

Laminer Sınır Tabaka İçerisinde Yüzey Sürtünme Katsayısının Kama Açısına Bağlı
Olarak Değişimi

Murat Keskin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Eylül 2007

The Changes Of Skin Friction Coefficient Value By Wedge Angle In Laminar
Boundary Layer

Murat Keskin

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mechanical Engineering

September 2007

Laminer Sınır Tabaka İçerisinde Yüzey Sürtünme Katsayısının Kama Açısına Bağlı
Olarak Değişimi

Murat Keskin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmelięi Uyarınca
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Enerji-Termodinamik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof.Dr.L.Berrin Erbay

Eylül 2007

Murat KESKİN'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Laminer Sınır Tabaka İçerisinde Yüzey Sürtünme Katsayısının Kama Açısına Bağlı Olarak Değişimi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof.Dr.L.Berrin ERBAY

Üye : Prof.Dr.Ercengiz YILDIRIM

Üye : Prof.Dr.Ö.Mete KOÇKAR

Üye : Doç.Dr.Haydar ARAS

Üye : Yrd.Doç.Dr.Necati MAHİR

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

LAMİNER SINIR TABAKA İÇERİSİNDE YÜZEY SÜRTÜNME KATSAYISININ KAMA AÇISINA BAĞLI OLARAK DEĞİŞİMİ

Murat Keskin

ÖZET

Bu çalışmada laminer dış akış halinde cisimler üzerinde oluşan laminer sınır tabaka içerisinde kama açısına bağlı olarak yüzey sürtünme katsayısının değişimi teorik ve sayısal olarak incelenmiştir. Çözümler seçilen kontrol hacmi için yapılmıştır. Çözümlerin bulunması için Serbest Parametre dönüşümü, Runge-Kutta iterasyonu ve Nachtsheim-Swigert düzeltmesi sayısal çözüm teknikleri olarak kullanılmıştır. Sonuç olarak FORTRAN programlama dilinde bir program oluşturulmuş ve sayısal değerler bu programdan elde edilmiştir.

Akışkan sıkıştırılmaz ve akış laminer olarak kabul edilmiş ve düşük Reynolds sayıları için:

1. Farklı kama açılarında meydana gelen yüzey sürtünme katsayısı hesaplanmıştır.
2. Farklı kama açılarında meydana gelen yer değiştirme ve momentum kalınlığı miktarları hesaplanmıştır.
3. Farklı kama açıları için sürtünme sürüklemesi kuvveti hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Laminer Sınır Tabaka, Kama Açılı Cisim, Yüzey Sürtünme Katsayısı, Sayısal Çözüm Teknikleri

THE CHANGES OF SKIN FRICTION COEFFICIENT VALUE BY WEDGE ANGLE IN LAMINAR BOUNDARY LAYER

Murat Keskin

SUMMARY

In this paper, the changes of skin friction coefficient values by wedge angle in laminar boundary layer are studied with theoretical and numerical techniques. The solutions are done for selected control volume. For acquiring the solutions, we have been used Free Parameter Transformation, Runge-Kutta iteration method and Nachtsheim-Swigert correction numerical techniques and has been written a computer program which is constituted in FORTRAN programming language. The numerical solutions are obtained by using various parameters.

Fluid is expected incompressible and flow is expected laminar. Following solutions are carried out for low Reynolds numbers:

1. The skin friction coefficient is calculated for different wedge angles.
2. The displacement thickness and the momentum thickness are calculated for different wedge angles.
3. The frictional drag force is also calculated for different wedge angles.

Keywords: Laminar Boundary Layer, Wedge Angled Object, Skin Friction Coefficient, Numerical Solution Techniques

TEŐEKKÖR

Bu alıőmada bŸyŸk desteğini gŸrdŸęŸm, bana danıőmanlık ederek, beni yŸnlendiren ve her tŸrlŸ olanağı sağlayan danıőmanım Prof.Dr.L.Berrin Erbay'a, her zaman yanımda olan aileme ve manevi desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen sevgili eőim Deniz Keskin'e teőekkŸrlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Akışkanın Tanımı	2
1.2. Akış Nitelikleri ve Tipleri	5
1.3. Sistem ve Kontrol Hacmi Kavramları	7
2. SINIR TABAKA KAVRAMI	8
2.1. Giriş	8
2.2. Sınır Tabaka Kalınlığı	14
2.3. Yer Değiştirme Kalınlığı	15
2.4. Momentum Kalınlığı	16
3. KARTEZYEN KOORDİNATLARDA DAİMİ, İKİ BOYUTLU LAMİNER AKIŞTA NEWTONSAL AKIŞKANA AİT SINIR TABAKA KORUNUM DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI	17
3.1. Kütle Korunum Denkleminin Çıkartılması	17
3.2. Momentumun Korunumu Denkleminin Çıkartılması	19
4. SÜRÜKLEME KUVVETİ	24

İÇİNDEKİLER (devam)

5. LAMİNER SINIR TABAKA KAVRAMI	27
5.1. Blasius Çözümü	27
5.2. Benzerlik Metodu Kullanılarak Düz Levha Üzerinde Oluşan Laminer Sınır Tabakanın İncelemesi	31
5.3. Kama Üzerinde Laminer Sınır Tabaka İncelemesi	34
6. OLUŞTURULAN LAMİNER SINIR TABAKA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN SAYISAL ÇÖZÜM TEKNİKLERİ	38
6.1. Sayısal Analize Giriş	38
6.2. Benzerlik Metodu İle Falkner-Skan Denkleminin Elde Edilmesi	39
6.3. Runge-Kutta İterasyonu	46
6.4. Nachtsheim-Swigert İterasyon Metodu	52
7. KAMA ÜZERİNDE OLUŞTURULAN LAMİNER SINIR TABAKA DENKLEMLERİNİN SAYISAL YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ VE SONUÇLAR	55
7.1. FORTRAN Programının Oluşturulması	55
7.2. Program Sonuçlarının Doğrulanması ve Çözümler	58
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	67
9. KAYNAKLAR DİZİNİ	69

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1.1 Akışkanın sabit kayma kuvveti etkisi altında davranışı	3
2.1.1 Düzgün viskoz bir akışın düz levha üzerinden geçirilmesi sonucu oluşan akış karakterleri (a) $Re = 0.1$, (b) $Re = 10$, (c) $Re = 10^5$	9
2.1.2 Sınır tabakanın zamana bağlı gelişimi (a) $t = 0$ anı, (b) $t = 0 + \Delta t$ anı, (c) yeterli zaman sonra	11
2.1.3 Sınır tabaka içerisinde hız dağılımı	13
2.1.4 Sınır tabaka içinde akışkan parçacıklarının hareketleri	14
2.1.5 Sınır tabaka kalınlığının ve yüzey kayma gerilmesinin Reynolds sayısına bağlı değişimi	14
2.3.1 Yer değiştirme kalınlığı	15
2.3.2 (a) Sınır tabaka ve (b) yer değiştirme kalınlığı	16
3.1.1 Düz bir levha üzerinde sınır tabaka içinde kartezyen koordinatlarda seçilen iki boyutlu kontrol hacmi	18
3.2.1 İki boyutlu akışta sınır tabaka içinde kontrol hacmi üzerine x ve y yönünde etkiyen kuvvetler	20
4.1 Cisim üzerinde aerodinamik olarak meydana gelen bileşke kuvvet	24
4.2 Akışa bağlı eksen takımında kuvvetler	25
5.3.1 Kama üzerinden laminer akış ve kama açısı	37
7.1.1 Akış şeması	56
7.2.1 Yüzey sürtünme katsayısının kama açısına bağlı olarak değişimi	62
7.2.2 Farklı Reynolds sayıları ve kama açıları için yüzey sürtünme katsayısının değişimi	63
7.2.3 u ve v hızlarının laminer sınır tabaka içerisindeki gelişimi	64
7.2.4 Yer değiştirme kalınlığı parametresinin β açısına göre değişimi	65
7.2.5 Momentum kalınlığı parametresinin β açısına göre değişimi	66

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>		<u>Sayfa</u>
5.1.1	Düz levha momentum integral çözümü sonuçları	30
7.2.1	Oluşturulan programın sonuçlarının karşılaştırılması	59
7.2.2	$\beta = 0$, $U = 1.5 \text{ m/s}$, ve $Re = 10^5$ için oluşturulan FORTRAN programının çıktısı	60
7.2.3	Falkner-Skan denkleminin sonuçları	62

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
A	Levha ile blok arasındaki temas yüzeyi (m^2)
b	Birim genişlik (m)
C	Sabit herhangi bir sayı
C_1	Sabit herhangi bir sayı
C_2	Sabit herhangi bir sayı
C_D	Aerodinamik sürüklenme kuvveti katsayısı
C_{Df}	Aerodinamik sürtünme sürüklenme kuvvetini katsayısı
C_{DP}	Aerodinamik basınç sürüklenme kuvvetini katsayısı
C_f	Yüzey sürtünme katsayısı
D	Aerodinamik sürüklenme kuvveti (N)
D_f	Aerodinamik sürtünme sürüklenme kuvvetini (N)
D_p	Aerodinamik basınç sürüklenme kuvvetini (N)
D/Dt	Maddesel türev
e	Sabit herhangi bir sayı
$f_0(x)$	x 'e bağlı keyfi bir fonksiyon
$f_1(x)$	x 'e bağlı keyfi bir fonksiyon
F_1, F_2, F_3	Birinci dereceden diferansiyel denklemler
F	Uygulanan kayma kuvveti (N)
$g(x)$	x 'e bağlı keyfi bir fonksiyon
$g(Y)$	Y 'ye bağlı boyutsuz bir fonksiyon
k_1, k_2, \dots, k_n	Δx artımı sonucu oluşan değerler
l	Karakteristik uzunluk (m)
L	Aerodinamik kaldırma kuvveti (N)
m	Toplam kütle (kg)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\dot{m}	Kontrol hacmine giren ve çıkan kütle miktarları (kg/s)
M_{cv}	Kontrol hacmi içinde bulunan kütle miktarı (kg)
n	Seçilen yön
P	Basınç (Pa)
p, q	Taylor serisi açılımı ile oluşan terimler
Re	Reynolds sayısı
t	Zaman (s)
T	Sıcaklık ($^{\circ}C$)
U	Serbest akım hızı (m/s)
u, v, w	x, y, z koordinat takımı hız bileşenleri (m/s)
W_1, W_2, \dots, W_n	n 'inci derece Taylor serisi açılımının y_i için tekrarlı formülü eşleştirme terimleri
x_1, \dots, x_n, y	Bağımsız değişkenler
Y	Boyutsuz koordinat değişkeni
Y_1, Y_2, Y_3	Bağımsız değişkenler
α	Açısal şekil değiştirme hızı
β	Kama açısı
δ	Sınır tabaka kalınlığı (m)
δ^*	Yer değiştirme kalınlığı (m)
∇	Diverjans operatörü
∂s	Herhangi bir doğrultudaki yer değiştirme miktarı (m)
η	Dönüşüm fonksiyonu serbest parametresi
$F(\eta)$	Boyutsuz akım fonksiyonu
Θ	Momentum kalınlığı (m)
μ	Dinamik viskozite (Ns/m^2)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
ν	Kinematik viskozite (m^2/s)
ρ	Yoğunluk (kg/m^3)
τ	Ortalama kayma gerilmesi (N/m^2)
τ_w	Yüzey kayma gerilmesi (N/m^2)
Φ	Bağımlı değişken
ϕ	Bağımlı değişken
ψ	Akım fonksiyonu

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
et al.	Ve diğerleri
kg	Kilogram
m	Metre
N	Newton
Pa	Pascal
s	Saniye
vb.	Ve benzerleri
vd.	Ve diğerleri

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada düz ve kama açılı levhalar üzerinde düşük Reynolds sayılarında meydana gelen laminer sınır tabaka gelişimi hakkında bilgi verilmektedir. Verilen bilgiler ışığında düz levha ve kama açılı bir cisim üzerinde meydana gelen laminer sınır tabaka içerisinde yüzey sürtünme katsayısının kama açısına bağlı olarak değişimi teorik ve nümerik olarak incelenmiştir. Çözüm için sayısal yöntemler kullanılmış ve laminer sınır tabaka denklemleri kama açılı bir cisim için özelleştirilerek çözüm yapılmıştır. Kama açılı bir cisim üzerinde oluşan laminer sınır tabaka denklemlerinin nümerik çözümlerinin yapılabilmesi için FORTRAN programlama dilinde bir program yazılmıştır. Bu programın ürettiği sonuçların doğruluğunun kontrolü için literatürden ve denklemlerin analitik çözümlerinden faydalanılmıştır.

Literatürde düz ve kama açılı levhalar üzerinde düşük Reynolds sayılarında meydana gelen laminer sınır tabaka gelişimi analizleri oldukça yaygındır.

Weyburne (2006) tarafından yapılan çalışmada akış esnasında meydana gelen sınır tabakanın matematiksel tanımı yapılmıştır. Katı yüzeye komşu bölgelerdeki akışkanın hareketlerinden, sınır tabaka kalınlığından ve ısı ve hız sınır tabaka kavramlarından bahsedilmektedir.

Cossali (2005) tarafından yapılan çalışmada yarı sonsuz bir düz levha üzerinde oluşan enerji ve momentum sınır tabaka denklemlerinin kuvvet-kuralı kullanılarak çözümleri yapılmıştır.

Kuo (2005) tarafından yapılan çalışmada kama açılı cisim üzerinde sınır tabaka gelişimi incelenmiş ve mevcut kesin çözüme alternatif bir çözüm metodu denenmiştir. Kesin çözüm ile yapılan çözüm sonuçları karşılaştırılmıştır.

Wahidi, et al. (2005) tarafından yapılan çalışmada düz levha üzerinde açılan farklı karesel yarıkların türbülanslı akışta yüzey sürtünme katsayısına olan etkisi incelenmiştir. Deneysel ve analitik sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Aydın ve Kaya (2005) tarafından yapılan çalışmada düz plaka yüzeyinden akışkan emme veya yüzeye akışkan üfleme durumunda laminer sınır tabakada meydana

gelen değişimler incelenmiştir. Çalışmada öncelikle matematiksel bağıntılar elde edilmiş, daha sonra bu bağıntılar benzerlik ve sayısal çözüm teknikleri ayrı ayrı kullanılarak çözülmüş ve yüzey sürtünme katsayısı ve Prandtl sayısı gibi çeşitli parametreler üzerinden karşılaştırmalar yapılmıştır.

DeGraaf, et al. (1999) tarafından yapılan çalışmada Reynolds sayısının düz levha üzerinde oluşan sınır tabakaya etkisi deneysel ve nümerik olarak incelenmiştir. Çeşitli Reynolds sayıları için çözümler tekrarlanmış ve düşük Reynolds sayılarında yüksek Reynolds sayılarına oranla viskozitenin etkisinden dolayı çözümlerde ki farkların daha fazla olduğu görülmüştür.

Bölüm 1’de, temel akışkanlar mekaniği kavramları olan akışkanın tanımından, akış nitelikleri ve tiplerinden, Newtonsal akışkan ve viskozite kavramlarından, sistem ve kontrol hacmi kavramlarından bahsedilmektedir. Sınır tabaka oluşumundan ve sınır tabaka ile ilgili kavramlardan Bölüm 2’de bahsedilmektedir. Bölüm 3’te ise kartezyen koordinatlarda daimi, iki boyutlu laminer akışta Newtonsal akışkana ait sınır tabaka korunum denklemlerinin oluşturulmasından bahsedilmektedir. Bölüm 4’te sürüklenme kuvveti ve sınır tabakasına etkisinden bahsedilmektedir. Laminer sınır tabaka denklemlerinin düz levha ve kama açılı cisim üzerine özelleştirilen hesaplanma yöntemleri Bölüm 5’te anlatılmaktadır. Bölüm 6’da ise oluşturulan laminer sınır tabaka denklemlerinin çözümünde kullanılan sayısal çözüm teknikleri anlatılmaktadır. Bölüm 7’de ise kama üzerinde oluşturulan laminer sınır tabaka denklemlerinin sayısal çözümü uygulaması ve sonuçlardan bahsedilmektedir. Sonuçlar ve öneriler ise Bölüm 8’de açıklanmaktadır.

1.1. Akışkanın Tanımı

Akışkan, şiddeti ne kadar küçük olursa olsun, kayma gerilmesi (etkidiği yüzeye teğetsel olan gerilme) etkisi altında sürekli olarak şekil değiştirme özelliğine sahip olan maddedir (Ünal, 1988).

Maddenin fiziksel hallerinden olan sıvı ve gazlar akışkan sınıfına girer. Maddenin diğer hali katı ile akışkan arasındaki fark, akışkanın yukarıdaki verilen tanımı

göz önüne alındığında açık olarak ortaya çıkar. Katı, kayma gerilmesi uygulandığında şekil değiştirebilir, ancak bu sürekli bir şekil değiştirme değildir.

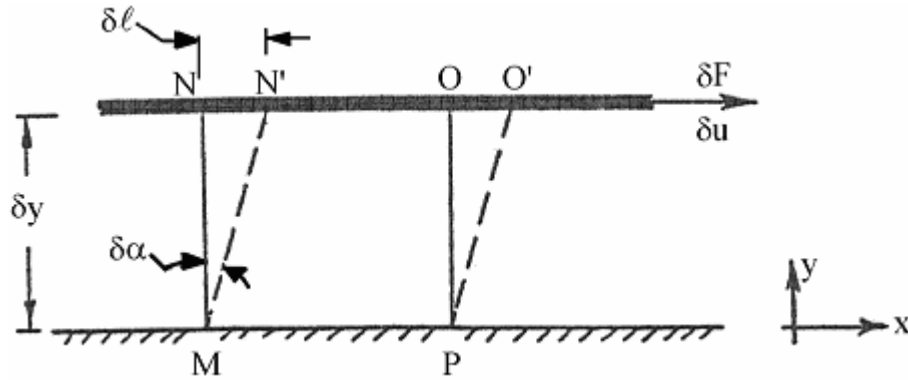
Levhalar arasında akışkan olması halini biraz derinlemesine incelemek amacı ile Şekil 1.1.1'deki durumu göz önüne alalım. Uç etkilere imkân vermemek amacı ile sonsuz büyüklükte seçilen bu iki paralel levhadan üstteki δF kuvveti etkisi altında δu sabit hızı ile hareket ediyor olsun. Bu durumda akışkan elemanına etki eden kayma gerilmesi,

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1.1.1)$$

olacaktır. Burada, δA akışkanla temas halindeki levha alanıdır. δt zaman sonra akışkan elemanı bloğu $MNOP$ durumundan $MN'O'P$ durumuna gelecektir. Bu durumda, akışkan elemanının açısal şekil değiştirme hızı (NMP açısının azalma hızı),

$$\tau = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.1.2)$$

ile ifade edilir.



Şekil 1.1.1 Akışkanın sabit kayma kuvveti etkisi altında davranışı.

Eğer, kayma gerilmesi ve açısal şekil değiştirme hızı arasında $\tau \propto \frac{d\alpha}{dt}$ gibi sabit bir oran varsa akışkan Newtonsal akışkan olarak isimlendirilir (Fox and McDonald, 1994).

$\tau \propto \frac{d\alpha}{dt}$ ifadesini kolaylıkla ölçülebilir bir büyüklük olan hız cinsinden yazmak

için, tekrar Şekil 1.1.1'den yararlanabiliriz. N ve N' arasındaki uzaklık δl olduğuna göre,

$$\delta l = \delta u \cdot \delta t \quad (1.1.3)$$

ve küçük açılar için geçerli olan benzerlik bağıntılarından yararlanarak,

$$\delta l = \delta y \cdot \delta \alpha \quad (1.1.4)$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadeden hareketle,

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta y} \quad (1.1.5)$$

elde edilir. Dolayısı ile Newtonsal akışkan olma hali için,

$$\tau \propto \frac{d\alpha}{dt} \equiv \tau \propto \frac{du}{dy} \quad (1.1.6)$$

ifadesini yazabiliriz (Fox and McDonald, 1994).

$\tau \propto \frac{du}{dy}$ ifadesindeki orantı sabiti ise mutlak veya dinamik viskozite adını alır.

μ ile sembolize edilir. Dolayısı ile Newtonsal bir akışkan için,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1.7)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik “Newton Viskozite Yasası” olarak adlandırılır (Von Karman, 1957). Tek doğrultulu akış (hız vektörünün sadece tek bir bileşeni olması ve bu bileşenin ancak doğrultusuna dik olan doğrultuda değişebilir olması hali) için geçerli olan haliyle yazılmış Newton Viskozite Yasası demek daha doğru bir söylem olacaktır.

Viskozite, akışkanın kayma kuvvetine karşı direnç oluşturmasını sağlayan özelliğidir. Nitekim Newton Viskozite Yasası, belirli bir açı değişimi hızı için, viskoz gerilmenin viskozite ile doğru orantılı olduğunu ifade eder.

Bir akışkanın viskozitesi, kohezyon kuvvetine ve moleküler seviyede momentum alışveriş hızına bağlıdır. Kohezyon kuvveti, molekülleri bir arada tutan kuvvet olarak tanımlanmaktadır.

Sıvılar, gazlara göre çok daha sık aralıklı bir moleküler yapıya sahip olduklarından daha yüksek bir kohezyon kuvvetine sahiptirler. Sıvı halde kohezyon, viskozite etkisini yaratmada birincil öneme sahiptir. Kohezyon sıcaklıkla azaldığından,

viskozite de azalır. Diğer taraftan, gaz halinde kohezyon kuvveti çok zayıftır ve viskozite etkisi moleküler momentumun değişimi ile ortaya çıkmaktadır.

1.2. Akış Nitelikleri ve Tipleri

Akış; iç, dış / laminer, türbülanslı / gerçek, ideal / tersinir, tersinmez / daimi, daimi olmayan / üniform, üniform olmayan / çevrili, çevrisiz gibi birçok şekilde sınıflandırılabilir.

İç akış, akışkanın sınırları belirli bir katı cismin içerisinden akması sonucu oluşan akıştır. Birçok ısıtma, soğutma, ısı alışverişi sistemlerinde yaygın olarak kullanılır. İç akış durumunda da sınır tabaka, Reynolds sayısı, vb. akış kavramları mevcuttur.

Dış akış, akışkanın katı bir cisim üzerine yönlendirilmesi veya durağan akışkanın içerisinden katı bir cismin geçirilmesi sonucu oluşan akış şeklidir. Uçakların uçması, denizaltının deniz altında hareketi bu tür akış tarzına örnektir. Dış akışta katı cismin geometrisi akış koşullarının belirlenmesi ve yönetimi açısından çok büyük önem taşımaktadır.

Laminer akışta, akışkan parçacıkları laminer veya katmanlar içinde yumuşak hatlı yörüngeler üzerinde hareket ederler. Laminer akış Newton Viskozite Yasası'na veya bu yasanın üç boyuta uyarlanmış haline uygun olarak gerçekleşir. Laminer akışta viskozite, türbülanslı hale geçiş eğilimlerini azaltıcı, sönümlendirici yönde etki gösterir. Laminer akış düşük viskozite, yüksek hız ve geniş akış alanı etkilerinin birlikte yer aldığı durumlarda kararsızlık gösterir ve türbülanslı bir akış haline geçer.

Türbülanslı akış, mühendislik uygulamalarında en çok karşılaşılan akış halidir. Bu tür akış halinde, akışkan parçacıkları düzensiz yörüngeler üzerinde hareket ederler. Bu sırada, molekül seviyesindeki momentum değişimine benzer olarak ancak çok daha büyük ölçekte parçacık seviyesinde momentum alışverişi yer alır. Akışkan parçacığı birkaç bin molekülden oluşmuş olabileceği gibi binlerce metreküp büyüklükte de olabilir. Akışın, laminer veya türbülanslı olabileceği bir durumda, türbülanslı akış akışkan içinde laminer haldekine göre çok daha büyük kayma gerilmeleri oluşturur ve dolayısı ile daha yüksek dereceden kayba veya tersinmezliğe neden olur.

Adyabatik akış, akışkana veya akışkandan dışarıya ısı geçişinin yer almadığı akış halidir. Tersinir adyabatik akış ise izentropik akış adını alır. Ancak izentropik yani sabit entropili akış, uygun miktarda ısı geçişi sağlanarak tersinmez bir akışta da gerçekleştirilebilir.

Daimi akış, akış alanı içindeki her bir noktada şartların zamanla değişmemesi halini ifade eder. Örneğin, belirli bir noktada $+x$ yönünde hız 3 m/s ise o yönde sürekli olarak aynı olacaktır. Bu durum,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.2.1)$$

olarak ifade edilir. Benzer olarak, daimi akışta yoğunluk, ρ , basınç, P , ve sıcaklık, T , de zamanla değişmeyecektir. Yani,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \frac{\partial P}{\partial t} = 0; \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.2.2)$$

ifadeleri benzer şekilde yazılabilir. Türbülanslı akışta, parçacıkların düzensiz hareketleri nedeni ile akış alanı içindeki her noktada çalkantılara rastlanılacaktır. Dolayısı ile daimi akış tanımı bu çalkantılarda göz önüne alınarak genelleştirilmelidir. Türbülanslı akışta hız zamanla değişmektedir. Bununla birlikte anlık ortalama hız zamanla değişmiyorsa akış daimidir denir. Aynı olay yoğunluk, basınç, sıcaklık, vb. içinde geçerlidir.

Herhangi bir noktadaki şartların zamanla değişmesi halinde akış, daimi olmayan akış adını alır. Bu $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ olarak ifade edilir. Sabit debide pompalanan su daimi, değişken debide pompalanan su ise daimi olmayan akışa örnektir.

Üniform akış, hız vektörünün yani hızın şiddeti ve yönünün akış alanı içinde her noktada, herhangi bir t anında, aynı olması halidir. Yani, herhangi bir t anında

$\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ 'dır. Burada ∂s , herhangi bir doğrultudaki yer değiştirmeyi ifade eder. Bu denklem, herhangi bir t anında (t sabit) hız vektöründe noktadan noktaya fark olmadığını ifade eder. Fakat belirli bir noktadaki hızın zamanla değişip değişmediği konusunda bir şey söylemez.

Herhangi bir t anında, hız vektörünün konumdan konuma değişim gösterdiği durum üniform olmayan akış adını alır. Yani, herhangi bir t anında $\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \neq 0$ 'dır.

Tek boyutlu akış, akış doğrultusuna dik doğrultuda hız, basınç, vb. büyüklüklerdeki değişimlerin ihmal edildiği akıştır. Bu durumda, kesit içindeki şartlar hız, yoğunluk ve diğer özelliklerin ortalama değerleri cinsinden ifade edilir.

İki boyutlu akış halinde, tüm akışkan parçacıkları paralel düzlemler içinde benzer yörüngeler üzerinde hareket ederler. Dolayısı ile akışın yer aldığı düzleme dik doğrultuda değişiklik yoktur. Bu düzlemsel hareket adını alır.

Üç boyutlu akış, en genel akış halidir ve birbirlerine dik olan u, v, w hız bileşenleri en genel halde x, y, z koordinat takımının yani konumun ve zamanın fonksiyonudur. Bu durumda analiz yöntemleri genelde matematiksel olarak karmaşıktır ve ancak basit geometriler için çözüme ulaşılabilmektedir.

1.3. Sistem ve Kontrol Hacmi Kavramları

Termodinamikte ve mekanikte olduğu gibi, temel yasaları ne gibi bir sistem için göz önüne alacağımızı başlangıçta ifade etmek gereklidir. Bu amaçla, sistem ve kontrol hacmi kavramlarından yararlanır.

Sabit bir kütleyle sahip akışkan parçacığına sistem adı verilir (Welty, 1978). Sistem sınırları, sistemi çevresinden ayırır. Bu sınırlar hareketli olabilir ancak sınırdan kütle geçişi olamaz. Sistem sonsuz küçük miktarda kütle veya büyük sonlu miktarda akışkan, katı malzeme içerebilir.

Mekanik problemlerinde akılcı olan sistem yaklaşımını kullanmaktır. Çünkü rijit bir cisimle uğraşmaktadır. Ancak akışkanlar mekaniğinde, normal olarak dikkati sabit kütleyle sahip belirli bir elemana odaklamak zordur. Bunun yerine, dikkat akışın yer aldığı uzayda keyfi bir hacme çevrilir. Yani, "Kontrol Hacmi Yaklaşımı" kullanılır. Kontrol hacmi, akışın yer aldığı uzayda keyfi bir hacimdir (Kakaç, 1982). Kontrol hacmi, kontrol yüzeyi ile sınırlanır. Kontrol yüzeyleri gerçek veya düşünsel, hareketli veya hareketsiz olabilir.

BÖLÜM 2

SINIR TABAKA KAVRAMI

Bu çalışmada kama açılı bir cisim üzerinde meydana gelen laminer sınır tabaka gelişimi incelendiğinden dolayı sınır tabakanın nasıl oluştuğu ve sınır tabakaya bağlı kavramların neler olduğunun açıklanması gerekmektedir. Bu amaçla bu bölüm oluşturulmuş ve sınır tabaka kavramı incelenmiştir.

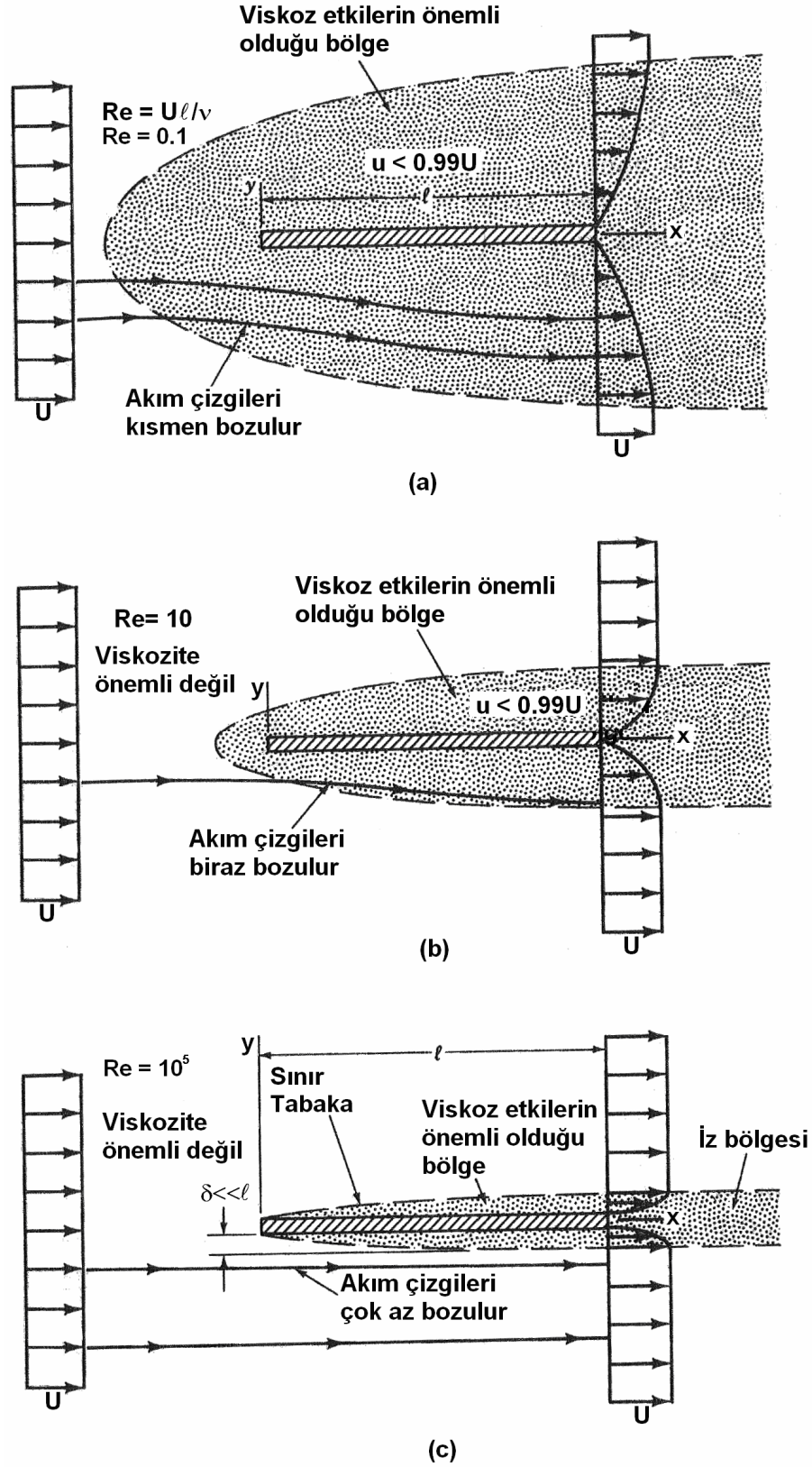
2.1. Giriş

Dış akış, akışkanlar mekaniğinin en büyük inceleme konularından birisidir. Akış alanının karakteri, üzerine etkidiği cismin geometrik yapısına bağlıdır. Örneğin küre veya silindir gibi basit geometrilerin üzerinden geçirilen akışın incelemesi, daha karmaşık cisimlerin, örneğin uçaklar veya ağaçlar, üzerinden geçen akışın incelenmesinden daha kolaydır. Dış akış şartlarının belirlenmesinde en önemli parametre Reynolds sayısıdır. Reynolds sayısı,

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} = \frac{U l}{\nu} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada U , karakteristik hızı, l , karakteristik uzunluğu ifade etmektedir. Reynolds sayısı verilen eşitlikten de anlaşılacağı üzere ortam yoğunluğuna, akış hızına, mutlak viskoziteye ve karakteristik uzunluğa bağlıdır.

l uzunluğunda üç düz levha üzerinden Reynolds sayısı 0.1, 10 ve 10^5 olan akışlar geçirelim. Eğer Reynolds sayısı küçükse (Şekil 2.1.1a), viskoz etkiler biraz daha kuvvetli olmakta ve serbest akımı levhanın çok önünde, üstünde, altında ve arkasında etkilemektedir. Bu etkileme yerel hızın serbest akım hızından %1'den fazla sapma gösterdiği yere kadar devam eder. Buna sınır tabaka kalınlığı denir (Munson, et al., 1990). Bu kavram ileriki bölümlerde açıklanacaktır. Düşük Reynolds sayılarında viskoz etki, cismin her yönünden ve cisimden uzak noktalarda bile etkilidir.



Şekil 2.1.1 Düzgün viskoz bir akışın düz levha üzerinden geçirilmesi sonucu oluşan akış karakterleri (a) $Re = 0.1$, (b) $Re = 10$, (c) $Re = 10^5$ (Munson, 1990).

Reynolds sayısı artırılırsa (Şekil 2.1.1b), viskoz etki alanı her yönden daralma gösterir. Sadece cismin arka bölgesinde bir değişiklik meydana gelmez. Cismin önündeki, üstündeki ve altındaki bölgelerin viskoz etkilerden dolayı etkilenme mesafeleri de azalır. Serbest akım çizgileri de $Re = 0.1$ 'deki kadar sapma göstermezler.

Reynolds sayısı çok fazla artırılırsa (Şekil 2.1.1c), viskoz etkiler levhaya çok yakın bölgeler ve iz bölgesi haricinde ihmal edilebilir boyuta iner ve akış atalet etkiler tarafından yönlendirilmeye başlanır. Fakat akışkanın viskozitesi yüzey sınır şartı gereği hiçbir zaman sıfır olmaz. Sınır tabaka kalınlığı da levhanın uzunluğunun yanında çok küçük kalır. Ayrıca sınır tabaka, cismin burun kısmından başlar ve sınır tabaka kalınlığı cismin burun kısmında sıfır kabul edilir (Munson, et al., 1990).

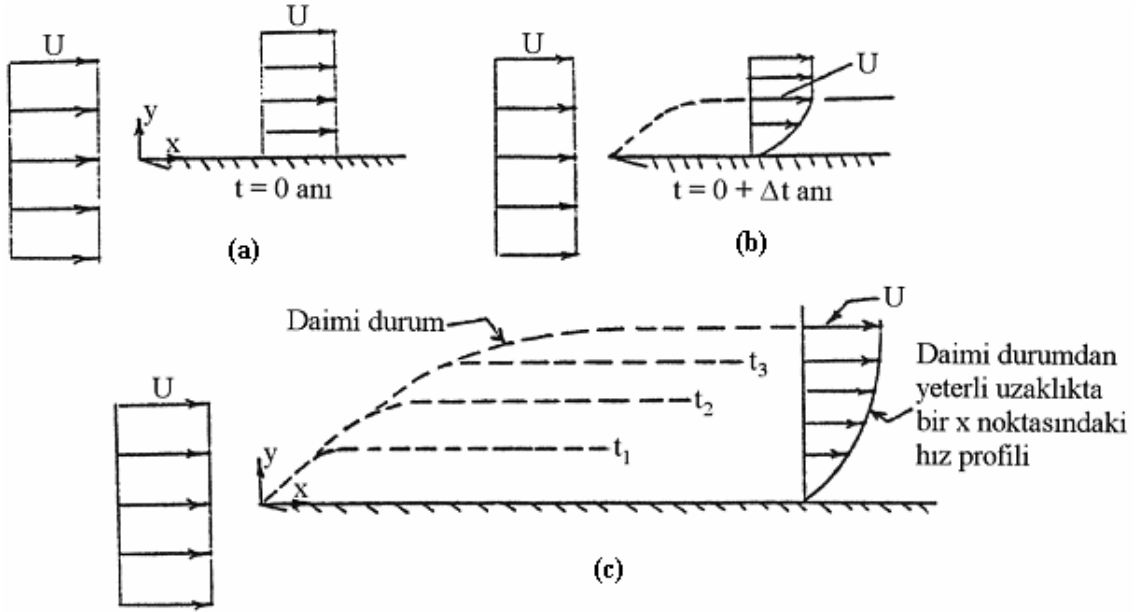
Sınır tabaka kavramını daha iyi anlamak için yarı sonsuz uzunluktaki bir plaka üzerindeki viskoz akışı göz önüne alalım. Hareketin başlamasından önce yani $t < 0$ anında akışın olmadığı veya hızın sıfır olduğunu kabul edelim. $t = 0$ anında akış hızının aniden U sabit hızına eriştiğini varsayalım. Bu andaki akış alanı Şekil 2.1.2a'da gösterildiği gibi olur. Küçük bir Δt zaman sonra akış Şekil 2.1.2b'deki hali alacaktır. Δt küçük olduğunda, plakanın burnu akışı küçük bir bölgede etkileyecek, daha büyük bir bölgenin etkilenmesi daha büyük bir zaman gerektirecektir. Dolayısı ile akış zamana bağlı olarak gelişecek ve Şekil 2.1.2c'deki duruma gelecektir (Ünal, 1988).

Şekil 2.1.2c'de gösterildiği gibi her t anında, burundan yeteri kadar uzak bir noktada akış burnun varlığından habersizmiş gibi düşünülebilir. Dolayısı ile bir yaklaşım olarak plaka sanki yarı sonsuz değil de sonsuz uzunluktaymış gibi göz önüne alınabilir.

Sıkıştırılmaz akışkanın daimi hareketi için hareket denklemini yani Navier-Stokes denklemini göz önüne alalım.

$$\rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{U} \quad (2.1.2)$$

Burada, $-\nabla P$, basınç kuvvetini, $\mu \nabla^2 \vec{U}$, viskoz kuvveti, $\rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U}$ ise atalet kuvveti temsil etmektedir. Bilindiği üzere atalet kuvvetler fiziksel olarak bir kuvvet olmamakla birlikte ancak birim hacim başına kuvvet büyüklüğüne sahiptirler. Kuvvet olarak düşündüğümüzden denklem (2.1.2) kuvvetler arasında statik bir dengeyi ifade eder.



Şekil 2.1.2 Sınır tabakanının zamana bağlı gelişimi

(a) $t = 0$ anı, (b) $t = 0 + \Delta t$ anı, (c) yeterli zaman sonra.

Bu üç terimin mertebelerine bakacak olursak $\rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \approx \rho U^2 / l$ ve $\mu \nabla^2 \vec{U} \approx \mu \frac{U}{l^2}$ olduğu görülür. O halde,

$$\frac{\left| \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right|}{\left| \mu \nabla^2 \vec{U} \right|} \approx \frac{Ul}{\mu} = \text{Re} \quad (2.1.3)$$

ifadesi elde edilir (Moran, 1984).

Dış akış incelemelerinde ve yapılan rüzgar tüneli deneylerinde $\text{Re} \cong 5 \times 10^5$ seviyelerine kadar olan koşullarda akışta herhangi bir bozulma ve yüzeyden ayrılma olmadığı görülmüştür. Yani $\text{Re} \cong 5 \times 10^5$ seviyelerine kadar olan koşullarda laminer akış elde edilmektedir. $\text{Re} \cong 5 \times 10^5$ seviyelerine yaklaşıldıkça akışta bazı bozulmalar ve yüzeyden akım ayrılmaları görülmeye başlanır. Bu seviyeye ise geçiş bölgesi adı verilir. $\text{Re} \cong 5 \times 10^5$ seviyesinin üzerindeki koşullarda ise akış şekli tamamen bozulur ve akımın yüzeye temas etme oranı çok azalır. Bu tür akışlara da türbülanslı akış denilmektedir. Türbülanslı akışın incelemesi çok karmaşıktır. Bu yüzden genellikle

deney yapılarak bazı sonuçlar elde edilir ve bu sonuçlara en yaklaşık sonuç veren ampirik formüller oluşturulmaya çalışılır.

Buradan çıkan sonuç ise yüksek Reynolds sayılarında viskoz kuvvetlerin atalet kuvvetler yanında ihmal edilebilecek kadar küçük olduğudur. Bu durumda (2.1.2) denklemi,

$$\rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla P \quad (2.1.4)$$

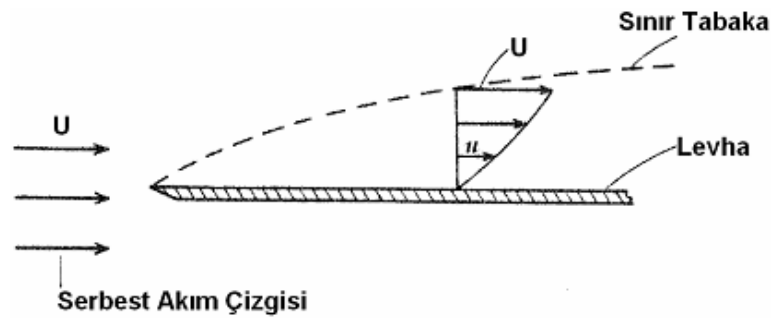
halini alır. Dikkat edilecek olursa, denklem (2.1.4)'ün Euler denklemi olduğu görülür.

(2.1.2) ve (2.1.4) denklemlerinin karşılaştırılmasından görüleceği gibi, Euler denklemi, Navier-Stokes denklemindeki en yüksek mertebeden terim olan viskoz terimin ihmal edilmesi sonucu elde edilmiştir. Dolayısı ile diferansiyel denklemin mertebesi bir düşürülmüş oluyor. Bunun sonucu olarak da sınır şartlarının sayısı da bir düşürülmelidir. Cidarda hızın sıfır olması şartı bilindiği gibi viskozite etkisi sonucudur. Dolayısı ile viskoz etkinin ihmal edildiği Euler denkleminde uygulanması gereken sınır şartı bu olmalıdır.

Euler denkleminin yüksek Reynolds sayısında geçerli olması, daha doğru bir ifade ile bu denklemin Reynolds sayısı arttıkça gerçeğe daha iyi bir yaklaşım sağlaması demektir. Ancak, sınır şartı benzer olarak düşünülemez. Cidarda sıfır hız şartının mevcut olduğu fakat Reynolds sayısı arttıkça ihmal edilebilir olduğu gibi bir ifade anlamsızdır. Bu şartın belirli bir Reynolds sayısına kadar geçerli olması ve o Reynolds sayısından sonra birden bire geçersiz hale gelmesi de düşünülemez. Kısacası, Reynolds sayısı ne kadar büyük olursa olsun cidarda göreceli hızın sıfır olması şartı sağlanmalıdır. Diğer bir deyişle, yüksek Reynolds sayılarında Euler denklemi geçerli olmakla birlikte, cidara komşu bölgede hareket denklemi viskoz terimlerini de içererek denklem (2.1.2)'deki gibi olmalıdır. Cidarda göreceli hız sıfır olduğuna göre, akışkanın Şekil 2.1.3'te gösterildiği gibi, cidardaki sıfır hızından serbest akım hızı U 'ya ulaşacağı bir bölge olmalıdır.

Çok ince olan ancak kalınlığın ve içindeki hızın sürekli bir şekilde değiştiği bu bölgeye sınır tabaka denir (Ünal, 1988). Sınır tabaka dışındaki bölgede Euler denklemi, sınır tabaka içindeki bölgede ise Navier-Stokes denklemi kullanılır. Sınır tabaka dışındaki bölgede akışkan pratik olarak, cidar yakınındaki akışkanın viskozite etkisi ile geciktirilmesinden etkilenmez. Sınır tabaka olarak adlandırılan bu çok ince tabakada

çevri sıfırdan farklıdır. Çevri, viskozite etkisi ile duvarda yaratılmakta ve etrafa yayılırken bir taraftan da akım tarafından akım altı yönde taşınmaktadır. Bu olayın yer aldığı tabaka Reynolds sayısı arttıkça incelmektedir. Çünkü cidarda yaratılan çevri çok fazla uzaya yayılma yani difüzyon şansı bulamadan akım altı yönde taşınacaktır. Kısacası sınır tabaka, cidara bitişik olan ve viskoz akışkanın cidarda kaymama şartını sağlayan çok ince bir tabakadır.

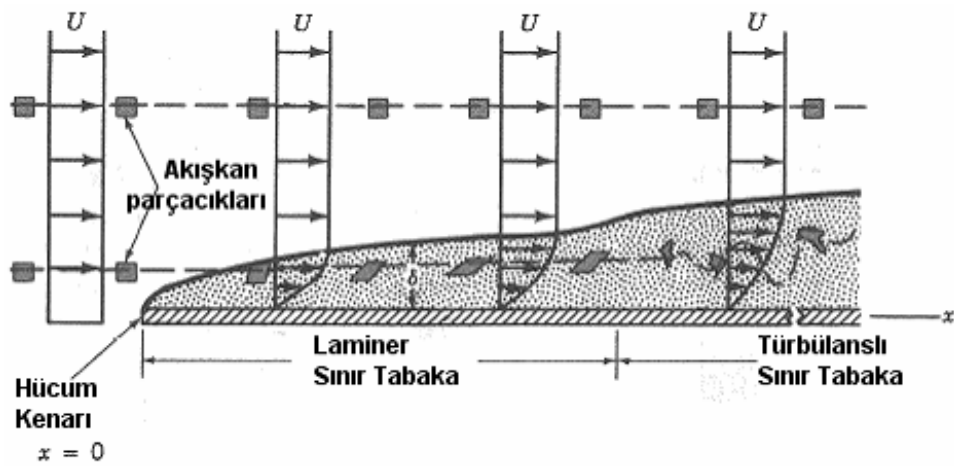


Şekil 2.1.3 Sınır tabaka içerisinde hız dağılımı.

Sınır tabaka içerisinde akışkan parçacıklarının hareket şekli Şekil 2.1.4'te gösterildiği gibidir. Laminer sınır tabaka içerisinde akışkan parçacıklarının çok fazla deforme olmadığı, ancak türbülanslı bölgeye geçilmesi ile birlikte akışkan parçacıklarının kararsız bir şekilde harekete başladığı ve sınır tabakanın tüm özelliklerinin değişmesine sebep olduğu bilinmektedir. Hatta bunun sonucu olarak sınır tabaka için geliştirilmiş tüm eşitlikler geçersiz kalır ve türbülansın önüne geçilmez ise sınır tabaka yüzeyden ayrılır ve artık üzerinden geçtiği yüzeyden tamamen bağımsız hareketine devam eder.

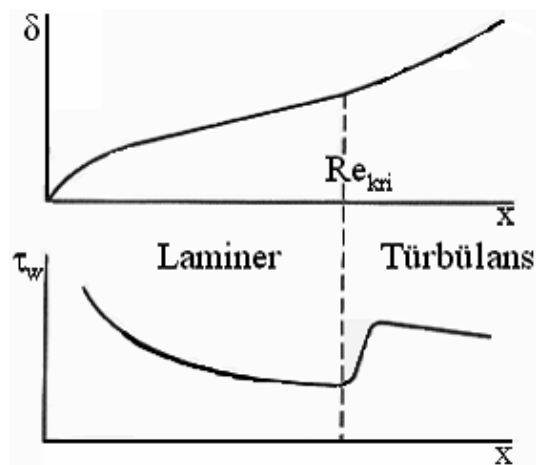
Ayrıca, daha önce değiştiği söylenen özelliklere örnek verecek olursak, sınır tabaka kalınlığının, δ , ve yüzey kayma gerilmesinin, τ_w , değişiminden Şekil 2.1.5'te gösterildiği gibi söz edilebilir. Şekilden de görüleceği üzere Reynolds sayısı arttıkça sınır tabaka kalınlığı azalan bir oranda artış göstermektedir (Munson, et al., 1990). Ancak akış, türbülanslı akış şartlarına ulaştığı andan itibaren artan bir oranla sınır

tabaka kalınlığı artmaktadır ve Reynolds sayısı artırılmaya devam edilirse sınır tabaka ayrılmasına kadar ilerleyecektir.



Şekil 2.1.4 Sınır tabaka içinde akışkan parçacıklarının hareketleri.

Yüzey kayma gerilmesi ise Reynolds sayısı arttıkça laminer bölge içerisinde azalma göstermektedir. Ancak Reynolds sayısının daha fazla artması sonucu yüzey kayma gerilmesi ani bir yükselme göstermekte ve takiben çok az bir oranda düşme göstererek azalmaktadır.



Şekil 2.1.5 Sınır tabaka kalınlığının ve yüzey kayma gerilmesinin Reynolds sayısına bağlı değişimi.

2.2. Sınır Tabaka Kalınlığı

u yerel hızının U serbest akım hızının %99'una eriştiği noktanın yüzeyden uzaklığına sınır tabaka kalınlığı, δ , denir. Diğer bir söyleyişle sınır tabaka kalınlığı, içinde yerel hızın serbest akım hızından %1'den fazla sapma gösterdiği tabakanın kalınlığı olarak da tanımlanabilmektedir.

2.3. Yer Değiştirme Kalınlığı

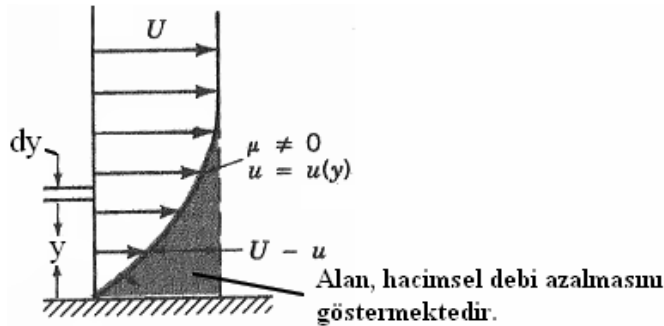
Sınır tabakanın geliştiği yüzey üzerine yeni bir cisimmiş gibi eklenmesi halinde, sınır tabakanın sürtünmesiz hale nazaran neden olduğu debi azalmasına eşit bir debi azalması yaratacak hayali tabakanın kalınlığıdır. δ^* ile sembolize edilir. Bu sözleri Şekil 2.3.1'de gösterildiği gibi matematiksel olarak ifade edelim.

Sınır tabakanın neden olduğu hacimsel debi azalması, $\int_0^{\infty} (U - u) dy$ şeklinde ifade

edilir. Hacimsel debiye eşit debi azaltacak hayali tabakanın kalınlığı, $U \cdot \delta^*$ 'a eşittir. Buradan yer değiştirme kalınlığının matematiksel ifadesi

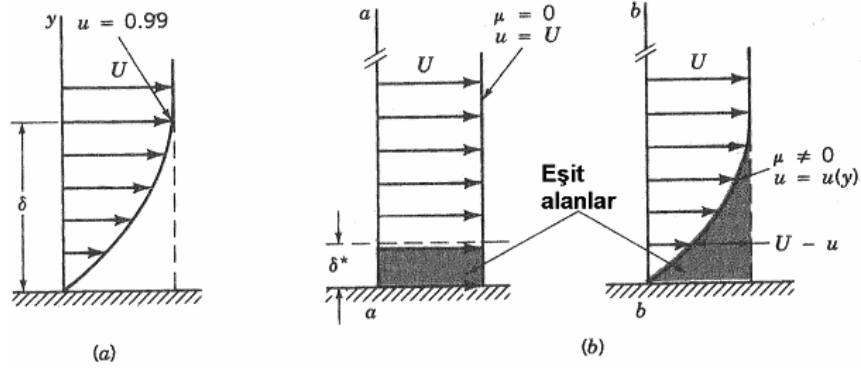
$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2.3.1)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.3.1 Yer değiştirme kalınlığı.

Şekil 2.3.2’de sınır tabaka ve yer değiştirme kalınlığı ifadelerinin şekilsel gösterimi yer almaktadır.



Şekil 2.3.2 (a) Sınır tabaka ve (b) yer değiştirme kalınlığı.

2.4. Momentum Kalınlığı

Diğer tanımlara benzer olarak, sınır tabakanın neden olduğu momentum azalmasına eşit bir momentum azalması yaratan tabakanın kalınlığı şeklinde tanımlanmaktadır. Θ ile sembolize edilir. Sınır tabaka içinden geçen akışkanın birim zamanda beraberinde taşıyacağı momentum birim kalınlık için $(\rho \cdot u \cdot dy)u$ ’ya eşittir. Sürtünmesiz akış halinde ise aynı kütleyle sahip akışkan aynı zaman içinde $(\rho \cdot u \cdot dy)U$ kadar momentum taşıyacaktır. Dolayısı ile sınır tabakanın neden olduğu birim zamandaki momentum azalması $\int_0^{\infty} \rho(U - u)u \cdot dy$ ’dir. Buna eşit bir momentum azalması

yaratacak tabaka sürtünmesiz halde birim zamanda $(\rho \cdot U \cdot \Theta)U = \int_0^{\infty} \rho(U - u)u \cdot dy$ ’dir.

Sonuç olarak momentum kalınlığı,

$$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2.4.1)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada açıklanan üç kalınlık arasında ise $\delta > \delta^* > \Theta$ şeklinde bir ilişkinin her zaman mevcut olduğu unutulmamalıdır.

BÖLÜM 3

KARTEZYEN KOORDİNATLARDA DAİMİ, İKİ BOYUTLU LAMİNER AKIŞTA NEWTONSAL AKIŞKANA AİT SINIR TABAKA KORUNUM DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI

Bu çalışmada sınır tabaka denklemlerinin hem analitik hem de sayısal çözümü yapıldığından dolayı ileriki bölümlerde kullanılmak üzere sınır tabaka içerisinde yazılabilecek korunum denklemlerinin en genel hallerinin elde edilmesi gerekmektedir. Elde edilen bu denklemler kama açılı cisim için özelleştirilecek ve oluşturulacak FORTRAN programında kullanılabilecek hale sayısal yöntemler vasıtasıyla çevrilecektir. Bu amaçla bu bölümde sınır tabaka içerisinde kütle ve momentum korunum denklemleri türetilmiştir.

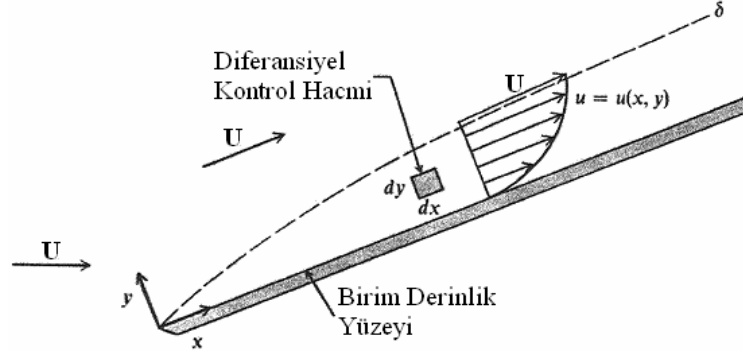
3.1. Kütle Korunum Denkleminin Çıkartılması

Sıkıştırılamaz akışkanın daimi hareketi için hareket denklemini göz önüne alalım. Seçilen bir kontrol hacmine, birim zamanda giren kütle miktarının çıkan kütle miktarına eşit olduğu durumda sistem içerisinde kütle korunuyor demektir. Böyle sistemlerde daimi akış vardır denir. Genel kütle korunumu ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial M_{cv}}{\partial t} = \sum_{giren} \dot{m} - \sum_{çikan} \dot{m} \quad (3.1.1)$$

Düz bir levha üzerinde sınır tabaka içinde iki boyutlu akış için seçilen kontrol hacmi Şekil 3.1.1'de görülmektedir. Burada M_{cv} , kontrol hacmi içinde bulunan kütle miktarını, \dot{m} 'ler giren ve çıkan kütle miktarlarını belirtmektedir. Düz bir levha üzerinde iki boyutlu akışta sürekli ortamda herhangi bir (x, y) noktasında yerel hız bileşenleri (u, v) olarak alındığında, kütle korunumu ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Delta x\Delta y) = \rho u\Delta y + \rho v\Delta x - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x \right]\Delta y - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y \right]\Delta x \quad (3.1.2)$$



Şekil 3.1.1 Düz bir levha üzerinde sınır tabaka içinde seçilen iki boyutlu kontrol hacmi.

Denklem (3.1.2)'nin her iki tarafı seçilen kontrol hacminin sabit boyutlarına ($\Delta x\Delta y$) bölünürse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

elde edilir. Daha sonra tüm terimler eşitliğin bir tarafında toplanır,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.1.3)$$

elde edilir. (3.1.3) denklemindeki kısmi türevler açılırsa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

olur. Denklemindeki terimler birleştirilirse,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla \vec{U} = 0 \quad (3.1.4)$$

elde edilir (Adams and Rogers, 1973). Burada \vec{U} , hız vektörünü, D/Dt , maddesel türevi, ∇ , diverjans operatörünü göstermektedir. Maddesel türev iki boyutta aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Diverjans operatörü ise iki boyutta,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Homojen akışkan için iki boyutta, daimi ve sıfır basınç gradyanına sahip sıkıştırılmaz akış kabulleri ile kütle korunumu denklemi (Denklem (3.1.4)) en son olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1.5)$$

şeklini alır.

3.2. Momentumun Korunumu Denkleminin Çıkartılması

Newton'un II. Kanuna göre, sistemdeki tüm kuvvetlerin toplamı, sistemin momentumundaki değişimin zamanla değişimine eşittir. Bu kuvvetler kontrol hacminin yüzeylerine etkiyen yer çekimi kuvveti gibi gövdesel veya normal ve kayma gerilmeleri gibi yüzeysel kuvvetlerdir. Bu söylediğimizi analitik olarak ifade edersek,

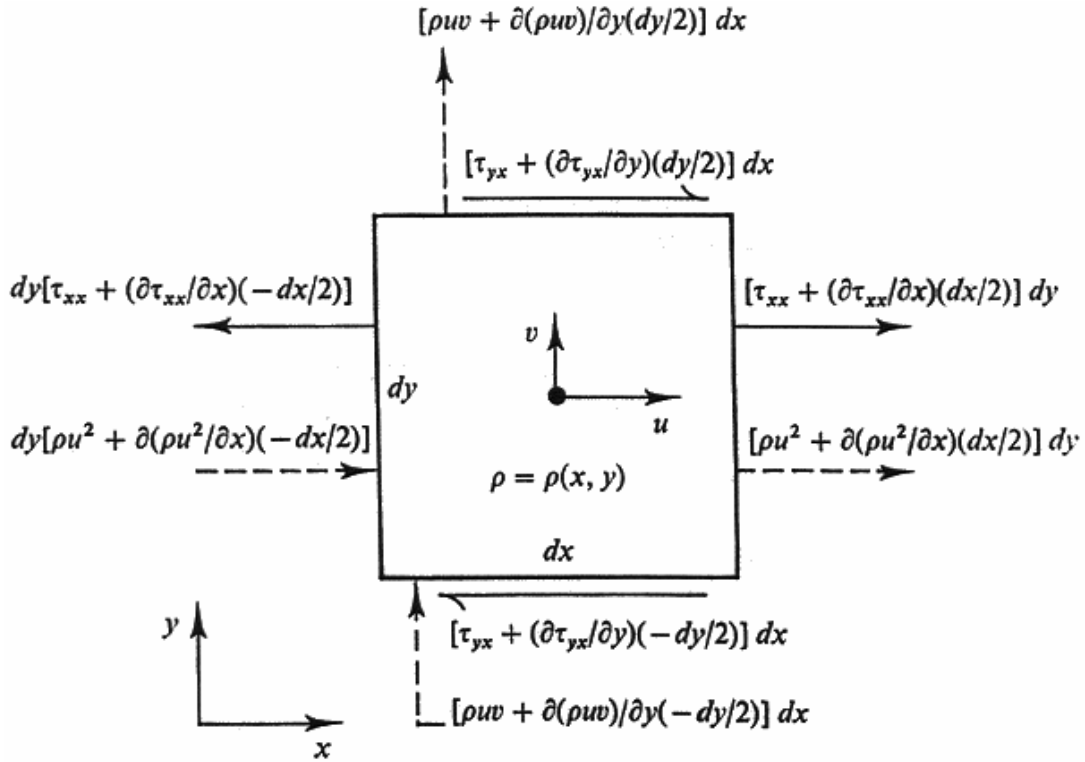
$$\frac{\partial(MU_n)_{cv}}{\partial t} = \sum F_n + \sum_{giren} (\dot{m}U_n) - \sum_{çıkan} (\dot{m}U_n) \quad (3.2.1)$$

halini alır. Burada n , seçilen yönü, (U_n, F_n) , n yönündeki akışkan hızını ve kuvvetini göstermektedir.

Şekil 3.2.1'de akışın daimi olduğu ve gövde kuvvetlerinin ihmal edildiği duruma ait iki boyutlu, laminer ve zorlanmış iletim halindeki sınır tabaka içinde x yönü için kuvvet ve momentum terimleri gösterilmektedir. Birim yüzey için kayma gerilmesi, τ_w , ile gösterilmektedir. x yönündeki kuvvetlerin matematiksel ifadesi,

$$\begin{aligned} & - \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{(-dx)}{2} \right) dy + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{(-dy)}{2} \right) dx \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx = \left[\rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy - \left[\rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \frac{(-dx)}{2} \right] dy \\ & + \left[\rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx - \left[\rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial y} \frac{(-dy)}{2} \right] dx \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

şeklindedir.



Şekil 3.2.1 İki boyutlu akışta sınır tabaka içinde kontrol hacmi üzerine x ve y yönünde etkiyen kuvvetler.

(3.2.2) denklemini açarsak,

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} \quad (3.2.3)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} G_x &= \rho u \\ G_y &= \rho v \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

kabulünü yaparak denklem (3.2.3)'ü tekrar yazarsak,

$$\frac{\partial(G_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(G_y u)}{\partial y} = \frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} \quad (3.2.5)$$

denklemini oluştur. Kısmi diferansiyel denklemini açarsak,

$$G_x \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial G_x}{\partial x} + G_y \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} \quad (3.2.6)$$

oluşur. Bu denklemdeki ikinci ve dördüncü terimlerin toplamı süreklilik denkleminde eşit olduğundan dolayı sifıra eşittir. Ayrıca normal kayma gerilmesi yerine termodinamik basıncın negatif değeri yazılabilir. Bununla birlikte, Newtonsal bir akışkan için laminar sınır tabaka içindeki kayma gerilmesi,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.2.7)$$

şeklindedir. Bahsedilen özellikler (3.2.6) denkleminde kullanılırsa,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.2.8)$$

denklemini elde edilir.

Akışkana ait dinamik viskozite sıcaklığa bağlı olarak değişmektedir. Gazlar için bu bağımlılık çok etkili değildir ve eğer sınır tabaka içindeki sıcaklık değişimi çok fazla değilse, gazlar için dinamik viskozite hesaplamalarda sabit kabul edilebilir. Diğer taraftan yağlar ve organik sıvılar için bunu söylememiz mümkün değildir.

Sabit dinamik viskozite kabulü ile birlikte (3.2.8) denklemini tekrar yazacak olursak,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2.9)$$

elde edilir (Adams and Rogers, 1973). Denklem (3.2.9) momentum denkleminin x yönü için son halini göstermektedir. Bu denklem daimi, iki boyutlu, laminar ve Newtonsal akışkanın sabit özellikli sınır tabakasında zorlanmış iletim durumu için geçerlidir. Bu denklemin sol tarafında bulunan iki terim lineer olmayan taşınım terimleridir. Sağ taraftaki iki terim ise atalet kuvvetlerinin ve viskoz kayma kuvvetlerinin göreceli olarak değişimini ifade etmektedir.

Yukarıda yapılan kabuller eşliğinde, $\partial v / \partial x \ll \partial u / \partial x$ ve $\partial v / \partial y \ll \partial u / \partial y$ kabulleri ile y yönü momentum denklemini,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3.2.10)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin fiziksel anlamı, laminar sınır tabaka içinde yüzeye normal yönde basınç değişiminin olmadığıdır. Bu karakteristik ince sınır tabakalar için geçerlidir. Böylece, sınır tabaka çevresindeki basıncın sabit olduğu söylenebilir ($P = P(x)$). Bunun doğru olması demek, sınır tabakanın kenarındaki basınç değişiminin sürtünmesiz akışta olduğu gibi yüzeye direkt olarak yüklemesidir. Bunun anlamı basınç dağılımının bu tip bir durum için sürtünmesiz akış çözümleri ile elde edilebileceğidir. Tüm bu saptamalar ince sınır tabaka söz konusu iken geçerlidir.

Denklem (3.2.9) için matematiksel sınır şartları,

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad , \quad u = 0 \\ y = 0 & \quad , \quad v = 0 \\ y \rightarrow \infty & \quad , \quad u \rightarrow U(x) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

şeklinde. Birinci koşul, akışkan ile yüzey temas ettikleri anda yani $y = 0$ olduğunda akışkan ile yüzey arasında göreceli bir hızın olmadığını söylemektedir. İkinci koşul, $y = 0$ olduğunda yüzeye normal yönde herhangi bir hızın olmadığını söylemektedir. Bu şekilde, yüzeyden akışkan emme, yüzeye akışkan üfleme veya yüzey özelliğinin değişmesi gibi bir etkinin olmadığı varsayılmaktadır. Üçüncü koşulda ise sınır tabaka içerisinde yüzeyden yukarıya doğru gidildikçe hızın serbest akışkanın hızına yaklaştığı varsayılmaktadır.

Sınır tabakanın dışındaki akış sürtünmesiz akıştır ve hız ile basınç alanlarının hesabında Euler denklemi kullanılabilir.

$$\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz = \text{sabit} \quad (3.2.12)$$

Bu denklemin x yönü için diferansiyeli alınıp, yükseklik değişiminden dolayı oluşan potansiyel enerji değişimi ihmal edilirse, $dz = 0$, (3.2.12) denklemi,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + U \frac{dU}{dx} = 0 \quad (3.2.13)$$

halini alır.

Denklem (3.2.13), denklem (3.2.9)'da yazılırsa,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2.14)$$

elde edilir.

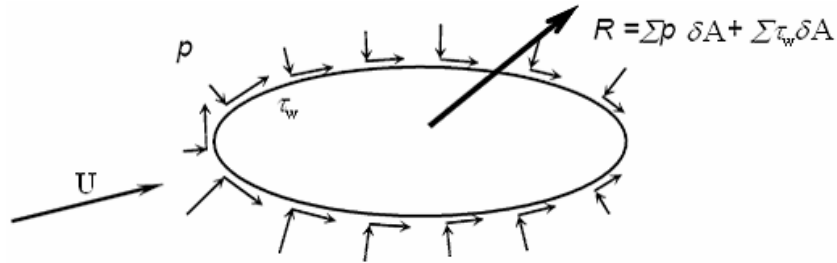
Laminer sınır tabaka için matematiksel sınır koşulları karakteristik uzunluğa bağlı değildir. Böylece, belirli koşullar altında hız profiline hücum kenarından çeşitli uzaklıkları için aynı olduğu anlaşılır. Benzerlik sayesinde u ve v hızları için uygun boyut faktörlerinin seçilmesiyle x yönünde herhangi bir yerdeki hız profili $u(y)$ tanımlanabilir. Hız profilleri benzer olduğu zaman, kısmi diferansiyel denklemler uygun matematiksel transformasyonlar için normal diferansiyel denklemler haline gelmektedir.

BÖLÜM 4

SÜRÜKLEME KUVVETİ

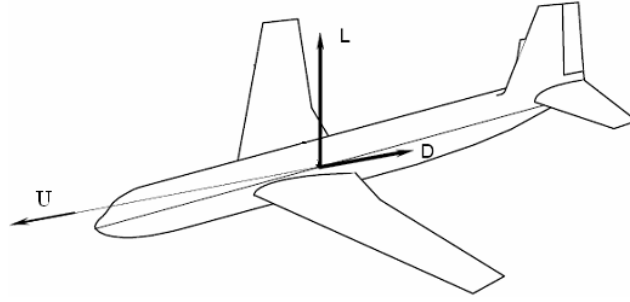
Bu çalışmada kama açısının değişimi ile sınır tabaka özelliklerinin nasıl değiştiği araştırılmaktadır. Sınır tabaka sürtünmenin etkisi ile oluşmaktadır. Bu olayın daha iyi anlaşılabilmesi için sürtünme ve sürtünme kuvveti kavramlarının açıklanması gerekmektedir. Böylece kama açısının sınır tabakayı dolayısıyla sürtünme kuvvetini nasıl etkilediği daha iyi anlaşılacaktır.

Sürüklenme kuvveti, cisim üzerinde akış yönünde meydana gelen bir kuvvettir. Sürüklenme kuvveti uçuş doğrultusunda, uçuş yönüne zıt yönde pozitif işaretli olmak üzere tanımlanır. Sürüklenme kuvvetini esas itibarıyla cisim üzerinde oluşan basınç ve sürtünme kuvvetlerinin uçuş doğrultusundaki bileşenleri yaratmaktadır.



Şekil 4.1 Cisim üzerinde aerodinamik olarak meydana gelen bileşke kuvvet.

Sürüklenme kuvveti ise meydana gelen bu bileşke kuvvetin akış yönünde meydana getirdiği kuvvettir (Von Karman, 1957). Örneğin, bir uçak üzerinde meydana gelen aerodinamik yükler Şekil 4.2'deki gibi olmaktadır.



Şekil 4.2 Akışa bağlı eksen takımında kuvvetler.

Burada L , kaldırma kuvvetini, D ise sürüklenme kuvvetini belirtmektedir. Gerek basınç dağılımı, gerekse sürtünme dağılımı çeşitli parametrelerden etkilenmektedir. Bunlar arasında cismin geometrisini ve hücum açısını, akış hızını, vb. saymak mümkündür. Sürüklenme kuvveti hava yoğunluğuna, hızın karesine ve cismin yüzey alanına bağlı olup,

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 A C_D \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Anderson, 1985). Sürüklenme kuvveti katsayısı, C_D , başlıca cisim geometrisine ve hücum açısına bağlıdır.

Sürüklenme kuvveti aerodinamik olarak oluşan iki kuvvetin toplamını ifade eder. Yani, $D = D_f + D_p$ 'dir. Burada, D_f , sürtünme sürüklenme kuvvetini, D_p , basınç sürüklenme kuvvetini ifade eder. Sürtünme kuvvetine benzer şekilde sürtünme kuvveti katsayısı da $C_D = C_{Df} + C_{Dp}$ gibi iki değişkene bağlıdır (Munson, et al., 1990). Burada, C_{Df} , sürtünme sürüklenmesi kuvveti katsayısını, C_{Dp} ise basınç sürüklenmesi kuvveti katsayısını ifade etmektedir. Biz burada sadece sürtünme sürüklenmesi kuvvetinden bahsedeceğiz.

Sürtünme sürüklenmesi, D_f , sürüklenme kuvvetinin direkt olarak cisim üzerindeki kayma gerilmeleri sonucu oluşan bileşenidir. Bu kuvvet sadece kayma gerilmesinin şiddetine bağlı olmayıp aynı zamanda cismin yüzey özelliklerine de bağlıdır. Yüzey kayma gerilmesi, τ_w , ile sembolize edilir. b genişliğinde, l uzunluğunda ve serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiş bir düz levhada herhangi bir hız profili için oluşan sürtünme sürüklenmesi kuvveti,

$$D_f = \int_0^l dF = b \int_0^l \tau_w dx = b \int_0^l \left(\frac{1}{2} \rho U^2 C_f \right) dx \quad (4.2)$$

veya

$$D_f = \frac{1}{2} \rho U^2 b l C_{Df} \quad (4.3)$$

olarak hesaplanmaktadır. Denklem (4.3)'ten sürtünme sürüklemesi kuvveti katsayısı çekilirse ve denklem (4.2) kullanılırsa,

$$C_{Df} = \frac{D_f}{\frac{1}{2} \rho U^2 b l} = \frac{b \int_0^l \tau_w dx}{\frac{1}{2} \rho U^2 b l} = \frac{1}{l} \int_0^l C_f dx \quad (4.4)$$

halini alır. Burada C_f yüzey sürtünme katsayısını ifade etmektedir. Yüzey sürtünme katsayısının nasıl bulunacağından ve sayısal çözüm metotlarından ileriki bölümlerde bahsedilecektir.

BÖLÜM 5

LAMİNER SINIR TABAKA KAVRAMI

Bu bölümde ilk olarak Blasius tarafından sınır tabaka içerisinde en genel hız dağılımı için yapılan tam çözümden, daha sonra düz ve kama açılı cisimler üzerinde meydana gelen sınır tabaka denklemleri için gerekli kabuller ve özelleştirmeler yapılarak elde edilen çözümlerden bahsedilmektedir. Elde edilen denklemler altıncı bölümde anlatılan sayısal çözüm tekniklerinde çözülebilecek yapıya dönüştürülecektir. Bu şekilde oluşturulacak FORTRAN programı için temel hazırlanmış olacaktır.

5.1. Blasius Çözümü

Blasius çözümü olarak adlandırılan çözümde düz levha üzerinde iki boyutlu sıkıştırılamaz laminer sınır tabaka içerisinde x ve y yönlerinde hareket eden akışkanın herhangi bir hız profiline sahip olduğu varsayılmaktadır. Yani, sınır tabaka içerisinde en genel hız dağılımının olduğu kabul edilmektedir ki bunun neticesinde bu yaklaşımla bulunan çözüm düz levha üzerinde iki boyutlu sıkıştırılamaz laminer sınır tabakanın kesin çözümü olarak kabul edilmektedir.

Blasius çözümünde sınır tabaka içerisinde,

$$\frac{u}{U} = g(Y) \quad (5.1.1)$$

gibi bir genel hız dağılımının $0 \leq Y \leq 1$ için olduğu varsayılmıştır. Burada $g(Y)$ boyutsuz bir fonksiyondur ve herhangi bir şekle sahiptir. Y , boyutsuz koordinat değişkeni olarak tanımlanmakta ve

$$Y = \frac{y}{\delta} \quad (5.1.2)$$

ile formülize edilmektedir. Sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad \text{için} \quad u = 0 \\ y = \delta & \quad \text{için} \quad u = U \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Sınır koşulları denklem (5.1.1)'e uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u = 0 & \quad \text{için} \quad g(0) = 0 \\ u = U & \quad \text{için} \quad g(1) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Verilen $g(Y)$ fonksiyonunu hesaplanabilir hale getirmek için sürüklenme kuvveti, D , ile yüzey sürtünme kuvveti, τ_w , arasında bir bağıntı kurulmalıdır. Bu denklem,

$$\frac{dD}{dx} = b\tau_w \quad (5.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca sürüklenme kuvveti,

$$\begin{aligned} D &= \rho b \int_0^{\delta} u(U-u) dy \\ &= \rho b U^2 \delta \int_0^1 g(Y)[1-g(Y)] dY \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

olarak yazılır. Denklem (5.1.5)'in integral kısmına C_1 dersek ve tekrar yazarsak,

$$D = \rho b U^2 \delta C_1 \quad (5.1.6)$$

olarak elde edilir. Burada C_1 , boyutsuz bir sayıdır. C_1 'in değerini bulmak için yüzey sürtünme kuvvetinden yararlanılır. Yüzey sürtünme kuvveti,

$$\begin{aligned} \tau_w &= \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \left. \frac{U}{\delta} \frac{dg}{dY} \right|_{Y=0} \\ \tau_w &= \mu \frac{U}{\delta} C_2 \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada C_2 , boyutsuz bir sayıdır. C_2 sayısı,

$$C_2 = \left. \frac{dg}{dY} \right|_{Y=0}$$

şeklindedir.

Buradan hareketle denklem (5.1.4), (5.1.6) ve (5.1.7) denklemleri birleştirilirse,

$$\delta d\delta = \frac{\mu C_2}{\rho U C_1} dx \quad (5.1.8)$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu denklem $x = 0$ noktasında $\delta = 0$ sonucu için integre edilirse,

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu C_2 x}{UC_1}}$$

veya

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2\nu C_2}{UC_1}} = \frac{\sqrt{2C_2/C_1}}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (5.1.9)$$

olarak elde edilir. Elde ettiğimiz denklem (5.1.9)'u denklem (5.1.7)'de yazarsak,

$$\tau_w = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{2}} U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\mu}{x}} \quad (5.1.10)$$

elde edilir. Denklem (5.1.9) ve (5.1.10)'da ki C_1 ve C_2 değerlerinin bulunması için kullanılan genel ifade yüzey sürtünme katsayısı, C_f , 'dir. Yüzey sürtünme katsayısı,

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.1.11)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Denklem (5.1.10) kullanılarak yüzey sürtünme katsayısı hesaplanırsa,

$$C_f = \sqrt{2C_1 C_2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}}$$

veya

$$C_f = \frac{\sqrt{2C_1 C_2}}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (5.1.12)$$

olarak elde edilir. Bu ifade ile Blasius tarafından bulunan,

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

çözümü karşılaştırılırsa sonuca ulaşılmış olur.

Ayrıca, l uzunluğunda ve b genişliğinde düz levhaya etkiyen sürtünme sürüklenme katsayısı, C_{Df} , de,

$$C_{Df} = \frac{2D_f}{\frac{1}{2}\rho A U^2} = \frac{b \int_0^l \tau_w dx}{\frac{1}{2}\rho U^2 b l}$$

veya

$$C_{Df} = \frac{1}{l} \int_0^l C_f dx$$

olarak yazılabilir. Yüzey sürtünme katsayısı değeri için daha önce elde ettiğimiz denklem (5.1.12)'yi kullanırsak,

$$C_{Df} = \frac{\sqrt{8C_1C_2}}{\sqrt{Re_l}} \quad (5.1.13)$$

veya

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak momentum integral sınır tabaka metodu kullanılarak elde edilen genel sonuçlar yukarıdaki gibidir ve bu çözüm metodu Blasius çözümü olarak adlandırılır. Ayrıca, bulunan diğer çözümler arasında referans teşkil eden kesin çözüm Blasius çözümüdür. Örneğin; lineer, parabolik, kübik veya sinizoidal gibi farklı tiplerde hız profilleri seçilip bu çözüm metodu uygulanırsa elde edilen sonuçlar çizelge 5.1.1'de verilmektedir (Munson, et al., 1990).

Çizelge 5.1.1 Düz levha momentum integral çözümü sonuçları.

Hız Profili Çeşidi	Yüzey Sürtünme Katsayısı
a. Blasius Çözümü $\frac{u}{U} = g(Y)$	$\frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$
b. Lineer Hız Profili $u/U = y/\delta$	$\frac{0.578}{\sqrt{Re_x}}$
c. Parabolik Hız Profili $u/U = 2y/\delta - (y/\delta)^2$	$\frac{0.730}{\sqrt{Re_x}}$
d. Kübik Hız Profili $u/U = 3(y/\delta)/2 - (y/\delta)^3/2$	$\frac{0.646}{\sqrt{Re_x}}$
e. Sinizoidal Hız Profili $u/U = \sin[\pi(y/\delta)/2]$	$\frac{0.655}{\sqrt{Re_x}}$

5.2. Benzerlik Metodu Kullanılarak Düz Levha Üzerinde Oluşan Laminer Sınır Tabakanın İncelemesi

Üçüncü bölümde genel olarak anlatılan ve denklemlerini önceden elde ettiğimiz sınır tabaka incelemesinin yapılabileceği cisimlerden biri bu çalışmada çok ince düz levhadır. Burada,

- i) Levhanın burun noktasında $x = 0$ ve alt ve üst bölge akışları için engel yok,
- ii) Akış x eksenine paralel ve sürekli,
- iii) Serbest akımın hızı sabit yani $\frac{dP}{dx} = 0$ kabulleri ile sınır tabaka eşitliği

denklem (3.1.5) ve (3.2.9),

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.2.2)$$

halini alır. Denklem (5.2.1) için matematiksel sınır şartları,

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad , \quad u = 0 \\ y = 0 & \quad , \quad v = 0 \\ y \rightarrow \infty & \quad , \quad u \rightarrow U(x) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

şeklindedir.

Daha önceden sınır tabaka için elde ettiğimiz süreklilik ve momentum yönetici denklemleri (5.2.1) ve (5.2.2) numaralı denklemlerde verilmektedir. Bu iki denklemde iki adet bağımlı değişken (u ve v) mevcuttur. İki boyutlu, sıkıştırılmaz ve çevrisiz akış şartı için hız bileşenleri u ve v için akım fonksiyonu tanımı kullanılabilir. Akım fonksiyonu, ψ , olmak üzere,

$$u = \partial \psi / \partial y \quad (5.2.4)$$

$$v = - \partial \psi / \partial x \quad (5.2.5)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Adams and Rogers, 1973). Buradan hareketle akım fonksiyonu kullanılarak denklem (5.2.1) tekrar yazılırsa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (5.2.6)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem için sınır şartları,

$$\begin{aligned}
y = 0 & \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\
y \rightarrow \infty & \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x)
\end{aligned}
\tag{5.2.7}$$

olarak yazılır.

Denklem (5.2.1)'i normal diferansiyel denklem haline dönüştürebilmek için gerekli olan matematiksel benzerlik dönüşümü aşağıdaki şekilde verilmekte olup detayları altıncı bölümde açıklanmaktadır.

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{5.2.8}$$

ve

$$F(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}} \tag{5.2.9}$$

Burada η , dönüşüm fonksiyonu serbest parametresi, $F(\eta)$ ise boyutsuz akım fonksiyonunu tanımlanmaktadır. Diferansiyel denklemlerdeki zincir kuralı kullanılarak,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = F' U \tag{5.2.10}$$

Benzer bir yaklaşımla, η 'ya bağlı diferansiyeli belirtmek için üssü işareti, ' , kullanılarak,

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (F' \eta - F) \tag{5.2.11}$$

elde edilir.

Oluşturduğumuz bu hızlara ait denklemleri, denklem (5.2.1)'de yerlerine yazarsak bu denklem en son olarak aşağıdaki şekle dönüşür (Kuethé and Chow, 1986).

$$2F''' + FF'' = 0 \tag{5.2.12}$$

Denklem (5.2.12) gibi üçüncü dereceden lineer olmayan düzgün diferansiyel denklemi çözebilmek için üç adet dönüştürülmüş sınır şartına ihtiyaç vardır. Bu sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
\eta = 0 & \rightarrow F(0) = F'(0) \\
F'(\eta \rightarrow \infty) & \rightarrow 1
\end{aligned}
\tag{5.2.13}$$

şeklindedir.

Sürtünme sürüklenme kuvveti ise daha önceden denklem (4.2)'de verildiği gibi,

$$D_f = b \int_0^l \tau_w dx \quad (5.2.14)$$

ifade edilmektedir. Yüzey kayma gerilmesi, τ_w ,

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

şeklindedir. Burada $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ işlemi yapıp yerine konursa,

$$\tau_w = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} F''(0) \quad (5.2.15)$$

elde edilir. Sıfır hücum açısında düz levha üzerinde boyutsuz akım fonksiyonu $F(\eta)$ için (5.2.12) denkleminin sayısal çözümü Howarth tarafından yapılarak sonucu $F''(0) = 0.332$ olarak bulunmuştur. Bu sayısal çözümden bir sonraki bölümde incelenecek kama üzerinde sınır tabaka oluşumu bölümünde bahsedilecektir. Çünkü kama açısı sıfır alındığında kama düz levha halini almaktadır. Buradan boyutsuz yüzey sürtünme katsayısı,

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} F''(0)}{\rho U^2} = 0.332 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

olduğu bulunur (Wood, 1947). Sonuç olarak, denklem (5.2.14)'ten bir taraf için yüzey sürtünme kuvveti, D ,

$$D = F''(0) \cdot \mu \cdot b \cdot U \sqrt{\frac{U}{\nu} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}}} = 2F''(0) b U^2 \sqrt{\mu \rho l U}$$

olur. Her iki tarafında da akış olan düzlem levha için yüzey sürtünme kuvveti, D ,

$$2D = 4F''(0) b U^2 \sqrt{\mu \cdot \rho \cdot l \cdot U} = 1.328 b \sqrt{U^3 \mu \cdot \rho \cdot l} \quad (5.2.16)$$

olur.

Burada dikkat edilmesi gereken husus sürtünme oranının hızın $3/2$ nci kuvveti ile değiştiğidir. Buradan boyutsuz sürtünme sürüklenme katsayısı, C_{Df} ,

$$C_{Df} = \frac{2D_f}{\frac{1}{2}\rho \cdot A U^2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada A , toplam ıslak alanı belirtmekte ve $A = 2bl$ 'dir. Sonuç olarak, (5.2.16) denkleminde de yararlanılarak C_{Df} tekrar yazılırsa,

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \quad (5.2.17)$$

elde edilir.

5.3. Kama Üzerinde Laminer Sınır Tabaka İncelemesi

Daha önceden sınır tabaka için elde ettiğimiz süreklilik ve momentum yönetici denklemleri (3.1.5) ve (3.2.14) numaralı denklemlerde verilmektedir. Bu iki denklemde iki adet bağımlı değişken (u ve v) mevcuttur. Akım fonksiyonu, ψ , için u ve v hızlarına ait daha önce belirtilen ifadeler yazılır ve denklem (3.2.14) tekrar yazılırsa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (5.3.1)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem için sınır şartları,

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty & \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

olarak yazılır.

Viskoz olmayan akış şartlarının sadece belirli tiplerinde sınır tabaka içerisindeki hız profilleri benzerlik gösterirler. Altıncı bölümde anlatıldığı gibi, bahsedilen bu özellik sadece sınır tabaka dışındaki viskoz olmayan akış hızı, U , $U = Cx^e$ şeklinde verildiği zaman oluşmaktadır (Schlichting, 1968). Burada C ve e sabit sayılardır. Bu

hız tanımı potansiyel teorisinin yardımı ile yazılmaktadır ve hücum kenarına komşu olan hız dağılımını tanımlamaktadır.

Bu ifadeyi (3.2.14) denkleminde kullanırsak,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = e \frac{U^2}{x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.3.3)$$

elde edilir. Denklem (5.3.3)'ü düzgün diferansiyel denklem haline dönüştürebilmek için gerekli olan matematiksel benzerlik dönüşümü aşağıdaki şekilde verilmekte olup detayları altıncı bölümde açıklanmaktadır (Adams and Rogers, 1973).

$$\eta = y \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{U}{\nu x} = y \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{\nu} x^{(e-1)/2} \quad (5.3.4a)$$

ve

$$F(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\frac{2}{e+1}} \nu x C x^e} = \frac{\psi}{\sqrt{\frac{2}{e+1}} C \nu x^{(e+1)/2}} \quad (5.3.4b)$$

Matematiksel transformasyon yaparken, iki kısmi türevde sürekli yükselmektedir. Bu türevler şu şekildedir.

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{\nu} x^{(e-1)/2} \quad (5.3.5)$$

ve

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{\nu} x^{(e-3)/2} = \frac{\eta(e-1)}{2x} \quad (5.3.6)$$

Diferansiyel denklemlerdeki zincir kuralı kullanılarak,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= F' \sqrt{\frac{2}{e+1}} C \nu x^{(e+1)/2} y \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{\nu} x^{(e-1)/2} = F' U \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

elde edilir. Benzer bir yaklaşımla, η 'ya bağlı diferansiyeli belirtmek için üssü işareti, ' , kullanılarak,

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(F \sqrt{\frac{2}{e+1}} C v \frac{e+1}{2} x^{(e-1)/2} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \sqrt{\frac{e+1}{2}} C v x^{(e+1)/2} F' \right) \frac{\eta(e-1)}{2x} \\
&= -\sqrt{\frac{e+1}{2}} C v x^{(e-1)/2} \left(F + F' \eta \frac{e-1}{e+1} \right) \tag{5.3.8}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Hız türevlerinin denklemleri ise,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = F'' U \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{v} x^{(e-1)/2} \tag{5.3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= F''' U \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{v} x^{(e-1)/2} \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{v} x^{(e-1)/2} \\
&= F''' U \frac{e+1}{2} \frac{C}{v} x^{e-1} \tag{5.3.10}
\end{aligned}$$

ve

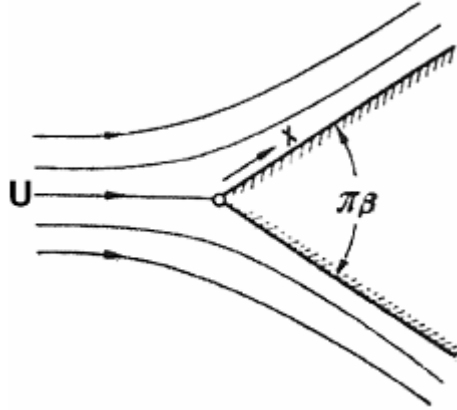
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= \left[C x^e F'' + F' C e x^{e-1} \frac{2x}{\eta(e-1)} \right] \frac{\eta(e-1)}{2x} \\
&= F'' U \frac{\eta(e-1)}{2x} + F' C e x^{e-1} \tag{5.3.11}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Oluşturduğumuz bu hızlara ve hızların türevlerine ait denklemleri, denklem (3.2.14)'te yerlerine yazarsak en son olarak aşağıdaki şekle dönüşür (Adams and Rogers, 1973).

$$F''' + FF'' + \beta(1 - F'^2) = 0 \tag{5.3.12}$$

Burada β , Şekil 5.3.1'de görüldüğü gibi kama açısını ifade eden bir fiziksel anlam içermektedir ve $\beta = 2e/(e+1)$ şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca e , sürtünmesiz akış alanında üretilen sürtünmesiz basınç gradyanının değerini ifade etmektedir. Örneğin, $\beta = 0$ için düz levha üzerindeki basınç gradyanı $dP/dx = 0$ 'dır.



Şekil 5.3.1 Kama üzerinden laminar akış ve kama açısı.

Sonuç olarak, $e = 0$ ve $U = C$ elde edilir ki bunun anlamı levha üzerindeki hız ile serbest akım hızının birbirine eşit olduğudur. Ayrıca, bu durum sıfır hücum açısına sahip düz levhanın incelenmesi anlamına gelmektedir. $F''' + FF'' = 0$ denklemi denklem (5.2.12)'den sadece 2 katsayısı kadar farklı hale gelmektedir. Ancak denklemlere uygulanan dönüşümler neticesinde bu denklemler birbirinin aynı hale gelmektedir. Durdurma akışı için $\beta = 1$ ve $e = 1$ 'dir. Bu durumda serbest akım hızının $U = Cx$ şeklinde verilmesini gerektirmektedir. Denklem (5.3.12) gibi üçüncü dereceden lineer olmayan bir diferansiyel denklemi çözebilmek için üç adet dönüştürülmüş sınır şartına ihtiyaç vardır. Bu sınır koşulları,

$$\begin{aligned} F(0) &= F'(0) = 0 \\ F'(\eta \rightarrow \infty) &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

şeklindedir. Denklem (5.3.12) ve denklem çözümünde kullanılan sınır şartları Falkner-Skan denklemi olarak adlandırılmaktadırlar.

BÖLÜM 6

OLUŞTURULAN LAMİNER SINIR TABAKA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN SAYISAL ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

Bu bölümde bir önceki bölümde elde edilen özelleştirilmiş laminer sınır tabaka denklemlerinin sayısal olarak çözülebilmesi için gerekli matematiksel dönüşümlerden ve çözüm tekniklerinden bahsedilmektedir. Bu şekilde sayısal çözüm esnasında kullanılacak iterasyon algoritmalarının nasıl elde edileceği açıklanmaktadır.

6.1. Sayısal Analize Giriş

Mühendislikte genel olarak birbirine paralel ve birbiriyle ilişkileri bulunan iki çözüm yolu vardır. Bunlar; deneysel ve teorik çözüm teknikleridir. Deney sonuçları çoğu kez tablolar, grafikler halinde verilir. Teorik çalışma sonuçları ise sürekli değerler olduğu halde deney sonuçları ile karşılaştırılma ihtiyaçları vardır. Ancak teorik çözüm her zaman mümkün olmamaktadır. Uygulamalarda tam olarak çözülemeyecek matematiksel problemler ortaya çıkabilir. Bu tür durumlarda genellikle özel durumlar göz önüne alınır veya basitleştirmeler denenebilir ve problem bu haliyle tam olarak çözülebilir. Örneğin lineer olmayan bir diferansiyel denklem lineerleştirilerek çözülebilir hale getirilebilir. Bu yöntem basitleştirilmiş hal hakkında niteliksel bilgi sağlayabilir. Kapalı çözümü bulunmayan bazı lineer olmayan denklemlerin çözümü sayısal yöntemler yardımıyla da elde edilebilmektedir. Sayısal yöntemlerin en büyük zorluğu elde yapıldıkları zaman çok fazla işlem sayısı gerektirmeleridir. Bu yüzden bu tür bir çözüm metodu düşünüldüğünde hesaplama yapabilmek için mutlaka bir bilgisayar programı oluşturulması gerekir. Sonuç olarak sayısal analizin amacı, matematiksel problemlerin çözümlenebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım veren yöntemler kullanarak anlamlı sonuçlar çıkarmaktır.

Bu güne kadar çeşitli amaçlarla ve problem tiplerine göre birçok sayısal analiz tekniği geliştirilmiştir. Bu çalışmada yalnız kullanılan sayısal analiz tekniklerinden bahsedilmektedir.

6.2. Benzerlik Metodu İle Falkner-Skan Denkleminin Elde Edilmesi

Benzerlik çözüm metodu uygulamalarının iyi bilinen iki örneği vardır. Bunlar, difüzyon denklemlerinin çözümü ve sınır tabaka denklemlerinin çözümüdür. Bu çalışmada sınır tabaka denklemlerinin çözüm tekniğinden bahsedeceğiz.

Burada benzerlik çözümünün tanımlanması için en basit ve kullanışlı metot bundan sonra serbest parametre metodu olarak adlandırılacaktır. Bu metotta, kısmi parçalı diferansiyel denklemde yer alan bağımlı değişkenin iki fonksiyonun ürünü olduğu varsayılmaktadır. Bu fonksiyonlardan ilki, biri hariç diğer tüm bağımsız değişkenlerin yer aldığı fonksiyondur. Diğer fonksiyonun ise sadece η parametresine bağlı olduğu kabul edilir. η parametresi, ilk fonksiyonda yer almayan bağımsız değişkenin dönüşümünden elde edilmektedir. Örneğin, bağımlı değişken, ϕ , ve bağımsız değişkenler x_1, \dots, x_n, y olsun. Burada ϕ 'yi

$$\phi(x_1, \dots, x_n, y) = \Phi(x_1, \dots, x_n)F(\eta) \quad (6.2.1a)$$

şeklinde yazabiliriz (Hansen, 1964). Burada,

$$\eta = \eta(x_1, \dots, x_n, y) \quad (6.2.1b)$$

olarak tanımlanmaktadır. η 'nin formu belirsiz olmakla birlikte “serbest parametre” olarak adlandırılır.

Φ ve η 'nin hangi değişkenlere bağlı olduğu problemin doğasına bağlıdır. y değişkeninin η 'nin içinde yer alması sadece ϕ fonksiyonunun sınır koşullarının genellikle y 'nin değerlerine bağlı olduğu durumlarda geçerlidir.

Daha önceki bölümlerde iki boyutlu, düzgün, laminar sıkıştırılmaz sınır tabaka korunum denklemlerinin nasıl elde edildiğinden bahsedilmişti. Bu denklemler,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2.9)$$

yazılır. Ayrıca akım fonksiyonu tanımı vasıtasıyla denklem (3.2.14) tekrar yazılarak,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (5.3.1)$$

denklemini elde edilmişti. Bu denklem lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem formundadır. Denklem (5.3.1)'in bir çözüm metodu olmasına karşın analizi daha kolaylaştırmak için başka bir yol kullanılmıştır.

Bağımlı değişkenlerden birini yok etmenin diğer bir metodu ise denklem (3.2.9)'da verilen v 'yi çözmektir.

$$v = -\int \frac{\partial u}{\partial x} dy + f_1(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \int u dy + f_1(x) \quad (6.2.2)$$

Bu integralde, y 'nin x 'e göre integrali alınmaktadır ve x bir parametre gibi düşünülmektedir. Burada $f_1(x)$, x 'e bağlı keyfi bir fonksiyondur. Bu denkleme $y = 0$ için $v = 0$ sınır koşulu uygulanırsa denklem (6.2.2),

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy \quad (6.2.3)$$

halini alır. Bu denklemini denklem (3.2.14)'te yazarsak,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.2.4)$$

elde edilir. Denklem (6.2.4) sadece u hızını içermesine rağmen çok daha karmaşık bir hale dönüşmüştür. Ancak formundan dolayı, çözüm için bu denklem denklem (5.3.1)'in yerine seçilmektedir (Hansen, 1964). Bu seçimin başlıca nedeni sınır koşullarının direkt olarak ψ yerine u 'yu içermesidir. Bu denklem direkt olarak u ile kullanılabilen ve benzerlik parametresini içeren bir fonksiyon formu tanımlamayı kolaylaştırmaktadır. Bu seçimi destekleyen diğer bir seçim kistası ise benzerlik çözümünde U 'nun sabit olmasıdır.

Benzerlik analizinde ilk adım ürün fonksiyonunun formunda hangi bağımlı değişkenlerin bulunduğunu tespit etmektir ki bunlardan biriside benzerlik parametresidir. Bu form,

$$u = U(x)F'(\eta) \quad (\eta = \eta(x, y)) \quad (6.2.5)$$

şeklinde seçilmiş olsun. Ayrıca unutulmamalıdır ki denklem (6.2.4)'ün η için düzgün bir diferansiyel denklem haline dönüşümünün yapılabileceği varsayılmaktadır.

Bu noktada çeşitli saptamalar yapmaya ihtiyaç duyulmaktadır. İlk olarak, u 'nun neden fonksiyonun türevi, $F'(\eta)$, ile ifade edildiğini sorulmalıdır. Bu seçimin sebebi v 'nin u 'nun integrali ile bulunabiliyor olmasıdır. $F'(\eta)$ seçimiyle v , $F(\eta)$ 'nin terimi olarak ortaya çıkacaktır. Diğer soru ise denklem (6.2.5)'in $U(x)$ fonksiyonunu içermesidir. $U(x)$ 'in seçimi, $F'(\eta)$ için sabit sınır değeri oluşturmak istenmesinin sonucudur. u 'yu denklem (6.2.5) formunda yazarsak,

$$\left(\frac{u}{U}\right)_{y=0} = [F'(\eta)]_{y=0} = 0 \quad (6.2.6)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{U}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} F'(\eta) = 1 \quad (6.2.7)$$

elde edilir. Eğer burada η ile y arasında bir ilişki kurabilirsek, denklem (6.2.6) ve (6.2.7) $F(\eta)$ 'nin sınır koşullarını sağlayabilir hale dönüşecektir. Denklem (6.2.5)'te verilen kısmi formülasyonun akış hız profillerinin benzerliğini ve $F'(\eta)$ 'nin üretilebilirliğini gösterdiği unutulmamalıdır. x 'in iki farklı değeri x_1 ve x_2 için,

$$u = U(x_1)F'[\eta(x_1, y)]$$

$$u = U(x_2)F'[\eta(x_2, y)]$$

olsun. $U(x_1)$ ve $U(x_2)$ 'nin değerleri $\eta(x_1, y)$ ve $\eta(x_2, y)$ iken hızın şiddetinin boyutunu, y koordinatı uzunluğunda göstermektedir.

Sınır tabaka akış problemlerinin yayımlanmış analizlerinde serbest parametre metodu kullanımında genellikle analizin bu safhasında bir benzerlik parametresi, η , kabulü yapıldığı görülmektedir. Bu problem için seçilen form,

$$\eta = y.g(x) \quad (6.2.8)$$

şeklinde ve burada $g(x)$, x 'e bağlı keyfi bir fonksiyondur (Hansen, 1964).

Bu kısmi formülasyon nedeniyle, u hızı için denklem (5.2.3)'te verilen sınır koşulu $y = 0$ 'da $F'(\eta)$ 'ya uygulandığında $F'(0) = 0$ haline dönüşür. Denklem (5.2.3)'te verilen u eşitliğini denklem (6.2.4)'te yazarsak,

$$\begin{aligned}
UF' \left\{ U'F' + UF'' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y UF' dy \right\} UF'' \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
= UU' + \nu U \left[F'''' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + F'' \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right]
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

elde edilir. $U'(x) \neq 0$ kabulü ve denklem (6.2.9)'un UU' ile bölümü sonucunda denklem (6.2.10) elde edilir (Hansen, 1964).

$$F''^2 + \frac{U}{U'} \frac{\partial \eta}{\partial x} F'F'' - \frac{1}{U'} \frac{\partial \eta}{\partial y} F'' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y UF' dy \right\} = 1 + \frac{\nu}{U'} \left[F'''' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + F'' \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] \tag{6.2.10}$$

Bu analiz metodunun anahtar adımı denklem (6.2.10)'un F ve F' 'in türevinin değişik sabitlerle istenen koşullar altında elde edilebildiği düzgün diferansiyel denklem haline dönüştürülmesidir. Bu koşullar yardımıyla η 'ya uygun bir form aranmaktadır.

Açıkça görülmektedir ki, denklem (6.2.10)'un düzgün diferansiyel denklem haline dönüştürülmesi, terim değişkeni katsayılarının η 'nın fonksiyonu olarak elde edilmesi ile mümkündür. Ayrıca, F'''' katsayısının η 'nın fonksiyonu olması istenmektedir. Yapılan bu kısmi seçimin birçok sebebi vardır. İlk olarak, eğer diferansiyel denklemin derecesi düşürülmek istenmiyorsa F'''' katsayısının sıfırdan farklı olması gerekliliğidir. İkinci olarak, F'''' 'ün denklemde sadece bir kez kullanılıyor olmasıdır. Denklem tipleri içerisinde çeşitli terimlerin içinde η 'nın fonksiyonlarının kısmi kombinasyonlarının olduğu görülmektedir. Değişik terimlerin kombinasyonlarının üretilmesi analizi güçleştirici bir etki oluşturmaktadır. Son olarak F'' ile çalışmanın F'''' ile çalışmaya nazaran kolaylık sağlamadığıdır. Fakat η ile çalışırken birinci derece türev ile çalışmak ikinci derece türevle çalışmaktan daha kolaydır (Hansen, 1964).

Şimdi, F'''' katsayısı ile η 'nın keyfi fonksiyonu birbirine eşitlenirse,

$$\frac{\nu}{U'} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = f_1(\eta)$$

elde edilir. Bu denklemden η 'nın y 'ye göre kısmi türevini çekersek,

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U'}{\nu}} (f_1)^{1/2} \tag{6.2.11}$$

elde edilir. Denklem (6.2.11)'in integralini alırsak,

$$\int (f_1)^{1/2} d\eta = \sqrt{\frac{U'}{v}} y + f_0(x) \quad (6.2.12)$$

halini alır. Burada $f_0(x)$, x 'e bağlı keyfi bir fonksiyondur. Diğer yandan bir tanım yaparak, $f_2(\eta)$ bilinen, tek-değerli ters bir fonksiyon olmak üzere, $f_2(\eta) = \int (f_1)^{1/2} d\eta$ eşitliğini yazarsak,

$$\eta = f_2^{-1} \left[y \sqrt{\frac{U'}{v}} + f_0(x) \right]$$

oluşur. Denklem (6.2.6)'da belirtilen $y = 0$ sınır koşulu bu denkleme uygulanırsa,

$$\eta_0 = f_2^{-1} [f_0(x)]$$

elde edilir. Bu değer sabit bir değer değildir. Emin olmak için, y 'nin sabit değerleri η 'nın sabit değerlerine dönüştürülür ve $f_0(x) = c_1 = \text{sabit}$ olduğu varsayılır. Ayrıca,

$$y \rightarrow \infty ; \quad \eta \rightarrow (f_2)^{-1}(\infty)$$

ifadesi mevcuttur. Bu örnekte, y 'nin değerlerinin denklem (6.2.7)'deki sınır koşulları x 'e bağlı olmadan η 'nin bir denkleymiş gibi alınabilirler. Denklem (6.2.12), y için çözümlerse,

$$y = \sqrt{\frac{v}{U'}} [f_2(\eta) - c_1] = \sqrt{\frac{v}{U'}} \left[\int \frac{1}{\sqrt{f_1}} d\eta - c_1 \right] \quad (6.2.13)$$

elde edilir. Denklem (6.2.10)'ün üçüncü terimi $f_2(0) = c_1$ seçilerek yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[U \int_0^\eta \sqrt{\frac{v}{U'}} \frac{F'}{\sqrt{f_1}} d\eta \right] \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{F''}{U'} \\ = U \sqrt{\frac{v}{U'}} \frac{F'}{\sqrt{f_1}} \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{F''}{U'} + \int_0^\eta \frac{F'}{\sqrt{f_1}} d\eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{F''}{U'} \frac{\partial}{\partial x} \left(U \sqrt{\frac{v}{U'}} \right) \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

olur. Denklem (6.2.13)'ün y 'ye bağlı türevini alırsak,

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{\frac{v}{U'}} \frac{1}{\sqrt{f_1}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \sqrt{\frac{U'}{v}} \sqrt{f_1} \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

elde edilir. Denklem (6.2.15)'i denklem (6.2.14)'te yazarsak sağ tarafı,

$$\frac{U}{U'} F' F'' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \int_0^\eta \frac{F'}{\sqrt{f_1}} d\eta \left[1 - \frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{U''}{U'} \right] \sqrt{f_1} F'' \quad (6.2.16)$$

buluruz. Denklem (6.2.14) ve (6.2.16)'yı denklem (6.2.10)'da yazarsak,

$$(F')^2 - \left[1 - \frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{U''}{U'} \right] \int_0^\eta \frac{F'}{\sqrt{f_1}} d\eta \sqrt{f_1} F'' = 1 + f_1 F'''' + \frac{1}{2} f_1' F'' \quad (6.2.17)$$

elde edilir. Sonuç olarak denklem (6.2.17)'den görülüyor ki, η için düzgün

diferansiyel denklem eğer $\left[1 - \frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{U''}{U'} \right]$ ifadesi çözümlerse elde edilmiş olmaktadır

(Hansen, 1964). Bu ifadenin çözümü yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{U''}{U'} \right] &= \text{sabit} = c_2 \\ 2(1 - c_2) \frac{U'}{U} &= \frac{U''}{U'} \\ \frac{d}{dx} \ln U^{2(1-c_2)} &= \frac{d(\ln U')}{dx} \\ \frac{d}{dx} \ln \left[\frac{U'}{U^{2(1-c_2)}} \right] &= 0 \\ U^{2(1-c_2)} \frac{dU}{dx} &= c_3 \\ \frac{U^{2c_2-1}}{2c_2-1} &= c_3 x + c_4 \quad \left(c_2 \neq \frac{1}{2} \right) \\ U &= (c_5 x + c_6)^e \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

elde edilir. Burada $e = \frac{1}{2c_2-1}$ veya $c_2 = \frac{e+1}{2e}$, dir. Eğer $c_2 = \frac{1}{2}$ olursa $\left[1 - \frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{U''}{U'} \right]$

ifadesi $\left[\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} = c_3 \right]$ halini alır ve çözümlerse,

$$\begin{aligned} \ln U &= c_3 x + c_4 \\ U &= \exp(c_3 x + c_4) \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

elde edilir.

Yapılan kabuller altında denklem (6.2.17)'nin düzgün diferansiyel denklem haline dönüşümü sağlanmıştır. Görülüyor ki $U(x)$ fonksiyonu x 'in bir kuvveti veya

x 'e bağlı eksponansiyel formundadır. Eğer serbest akımın x 'in kuvveti olduğu bir sınır tabaka akışı problemi çözümü aranıyorsa, şu ana kadar yapılan çözüm doğru kabul edilir. Denklem (6.2.13)'te verilen y ve η arasındaki dönüşümün çözümü şu ana kadar yapılmamıştır. $f_1(\eta)$ keyfi bir fonksiyondur ve istenildiğinde seçilebilir. $c_1 = 0$ ve $f_1(\eta) = c_2$ olmak üzere,

$$y = \eta \sqrt{\frac{\nu}{U'c_2}}$$

veya

$$\eta = y \sqrt{\frac{U'c_2}{\nu}} = y \sqrt{\left[\frac{d(\ln U)}{dx} \left(\frac{U}{\nu} \right) c_2 \right]} \quad (6.2.20)$$

olur. Burada eğer U , denklem (6.2.18)'deki formda seçilirse,

$$\eta = y \sqrt{\frac{(1+e)c_5 U}{2\nu(c_5 x + c_6)}} = \frac{y}{(c_5 x + c_6)} \sqrt{\frac{(1+e)c_5}{2}} (\text{Re}_x)^{1/2} \quad (6.2.21)$$

elde edilir. Eğer U , denklem (6.2.19)'daki formda seçilirse,

$$\eta = y \sqrt{\left(\frac{c_3}{2} \right) \left(\frac{U}{\nu} \right)} \quad (6.2.22a)$$

olur. Burada c_3 referans uzunluğun tersi olmak üzere $c_3 = \frac{2}{L}$ şeklinde alınırsa ve

denklem (6.2.22a)'da kullanılırsa,

$$\eta = \frac{y}{L} \sqrt{\left(\frac{UL}{\nu} \right)} = \frac{y}{L} (\text{Re}_L)^{1/2} \quad (6.2.22b)$$

elde edilir. Denklem (6.2.22b) ve (6.2.21)'in benzer formda olduğuna dikkat edilmelidir. $U = (c_5 x + c_6)^e$ olmak üzere denklem (6.2.17) çözümlerse,

$$F''' + FF'' + \beta(1 - F'^2) = 0 \quad (6.2.23)$$

elde edilir (Hansen, 1964). Burada $\beta = 2e/(e+1)$ 'e eşittir.

$F(0) = 0$ sınır koşulu ile denklem (6.2.3) tekrar yazılırsa,

$$\nu = - \sqrt{\frac{e+1}{2} \frac{U}{c_5 x + c_6}} \nu \left(F + F' \eta \frac{e-1}{e+1} \right)$$

olur. Denklem (6.2.23) için dönüştürülmüş sınır koşulları ise,

$$\begin{aligned} F(0) &= F'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} F' &= 1 \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

olur. Bu denklem (6.2.23) ve (6.2.24) Falkner-Skan denklemleri olarak adlandırılır.

Serbest parametre analizi metodu adımlarını tekrar gözden geçirecek olursak,

1. Bağımlı değişkenin u 'nun formunda olduğu (denklem (6.2.5)) kabul edilmiştir. Denklem tek değişken olan η 'nın fonksiyonu olarak seçildi ve u 'nun sınır koşulları $F'(\eta)$ 'nın sınır koşulları olacak şekilde dönüştürülmüştür.
2. Bağımlı değişken için dönüşüm denklemi kullanılarak kısmi diferansiyel denklem η 'nın fonksiyonunu içeren bir denkleme dönüştürülmüştür.
3. Dönüştürülmüş denklem düzgün diferansiyel denklem haline nasıl dönüştürülür araştırması yapılmıştır. Burada açıkça görüldü ki, sadece F 'i içeren çeşitli terim katsayılarının ve bunların türevlerinin η 'nın fonksiyonu olması ile bu gerçekleştirilebilir. Bu kabulden hareketle η 'nın fonksiyonunu içeren bir y denklemi tanımlanmıştır. Bu denklem sonuç olarak η 'nın çözümünde kullanılmıştır.
4. η denklemi kullanılarak, dönüştürülmüş kısmi diferansiyel denklemler basitleştirilmiştir. Sonuç olarak, kabul edilen sabitlikle bir katsayı düşürülen denklem düzgün diferansiyel denklem haline gelmiştir (Hansen, 1964).

6.3. Runge-Kutta İterasyonu

Runge-Kutta metodu genellikle aşağıdaki gibi n 'inci dereceden düzgün diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Bu çalışmada denklem (6.2.23)'ün sayısal çözümünde kullanıldığı için yöntem detaylı olarak ele alınmıştır.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \quad (6.3.1)$$

Bu çözüm metodunda denklem (6.3.1)'in, bu denklemi oluşturan parçalara ait birinci dereceden diferansiyel denklem formlarına dönüştürülmesi ve bu şekilde

çözülmesinin daha uygun olacağını belirtmektedir. Bu işlem için kullanılan matematiksel dönüşüm değişkenlerini aşağıdaki gibi seçelim.

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= y \\
 Y_2 &= \frac{dy}{dx} \\
 &: \\
 Y_n &= \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}
 \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Yukarıdaki işlemden sonra bir tanımlama daha yaparak,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{dY_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = Y_2 \\
 F_2 &= \frac{dY_2}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = Y_3 \\
 &: \\
 F_n &= \frac{dY_n}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n)
 \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

şeklinde ifadeler yazabiliriz.

Bu metoda ait bir örnek yapılması anlaşılmayı artırmak adına önemlidir.

Örneğin,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} - 1 \tag{6.3.4}$$

gibi üçüncü dereceden bir diferansiyel denklem olsun. Bu denkleme ait sınır koşulları ise $x = 0$ 'da

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad ; \quad y = 0 \tag{6.3.5}$$

olsun. Burada daha önce belirtildiği üzere tanımlamalar yaparsak,

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= y \\
 Y_2 &= \frac{dy}{dx} \\
 Y_3 &= \frac{d^2 y}{dx^2}
 \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

yazabiliriz. Daha sonra denklem (6.3.6)'nın türevlerini alırsak,

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{dY_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = Y_2 \\
F_2 &= \frac{dY_2}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = Y_3 \\
F_3 &= \frac{dY_3}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = Y_2^2 - Y_2Y_3 - 1
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

elde ederiz. Sınır şartlarını uygularsak,

$$Y_1 = 0 \quad Y_2 = 0 \quad Y_3 = C \tag{6.3.8}$$

olarak bulunur. Yukarıda belirtilen F_1 , F_2 ve F_3 denklemleri üç adet birinci dereceden diferansiyel denklemdir ve bunlar denklem (6.3.4)'te belirtilen denklemin dengidir. Bu halde bir yerine Y_1 , Y_2 ve Y_3 gibi üç adet bağımsız değişkenimiz olmuş olmaktadır.

Çözüm metodunu anlattıktan sonra şimdi dikkatimizi aşağıda verilen birinci dereceden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin nasıl yapılacağına verelim.

$$F = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.3.9}$$

Sayısal çözümün esas konusu $a \leq x \leq b$ aralığında değişik bağımsız x değişkenleri etrafında $y(x)$ değeri için yaklaşık sonuçlar bulmaktır. $x = x_1$ noktasında $y = y_1$ değeri $y(x)$ değerinin bilindiği bir başlama noktası kabul edilirse, $x_i + \Delta x$ noktasında y_{i+1} değeri Runge-Kutta tekraralama formülü ile hesaplanabilir.

$$y_{i+1} = y_i + W_1k_1 + W_2k_2 + \dots + W_nk_n \tag{6.3.10}$$

Ağırlık fonksiyonları W_1, W_2, \dots, W_n , n 'inci derece Taylor serisi açılımının y_i için tekraralama formülü eşleştirme terimleri olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca buradaki k terimleri, denklem (6.3.9)'da verilen $\frac{dy}{dx}$ türevlerine bağlı diferansiyel denklemlerde Δx artımı sonucu oluşan geçici değerlerdir. n 'inci dereceden bir yaklaşımda oluşan k değerleri,

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i)\Delta x \\
k_2 &= f(x_i + p_1\Delta x, y_i + q_{11}k_1)\Delta x \\
k_3 &= f(x_i + p_2\Delta x, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)\Delta x \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1}\Delta x, y_i + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + q_{n-1,3}k_3 + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})\Delta x
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

şeklindedir. Denklem (6.3.11)'deki p ve q terimleri Taylor serisi açılımı ile oluşan terimlerdir.

İkinci dereceden Runge-Kutta tekniği tekrarlama formülü için gerekli denklemler,

$$y_{i+1} = y_i + W_1 k_1 + W_2 k_2 \quad (6.3.12)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \Delta x \quad (6.3.13)$$

$$k_2 = f(x_i + p \Delta x, y_i + q k_1) \Delta x$$

şeklindedir. Runge-Kutta metodunun amacı y_{i+1} terimini, y_i terimine ve $\frac{dy}{dx}$ birinci türevine eşitlemektir. Aşağıda verilen ikinci dereceden Taylor serisi açılımında istenilen değişkenler mevcut olduğu için bu metodu kullanmak faydalıdır.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y_i}{dx^2} (\Delta x)^2 \quad (6.3.14)$$

Denklem (6.3.9)'u kullanarak, $\frac{dy_i}{dx} = f(x_i, y_i)$ ve $\frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{dF_i}{dx}$ ifadelerini yazabiliriz. Burada F , x ve y 'nin bir nokta fonksiyonudur ve zincir kuralı ile hesaplanırsa,

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (6.3.15)$$

elde edilir. Devam edilirse,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} (1) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (6.3.16)$$

oluşur. Denklem (6.3.15) ve (6.3.16)'yı denklem (6.3.14)'le birleştirip, denklem (6.3.9)'u kullanırsak,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} f(x_i, y_i) \right] (\Delta x)^2 \quad (6.3.17)$$

elde edilir. Burada denklem (6.3.13)'teki $f(x, y)$ fonksiyonunun terimleri olan k_1 ve k_2 'yi tanımlamak için, bu katsayıların $\frac{dy}{dx}$ birinci türevinin bir fonksiyonu olması için

zorlamalıyız. k_1 'in değeri her x aralığının başlangıcındaki $\frac{dy_i}{dx}$ türevine bağlıdır.

k_2 'nin değeri ise $0 < p < 1$ aralığında Δx artımı içinde herhangi bilinmeyen bir yerin türevine bağlıdır.

Şimdi $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ türevini $f(x_i, y_i)$ cinsinden iki değişken için Taylor serisi açılımı yaparak bulabiliriz. Bu açılım,

$$\begin{aligned} f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) &= f(x_i, y_i) + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \Delta y \\ &+ \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \frac{(\Delta y)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

şeklindedir. İkinci derece terimler yüksek dereceden terimlerin yanında ihmal edilebilir. Bununla birlikte, denklem (6.3.13)'te verilen k_2 'nin tanımına uygun şekilde davranmak için $f(x_i + p\Delta x, y_i + qk_1)$ için bir açılıma gerek duyulmaktadır. Bu açılım,

$$f(x_i + p\Delta x, y_i + qk_1) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} p\Delta x + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} qk_1$$

şeklindedir. Denklemin her iki tarafını Δx ile çarpıp, denklem (6.3.13)'te verilen k_1 tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_i + p\Delta x, y_i + qk_1) \Delta x \\ &= f(x_i, y_i) \Delta x + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} p(\Delta x)^2 + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} qf(x_i, y_i) (\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

k_2 elde edilmiş olur. Denklem (6.3.12)'de k_1 ve k_2 'nin türetilmiş denklemlerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + W_1 f(x_i, y_i) \Delta x + W_2 f(x_i, y_i) \Delta x \\ &+ W_2 \left[\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} p(\Delta x)^2 + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} qf(x_i, y_i) (\Delta x)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

elde edilir. y_i için yapılan ikinci dereceden Taylor serisi açılımının doğruluğunu sağlamak için denklem (6.3.20) ile denklem (6.3.17)'deki W_1 ve W_2 değerlerinin aynı olması gerekmektedir. Bu iki denklemin katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 1 \\ W_2 p &= \frac{1}{2} \\ W_2 q &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

elde edilir. Burada üç denklem ve dört bilinmeyen bulunmaktadır. Eğer denklem (6.3.13)'e geri dönecek olursak, $x = x_i + \Delta x$ noktasında k_2 'nin uygun değeri için $p = 1$ alınması gerektiği görülmektedir. Böylece, $p = 1$ alınarak denklem (6.3.21)'deki terimler çözümlerse, $W_2 = \frac{1}{2}$, $W_1 = \frac{1}{2}$ ve $q = 1$ olarak bulunur. Sonuç olarak denklem (6.3.12) ve (6.3.13) tekrar yazılırsa,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (6.3.22)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)\Delta x \quad (6.3.23)$$

$$k_2 = f(x_i + \Delta x, y_i + k_1)\Delta x \quad (6.3.24)$$

elde edilir.

İkinci dereceden Runge-Kutta metodunu özetleyecek olursak, ilk olarak $x = x_i$ noktasında y_i değerinin mutlaka bilinmesi gerekmektedir. Sonra, Δx değeri belirlendikten sonra denklem (6.3.23) kullanılarak $f(x_i, y_i)$ için k_1 'in başlangıç değeri bulunur. $y_i + k_1$ değeri artık hesaplanabilir duruma gelmiştir. Bundan sonra k_2 'yi bulmak için $f(x, y)$, $x_i + \Delta x$ ve $y_i + k_1$ değerleri için hesaplanır. Sonra denklem (6.3.22) kullanılarak y_{i+1} hesaplanır. Son olarak, bulunan bu y ve $x = x_i + \Delta x$ değerleri denklem (6.3.23)'te kullanılarak işlemin belirlenen Δx değeri için tekrarlanması için kullanılır.

Aynı prosedür kullanılarak üçüncü dereceden Runge-Kutta tekniği sonucu oluşan tekrarlamaya denklem takımları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6} \quad (6.3.25)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)\Delta x \quad (6.3.26)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x \quad (6.3.27)$$

$$k_3 = f(x_i + \Delta x, y_i - k_1 + 2k_2)\Delta x \quad (6.3.28)$$

Benzer şekilde dördüncü dereceden Runge-Kutta tekniği sonucu oluşan tekrarlamaya denklem takımları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (6.3.29)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)\Delta x \quad (6.3.30)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)\Delta x \quad (6.3.31)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)\Delta x \quad (6.3.32)$$

$$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i - k_3)\Delta x \quad (6.3.33)$$

6.4. Nachtsheim-Swigert İterasyon Metodu

Nachtsheim-Swigert iterasyonu iki-nokta sınır-değer problemlerinin çözümünde sıklıkla karşılaşılan yakınsamama ve salınım problemlerinin aşılması için kullanılan bir metottur. Bu metot sayesinde çözümlerde karşılaşılan iraksama yüzdesi azalmaktadır.

Denklem (5.3.12) ve sınır şartları denklemleri olan denklem (5.3.13) asimptotik ve iki-nokta sınır-değer problemi formundadır. İki-nokta sınır-değer problemlerinde sonlu sınır şartları da sağlanmalıdır. Newton-Raphson metodu kullanılarak iterasyon için gerekli tahmini gradyanlar bulunabilir. Newton-Raphson metodu sınır tabaka dışındaki gerekli yakınsamayı sağlasa bile asimptotik yakınsamayı garantilememektedir. Asimptotik yakınsama için, $\eta = \eta_{max}$ iken $F''(\eta) \rightarrow 0$ ve $\eta = \eta_{max}$ iken $F'(\eta) \rightarrow 1$ şartları sağlanmalıdır. η_{max} için gerekli değer bulunmaya çalışılırken çeşitli denemeler veya sayısal iterasyon yapılırken elde edilen hata değerlerinden yararlanılabilir.

Nachtsheim-Swigert iterasyonu asimptotik ve iki-nokta sınır-değer problemi çözümünde kullanılabilir. Bu çözüm tekniğinde önce $F''(0)$ 'ın değeri tahmin edilir daha sonra Falkner-Skan denklemi $\eta = 0$ 'dan $\eta = \eta_{max}$ olana kadar (η_{max} daha önceden belirlenecek) iterasyon yapılarak çözülür. η_{max} 'ın değeri sonsuzdaki sayısal değerdir örneğin belirlenen sınır şartı gibi. İlk iterasyon tamamlandıktan sonra, $F'(\eta_{max})$ 'ın değeri istenilen değer olan 1 ile karşılaştırılır ve ikinci $F''(0)$ değeri tahmin edilir ve ikinci iterasyon başlar.

$F''(0)$ 'ın tahmini başlangıç değeri doğru değere yeterince yaklaşık olmazsa, denenen çözüm ıraksayabilir. Yapılan bu çözümlemede ıraksamanın önüne geçebilmek için η_{max} 'ın değerine bir limit konulmaktadır ayrıca $F''(0)$ 'ın tahmini için Nachtsheim-Swigert iterasyonu kullanılabilir. Bu şekilde yapılan iyi bir $F''(0)$ tahmini ile η_{max} yükseltilebilir. Laminer sınır tabaka denklem çözümünde doğru çözüm için Falkner-Skan denkleminde η_{max} 'ın en yüksek değeri $\eta_{max} = 6$ olarak alınabilmektedir.

Nachtsheim-Swigert iterasyonu çözüm esnasında karşılaşılan salınım ve yakınsamama gibi zorlukların üstesinden gelmektedir. Asimptotik yakınsama için, $\eta = \eta_{max}$ iken $F''(\eta) \rightarrow 0$ ve $\eta = \eta_{max}$ iken $F'(\eta) \rightarrow 1$ şartları sağlanmalıdır. Bununla birlikte, burada sadece $F''(0)$ ile anılan bir adet ayarlanabilir parametre vardır. Bu şekilde her iki koşulun eşzamanlı karşılanması imkânsız olmaktadır. Bu yüzden gerekli olan asimptotik sınır koşulu η_{max} 'ta eğer,

$$F'(\eta_{max}) = 1 + \delta_1 \quad (6.4.1)$$

ve

$$F''(\eta_{max}) = \delta_2 \quad (6.4.2)$$

ise karşılanır. Burada δ_1 ve δ_2 çok küçük sayılardır. Burada birinci derece Taylor serisi açılımını yaparsak,

$$F'(\eta_{max}) = F'_c(\eta_{max}) + \frac{\partial F'(\eta_{max})}{\partial F''(0)} dF''(0) \quad (6.4.3)$$

ve

$$F''(\eta_{max}) = F''_c(\eta_{max}) + \frac{\partial F''(\eta_{max})}{\partial F''(0)} dF''(0) \quad (6.4.4)$$

elde edilir.

Burada sonlu farklar yöntemi kullanılarak diferansiyeller tariflenirse,

$$\delta_1 = F'_c + F'_x \Delta x - 1 \quad (6.4.5)$$

$$\delta_2 = F''_c + F''_x \Delta x \quad (6.4.6)$$

elde edilir. Burada η_{max} değerinde sınır koşulları için gerekli değerler bu sonuçları elde etmek için kullanılmaktadır. Nachtsheim ve Swigert denklem (6.4.5) ve (6.4.6)'yı

çözmek için en küçük kareler çözümünü uygulamışlardır. $\delta_1^2 + \delta_2^2$ ifadesini x 'e bağlı minimize etme prosedürü ise tüm ifadenin x 'e bağlı türevini almak ve sıfıra eşitlemektir. $\Delta x = F''(0)$ için çözüm sonucunda η_{max} için,

$$\Delta x = \frac{F'_x(1 - F'_c) - F''_x F''_c}{F'^2_x + F''^2_x} \quad (6.4.7)$$

elde edilir. Burada Nachtsheim ve Swigert bir karıştırma fonksiyonu kullanarak gerekli yakınsama türevleri olan F'_x ve F''_x 'i kararlaştırmışlardır. Bununla birlikte, yakınsama türevlerinin tanımı yukarıda sonlu farklar tanımıyla yapılmıştır. Denklem (6.4.7)'nin incelenmesi temel sebebi vermektedir. F'_x ve F''_x 'in sonlu farklar tanımıyla bulunan değerleri çok büyüktür fakat $F'_c(\eta_{max})$ ve $F''_c(\eta_{max}) = 0(1)$ 'e eşittir. Bir sonraki iterasyonda türetilmiş $F''(0)$ ve $F'_c(\eta_{max})$ değerlerini oluşturmakta ve buradan F'_x ve F''_x değerleri yenilenmekte, $F''(0)$ 'in istenen değerine ulaşıncaya kadar bu iterasyon devam etmektedir. Bu prosedür ancak $F''(0)$ 'ın başlangıç tahmininden çok uzak yapıldığı durumlarda sonuçsuz kalmaktadır.

Nachtsheim ve Swigert çözüm tekniğinde η 'nın küçük değerleri için yapılan tüm çözümlerde aşağı yukarı doğru sonucu verme eğilimi bulunmaktadır. Yani tüm çözümler yakınsayacakmış gibi hareket etmektedir. Böylece örneğin $\eta_{max} = 2$ için $F''(0)$ 'ın başlangıç değerini doğru tahmin edebilmek için Nachtsheim ve Swigert tekniği ile çözüm yaptırılmaktadır. Daha sonra bulunan bu $F''(0)$ değeriyle yüksek η_{max} değerleri için örneğin $\eta_{max} = 5$ veya 6 Nachtsheim ve Swigert iterasyon tekniğinin istenen dış sınır koşulları için çok hızlı bir şekilde yakınsadığı görülmektedir.

BÖLÜM 7

KAMA ÜZERİNDE OLUŞTURULAN LAMİNER SINIR TABAKA DENKLEMLERİNİN SAYISAL YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜ VE SONUÇLAR

7.1. FORTRAN Programının Oluşturulması

Bu bölümde beşinci bölümde elde ettiğimiz kama açısına bağlı laminer sınır tabaka korunum denklemlerinin altıncı bölümde anlatılan sayısal çözüm teknikleri ile çözülmesi için kullanılacak iterasyon algoritmalarının bir FORTRAN programı haline dönüştürülmesi açıklanmakta ve programın sonuçları incelenmektedir.

Sayısal çözümleme sistemindeki ilk adım, denklem (5.3.12)'deki gibi verilen üçüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemi birbirine eşit üç adet birinci dereceden diferansiyel denklem şeklinde yazmaktır. Bu tip sayısal çözüm tekniğine Runge-Kutta iterasyonu denilmektedir. Bu işlemle ilgili açıklama altıncı bölümde verilmektedir ve bu denklemleri aşağıdaki gibi yazabiliriz.

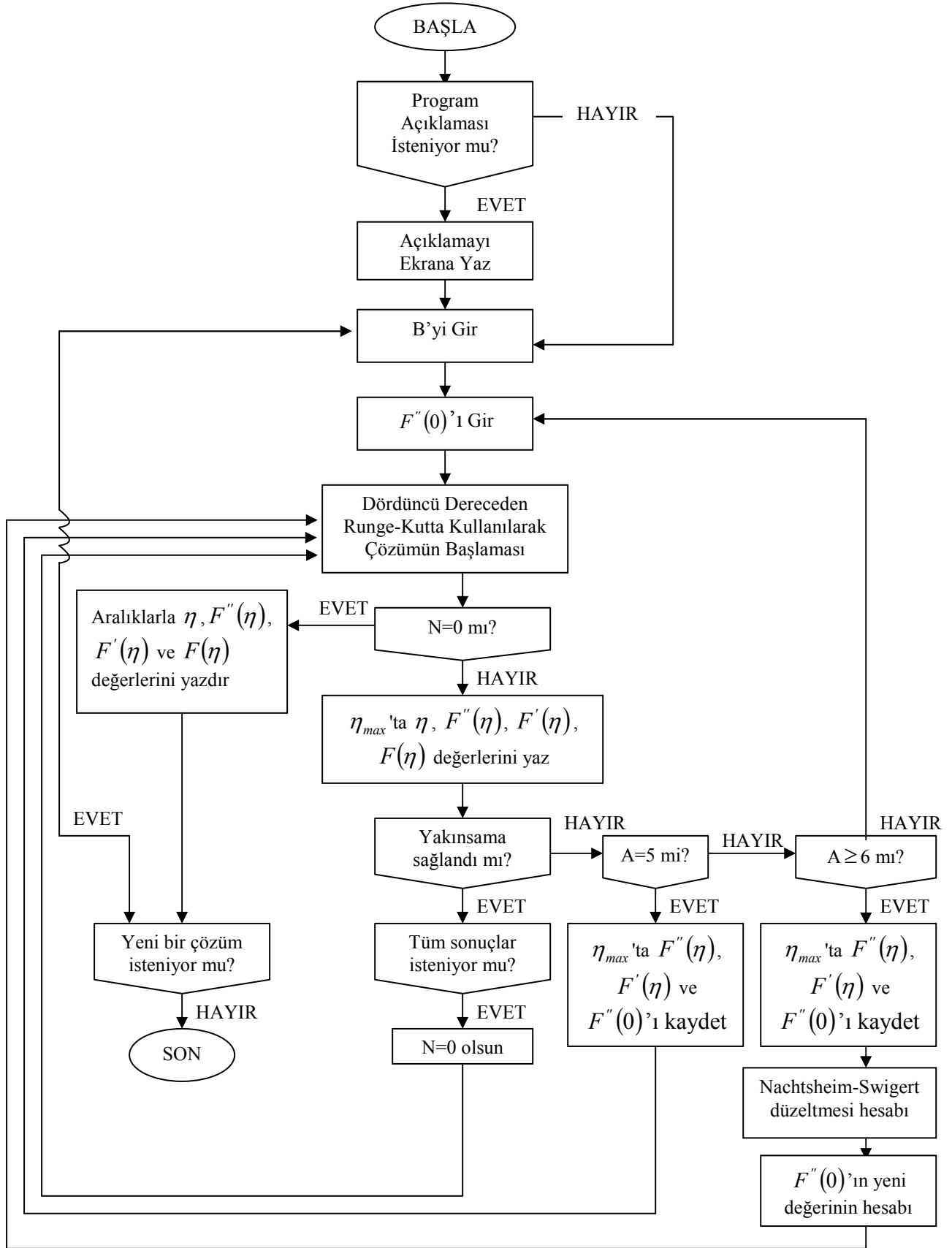
$$\begin{aligned} Z &= F \\ Y &= F' \\ X &= F'' \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Ayrıca burada,

$$\begin{aligned} F_1 &= Y \\ F_2 &= X \\ F_3 &= -ZX - \beta(1 - Y^2) \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

tanımlamaları yapılabilir. Bunlar; $F_1 = dZ/d\eta$, $F_2 = dY/d\eta$, $F_3 = dX/d\eta$ şeklinde yazılabilen üçüncü dereceden denklemlerdir. Burada gerek duyulacak sınır şartları $\eta = 0$ durumunda $Z(0)$, $Y(0)$ ve $X(0)$ 'dir.

Bahsedilen bu sayısal çözümü ve gerekli belirsiz sayıdaki iterasyonu çözmek için FORTRAN programlama dilinde bir program oluşturulmuştur. Bu programın akış şeması Şekil 7.1.1'de verilmektedir.



Şekil 7.1.1. Akış şeması.

Oluşturulan bilgisayar programı Falkner-Skan denklemini çözmektedir. Program dört ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler;

- 1) Seçmeli olarak sunulan ve programın açıklamasının yapıldığı birinci kısım,
- 2) Runge-Kutta iterasyonunun yapıldığı ikinci kısım,
- 3) Nachtsheim-Swigert düzeltmesinin yapıldığı üçüncü kısım
- 4) Sonuçların yazıldığı dördüncü kısım.

Programın bölümlerini detaylı olarak açıklayacak olursak;

1) Programın ilk bölümünde program içerisinde kullanılan çeşitli mantıksal kontrol değişkenlerinin başlangıç değerleri verilmektedir. Daha sonra Falkner-Skan basınç gradyanı parametresinin, β , yani kama açısının istenilen değeri program çalıştırıldığı zaman kullanıcıdan derece cinsinden sorulmaktadır. Bu şekilde kama açısı kullanıcı tarafından belirlenmektedir. Bilinmeyen başlangıç koşulunun, $F''(0)$, tahmini değerinin yine kullanıcı tarafından programa girmesi istenmektedir. η_{max} 'ın değeri, ve adım boyutu, birbirine bağlı olarak ayarlanmakta ve program kodları arasında yer almaktadır. Adım boyutu program kullanıldığı sürece sabit kalmaktadır ancak η_{max} program içerisindeki döngü sonucuna göre sürekli değişmektedir. Programın başlatılabilmesi için gerekli başlangıç koşulları yine program kodları içerisinde verilmektedir.

2) Programın ikinci bölümünde dördüncü dereceden Runge-Kutta iterasyonu işlem adımları bulunmaktadır. Bu kısımda program tarafından üretilen η_{max} değeri ile verilen η_{max} 'ın değeri, karşılaştırılmakta ve koşul sağlanıyorsa program daha ileriki bölümlere geçilmesine izin vermektedir. η_{max} için gerekli kriterler sağlanmışsa programın asimtotik yakınsama için gerekli dış sınır şartları ile testi yapılmaktadır. Daha sonra Nachtsheim-Swigert iterasyonu kısmına geçilmektedir. Burada başlangıç koşulunun, değeri program tarafından 0.001 artırılmaktadır. Daha sonra program Runge-Kutta iterasyonu kısmına geri dönmektedir ve böylece programın ikinci geçişi tamamlanmaktadır.

İlk döngüden sonra, program tarafından η_{max} 'ta üretilen F' , F'' ve $F''(0)$ değerleri kaydedilmektedir. İkinci döngüden sonra, program tarafından η_{max} 'ta üretilen

F' , F'' ve $F''(0)$ değerleri de ayrı bir tanımlama ile kaydedilmektedir. Daha sonra $\Delta F'(\eta_{max})/\Delta F''(0)$ ve $\Delta F''(\eta_{max})/\Delta F''(0)$ değerleri oluşturulup kaydedilmektedir.

3) Programın üçüncü bölümünde Nachtsheim-Swigert düzeltmesi kısmı bulunmaktadır. Nachtsheim-Swigert düzeltmesi kısmında bir değer hesaplanmakta ve bir önceki $F''(0)$ değerine eklenmektedir. Böylece, yeni Nachtsheim-Swigert iterasyon değerleri hesaplanmış olmaktadır. Üç iterasyon sonunda mantıksal değişkenlerden birinin değeri sekize ulaşmaktadır. Bu sonuçla η_{max} 'ın değeri 2 artırılmakta ve mantıksal parametrenin değeri 5 olarak değiştirilmektedir. Sonraki üç iterasyondan sonra, η_{max} tekrar 2 artırılmakta fakat ek artış yasaklanan $\eta_{max} > 5.5$ olmaktadır. Böylece program üç iterasyon $\eta_{max} = 2$ için üç iterasyon da $\eta_{max} = 4$ için yapmış olmaktadır. Geriye kalan tüm iterasyonlar $\eta_{max} = 6$ için yapılmaktadır. Döngü istenilen dış sınır koşulu belirlenen hataya yakınsayana kadar devam etmektedir.

4) Programın dördüncü bölümünde, yakınsama sağlandıktan sonra tüm sonuçların görülmek istenip istenmediği sorulmaktadır. Daha sonra programdan çıkmadan programa farklı değerler için çözüm yaptırılıp yaptırılmayacağı sorulmaktadır. Böylece program sonuçlanmaktadır. Sonuçlar ekrana yazdırılmaktadır.

7.2. Program Sonuçlarının Doğrulanması ve Çözümler

Oluşturulan programın verdiği sonuçların doğruluğunun araştırılması mevcut programın sağlıklı çalışıp çalışmadığını kontrol etme açısından büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle örnek olarak bazı çözümler yapılmış ve Falkner and Skan (1931) tarafından bulunan kesin sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır. Yapılan karşılaştırma Çizelge 7.2.1'de verilmektedir.

Yapılan karşılaştırmadan da görüleceği üzere program tarafından bulunan sonuçlar kesin sonuçlara çok yakındır. Böylece programın doğru sonuçlar ürettiği anlaşılmaktadır. Bu doğrulama işleminden sonra programın çözüm üretme mantığı ve yapılan sayısal çözümlerden bahsedilmektedir.

Çizelge 7.2.1 Oluşturulan programın sonuçlarının karşılaştırılması.

β°	Program Sonucu	Kesin Çözüm
	$F''(0)$	$F''(0)$
0	0.4696	0.4696
9	0.5311	0.531128
18	0.5870	0.587035
36	0.6867	0.686708
54	0.7747	0.774755
72	0.8544	0.854421
90	0.9276	0.92768
108	0.9958	0.995836
144	1.1202	1.120268
180	1.2325	1.232585

$\beta = 0$ yani düz levha için $dP/dx = 0$ Falkner-Skan denkleminin çözümünü inceleyelim. Oluşturulan program kullanılarak bilinmeyen $F''(0)$ değeri 0.4696 bulunmaktadır. Bu değer Falkner-Skan denkleminin çözümünde çeşitli $\beta > 0$ durumları için bilinmeyen $F''(0)$ değerlerinin tahminlerinde kullanmak için bir referans oluşturmaktadır.

$\beta = 0.25$ 'in anlamı, üzerinden akış olan iki boyutlu kama açısının $\pi/4$ olduğudur. $\beta > 0$ durumunda, sürtünmesiz akışta pozitif basınç gradyanı oluşur. Bunun anlamı, akış yönünde basıncın azaldığıdır. Pozitif basınç gradyanı, ince bir sınır tabaka oluşmasına sebep olmakla birlikte yüzeyde yüksek hız gradyanı oluşmasına da imkan sağlar. Sonuçta, hız gradyanı direkt olarak F'' 'la denklem (5.3.9)'da gösterildiği gibi orantılıdır ve $\beta = 0.25$ için $F''(0)$ başlangıç tahmini 0.4694'ten büyük olmalıdır.

$\beta = 0.25$ için $F''(0) = 0.6$ başlangıç değeri ile oluşturulan programda çözüm yapıldığında $F''(0) = 0.7319$ olarak bulunmaktadır. Ayrıca doğru bir başlangıç tahmini ile iterasyona başlamanın etkisi ile yakınsama da çok daha hızlı olmaktadır.

$\beta = 0$, $U = 1.5 \text{ m/s}$, ve $Re = 100000$ için oluşturulan FORTRAN programının çıktısı Çizelge 7.2.2'de ki gibi olmaktadır.

Çizelge 7.2.2 $\beta = 0$, $U = 1.5 \text{ m/s}$, ve $Re = 100000$ için oluşturulan FORTRAN programının çıktısı.

ETA F** F* F
0.000000E+00 4.695944E-01 0.000000E+00 0.000000E+00
I1= 1.216815 I2= 4.696201E-01
5x10**-7 HASSASİYETTE F* VE 5x10**-6 HASSASİYETTE F** ICIN
YAKINSAMA SAGLANDI.
TUM ITERASYON ADIMLARINI GORMEK ISTIYORMUSUNUZ? EVETSE 1 'E,
HAYIRSA 2 'YE BASINIZ.

η	F''	F'	F	u	v
0.20000	0.46930	0.09390	0.00939	0.14086	0.00186
0.40000	0.46725	0.18760	0.03755	0.28140	0.00365
0.60000	0.46173	0.28057	0.08438	0.42086	0.00536
0.80000	0.45119	0.37196	0.14967	0.55794	0.00698
1.00000	0.43438	0.46063	0.23299	0.69094	0.00849
1.20000	0.41056	0.54524	0.33365	0.81786	0.00985
1.40000	0.37969	0.62438	0.45072	0.93657	0.01105
1.60000	0.34249	0.69669	0.58295	1.04504	0.01207
1.80000	0.30045	0.76105	0.72886	1.14157	0.01287
2.00000	0.25567	0.81669	0.88679	1.22503	0.01346
2.20000	0.21058	0.86330	1.05493	1.29494	0.01384
2.40000	0.16756	0.90106	1.23151	1.35159	0.01400
2.60000	0.12861	0.93059	1.41481	1.39589	0.01398
2.80000	0.09511	0.95287	1.60326	1.42930	0.01380
3.00000	0.06771	0.96905	1.79555	1.45357	0.01348
3.20000	0.04637	0.98036	1.99056	1.47054	0.01305
3.40000	0.03054	0.98797	2.18744	1.48195	0.01255
3.60000	0.01933	0.99288	2.38557	1.48932	0.01198
3.80000	0.01176	0.99594	2.58447	1.49391	0.01137
4.00000	0.00687	0.99777	2.78386	1.49665	0.01074
4.20000	0.00386	0.99881	2.98353	1.49822	0.01009
4.40001	0.00208	0.99939	3.18335	1.49909	0.00944
4.60001	0.00108	0.99970	3.38327	1.49955	0.00877
4.80002	0.00054	0.99986	3.58322	1.49978	0.00810
5.00002	0.00026	0.99993	3.78320	1.49990	0.00743
5.20002	0.00012	0.99997	3.98319	1.49995	0.00676
5.40003	0.00005	0.99998	4.18319	1.49998	0.00609
5.60003	0.00002	0.99999	4.38320	1.49999	0.00542
5.80004	0.00001	0.99999	4.58320	1.49999	0.00475
6.00004	0.00000	1.00000	4.78321	1.49999	0.00408

Denklem (5.3.9) ve $F''(0)$ 'ın sayısal çözümünün kullanılmasıyla yüzey boyunca uzaklığa bağlı bir fonksiyon olarak yüzey kayma gerilmesi hesaplanabilir. Örneğin, x 'in ve Reynolds sayısının bir fonksiyonu olarak yerel yüzey kayma gerilmesi hesaplanacaksa, en doğru denklem,

$$\tau(x,0) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{C}{\nu} x^{(e-1)/2} F''(0) \quad (7.2.1)$$

şeklindedir. Düz levha için, $\beta = e = 0$ ve $U = C$ olduğu göz önüne alınırsa, denklem (7.2.1) aşağıdaki hali alır.

$$\tau(x,0) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} F''(0) \quad (7.2.2)$$

Eğer bu denklem düz levha için oluşturulan program tarafından bulunan $F''(0) = 0.4696$ değeri kullanılarak özelleştirilirse, boyutsuz yüzey kayma gerilmesi denklemi,

$$\tau(x,0) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.332 \frac{\mu U}{x} Re_x^{1/2} \quad (7.2.3)$$

olarak bulunur. Reynolds sayısının $Re_x = Ux/\nu$ olduğu hatırlanarak, yerel boyutsuz yüzey sürtünme katsayısı,

$$C_f = \frac{\tau(x,0)}{\rho U^2 / 2} \quad (7.2.4)$$

yazılabilir. Burada boyutsuz yüzey kayma gerilmesi katsayısı yerine denklem (7.2.2) kullanılırsa, yerel boyutsuz yüzey sürtünme katsayısı,

$$C_f = \sqrt{2} F''(0) Re_x^{-1/2} \quad (7.2.5)$$

ifadesi elde edilir. Böylece $F''(0) = 0.4696$ değeri için sonuç denklemimizi aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$C_f = 0.664 Re_x^{-1/2} \quad (7.2.6)$$

Denklemden de görüldüğü üzere, yüzey sürtünme katsayısı için bulunan bu değer Blasius tarafından bulunan kesin çözüme eşittir.

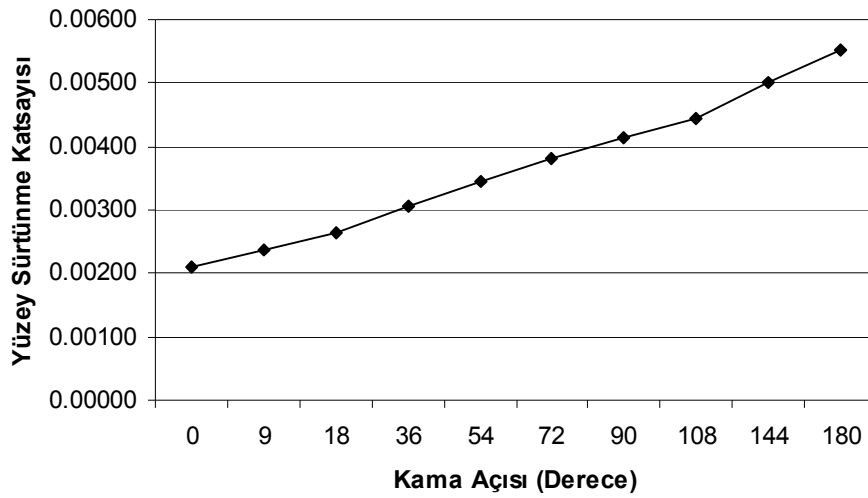
β 'nın $0 \leq \beta \leq 1$ gibi yani $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ aralığındaki farklı değerleri için çözümler oluşturulursa; örneğin yerel yüzey alanı üzerinde oluşan çeşitli basınç

gradyanlarının yüzey sürtünme katsayısına etkisi rahatlıkla görülebilir. β 'nın farklı değerleri için yapılmış bazı çözümler Çizelge 7.2.3'te verilmektedir.

Çizelge 7.2.3 Falkner-Skan denkleminin sonuçları.

β°	$F''(0)$	δ^* , (Yer Değişirme Kalınlığı Parametresi)	Θ , (Momentum Kalınlığı Parametresi)
0	0.4696	1.21678	0.4696
9	0.53113	1.14174	0.45147
18	0.58704	1.08032	0.43546
36	0.68671	0.98416	0.40823
54	0.77475	0.91099	0.38573
72	0.85442	0.85263	0.36669
90	0.92768	0.80458	0.35027
108	0.99584	0.76397	0.33591
144	1.12027	0.69868	0.31185
180	1.23259	0.6479	0.29234

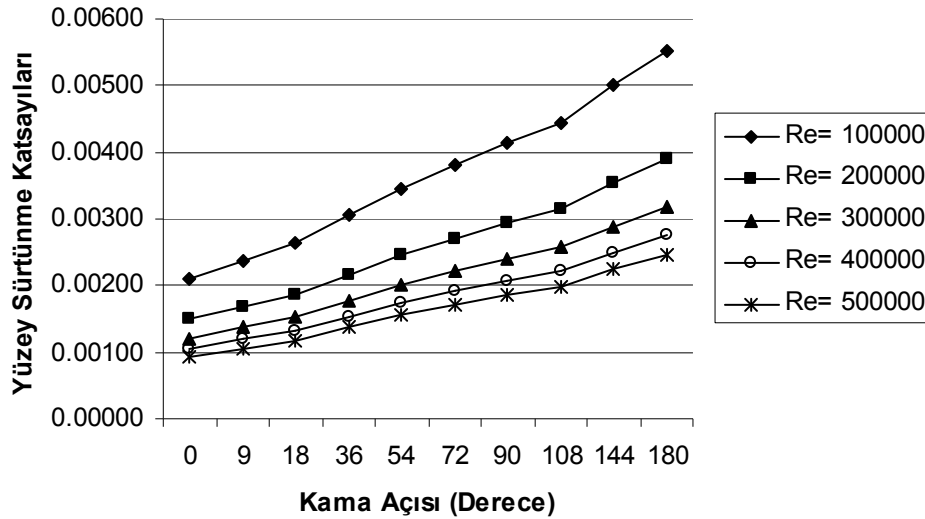
Çizelge 7.2.3'te verilen değerler kullanılarak yüzey sürtünme katsayısı, C_f , Reynolds sayısı 100000 için denklem (7.2.5) kullanılarak hesaplanırsa Şekil 7.2.1 elde edilir.



Şekil 7.2.1 Yüzey sürtünme katsayısının kama açısına bağlı olarak değişimi.

Şekil 7.2.1'den de görüldüğü üzere, yüzey sürtünme katsayısı kama açısı arttıkça artmaktadır. Bunun nedeni kama açılı cismin kama açısı arttıkça akış yönüne karşı oluşturduğu etkinin artmasıdır. Burada bulunan yüzey sürtünme katsayısı değerleri Cramer (2007) ile karşılaştırılmış ve çok büyük doğruluk oranlarına ulaşıldığı görülmüştür.

Farklı Reynolds sayıları ve kama açıları için yüzey sürtünme katsayısının değişimi ise Şekil 7.2.2'de gösterilmektedir.



Şekil 7.2.2 Farklı Reynolds sayıları ve kama açıları için yüzey sürtünme katsayısının değişimi.

Şekil 7.2.2'den görüleceği üzere, sabit kama açısı göz önüne alındığında Reynolds sayısı arttıkça yüzey sürtünme katsayısının azaldığı görülmektedir. Reynolds sayısının atalet kuvvetlerin viskoz kuvvetlere oranını ifade ettiği hatırlanırsa Reynolds sayısının artan değerlerinde atalet kuvvetleri viskoz kuvvetlere oranla çok büyük değerlere erişmeye başlıyor demektir. Bunun sonucu olarak viskoz kuvvetler neredeyse ihmal edilebilir hale gelmektedir. Bu nedenle hız arttıkça viskoz kuvvetler etkisini yitirmeye başlamaktadır. Durum akış laminer olduğu sürece devam edecektir.

Eğer $F''(0)$ 'ın başlangıç tahmini gerçek değerinden çok uzak olursa, bilgisayar programı yakınsayamayabilir. Program kullanırken $F''(0)$ 'ın başlangıç tahmini için çeşitli yanlış başlangıçlar yapılabilir. Buna β 'nın 1'ye yakın değerleri için özellikle dikkat edilmelidir.

Oluşturulan FORTRAN programında yüzey kayma gerilmesinin bulunmasına ek olarak, sınır tabaka içerisinde η 'nın fonksiyonu olarak verilen F , F' ve F'' değerleri de bulunmaktadır. Bu değerler bilindikten sonrada hız profilleri $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ denklem (5.3.7) ve (5.3.8) kullanılarak bulunabilir. Bu denklemler aşağıdaki gibidir.

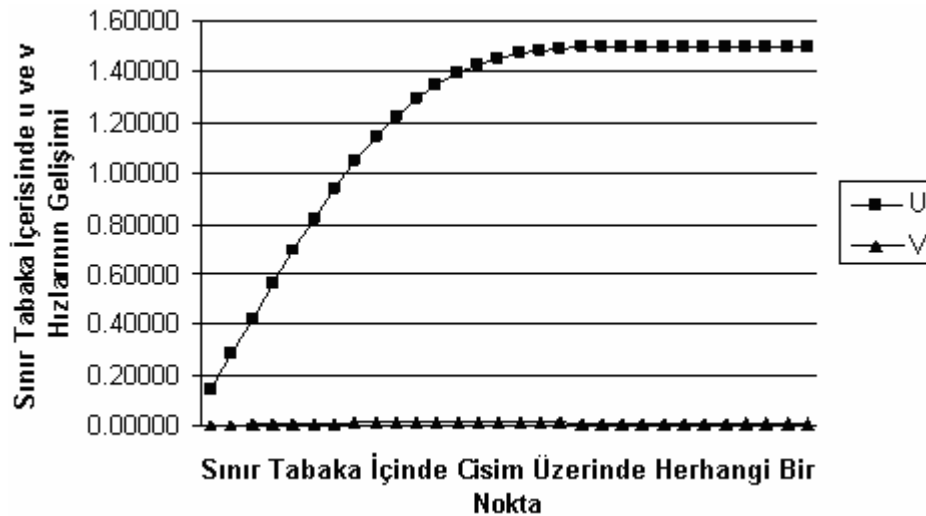
$$u = F'U \quad (5.3.7)$$

$$v = -\sqrt{\frac{e+1}{2}} C \nu x^{(e-1)/2} \left(F + F' \eta \frac{e-1}{e+1} \right) \quad (5.3.8)$$

Denklem (5.3.8)'de verilen v ifadesi $U = Cx^e$ ifadesi kullanılarak düzenlenirse,

$$v = -\sqrt{\frac{e+1}{2}} \frac{U^2}{\text{Re}_x} \left(F + F' \eta \frac{e-1}{e+1} \right)$$

halini alır. Verilen bu iki denklem program tarafından üretilen terimler kullanarak çözülebilir. Çizelge 7.2.1'de verilen şartlarda u ve v hızlarının laminer sınır tabaka içerisindeki gelişimleri Şekil 7.2.3 elde edilir.



Şekil 7.2.3 u ve v hızlarının laminer sınır tabaka içerisindeki gelişimi.

Şekil 7.2.3'ten görülmektedir ki u hızı iterasyonun her bir adımında serbest akım hızına yaklaşmaktadır. Sonuç olarak sınır tabaka sınırına yaklaştıkça iterasyon sonuçlarının doğru değere yakınsaması ile u hızı da serbest akım hızına eşit hale gelmektedir.

Daha önceden bahsedilen yer değiştirme kalınlığı, δ^* , ve momentum kalınlığı, Θ , ifadeleri oluşturulan programından gelen ve η 'nin fonksiyonu olan F , F' ve F'' değerleri ile tekrar düzenlenecek olursa sıkıştırılamaz akış için, yer değiştirme kalınlığı,

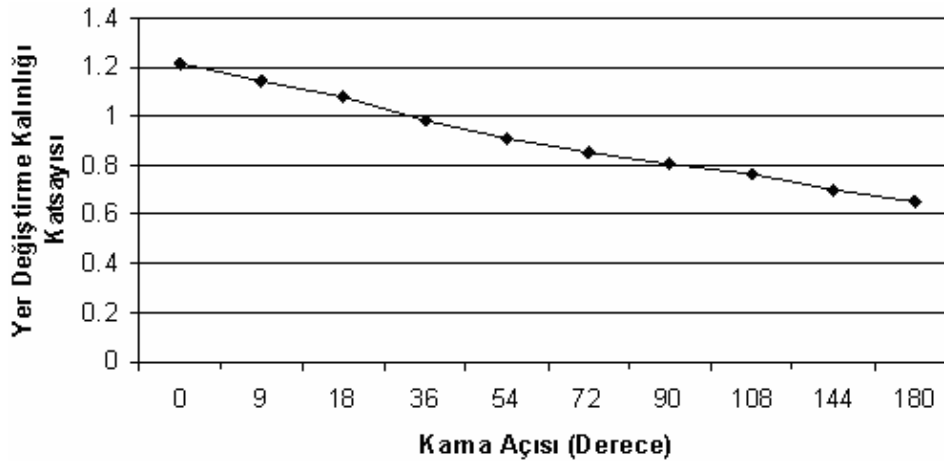
$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{2}{e+1} \frac{vx}{U_0}} \int_0^{\infty} (1 - F') d\eta \quad (7.2.7)$$

elde edilir. Burada, $I_1 = \int_0^{\infty} (1 - F') d\eta$ tanımını yapıp bu ifadeye yer değiştirme kalınlığı parametresi diyelim. Benzer şekilde momentum kalınlığı için,

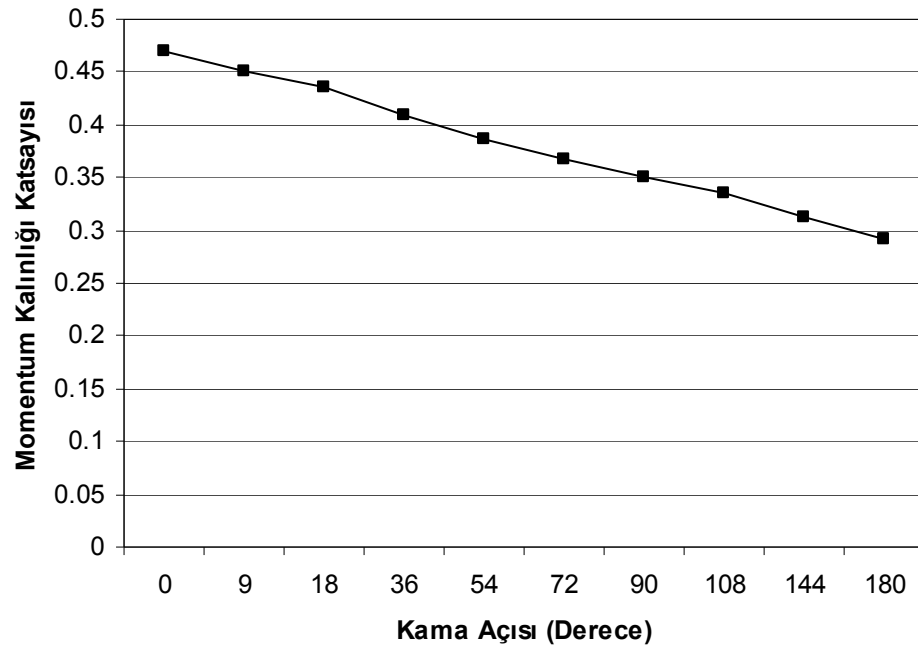
$$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{2}{e+1} \frac{vx}{U_0}} \int_0^{\infty} F'(1 - F') d\eta \quad (7.2.8)$$

$I_2 = \int_0^{\infty} F'(1 - F') d\eta$ tanımı yapıp bu ifadeye momentum kalınlığı parametresi diyelim.

Çizelge 7.2.3'te yer değiştirme ve momentum kalınlığı parametreleri için çeşitli değerler mevcuttur. Görüleceği üzere, hem yer değiştirme kalınlığı parametresi hem de momentum kalınlığı parametresi değerleri β sıfıra yaklaştıkça artmaktadır. Bu iki sınır tabaka kalınlığının β açısına göre değişimleri Şekil 7.2.4 ve 7.2.5'te gösterilmektedir.



Şekil 7.2.4 Yer değiştirme kalınlığı parametresinin β açısına göre değişimi.



Şekil 7.2.5 Momentum kalınlığı parametresinin β açısına göre değişimi.

BÖLÜM 8

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada laminer sınır tabaka içerisinde oluşan yüzey sürtünme katsayısı üzerinde kama açısı değişimlerinin etkisi incelenmiştir. Bu incelemeye başlarken yüzey sürtünme katsayısının farklı kama açılarındaki değerlerinin sayısal analiz teknikleri kullanılarak bir FORTRAN programı oluşturulması hedeflenmiştir. Neticede bu hedefe ulaşılmıştır. Farklı kama açısı değerleri için laminer sınır tabaka içerisindeki yüzey sürtünme katsayısı değerleri hesaplanmıştır. Bu hesaplama tekniğinin anlatılabilmesi için gerekli olan literatür araştırması yapılarak akışkanın tanımı, akış nitelikleri ve tipleri, Newtonsal akışkan ve viskozite kavramları, akışkanlar mekaniği problemlerinin nasıl inceleneceği, akışkanlar mekaniği çözümlerinde kullanılan yaklaşımlar, sınır tabaka oluşumu ve sınır tabaka ile ilgili kavramlar, kartezyen koordinatlarda daimi, iki boyutlu laminer akışta Newtonsal akışkana ait sınır tabaka korunum denklemlerinin oluşturulması, sürüklenme kuvveti ve sınır tabakasına etkisi, laminer sınır tabaka denklemlerinin düz levha ve kama açılı cisim üzerine özelleştirilen hesaplanma yöntemleri, oluşturulan laminer sınır tabaka denklemlerinin çözümünde kullanılan sayısal çözüm teknikleri, kama üzerinde oluşturulan laminer sınır tabaka denklemlerinin sayısal çözümü konuları hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

Sınır tabaka, akış halindeki akışkan taneciklerinin bir yüzeye temas etmesi halinde yüzeyde hız sıfırdır sınır şartı gereği, bu yüzeyde hareketsiz kalmaları sonucu oluşan izafi bir kalınlıktır. Akışkan taneciklerinin yüzeyde kalması sonucu peş peşe gelen akışkan tanecikleri ile yüzeyde kalan tanecikler arasında bir etkileşim olmaktadır. Bu etkileşim sonucu tanecikler birbirini çekmekte ve birbirlerini sürüklemektedirler. Bunun sonucu olarak yüzeyde kayma gerilmeleri oluşmaktadır. Yüzey kayma gerilmesi, yüzey sürtünme katsayısı ile doğru orantılı olarak değişmektedir. Böylece yüzey kayma gerilmesine bağlı bir sürtünme hesaplanmak isteniyorsa yüzey sürtünme katsayısının hesaplanması gerekmektedir. Bu çalışmada bahsedilen yüzey sürtünme katsayısının hesaplanma şekli anlatılmıştır. Yapılan hesaplamalar sonucunda yüzey

sürtünme katsayısının kama açısı arttıkça arttığı görülmektedir. Bunun sebebi akışkan parçacıklarının birbirine olan etkilerinin kama açısı arttıkça artmasıdır.

Farklı kama açıları ve farklı Reynolds sayıları için yapılan çözümler sonucunda kama açısının artmasının yer değiştirme ve momentum kalınlıklarının azalmasına sebep olduğu görülmüştür. Bunun nedeni yer değiştirme ve momentum kalınlıklarının arkadan gelen serbest akım tarafından sürüklenerek yüzeyden uzaklaştırılmasıdır. İşte bu nedenle kama açısı arttıkça yüzey sürtünme kuvveti artmakta, yer değiştirme ve momentum kalınlıkları azalmaktadır. Kama açısı arttıkça daha çok akışkan birbiri ile temas etmekte ve yüzeyde meydana gelen kayma gerilmeleri artmaktadır. Sabit kama açısı ve farklı Reynolds sayısı durumuna bakacak olursak, Reynolds sayısının artması ile yüzey sürtünme kuvvetinde bir azalma meydana geldiği görülmektedir. Bunun nedeni daha öncede açıklandığı üzere atalet kuvvetlerin viskoz kuvvetlerin yanında çok büyük değerlere ulaşmaya başlamasıdır. Akışkan taneciklerinin hızı arttıkça bünyelerinde oluşan atalet kuvvetleri artmaktadır. Yüzey üzerinde oluşan sınır tabakaya bu şekilde çarptıklarında yüzeye yapışmayı sağlayan viskoz kuvvetleri daha kolay yenip yüzeydeki viskoz etkiden kurtulabilmekte ve sınır tabaka kalınlığının artmasına engel olmaktadır.

Bu çalışma sonucunda sadece kama açısının değerine bağlı olarak laminer sınır tabaka içerisinde meydana gelen yüzey sürtünme katsayısı hesaplanabilir duruma gelmiştir. Böylece her kama açısı için ayrı bir çözüm tekniği aranmasına gerek kalmadan problemler çözülebilecektir.

Bu çalışmanın geliştirilmesi açısından yapılması gereken en önemli ek, yüzey özelliklerinin yüzey sürtünme katsayısına etkisinin de incelenerek çözüme katılması olacaktır. Bu şekilde değişik yüzey özelliklerine sahip cisimler üzerinde meydana gelecek yüzey sürtünme katsayısı gerçeğe daha yakın bir şekilde hesaplanabilecektir. Ayrıca çalışma oluşturulurken yapılan ideal akışkan tanımı üzerinde de çalışmalar yapıp, projenin tamamıyla gerçek akış koşullarına yaklaştırılması sağlanabilir.

BÖLÜM 9

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Adams, J.A. and Rogers, D.F., 1973, Computer-Aided heat transfer analysis, McGraw-Hill, New York, 415 p.
- Altaç, Z. ve Tekkalmaz, M., 2005, Mühendisler için fortran 90/95 programlama dili ve teknikleri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 337 s.
- Anderson, J.D., 1985, Fundamentals of aerodynamics, McGraw-Hill, New York, 563 p.
- Aydın, O. ve Kaya, A., 2005, Laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate, Applied Mathematics and Computation, 161, 229–240.
- Cerit, C., 1998, Çözümlü diferansiyel denklem problemleri, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 159 s.
- Cossali, G.E., 2005, Similarity solutions of energy and momentum boundary layer equations for a power-law shear driven flow over a semi-infinite flat plate, European Journal of Mechanics B/Fluids, 25, 18–32.
- Cramer, M.S., 2007, M.S.Cramer, dense gases, shock waves, superfluids, supersonic cars and more, <http://www.fluidmech.net/jscalc/bl701.htm>, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- DeGraaf, D.B., Webster, D.R. and Eaton, J.K., 1999, The effect of Reynolds number on boundary layer turbulence, Experimental Thermal and Fluid Science, 18, 341-346.
- Falkner, V.M. and Skan, S.W., 1931, Some approximate solutions of the boundary layer equations, Philos. Mag. 12, 80, 865–896.
- Fox, R.W. and McDonald, A.T., 1994, Introduction to fluid mechanics, John Wiley & Sons, New York, 781 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hansen, A.G., 1964, Similarity analysis of boundary value problems in engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 114 p.
- Kakaç, S., 1982, Örneklerle ısı transferi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi Yayınları, Ankara, 357 s.
- Kuethe, A.M. and Chow, C.Y., 1986, Foundation of aerodynamics, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 555 p.
- Kuo, B., 2005, Heat transfer analysis for the Falkner–Skan wedge flow by the differential transformation method, International Journal of Heat and Mass Transfer, 48, 5036–5046.
- Moran, J., 1984, An introduction to theoretical and computational aerodynamics, John Wiley & Sons, New York, 464 p.
- Munson, B.R., Young, D.F. and Okiishi, T.H., 1990, Fundamentals of fluid mechanics, John Wiley & Sons, New York, 843 p.
- Rajagopal, K.R., Gupta, A.S. and Na, T.Y., 1983, A note on the Falkner–Skan flows of a non-Newtonian fluid, International Journal of Non-Linear Mechanics, 18, 313–320.
- Schlichting, H., 1968, Boundary layer theory, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 747 p.
- Ünal, M.F., 1988, Akışkanlar mekaniği I-II ders notları, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 302 s.
- Von Karman, T., 1957, Aerodynamics, Cornell University Press, New York, 203 p.
- Wahidi, R., Chakroun, W. and Al-Fahed, S., 2005, The behavior of the skin-friction coefficient of a turbulent boundary layer flow over a flat plate with differently configured transverse square grooves, Experimental Thermal and Fluid Science, 30, 141–152.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Welty, J.R., 1978, Engineering heat transfer, John Wiley & Sons, New York, 510 p.

Weyburne, D.W., 2006, A mathematical description of the fluid boundary layer, Applied Mathematics and Computation, 175, 1675–1684.

Wood, K.D., 1947, Technical aerodynamics, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 472 p.