PARALEL HİPERYÜZEYLERİN YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE

Mustafa GENÇAY

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006

ON THE CURVATURES OF
THE HIGHER DEGREE PARALLEL HYPERSURFACES

Mustafa GENÇAY

Department of Mathematics
The Thesis for Master Degree
2006

PARALEL HİPERYÜZEYLERİN YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE

Mustafa GENÇAY

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Temmuz 2006

Mustafa GENÇAY ın yüksek lisans tezi olarak hazırladığı

"PARALEL HİPERYÜZEYLERİN YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bir hiperyüzeyin asli eğrilikleri, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, s-inci mertebeden ortalama eğriliği gibi kavramlar ile paralel hiperyüzeylere ait temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca ikinci bölümde genelleştireceğimiz klasik Bonnet teoremi ile paralel yüzeylerin ortalama eğriliğinin Gauss eğriliğine oranının

$$\frac{H^r}{K^r} = \frac{H}{K} + 2r$$

olduğunu veren eşitlik ifade ve ispat edilmiştir.

İkinci bölümde ise Bonnet Teoremi paralel hiperyüzeylere genelleştirilmiştir. Ayrıca $\frac{H^r}{K^r}$ oranının bir genelleştirilmişi paralel hiperyüzeyler için ispatlanmış olup, ispat orjinaldır.

SUMMARY

This master thesis consists of two chapters.

In the first chapter, we give some basic concepts such as principal curvature of a hypersurface, Gauss curvature, mean curvature,sth degree of mean curvature and basic terms of parallel surfaces are described. In addition Bonnet theorem and its proof which is generalized in second chapter is described.

Moreover, proportion of mean curvature of parallel surface to gauss curvature as $\dfrac{H^r}{K^r} = \dfrac{H}{K} + 2r$ is proved.

In the second chapter, we give Bonnet theorem is generalized to parallel surfaces. Besides a generalization of $\dfrac{H^r}{K^r}$ proportion is originally proved for parallel surfaces.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın;

Prof.Dr. Ali GÖRGÜLÜ

ye teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2006 Mustafa GENÇAY

İçindekiler

1 Temel Kavramlar **2**

1.1 Bir Hiperyüzeyin Eğrilikleri 2

1.2 Paralel Hiperyüzeyler 8

2 Bonnet Teoreminin Bir Genelleştirilmişi ve Paralel Hiperyüzeylerin Yüksek Mertebeden Eğriliklerinin Oranı **21**

2.1 Bonnet Teoreminin Paralel Hiperyüzeylere Bir Genelleştirilmişi 21

2.2 Paralel Hiperyüzlerin Yüksek Mertebeden Eğriliklerinin Oranı 23

Bölüm 1

Temel Kavramlar

1.1 Bir Hiperyüzeyin Eğrilikleri

Bu kesimde hiperyüzeyler ve paralel hiperyüzeylerin Gauss ve Ortalama eğrilikleri ile ilgli tanım ve bazı özellikler verilecektir.

1.1 Tanım (Asli Eğrilik)

E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasındaki $S(P)$ şekil operatörünün karakteristik değerlerine M nin bu noktadaki asli eğrilikleri denir [3].

1.1. Teorem : $\forall P \in M$ için M hiperyüzeyinin asli eğrilikleri $\mathcal{X}(M)$ deki baz seçilişinden bağımsızdır [3].

İspat : $T_M(P)$ de farklı iki bazı ϕ ve ψ olarak seçelim. Bu iki baza göre $S(P)$ nin matrisleri sırasıyla, S_ϕ ve S_ψ ile gösterilirse, iki baz arasında Q regüler bir matris olmak üzere

$$S_\psi = QS_\phi Q^{-1}$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$P_{S_\psi}(\lambda) = \det(\lambda I_{n-1} - S_\psi)$$

olarak tanımlandığına göre

$$
\begin{aligned}
P_{S_\psi}(\lambda) &= \det(\lambda I_{n-1} - QS_\phi Q^{-1}) \\
&= \det(\lambda QQ^{-1} - QS_\phi Q^{-1}) \\
& \quad \det(Q(\lambda I_{n-1} - QS_\phi Q^{-1})Q^{-1}) \\
&= \det Q . \det((\lambda I_{n-1} - S_\phi) \det Q^{-1} \\
&= \det(\lambda I_{n-1} - S_\phi) \det Q \det Q^{-1}
\end{aligned}
$$

ve $\det Q \det Q^{-1} = 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
P_{S_\psi}(\lambda) &= \det(\lambda I_{n-1} - S_\phi) \\
P_{S_\psi}(\lambda) &= P_{S_\phi}(\lambda)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da ϕ ve ψ bazlarına göre karakteristik polinomların aynı kaldığını gösterir.

1.2. Tanım (Gauss Eğriliği) : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
K: \; M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longrightarrow K(p) = \det S(P)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı K fonksiyonuna M nin Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(p)$ ye de $p \in M$ noktasında M nin Gauss eğriliği (total eğriliği) denir [3].

1.2. Teorem : $K(p)$ Gauss eğriliği $T_M(P)$ nin bazlarının seçilişinden bağımsızdır [3].

İspat : $T_M(P)$ de farklı iki bazı ϕ ve ψ olarak seçelim.

$$S: \; T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümünün bu iki baza karşılık gelen matrisleri sırasıyla, S_ϕ ve S_ψ ile gösterilirse, iki baz arasında Q regüler bir matris olmak üzere

$$S_\psi = QS_\phi Q^{-1}$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \det S_\psi &= \det(QS_\phi Q^{-1}) \\ &= \det Q. \det S_\phi. \det Q^{-1} \\ &= \det S_\phi. (\det Q \det Q^{-1}) \end{aligned}$$

ve $\det Q \det Q^{-1} = 1$ olduğundan

$$\det S_\psi = \det S_\phi$$

bulunur.

1.3. Tanım (Ortalama Eğrilik ve Minimal Yüzey) : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere,

$$\begin{aligned} H: \ M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow H(p) = \text{İz} S(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ ye de $p \in M$ noktasında M nin ortalama eğriliği denir. Her noktada ortalama eğriliği sıfır olan yüzeye minimal yüzey adı verilir. [3].

1.3. Teorem : $H(p)$ Ortalama eğriliği $T_M(P)$ nin bazlarının seçilişinden bağımsızdır [3].

İspat : $T_M(P)$ de farklı iki bazı ϕ ve ψ olarak seçelim.

$$S: \ T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümünün bu iki baza karşılık gelen matrisleri sırasıyla, S_ϕ ve S_ψ ile gösterilirse, iki baz arasında Q regüler bir matris olmak üzere

$$S_\psi = QS_\phi Q^{-1}$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$\dot{I}zS_\psi = \dot{I}z\left[Q\left(S_\phi Q^{-1}\right)\right]$$

yazılabilir. $\dot{I}z(AB) = \dot{I}z(BA)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} \dot{I}zS_\psi &= \dot{I}z\left[\left(S_\phi Q^{-1}\right)Q\right] \\ &= \dot{I}z\left(S_\phi\left(Q^{-1}Q\right)\right) \\ \dot{I}zS_\psi &= \dot{I}zS_\phi \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde H nın $P \in M$ deki değeri $T_M(P)$ deki baz seçilişinden bağımsızdır.

Bu nedenle karakteristik vektörlerden oluşan $\phi = \{X_1, X_2, ..., X_{n-1}\}$ bazına göre

$$S_\phi = \begin{bmatrix} k_1(P) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2(P) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1}(P) \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$H(P) = \dot{I}zS_\phi =_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

bulunur.

1.4. Teorem : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. X_p ve Y_p, M nin P noktasında, farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları iseler X_p ve Y_p ortogonaldirler [3].

İspat : $S(X_p) = k_1 X_p$ ve $S(Y_p) = k_2 Y_p$ yazılabilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} \langle S(X_p), Y_p\rangle &= \langle X_p, S(Y_p)\rangle \\ \langle k_1 X_p, Y_p\rangle &= \langle X_p, k_2 Y_p\rangle \\ k_1\langle X_p, Y_p\rangle &= k_2\langle X_p, Y_p\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 \langle X_p, Y_p \rangle - k_2 \langle X_p, Y_p \rangle &= 0 \\ (k_1 - k_2) \langle X_p, Y_p \rangle &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. $k_1 \neq k_2$ olduğundan, $k_1 - k_2 \neq 0$ dır. Böylece,

$$\langle X_p, Y_p \rangle = 0$$

dır.

1.5. Teorem : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M nin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), ..., k_{n-1}(P)$ ise

$$K(P) =_{i=1}^{n-1} k_i(P) = k_1(P).k_2(P).....k_{n-1}(P)$$

dir [3].

İspat : $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ asli eğriliklerine karşılık gelen karakteristik vektörleri sırasıyla, $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ ile gösterelim. $boyM = n-1$ olduğundan P noktası özel bir nokta olarak seçilmedikçe $rankS(P) = n-1$ olacağından k_i ler birbirinden farklı ve dolayısıyla X_i ler de ortogonal bir sistem oluştururlar. Bu sistemi$T_M(P)$ için esas olan baz olarak alalım, yani $\phi = \{X_1, X_2, ..., X_{n-1}\}$ olsun.

$$S(X_i) = k_i X_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

olduğundan ϕ bazına göre S nin S_ϕ matrisi

$$S_\phi = \begin{bmatrix} k_1(P) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2(P) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1}(P) \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} K(P) &= \det S_\phi \\ &= {}_{i=1}^{n-1} k_i(P) \end{aligned}$$

bulunur.

1.4. Tanım ((i+1)-inci mertebeden Gauss Eğriliği) : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S_p olmak üzere,

$$P_{S_p}(x) =_{i=0}^{n-1} \alpha_i(p)x^i$$

dir. Bu durumda;

$$\begin{array}{rlll} K_i : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longrightarrow & K_i(p) = \dfrac{(-1)^i}{i-t+1}\alpha_i(p) \end{array}$$

olarak tanımlanan $K_i(p)$ ye $p \in M$ noktasında $(i+1)-$inci mertebeden Gauss eğriliği denir. Burada $t = boyS^{-1}\{0\}$ dır [2].

Burada $P_{S_p}(x)$ açıkça yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{S_p}(x) &= {}_{i=0}^{n-1}\alpha_i(p)x^i \\ &= {}_{i=1}^{n-1}(x-k_i) \\ &= x^{n-1} + (-1)^1\left({}_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{1+rk_i}\right)x^{n-2} + (-1)^2\left({}_{i_1<i_2}^{n-1}\frac{k_{i_1}}{1+rk_{i_1}}\frac{k_{i_2}}{1+rk_{i_2}}\right)x^{n-3} + \\ &\quad ... + (-1)^{n-2}\left({}_{i_1<...<i_{n-2}}^{n-1}\frac{k_{i_1}}{1+rk_{i_1}}...\frac{k_{i_{n-2}}}{1+rk_{i_{n-2}}}\right)x + {}_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{1+rk_i} \end{aligned}$$

bulunur.

1.5. Tanım (s-inci Ortalama Eğrilik) : M, E^n de bir hiperyüzey ve asli eğrilikleri $k_1, ..., k_{n-1}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix} M_s =_{1\leq i_1<...<i_s\leq n-1} k_{i_1}...k_{i_s}, \quad M_0 = 1$$

ifadesine M nin $s-$inci ortalama eğriliği denir.

Burada,

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix} = \frac{(n-1)!}{(n-1-s)!s!}$$

dır [8].

1.2 Paralel Hiperyüzeyler

1.2.1. Tanım (Paralel Hiperyüzeyler) : M_1 ve M_2, E^n in iki hiperyüzeyi ve M_1 in birim normal vektör alanı,

$itbpF2.5624in2.783in0inmustafa1.jpg$

Şekil 1.2.1

$$N_1 =_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \ a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer, bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve $p \in M_1$ için

$$f(p) = (p_1 + ra_1(p), p_2 + ra_2(p), ..., p_n + ra_n(p))$$

olacak şekilde bir

$$f : M_1 \to M_2$$

fonksiyonu bulunabilirse, M_2 ye M_1 in bir paralel hiperyüzeyi denir (Şekil 1.2.1) [3].

1.2.1. Teorem : E^n in M hiperyüzeyine paralel M_r hiperyüzeyi verilsin. E^n in $\{x_1, ..., x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre; $X \in \chi(M)$, $\overline{X} \in \chi(M_r)$ vektör alanları

$$X =_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{X} =_{i=1}^{n} \overline{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

öyle ki; $\forall p \in M_1$ için, $b_i(P) = \overline{b_i}\left(f(P)\right)$, $1 \leq i \leq n$, özelliği ile verilsin. O zaman,

1) $f_*(X) = \overline{X} + r\overline{S(X)}$

2) $S_r\left(f_*(X)\right) = \overline{S(X)}$

dir [3].

İspat : $f : M \to M_r$ dönüşümünü, E^n ye

$$\begin{array}{llll} f: & E^n & \longrightarrow & E^n \\ & P & \longrightarrow & f(P) = (p_1 + ra_1(P), p_2 + ra_2(P), ..., p_n + ra_n(P)) \end{array}$$

şeklinde genişletelim. Burada, M nin

$$N =_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

normal vektör alanının $a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$, bileşenlerinin de E^n ye

$$a_i(p) = \begin{cases} a_i(p) & , \quad p \in M \\ \\ 0 & , \quad p \notin M \end{cases}$$

şeklinde genişletildiğini varsayıyoruz.

1) E^n deki $\{x_1, ..., x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$$f_i = x_i + ra_i : E^n \to \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n$$

olacağından

$$f_* \longleftrightarrow I_n + r \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right] \in \mathbb{R}_n^n$$

olacaktır. Böylece,

$$f_*|_P (X_p) \quad \longleftrightarrow \quad I_n \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_P + r \left. \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right] \right|_p \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_P$$

$$= \quad \begin{bmatrix} b_1(P) \\ \vdots \\ b_n(P) \end{bmatrix} + r \left[{}_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right|_p b_j(P) \right]$$

elde edilir. Burada, ikinci taraftaki matris formunu, tekrar

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \middle| 1 \leq i \leq n \right\}$$

bazı cinsinden yazarsak,

$$f_{*\,P}\left(X_p\right) =_{i=1}^{n}\ b_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(p)} + r\ {}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}{}_{P}\ b_j(P)\frac{\partial}{\partial x_i}{}_{f(p)}$$

veya, $b_i(P) = \overline{b_i}(f(P))$, $1 \leq i \leq n$, eşitliğini kullanarak,

$$f_{*\,P}\left(X_p\right) =_{i=1}^{n}\ \overline{b_i}(f(p))\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(p)} + r_{i=1}^{n}X_p\left[a_i\right]\ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(p)}$$

yazılabilir. Burada sağdaki ilk terimin $\overline{X}\big|_{f(p)}$ olduğu açıktır. İkinci terim ise

$$r\overline{S(X)}\Big|_{f(p)}$$

dır. Çünkü;

$$S(X) =_{i=1}^{n}\ X\left[a_i\right]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overline{S(X)} &= {}_{i=1}^{n}\overline{X\left[a_i\right]}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X\left[a_i\right](p) = \overline{X\left[a_i\right]}(f(p)) \\
\overline{S(X)}\Big|_{f(p)} &= {}_{i=1}^{n}\overline{X\left[a_i\right]}(f(P))\ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)} \\
\overline{S(X)}\Big|_{f(p)} &= {}_{i=1}^{n}X\left[a_i\right](P)\ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)} \\
\overline{S(X)}\Big|_{f(p)} &= {}_{i=1}^{n}X(P)\left[a_i\right]\ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{f(P)}
\end{aligned}$$

dır. Buna göre,

$$f_*(X) = \overline{X} + r\overline{S(X)}$$

elde edilir.

2) $\xi_i \circ f = a_i$, $1 \leq i \leq n$, olmak üzere

$$N_r =_{i=1}^{n}\ \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanının, M_r nin normali olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\chi(M_r) = f_* \left(\chi(M)\right)$$

özelliğinden yararlanacağız. O halde

$$\forall X =_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M)$$

için,

$$\left.\langle N_r, f_*(X)\rangle\right|_{f(p)} = 0, \quad \forall P \in M$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\left.\langle N_r, f_*(X)\rangle\right|_{f(p)} &= \left.\left\langle N_r, \overline{X} + r\overline{S(X)}\right\rangle\right|_{f(p)} \\
&= \left.\left\langle N_r, \overline{X}\right\rangle\right|_{f(p)} + r \left.\left\langle N_r, \overline{S(X)}\right\rangle\right|_{f(p)} \\
&= {}_{i=1}^{n}\xi_i(f(p))\overline{b_i}(f(p)) + r_{i=1}^{n}\xi_i(f(p))X_p\left[a_i\right] \\
&= {}_{i=1}^{n}a_i(p)b_i(p) + r_{i=1}^{n}a_i(p)X_p\left[a_i\right] \\
&= \left.\langle N, X\rangle\right|_p + r \left.\langle N, S(X)\rangle\right|_p \\
&\Longrightarrow \left.\langle N_r, f_*(X)\rangle\right|_{f(p)} = 0.
\end{aligned}$$

Şimdi

$$X =_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanının

$$\alpha : I \to M$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı olduğunu varsayalım. O zaman, $f_*(X) \in \chi(M)$ vektör alanı da

$$f \circ \alpha : I \to M_r$$

eğrisinin teğet vektör alanı olur. Buna göre $P = \alpha(t) \in M$ noktasında,

$$
\begin{aligned}
S(X)\big|_p = D_{X_p}N &= {}^{n}_{i=1} X_{\alpha(t)}\left[a_i\right] \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \\
&= {}^{n}_{i=1} \left.\frac{d\left(a_i \circ \alpha\right)}{dt}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \\
&= {}^{n}_{i=1} \left.\frac{d\left(\xi_i \circ f \circ \alpha\right)}{dt}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \\
&= {}^{n}_{i=1} f_*(X)\big|_{f(p)}\left[\xi_i\right] \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p
\end{aligned}
$$

dir. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
S_r\left(f_*(X)\right)\big|_{f(p)} &= D_{f_*(X)}\big|_{f(p)} N_r \\
&= {}^{n}_{i=1}\, f_*(X)\big|_{f(p)}\left[\xi_i\right] \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{f(p)}
\end{aligned}
$$

dır. Böylece,

$$S_r\left(f_*(X)\right) = \overline{S(X)}$$

elde edilir.

M ve M_r arasındaki ilgi diferensiyel geometri açısından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

1.2.2. Teorem : $f : M \to M_r$ olmak üzere, M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. O zaman

1) f, üçüncü temel form olma özelliğini korur.

2) f, umbilik nokta olma özelliğini korur.

3) f, asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.

4) M nin temel formları sırasıyla I, II, III ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$, $\forall P \in M$ için

$$\left\langle f_*(X), f_*(Y)\right\rangle\big|_{f(p)} = I\left(X_p, Y_p\right) + 2rII\left(X_p, Y_p\right) + r^2 III\left(X_p, Y_p\right)$$

dır.

İspat :

1) M nin üçüncü temel formu III ve M_r ninki de III_r olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$, $\forall P \in M$ için

$$\begin{aligned} III_r\left(f_* X_p, f_* Y_p\right) &= \left\langle S_r\left(f_* X_p\right), S_r\left(f_* Y_p\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)} \right\rangle_{f(P)} \\ &= \left\langle S(X), S(Y) \right\rangle_P \\ &= III\left(X_p, Y_p\right). \end{aligned}$$

2) $P \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. O zaman, $\forall X_p \in T_M(p)$ ve bir tek $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$S(X_p) = \lambda X_p$$

dır. Diğer taraftan, Teorem 1.2.1 gereğince,

$$f_*(X_p) = \left.\overline{X}\right|_{f(p)} + r \left.\overline{S(X)}\right|_{f(p)}$$

olacağından

$$f_*(X_p) = (1 + r\lambda) \left.\overline{X}\right|_{f(p)}$$

yazılabilir. Buna göre, $\forall f_*(X_p) \in T_{M_r}(f(p))$ için,

$$\begin{aligned} S_r\left(f_*(X_p)\right) &= \overline{S(X_p)} \\ &= \lambda \left.\overline{X}\right|_{f(p)} \\ &= \lambda \frac{1}{1 + r\lambda} f_*(X_p) \\ &= \frac{\lambda}{1 + r\lambda} f_*(X_p) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $f(p) \in M_r$ noktasında S_r, M_r nin özdeş dönüşümünün bir katı demektir. Böylece $P \in M$ umbilik nokta ise $f(p) \in M_r$ de M_r nin bir umbilik noktasıdır.

3) $X \in \chi(M)$, asli eğrilik doğrultusu olsun. $f_*(X) \in \chi(M_r)$ nin de asli eğrilik doğrultusu olduğunu göstereceğiz. M nin p noktasında asli eğrilik doğrultusu X olduğundan $S(X_p) = \lambda X_p$ olur. Teorem 1.2.1 gereğince,

$$f_*(X_p) = \overline{X}\Big|_{f(p)} + r\ \overline{S(X)}\Big|_{f(p)}$$

olacağından

$$f_*(X_p) = (1 + r\lambda)\ \overline{X}\Big|_{f(p)}$$

yazılabilir. Buna göre, $\forall f_*(X_p) \in T_{M_r}(f(p))$ için,

$$\begin{aligned}
S_r\left(f_*(X_p)\right) &= \overline{S(X_p)} \\
&= \lambda\ \overline{X}\Big|_{f(p)} \\
&= \lambda \frac{1}{1 + r\lambda} f_*(X_p) \\
&= \frac{\lambda}{1 + r\lambda} f_*(X_p)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $f_*(X_p)$ nin $f(p) \in M_r$ noktasında asli eğrilik doğrultusu olduğunu gösterir.

4) $\forall X, Y \in \chi(M)$, $\forall p \in M$ için

$$\begin{aligned}
\left.\langle f_*X, f_*Y\rangle\right|_{f(p)} &= \left.\left\langle \overline{X} + r\overline{S(X)}, \overline{Y} + r\overline{S(Y)} \right\rangle\right|_{f(p)} \\
&= \left.\left\langle \overline{X}, \overline{Y} \right\rangle\right|_{f(p)} + 2r \left.\left\langle \overline{S(X)}, \overline{Y} \right\rangle\right|_{f(p)} + r^2 \left.\left\langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)} \right\rangle\right|_{f(p)} \\
&= \left.\langle X, Y\rangle\right|_p + 2r \left.\langle S(X), Y\rangle\right|_p + r^2 \left.\langle S(X), S(Y)\rangle\right|_p \\
&= I\left(X_p, Y_p\right) + 2rII\left(X_p, Y_p\right) + r^2 III\left(X_p, Y_p\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

1.2.3. Teorem : $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. $p \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla K ve H, $f(p) \in M_r$

noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K_r ve H_r olsun. O zaman

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{K}{1+rH+r^2K} \\ H_r &= \frac{H+2rK}{1+rH+r^2K} \end{aligned}$$

dır [3].

İspat : $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1, k_2 ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla X_1, X_2 olsun. O zaman Teorem 1.2.1 gereğince, M_r nin $f(P)$ noktasındaki, asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur. Üstelik;

$$\begin{aligned} S_r\left(f_*(X_1)\right) &= \frac{k_1}{1+rk_1} f_*(X_1) \\ S_r\left(f_*(X_2)\right) &= \frac{k_2}{1+rk_2} f_*(X_2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazına göre S_r nin matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} H_r = izS_r &= \frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2} \\ &= \frac{(k_1+k_2)+2r\,(k_1k_2)}{1+r\,(k_1+k_2)+r^2\,(k_1k_2)} \\ &= \frac{H++2rK}{1+rH+r^2K} \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
K_r = \det S_r &= \frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2} \\
&= \frac{k_1 k_2}{1 + r\,(k_1 + k_2) + r^2\,(k_1 k_2)} \\
&= \frac{K}{1 + rH + r^2 K}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu teorem E^n in paralel hiperyüzeylerine de genelleştirilebilir.

1.2.4. Teorem : E^n nin bir M hiperyüzeyine paralel bir M_r hiperyüzeyi verilsin. M nin bir p noktasındaki asli eğrilikleri $k_1, ..., k_{n-1}$ ise M_r nin $f(p)$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
K_r &= {}_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i} \\
H_r &= {}_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i}
\end{aligned}
$$

dır [2].

İspat : M nin bir p noktasındaki asli eğrilikleri $k_1, ..., k_{n-1}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
S(X_1) &= k_1 X_1 \\
&\vdots \\
S(X_{n-1}) &= k_{n-1} X_{n-1}
\end{aligned}
$$

olur. Burada $X_1, ..., X_{n-1}$ asli eğrilik doğrultularıdır. Teorem 1.2.1 gereğince, $f_*(X_1), ..., f_*(X_{n-1})$ de $f(p) \in M_r$ noktasında asli eğrilik doğrultuları olurlar.

Teorem 1.2.3 deki düşünce ile

$$
\begin{aligned}
S_r\left(f_*(X_1)\right) &= \frac{k_1}{1+rk_1} f_*(X_1) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
S_r\left(f_*(X_{n-1})\right) &= \frac{k_{n-1}}{1+rk_{n-1}} f_*(X_{n-1})
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $\{f_*(X_1), ..., f_*(X_{n-1})\}$ bazına göre S_r nin matrisi

$$
\begin{bmatrix}
\frac{k_1}{1+rk_1} & 0 & & 0 \\
0 & \frac{k_2}{1+rk_2} & \cdots & 0 \\
& & & \\
0 & \cdots & 0 & \frac{k_{n-1}}{1+rk_{n-1}}
\end{bmatrix}
$$

bulunur. Buradan,

$$
K_r = \det S_r =_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i}
$$

ve

$$
H_r = \dot{I}zS_r =_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i}
$$

elde edilir.

1.2.5.Teorem : M sabit pozitif K Gauss eğrilikli umbilik noktaları olmayan bir yüzey olsun. $r_1 = \frac{1}{\sqrt{K}}$ ve $r_2 = -\frac{1}{\sqrt{K}}$ sırasıyla M_1 ve M_2 paralel kümelerini tanımlasın.

Bu halde

i) M_1 ve M_2, sırasıyla $\sqrt{K}$ ve $-\sqrt{K}$ sabit ortalama eğriliklerine sahip, M nin immersiyonlarıdır.

ii) Eğer M sıfırdan farklı sabit H ortalama ve K Gauss eğrilikli bir yüzey ise, $r = \frac{-1}{H}$ için M nin sabit pozitif H^2 Gauss eğrilikli bir immersiyonu vardır.[5].

İspat :i) Asli eğrilik doğrultuları $f_*(X) = (1 + rk)X$ ve $1 + rk = 1 \pm \dfrac{k}{\sqrt{K}} \neq 0$ olduğundan ve umbilik noktalar olmadığından dolayı f_* singuler değildir.

Böylece $H_1 = \left(H + 2\sqrt{K}\right) / \left(2 + H/\sqrt{K}\right) = \sqrt{K}$ ve benzer olarak $H_2 = -\sqrt{K}$ olduğu gösterilebilir.

ii) $(1 + rk) = 1 - k/H = 0$ için $k = H$ olacağından diğer asli eğrilik sıfırdır. Böylece f_* singuler değildir. O halde

$$K_r = \frac{K}{\left(1 - 1 + \dfrac{K}{H^2}\right)} = H^2$$

bulunur. .

1.2.6.Teorem : $M \subset E^3$ bir minimal yüzey $(H \equiv 0)$ olsun. O zaman, M ye paralel bir yüzey M_r ve M_r nin asli eğrilikleri k_1^r ve k_2^r olmak üzere

$$\frac{1}{k_1^r} + \frac{1}{k_2^r} = sabit$$

dir [3].

İspat : $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1, k_2 ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla X_1, X_2 olsun. O zaman 1.2.2.Teorem gereğince, M_r nin $f(P)$ noktasındaki, asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur. Üstelik;

$$S_r\left(f_*(X_1)\right) = \frac{k_1}{1 + rk_1} f_*(X_1)$$

$$S_r\left(f_*(X_2)\right) = \frac{k_2}{1 + rk_2} f_*(X_2)$$

dir. Asli eğrilikler baz seçiminden bağımsız olduğundan

$$k_1^r = \frac{k_1}{1 + rk_1}$$

$$k_2^r = \frac{k_2}{1 + rk_2}$$

alınabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_1^r}+\frac{1}{k_2^r} &= \frac{1+rk_1}{k_1}+\frac{1+rk_2}{k_2}\\ &= \frac{(1+rk_1)\,k_2+(1+rk_2)\,k_1}{k_1k_2}\\ &= \frac{k_2+rk_1k_2+k_1+rk_1k_2}{k_1k_2}\\ &= \frac{2rk_1k_2+k_1+k_2}{k_1k_2}\end{aligned}$$

elde edilir. $H=k_1+k_2=0$ olduğundan

$$\frac{1}{k_1^r}+\frac{1}{k_2^r} = \frac{2rk_1k_2}{k_1k_2}=2r=sabit$$

bulunur.

1.2.7.Teorem : $M\subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. $p\in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H, $f(p)\in M_r$ noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K_r ve H_r olsun.

$$\frac{H_r}{K_r}=\frac{H}{K}+2r$$

dir [3].

İspat : Teorem 1.2.3 den

$$K_r=\frac{K}{1+rH+r^2K}$$

ve

$$H_r=\frac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{H_r}{K_r} &= \frac{\dfrac{H+2rK}{1+rH+r^2K}}{\dfrac{K}{1+rH+r^2K}}=\frac{H+2rK}{K}\\ &= \frac{H}{K}+2r\end{aligned}$$

elde edilir.

1.2.8. Teorem : M ve M_r, E^n de paralel hiperyüzeyler olsun. M nin $(n-2)-$inci ortalama eğriliği M_{n-2} sıfır olsun. Bu halde $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere k_i^r, M^r nin $f(P)$ noktasındaki asli eğriliği ise

$$ {}^{n-1}_{i=1}\frac{1}{k_i^r} = (n-1)r = sabit $$

dir [2].

İspat : M nin $(n-2)-$inci ortalama eğriliği tanımından

$$ \begin{aligned} \binom{n-1}{n-2} M_{n-2} &= {}_{1\leq i_1<\ldots<i_{n-2}\leq n-1} k_{i_1} \ldots k_{i_{n-2}} \\ &= {}^{n-1}_{i=1} k_1 \ldots \widehat{k_i} \ldots k_{n-1} \end{aligned} $$

veya

$$ (n-1) M_{n-2} = {}^{n-1}_{i=1} k_1 \ldots \widehat{k_i} \ldots k_{n-1}, $$

olur. Burada Λ sembolü atılan terimi ifade eder. Diğer taraftan 1.2.4 Teoremden

$$ k_i^r = \frac{k_i}{1 + r k_i}, \; 1 \leq i \leq n-1 $$

elde ederiz. Ayrıca

$$ {}^{n-1}_{i=1}\frac{1}{k_i^r} = \frac{{}^{n-1}_{i=1} k_1 \ldots \widehat{k_i} \ldots k_{n-1} + (n-1) r {}^{n-1}_{i=1} k_i}{{}^{n-1}_{i=1} k_i} $$

olduğu kolayca gösterilebilir. Burada,

$$ {}^{n-1}_{i=1} k_1 \ldots \widehat{k_i} \ldots k_{n-1} = 0 $$

olduğundan

$$ \begin{aligned} {}^{n-1}_{i=1}\frac{1}{k_i^r} &= \frac{(n-1) r {}^{n-1}_{i=1} k_i}{{}^{n-1}_{i=1} k_i} \\ &= (n-1) r = sabit \end{aligned} $$

bulunur. Bu eşitlikte $n = 3$ alınırsa .

$$ {}^{2}_{i=1}\frac{1}{k_i^r} = 2r $$

olur. Bu da 1.2.6 Teoremin genelleştirilmişidir.

Bölüm 2

Bonnet Teoreminin Bir Genelleştirilmişi ve Paralel Hiperyüzeylerin Yüksek Mertebeden Eğriliklerinin Oranı

Bu bölümde Bonnet Teoreminin paralel hiperyüzeylere bir genelleştirilmişi ve paralel hiperyüzeylerin yüksek mertebeden eğriliklerinin oranını veren bir teorem verilmiştir.

2.1 Bonnet Teoreminin Paralel Hiperyüzeylere Bir Genelleştirilmişi

2.1. Teorem : E^n de iki paralel hiperyüzey M ve M_r olsun.M nin $i-$yinci mertebeden sabit ortalama eğriliği M_i, olsun. Bu halde

$$\sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-1}{i} (i-1) r^i M_i = 1$$

ise, M_r hiperyüzeyinin H_r ortalama eğriliği $\frac{1}{r}$ ye eşittir [1].

İspat : Teorem 1.2.4 den

$$H_r = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i}$$

yazabiliriz. Diğer bir ifadeyle $\binom{n-1}{s} M_s = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n-1} k_{i_1} \ldots k_{i_s}$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{-1 + \sum_{s=2}^{n-1} r^s (s-1) \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n-1} k_{i_1} \ldots k_{i_s}}{1 + \sum_{i=2}^{n-1} r^s \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n-1} k_{i_1} \ldots k_{i_s}}\right]$$

olduğunu gösterebiliriz. Böylece

$$H_r = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{-1 + \sum_{s=2}^{n-1} r^s (s-1) \binom{n-1}{s} M_s}{1 + \sum_{s=1}^{n-1} r^s \binom{n-1}{s} M_s}\right]$$

elde ederiz. Hipotezden $\sum_{s=2}^{n-1} r^s (s-1) \binom{n-1}{s} M_s = 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece $H_r = \frac{1}{r}$ elde edilir. n=3 özel halinde $\sum_{i=2}^{2} \binom{2}{i} (i-1) r^i M_i = 1$ veya $r^2 M_2 = 1$ ve buradan da $r = \pm \frac{1}{\sqrt{M_2}}$ bulunur. Böylece,

$$H_r = \frac{1}{r} = \pm \sqrt{M_2}$$

Diğer bir ifadeyle, M_2 nin tanımından biliyoruz ki

$$M_2 = k_1 k_2 = K$$

idi. Böylece $H_r = \pm \sqrt{K}$ olur. Eğer $r = +\frac{1}{\sqrt{K}}$ ise $H_r = \sqrt{K}$ ve eğer $r = -\frac{1}{\sqrt{K}}$ ise $H_r = -\sqrt{K}$ elde edilir.

2.2. Teorem : E^n de iki paralel hiperyüzey M ve M_r olsun. Mnin $i.-$yinci sabit ortalama eğriliği M_i,

olsun. Bu halde

$$\sum_{i=2}^{n-2} \binom{n-1}{i} r^i M_i = -1, \quad 1 \le i \le n-1$$

ise, M_r hiperyüzeyinin K_r gauss eğriliği $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ ye eşittir [1].

İspat : Teorem 1.2.4 den

$$K_r \;=\; {}_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i}$$

yazabiliriz. Diğer bir ifadeyle $\binom{n-1}{s} M_s =_{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n-1} k_{i_1}\ldots k_{i_s}$ olmak üzere

$${}_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{1+rk_i} = \frac{{}_{i=1}^{n-1} k_i}{1 + {}_{s=1}^{n-1}\, r^s_{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n-1} k_{i_1}\ldots k_{i_s}}$$

olduğunu gösterebiliriz. Böylece

$$K_r = \frac{M_{n-1}}{1 + {}_{s=1}^{n-2} \binom{n-1}{s} r^s M_s + r^{n-1} M_{n-1}}$$

olur. Hipotezden ${}_{i=2}^{n-1} r^i \binom{n-1}{i} M_i = -1$ idi. Böylece $K_r = \dfrac{1}{r^{n-1}}$ elde edilir. $n = 3$ özel halinde $2rM_1 = -1$ veya buradan da $r = -\dfrac{1}{2M_1}$ dır. Diğer bir ifadeyle, $2M_1 = H$ olduğundan $r = \dfrac{1}{H}$. bulunur. Böylece

$$K_r = \frac{1}{r^2} = H^2$$

olur.

2.2 Paralel Hiperyüzlerin Yüksek Mertebeden Eğriliklerinin Oranı

2.3. Teorem : $M \in E^n$ hiperyüzeyinin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. $P \in M$ noktasında M nin $(i+1)$-inci basamaktan Gauss eğrilikleri K_i, $0 \leq i \leq n-2$ ve $f(P) \in M_r$ noktasında M_r nin $(i+1)$-inci basamaktan Gauss eğrilikleri K_i^r, $0 \leq i \leq n-2$ olsun.

Bu durumda, $0 \leq i \leq n-2$ olmak üzere

$$K_i^r = \frac{{}_{s=0}^{i} r^{i-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ i-s \end{pmatrix} (s-t+1)\, K_s}{(i-t_r+1)\left[1+(-1)_{s=0}^{1-n n-2} r^{n-1-s}\,(s-t+1)\, K_s\right]}$$

dır. Burada, $t = boyS^{-1}\{0\}$ ve $t_r = boyS_r^{-1}\{0\}$ dır.

$$K_i^r = \frac{{}_{s=0}^{i} r^{i-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ i-s \end{pmatrix} (s-t+1)\, K_s}{(i-t_r+1)\left[1+(-1)_{s=0}^{1-n n-2} r^{n-1-s}\,(s-t+1)\, K_s\right]}$$

dır [2].

2.4.Teorem : $M \subset E^n$ hiperyüzeyinin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. $P \in M$ noktasında M nin $(i+1)$-inci basamaktan Gauss eğrilikleri K_i, $0 \leq i \leq n-2$ ve $f(P) \in M_r$ noktasında M_r nin $(i+1)$-inci basamaktan Gauss eğrilikleri K_i^r, $0 \leq i \leq n-2$ olsun. Bu durumda, $0 \leq j \leq n-3$ olmak üzere

$$\frac{K_{j+1}^r}{K_j^r} = \frac{(j+1)_{s=0}^{j+1} r^{j+1-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j+1-s \end{pmatrix} (s+1) K_s}{(j+2)_{s=0}^{j} r^{j-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j-1 \end{pmatrix} (s+1) K_s} \qquad (2.1)$$

dir.

İspat : Teorem 2.3 de $t = boyS^{-1}\{0\} = 0$ ve $t_r = boyS_r^{-1}\{0\} = 0$ alınırsa $i = j$ ve $0 \leq j \leq n-3$ olmak üzere

$$\frac{K_{j+1}^r}{K_j^r} = \frac{\dfrac{{}_{s=0}^{j+1} r^{j+1-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j+1-s \end{pmatrix} (s-t+1) K_s}{(j+1-t_r+1)\left[1+(-1)_{s=0}^{1-n n-2} r^{n-1-s}(s-t+1) K_s\right]}}{\dfrac{{}_{s=0}^{j} r^{j-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j-s \end{pmatrix} (s-t+1) K_s}{(j-t_r+1)\left[1+(-1)_{s=0}^{1-n n-2} r^{n-1-s}(s-t+1) K_s\right]}}$$

$$= \frac{(j+1-t_r)_{s=0}^{j+1} r^{j+1-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j+1-s \end{pmatrix} (s-t+1)K_s}{(j+2-t_r)_{s=0}^{j} r^{j-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j-s \end{pmatrix} (s-t+1)K_s}$$

t=0 ve $t_r = 0$ idi. O zaman

$$\frac{K_{j+1}^r}{K_j^r} = \frac{(j+1)_{s=0}^{j+1} r^{j+1-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j+1-s \end{pmatrix} (s+1)K_s}{(j+2)_{s=0}^{j} r^{j-s} \begin{pmatrix} n-1-s \\ j-s \end{pmatrix} (s+1)K_s}$$

olur. $n = 3$ özel halinde

$$\begin{aligned} \frac{K_1^r}{K_0^r} &= \frac{{}_{s=0}^{1} r^{j-s} \begin{pmatrix} 3-1-s \\ 1-s \end{pmatrix} (s+1)K_s}{2K_0} \\ &= \frac{r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} K_0 + 2K_1}{2K_0} \\ &= \frac{K_1 + rK_0}{K_0} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} K_0 &= k_1 k_2 & &= K \\ K_1 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) & &= \frac{1}{2}H \\ K_0^r &= \frac{k_1}{1+rk_1} . \frac{k_2}{1+rk_2} & &= K_r \\ K_1^r &= \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2}\right) & &= K_r \end{aligned}$$

bulunur. K_0, K_1, K_0^r ve K_1^r değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}Hr}{K_r} &= \frac{\frac{H}{2}+rK}{K} \\
\frac{Hr}{2K_r} &= \frac{H+2rK}{2K} \\
\frac{Hr}{K_r} &= \frac{H+2rK}{K} \\
\frac{Hr}{K_r} &= \frac{H}{K}+2r
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.5.Teorem : $M \subset E^n$ hiperyüzey ve asli eğrilikler $\mathrm{k}_1, ..., k_{n-1}$ olmak üzere M nin $s-$inci ortalama eğriliği M_s ve M nin $s-$inci Gauss eğriliği K_s arasında

$$K_s = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1-s \end{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{s+1} M_{n-1-s}$$

bağıntısı vardır.

İspat : Tanım 1.4 den dolayı

$$\begin{aligned}
K_0 &= (-1)^{n-1}_{i=1}{}^{n-1} k_i \\
K_1 &= \frac{(-1)^{n-1}}{2} {}_{i_1<...<i_{n-2}} k_{i_1}...k_{i_{n-2}} \\
&\vdots \\
K_{n-3} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n-2} {}_{1\leq i_1<...<i_{n-1}} k_{i_1}k_{i_2} \\
K_{n-2} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} {}_{i=1} k_i
\end{aligned}$$

olur. Benzer olarak Tanım 1.5 den dolayı

$$\begin{array}{ll} \binom{n-1}{1}M_1 & =^{n-1}_{i=1} k_i \\ \binom{n-1}{2}M_2 & =_{1\leq i_1<\ldots<i_{n-1}} k_{i_1}k_{i_2} \\ \vdots & \\ \binom{n-1}{n-2}M_{n-2} & =_{i_1<\ldots<i_{n-2}} k_{i_1}\ldots k_{i_{n-2}} \\ \binom{n-1}{n-1}M_{n-1} & =^{n-1}_{i=1} k_i \end{array}$$

olur. .

$$\begin{aligned} K_{n-2} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\binom{n-1}{1}M_1 \\ K_{n-3} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}\binom{n-1}{2}M_2 \\ &\vdots \\ K_1 &= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\binom{n-1}{n-2}M_{n-2} \\ K_0 &= (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}M_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$K_s = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \\ n-1-s \end{array}\right)\frac{(-1)^{n-1}}{s+1}M_{n-1-s} \tag{2.2}$$

eşitliği gösterilmiş olur. Bu teoreme göre K_i lerle M_i ler arasında sabit çarpan farkı vardır.

Buna göre; Teorem 2.4 te verilmiş olan $\frac{K^r_{i+1}}{K^r_i}$ oranına benzer olarak $\frac{M^r_{i+1}}{M^r_i}$ oranı da M_i ortalama eğrilikleri cinsinden hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

[1] A.Görgülü, On the Curvatures of the Parallel Hypersurfaces, Commun. Fac. Sci. Un. Ank. Series A, V.41 pp. 85-91, 1992.

[2] A.Görgülü, Paralel Hiperyüzeylerin Yüksek Mertebeden Eğrilikleri Arasındaki bağıntılar , Y.Lisans Tezi, Ankara Ün., 1978.

[3] H.H.Hacısalihoğlu, Diferensiyel Geometri, Gazi Ün. 1983.

[4] A. Sabuncuoğlu, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara, 2004.

[5] H., Noel, J., Notes on Differential Geometry, Van Nostrand Reinhold Company London, 1965.

[6] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Vol. I, John Wiley Sons Inc.,1963,

[7] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Vol. II, John Wiley Sons Inc.,1969

[8] Chen, B. Y., Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker Inc. New York, 1973

[9] A.Görgülü, Relations Between The Higher Curvatures of the Parallel Hypersurfaces, Journal of Karadeniz Un.,Fac. Sci., V.8 1985.