Indefinite T- Manifoldların Lightlike
Hiperyüzeylerinin Geometrisi Üzerine

Erdal Özüsağlam

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2007

On The Geometry of Lightlike of Hypersurfaces of
Indefinite T-Manifolds

Erdal Özüsağlam

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

August 2007

Indefinite T- Manifoldların Lightlike Hiperyüzeylerinin Geometrisi Üzerine

Erdal Özüsağlam

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ
Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Ağustos 2007

Erdal Özüsağlam'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Indefinite T- Manifoldların Lightlike Hiperyüzeylerinin Geometrisi Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ (Danışman)

Üye : Yrd.Doç. Dr. Cumali EKİCİ (Danışman)

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Prof. Dr İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde indefinite T-manifoldların lightlike hiperyüzeyleri incelenmiş ve indefinite T-manifoldların lightlike hiperyüzeylerinin bazı temel özellikleri ile birlikte dağılımların integrallenebilirliği incelenmiştir. Dördüncü bölümde indefinite T-uzay formlarının lightlike hiperyüzeylerinin hangi koşullarda var olmadığı incelendi. Son bölümde ise indefinite T-uzay formlarının total umbilik lightlike hiperyüzeyleri incelenmiş ve Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerekli koşullar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Indefinite T-Manifold, Kontakt Geometri, Umbilik Lightlike Hiperyüzeyler, T-Uzay Form

SUMMARY

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to a brief history of complementary frame manifolds. The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems. In the third chapter, some structures on indefinite T-manifolds and integration of distributions are investigated. In the fourth chapter, conditions of non-existence of lightlike hypersurfaces of T-space form are examined. Finally in the fifth chapter, lightlike hypersurfaces of total umbilic hypersurfaces of indefinite T-manifolds are investigated, and some necessary conditions of indefinite T-space form are given for Ricci curvature.

Keywords: Indefinite T-Manifold, Contact Geometry, Umbilik Lightlike Hypersurface, T-space form.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanlarım Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ ve Yrd.Doç. Dr. Cumali EKİCİ'ye, çalışma hayatımın her aşamasında benden desteklerini esirgemeyen Prof.Dr. Zekeriya ARVASİ'ye ve Prof.Dr.Mahmut KOÇAK'a, her türlü fedakarlıkta bulunan ve değerli fikirlerine başvurduğum Yrd.Doç.Dr. Nesip AKTAN'a, teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren aileme, kardeşlerime, sevgili eşim Meltem A.Özüsağlam'a, dostlarım ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Erdal ÖZÜSAĞLAM

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\overline{g}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki metrik
g	M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş metrik
$\chi(\overline{M})$ veya $\Gamma(T\overline{M})$	$\overline{M}$ manifoldunu üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$T_p\overline{M}$	$p \in \overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay
$T\overline{M}$	$\overline{M}$ manifoldunun tanjant demeti
ϕ	$f-$ yapı
$\overline{R}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
$\overline{Ric}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki Ricci eğrilik tensörü
N	Hiperyüzeyin normali
A_N	N birim normali ile birleştirilmiş şekil operatörü
N_ϕ	Nijenhuis tensörü
k_i	$i-$ yinci asli eğrilik
$k_n(X_p)$	$X_p \in T_pM$ doğrultusundaki normal eğrilik
$\overline{k}_g$	$\overline{M}$ manifoldunda geodezik eğrilik
$\overline{\nabla}$	$\overline{M}$ manifoldu üzerindeki koneksiyon
∇	M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyon
RadT_pM	$p \in M$ noktasında T_pM nin radikali
$S(TM)$	TM nin screen(ekran) alt uzayı
$\overset{*}{\nabla}$	$S(TM)$ üzerine indirgenmiş koneksiyon

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa</u>

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR..... vii

KISALTMALAR DİZİNİ..... viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

  2.1 Riemann Manifoldları ve Alt Manifoldlar 3

  2.2 Yarı-Riemann Manifoldları 10

  2.3 Hemen Hemen Kompleks ve Kontakt Manifoldlar 12

  2.4 Lightlike Hiperyüzeyler 15

  2.5 T-Manifoldlar..... 24

3. INDEFINITE T-MANİFOLDLARIN LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ..... 30

  3.1 Indefinite T-Manifold 30

  3.2 Indefinite T-Manifoldların Lightlike Hiperyüzeylerinin Temel Özellikleri..... 31

  3.3 Dağılımların İntegrallenebilirliği 35

4. INDEFINITE T-UZAY FORMLARININ LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİNİN VARLIK KOŞULLARI..... 39

5. INDEFINITE T-UZAY FORMUNUN TOTAL UMBİLİK LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ VE RİCCİ EĞRİLİĞİ 46

  5.1 Indefinite T-Uzay Formların Total Umbilik Lightlike Hiperyüzeyleri 46

  5.2 Indefinite T-Uzay Formlarının Lightlike Hiperyüzeylerinin Ricci Eğriliği 49

KAYNAKLAR DİZİNİ 57

ÖZGEÇMİŞ 60

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Hemen hemen kontakt metrik yapıların ve hemen hemen Hermitian yapıların bir genelleştirilmişi olan metrik çatılı yapılar ilk kez Yano (1963) tarafından ortaya atılmış ve günümüze kadar bu alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Nakagava (1966), Ishihara (1966), Kobayashi ve Tsuchiya (1972), Mihai (1983) ve Kobayashi (1990)'dir. 1970 yılında Goldberg ve Yano, metrik çatılı manifoldlar üzerindeki $f-$yapı yardımı ile bir kompleks yapı tanımlayıp metrik çatılı yapıların normallik koşullarını inceleyerek bu alanda yapılacak olan çalışmalara ışık tutmuş oldular.

1970 yılında Blair, normal metrik çatılı yapılara, normal metrik çatılı yapıların sağlamış olduğu bazı yeni koşulları ilave ederek, hemen hemen Hermit durumunda Kahler yapıların ve hemen hemen kontakt durumda kosimplektik yapıların bir genelleştirilmişi olan $T-$manifoldları tanıtmıştır.

İlk kez Duggal tarafından ortaya atılan lightlike hiperyüzeyler teorisi, diferensiyel geometrinin en önemli konularından biri olup bu güne kadar bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Lightlike hiperyüzey teorisinde, dik uzayın kendisi hiperyüzeyin tanjant uzayının içinde kaldığından Riemann (veya Semi-Riemann) geometrideki hiperyüzey teorisinden oldukça farklı bir durum ortaya çıkar. Bu farklılığın başında, lightlike hiperyüzey üzerine indirgenen koneksiyon gelir. Çünkü bir lightlike hiperyüzey üzerine indirgenen koneksiyon her zaman metrik koneksiyon değildir. Bir diğer önemli farklılık şekil operatöründen kaynaklanmaktadır. Riemann (veya Semi-Riemann) geometride hiperyüzeyler için ikinci temel form ile şekil operatörü arasında bir ilişki vardır. Riemann geometrideki hiperyüzeylerin aksine lightlike hiperyüzeyler teorisinde böyle bir durum söz konusu değildir. Üstelik bir lightlike hiperyüzey üzerinde biri hiperyüzeye diğeri ekran dağılımına ait olmak üzere, iki tane şekil operatörü vardır.

Riemann (veya Semi-Riemann) hiperyüzeyinin aksine lightlike hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörü her zaman simetrik olmaz. Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması hem geometri hem de fizik açısından istenen bir durumdur. Dolayısıyla lightlike geometride Ricci eğrilik tensörünün simetrik olma şartlarını araştırmak önemli bir problemdir. Bu konudaki ilk çalışmayı Bejancu (1996) yapmıştır. Yapılan çalışmada bir lightlike hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşulun $d\tau = 0$ olması gerektiği gösterilmiştir. Aynı sonuç lokal olarak Duggal ve Bejancu (1996) tarafından ispat edilmiştir. Ayrıca Güneş, Şahin ve Kılıç (2003), bir hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter koşulun şekil operatörünün lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formuna göre simetrik olması gerektiğini göstermişlerdir. Bir Kahler manifoldunun lightlike reel hiperyüzeyleri Duggal ve Bejancu (1993) tarafından çalışılmıştır. Indefinite Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri Kang, Jung, Kim, K. Pak ve S. Pak (2003) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmanın orjinal bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir :

Indefinite $T-$manifoldların lightlike hiperyüzeyleri araştırılarak, $T-$manifoldların lightlike hiperyüzeylerinin bazı temel özellikleri çalışmamızın üçüncü bölümünde, indefinite $T-$manifoldların lightlike hiperyüzeylerinin varlık koşulları dördüncü bölümde ve son olarak indefinite $T-$uzay formlarının total umbilik lightlike hiperyüzeyleri ve Ricci eğriliği de son bölüm olan beşinci bölümde incelenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldları ve Alt Manifoldlar

Tanım 2.1.1 : $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ ve $\overline{M}$ den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(\overline{M},\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\overline{g} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to C^\infty(\overline{M},\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer $\overline{g}$ Riemann metriği ile birlikte $\overline{M}$ ye bir Riemann manifoldu adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.2 : $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ olmak üzere, $\forall f,g \in C^\infty(\overline{M},\mathbb{R})$, $\forall X,Y,Z \in \chi(\overline{M})$, için,

$$\begin{array}{rccl} \overline{\nabla} : & \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \to & \chi(\overline{M}) \\ & (X,Y) & \to & \overline{\nabla}(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y \end{array}$$

fonksiyonu için

i) $\overline{\nabla}_{fX+gY}Z = f\overline{\nabla}_X Z + g\overline{\nabla}_Y Z$

ii) $\overline{\nabla}_X (fY) = f\overline{\nabla}_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa $\overline{\nabla}$ ye $\overline{M}$ manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve $\overline{\nabla}_X$ e de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1983, Spivak, 1979).

Tanım 2.1.3 : $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\overline{\nabla}$ da $\overline{M}$ üzerinde bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere, $\overline{\nabla}$ dönüşümü

i) $\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X,Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X\overline{g}(Y,Z) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, $\overline{\nabla}$ ya $\overline{M}$ üzerinde Riemann (veya Levi-Civita) koneksiyonu adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.4 : V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{array}{rccl} [,] : & V \times V & \to & V \\ & (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array}$$

dönüşümü;

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için;

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

şartlarını sağlıyorsa, $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.5 : $\overline{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\overline{M}$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\overline{M})$ olsun.

$$\begin{aligned} [,]: \ \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\rightarrow \chi(\overline{M}) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[,]$ bir Lie operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.6 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(\overline{M})$ için L_X, keyfi bir (p, q) tipinde tensör alanını yine (p, q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre Lie türev operatörü olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984, Duggal and Bejancu, 1996)

i) $L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$

ii) $L_X Y = [X, Y], \quad \forall Y \in \chi(\overline{M})$

iii) $L_X \overline{g}(Y, Z) = X(\overline{g}(Y, Z)) - \overline{g}([X, Y], Z) - \overline{g}([X, Z], Y), \forall Y, Z \in \chi(\overline{M})$.

Tanım 2.1.7 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve L_X, X vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Eğer $X \in \chi(\overline{M})$ için

$$L_X \overline{g} = 0$$

ise $X \in \chi(\overline{M})$ killing vektör alanı olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.8 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. $\overline{M}$ üzerinde verilen her bir diferensiyel $q-$forma, bir diferensiyel $q+1-$form karşılık getiren diferensiyel operatörü dış türev operatörü olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir $1-$form w ve bir $2-$form Ω için d operatörü

$$dw(X,Y) = \frac{1}{2}\left\{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])\right\}$$

ve

$$\begin{aligned} d\Omega(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{X(\Omega(Y,Z)) - Y(\Omega(X,Z)) - Z(\Omega(X,Y)) \\ &\quad -\Omega([X,Y],Z) + \Omega([X,Z],Y) - \Omega([Y,Z],X)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Duggal and Bejancu, 1996).

$(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{\nabla}$ da $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= X\overline{g}(Y,Z) + Y\overline{g}(Z,X) - Z\overline{g}(X,Y) \\ &\quad -\overline{g}(X,[Y,Z]) + \overline{g}(Y,[Z,X]) + \overline{g}(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.9 : $\overline{M}$ Riemann manifoldu ve $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\begin{aligned} \overline{R}: \ \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\to \chi(\overline{M}) \\ (X,Y,Z) &\to \overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{R}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanına $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi 2003, Spivak, 1979).

Teorem 2.1.10 : $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{R}$, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,W \in \chi(\overline{M})$ için

i) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) = -\overline{g}(\overline{R}(Y,X)Z,W)$,

ii) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) = -\overline{g}(\overline{R}(X,Y)W,Z)$,

iii) $\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) = \overline{g}(\overline{R}(Z,W)X,Y)$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\overline{R}$, $(\overline{M},\ \overline{g})$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{R}(X,Y)Z + \overline{R}(Z,X)Y + \overline{R}(Y,Z)X = 0$$

eşitliği I. Bianchi özdeşliği olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.12 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, $\overline{R}$, $(\overline{M},\overline{g})$ nin Riemann eğrilik tensörü ve $\overline{\nabla}$ Levi-civita koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X \overline{R}\right)(Y,Z) + \left(\overline{\nabla}_Y \overline{R}\right)(Z,X) + \left(\overline{\nabla}_Z \overline{R}\right)(X,Y) = 0$$

eşitliği II. Bianchi özdeşliği olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.13 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. Bir $P \in \overline{M}$ noktasındaki $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının, X_P, Y_P tanjant vektörleri tarafından gerilen $2-$boyutlu bir altuzayı Π olmak üzere

$$\overline{K}(\Pi) = \frac{\overline{g}(\overline{R}(X_P, Y_P)Y_P, X_P)}{\overline{g}(X_P, X_P)\overline{g}(Y_P, Y_P) - \overline{g}(X_P, Y_P)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{K}(\Pi)$ reel sayısına Π nin kesit eğriliği denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.14 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü $\overline{R}$ ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\chi(\overline{M})$ nin bir bazı olsun. Böylece

$$\begin{array}{rcl} Q: \ \chi(\overline{M}) & \rightarrow & \chi(\overline{M}) \\ X & \rightarrow & Q(X) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{R}(e_i, X)e_i \end{array}$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne $\overline{M}$ nin Ricci operatörü adı verilir. Ayrıca Q yardımı ile $\overline{M}$ nin Ricci eğrilik tensörü $\overline{Ric}$,

$$\begin{array}{rcl} \overline{Ric}: \ \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \rightarrow & C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R}) \\ (X,Y) & \rightarrow & \overline{Ric}(X,Y) = \overline{g}(Q\left(X\right), Y) \end{array}$$

biçiminde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.15 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının bir bazı olmak üzere $\overline{M}$ nin skalar eğriliği

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \overline{Ric}(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.16 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve bir $P \in \overline{M}$ noktasındaki $T_P\overline{M}$ tanjant uzayının, X_P, Y_P tanjant vektörleri tarafından gerilen $2-$boyutlu bir altuzayı Π olmak üzere, Π nin kesit eğriliği $\overline{K}(\Pi)$ olsun. $\overline{M}$ nin her p noktasındaki her Π için $\overline{K}(\Pi)$ sabit ise $(\overline{M},\ \overline{g})$ sabit eğrilikli uzay adını alır. Sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu uzay form olarak adlandırılır. $\overline{M}$ nin sabit kesit eğriliği c olmak üzere $\overline{M}$ uzay formu $\overline{M}(c)$ ile gösterilir. Eğer

$$\begin{cases} c = 0 & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = E^n \text{ Öklid uzayı} \\ \\ c = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = S^n(r) \text{ Küresi} \\ \\ c = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad \overline{M}(c) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay} \end{cases}$$

dır (Chen, 1973).

Teorem 2.1.17 : $(\overline{M}, \overline{g})$ kesit eğriliği c olan bir sabit eğrilikli uzay ve $\overline{R}$, $\overline{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\,[\overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y]$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.18 : M ve $\overline{M}$ birer C^∞ manifold ve

$$\Psi : M \rightarrow \overline{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer rankΨ = boy$M$ ise Ψ dönüşümüne bir immersiyon (daldırma) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.19 : M ve $\overline{M}$ birer C^{∞} manifold ve $M \subset \overline{M}$ olsun. Eğer

$$j : M \to \overline{M}$$

doğal injeksiyonu bir immersiyon ise M ye $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu denir (Brickell and Clark, 1970).

Tanım 2.1.20 : $\overline{M}$ bir C^{∞} manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için

$$TM^{\perp} = \left\{V \in T_p\overline{M} \mid \overline{g}\left(X_p, V\right) = 0, \forall X_p \in T_pM\right\}$$

cümlesini tanımlayalım. $p \in M$ noktasında $\forall X_p \in T_pM$ için $\overline{g}\left(X_p, V\right) = 0$ koşulunu sağlayan V vektörüne, M nin normal vektörü, V nin birim vektör olması halinde de M nin birim normal vektörü denir. Birim normal vektör alanı bazen normal kesit olarakta adlandırılır. M nin tüm normal vektörlerini içeren $TM^{\perp}$ cümlesine ise M nin normal demeti adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.21 : M ve $\overline{M}$ sırasıyla n ve $n+d$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, M, $\overline{M}$ nin alt manifoldu, ∇ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla M ve $\overline{M}$ de kovaryant türevler olsun. Böylece $\forall X,\ Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya Gauss formülü adı verilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. (2.2) bağıntısında tanımlanan h ya M nin ikinci temel formu adı verilir. Eğer $h = 0$ ise M ye total geodeziktir denir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.22 : M ve $\overline{M}$ sırasıyla n ve $n+d$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, M, $\overline{M}$ nin alt manifoldu olsun. M nin birim normal vektör alanı V olsun. $\overline{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_V X$ ve $\nabla^{\perp}_X V$ olmak üzere

$$A_V : \chi(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya Weingarten formülü denir. Burada A_V ye M nin şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $TM^{\perp}$ normal demetindeki koneksiyon adı verilir. M nin şekil operatörü A_V ile ikinci temel form h arasında

$$g(A_V X, Y) = \overline{g}(h(X,Y), V)$$

bağıntısı vardır. Burada g, M üzerine indirgenmiş skalar çarpımdır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.23 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir alt manifoldu olsun. (M, g) ve $(\overline{M}, \overline{g})$ üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla R ve $\overline{R}$ olsun. $\forall X,\ Y,\ Z,\ W \in \chi(M)$ için

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z, W\right) = g\left(R(X,Y)Z, W\right) - \overline{g}\left(h(X,W), h(Y,Z)\right) + \overline{g}\left(h(Y,W), h(X,Z)\right)$$

ile tanımlanan bağıntıya Gauss denklemi denir. Gauss denkleminin normal bileşeninin alınması ile elde edilen

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)$$

bağıntısına ise Codazzi denklemi denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.1.24 : $\overline{M}$, $n-$boyutlu ve N, $(n-1)-$boyutlu birer C^{∞} manifold olsunlar.

$$f: \quad N \to \overline{M}$$

fonksiyonu bir immersiyon ise, $f(N) = M$ manifolduna $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi denir (Hacısalihoğlu, 1983, Brickell and Clark, 1970).

$(\overline{M}, \overline{g})$ $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin $(n-1)-$ boyutlu bir alt manifoldu olsun. Bu durumda (M, g) nin bir hiperyüzey olacağı açıktır. Bu durumda (2.3) bağıntısında belirtilen $\nabla_X^{\perp} V$ normal bileşeni için $\nabla_X^{\perp} V = 0$ dır (Kobayashi and Nomizu, 1969).

Tanım 2.1.25 : $\overline{M}$ nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. $\overline{M}$ de Riemann koneksiyonu $\overline{\nabla}$ olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$A_N X = \overline{\nabla}_X N$$

şeklinde tanımlı, A_N dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.26 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi ve $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun. Bu durumda,

1) $A_N : \chi(M) \to \chi(M)$ dir.

2) A_N lineerdir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.27 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi ve $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun. Bu durumda A_N simetriktir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.28 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi, $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun.

$$\begin{array}{rccc} H: & M & \to & \mathbb{R} \\ & p & \to & H(p) = \text{İz}H \end{array}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ ye de $p \in M$ noktasında M nin ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.29 : $(\overline{M}, \overline{g})$ bir Riemann manifoldu, (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir hiperyüzeyi, $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü A_N olsun. Eğer $X_p, Y_p \in T_pM$ için

$$g(A_N X_p, Y_p) = 0$$

ise bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir. Bir $X_p \neq 0$ tanjant vektörü için

$$g(A_N X_p, X_p) = 0$$

ise X_p doğrultusuna M nin p noktasındaki asimptotik doğrultusu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2 Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1 : V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\overline{g}\,|_V : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V$ için

i) $\overline{g}\mid_V (\vec{u}, \vec{v}) = \overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{u})$

ii) $$\begin{aligned} \overline{g}\mid_V (a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) &= a\overline{g}\mid_V (\vec{u}, \vec{w}) + b\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{w}) \\ \overline{g}\mid_V (\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) &= a\overline{g}(\vec{u}, \vec{v}) + b\overline{g}\mid_V (\vec{u}, \vec{w}) \end{aligned}$$

özelliklerine sahip ise $\overline{g}\mid_V$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2 : V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\overline{g}\mid_V$ olsun.

i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna pozitif (definite) tanımlı,

ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

iii) $\forall \vec{v} \in V$ için $\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna pozitif (semi-definite) yarı tanımlı,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ için $\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna negatif yarı tanımlı,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{w}) = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olmak zorunda ise $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formuna non-dejenere, aksi taktirde $\forall \vec{w} \in V$ için $\overline{g}\mid_V(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ iken $\vec{v} \neq \vec{0}$ ise dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3 : V bir reel vektör uzayı ve

$$\overline{g}\mid_V : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\overline{g}\mid_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\overline{g}\mid_V$ simetrik bilineer formun indeksi denir ve ν ile gösterilir. W altuzayı üzerine indirgenmiş $\overline{g}\mid_W$ simetrik bilineer formuna indirgenmiş simetrik bilineer form adı verilir ve kısaca g ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4 : $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq \vec{0}$ ve $\vec{w} \neq \vec{0}$ iken $\overline{g}\mid_V (\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri diktir denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir (O'Neill, 1983, Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.5 : $\overline{M}$ bir C^{∞} manifold olsun. $p \in \overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\overline{M}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \overline{g}: \ T_p\overline{M} \times T_p\overline{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) & \rightarrow & \overline{g}(X_p, Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer ve non-dejenere $(0, 2)$ tipindeki tensör alanına $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6 : $\overline{g}$ metrik tensörü ile donatılmış bir C^{∞} $\overline{M}$ manifolduna yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7 : Bir $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\overline{g}$ metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve ind$\overline{M}$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8 : $\overline{M}$ bir C^{∞} yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{g}$, $\overline{M}$ üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Eğer $\forall p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ için

$$\overline{g} : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

i) $\overline{g}(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise X_p vektörüne uzay benzeri (spacelike),

ii) $\overline{g}(X_p, X_p) < 0$ ise X_p vektörüne zaman benzeri (timelike),

iii) $\overline{g}(X_p, X_p) = 0$, $X_p \neq 0$ ise X_p vektörüne ışık benzeri (lightlike veya null) denir (O'Neill,1983).

2.3 Hemen Hemen Kompleks ve Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.3.1 : $\overline{M}$ bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. $\overline{M}$ nin her p noktasındaki $T_p\overline{M}$ tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir

$$J : T_p\overline{M} \rightarrow T_p\overline{M}$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye $\overline{M}$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. Hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış $\overline{M}$ manifolduna hemen hemen kompleks manifold denir. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.2 : $\overline{M}$, hemen hemen kompleks bir manifold, J, $\overline{M}$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. $\overline{g}$, $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{g}(JX, JY) = \overline{g}(X, Y)$$

koşulu sağlanıyor ise $\overline{g}$ ye $\overline{M}$ üzerinde Hermit metrik denir. Hermit metrik ile donatılmış hemen hemen kompleks $\overline{M}$ manifolduna hemen hemen Hermit manifold denir. Eğer $\overline{g}$ Hermit metrik ve temel 2-form kapalıysa yani, $d\Omega = 0$ ise $\overline{g}$ metriğine Kahler metriği denir. Kahler metriğine sahip hemen hemen kompleks $\overline{M}$ manifolduna hemen hemen Kahler manifold denir. Kahler metriğine sahip kompleks $\overline{M}$ manifolduna da Kahler manifold denir. Bir Hermit manifoldunun Kahler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ olmasıdır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.3 : $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu manifold, ϕ, ξ ve η da $\overline{M}$ üzerinde sırasıyla, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, $\overline{M}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere ;

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen kontakt yapı denir. Bu yapı ile birlikte $\overline{M}$ manifolduna hemen hemen kontakt manifold denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.4 : $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu manifold, η da $\overline{M}$ üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulu sağlanıyor ise $\overline{M}$ ye bir kontakt yapıya sahiptir denir. Bu kontakt yapı ile birlikte $\overline{M}$, kontakt manifold olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.3.5 : $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu bir kontakt manifold olsun. Bu durumda $\overline{M}$ üzerinde, $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ ve $\overline{g}$ Riemann metriği olmak üzere

$$\overline{g}(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.4}$$

koşulunu sağlayan bir $(\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ hemen hemen kontakt metrik yapı vardır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.6 : $\overline{M}$ bir $(2n+1)$ boyutlu bir kontakt manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde (2.4) bağıntısını sağlayan $(\phi, \xi, \eta, \overline{g})$ hemen hemen kontakt metrik yapısı var ise bu yapıya kontakt metrik yapısı, bu yapı ile birlikte $\overline{M}$ ye kontakt metrik manifold denir (Yano and Kon, 1984).

$(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontakt manifoldu $\overline{M}$ verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen kontakt yapı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel doğruyu $\mathbb{R}$ ile göstererek $\overline{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu göz önüne alalım. $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $(X, f\frac{d}{dt})$ şeklindedir. Burada X, $\overline{M}$ ye teğet bir vektör alanı, t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f de $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$\overline{M} \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{2.5}$$

ile tanımlanır. Bu şekilde tanımlı J lineer dönüşümü $J^2 = -I$ koşulunu sağlamaktadır. Bu durumda J, $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır (Yano, Kon 1984).

Tanım 2.3.7 : $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve ϕ, $\overline{M}$ üzerinde bir (1,1) tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2 [X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi [\phi X, Y] - \phi [X, \phi Y]$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipinde tensör alanına ϕ nin Nijenhuis tensör alanı denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.8 : $\overline{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold, $\overline{M}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.9 : $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontakt manifoldu $\overline{M}$ verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen kontakt yapı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel doğruyu $\mathbb{R}$ ile göstererek $\overline{M} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. Eğer $\overline{M} \times \mathbb{R}$ üzerindeki (2.5) ile verilen hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirse (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına normaldir denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3.10 : $\overline{M}$ normal hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde temel 2-form Φ kapalı ve $d\eta = 0$ ise $\overline{M}$ ye kosimplektik manifold denir (Yano and Kon, 1984).

2.4 Lightlike Hiperyüzeyler

Tanım 2.4.1 : M, $0 < \nu < m+1$ indekse sahip $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasında T_pM nin dik uzayı $T_pM^{\perp}$ ve radikali $RadT_pM$, sırasıyla,

$$T_pM^{\perp} = \left\{Y_p \in T_p\overline{M} \mid \overline{g}\left(Y_p, X_p\right) = 0, \forall X_p \in T_pM\right\}$$

ve

$$RadT_pM = \{Y_p \in T_pM \mid g\left(Y_p, X_p\right) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

şeklinde tanımlanır (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.2 : $\overline{M}$ reel m-boyutlu C^{∞} manifold olsun.

$$\Delta : \ \overline{M} \ \rightarrow \ T_P\overline{M}$$

$\overline{M}$ nin her noktasına r-boyutlu bir lineer altuzay karşılık getiren dönüşümüne $\overline{M}$ üzerinde dağılım denir. Δ ile gösterilir. $\forall X, Y \in \Gamma(\Delta)$ için $[X, Y] \in \Gamma(\Delta)$ oluyor ise Δ dağılımına involutive dağılım denir. Eğer Δ dağılım involutive ise integrallenebilirdir.(Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.3 : M, $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun $n-$boyutlu bir alt manifoldu olsun. M üzerinde

$$RadTM \quad : \quad p \in M \quad \rightarrow \quad RadT_pM$$

şeklinde tanımlı her bir noktayı bir $r-$boyutlu alt vektör uzaya eşleyen $RadTM$ dönüşümüne radikal dağılım, M ye ise $r-$lightlike (dejenere) manifold denir. $RadT_pM$ nin boyutu nullT_pM ile gösterilir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.4 : V reel vektör uzayı, $\overline{g}\mid_V$, V üzerinde tanımlı dejenere simetrik bilineer form olsun. Bu durumda V vektör uzayına lightlike (dejenere) vektör uzayı denir ve $(V,\overline{g}\mid_V)$ ile gösterilir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.5 : V, reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve $\left(W,\overline{g}_{|W}\right)$, null$W=r<n$ olacak şekilde, reel $n-$boyutlu lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzaya tümleyen altuzaya W nin screen (ekran) altuzayı denir ve SW ile gösterilir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.6 : V, reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da V nin altuzayı olsun. W üzerine indirgenmiş metrik g dejenere ise W ya lightlike (dejenere) altuzay denir. Aksi durumda W ya non-dejenere denir (Duggal and Bejancu, 1996).

Yardımcı Teorem 2.4.7 : $(W,\overline{g}\mid_W)$, null$W=r<n$ olacak şekilde, reel $n-$boyutlu lightlike vektör uzayı olsun. Bu durumda radikal uzaya tümleyen altuzay non-dejeneredir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.8 : V, reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da onun altuzayı olsun

$$W^{\perp}=\{v\in V \mid \overline{g}\,(v,w)=0,\forall w\in W\}$$

altuzayına W uzayının diki denir (O'Neill,1983, Duggal and Bejancu, 1996).

Yardımcı Teorem 2.4.9 : $(V,\overline{g})$ reel $m-$boyutlu yarı-Öklid uzay ve W da altuzayı olsun. Bu durumda,

i) $boyW + boyW^{\perp} = m,$

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W,$

iii) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dır (O'Neill,1983, Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.10 : M, $0 < \nu < m+1$ indekse sahip $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. $\forall p \in M$ için

$$RadT_pM = T_pM \cap T_pM^{\perp} \neq \{0\}$$

ise M ye $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike (dejenere, null) hiperyüzeyi denir (Duggal and Bejancu, 1996).

Yardımcı Teorem 2.4.11 : (M, g), $0 < \nu < m+1$ indekse sahip $(m+2)-$boyutlu $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) M, $\overline{M}$ nin lightlike hiperyüzeyidir.

ii) g, M de sabit m rankına sahiptir.

iii) $TM^{\perp} = \underset{x\in M}{\cup} T_xM^{\perp}$, M de bir dağılımdır (Duggal and Bejancu, 1996).

Yardımcı teorem 2 dan $S(TM)$, $RadTM$ ye ortogonal ve non-dejeneredir. $S(TM)$, M üzerinde sabit indeksli olarak alınsın. Buradan

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{2.6}$$

ortogonal direkt toplamı gözönüne alınabilir. Böylece

$$T\overline{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{2.7}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $S(TM)^{\perp}$, ekran dağılımı olarak adlandırılan $S(TM)$ nin ortogonal tümleme vektör demetidir. $tr(TM)$, $S(TM)$ de $TM^{\perp}$ in tümleme vektör demetini göstersin. Buradan

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus tr(TM) \tag{2.8}$$

dir. Buradaki $tr(TM)$, tranversal vektör demeti olarak adlandırılır. (Duggal and Bejancu, 1996).

Teorem 2.4.12 : $(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g}\ )$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerinde

$$\overline{g}(N, \xi) = 1 \tag{2.9}$$

ve

$$\overline{g}(N, N) = \overline{g}(N, W) = 0, \quad \forall W \in \Gamma(S(TM)) \tag{2.10}$$

olacak şekilde rankı 1 olan bir tek $N \in \Gamma(tr(TM))$ bazı vardır (Duggal and Bejancu, 1996).

(2.6) ve (2.7) özellikleri kullanılarak

$$T\overline{M}_{|_M} = S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus (trTM)) \tag{2.11}$$

eşitliği elde edilir. Böylece herhangi bir $S(TM)$ ekran dağılımı için (2.9) ve (2.10) özelliklerini sağlayan ve TM için tümleme vektör demeti olan bir tek $tr(TM)$ transversal vektör demeti vardır (Duggal and Bejancu,1996).

Örnek 2.4.13 :

$$M = \left\{ \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \mid \ x^3 = x^o + \frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2,\ x^i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 3 \right\} \subset R_2^4$$

hiperyüzeyi gözönüne alınsın. M bir lightlike hiperyüzeydir. Gerçektende,

$$f\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = -x^0 - \frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2 + x^3$$

olmak üzere

$$M = \left\{ \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \mid \ f:\ U \subset R_2^4 \to R \right\}$$

olup,

$$gradf = \nabla f = \sum \varepsilon_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\varepsilon_0 \frac{\partial f}{\partial x^0}, \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \nabla f &= \xi = \left\{1, \left(x^1 + x^2\right), -\left(x^1 + x^2\right), 1\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} + \left(x^1 + x^2\right) \frac{\partial}{\partial x^1} - \left(x^1 + x^2\right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{g}(\xi, V) \neq 0$ olacak şekilde $V = (1, (x^1 + x^2), (x^1 + x^2), -1)$ seçilirse,

$$\overline{g}(\xi, V) = -1 - \left(x^1 + x^2\right)^2 - \left(x^1 + x^2\right)^2 - 1 = -2\left[1 + \left(x^1 + x^2\right)^2\right]$$

ve

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\overline{g}(\xi,V)}\left\{V - \frac{\overline{g}(V,V)}{2\overline{g}(\xi,V)}\xi\right\} \\ &= \frac{1}{-2\left[1+(x^1+x^2)^2\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial x^0} + \left(x^1+x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^1} - \left(x^1+x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{g}(N,W_1) = \overline{g}(N,W_2) = \overline{g}(W_1,W_2) = 0$ olacak şekilde $S(TM)$ yi geren W_1, W_2 vektör alanları $W_1 = \{-(x^1+x^2), 1, 0, 0\}$ ve $W_2 = \{0,0,1,(x^1+x^2)\}$ olarak alınabilir. Böylece $TM^{\perp}, S(TM)$ ve $tr(TM)$ değerleri

$$\begin{aligned} & tr\left(TM\right) = Sp\left\{N\right\} \\ & \xi = \left(1, \left(x^1+x^2\right), -\left(x^1+x^2\right), 1\right) \\ & \overline{g}(N,W_1) = \overline{g}(N,W_2) = \overline{g}(W_1,W_2) = 0 \\ & W_1 = \left\{-\left(x^1+x^2\right), 1, 0, 0\right\}, \text{zaman benzeri (timelike)} \\ & W_2 = \left\{0, 0, 1, \left(x^1+x^2\right)\right\}, \text{uzay benzeri (spacelike)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(M,g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M},\overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ve $\overline{\nabla}$, M de Levi-Civita koneksiyon olsun. Kabul edelim ki, $S(TM)$ ve $tr(TM)$ sırasıyla ekran dağılım ve lightlike transversal vektör demeti olsun. Böylece, M boyunca $T\overline{M}$ nin $\{\xi, N, W_i\}$ $, 1 < i < m$ lokal quasi ortonormal vektör alanları gözönüne alınarak,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.12}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V \tag{2.13}$$

bağıntıları yazılır. Burada $X,Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma\left(tr(TM)\right)$, $\nabla_X Y$ ve $A_V X \in \Gamma(TM)$, $h(X,Y)$ ve $\nabla^t_X V \in \Gamma\left(tr(TM)\right)$ dir. Sırasıyla, (2.12) ve (2.13) eşitlikleri Gauss ve Weingarten formülleri olarak adlandırılır. ∇, M üzerinde torsiyon-free lineer koneksiyon, h, $\Gamma\left(tr\left(TM\right)\right)-$ değerli simetrik bilineer form, $\nabla^{\perp}$, $tr(TM)$ üzerinde lineer koneksiyon ve A_V, M nin şekil operatörüdür.

$\forall X,Y \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$B(X,Y) = \overline{g}\left(h\left(X,Y\right),\xi\right), \forall X,Y \in \Gamma\left(TM\right)$$

ve

$$\tau(X) = \overline{g}\left(\nabla^{\perp}_X N, \xi\right) \tag{2.14}$$

olarak tanımlansın. Böylece (2.12) ve (2.13) eşitlikleri sırasıyla

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)\,N \tag{2.15}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)\,N \tag{2.16}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilirler (Duggal and Bejancu, 1996).

Sonuç 2.4.14 : (M,g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M},\overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerinde

$$B(X,\xi) = 0,\ \forall X \in \Gamma(TM),\ \xi \in Rad(TM) \tag{2.17}$$

dır. Yani, lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu dejeneredir (Duggal and Bejancu, 1996).

$P : TM \to S(TM)$ bir projektif dönüşümünü göstersin. $S(TM)$ üzerindeki Gauss ve Weingarten denklemleri sırasıyla

$$\nabla_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + \overset{*}{h}(X,PY)\,, \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{2.18}$$

ve

$$\nabla_X U = -\overset{*}{A}_U X + \overset{*}{\nabla}{}^{t}{}_X U,\ \forall X \in \Gamma(TM)\,, U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right) \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overset{*}{\nabla}_X PY, \overset{*}{A}_U X \in \Gamma(S(TM))$ ve ayrıca, $h^{*}(X,PY)$, $\overset{*}{\nabla}_X{}^{t} U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ dir (Duggal and Bejancu, 1996).

$\overset{*}{h}$ ve $\overset{*}{A}_U$, sırasıyla, $S(TM)$ nin ikinci temel formu ve şekil operatörü olarak adlandırılır. (2.18) ve (2.19) eşitliklerine sırasıyla $S(TM)$ için Gauss ve Weingarten formülleri denir. (2.13), (2.15), (2.18) ve (2.19) eşitlikleri kullanılarak gerekli hesaplamalarla

$$g(A_V Y, PW) = \overline{g}\left(V, \overset{*}{h}(Y,PW)\right);\ \overline{g}(A_V Y, V) = 0 \tag{2.20}$$

ve

$$g\left(\overset{*}{A}_U X, PY\right) = g\left(U, \overset{*}{h}(X, PY)\right);\ g\left(\overset{*}{A}_U Y, V\right) = 0 \tag{2.21}$$

bulunur. Burada $\forall X, Y \in \Gamma(TM), U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ dir. Şimdi U üzerinde

$$C(X, PY) = \overline{g}\left(\overset{*}{h}(X, PY), N\right)$$

ve

$$\varepsilon(X) = \overline{g}\left(\overset{*}{\nabla}{}^t{}_X \xi, N\right)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\overset{*}{h}(X, PY) = C(X, PY)\,\xi$$

ve

$$\overset{*}{\nabla}{}^t{}_X \xi = \varepsilon(X)\,\xi$$

dir. Bu eşitlikler (2.18) ve (2.19) da yerine yazılırsa

$$\nabla_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + C(X, PY)\,\xi \tag{2.22}$$

ve

$$\nabla_X U = -\overset{*}{A}_U X + \varepsilon(X)\,\xi \tag{2.23}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon(X) = -\tau(X)$ dir. Sonuç olarak (2.20) ve (2.21) eşitlikleri

$$g(A_N Y, PW) = C(Y, PW);\ \overline{g}(A_N Y, N) = 0 \tag{2.24}$$

ve

$$g\left(\overset{*}{A}_\xi X, PY\right) = B(X, PY)\ ;\ g\left(\overset{*}{A}_\xi Y, N\right) = 0 \tag{2.25}$$

şekline dönüşür (Duggal and Bejancu, 1996).

(M, g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerine indirgenmiş koneksiyon genel olarak metrik koneksiyon değildir. Bu gerçek aşağıdaki yardımcı teoremde ifade edilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.4.15 : (M, g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $S(TM)$ ekran dağılımının üzerindeki koneksiyon $\overset{*}{\nabla}$ ve (M, g) üzerine indirgenmiş koneksiyon ∇ olmak üzere

i) Lineer koneksiyon $\overset{*}{\nabla}$ metrik koneksiyondur.

ii) İndirgenmiş koneksiyon aşağıdaki eşitliği sağlar

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = B(X,Y)\,\overline{g}(Z,N) + B(X,Z)\,\overline{g}(Y,N),\ \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM) \tag{2.26}$$

(Duggal and Bejancu, 1996).

Teorem 2.4.16 : (M,g), $(m+2)-$ boyutlu $(\overline{M},\overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $S(TM)$ ekran dağılımı ∇ ya göre paraleldir $\Leftrightarrow C = 0$ dır (Bejancu, 1996).

(M,g), $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $\overline{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\overline{M}$ ve M üzerinde Levi-civita koneksiyon ve lineer koneksiyon, ve sırasıyla $\overline{R}$, R de Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. Buradan (2.12) ve (2.13) eşitlikleri kullanılarak $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \end{aligned} \tag{2.27}$$

bulunur. Burada

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^t_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \tag{2.28}$$

dır.

Ayrıca $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM), U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right), V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,PW\right) &= g(R(X,Y)Z,PW) \\ &\quad +\overline{g}\left(h(X,Z),\overset{*}{h}(Y,PW)\right) \\ &\quad -\overline{g}\left(h(Y,Z),\overset{*}{h}(X,PW)\right), \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,U\right) = \overline{g}((\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z),U)$$

ve

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,V\right) = \overline{g}(R(X,Y)Z,V)$$

elde edilir (Duggal and Bejancu, 1996).

Yardımcı Teorem 2.4.17 : (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. ∇, M üzerinde Levi-civita koneksiyonu, $\overline{R}$ ve R de sırasıyla $\overline{M}$ ve M üzerinde Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. Bu durumda $\overline{R}$ ve R arasında

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(X,Z)A_NY - B(Y,Z)A_NX \\ &\quad +(\nabla_X B)(Y,Z)N + B(Y,Z)\tau(X)N \\ &\quad -(\nabla_Y B)(X,Z)N - B(X,Z)\tau(Y)N \end{aligned} \tag{2.30}$$

eşitliği mevcuttur (Güneş, Şahin, ve Kılıç, 2003).

Tanım 2.4.18 : $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\forall X,\ Y \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X, PY) = \lambda g(X, PY) \tag{2.31}$$

koşulu sağlanıyor ise $S(TM)$**,** ekran dağılımına total umbiliktir denir. Burada λ, M üzerinde düzgün bir fonksiyondur (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.19 : $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M nin ikinci temel formu

$$B(X, Y) = \rho g(X, Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{2.32}$$

koşulunu sağlıyorsa M ye total umbiliktir denir. Burada ρ, M üzerinde bir C^∞ fonksiyondur (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.4.20 : $\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi, M üzerindeki şekil operatörü A ve $S(TM)$ üzerindeki şekil operatörü A^* olsun. $p \in M$ noktasındaki A nın rankına M nin p noktasındaki tip sayısı adı verilir ve $t(p)$ ile gösterilir. $p \in M$ noktasındaki A^* ın rankına $S(TM)$ ekran dağılımının p noktasındaki tip sayısı adı verilir ve $t^*(p)$ ile gösterilir (Duggal and Bejancu, 1996).

2.5 $T-$Manifoldlar

Tanım 2.5.1 : $\overline{M}$, $(2m+n)$ boyutlu bir C^{∞} manifold olsun. $\overline{M}$ nin tanjant demeti $T\overline{M}$ olmak üzere, $T\overline{M}$ nin

$$\phi^3+\phi=0 \quad , \quad rank(\phi)=2m \tag{2.33}$$

koşulunu sağlayan $(1,1\ )$ tipindeki non-null, C^{∞} ϕ tensör alanına $f-$yapı denir (Goldberg ve Yano, 1970).

$f-$yapı, hemen hemen kompleks $(n=0)$ ve hemen hemen kontakt $(n=1)$ yapıların bir genelleştirilmişidir. Hemen hemen kontakt durumda $\overline{M}$ yönlendirilebilirdir.

$$(i)\ P=-\phi^2, \qquad (ii)\ Q=\phi^2+I \tag{2.34}$$

ile tanımlanan iki bütünleyen projeksiyon operatörlere karşılık $boy(D)=2m$ ve $boy(D^{\perp})=n$ olacak şekilde D ve $D^{\perp}$ bütünleyen dağılımları vardır.

Yardımcı Teorem 2.5.2 : $\overline{M}$, $(2m+n)-$boyutlu olan bir C^{∞} manifold olsun. ϕ, $\overline{M}$ üzerinde bir $f-$ yapı, P ve Q ise (2.34) ile tanımlı bütünleyen projeksiyonlar olmak üzere,

$$i)\ \phi P=P\phi=\phi \ \ , \ \ ii)\ \phi Q=Q\phi=0 \ \ , \ \ iii)\ \phi^2P=-P \ \ , \ \ iv)\ \phi^2Q=0 \tag{2.35}$$

eşitlikleri geçerlidir (Ishihara and Yano, 1964).

(2.35) koşulunu sağlayan P ve Q projeksiyonları yardımı ile $T\overline{M}$, biri $2m$ diğeri n boyutlu olan iki dağılımın toplamı olarak,

$$T\overline{M}=D\oplus D^{\perp} \ \ , \ \ D\cap D^{\perp}=\{0\} \tag{2.36}$$

şeklinde yazılabilir.

Yardımcı Teorem 2.5.3 :$D_x^{\perp}$, $\forall x\in\overline{M}$ noktasında n tane global tanımlı $\{U_a\}$ tarafından gerilsin. U_a nın duali u^a olmak üzere

$$\phi^2=-I+\sum_{a=1}^{n}u^a\otimes U_a \tag{2.37}$$

dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5.4 : $\overline{M}$, $(2m+n)-$boyutlu bir C^{∞} manifold olsun. Eğer $\overline{M}$ üzerinde (2.37) ile belirtilen bir yapı var ise bu yapı ile birlikte $\overline{M}$ ye bir global çatılı ya da kısaca çatılı manifold denir ve $\overline{M}(\phi, U_a)$ ile gösterilir (Goldberg ve Yano, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.5 : $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, ϕ $f-$ yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a olsun. Bu durumda

$$\text{i) } \phi U_a = 0, \quad \text{ii) } u^a \circ \phi = 0, \quad \text{iii) } u^a(U_b) = \delta_b^a \tag{2.38}$$

eşitlikleri geçerlidir (Goldberg and Yano, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.6 : $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, ϕ $f-$ yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a, L Lie türev operatörü ve S_ϕ torsiyon tensör alanı olsun. Eğer $S_\phi = 0$ ise aşağıdaki bağıntılar geçerlidir

i) $L_{U_a} u^b = 0,$

ii) $[U_a, U_b] = 0,$

iii) $L_{U_a} \phi = 0,$

iv) $(L_{\phi X} u^a)(Y) - (L_{\phi Y} u^a)(X) = 0$ (Goldberg and Yano, 1970).

Tanım 2.5.7 : $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, N_ϕ Nijenhuis tensör alanı, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere

$$S_\phi = N_\phi + \sum_{a=1}^{n} du^a \otimes U_a \tag{2.39}$$

ile belirtilen $(1,2)$ tipindeki S_ϕ tensör alanına torsiyon tensör alanı adı verilir. Torsiyon tensör alanının sıfır olması halinde $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifolduna normaldir denir (Goldberg and Yano, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.8 : $\overline{M}$, $(2m+n)$ boyutlu bir C^{∞} manifold ve $\overline{M}$ üzerinde $f-$yapı ϕ olsun. ϕ nin matris formu

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Ishihara ve Yano, 1964).

Yardımcı Teorem 2.5.9 :$\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold, U_a, $1 \leq a \leq n$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde yapı vektör alanları, U_a ların dual vektör alanları u^a olsun. Bu durumda $\overline{g}$ metriği

$$\overline{g}(\phi X, \phi Y) = \overline{g}(X, Y) - \sum_{a=1}^{n} u^a(X) u^a(Y) \tag{2.40}$$

$$\overline{g}(X, U_a) = u^a(X) \tag{2.41}$$

koşullarını sağlar (Yano and Kon, 1984).

(2.40) gözönüne alındığında $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifold üzerindeki metriğin

$$\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0 \tag{2.42}$$

koşulunu sağladığı, yani; ϕ nin ters-simetrik olduğu görülmektedir. (2.40) ve (2.41) koşullarını sağlayan keyfi bir Riemann metrik her zaman bulunabilir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.5.10 : Eğer $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifoldu üzerinde (2.40) ve (2.41) yapıları varsa $\overline{M}(\phi, U_a)$ ye metrik çatılı manifold denir. Metrik çatılı manifold yapısı $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ ile gösterilir (Terlizzi and Pastore, 2002).

Tanım 2.5.11 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir metrik çatılı manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\ \overline{g},\ U_a)$ üzerinde $\overline{\Omega}$, temel 2-formu,

$$\overline{\Omega}(X, Y) = \overline{g}(X, \phi Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M}) \tag{2.43}$$

ile tanımlanır (Terlizzi and Pastore, 2002).

Tanım 2.5.12 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir metrik çatılı manifold ve $\overline{\Omega}$ bir temel $2-$form olsun. Eğer $\overline{M}$ normal, $U_1, ..., U_n$ vektör alanları birer killing vektör alanı ve $\overline{\Omega}$, 2-formu kapalıysa, yani $d\overline{\Omega} = 0$ ise $\overline{M}$, normal metrik çatılı manifold ya da K**-**manifold olarak adlandırılır (Terlizzi and Pastore, 2002).

Tanım 2.5.13 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir K-manifold olsun. $\forall a$, $1 \leq a \leq n$, için U_a nın duali u^a olmak üzere $u^1 \wedge ... \wedge u^n \wedge \left(\overline{\Omega}\right)^m \neq 0$ olduğunda K**-**manifolduna yönlendirilebilirdir denir (Terlizzi and Pastore, 2002).

Tanım 2.5.14 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir yönlendirilebilir $K-$manifold olsun. Eğer her bir $\alpha \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$du^a(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M}) \tag{2.44}$$

koşulu sağlanıyorsa $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ yapısına $T-$manifold adı verilir (Kobayashi, 1990).

Yardımcı Teorem 2.5.15 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $T-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{\nabla}$, Riemann koneksiyonu, ϕ, $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları olmak üzere $\forall X \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{\nabla}_X U_a = 0 \tag{2.45}$$

dır (Blair, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.16 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $T-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{\nabla}$, Riemann koneksiyonu, ϕ, $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Y = 0 \tag{2.46}$$

dır (Blair, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.17 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $T-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{R}(X, Y)U_a = 0 \tag{2.47}$$

dır (Blair, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.18 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir $T-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerinde, $\overline{R}$ Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1 \leq a \leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{R}(X, U_a)Y = 0 \tag{2.48}$$

dır (Blair, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.19 : $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $T-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, $\overline{Ric}$ Ricci eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1\leq a\leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X\in\Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{Ric}(X,U_a)=0 \tag{2.49}$$

dır (Blair, 1970).

Yardımcı Teorem 2.5.20 : $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $T-$manifold olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ üzerinde, Ric Ricci eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1\leq a\leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X\in\Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\overline{Ric}(\phi X,\phi Y)=\overline{Ric}(X,Y)$$

dir (Blair, 1970).

Tanım 2.5.21 : $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $T-$manifold, $p\in\overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\overline{M}$ ve D, (2.35) ile verilen dağılım olsun. $X\in\chi(D)$ birim vektör alanı olmak üzere $T_p\overline{M}$ nin $\{X,\phi X\}$ tarafından gerilen iki boyutlu bir alt uzayına $T_p\overline{M}$ nin $\phi-$kesiti adı verilir ve Π ile gösterilir (Fernandez and Hans-Uber, 2005).

Tanım 2.5.22 : $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $T-$manifold, $p\in\overline{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\overline{M}$ ve $T_p\overline{M}$ nin $\phi-$kesiti Π olsun. Π nin

$$K\left(X,\phi X\right)=g(\overline{R}\left(X,\phi X\right)\phi X,X) \tag{2.50}$$

olarak tanımlanan kesit eğriliğine Π nin $\phi-$kesitsel eğriliği adı verilir (Fernandez and Hans-Uber, 2005).

Yardımcı Teorem 2.5.23 : $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ bir $T-$manifold ve $p\in\overline{M}$ noktasındaki $\overline{M}$ nin tanjant uzayı $T_p\overline{M}$ olsun. $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ nin $\phi-$kesitsel eğriliği bütün $\Pi\subset T_p\overline{M}$ alt düzlemleri için $\forall p\in\overline{M}$ noktasında bir c sabitine eşit ise $\overline{M}(\phi,\overline{g},U_a)$ $T-$manifoldu $T-$uzay form olarak adlandırılır ve $\overline{M}(c)$ ile gösterilir (Kobayashi, 1990).

$\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu bir $T-$uzay form, $\overline{R}$, $\overline{M}(c)$ üzerinde Riemann eğrilik tensörü, ϕ $f-$yapı, U_a, $1\leq a\leq n$, yapı vektör alanları ve U_a ların dual vektör alanları u^a olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \Gamma\left(T\overline{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Z)\overline{g}(Y,W)-\overline{g}(Y,Z)\overline{g}(X,W) \\
&\quad -\overline{g}(X,Z)\sum u^i(Y)u^i(W)-\overline{g}(Y,W)\sum u^i(Z)u^i(X) \\
&\quad +\overline{g}(X,W)\sum u^i(Y)u^i(Z)+\overline{g}(Y,Z)\sum u^i(X)u^i(W) \\
&\quad +\left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)\left(\sum u^i(Y)u^i(W)\right) \\
&\quad -\left(\sum u^i(W)u^i(X)\right)\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right) \qquad (2.51) \\
&\quad +\overline{g}(W,\phi X)\overline{g}(Y,\phi Z)+\overline{g}(Y,\phi W)\overline{g}(X,\phi Z) \\
&\quad -2\overline{g}(X,\phi Y)\overline{g}(W,\phi Z)\}
\end{aligned}$$

olur (Kobayashi, 1990).

BÖLÜM 3

INDEFINITE $T-$MANİFOLDLARIN LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ

Bu bölümde, öncelikte indefinite $T-$manifoldları ve indefinite $T-$manifoldarın lightlike hiperyüzeyleri tanıtılarak, indefinite $T-$manifoldarının lightlike hiperyüzeylerinin başlıca temel özelliklerine yer verilmiştir.

3.1 Indefinite $T-$Manifold

$\overline{M}(\phi, U_a)$ bir $(2m+n)-$boyutlu çatılı manifold ve $\overline{g}$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde indeksi $0 < \upsilon < 2m+n$ olan yarı-Riemann metrik olsun. $\overline{g}$, $\overline{M}(\phi, U_a)$ üzerinde (2.42) bağıntısını sağlasın. $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifoldu için (2.37) ve (2.42) den,

$$\overline{g}(\phi X, \phi Y) = \overline{g}(X, Y) - \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a u^a(X) u^a(Y) \tag{3.1}$$

$$\overline{g}(X, U_a) = \varepsilon_a u^a(X) \tag{3.2}$$

dir. Burada ε_a, U_a nın spacelike veya timelike olmasına bağlı olarak $+1$ veya -1 dir

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerinde $\overline{\Omega}$ 2-formu,

$$\overline{\Omega}(X, Y) = \overline{g}(\phi X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$$

ile tanımlanır. Dolayısıyla (2.1) kullanılarak (2.46) bağıntısı yeniden

$$\left(\overline{\nabla}_X \phi\right) Y = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $\overline{M}(\phi, U_a)$ çatılı manifoldu (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlayan bir yarı-Riemann metrik yapısına sahip, normal, yönlendirilebilir, $\overline{\Omega}$ $2-$formu kapalı yani,

$$d\overline{\Omega}(X, Y) = 0$$

ve her bir $\alpha \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$du^a(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\overline{M}) \tag{3.4}$$

koşulu sağlanıyorsa $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ yapısına indefinite $T-$manifold adı verilir.

Bu bölümde genelliği bozmaksızın $\varepsilon_a = 1$ alınacaktır. Bu durumda $\overline{g}$ nin indeksi $\nu = 2\rho$, $0 < \rho < m$ olacaktır.

3.2 Indefinite $T-$Manifoldların Lightlike Hiperyüzeylerinin Temel Özellikleri

(M, g), $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ indefinite $T-$manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $E \in \Gamma(TM^{\perp})$ ise $\overline{g}(E, E) = 0$ olup bu $E \in \Gamma(TM)$ demektir. Bu durumda hem TM hem de $TM^{\perp}$, $T\overline{M}$ nin dejenere alt vektör demetleridir. Böylece $TM^{\perp}$, M üzerinde bir boyutlu dağılımdır. Üstelik $g(\phi E, E) = 0$ olacağından $\phi E \in \Gamma(TM)$ dir. Böylece M üzerinde rankı bir olan $\phi(TM^{\perp})$ dağılımı elde edilmiş olur. Şimdi TM de, $S(TM)$ ile gösterilen ve ekran dağılım olarak adlandırılan $TM^{\perp}$ in bütünleyen dağılımını seçelim. $S(TM)$ nondejenere olduğundan $S(TM)$ ye ortogonal olan bir bütünleyen $S(TM)^{\perp}$ dağılımı vardır. Böylece

$$T\overline{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{3.5}$$

yazılabilir. Buradan $S(TM)^{\perp}$ in iki boyutlu bir dağılım olduğu görülmektedir. Bu durumda $E \in \Gamma(TM^{\perp})$ için Teorem 2 den

$$\overline{g}(N, E) = 1 \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(SM^{\perp})$ vardır. Böylece $N \notin TM$ dir. $T\overline{M}$ nin $N \in \Gamma(trTM)$ olacak şekilde bir boyutlu bir dağılımı seçilsin. Bu durumda

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus trTM \tag{3.7}$$

dır. Böylece

$$T\overline{M} = S(TM) \perp \left(TM^{\perp} \oplus trTM\right) = TM \oplus trTM \tag{3.8}$$

yazılabilir. N, ϕE ye ortogonal olduğundan

$$\overline{g}(\phi N, E) = -\overline{g}(N, \phi E) = 0,\ \overline{g}(N, \phi N) = 0 \tag{3.9}$$

dır. Bu ise $\phi N \in \Gamma(S(TM))$ olduğunu göstermektedir. Ayrıca ϕN ve ϕE

$$\overline{g}(\phi N, \phi E) = 1 \tag{3.10}$$

koşulunu sağlayan null vektörler olduklarından $\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(trTM)$, $S(TM)$ nin rankı iki olan bir non-dejenere alt vektör demetidir. O zaman M nin

$$S(TM) = \big(\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(tr\,(TM))\big) \perp D_0 \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir non-dejenere dağılımı vardır. Burada $\{U_1, ..., U_n\} \in \Gamma(D_0)$ dır. (2.36) ve (2.38) dan ϕ, D dağılımı üzerinde null operatör olduğundan $\phi(D_0) \subset D_0$ dır. Yani, D_0 invaryant bir dağılımdır. (3.5), (3.7) dan

$$TM = \big(\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(tr\,(TM))\big) \perp D_0 \perp TM^{\perp} \tag{3.12}$$

ve

$$T\overline{M} = \big(\phi(TM^{\perp}) \oplus \phi(tr\,(TM))\big) \perp D_0 \perp \big(TM^{\perp} \oplus tr\,(TM)\big) \tag{3.13}$$

elde edilir.

$\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun.

$$\mathcal{D} = TM^{\perp} \perp \phi(TM^{\perp}) \perp D_0, \; D' = \phi(tr(TM)), \tag{3.14}$$

olacak şekildeki $\mathcal{D}$ ve $D^{'}$ dağılımlarını göz önüne alalım. Bu durumda

$$TM = \mathcal{D} \oplus D^{'} \tag{3.15}$$

dır. Ayrıca lokal lightlike

$$U_{n+1} = -\phi N, \; V = -\phi E \tag{3.16}$$

vektör alanları göz önüne alınsın. $\phi U_{n+1} = N$ olduğu açıktır. (3.15) den
$\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = SX + FX \tag{3.17}$$

yazılabilir. Burada $S : TM \to \mathcal{D}$ ve $F : TM \to D^{'}$ şeklinde projeksiyon dönüşümleridir.

$FX \in \Gamma\left(\phi(tr\left(TM\right))\right)$ oduğundan u^{n+1} bir $1-$form olmak üzere $FX = u^{n+1}(X)U_{n+1}$ yazılabilir. Böylece (3.17) ifadesi

$$X = SX + u^{n+1}(X)U_{n+1} \tag{3.18}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $u^{n+1}(X) = g(X, V)$ dir. (3.18) ifadesine ϕ uygulanacak olursa, $\phi SX = fX$ olmak üzere

$$\phi X = fX + u^{n+1}(X)N \tag{3.19}$$

olur. Burada f, M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır. (3.19) ve (2.37) kullanılarak,

$$\begin{aligned} f^2X &= -X + u^{n+1}(X)U_{n+1} + \sum_{a=1}^{n} u^a(X)U_a \qquad (3.20)\\ &= -X + \sum_{a=1}^{n+1} u^a(X)U_a \end{aligned}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3.2.1 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. f, (3.19) bağıntısını sağlayan $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı ise (M, g) üzerinde

$$f^3 + f = 0$$

dır. Dolayısıyla (M, g) üzerinde bir çatılı yapı mevcuttur.

İspat 3.2.1 : (3.20) bağıntısından $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$f^3X = -fX + u^{n+1}(X)fU_{n+1} + \sum_{a=1}^{n} u^a(X)fU_a$$

yazılabilir. Ayrıca (3.19) ve (3.20) bağıntılarından $fU_{n+1} = 0$ ve $fU_a = 0$ olacağından (M, g) üzerinde $f^3 + f = 0$ dır.

Yardımcı Teorem 3.2.2 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) üzerindeki $f-$yapı için aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır.

$$fu^i = 0, \quad u^i \circ f = 0, \quad i \in \{1, ..., n+1\} \tag{3.21}$$

İspat 3.2.2 : Yardımcı teorem 3.2.1 in ispatı ile aynıdır.

Sonuç 3.2.3 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) hiperyüzeyi (3.20) ve (3.21) koşullarını sağladığından (M, g) lightlike hiperyüzeyi üzerinde bir çatılı yapı vardır.

Sonuç 3.2.4 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. (M, g) üzerinde metrik çatılı yapı yoktur.

İspat 3.2.4 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerinde indefinite metrik yapısı mevcut olup, bu yapı için

$$\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0$$

koşulunu sağlamaktadır. (3.19) bağıntısı kullanılarak aynı koşulun (M, g) üzerinde sağlanmadığını görmek mümkündür. Dolayısıyla (M, g) üzerinde bir metrik çatılı yapı yoktur.

Sonuç 3.2.5 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. $P : \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM))$ izdüşüm operatörü olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $M(f, g, U_i, P)$ $1 \leq i \leq n+1$, yapısı bir metrik çatılı manifoldtur.

İspat 3.2.5 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ üzerinde indefinite metrik yapısı mevcut olup, bu yapı için

$$\overline{g}(\phi X, Y) + \overline{g}(X, \phi Y) = 0$$

koşulunu sağlamaktadır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.19) bağıntısı kullanılarak

$$\phi PX = fPX$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\overline{g}(fPX, PY) + \overline{g}(PX, fPY) = 0$$

dır. Yani P izdüşüm operatörü ile birlikte M lightlike hiperyüzeyi üzerinde bir çatılı yapı kurulabilir.

3.3 Dağılımların İntegrallenebilirliği

Teorem 3.3.1 : $\overline{M}$ bir indefinite $T-$manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun.

(i) $TM^{\perp} \perp \phi(TM^{\perp})$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$B(X,Y)=0,\ \forall X\in\Gamma(\phi(TM^{\perp})),\ Y\in\Gamma(\phi(TM^{\perp}))\perp\Gamma\left(D_0'\right), \tag{3.22}$$

olmasıdır.

(ii) $TM^{\perp} \perp \phi(tr(TM))$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$B(U,U)=0 \tag{3.23}$$

ve

$$B(U,X)=C(E,\phi X),\ \forall X\in\Gamma\left(D_0\right), \tag{3.24}$$

olmasıdır.

(iii) $\phi(TM^{\perp})\oplus\phi(tr(TM))$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$C(U,V)=C(V,U) \tag{3.25}$$

ve

$$B(U,\phi X)=C(V,\phi X),\ \forall X\in\Gamma(D_0), \tag{3.26}$$

olmasıdır.

(iv) $TM^{\perp} \perp \left\{\phi(TM^{\perp})\oplus\phi(tr(TM))\right\}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul (3.24) ve (3.26) ile birlikte

$$B(V,X)=0,\ \forall X\in\Gamma\left(D_0\right), \tag{3.27}$$

olmasıdır.

(v) D_0 dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= C(Y,X), && (3.28)\\ C(X,\phi Y) &= C(Y,\phi X) && (3.29) \end{aligned}$$

ve

$$B(X,\phi Y)=B(Y,\phi X),\ \forall X,Y\in\Gamma\left(D_0\right), \tag{3.30}$$

olmasıdır.

(vi) $TM^{\perp} \perp D_0$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul (3.27), (3.29) ve (3.30) ile birlikte ve

$$C(X, \phi\xi) = C(\xi, \phi X) = 0, \forall X \in \Gamma\left(D_0\right), \tag{3.31}$$

olmasıdır.

(vii) $\phi(TM^{\perp}) \perp D_0$ dağılımlarının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul (3.27), (3.28) ve (3.30) ile birlikte

$$C(X, V) = C(V, X),, \forall X \in \Gamma\left(D_0\right). \tag{3.32}$$

(viii) $\phi(tr(TM)) \perp D_0$ dağılımlarının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul (3.28) ve (3.29) ile birlikte

$$C(X, U) = C(U, X), \tag{3.33}$$

ve

$$C(U, \phi X) = 0, \forall X \in \Gamma\left(D_0\right), \tag{3.34}$$

olmasıdır.

(ix) $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul (3.27) ve (3.30) ile birlikte

$$B(V, V) = 0 \tag{3.35}$$

olmasıdır.

(x) $\phi(tr(TM)) \perp TM^{\perp} \perp D_0$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul (3.23), (3.29), (3.31)ve (3.34) koşullarının sağlanmasıdır.

İspat 3.3.1 : (i) (3.13) ayrışımından ve lightlike hiperyüzey tanımından $TM^{\perp} \perp \phi TM^{\perp}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\overline{g}([Z, V], \phi\xi) = \overline{g}([Z, V], X)$$

olmasıdır. Burada $Z, V \in \Gamma\left(TM^{\perp} \perp \phi TM^{\perp}\right)$, $\xi \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$, $X \in \Gamma(D_0)$ dır. $TM^{\perp}$ ve $\phi(TM^{\perp})$ bir boyutlu olduklarından $[\xi, \xi] = 0$, $[\phi\xi, \phi\xi] = 0$ dır. $TM^{\perp}$ uzayı geren vektör alanı ξ alınabilir. Diğer vektör alanları bununla lineer bağımlı olacaktır. Şimdi, $[\xi, \phi\xi]$ kontrol etmek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\overline{g}([\xi, \phi\xi], \phi\xi) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\xi}\phi\xi, X\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi\xi}\xi, X\right) \\
&= -\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi\xi}\xi, \phi\xi\right) \\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi\xi}\phi\xi, \xi\right) \\
&= \overline{g}\left((B(\phi\xi, \phi\xi)\, N, \xi\right) \\
&= B(\phi\xi, \phi\xi) = B(U, U)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

olur. Burada

$$[\xi, \phi\xi] = \overline{\nabla}_{\xi}\phi\xi - \overline{\nabla}_{\phi\xi}\xi$$

olduğundan

$$\xi \langle \phi\xi, X\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\xi}\phi\xi, X\right\rangle + \left\langle \phi\xi, \overline{\nabla}_{\xi}X\right\rangle$$

bulunur.

Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\overline{g}([\xi, \phi\xi], X) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\xi}\phi\xi, X\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi\xi}\xi, X\right) \\
&= -\overline{g}\left(\phi\xi, \overline{\nabla}_{\xi}X\right) + \overline{g}\left(\xi, \overline{\nabla}_{\phi\xi}X\right) \\
&= \overline{g}\left(\xi, \overline{\nabla}_{\xi}\phi X\right) + \overline{g}\left(\xi, \overline{\nabla}_{\xi\phi}X\right) \\
&= \overline{g}\left(\xi, [\xi, \phi X] + \overline{\nabla}_{\phi X}\xi\right) + \overline{g}\left(\xi, \overline{\nabla}_{\xi\phi}X\right) \\
&= \overline{g}\left(\xi, \overline{\nabla}_{\phi X}X\right) \\
&= \overline{g}\left(\xi, B(\phi\xi, X)\, N\right) \\
&= B(\phi\xi, X)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.36) ve (3.37) den ispat tamamlanır.

(ii) $TM^{\perp} \perp \phi(tr(TM))$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\overline{g}([Z, V], \phi N) = \overline{g}([Z, V], X) = 0$$

olmasıdır. Burada $Z, V \in \Gamma\left(TM^{\perp} \perp \phi(tr(TM))\right)$, $N \in \Gamma\left(tr(TM)\right)$, $X \in \Gamma(D_0)$ dır. $TM^{\perp}$ ve $\phi(tr(TM)$ bir boyutlu olduklarından $[\xi, \xi] = 0$, $[\phi N, \phi N] = 0$, $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$ dır. Dolayısıyla $[\xi, \phi N]$ için göstermek yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}
\overline{g}([\xi,\phi N],\phi N) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\xi}\phi N,\phi N\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi N}\xi,\phi N\right)\\
&= -\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi N}\xi,\phi N\right)\\
&= \overline{g}\left(\xi,\overline{\nabla}_{\phi N}\phi N\right)\\
&= \overline{g}\left(\xi,B(\phi N,\phi N)N\right)\\
&= B(\phi N,\phi N)=B(U,U)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

olur. Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
\overline{g}([\xi,\phi N],X) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\xi}\phi N,X\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\phi N}\xi,X\right)\\
&= -\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\xi}N,\phi X\right)+\overline{g}\left(\xi,\overline{\nabla}_{\phi N}X\right)\\
&= \overline{g}\left(A_N\xi,\phi X\right)+\overline{g}\left(\xi,B(\phi N,X)\,N\right)\\
&= C(\xi,\phi X)+B(\phi N,X)\\
&= C(\xi,\phi X)-B(U,X)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

bulunur. (3.38) ve (3.39) den ispat tamamlanır. Diğer durumlar benzer şekilde ispat edilebilir.

BÖLÜM 4

INDEFINITE $T-$UZAY FORMLARININ LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİNİN VARLIK KOŞULLARI

Bu bölümde, (Şahin ve Güneş, 2000) de indefinite kompleks uzay formları için yapılan çalışma esas alınarak indefinite $T-$uzay formlarının lightlike hiperyüzeylerinin hangi durumlarda var olup olmadığı incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.1.1 : $\overline{M}(c)$ bir indefinite $T-$uzay form ve M de $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman herhangi bir $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Z)Y - \overline{g}(Y,Z)X \\ &\quad -\overline{g}(X,Z)\sum u^i(Y)U_i - \left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)Y \\ &\quad +\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right)X + \overline{g}(Y,Z)\sum u^i(X)U_i \\ &\quad +\left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)\left(\sum u^i(Y)U_i\right) \\ &\quad -\left(\sum u^i(X)U_i\right)\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right) + \overline{g}(Y,\phi Z)fX \\ &\quad -\overline{g}(X,\phi Z)fY - 2\overline{g}(X,\phi Y)fZ\} - B(X,Z)A_NY + B(Y,Z)A_NX \end{aligned} \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla_Y h)(X,Z) - (\nabla_X h)(Y,Z) &= \frac{c}{4}\left[\overline{g}(Y,\phi Z)u^{n+1}(X) - \overline{g}(X,\phi Z)u^{n+1}(Y)\right. \\ &\quad \left. -2\overline{g}(X,\phi Y)u^{n+1}(Z)\right]N \end{aligned} \tag{4.2}$$

dır.

İspat 4.1.1 : $\overline{M}(c)$ indefinite bir $T-$uzay form olduğundan (2.51) ve (2.27) den

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Z)Y-\overline{g}(Y,Z)X \\
&-\overline{g}(X,Z)\sum u^i(Y)U_i-\left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)Y \\
&+\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right)X+\overline{g}(Y,Z)\sum u^i(X)U_i \\
&+\left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)\left(\sum u^i(Y)U_i\right) \\
&-\left(\sum u^i(X)U_i\right)\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right)+\overline{g}(Y,\phi Z)\phi X \\
&-\overline{g}(X,\phi Z)\phi Y-2\overline{g}(X,\phi Y)\phi Z\}-A_{h(X,Z)}Y+A_{h(Y,Z)}X \\
&-\left(\nabla_X h\right)(Y,Z)+\left(\nabla_Y h\right)(X,Z)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. (4.3) de (3.19) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Z)Y-\overline{g}(Y,Z)X \\
&-\overline{g}(X,Z)\sum u^i(Y)U_i-\left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)Y \\
&+\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right)X+\overline{g}(Y,Z)\sum u^i(X)U_i \\
&+\left(\sum u^i(Z)u^i(X)\right)\left(\sum u^i(Y)U_i\right)-\left(\sum u^i(X)U_i\right)\left(\sum u^i(Y)u^i(Z)\right) \\
&+\overline{g}(Y,\phi Z)\left(fX+u^{n+1}(X)N\right)-\overline{g}(X,\phi Z)\left(fY+u^{n+1}(Y)N\right) \\
&-2\overline{g}(X,\phi Y)\left(fZ+u^{n+1}(Z)N\right)\} \\
&-A_{h(X,Z)}Y+A_{h(Y,Z)}X-\left(\nabla_X h\right)(Y,Z)+\left(\nabla_Y h\right)(X,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son bağıntının transversal ve teğet kısımları göz önüne alındığında (3.8) dan (4.1) ve (4.2) elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.2 : $\overline{M}(c)$ bir indefinite $T-$uzay form ve M de $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
R(X,E,Y,N) &= \frac{c}{4}\{-\sum u^i(Y)u^i(X)+\overline{g}(X,Y) \\
&+g\left(X,U_{n+1}\right)u^{n+1}(Y)+2g\left(Y,U_{n+1}\right)u^{n+1}(X)\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dır.

İspat 4.1.2 : Yardımcı teorem 4.1.1 den

$$\begin{aligned}
R(X,E,Y,N) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y)-\sum u^i(Y)u^i(X) \\
&+\overline{g}(N,\phi X)\overline{g}(E,\phi Y)-2\overline{g}(X,\phi E)\overline{g}(N,\phi Y)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.16) den (4.4) elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.3 : $\overline{M}$ bir indefinite $T-$manifold ve M de $\overline{M}$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Böylece herhangi bir $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$B(Y, U_{n+1}) = C(Y, V)$$

dir.

İspat 4.1.3 : B nin tanımından

$$B(Y, \phi N) = \overline{g}(h(Y, \phi N), E) = \overline{g}(\overline{\nabla}_Y \phi N, E) = -\overline{g}(\overline{\nabla}_Y N, \phi E),$$

yazılabilir. Öte yandan, (2.15) ve (2.16) kullanarak

$$B(Y, \phi N) = -\overline{g}(\overline{\nabla}_Y N, \phi E) = g(A_N Y, \phi E) = C(Y, \phi E),$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4 : $\overline{M}(c)$ bir indefinite $T-$uzay form ve M de $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M nin ikinci temel formu paralel ve $c \neq 0$ ise $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi yoktur.

İspat 4.1.4 : Kabul edelimki $c \neq 0$ ve ikinci temel form paralel olsun. Bu durumda (4.2) de $Y = E$, $Z = \phi N$ alınırsa

$$\frac{c}{4}\left[-u^{n+1}(X) + 2\overline{g}(X, \phi E)\right] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte $X = \phi N$ alınırsa

$$\frac{3}{4}c = 0$$

bulunur. Bu ise $c \neq 0$ olması ile çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5 : $\overline{M}(c)$ bir indefinite $T-$uzay form ve M de $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M nin ekran dağılımı paralel ve $c \neq 0$ ise $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi yoktur.

İspat 4.1.5 : Kabul edelim ki $c \neq 0$ ve ekran dağılımı paralel olsun. Bu durumda (2.51) den

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{R}(E,\phi N)\phi E, N) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(E,\phi E)\overline{g}(\phi N, N) - \overline{g}(\phi N,\phi E)\overline{g}(E,N) \\
&\quad -\overline{g}(E,\phi E)\sum u^i(\phi N)u^i(N) - \overline{g}(\phi N, N)\sum u^i(\phi E)u^i(E) \\
&\quad +\overline{g}(E,N)\sum u^i(\phi N)u^i(\phi E) + \overline{g}(\phi N,\phi E)\sum u^i(E)u^i(N) \\
&\quad +\left(\sum u^i(\phi E)u^i(E)\right)\left(\sum u^i(\phi N)u^i(N)\right) \\
&\quad -\left(\sum u^i(N)u^i(E)\right)\left(\sum u^i(\phi N)u^i(\phi E)\right) + \overline{g}(N,\phi E)\overline{g}(\phi N,\phi^2 E) \\
&\quad +\overline{g}(\phi N,\phi N)\overline{g}(E,\phi^2 E) - 2\overline{g}(E,\phi^2 N)\overline{g}(N,\phi^2 E)\}
\end{aligned}$$

veya

$$\overline{g}(\overline{R}(E,\phi N)\phi E, N) = -\frac{c}{4} \tag{4.5}$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)PZ, N\right) &= \overline{g}\left(R(X,Y)PZ,N\right) = \left(\nabla_X C\right)(Y,PZ) - \left(\nabla_Y C\right)(X,PZ) \\
&\quad +\tau(Y)C(X,PZ) - \tau(X)C(Y,PZ).
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz Teorem 4.1.1 gereğince

$$\overline{g}\left(\overline{R}(E,\phi N)\phi E, N\right) = 0$$

veya (4.5) kullanılarak

$$c = 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 4.1.6 : $\overline{M}$ indefinite bir $T-$manifoldu ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer V asli vektör alanı ise

$$B(V, U_{n+1}) = C(V,V) = 0.$$

dır.

İspat 4.1.6 : (2.15) ve (2.16) gereğince,

$$\overline{\nabla}_X U_{n+1} = -\overline{\nabla}_X \phi N = -\phi\overline{\nabla}_X N$$

veya

$$\nabla_X U_{n+1} + B(X, U_{n+1})N = \phi A_N X - \tau(X)\phi N \tag{4.6}$$

dır. (4.6) ve (2.16) kullanılarak

$$\nabla_X U_{n+1} + B(X, U_{n+1})N = f A_N X + u^{n+1}(A_N X)N - \tau(X)\phi N$$

elde edilir. Bu son bağıntıda tranversal vektör demetleri gözönüne alındığında

$$B(X, U_{n+1}) = u^{n+1}(A_N X) = -g(A_N X, \phi E) = -C(X, \phi E)$$

bulunur. $X = V$ alınır ve hipotezden V nin asli vektör olduğu gözönüne alınırsa ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.7 : $\overline{M}(c)$ bir indefinite $T-$uzay form ve M de $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Böylece Codazzi denklemi

$$\begin{aligned}(\bigtriangledown_X A_N) Y - (\bigtriangledown_Y A_N) X &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X, N)Y - \overline{g}(Y, N)X - \overline{g}(X, N)\sum u^i(Y)U_i \\ &\quad +\overline{g}(Y, N)\sum u^i(X)U_i + \overline{g}(Y, \phi N)fX - \overline{g}(X, \phi N)fY\} \\ &\quad -2\overline{g}(X, \phi Y)fN + \tau(Y)A_N X - \tau(X)A_N Y\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat 4.1.7 : $(\bigtriangledown_X A_N) Y - (\bigtriangledown_Y A_N) X = (R(X, Y)N)^{\perp}$ olduğu bilinmektedir. (2.51) bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\overline{R}(X, Y)N &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X, N)Y - \overline{g}(Y, N)X \\ &\quad -\overline{g}(X, N)\sum u^i(Y)U_i + \overline{g}(Y, N)\sum u^i(X)U_i \\ &\quad +\overline{g}(Y, \phi N)\phi X - \overline{g}(X, \phi N)\phi Y - 2\overline{g}(X, \phi Y)\phi N\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte, (2.27), (2.28) ve (3.19) kullanılırsa Codazzi denkleminin verilen formda olduğu görülür.

Şimdi $\Gamma(TM)$ nin her $i = 1, ..., m-2$ ve $j = 1, ..., n$ için

$$\{z_1, ..., z_{m-2}, ..., z_{2m-4}, U_1, ..., U_n, E, \phi E, \phi N\}$$

bir ortonormal tabanını alalım

$$\phi z_i = z_{m-2+i},\ \phi z_{m-2+i} = -z_i \text{ ve } \phi U_j = 0$$

olacak şekildeki $\{z_1, ..., z_{m-2}, ..., z_{2m-4}, U_1, ..., U_n, E, \phi E, \phi N\}$ bir ortonormal tabanını gözönüne alalım.

Yardımcı Teorem 4.1.8 : $\overline{M}$ indefinite bir $T-$manifoldu ve M, $\overline{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_N U_{n+1} &= \sum_{i=1}^{2m-4} \varepsilon_i C(U_{n+1}, z_i) z_i + \sum_{j=1}^{n} C(U_{n+1}, U_j) U_j \\ &\quad + C(U_{n+1}, U_{n+1}) V + C(U_{n+1}, V) U_{n+1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$A_N E = \sum_{i=1}^{2m-4} \varepsilon_i C(E, z_i) z_i + \sum_{j=1}^{n} C(E, U_j) U_j + C(E, U_{n+1}) V \tag{4.8}$$

dir. Burada ε_i, z_i nin işaretini göstermektedir.

İspat 4.1.8 : $\Gamma(TM)$ nin yukarıda belirtilen bazları kullanılarak

$$A_N U_{n+1} = \sum_{i=1}^{2m-4} \lambda_i z_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j U_j + \beta_1 E + \beta_2 \phi E + \beta_3 \phi N \tag{4.9}$$

yazılabilir. (2.24) ve (2.25) den,

$$\lambda_i = g\left(A_N U_{n+1}, z_i\right) = \varepsilon_i C(U_{n+1}, z_i)$$

$$\gamma_j = g\left(A_N U_{n+1}, U_j\right) = C(U_{n+1}, U_j)$$

$$\beta_1 = \overline{g}\left(A_N U_{n+1}, N\right) = 0$$

$$\beta_2 = g\left(A_N U_{n+1}, \phi N\right) = -C(U_{n+1}, U_{n+1})$$

$$\beta_3 = g\left(A_N U_{n+1}, \phi E\right) = -C(U_{n+1}, V)$$

elde edilir. Elde edilen bu bağıntılar (4.9) de yerine yazılırsa, (4.7) ispat edilmiş olur. Benzer yolla (4.8) da gösterilir.

Teorem 4.1.9 : $\overline{M}(c)$ $(c \neq o)$ bir indefinite $T-$uzay form ve M de $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$g((\nabla_E A_N) U_{n+1}, V) = g(\left(\nabla_{U_{n+1}} A_N\right) E, V)$$

ve

$$B(U_{n+1}, U_{n+1}) = 0$$

olacak şekilde $\overline{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi yoktur.

İspat 4.1.10 : Yardımcı teorem 4.1.1 de $Y = U_{n+1}$ ve $X = E$ alınırsa,

$$(\bigtriangledown_E A_N)\, U_{n+1} - \left(\bigtriangledown_{U_{n+1}} A_N\right) E = \frac{3c}{4} U_{n+1} + \tau(U_{n+1}) A_N E - \tau(E) A_N U_{n+1}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) dan

$$\begin{aligned}
(\bigtriangledown_E A_N)\, U_{n+1} - \left(\bigtriangledown_{U_{n+1}} A_N\right) E \ &= \frac{3c}{4} U_{n+1} \\
&+\tau(U_{n+1}) \left\{ \sum_{i=1}^{2m-4} \frac{C(E, z_i)}{\varepsilon_i} z_i \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{n} C(E, U_j) U_j + C(E, U_{n+1}) V \right\} \\
&-\tau(E) \left\{ \sum_{i=1}^{2m-4} \frac{C(U_{n+1}, z_i)}{\varepsilon_i} z_i + \sum_{j=1}^{n} C(U_{n+1}, U_j) U_j \right. \\
&\left. + C(U_{n+1}, U_{n+1}) V + C(U_{n+1}, V) U_{n+1} \right\}.
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Yardımcı teorem 4.1.1 kullanılarak

$$g((\bigtriangledown_E A_N)\, U_{n+1} - \left(\bigtriangledown_{U_{n+1}} A_N\right) E, V) = -\frac{3c}{4} - \tau(E) B(U_{n+1}, U_{n+1})$$

bulunur. Hipotezden

$$g((\bigtriangledown_E A_N)\, U_{n+1}, V) = g(\left(\bigtriangledown_{U_{n+1}} A_N\right) E, V)$$

olması ancak ve ancak $c = 0$ olması ile mümkündür. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5

INDEFINITE $T-$UZAY FORMUNUN TOTAL UMBİLİK LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ VE RİCCİ EĞRİLİĞİ

Bu bölümde, indefinite $T-$uzay formlarının total umbilik lightlike hiperyüzeyleri ve indefinite $T-$uzay formlarının lightlike hiperyüzeylerinin ricci eğriliği ele alınmış olup, $\phi-$kesit eğriliği c nin sıfırdan farklı olduğu durumlarda total umbilik lightlike hiperyüzeylerinin var olmadığı gösterilerek, ricci eğriliğinin simetrik olması için bazı koşullar elde edilmiştir.

5.1 Indefinite $T-$Uzay Formların Total Umbilik Lightlike Hiperyüzeyleri

Teorem 5.1.1 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir total umbilik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $c = 0$ ve ρ,

$$\rho^2 - E(\rho) - \rho\tau(E) = 0 \tag{5.1}$$

olmak üzere

$$PX(\rho) + \rho\tau(PX) = 0, \ \forall X \in \Gamma(TM) \tag{5.2}$$

diferensiyel denklemlerini sağlar. Burada ρ, (2.32) bağıntısını sağlayan bir düzgün fonksiyondur.

İspat 5.1.1 : (2.51) bağıntısı kullanılarak, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,E) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(E,\phi X)\overline{g}(Y,\phi Z) + \overline{g}(Y,\phi E)\overline{g}(X,\phi Z) \\ &\quad -2\overline{g}(X,\phi Y)\overline{g}(E,\phi Z)\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (2.27) ve (2.51) kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\frac{c}{4}\{\overline{g}(E,\phi X)\overline{g}(Y,\phi Z) + \overline{g}(Y,\phi E)\overline{g}(X,\phi Z) - 2\overline{g}(X,\phi Y)\overline{g}(E,\phi Z)\} \\ &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) + \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z) \end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) de $X = PX$,
$Y = E, \ Z = PZ$ alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{3c}{4}u^{n+1}(PX)u^{n+1}(PZ) &= (\nabla_{PX}B)(E,PZ)-(\nabla_{E}B)(PX,PZ)\\ &\quad +\tau(PX)B(E,PZ)-\tau(E)B(PX,PZ)\end{aligned} \tag{5.5}$$

bulunur. Ayrıca, (5.5) eşitliğinin sağ tarafının hesap edilmesi ile

$$\begin{aligned} & (\nabla_{PX}B)(E,PZ)-(\nabla_{E}B)(PX,PZ)+\tau(PX)B(E,PZ)-\tau(E)B(PX,PZ)\\ = \;& (\nabla_{PX}\rho g)(E,PZ)-(\nabla_{E}\rho g)(PX,PZ)-\tau(E)\rho g(PX,PZ)\\ = \;& \rho(\nabla_{PX}g)(E,PZ)-\rho(\nabla_{E}g)(PX,PZ)-(\nabla_{E}\rho)g(PX,PZ)\\ & -\tau(E)\rho g(PX,PZ)\\ = \;& \rho(\nabla_{PX}g)(E,PZ)+(\nabla_{PX}\rho)g(E,PZ)\\ & -\rho(\nabla_{E}g)(PX,PZ)-(\nabla_{E}\rho)g(PX,PZ)-\tau(E)\rho g(PX,PZ)\\ = \;& \left(\rho^2-E(\rho)-\rho\tau(E)\right)g(PX,PZ)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (5.5) bağıntısından

$$\frac{3c}{4}u^{n+1}(PX)u^{n+1}(PZ)=\left(\rho^2-E(\rho)-\rho\tau(E)\right)g(PX,PZ) \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.6) de $PX=PZ=U_{n+1}$ alınırda $c=0$ bulunur. (5.5) de $X=E,\ Y=PY$, ve $Z=PY$ alınırsa benzer hesaplamalar ile $c=0$ için

$$\left(\rho^2-E(\rho)-\rho\tau(E)\right)g(PY,PY)=0$$

olur. $g(PY,PY)\neq 0$ olması durumunda (5.1) sağlanmış olur. (5.4) de $c=0$ olmak üzere $X=PX,\ Y=PY$ ve $Z=PY$ alınırsa

$$\{PX(\rho)+\rho\tau(PX)\}PY=\{PY(\rho)+\rho\tau(PY)\}PX$$

bulunur. Bu ise (5.2) dir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.2 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $c\neq 0$ olmak üzere $\overline{M}(c)$ nin total umbilik lightlike hiperyüzeyi yoktur.

Teorem 5.1.3 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $S(TM)$ ekran dağılımı total umbilik olacak şekilde $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $S(TM)$ total geodeziktir, yani; $C(X, PY) = 0$ dır.

İspat 5.1.3 : $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)PZ, N) = \overline{g}(R(X,Y)PZ, N)$$

dır. Bu eşitliğin sağ tarafının hesap edilmesi ile

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{R}(X,Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) \\ &\quad + \tau(Y)C(X, PZ) - \tau(X)C(Y, PZ) \qquad (5.7)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$(\nabla_X C)(Y, PZ) = X(C(Y, PZ)) - C(\nabla_X Y, PZ) - C(Y, \nabla^*_X PZ) \qquad (5.8)$$

olur. (5.7) de $X = E, Y = PZ = U_{n+1}$ alınır ve (2.31) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{R}(E, U_{n+1})U_{n+1}, N) &= (\nabla_E C)(U_{n+1}, U_{n+1}) - \left(\nabla_{U_{n+1}} C\right)(E, U_{n+1}) \\ &\quad + \tau(U_{n+1})C(E, U_{n+1}) - \tau(E)C(U_{n+1}, U_{n+1}) \\ &= \lambda(\nabla_E g)(U_{n+1}, U_{n+1}) - \lambda\left(\nabla_{U_{n+1}} g\right)(E, U_{n+1}) \\ &= -\lambda\left(\nabla_{U_{n+1}} g\right)(E, U_{n+1}) \\ &= \lambda g\left(\nabla_{U_{n+1}} E, U_{n+1}\right) \\ &= -\lambda\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{U_{n+1}} E, \phi N\right)\end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{R}(E, U_{n+1})U_{n+1}, N) &= -\lambda\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{U_{n+1}} E, \phi N\right) \\ &= \lambda\overline{g}\left(\phi\overline{\nabla}_{U_{n+1}} E, N\right) \\ &= \lambda\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{U_{n+1}}\phi E, N\right) \\ &= -\lambda\overline{g}\left(\phi E, \overline{\nabla}_{U_{n+1}} N\right) = \lambda\overline{g}\left(\phi E, A_N U_{n+1}\right) \\ &= \lambda C(U_{n+1}, \phi E) = -\lambda^2\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.51) den

$$\overline{g}(\overline{R}(U_{n+1}, N)U_{n+1}, E) = 0 \tag{5.9}$$

bulunur. $\overline{g}(\overline{R}(E, U_{n+1})U_{n+1}, N) = -\overline{g}(\overline{R}(U_{n+1}, N)U_{n+1}, E)$ olacağından $\lambda = 0$ dır. Dolayısıyla $S(TM)$ total geodeziktir.

5.2 Indefinite $T-$Uzay Formlarının Lightlike Hiperyüzeylerinin Ricci Eğriliği

$\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu bir indefinite $T-$uzay formu ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının

$$\{V_1, ..., V_{m-1}, \phi V_1, ..., \phi V_{m-1}, E, U_1, ...U_n\}$$

olan bazı $\left\{W_1, W_2, ..., W_{2(m-1)}, E, U_1, ...U_n\right\}$ ile gösterilsin. Bu durumda M nin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(A_N U_j, U_j) + \overline{g}(A_N E, N) \\ &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(A_N W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(A_N U_j, U_j) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade de (2.24) kullanılarak

$$H = \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i C(W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} C(U_j, U_j)$$

elde edilir. Burada ε_i, W_i lerin timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak -1 veya $+1$ olarak değişmektedir. Böylece aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edebiliriz.

Yardımcı Teorem 5.2.1 : $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ bir indefinite $T-$manifoldu ve (M, g) de $\overline{M}(\phi, \overline{g}, U_a)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin ortalama eğriliği

$$H = \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i C(W_i, W_i) + \sum_{j=1}^{n} C(U_j, U_j) \tag{5.10}$$

dır.

Teorem 5.2.2 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliği Ric ve ortalama eğriliği H arasında

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i (\frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y) - \overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{n} u^{\alpha}(Y)u^{\alpha}(X) + 3\overline{g}(W_i,\phi X)\overline{g}(W_i,\phi Y)\} + B(W_i,Y)C(X,W_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right) - \frac{c}{4}\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(X)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(Y)\right)\} \qquad (5.11) \\ &\quad + \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y) + \overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y) + 2u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)\} - HB(X,Y) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

İspat 5.2.2 : Lightlike hiperyüzey tanımından, $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(R(X,W_i)Y,W_i) + \sum_{j=1}^{n} g(R(X,U_j)Y,U_j) \qquad (5.12) \\ &\quad + \overline{g}(R(X,E)Y,N) \end{aligned}$$

yazılabilir. (2.30) bağıntısından

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{R}(X,W_i)Y,W_i\right) &= g(R(X,W_i)Y,W_i) + B(X,Y)C(W_i,W_i) \\ &\quad - B(W_i,Y)C(X,W_i) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j\right) &= g\left(R(X,U_j)Y,U_j\right) + B(X,Y)C(U_j,U_j) \\ &\quad - B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right) \end{aligned}$$

ve

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,E)Y,N\right) = g\left(R(X,E)Y,N\right)$$

bulunur. Bu değerler (5.12) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i(\overline{g}\left(\overline{R}(X,W_i)Y,W_i\right) - B(X,Y)C(W_i,W_i) \\ &\quad +B(W_i,Y)C(X,W_i) \\ &\quad +\sum_{j=1}^{n} \overline{g}\left(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j\right) - B(X,Y)C(U_j,U_j) \\ &\quad +B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right)) + \overline{g}(\overline{R}(X,E)Y,N) \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. (2.51) kullanılarak $\overline{g}\left(\overline{R}(X,W_i)Y,W_i\right)$, $\overline{g}\left(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j\right)$ ve $\overline{g}(\overline{R}(X,E)Y,N)$ hesaplanırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X,W_i)Y,W_i) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y)\overline{g} - \overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i) \\ &\quad -\sum_{\alpha=1}^{n} u^\alpha(Y)u^\alpha(X) + 3\overline{g}(W_i,\phi X)\overline{g}(W_i,\phi Y)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y) - u^j(X)u^j(Y) \\ &\quad -\overline{g}(X,Y)\sum_{i=1}^{n} u^i(U_j)u^i(U_j) - \sum_{i=1}^{n} u^i(Y)u^i(X) \\ &\quad +u^j(X)\sum_{i=1}^{n} u^i(U_j)u^i(Y) + u^j(Y)\sum_{i=1}^{n} u^i(X)u^i(U_j) \\ &\quad +\left(\sum_{i=1}^{n} u^i(Y)u^i(X)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u^i(U_j)u^i(U_j)\right) \\ &\quad -\left(\sum_{i=1}^{n} u^i(U_j)u^i(X)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u^i(U_j)u^i(Y)\right)\} \end{aligned}$$

buradan

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{g}(\overline{R}(X,U_j)Y,U_j) = \frac{c}{4}\{\sum_{i=1}^{n} u^i(Y)u^i(X) - \left(\sum_{i=1}^{n} u^i(X)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u^i(Y)\right)\}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X,E)Y,N) &= \frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y) - \sum_{i=1}^{n} u^i(Y)u^i(X) \\ &\quad +\overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y) + 2u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler (5.13) de yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i(\frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y)-\overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i) \\
&\quad -\sum_{\alpha=1}^{n} u^{\alpha}(Y)u^{\alpha}(X)+3\overline{g}(W_i,\phi X)\overline{g}(W_i,\phi Y)\}-B(X,Y)C(W_i,W_i) \\
&\quad +B(W_i,Y)C(X,W_i))-\sum_{j=1}^{n}(B(X,Y)C(U_j,U_j) \\
&\quad +\frac{c}{4}\left\{\sum_{j=1}^{n} u^j(Y)u^j(X)-\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(X)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(Y)\right)\right\} \qquad (5.14) \\
&\quad +B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right)+\frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y)-\sum_{i=1}^{n} u^i(Y)u^i(X) \\
&\quad +\overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y)+2u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)\}
\end{aligned}
$$

bulunur. (5.10) bağıntısı gözönüne alınırsa (5.13) ifadesi

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i(\frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y)-\overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i)-\sum_{\alpha=1}^{n} u^{\alpha}(Y)u^{\alpha}(X) \\
&\quad +3\overline{g}(W_i,\phi X)\overline{g}(W_i,\phi Y)\}+B(W_i,Y)C(X,W_i)) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{n} B(U_j,Y)C\left(X,U_j\right)-\frac{c}{4}\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(X)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(Y)\right)\} \\
&\quad +\frac{c}{4}\{\overline{g}(X,Y)+\overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y)+2u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)\}-HB(X,Y)
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilir.

Sonuç 5.2.3 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M total geodezik ise bu durumda M hiperyüzeyinin Ric Ricci eğriliği

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \frac{c}{4}[\sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i\{\overline{g}(X,Y)-\overline{g}(W_i,Y)\overline{g}(X,W_i) \\
&\quad -\sum_{\alpha=1}^{n} u^{\alpha}(Y)u^{\alpha}(X)+3\overline{g}(W_i,\phi X)\overline{g}(W_i,\phi Y)\} \\
&\quad -\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(X)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} u^j(Y)\right) \\
&\quad +\{\overline{g}(X,Y)+\overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y)+2u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)\}]
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5.2.4 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul şekil operatörü A_N ikinci temel forma göre simetrik, ikinci temel formun simetrik ve

$$u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)=\overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y)$$

olmasıdır.

İspat 5.2.4 : (5.11) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&Ric(X,Y)-Ric(Y,X)=HB(Y,X)-HB(X,Y)\\
&+(\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i B(W_i,Y)C(X,W_i)+\sum_{j=1}^{n}B(U_j,Y)C\,(X,U_j))\\
&-(\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i B(W_i,X)C(Y,W_i)+\sum_{j=1}^{n}B(U_j,X)C\,(Y,U_j))\\
&+u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1},Y)-\overline{g}(U_{n+1},X)u^{n+1}(Y)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i B(W_i,Y)C(X,W_i)+\sum_{j=1}^{n}B(U_j,Y)C\,(X,U_j)\\
=\;&\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i g(A_NX,W_i)g(A_E^*Y,W_i)+\sum_{j=1}^{n}g(A_NX,U_j)g(A_E^*Y,U_j)\\
=\;&g(A_E^*Y,\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i g(A_NX,W_i)W_i)+g(A_E^*Y,\sum_{j=1}^{n}g(A_NX,U_j)U_j)\\
=\;&g(A_E^*Y,\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i g(A_NX,W_i)W_i+\sum_{j=1}^{n}g(A_NX,U_j)U_j)\\
=\;&g(A_E^*Y,A_NX)=B(Y,A_NX)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{2(m-1)}\varepsilon_i B(W_i,Y)C(X,W_i)+\sum_{j=1}^{n}B(U_j,Y)C\,(X,U_j)=B(Y,A_NX) \tag{5.16}$$

dır. Böylece (5.15) bağıntısı

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) - Ric(Y,X) &= H(B(Y,X) - B(X,Y)) \\ &\quad + B(Y, A_N X) - B(X, A_N Y) \\ &\quad + u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1}, Y) - \overline{g}(U_{n+1}, X)u^{n+1}(Y) \end{aligned} \tag{5.17}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

(5.17) eşitliği gözönüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.5 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik ve

$$u^{n+1}(X)\overline{g}(U_{n+1}, Y) = \overline{g}(U_{n+1}, X)u^{n+1}(Y)$$

olmasıdır.

Teorem 5.2.6 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul M nin şekil operatörünün ikinci temel forma göre simetrik ve

$$\overline{g}(U_{n+1}, Y)u^{n+1}(X) = \overline{g}(X, U_{n+1})u^{n+1}(Y) \text{ veya } c = 0$$

olmasıdır.

İspat 5.2.6 : (5.12) bağıntısına I. Bianchi özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) - Ric(Y,X) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \left(g(R(X,W_i)Y, W_i) - g(R(Y,W_i)X, W_i) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(g(R(X,U_j)Y, U_j) - g(R(Y,U_j)X, U_j) \right) \\ &\quad + \overline{g}(R(X,E)Y, N) - \overline{g}(R(Y,E)X, N) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} Ric(Y,X) - Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i g(R(Y,X)W_i, W_i) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} g(R(Y,X)U_j, U_j) \\ &+ \overline{g}(R(Y,X)E, N) \end{aligned} \tag{5.18}$$

bulunur. (2.30) bağıntısından

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(R(Y,X)W_i, W_i\right) &= \overline{g}(\overline{R}(Y,X)W_i, W_i) - B(Y,W_i)\overline{g}\left(A_N X, W_i\right) + B(X,W_i)\overline{g}\left(A_N Y, W_i\right) \\ \overline{g}\left(R(Y,X)U_j, U_j\right) &= \overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)U_j, U_j\right) - B(Y,U_j)\overline{g}\left(A_N X, U_j\right) + B(X,U_j)\overline{g}\left(A_N Y, U_j\right) \\ \overline{g}\left(R(Y,X)E, N\right) &= \overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)E, N\right) \end{aligned} \tag{5.19}$$

yazılır. Bu değerler (5.18) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Ric(Y,X) - Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \left\{\overline{g}(\overline{R}(Y,X)W_i, W_i)\right. \\ &\left. - B(Y,W_i)\overline{g}\left(A_N X, W_i\right) + B(X,W_i)\overline{g}\left(A_N Y, W_i\right)\right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left\{\overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)U_j, U_j\right)\right. \\ &\left. - B(Y,U_j)\overline{g}\left(A_N X, U_j\right) + B(X,U_j)\overline{g}\left(A_N Y, U_j\right)\right\} \\ &\overline{g}\left(R(Y,X)E, N\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. (2.51) bağıntısı kullanılarak $\overline{g}(\overline{R}(Y,X)W_i, W_i)$, $\overline{g}\left(\overline{R}(Y,X)U_j, U_j\right)$ ve $\overline{g}\left(R(Y,X)E, N\right)$ hesaplanırsa

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)W_i, W_i\right) = \overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)U_j, U_j\right) = 0$$

ve

$$\overline{g}\left(R(Y,X)E, N\right) = \frac{c}{4}\{-\overline{g}(U_{n+1}, Y)u^{n+1}(X) + \overline{g}(X, U_{n+1})u^{n+1}(Y)\}$$

bulunur. Bu değerler (5.20) da kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ric(Y,X) - Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon_i \left\{B(X,W_i)C(Y,W_i) - B(Y,W_i)C(X,W_i)\right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left\{B(X,U_j)C(Y,U_j) - B(Y,U_j)C(X,U_j)\right\} \\ &+ \frac{c}{4}\{-\overline{g}(U_{n+1}, Y)u^{n+1}(X) + \overline{g}(X, U_{n+1})u^{n+1}(Y)\} \end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.20) bağıntısında (5.16) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
Ric(Y,X) - Ric(X,Y) = \; & B(X, A_N Y) - B(Y, A_N X) \\
& + \frac{c}{4}\{-\overline{g}(U_{n+1}, Y)u^{n+1}(X) + \overline{g}(X, U_{n+1})u^{n+1}(Y)\}
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 5.2.7 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul M total geodezik ve

$$\overline{g}(U_{n+1}, Y)u^{n+1}(X) = \overline{g}(X, U_{n+1})u^{n+1}(Y) \text{ veya } c = 0$$

olmasıdır.

Sonuç 5.2.8 : $\overline{M}(c)$, $(2m+n)-$boyutlu, sabit $\phi-$kesit eğriliği c olan bir indefinite $T-$uzay form ve M, $\overline{M}(c)$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyinin Ricci eğriliğinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$C(X, A_E^* Y) = C(Y, A_E^* X)$$

ve

$$\overline{g}(U_{n+1}, X)u^{n+1}(Y) = \overline{g}(Y, U_{n+1})u^{n+1}(X) \text{ veya } c = 0$$

olmasıdır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aktan, N., 2006, $S-$manifoldların geometrisi üzerine, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Blair, D. E., 1970, Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$, J. Diff. Geometry, 4, 155-167.

Blair, D. E., 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry, Lecture Notes in Math., Springer Verlag.

Blair, D. E., 2002, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Math. 203, Birkhauser, Basel.

Bejancu, A., 1996, Null hypersurfaces of Semi-Euclidean spaces, Saitama Math. J., 14, 25-40.

Brickell F. and Clark, R. S., 1970, Differentiable manifolds, Van Nostrand, London.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1990, The curvature tensor fields on $f-$manifolds with complemented frames, An. şt. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Matematica, 36, 151-162.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1991, A classification of certain submanifolds of an $S-$manifold, Annales Polinici, Mathematici Liv., 2, 117-123.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1993, On normal CR-submanifolds of $S-$manifolds, Colloquium Mathematicum, 64, 203-214.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1993, On certain anti-invariant submanifolds of an $S-$manifold, Portugaliae Mathematica, 50, 103-113.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1993, The curvature of submanifolds of an $S-$space form, Acta Math. Hungar., 62, 373-383.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1996, On pseudo-Einstein hypersurfaces of H^{2n+s}, Indian J. Pure Appl. Math., 27, 451-462.

Cabrerizo, J. L, Fernandez, L.M. and Fernandez, M., 1996, On pseudo-umbilical hypersurfaces of $S-$manifolds, Acta Math. Hungar., 70, 121-128.

Chen, B-Y., 1973, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker NY.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Dileo, G. and Lotta, A., 2005, On the structure and symmetry properties of almost $S-$manifolds, Geometriae Dedicata, 110, 191-211.

Duggal, K. L.and Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and it's applications, Kluwer Dortrecth.

Duggal, K. L.and Bejancu, A., 1993, Lightlike CR-hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds, Acta Appl. Math., 39, 171-190.

Fernandez, L. M. and Hans-Uber M. B., 2005, New relationships involving the mean curvature of slant submanifolds in $S-$space forms, Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, Sección de Geometría y Topología, n^o 15 (junio-2005) (con M.B. Hans-Uber).

Goldberg, S. I. and Yano, K., 1970. On normal globally framed $f-$manifolds, Tohoku Math. Jour., 22, 362-370.

Güneş, R., Şahin, B., ve Kılıç, E., 2003, On lightlike hypersurfaces of a semi-Riemannian space form, Turk J. Math., 27, 283-297.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Ünv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları, No. 2.

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hicks, N.J., 1974, Notes on differential geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London.

Ishihara, S., 1966, Normal structure f satisfying $f^3 + f = 0$, Kodai Math. Sem. Rep., 18, 36-47.

Ishihara, S. and Yano K., 1964, On integrability conditions of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$, Quart. J. Math. Oxford (2), 15, 217-222

Kang, T. H. , Jung, S. D., Kim, B. H., Pak H. K. and Pak, J. S., 2003, Lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian manifolds, Indian J. Pure Appl. Math., 34, 1369-1380.

Kobayashi, M. and Tsuchiya, S., 1972., Invariant submanifolds in an $f-$manifold with complemented frames, Kodai Math. Sem. Rep., 24, 430-450.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Kobayashi, M., 1990, Semi-invariant submanifolds in an $f-$manifold with complemented frames, Tensor, 51, 155-178

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1963, Foundations of differential geometry, Vol. I, John Wiley Sons Inc. Lcccn: 63-19209.

Kobayashi, S. and Nomizu, 1969, K., Foundations of differential geometry, Vol. II, John Wiley Sons Inc. Lcccn: 68-19209

Lotta, A. and Pastore, M., 2004, The tanaka-webster connection for almost $S-$manifolds and Cartan geometry, Archivum Mathematicum, 40, 47-61.

Mihai, I., 1983, CR-submanifolds of a framed $f-$manifold, Stud. Cerc. Math., 35, 127-136.

Nakagava, N., 1966, On framed $f-$manifolds, Kodai Math. Sem. Rep., vol. 18, pp, 293-306.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, London.

Ornea, L., 1984, Generic CR-submanifolds of $S-$manifolds, Stud. Cerc. Math., 36, 435-443.

Spivak, M. 1979, Differential Geometry, volume II, III, IV New York, NY: Wiley.

Terlizzi, L. D., 2006, On the curvature of a generalization of contact metric manifolds, Acta Math. Hungar., 110, 225-239.

Terlizzi, L. D. and Pastore, A. M., 2002, Some results on $K-$manifolds, Balkan Journal of Geometry ant Its Applications, 7, 43-62.

Tripathi, M. M. and Mihai, I., 2001, Submanifolds of framed metric manifolds and S-manifolds, Note di Matematica, 3, 135-164.

Yano, K., 1963, On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3 + f = 0$, Tensor, N.S., 14, 99-109.

Yano, K., Kon, M., 1984, Structure on Manifold, World Scientific Press.

Şahin, B., Güneş, R., 2000, Non-existence of Real Lightlike Hypersurfaces of an Indefinite Complex Space Form, Balkan Journal of Geometry and its Applications, **5.**, No.2, 139-148..

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Erdal ÖZÜSAĞLAM

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Adana, 14.07.1975

Medeni hali: Evli

Adres bilgileri:

Ev adresi: Vişnelik Mh. Meşe Sk. Turgut Apt. No: 56/3 ESKİŞEHİR

İş adresi: Eskişehir Osmangazi Ün. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 26480 ESKİŞEHİR

E-posta: erdalo@ogu.edu.tr, materdalo@gmail.com

Eğitim Bilgileri:

Doktora:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(2002-….)

Yüksek Lisans:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(2000-2002)

Lisans:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
(1995-1999)

İş Deneyimi:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (Araştırma Görevlisi)
(2000-)