır. Bu β ve β'' nın paralel olduğunu gösterir. Ayrıca $u' = 0$ ve $v' = 0$ dan

$$\langle \alpha'', \beta \rangle = 0, \quad \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0 \quad (3.28)$$

elde ederiz. α', β, β' ve α'' vektör alanları için

$$\alpha'' = k_1\alpha' + k_2\beta' + k_3\beta$$

olacak şekilde k_1, k_2 ve k_3 fonksiyonlarını alabiliriz. Buradan (3.23) kullanarak α'' ve β ların paralel olduğunu görebiliriz. Diğer yandan M yüzeyinin H ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-\frac{3}{2}} \langle (\alpha' + t\beta') \times \beta, \alpha'' + t\beta'' \rangle$$

β'', α'' ve β birbirine paralel olduklarından H nin yok edildiği sıfır olduğu kolaylıkla ispat edilir.

Sonuç olarak E_1^3 deki minimal regle yüzeyi sınıflandırma teoremi M_+^1 tipindeki yüzeyler birinci çeşit helicoidin 2. tip spacelike yüzeyi ve M_+^3 tipindeki yüzeyler 3. çeşit helicoidlerin açık parçalarıdır. Bunun terside doğrudur.

2. DURUM :

M silindirik olmayan regle yüzeyi M^2_+ ve M^2_- olsun. Buradan M yüzeyi aşağıdaki gibi parametrelendirilir.

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

öyleki $\langle\beta,\beta\rangle = 1$, $\langle\alpha',\beta\rangle = 0$, $\langle\alpha',\alpha'\rangle = \varepsilon_1(= \mp 1)$ ve β' boş olur. M yüzeyinin G Gauss dönüşümünü kolaylıkla elde edebiliriz.

$$G = \frac{1}{\left\|(\alpha' + t\ \beta')\right\|}.(\alpha' + t\ \beta') \times \beta$$

q ve u fonksiyonlarını önceki gibi yerlerine koyarsak

$$q = \|x_s\|^2 = \varepsilon_4\langle x_s, x_s\rangle \quad , \quad u = \langle\acute{\alpha}, \beta\rangle$$

veya

$$q = \varepsilon_4(2ut + \varepsilon_1) \quad , \quad G = q^{-\frac{1}{2}}(A + tB) \tag{3.29}$$

bulunur.

$A = \acute{\alpha} \times \beta$, $B = \acute{\beta} \times \beta$ ve $q > 0$ 'ı alırız. M nin Δ laplacianı

$$\Delta = -\varepsilon_4\left[+\frac{1}{q}.\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{q^2}.\frac{\partial q}{\partial s}.\frac{\partial}{\partial s}\right] - \varepsilon_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{q}.\frac{\partial q}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\right] \tag{3.30}$$

şeklinde ifade edilir. (3.29) ve (3.30) kullanarak direkt toplam yardımı ile

$$\begin{aligned}\Delta G &= (-2u^2q^{-2} + u''tq^{-2} - 4\varepsilon_4 u'^2t^2q^{-3})G+ \\ & q^{-\frac{5}{2}}\{\varepsilon_4 Bq + 3u't(A' + tB') - \varepsilon_4(A'' + tB'')q\}\end{aligned}$$

elde ederiz. Farz edelim ki M nin Gauss dönüşümününün 1-tipindeki pointwise'ı tıpkı birinci durumdaki gibi olsun. $\Delta G - \varepsilon\langle\Delta G, G\rangle G = 0$ ve (3.31) den

$$\varepsilon u\langle B, B''\rangle B = 0$$

olur. Burada verilenleri yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon u\left\langle B,B''\right\rangle A-4\varepsilon_4u^2B''+6\varepsilon_4u.u'B'+ \\ & \varepsilon(3u'^2+2u\left\langle A'',B\right\rangle+2u\left\langle A,B''\right\rangle+\varepsilon_1\left\langle B,B''\right\rangle)B \;=\; 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Skaler çarpımın özelliklerden

$$4\varepsilon_4u^2A''-6\varepsilon_4u.u'A'-\varepsilon(3u'^2+2u\left\langle A'',B\right\rangle+2u\left\langle A,B''\right\rangle+\varepsilon_1\left\langle B,B'\right\rangle A$$

$$+4\varepsilon_1\varepsilon_4uB''-(4\varepsilon_4u^3+2\varepsilon u\left\langle A,A''\right\rangle+\varepsilon\varepsilon_1\left\langle A'',B\right\rangle+\varepsilon\varepsilon_1\left\langle A,B''\right\rangle B=0$$

veya

$$\begin{aligned} & 4\varepsilon_1\varepsilon_4A''-3\varepsilon_1\varepsilon_4u'A'-\varepsilon(2u^3+2u\left\langle A,A''\right\rangle+\varepsilon_1\left\langle A'',B\right\rangle+ \\ & \varepsilon_1\left\langle A,B''\right\rangle)A+\varepsilon_4B''-(4\varepsilon_1\varepsilon_4u^2+\varepsilon\varepsilon_1u^2+\varepsilon\varepsilon_1\left\langle A,A''\right\rangle)B=0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A''-\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_4(u^2+\left\langle A,A''\right\rangle)A-uB \;=\; 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. B nin her yerde sıfırdan farklı olduğunu görebiliriz. Eğer B bazı s noktasında sıfır olursa, β ve β' paralel olur. Buda β ve β' nın tanımı ile çelişir. Bir alt küme $U=\{p\in M \mid \left\langle B,B''\right\rangle(p)\neq 0\}$ göz önüne alalım. Eğer U boş değilse, (3.32) den U üzerinde $u=0$ elde ederiz. (3.33) den U üzerinde $\left\langle B,B''\right\rangle B=0$ olur. Bu çelişkidir çünkü U boş olmalıdır. Buradan

$$\left\langle B,B''\right\rangle B \;=\; 0 \tag{3.37}$$

olur. Sonuç olarak (3.37), (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden

$$2\varepsilon_1u.u'^2A\;-u'^2B \;=\; 0$$

olduğu için A'', B'' ve B' yi yok edebiliriz. Şimdi farzedelimki A ve B bazı $s\in I$ için lineer bağımlı olsun. k_1 ve k_2 için $\alpha'-k_1\beta'=k_2\beta'$ çekişkidir. α

ve β nın özelliklerini kullanarak $\alpha' = k_1\beta$ çelişkisini elde edebiliriz. Böylece A ve B ler bütün s için lineer bağımsızdır. (3.33) den $u' = 0$ olduğunu gösteririz. Çünkü $\langle B, B'' \rangle = 0$ ve $\langle B, B' \rangle = 0$ dır. $\langle B, B'' \rangle = \langle \beta'', \beta'' \rangle = 0$ olur. Buradan β'' lightlike veya nulldur. Eğer β'' lightlike veya null dan farklı ise k düzgün fonksiyonu için $\beta'' = k\beta'$ olur. O zaman $\beta'' = F(s)\mathbb{C}$ dır. Burada $\mathbb{C} = (c_1, c_2, c_3)$ bir sabit E_3^1 'in lightlike vektör alanıdır ve $F(s)$ pozitif düzgün fonksiyonudur. β vektör alanı $\langle \beta, \beta \rangle = 1$ olacak şekilde yoktur. Buradan β''sıfır vektörüdür. Önceki durumda, eğer α', β , β' ve α'' lerin birbirleri arasındaki ilişkiyi incelersek α'' ve β paralel olduklarını buluruz. Birinci durumdakine benzer olarak α ve β ların karakteri H ortalama eğrilik vektörünü heryerde yok ediyor. Buradan M_+^2 tipindeki yüzeyler, açık bölümleri 2. çeşit enneper yüzeyinin conjugatesi spacelike yüzeylerdir.

ANA TEOREMLER

3-boyutlu Minkowski uzayında E_1^3 de (3.2) ve (3.4) ü sağlayan koşullar için regle yüzeyi bu bölümde çalışacağız. Bir silindirik regle yüzeyin geliştirilebileceğini biliyoruz. Ayrıca Gauss eğriliği K sıfırdır. Bu yüzden ikinci temel form II dejeneredir. Bundan dolayı, silindirik olmayan regle yüzeyler bizim çalışmamız için anlamlıdır.

Teorem 3.2 :

M, 3-boyutlu Minkowski uzayında null olmayan bir dayanak eğri ile ayrılabilir olmayan regle yüzey ve, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $2a - b \neq 0$ olmak üzere $aK_{II} + bH$ sabit olsun. O halde M aşağıdaki yüzeylerin birinin açık bölümüdür.

1) Spacelike veya timelike yüzeyleri gibi 1. çeşit helicoid
2) Spacelike veya timelike yüzeyleri gibi 2. çeşit helicoid

3) Spacelike veya timelike yüzeyleri gibi 3. çeşit helicoid

4) Spacelike veya timelike yüzeyleri gibi 2. çeşit Enneper yüzeylerin conjugatesi.

İSPAT :

İki durumu ayrı ayrı ele alacağız

1.DURUM :

M, M_+^1, M_+^3 veya M_-^1 'in üç tip silindirik olmayan bir yüzeyi olsun. M için parametrizasyonu,

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

öyleki; $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1(=\pm 1)$, $\left\langle \beta', \beta' \right\rangle = \varepsilon_2(=\pm 1)$,$\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$ dır. Bu durumda α, x yüzeyinin bir striksiyon eğrisidir ve parametre (pseudo-Riemann) spiral eğrisi β nın üstünde bir yay uzunluğudur. $x_s = \alpha' + t\beta'$ ve $x_t = \beta$ şeklinde verilen doğal $\{x_s, x_s\}$ çatısına sahibiz. Yüzeyin birinci temel formu

$$\begin{aligned} E &= \langle x_s, x_s \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle + \varepsilon_2 t^2 \\ F &= \langle x_s, x_s \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle \\ G &= \langle x_t, x_t \rangle = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Daha sonra kullanmak üzere D, Q ve J düzgün fonksiyonları

$$\begin{aligned} Q &= \langle \alpha', \beta \times \beta' \rangle \neq 0 \\ J &= \langle \beta'', \beta' \times \beta' \rangle \\ D &= \sqrt{|EG - F^2|} \end{aligned}$$

şekilde tanımlanır. Ortonormal çatı $\{\beta, \beta', \beta \times \beta'\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha' &= \varepsilon_1 F\beta - \varepsilon_1\varepsilon_2 Q\beta \times \beta' \\ \beta'' &= \varepsilon_1\varepsilon_2(-\beta + J\beta \times \beta') \\ \alpha' \times \beta &= \varepsilon_2 Q\beta' \end{aligned}$$

şeklindedir. Öte yandan $EG - F^2 = -\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 t^2$ ve birim normal vektörü

$$N = \frac{1}{D(\varepsilon_2 Q\beta' - t\beta \times \beta')}$$

olur. İkinci temel formun $e,\ f$ ve g bileşenleri

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{D}(\varepsilon_1 Q(F - QJ) - Q't + jt^2) \\ f &= \frac{Q}{D} \neq 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu yüzden 3.3 eşitliği gereğince ikinci Gauss eğriliğini

$$\begin{aligned} K_{II} &= \frac{1}{f_4}(ff_t(f_s - \frac{1}{2}e_t) - f^2(-\frac{1}{2}e_{tt} + f_{st})) \\ &= \frac{1}{2Q^2D^3}(Jt^4 + \varepsilon_1 Q(F - 2QJ)t^2 + 2\varepsilon_1 Q^2Q't + Q^3(F + QJ) \end{aligned}$$

olarak buluruz. Üstelik ortalama eğrilik

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{|EG - F^2|} \\ &= \frac{1}{2D^3}(\varepsilon_1 Jt^2 - \varepsilon_1 Q't - Q(F + QJ)) \end{aligned} \tag{3.39}$$

dır. İlk önce $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ olduğunu kabül edelim. K_{II} ve H nin t ye göre

türevleri

$$\begin{aligned} (K_{II})_t &= \frac{1}{2Q^2D^5}(-\varepsilon_1 Jt^5 + Q(F + 2QJ)t^3 + 4Q^2Q't^2 \\ &\quad +\varepsilon_1 Q^3(5F - QJ)t + 2\varepsilon_1 Q^4Q') \end{aligned} \tag{3.40}$$

ve

$$H_t = \frac{1}{2D^5}(Jt^3 - 2Q't^2 - \varepsilon_1 Q(3F + QJ)t - \varepsilon_1 Q^2Q' \tag{3.41}$$

bulunur.

$aK_{II} + bH$ =sabit, $2a - b \neq 0$ kabüllenmesinden ve yukarıdaki eşitliklerden, parametre t için

$$\begin{aligned} a\varepsilon_1 J &= 0 \\ aQF + 2aQ^2J + bJQ^2 &= 0 \\ Q^2Q'(2a-b) &= 0 \\ 5\varepsilon_1 aQ^3F - \varepsilon_1 aQ^4J - 3\varepsilon_1 bQ^3F - \varepsilon_1 bQ^4J &= 0 \\ Q^4Q'(2a-b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

sistemini elde ederiz. $J = F = 0$ ve $(2a - b)Q' = 0$ dır. $2a - b \neq 0$ olduğunu kabül edelim, buradan $Q' = 0$ olur. Bu durumda yüzey minimal olur. Çünkü $EG - F^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 t^2 - \varepsilon_2 Q^2$ ve $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ dır. Bundan dolayı $\varepsilon_2 = -1$ veya $\varepsilon_2 = 1$ olduğunda yüzey spacelike veya timelike olur. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1)$ olması karakterinden dolayı imkansızdır. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)$ alalım.Yüzey M^3_+ tipinde olur. Bu yüzden 3. çeşit helicoiddir. Eğer $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, \pm 1)$ ise, M, M^1_+ veya M^1_- tipindedir. Bu yüzden yüzey, Teorem 3.1 den 1. veya 2. çeşit helicoiddir.

Daha sonra $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ kabül edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} (K_{II})_t &= \frac{1}{2Q^2D^5}(\varepsilon_1 Jt^5 - Q(F + 2QJ)t^3 - 4Q^2Q't^2 \\ &\quad + \varepsilon_1 Q^3(-5F + QJ)t - 2\varepsilon_1 Q^4Q') \end{aligned} \tag{3.43}$$

ve

$$H_t = \frac{1}{2D^5}(-Jt^3 + 2Q't^2 - \varepsilon_1 Q(3F + QJ)t + \varepsilon_1 Q^2Q' \tag{3.44}$$

bulunur. Buradan yukarıdaki tartışmada olduğu gibi, $2a - b \neq 0$ olduğunda $J = F = 0$ ve $Q' = 0$ elde ederiz. Bu yüzden yüzey minimaldir. Çünkü; $EG - F^2 = -\varepsilon_2(Q^2 - \varepsilon_1 t^2)$ ve $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ dır. Bununla birlikte $\varepsilon_2 = 1$ veya $\varepsilon_2 = -1$ e göre M bir spacelike veya timelike tır. Bu durumda $\varepsilon_1 = 1$ dir. Bu yüzden M, ε_2=± 1 e dayanarak M^1_+ veya M^1_- tipinde olur. Böylece yüzey, Teorem 3.1 e göre 1. ve 2. çeşit helicoiddir

2. DURUM :

M, M_+^2 veya M_-^2 çeşit bir silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. Yüzey M şöyle parametrize edilsin

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

öyleki

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle &= 1 \\ \langle \alpha', \beta \rangle &= 0 \\ \langle \beta', \beta' \rangle &= 0 \\ \langle \alpha', \alpha' \rangle &= \varepsilon_1 (= \pm 1) \end{aligned}$$

ve sıfırdan farklı q düzgün fonksiyonu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} S &= \langle \alpha', \beta' \rangle \\ q &= \|x_s\|^2 \\ &= \varepsilon \langle x_s, x_s \rangle \\ &= \varepsilon(\varepsilon_1 + 2St) \end{aligned}$$

olur. Burada ε, x_s nin işaretini gösterir. $\beta \times \beta' = \beta'$ olarak gösterdik. M de pseudo-Riemann metriğine göre $E = \varepsilon q$, $F = 0$ ve $G = 1$ dir. Hareketli $\{\alpha', \beta, \alpha' \times \beta\}$ çatısı için

$$R = \langle \alpha'', \alpha' \times \beta \rangle \tag{3.45}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta' &= \varepsilon S(\alpha' - \alpha' \times \beta) \\ \alpha'' &= -S\beta - \varepsilon_1 R \alpha' \times \beta \end{aligned} \tag{3.46}$$

dır. Üstelik (3.46) kullanılarak

$$\langle \beta'', \alpha' \times \beta \rangle = S' + \varepsilon_1 SR$$

$$\langle \alpha', \beta'' \rangle = S' + \varepsilon_1 SR$$

olur. Birim normal vektörü

$$N = \frac{1}{\sqrt{q}}(\alpha' \times \beta - t\beta')$$

olur. İkinci temel formun katsayıları

$$e = \frac{1}{\sqrt{g}}(R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t)$$

$$f = \frac{S}{\sqrt{g}}$$

$$g = 0$$

şeklindedir. Öte yandan ortalama eğrilik H ve ikinci Gauss eğriliği K_{II}

$$H = \frac{1}{2g^{\frac{3}{2}}}(R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t) \tag{3.46}$$

$$K_{II} = \frac{\varepsilon_1 S'}{2Sq^{\frac{3}{2}}} \tag{3.47}$$

olur. K_{II} ve H nin t ye göre türevi alınırsa

$$(K_{II})_t = \frac{-3}{2q^{\frac{5}{2}}}\varepsilon\varepsilon_1 S' \tag{3.48}$$

$$H_t = \frac{1}{2q^{\frac{5}{2}}}(\varepsilon\varepsilon_1 S' - \varepsilon SR - \varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)t) \tag{3.49}$$

bulunur. M nin (3.4) durumunu sağladığını kabul edersek, (3.48) ve (3.49) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR) &= 0 \\ 3a\varepsilon\varepsilon_1 S' - b(\varepsilon\varepsilon_1 S' - \varepsilon SR) &= 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) kullanarak $(2a-b)R=0$ elde edilir. Bu yüzden $2a-b\neq 0$ olduğunda $S'=0$ ve $R=0$ dır. Bundan dolayı (3.46) gereğince M minimaldir. Bu Teorem 3.1'e göre spacelike veya timelike yüzeyler gibi 2. çeşit Enneper yüzeyinin conjugatesidir. Bu da ispatın tamamlandığını gösterir.

HATIRLATMA

Teorem 3.2 eşitliğinin birinci durumunda, eğer $2a-b=0$ ise M yüzeyi $K_{II}=-2H$ sağlar. Üstelik eşitlikleri sağlayan bazı yüzeyler, Örnek 3.7, 3.8 ve 3.9 da gösterildiği gibi 1., 2. ve 3. çeşit canoidtir.

Teorem 3.3 :

M , 3-boyutlu Minkowski uzayda null olmayan bir dayanak eğri ile geliştirilemeyen bir regle yüzey olsun öyleki $a\neq 0$ $b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $aH+bK$ sabit olsun. Bu durumda M aşağıdaki yüzeylerin birinin açık parçasıdır.

1) Space-like veya time-like yüzeyleri gibi 1. çeşit helicoid

2) Space-like veya time-like yüzeyleri gibi 2. çeşit helicoid

3) Space-like veya time-like yüzeyleri gibi 3. çeşit helicoid

4) Space-like veya time-like yüzeyleri gibi 2. çeşit Enneper yüzeylerin conjugatesi

İSPAT :

Teoremin ispatını iki durumda inceleyeceğiz;

1. DURUM :

Teorem 3.2 de gösterildiği gibi M, üç çeşit M_+^1, M_+^3 veya M_-^1 tipinde silindirik olmayan bir yüzey olsun. M 'nin parametrizasyonu

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

kabül edelim. $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1), \langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1)$ ve $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$. Teorem 3.2 deki notasyon kullanılarak

$$K = \langle N, N \rangle \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{Q^2}{D^4} \tag{3.51}$$

ve K Gauss eğriliğinin t ye göre türevi

$$K_t = \frac{4\varepsilon_1 Q^2 t}{D^6} \tag{3.52}$$

olur. M yüzeyinin (3.5) durumunu sağladığını kabül edelim. İlk önce $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ kabül ettik. (3.5), (3.40), (3.52) den , t^8, t^6, t^4, t^2 ve t^0 katsayılarını

$$\begin{aligned}
t^8 &: \varepsilon_1 a^2 J^2 = 0 \\
t^6 &: 2a^2 QJ(3F + QJ) - 4\varepsilon_1 a^2 Q_2' + a^2 Q^2 J^2 = 0 \\
t^4 &: 3\varepsilon_1 a^2 Q^3 (3F + QJ)(F + QJ) = 0 \\
t^2 &: 3\varepsilon_1 a^2 Q^4 Q'^2 + a^2 Q^4 (3F + QJ)^2 - 64 b^2 Q^4 = 0 \\
t^0 &: a^2 Q^6 Q'^2 = 0
\end{aligned}$$

şeklinde alalım. Böylece $J = F = Q' = 0$ elde ederiz. Çünkü t'nin kuvvetlerinin katsayıları J, F, Q ve Q' den oluşmaktadır. Teorem 3.1, şunu belirtir. Ortalama eğrilik H sıfırdır. Sonra $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ alalım. Bu durumda (3.44) ve (3.52) eşitlikleri kullanarak M nin minimal olduğunu gösterebiliriz. Teorem 3.2 nin ispatından yüzey M, space-like veya time-like yüzey gibi 1., 2. ve 3. çeşit helicoidin birinin açık bir parçasıdır.

2. DURUM :

M, M_+^2 veya M_-^2 de açılılabilir regle yüzey olmasın. Bu durumda α eğrisi, spacelike veya timelikedır ve β spacelike fakat β' lightlikedır. Teorem 3.2 deki notasyonu kullanırız. Diğer taraftan Gauss eğriliği K

$$K = \frac{S^2}{q^2} \tag{3.53}$$

şeklinde olur. K Gauss eğliliğinin t ye göre türevini alırsak

$$K_t = -\frac{4\varepsilon S^3}{q^3} \tag{3.54}$$

bulunur. M nin (3.5) i sağladığını kabül edelim. (3.49) ve (3.54) den

$$\begin{aligned} 2\varepsilon a^2 S(SS' + 2\varepsilon_1 S^2 R)^2 &= 0 \\ a^2\varepsilon(SS' + 2\varepsilon S^2 R)(\varepsilon_1(SS' + 2\varepsilon_1 S^2 R) - 4S(\varepsilon_1 S' - SR)) &= 0 \\ 2a^2\varepsilon(\varepsilon_1 S' - SR)(S(\varepsilon_1 S' - SR)(S(\varepsilon_1 S' - SR) - \varepsilon_1(SS' + 2\varepsilon_1 S^2 R)) &= 0 \\ a^2\varepsilon\varepsilon_1(\varepsilon_1 S' - SR)^2 - 64b^2 S^6 &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $S' = 0$, $R = 0$ ve $b = 0$ bulunur. Bundan dolayı (3.46) dan M yüzeyi minimaldir. Bununla birlikte, M Teorem 3.1'e göre spacelike veya timelike yüzey gibi 2. çeşit Enneper yüzeyinin conjegatesidir. Bu ispatı tamamlar. Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.1 in birleşiminden şu teorem çıkar.

Teorem 3.4 :

M, 3-boyutlu Minkowski uzayında, boş olmayan dayanak eğrisi ile bir açılabilir regle yüzey olsun. Bu durumda ;

i) M, 1. çeşit Gauss dönüşümüdür.

ii) M, $aK_u + bh = sabit$, $a, b \in R - \{0\}$ eşitliğini sağlar

iii) M, $aH + bk = sabit$, $a \neq 0, b \in R$ eşitliğini sağlar

İSPAT:

Teorem 3.1 de M 'nin bir Gauss dönüşümü olduğunu gösterdik. Dolayısı ile buradan Teorem 3.4'ün 1. şartı gerçekleşmiş olur. Teorem 3.2 nin ispatını yaparken de M 'nin $aK_n + bh = sabit$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ eşitliğini sağladığını gösterdik. Buradan Teorem 3.4 ün 2. şartı sağladığını gösterebiliriz. Teorem 3.3 de M 'nin $aH + bk$ =sabit , $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ eşitliğini sağladığını ispatladık. Buradan Teorem 3.4 ün 3. şartı sağladığını buluruz.

TEOREM 3.5:

$\alpha(s) + t\beta(s)$, 3-boyutlu Minkowski uzayında boş olmayan dayanak eğrili geliştirilemeyen bir regle yüzey olsun öyleki $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $aK_n + bh$, durumu sabittir. Daha sonra şunları elde ederiz.

1) Silindirik olmayan regle yüzeyler öyleki boş olmayan bir β', aşağıdaki yüzeylerin bir parçalarıdır.

i) 1. çeşit helicoidin spacelike veya timelike yüzeyidir.

ii) 2. çeşit helicoidin spacelike veya timelike yüzeyidir.

iii) 3. çeşit helicoidin spacelike veya timelike yüzeyidir.

2) Silindirik regle yüzeylerin $\beta'(s)$ scroll, ikinci Gauss eğriliği sıfırdır.

İSPAT:

Teoremin ispatını yapmak için iki durumu ele alacağız.

1. DURUM :

Teorem 3.1 de olduğu gibi M regle yüzeyi M_+^1, M_+^3, veya M_-^1 tipindedir. M şu şekilde parametrelenmiştir.

$$x = x(s,t) \quad = \quad \alpha(s) + t\beta(s)$$

öyleki $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1)$, $\langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1)$ ve $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$ dır. Teorem 3.2 de olduğu gibi ikinci Gauss eğriliği K_{II} ve Gauss eğriliği K (3.4) ve (3.50) de olduğu gibidir. M yüzeyi (3.4) ü sağlasın. İlk önce $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ alalım, (3.40) ve (3.51) den

$$\begin{aligned} t^{12} &: \varepsilon_1 a^2 J^2 = 0 \\ t^8 &: 2\varepsilon_1 a^2 JQ^3(5F - QJ) - \varepsilon_1 a^2 Q^2(F + 2QJ)(4JQ + F) = 0 \\ t^2 &: 12\varepsilon_1 a^2 Q^8 Q'^2 + a^2 Q^8 (5F - QJ)^2 - 64b^2 Q^8 = 0 \\ t^0 &: 4a^2 Q^{10} Q'^2 = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $J = F = Q' = 0$ ve $b = 0$ olduğunu buluruz. Çünkü t nin kuvvetlerinin katsayıları; J, F, Q veya Q' dür. İkinci gauss eğriliği K_{II} ve ortalama eğrilik H (3.38) ve (3.39)'un yardımı ile sıfırdır. Bu yüzden de M minimaldir. $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ olsun, bu durumda (3.43) ve (3.54) kullanılarak M nin minimal olduğunu gösterebiliriz. Teorem 3.2'nin birinci durumuna dayanarak spacelike veya timelike yüzey gibi, M yüzeyi 1., 2. ve 3. çeşit helicoidlerin birinin açık parçasıdır.

2. DURUM :

M, M_+^2 veya M_-^2 çeşit bir silindirik olmayan regle yüzey olsun. Bu durumda, α eğrisi spacelike veya timelike eğridir ve β spacelike fakat β' lightlike dır. M, (3.5) deki durumu sağlasın (3.48) ve (3.54) den şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} 18\varepsilon a^2 S S'^2 &= 0 \\ 9\varepsilon\varepsilon_1 a^2 S'^2 - 64b^2 S^6 &= 0 \end{aligned}$$

Bundan dolayı, $S' = 0$ ve $b = 0$ dır. Sonuçta (3.46) 'dan ikinci Gauss eğrisi K_{II} sıfırdır.

TEOREM 3.6 :

M, 3-boyutlu Minkowski uzayında null scroll olsun. Bu durumda M; $K = H^2$, $K_{II} = H^{-1}$' i sağlar.

İSPAT:

$\alpha = \alpha(s)$, E_1^3 te bir lightlike eğri olsun ve $\beta = \beta(s)$, α'nın üzerinde bir lightlike vektör olsun. M null scroll yüzeyi

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

şeklinde parametrelendirilirse $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$, $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', \beta \rangle = 1$ dir. Üstelik genellemeyi bozmadan α' yı M nin null jeodeziği şeçilebilir. Sonra bütün s ler için $\langle \alpha'(s), \beta'(s) \rangle = 0$ elde ederiz. Lorentz metriği tarafından, $E = \langle \beta', \beta' \rangle t^2$, $F = 1$, $G = 0$ verilir. Birim normal vektörü N

$$N = \alpha' \times \beta + t\beta' \times \beta$$

şeklinde elde edilir. Bundan dolayı ikinci temel formun tamamlayıcısı fonksiyonlar

$$\begin{aligned} e &= \langle \alpha'' + t\beta', N \rangle \\ f &= \langle \beta', \alpha' \times \beta \rangle = Q \\ g &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu şunu ima eder. $H = Q$ ve $K = Q^2$ dir. Eğer $\langle \beta', \beta' \rangle = 0$ ise β' sıfır vektörü yada null bir vektördür. Eğer β' sıfır vektörü ise $F = Q = 0$ dan dolayı yüzey (flat) düzdür. Bu yüzden β' null vektördür ve bir p düzgün fonksiyonu için $\beta = p\beta'$ dır. Bu α ve β nın özellikleriyle çelişir. β' bir timelike vektör olamaz. Çünkü 3. bölümde açıklandı. Bu yüzden, s parametresi $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$ olacak şekilde seçilmelidir. $(\alpha', \beta, \beta') = 1$ E_1^3 de null çatı olsun. β'' vektörü $e_{tt} = 2\langle \beta'', N_t \rangle = 2\langle \beta'', \beta' \times \beta \rangle = 2Q$

$$\beta'' = -\alpha' + (\alpha', \beta'')\beta$$

şeklindedir. Bu yüzden yukarıdaki eşitliklerden ikinci Gauss eğriliği K_{II}

$$K_{II} = \frac{1}{2Q^2} e_{tt} = \frac{1}{Q}$$

olur. Bundan dolayı, $K_{II} = \dfrac{1}{H}$ null scroll alınabilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.1 Regle Yüzeylerin Sınıflandırılması ile İlgili Bazı Örnekler

Regle yüzeylerin ortalama ve ikinci Gauss eğrilikleri arasındaki ilişkiye bağlı olarak E_1^3 deki yüzeylerle ilgili bazı örneklere bakalım.

Örnek 3.1 (1. çeşit Helicoid)

$|a| > |b|$ olmak üzere a ve b sabitleri için E_1^3 de M yüzeyini

$$x(s,t) \quad = \quad (-bs, (t+a)\cos s, (t+a)\sin s)$$

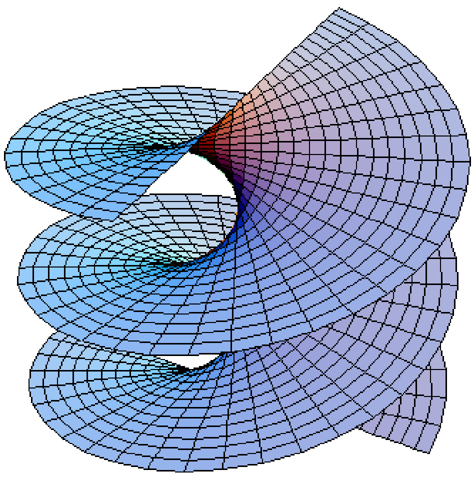
biçiminde tanımlayalım. Burada $t < \min(-a-b, -a+b)$ ve $t > \max(-a-b, -a+b)$ dir. Bu parametrelendirme E_1^3 de M_+^1 tipinde silindirik olmayan regle yüzey için tanımlıdır. Öyle ki bu yüzeye 1.çeşit helicoid denir ve bu yüzey spacelikedır. Bu durumda G, Gauss dönüşümü

$$G \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}}(t+a, b\sin s, -b\cos s)$$

biçiminde bulunur. G Gauss dönüşümünün Laplacianı ΔG

$$\Delta G \quad = \quad \frac{-2b^2}{((t+a)^2 - b^2)^2} G$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.1 Birinci çeşit helicoid

Çözüm : $x(s,t) = (-bs, (t+a)\cos s, (t+a)\sin s)$ denkleminde s ye ve t ye göre türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
x_s &= (-b, -(t+a)\sin s, (+a)\cos s \\
x_t &= (0, \cos s, \sin s)
\end{aligned}
$$

ve vektörel çarpım hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
x_s \times x_t &= (-b-(t+a)\sin s, (t+a)\cos s) \times (0, \cos s, \sin s) \\
&= ((t+a)\sin s.\sin s + (t+a)\cos s.\cos s, (t+a)\cos s.0 \\
&\quad +b\sin s, -b\cos s + (t+a)\sin s.0) \\
&= ((t+a)\sin^2 s + (t+a).\cos^2 s, b\sin s, -\cos s) \\
&= ((t+a), b\sin s, -b\cos s)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\|x_s \times x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t\rangle|} \\
&= \sqrt{\left|-(t+a)^2 + b^2\sin^2 s + b^2\cos^2 s\right|} \\
&= \sqrt{|-(t+a)^2 + b^2|} \\
&= \sqrt{|-(t+a)^2 - b^2|}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan da $t > \max(-a-b, -a+b)$ ise $t > -a+b$, $(t+a) > b$ ve $(t+a)^2 > b^2$ bulunur. Böylece G Gauss dönüşümü

$$
G = \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}}((t+a), b\sin s, -b\cos s)
$$

olarak elde edilir. k bir fonksiyon ve $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathcal{G}|}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\Delta G &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(k^{\frac{1}{2}}g^{i1}\frac{\partial}{\partial x^i} + k^{\frac{1}{2}}g^{i2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(k^{\frac{1}{2}}g^{11}\frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}}g^{12}\frac{\partial}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(k^{\frac{1}{2}}g^{21}\frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}}g^{22}\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle x_s, x_s\rangle &&= -b^2 + (t+a)^2 = (t+a)^2 - b^2 \\
g_{12} &= \langle x_s, x_t\rangle &&= \langle(-b, -(t+a)\sin s, (t+a)\cos s), (0, \cos s, \sin s)\rangle \\
& &&= -(-b.0) - (t+a)\sin s.\cos s + (t+a)\cos s.\sin s \\
& &&= 0 \\
g_{21} &= \langle x_t, x_s\rangle &&= 0 \\
g_{22} &= \langle x_t, x_t\rangle &&= \langle(0, \cos s, \sin s), (0, \cos s, \sin s)\rangle \\
& &&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+a)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}| &= \begin{vmatrix} (t+a)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t+a)^2 - b^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(t+a)^2 - b^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan $g^{11} = \dfrac{1}{(t+a)^2 - b^2}$, $\quad g^{22} = 1$, $\quad g^{12} = g^{21} = 0$ olarak bulunur.

$$\Delta \;=\; -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}.\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{t+a}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}}\frac{\partial}{\partial t} + k^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]$$

yazılabilir. Böylece

$$\Delta G \;=\; -\frac{1}{k}.\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - \frac{t+a}{k}.\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial G}{\partial s} \;=\; \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}(0, b\cos s, b\sin s)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \;=\; \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}(0, -b\sin s, b\cos s)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} \;=\; \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}(-b^2, -b(t+a)\sin s, b(t+a)\cos s$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \;=\; \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\left(3(t+a)b^2, 2b(t+a)^2\sin s + b^3.\sin s, -2b(t+a)^2\cos s - b^3\cos s\right)$$

olduğundan

$$\Delta G \;=\; \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}(0, -b\sin s, b\cos s)\right) - \frac{t+a}{k}.\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\; \left(-\frac{b^2}{k}, -\frac{-b(t+a)\sin s}{k}, \frac{b(t+\cos s}{k}\right)$$

$$-\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\left(3(t+a)^2, 2b(t+a)^2\sin s + b^3.\sin s, -2b(t+a)^2\cos s - b^3\cos s\right)$$

veya

$$\Delta G = \frac{-2b^2}{k^2}.\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}(t+a, b\sin s, -b\cos s)$$

$$= \frac{-2b^2}{\left((t+a)^2-b^2\right)^2}G$$

elde edilir.

Örnek 3.2 : (2. çeşit Helicoid)

$|b| > |a|$ olmak üzere a ve b sabitleri için E_1^3 de M yüzeyini

$$x(s,t) = ((t+a)\sinh s, (t+a)\cosh s, -bs)$$

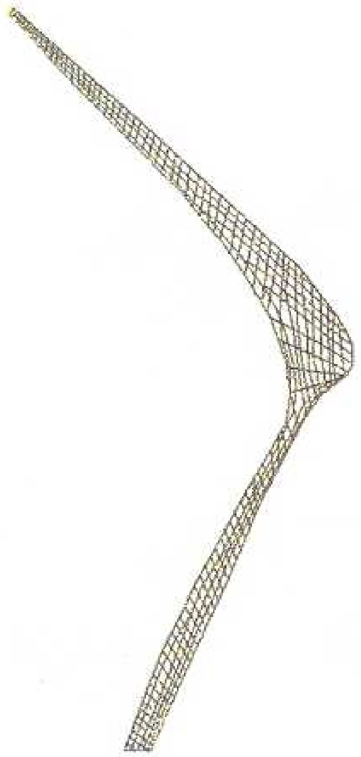
biçiminde tanımlayalım. Burada $\min(-a-b, -a+b) < t \max(-a-b, -a+b)$ dir. Bu parametrelendirme E_1^3 de M_+^1 tipindeki silindirik olmayan regle yüzey için tanımlıdır, öyleki bu yüzey 2. çeşit helicoid olarak isimlendirilir ve spacelike yüzeydir. Bu yüzeyin G Gauss dönüşümü

$$G = \frac{1}{\sqrt{b^2-(t+a)^2}}(-b\cosh s, -b\sinh s, t+a)$$

olur. Bu dönüşümün Laplacianı

$$\Delta G = \frac{-2b^2}{\left(b^2-(t+a)^2\right)^2}G$$

dir.



Şekil 3.2 İkinci çeşit helicoid

Örnek 3.3: (2. çeşit Enneper'in Conjugatesi):

Bu yüzey E_1^3 de

$$x(s,t) = \left(\frac{1}{6}s^3 + ts, \frac{1}{6}s^3 - ts, \frac{1}{2}s^2 + t\right)$$

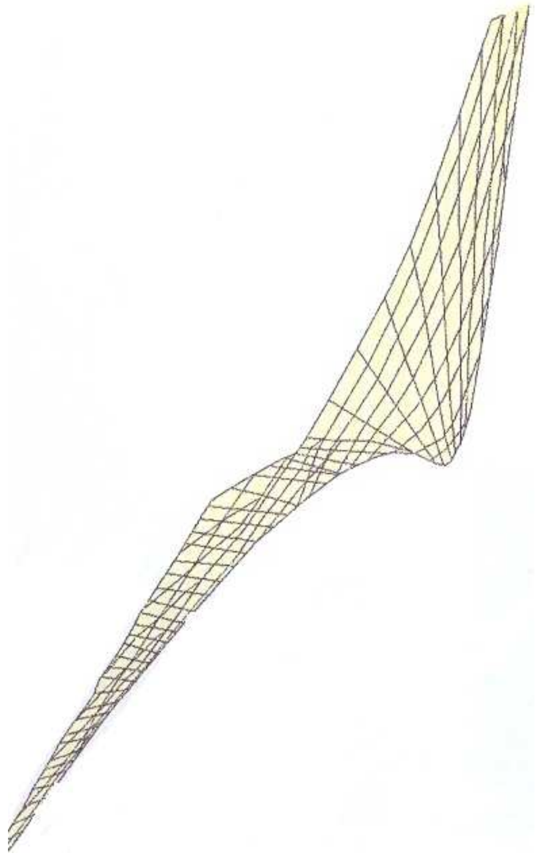
biçiminde tanımlı M_+^2 tipinde silindirik olmayan spacelike yüzeydir, öyle ki buna 2. çeşit Enneperin conjugantesi denir. Bu yüzeyin G Gauss dönüşümü

$$G = \frac{1}{\sqrt{-2t+1}}\left(-\frac{1}{2}s^3 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, s\right)$$

ve bu dönüşümün Laplacianı ise

$$\Delta G = \frac{-2b^2}{(-2t+1)^2}.G\ , \quad t < \frac{1}{2}$$

dir.



Şekil 3.3 İkinci çeşit Enneper'in Conjugatesi

Örnek 3.4: (3. çeşit Helicoid)

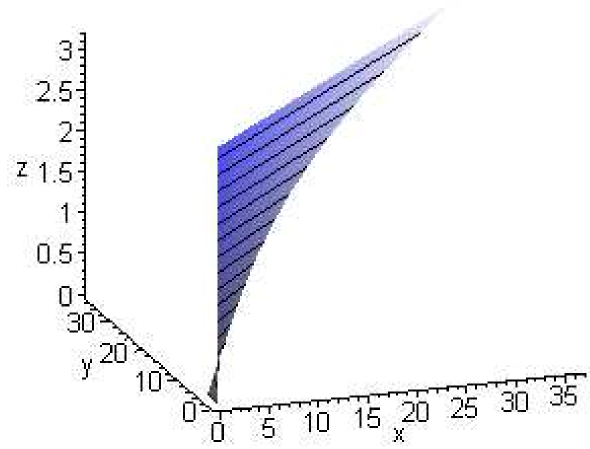
$|a| < |b|$ olmak üzere a ve b sabitleri için E_1^3 de M yüzeyini

$$x(s,t) = ((t+a)\cosh s, bs, (t+a)\sinh s)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu parametrelendirme M_+^3 tipinde silindirik olmayan regle yüzey için tanımlıdır, öyle ki bu yüzeye 3. çeşit helicoid denir ve yüzey timelike olur. Bu yüzeyin G Gauss dönüşümünün Laplacianı

$$\Delta G = \frac{-2b^2}{\left(b^2-(t+a)^2\right)^2} G$$

biçiminde bulunur.



Şekil 3.4 Üçüncü çeşit helicoid

Örnek 3.5 :

$$H^1(c)\times\mathbb{R}=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in E_1^3 \mid -x_1^2+x_2^2=\frac{1}{c}=-r^2, r\in\mathbb{R}\ \ r>0\right\}$$

hiperbolik silindiri, taban eğrisi $\alpha(s) = \left(r\cosh\frac{s}{r}, r\sinh\frac{s}{r}, 0\right)$ ve dayanak doğrultmanı $\beta(s)=(0,0,1)$ olan M_+^1 tipinde regle yüzeydir. Yani

$$x=x(s,t) \quad = \quad \alpha(s)+t\beta(s) \quad = \quad (r\cosh\frac{s}{r}, r\sinh\frac{s}{r}, t)$$

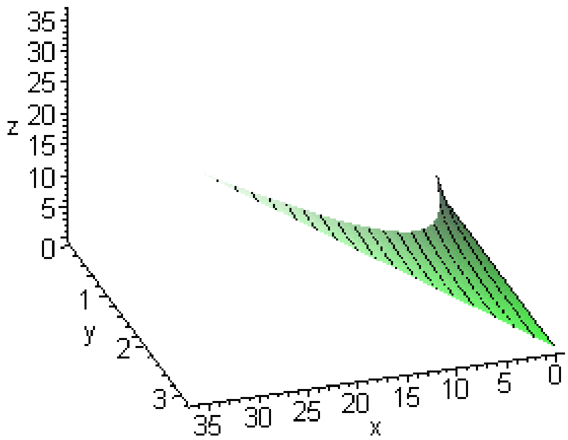
yüzeyi M_+^1 tipindedir. Gauss dönüşümü

$$G \quad = \quad \frac{\alpha'\times\beta}{\|\alpha'\times\beta\|} \quad = \quad (-\cosh\frac{s}{r} - -\sinh\frac{s}{r}, 0)$$

ve G, Gauss dönüşümünün Laplacianı

$$\Delta G \quad = \quad \frac{1}{r^2}G$$

dir.



Şekil 3.5

Çözüm :

$$\alpha'(s) = \left(r.\frac{1}{r}\sinh\frac{s}{r}, r\frac{1}{r}\cosh\frac{s}{r}, 0\right)$$

$$\alpha'(s)\times\beta(s) = \left(\sinh\frac{s}{r}, \cosh\frac{s}{r}, 0\right)\times(0,0,1)$$

$$= \left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right)$$

olur. Buradan

$$G = \frac{\alpha'\times\beta}{\|\alpha'\times\beta\|} = \frac{\left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right)}{\sqrt{\left\langle\left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right), \left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right)\right\rangle}}$$

$$= \frac{\left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right)}{\sqrt{\left(-\cosh^2\frac{s}{r} + \sinh^2\frac{s}{r} + 0\right)}}$$

$$= \left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right)$$

bulunur. k bir fonksiyon olmak üzere $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathcal{G}|}$ olsun. Bu durumda

$$\Delta = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right]$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle x_s, x_s \rangle &= \left\langle \left(-\sinh\frac{s}{r}, -\cosh\frac{s}{r}, 0 \right), \left(-\sinh\frac{s}{r}, -\cosh\frac{s}{r}, 0 \right) \right\rangle \\ &= -\sinh^2\frac{s}{r} + \cosh^2\frac{s}{r} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

$$x_t = (0,0,1) \quad \text{ve} \quad \langle x_t, x_t \rangle = \langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle = 1$$

ve

$$\langle x_s, x_t \rangle = \left\langle \left(-\sinh\frac{s}{r}, -\cosh\frac{s}{r}, 0 \right), (0,0,1) \right\rangle = 0$$

$$\langle x_s, x_t \rangle = \langle x_t, x_s \rangle = 0$$

bulunur. Bu eşitlikler kullanılırsa

$$|\mathcal{G}| = \det \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

elde edilir. O halde $k = |\mathcal{G}| = 1$ olur. Ayrıca

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

olduğundan $g^{11} = g^{22} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ elde edilir. $x^1 = s$ ve $x^2 = t$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial}{\partial x^1}.\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2}.\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece E_1^3 de G Gauss dönüşümünün Laplacianı

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \tag{3.55}$$

olur.

$$\begin{aligned}G &= \left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right) \\ \frac{\partial G}{\partial s} &= \left(-\frac{1}{r}\sinh\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\cosh\frac{s}{r}, 0\right) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} &= \left(-\frac{1}{r^2}\cosh\frac{s}{r}, -\frac{1}{r^2}\sinh\frac{s}{r}, 0\right) \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler (3.55) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta G &= -\left(-\frac{1}{r^2}\cosh\frac{s}{r}, -\frac{1}{r^2}\sinh\frac{s}{r}, 0\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\cosh\frac{s}{r}, \sinh\frac{s}{r}, 0\right) \\ &= -\frac{1}{r^2}\left(-\cosh\frac{s}{r}, -\sinh\frac{s}{r}, 0\right) \\ &= -\frac{1}{r^2}G\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle hiperbolik silindir

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{r^2} & 0 & a_{13} \\ \\ 0 & -\dfrac{1}{r^2} & a_{23} \\ \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

ile $\Delta G = AG$ şartı sağlanmış olur.

Örnek 3.6 :

Bir Lorentz dairesel

$$S_1^1(c) \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in E_1^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{c} = r^2, r \in \mathbb{R} \;\; r > 0 \right\}$$

silindiri, taban eğrisi $\alpha(s) = (r \sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r}, 0)$ ve doğrultman doğrusu $\beta(s) = (0,0,1)$ olan M_-^1 tipinde bir silindirik regle yüzeydir. Bu yüzeyin G Gauss dönüşümü

$$G = (-\cosh \frac{s}{r}, -\sinh \frac{s}{r}, 0)$$

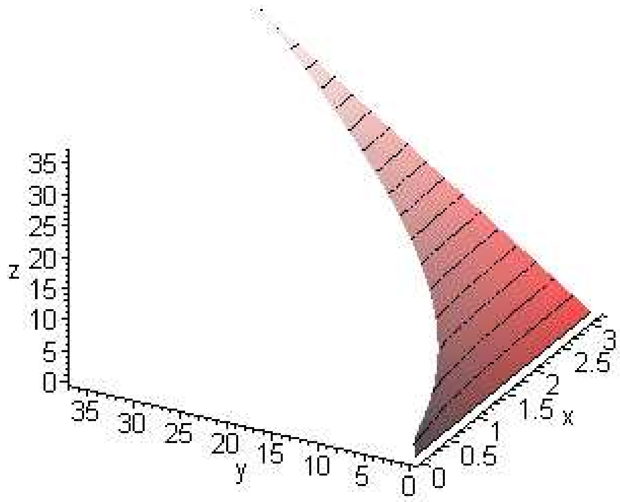
ve G Gauss dönüşümünün Laplacianı

$$\Delta G = \frac{1}{r^2} G$$

olarak ifade edilir. Bu nedenle Lorentz dairesel silindir

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r^2} & 0 & a_{13} \\ \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & a_{23} \\ \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

ile $\Delta G = AG$ şartını sağlar.



Şekil 3.6

Örnek 3.7 : (1. çeşit Canoid)

Bir $\phi(s)$ düzgün fonksiyonu için E_1^3 de şu şekilde tanımlanmış bir yüzey alalım.

$$x(s,t) = (t\sinh s, t\cosh s, \phi(s)), \quad t < |\phi'(s)|$$

E_1^3 de bu paremetrizasyon M_+^1 tipinde bir silindirik olmayan bir regle yüzey tanımlar buna birinci çeşit *canoid* denir.

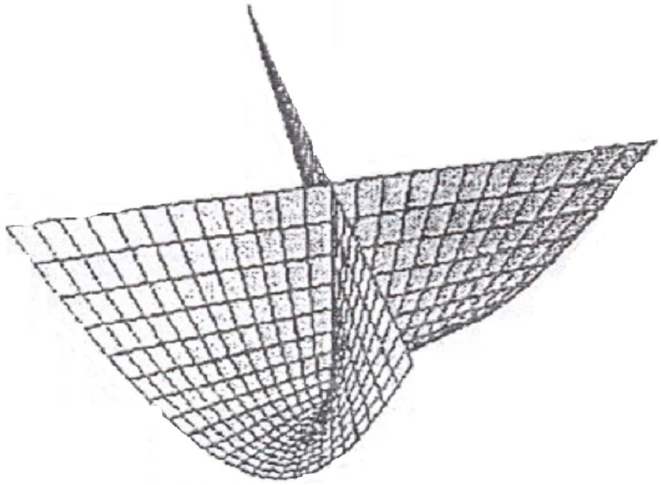
Burada ikinci Gauss eğriliği

$$K_{II} = \frac{-\phi''(s)}{(-t^2 + \phi'^2(s))^{\frac{3}{2}}} t$$

H ortalama eğrilik ise

$$H = \frac{\phi''(s)}{2(-t^2 + \phi'^2(s))^{\frac{3}{2}}} t$$

olur. Böylece birinci çeşit canoid $K_{II} = -2H$ ifadesi sağlanır.



Şekil 3.7 Birinci çeşit Canoid

Örnek 3.8 : (2. çeşit Canoid)

Bir $\phi(s)$ düzgün fonksiyonu için, E_1^3 de

$$x(s,t) = (t\cosh s, \phi(s), t\sinh s)$$

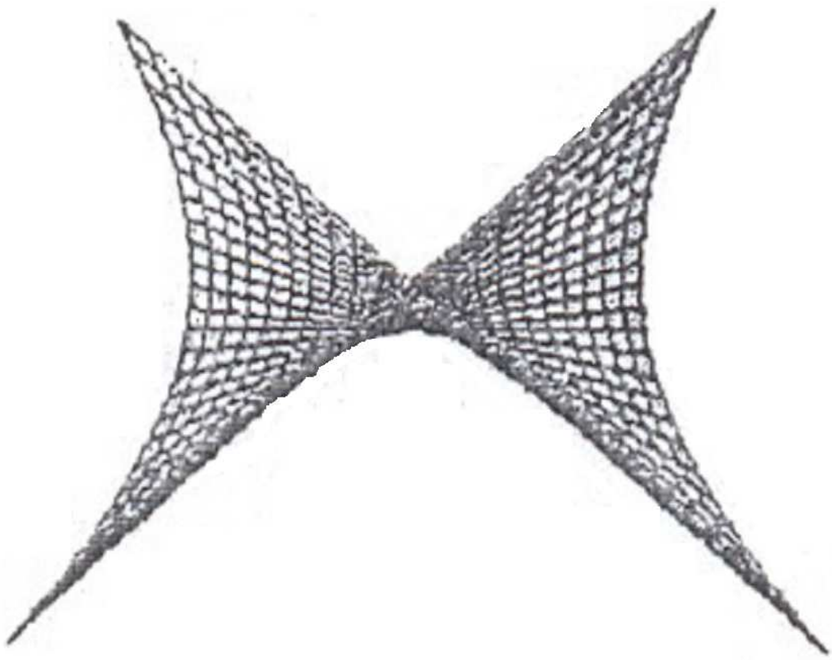
şekilde tanımlanmış bir yüzey olsun. Bu M_+^3 tipinde bir silindirik olmayan regle yüzey tanımlar buna ikinci çeşit *canoid* denir. Burada ikinci Gauss eğriliği

$$K_{II} = \frac{\phi''(s)}{(t^2+\phi'^2(s))^{\frac{3}{2}}}t$$

ve H ortalama eğrilik ise

$$H = \frac{-\phi''(s)}{2(t^2+\phi'^2(s))^{\frac{3}{2}}}t$$

olur. Böylece ikinci çeşit canoid $K_{II} = -2H$ sağlanır.



Şekil 3.8 İkinci çeşit Canoid

Örnek 3.9 (3. çeşit Canoid)

Bir $\phi(s)$ düzgün fonksiyonu için, E_1^3 de

$$x(s,t) \quad = \quad (\phi(s), t\cosh s, t\sinh s) \quad t < |\phi'(s)|$$

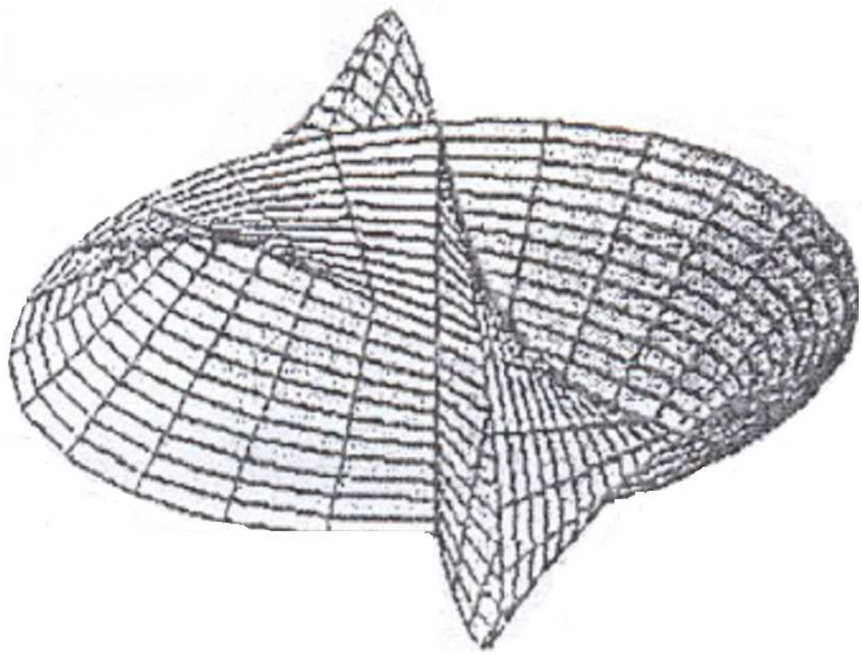
şekilde tanımlanmış bir yüzey alalım. Bu M_-^1 tipinde bir silindirik olmayan regle yüzey tanımlar, buna üçüncü çeşit *conoid* denir. Burada ikinci Gauss eğriliği

$$K_{II} \quad = \quad \frac{\phi''(s)}{(-t^2 + \phi'^2(s))^{\frac{3}{2}}} t$$

ve H ortalama eğrilik ise

$$H \quad = \quad \frac{-\phi''(s)}{-2(t^2 + \phi'^2(s))^{\frac{3}{2}}} t$$

olur. Böylece üçüncü çeşit canoid $K_{II} = -2H$ sağlanır.



Şekil 3.9 Üçüncü çeşit Canoid

KAYNAKLAR

[1] **C.Baikoussis,Th Koufogiorgos:** On the inner curvature of the second fundamental form of helicoidal surfaces, Arch. Math (1997), 169-176

[2] **Beem,J. K.,Ehrlich, P. E.**: Global Lorentzian Geometry. New York: Dekker Inc 1981.

[3] **Altın, A.:** Second Gaussian Curvature of Ruled Surfaces in 3-dimensional Minkowski Space, Hacettepe University, Science Faculty Mathematics Department

[4] **Young Ho Kim,Dae Won Yoon :**Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces, Journal of Geometry and Physics 49 (2004), 89-100.

[5] **Hacısalihoğlu, H. H.:** Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 1993.

[6] **Hacısalihoğlu, H. H.:** Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2000.

[7] **Kaya, R.:** Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, 1996.

[8] **Kobayashi O.:** Maximal Surfaces in the 3-dimensional Minkowski Space L^3. Tokyo J.Math Vol 6,No. 2. (1983).

[9] **O'Neill, B.:**Semi-Riemannian Geometry. New York-London: Academic Press. (1983).

[10] **Struik, D.J.:** Differential Geometry. Reading, MA: Addison-Wesley. (1961)

[11] **Wdestijne.,V. D. I.:** Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Proc. Congres "Geometrie differentielle et applications"Avigron, World Scientific Publishing. Singapore. (1990) 344-369.

[12] **Blaschke, W.:** Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul, 1949.

[13] **Erdoğan, Fırat:** Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi (2004)

[14] **Blair,D.E., Koufogiorgos,Th.:** Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature Mh. Math. 113,(1992) 177-181

[15] **Young Ho Kim, Dae Won Yoon:** Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss Map, Journal of Geometry and Physics 34 (2000), 192-205.

[16] **Turgut A.,**3-Boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara 1995

[17] **Turgut A.,Hacısalihoğlu H. H.:** Timelike ruled surfaces in the Mikowski 3-space. Far East. Math Sci. s(1997) no:1, 83-90.

[18] **Y. H. Kim, D.W. Yoon**: Ruled surfaces with finite type Gauss map in Minkowski spaces, Soohow J. Math.,submitted pub.