

İzoperimetrik Eşitsizlik Üzerine

Nizam Doğan ınar

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık 2007

Isoperimetric Inequality

Nizam Doğan ınar

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematic

December 2007

İzoperimetrik Eşitsizlik Üzerine

Nizam Doğan ınar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu

Aralık 2007

Nizam Doğan ınar' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “İzoperimetrik Eşitsizlikler Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu

Üye : Prof. Dr. M. Naci Özer

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cumali Ekici

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun Eser

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nevin Ertuğ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

İZOPERİMETRİK EŞİTSİZLİK ÜZERİNE

NİZAM DOĞAN ÇINAR

ÖZET

İzoperimetrik Teorem, ‘aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller arasında çemberin en büyük alan kapsadığını’ ifade eder. Bu çalışmada çevresi L uzunluğuna sahip, iki (uç) nokta arası x birim olan yarım dairesel şeklin maksimum alana sahip olduğunu göstereceğiz.

$L \geq x\pi$ olması durumunda, açıkça bu noktaları içeren L / π çapına sahip çember maksimum alana sahiptir. $2x < L < x\pi$ olması durumunda ise maksimum alan sınırın iki eşlenik yay olduğu durumda elde edilir. Ayrıca birbirlerinden x birim uzaklıkta olan üç nokta durumunu da inceledik. M bir sabit olmak üzere, $3x < L < M$ olması durumunda maksimum alan, sınırın üç eşlenik dairesel yay olduğudurumunda elde edilir. $L \geq M$ olduğunda ise maksimum alan, $b \geq a$ ve $a+b$ bir çember oluşturacak şekilde sınırları a uzunluğuna sahip iki eşlenik dairesel yay ve sınırı b uzunluğuna sahip üçüncü bir dairesel yay olması durumunda elde edilir.

Anahtar Kelimeler: İzoperimetrik Eşitsizlik, İzoperimetrik Teorem

ISOPERIMETRIC INEQUALITIES

NİZAM DOĞAN ÇINAR

SUMMARY

The *Isoperimetric Theorem* states that for a planar region of given perimeter, the circle encloses the maximum area. In this paper, we determine the shape that maximizes area when the boundary is constrained to have length L and to contain two points x units apart.

For $L \geq x\pi$ maximum area is clearly attained by a circle of diameter L / π containing the points. When $2x < L < x\pi$, we prove that the maximum area is attained when the boundary is two congruent circular arcs. We also consider the case of three equidistant points x units from each other. For some constant M , when $3x < L < M$, the maximum area is attained when the boundary is three congruent circular arcs. When $L \geq M$, the maximum area is attained when the boundary consists of two congruent circular arcs of length a and a third complementary circular arc of length b , where $b \geq a$ and $a + b$ forms a circle.

Keywords: Isoperimetric Inequality, Isoperimetric Theorem

TEŞEKKÜR

İzoperimetrik Eşitsizlikler Üzerine adlı tez çalışmalarımda, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu'na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER**Sayfa**

ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Problemin İfadesi.....	1
1.2 Kısa Tarihçe.....	1
1.3 İzoperimetri Probleminin Geliştirilmesi.....	3
2. İKİ NOKTA.....	4
3. EŞİT UZAKLIKTA ÜÇ NOKTA.....	18
4. SONUÇ.....	30
5. KAYNAKLAR DİZİNİ.....	31

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1 $L > C$ iken, her zaman kiriş uzunluğu x olan bir çember oluşturabiliriz.....	5
2 a) Dairesel bir yayın oluşturduğu alan b) Dairesel olmayan bir yayın oluşturduğu alan c) Tamamlanmış daire d) D alanı ve X alanı.....	6
3 Resimde alanların nasıl belirtildiği gösterilmektedir.....	7
4 Çember yaylarının da gösterildiği şekil.....	8
5 a)Bağlantı noktası açıktır b)İki bağlantı noktasını şekillendirmek için bağlantıyı birbirine kavuşturun.....	19
6.....	22
7	24
8.....	26
9	28

ÖNSÖZ

Bu tez, başka kaynaklardan da kısmen yararlanmakla beraber, büyük oranda, David Yang'ın Pointed Isoperimetric Inequalities başlıklı, kaynaklar dizininde yer alan makalenin çevirisinden oluşmaktadır.

Bunun dışında Yang'ın makalesindeki bazı denklemlerin açılımı veya ispatı verilmeye çalışılmıştır.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Problemin İfadesi

Bize, bir alanı çevrelemek için bir parça ip verildiğini düşünelim. En büyük alanı çevrelemek istersek, ipin şekli nasıl olmalıdır?

Bu sorunun cevabı, aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller arasında çemberin en büyük alan kapsadığını ifade eden *İzoperimetri Teoremi* 'dir. Üstelik aynı alana sahip tüm şekiller arasında çember en küçük çevreye sahiptir. Şimdi de bu ipin bize verilen belirli bir noktadan geçmesi gerektiğini düşünelim. Alanı en büyük hale getirmek için şeklimizi, verilen nokta ipin üzerine gelene kadar basitçe çeviririz (ki bu ip hala çember şeklindedir). Ama, ipin 2, 3 ya da n sayıda verilen noktadan geçmesi gerekirse en uygun şekil ne olur?

Nokta sayısı arttıkça, uygunluk düzeyinin karmaşıklığının da artmakta olduğu açıkça görülmektedir. İpin, düzlem üzerinde rasgele serpiştirilmiş 1000 farklı noktadan geçmesi gerektiğinde alanı büyütme işlemi bir düşünün. Bu araştırmada, farklı sayılarda, belirli ve sınırlayıcı noktalar içermesi şartıyla, alanı en büyük hale getirecek şekilleri inceledik.

1.2 Kısa Tarihçe

İzoperimetrik Teorem, eski Yunan'dan gelmektedir. *Virgils's Aeneid* kitabında Dido'nun "bir boğanın derisi" ile sınırladığı en büyük alan hikayesinde bulabiliriz. Dido İzoperimetri Teoremini (bilmeden) akıllıca kullanarak topraklarını en geniş hale getirmiş ve Carthage şehrini kurmuştur.

Birçok Greek, İzoperimetri Teoremi'ni ispatlama girişiminde bulunmuştur. Biliyoruz ki hem Archimedes hem de Zenodorus bu teoremi

ispatlamaya çalışmıştır ama ikisinin de bu girişimleri sonuçlanamamıştır. Pappus'un ispatıda vardır ama o da modern matematik standartlarına uygun değildir. Ama herşeye rağmen Yunanlılar çemberin en uygun şekil olduğuna inanmaktadırlar.

İzoperimetri Teoremi için 19. yüzyılın sonlarına kadar iyi bir ispat verilememiştir. Sonunda, 1838 de, Jakop Steiner sadece Öklit (Euclid) önermelerini kullanarak İzoperimetri Teoremini ispatlayan birçok çalışma yayınlamıştır. Steiner'in kullandığı teknik şu anda "Steiner simetristirilmesi" olarak bilinmektedir. Steiner'in makaleleri oldukça ilginç sonuçlar içerir ancak dönemin bir başka bilim adamı Dirichlet tarafından da vurgulandığı gibi Steiner'in ispatı "minimal bir şekil vardır" ön kabulü üzerine yapılmıştır. İzoperimetri Teoremi için en uygun ispat Weierstrass tarafından verilmiştir. Daha sonra, Blaschke, kompaktlığı kullanarak minimal bir şeklin her zaman varlığını ispatlamıştır. Ama Blaschke'nin önermesi bile temel geometriye ait olmayan fikirlere dayanır.

Diğer önemli katkıları olan bilim adamları arasında, Steiner'in beşinci tezini tamamlayan Edler de bulunmaktadır. Altmış yıl sonra, 1901'de, Hurwitz Fourier serilerini ve Green teoremini kullanarak yalnızca analitik önermelerle İzoperimetri Teoremi'ni ispatlayan ilk bilim adamı olmuştur.

Bundan sonra matematikçiler İzoperimetri Teoremi için çok sayıda ispat ileri sürmüşlerdir. Analiz ispatları arasında P.D. Lax'in ki en basit olanıdır. Ayrıca bazı ispatlar, değişim hesaplamaları hakkındaki fikirleri de kullanmaktadır. Aynı zamanda analiz kullanılmayan ispatlar da vardır. Mesela, Yaglom'un ispatı yalnızca temel geometriyi kullanır ama bir hayli karmaşıktır. Bir diğer basit ispat ise integral geometrisini ve cebir işlemlerini kullanan Benson'un ispatıdır. Birçok bilim adamı, İzoperimetri Teoremi'nin daha genelleştirilmiş şekli olan ve İzoperimetri Eşitsizliği olarak bilinen şekli ispatlamıştır. Aslında İzoperimetri Teoremi, İzoperimetri Eşitsizliği'nin doğal bir sonucudur.

Teorem 1. (İzoperimetri Eşitsizliği)

Bir R düzlemsel bölgenin alanı $A(R)$ ve çevresi $P(R)$ ise

$$4\pi A(R) \leq (P(R))^2$$

dir.

Eşitlik ancak ve ancak R bir çember ise geçerlidir.

1.3 İzoperimetri Probleminin Geliştirilmesi

Aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller arasında çember maksimum alana sahip olduğuna göre, aynı yüzey alanına sahip şekiller arasında kürenin maksimum hacme sahip olacağını tahmin edebiliriz. Bunun gibi bir hipotez mantıklıdır çünkü matematikte çoğunlukla, yüksek boyutlardaki cevaplara ulaşmak için düşük boyutlardaki çözümleri kullanırız. Bu sonuç da, İzoperimetri Teoremi gibi, 19. yüzyıla kadar ispatlanamamıştır. 1882'de Schwarz, Eşhacim (Isovolume) Problemi olarak bilinen bu problemi çözdü ve kürenin en büyük hacme sahip olduğunu ispatladı.

İzoperimetri Teoremi'nin farklı bir boyutunu inceleyelim. Daha açık olarak, sınırları belirli noktalardan geçen alanı en büyük hale getiren şekilleri inceleyeceğiz. Bu çalışma boyunca ipin uzunluğunu L olarak ele alalım. Çemberlerden bahsederken çembersel bölge ile (segment) kesitin (sector) birbirinin yerine geçebilen terimler olmadığını hatırlayalım. Çembersel bölge (segment), bir giriş ve bir çember yayının oluşturduğu bölümken, kesit (sector) ise bir yay parçasıyla iki yarıçapın kavuşmasıyla oluşan alandır.

BÖLÜM 2

İKİ NOKTA

R herhangi bir alan, $P(R)$ R nin çevresi, $A(R)$ de alanı olsun.

Teorem 2. P ve Q ipin geçmesi gereken iki nokta, L de ipin uzunluğu olsun. \overline{AB} doğru parçasının uzunluğu x ve $C = x\pi$ olsun. Eğer $L \geq C$ ise, çember alanı en büyük hale getirir. Eğer $2x < L < C$ ise, en uygun şekil, benzer iki çember yayıyla oluşturulur.

İspat: Üç farklı durum söz konusudur:

$$L = C, L > C \text{ ve } 2x < L < C$$

Durum 1. Önce $L = C$ durumunu inceleyelim. Bu durumda ipi, çapı x olan çember haline getiririz. İzoperimetri Teoremine göre çember en geniş alana sahip olur. Çember, çevresi L olan tüm şekiller arasında en geniş alana sahip olduğundan, aynı zamanda belirli noktalardan geçen sınırlara sahip daha küçük şekiller topluluğu arasında da en büyük alana sahiptir. Bu yüzden olası en

geniş alan $\frac{L^2}{4\pi}$ dir.

Durum 2. $L > C$ iken, ipin her zaman x uzunlukta ki bir kirişe sahip olan bir çembere dönüştürülebileceğini biliriz. Açıkça bu çemberi oluştururuz.

Şekil2’de, merkezden $\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$ birimde bir kiriş oluşturursak, o zaman

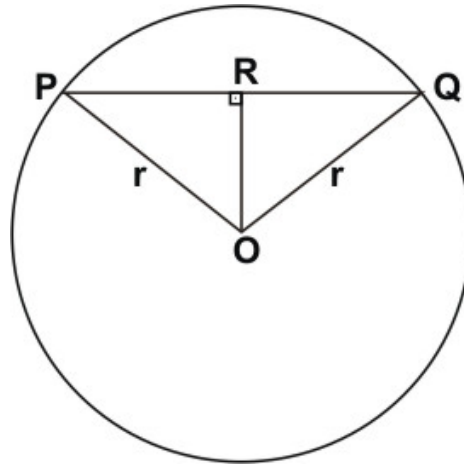
kirişin uzunluğunun x olduğunu görürüz.

Geometri mantığını kullanarak, $\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} > 0$ olduğunu görürüz.

$L > C$ iken, $2\pi r > \pi x$ buluruz. Bu da $\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} > 0$ demektir.

Bu iple bir çember oluşturmak mümkün olduğu için, İzoperimetri Eşitsizliği ile bu oluşumla en geniş alan elde edilir. Sonuç olarak, en geniş

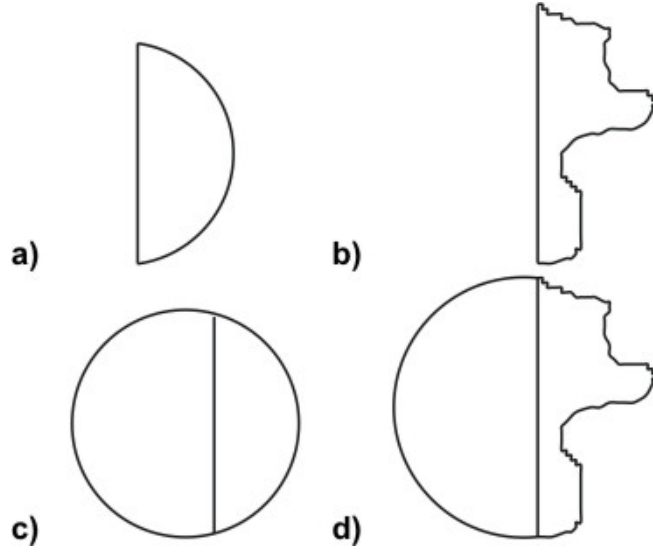
alan $\frac{L^2}{4\pi}$ dir.



Şekil 1: $L > C$ iken, her zaman giriş uzunluğu x olan bir çember oluşturabiliriz.

Durum 3. Son olarak, $2x < L < C$ durumunu ele alalım. Açıkça, iki nokta arasındaki uzaklık x olduğundan, herhangi bir alanı çevrelemek için ipin uzunluğu $2x$ 'ten daha fazla olmalıdır. İpin, iki eşit çember yayı şekline getirilmesi gerektiğini düşünürüz. İlk önce, ortaya atılan şu önermeyi ispatlayalım.

Lemma 3. Belirli bir uzunluktaki ip ve bir doğru parçası tarafından sınırlanan maksimum alan, ipin çembersel yay haline getirilmesiyle elde edilir.



Şekil 2:

- a) Dairesel bir yayın oluşturduğu alan
- b) Dairesel olmayan bir yayın oluşturduğu alan
- c) Tamamlanmış daire
- d) D alanı ve X alanı

İspat: (Alexander Bogomolny, 1996 2005) referansıya, İzoperimetri Eşitsizliğinin bir boyutu yoluyla ortaya attığımız düşüncemizi ispatlıyoruz. C nin dairesel bir yay ve bir doğrudan ortaya çıkan bir alan parçası, D nin ise dairesel olmayan bir yay ve benzer bir doğru parçasından ortaya çıkan bir alan parçası olduğunda, çevreleri aynı olan C ve D alanlarını ele alalım (bakınız Şekil 2a ve 2b). X i uygun dairesel alan üzerine ekleyerek dairede $C + X$ elde ederiz (bakınız Şekil 2c). X i D ye de ekleriz (bakınız Şekil 2d).

X , C ve D nin sınırlarıyla tam olarak örtüştüğü için biliyoruz ki

$$P(C \cup X) = P(D \cup X)$$

dir. İzoperimetri Eşitsizliği ile de

$$A(C \cup X) > A(D \cup X)$$

elde ederiz. Bu yüzden

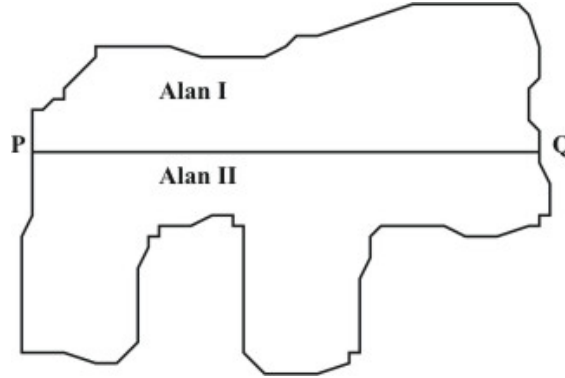
$$A(C \cup X) - A(X) > A(D \cup X) - A(X)$$

ve sonuç olarak da

$$A(C) > A(D) \text{ dir}$$

Böylece, bir ip ve bir doğru parçası verildiğinde en geniş alanın, ipin doğru parçasına bir çember yayı oluşturacak biçimde kullanılmasıyla elde edildiğini ispatlamış olduk.

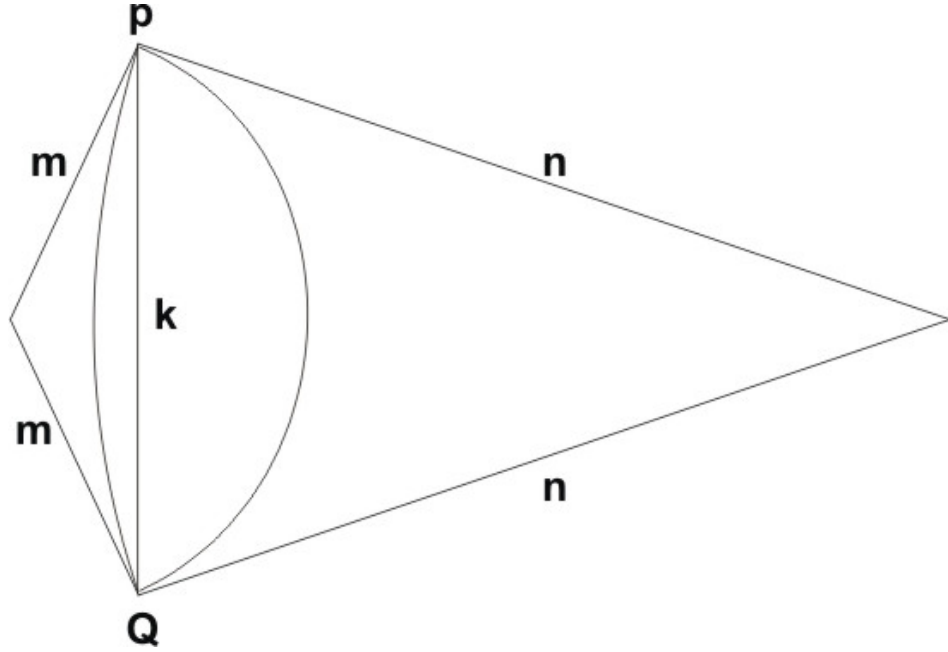
Düşüncemizi ispatladığımıza göre, tekrar $L < C$ durumuna dönelim. \overline{PQ} 'nin üzerinde kalan alanı I , \overline{PQ} 'nin altında kalan alanı da II olarak gösterelim. \overline{PQ} 'nin üzerinde kalan kısımda kullanılan ipin uzunluğunu w ile gösterirsek, \overline{PQ} 'nin altında kalan kısımda kullanılan ipin uzunluğu da $L - w$ olur. Doğal sınırlandırma ile $x < w < L - x$ olur.



Şekil 3: Resimde alanların nasıl belirtildiği gösterilmektedir.

Şekilde gösterildiği gibi, herhangi bir w için, en geniş I alanı, \overline{PQ} 'nin üzerinde kalan ip çember yayı şekline getirildiğinde oluşur. Benzer bir iddiayla da, \overline{PQ} 'nin altında kalan ipin de bir çember yayı şekline getirilmesi gerekir. Şimdi ipin iki çember yayı şekline getirilmesi gerektiğini bilmemize rağmen bu çember yaylarının birbirlerine oranları bilinmemektedir.

Durum 3a. Dikkat etmeliyiz ki çember yaylarından her biri artık birer yarım daire değildir. m ve α sırasıyla bir çember yayını oluşturan yarıçaplar ve açı olsun. n ve β da sırasıyla ikinci çember yayını oluşturan yarıçaplar ve açı olsun. k , \overline{PQ} uzunluğunu (bakınız Şekil 2), w da \overline{PQ} nun sağ tarafındaki ipin uzunluğunu gösterebiliriz.



Şekil 4: Çember yaylarının da gösterildiği şekil.

Sabit bir L ve k için, w ya göre bir alan belirleyen $A(w)$ fonksiyonumuz olduğunu düşünelim. İspatsız olarak, A' ve A'' nün sürekli olduklarını iddia edebiliriz. Dahası, bu fonksiyonun $w = L/2$ hattı boyunca simetrik olması gerektiğini biliyoruz. Çünkü \overline{PQ} nun sağındaki ip w ise, \overline{PQ} nun solundaki ip, $L - w$ olur. Ayrıca bu fonksiyonun alanı $k < w < \pi/2$ alınmalıdır çünkü ip, alanı büsbütün çevrelemelidir.

Basit fonksiyonlar kullanarak m yi w bakımından çözmek mümkün olmayacağı için bu eşitliğin türevini incelemek sorun yaratabilir. Ama yine de, $A(w)$ fonksiyonu daha sonra tekrar döneceğimiz kullanışlı bir olgudur. Bunun yerine, bu alanı farklı bir açıdan inceleyelim.

Alanı w bakımından incelemek yerine merkez açıları olan α ve β bakımından inceleyeceğiz. Daha fazla değişken sunmamıza rağmen, yarıçapı çözmekten ve analizi basitleştirmekten kaçınalım. Geometrik düşünceyi kullanarak aşağıdaki eşitlik sistemlerine varırız.

$$m\alpha + n\beta = L \quad (1)$$

$$2m \sin \frac{\alpha}{2} = k \quad (2)$$

$$2n \sin \frac{\beta}{2} = k \quad (3)$$

İki çember yayı arasındaki alanı en büyük hale getiririz. Bu yaylardan hiçbirini bir yarım daireden daha büyük olmadığından bu alan

$$\frac{1}{2}m^2(\alpha - \sin \alpha) + \frac{1}{2}n^2(\beta - \sin \beta) \quad (4)$$

açıklaması ile gösterilir.

Genellemeyi bozmadan $k = 1$ alırız ve bu şekilde (2) ve (3) şunları gösterir:

$$m = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

$$n = \frac{1}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \quad (6)$$

Şekil 1'de \overline{PQ} arasındaki uzunluğa k , \overline{PO} arasındaki uzunluğa yani yarıçapa m ve daire diliminin merkez açısına da α dersek kosinüs teoreminden

$$k^2 = m^2 + m^2 - 2.m.m.\cos \alpha \text{ dir. } \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{ ifadesini bu denklemde}$$

yerine yazarsak $k^2 = 2m^2.2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ eşitliğine ulaşırız. Bu eşitlikte her iki

tarafın karekökünü alırsak $k = 2m \sin \frac{\alpha}{2}$ eşitliğine ulaşırız. Aynı mantıkla daire

kesmesinin alanı ise $\frac{\alpha - \sin \alpha}{4 - 4 \cos \alpha}$ formülüyle bulunur.

$$f(x) = \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} \text{ ve } g(x) = \frac{x - \sin x}{4 - 4 \cos x} \text{ olarak tanımlayalım.}$$

(5) ve (6)'yı kullanarak

$$f(\alpha) + f(\beta) = L \quad (7)$$

sadeleştirmesini elde ederiz ve

$$g(\alpha) + g(\beta) \quad (8)$$

en büyük hale getiririz.

Lagrange Çarpanlarıyla,

$$\nabla(f(\alpha) + f(\beta)) = \lambda \nabla(g(\alpha) + g(\beta))$$

daki gibi sabit bir λ vardır. $S(x) = f'(x) / g'(x)$ olsun.

O zaman

$$S(\alpha) = \lambda \quad (9)$$

$$S(\beta) = \lambda \quad (10)$$

$$\frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{3}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = L \quad (11)$$

dir.

$$S(\alpha) - S(\beta) = 0 \quad (12)$$

ve

$$\frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{3}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = L \quad (13)$$

elde edilir. Tüm yerel maksimum ve yerel minimumlar yukarıdaki sisteme uymalıdır. Yani, eğer $\alpha = \beta$ ise $S(\alpha) - S(\beta) = 0$ olur. Fakat bu, tek çözüm

yolu değildir. Ama yinede, aşağıdaki iddia, $\alpha = \beta$ durumunun tek çözüm olduğunu belirtmektedir.

Lemma 4. Her sabit β için $S(\alpha) - S(\beta)$, tüm $0 < \alpha < \pi$ durumlarında artmaktadır.

$0 < \alpha < \pi$ olarak alabiliriz çünkü her bir çember yayı bir çemberin yarısından daha küçüktür.

İspat: β sabit olduğu için, $S(\beta)$ değişmezdir ve bu durumda ispatlamamız gereken tek şey $S(\alpha)$ nın sürekli arttığıdır.

$S(\alpha)$ nın türevini alarak,

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\left[2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} (\sin \alpha - \alpha)(\cos \alpha - 1) + ((\alpha^2 - 4) \cos \alpha - 2\alpha \sin \alpha - \alpha^2 + 4) \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right]}{(2 \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 2)^2}$$

$\alpha = 0$ durumunda payda 0 a eşit olduğundan ve $0 < \alpha < \pi$ için

$$\frac{d}{dx} (2 \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 2) = x \cos x - \sin x < 0$$

olduğundan biliyoruz ki $0 < \alpha < \pi$ için

$$2 \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 2 < 0$$

olur.

Bu yüzden payda her zaman pozitifdir çünkü bu bir mükemmel karedir. Böylece ihtiyacımız olan tek şey, payın pozitif olduğunu göstermektir.

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{ve}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

bu trigonometrik özdeşlikler pay ifadesinde yerine yazılırsa

$$-16\alpha \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 4\alpha^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 16 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

olduğu bulunur.

$$\alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \alpha^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

trigonometrik özdeşliğini kullanarak yeniden yazıp,

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

yi belirttikten sonra

$$4 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\alpha \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

yi elde ederiz.

Bu işlemin pozitif olduğunu biliyoruz çünkü $0 < \alpha < \pi$ için

$$\sin \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ ve } \cos \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \text{dır.}$$

Böylece $0 < \alpha < \pi$ için $dS(\alpha)/d\alpha$ nın payı pozitiftir. Ayrıca bu, α , $(0, \pi)$ aralığında arttıkça $S(\alpha) - S(\beta)$ nın da her β sabiti için arttığı anlamına gelir.

$S(\alpha)$, her β için sürekli artıyorsa biliriz ki $\alpha = \beta$, (12) nin tek çözümdür. Bu yüzden $\alpha = \beta$, bir en büyük, en küçük veya bükülme noktası üretir.

Durum 3b. Şimdi de bir çember yayının, çemberin yarısına eşit ya da daha büyük olması olasılığını inceleyeceğiz ($0 < \alpha < \pi \leq \beta < 2\pi$).

Biliyoruz ki $L < C$ olduğundan, çember yaylarının her ikisi de çemberin yarısından daha büyük olamaz. Benzer bir şekilde

$$m\alpha + n\beta = L \quad (14)$$

$$2m \sin \frac{\alpha}{2} = k \quad (15)$$

$$2n \sin \frac{(2\pi - \beta)}{2} = k \quad (16)$$

buluruz.

Yeni alan işlemimiz

$$\frac{1}{2} m^2 (\alpha - \sin \alpha) + \frac{1}{2} n^2 (\beta + \sin(2\pi - \beta))$$

olur.

Ama dikkat etmeliyiz ki

$$\sin \frac{(2\pi - \beta)}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \text{ ve } \sin(2\pi - \beta) = -\sin \beta$$

oldüğundan alan eşitliği ve kısıtlaması aynıdır. Sonuç olarak benzer işlemler yapabiliriz ve Lagrange eşitliğimizin $S(\alpha) - S(\beta) = 0$ olmasını istediğimizi buluruz. $0 < \alpha < \pi \leq \beta < 2\pi$ olduğundan, $\alpha = \beta$ nın bir çözüm yolu olmadığını buluruz. Ama $S(\alpha) - S(2\pi - \alpha) = 0$ olduğuna dikkat etmeliyiz.

Bu yüzden $\beta = 2\pi - \alpha$ bir çözüm yoludur. Lemma 4'ü kullanarak $\beta = 2\pi - \alpha$ nin tek çözüm yolu olduğunu buluruz (bu önermeyi kullanabiliriz çünkü $0 < \alpha < \pi$ olması yeterlidir). Ama eğer $\beta = 2\pi - \alpha$ ise, o zaman $m = n$ ve $L < C$ olduğundan bir çelişki durumuna gelen dairesel alanlar açığa çıkar. Böylece $0 < \alpha < \pi \leq \beta < 2\pi$ için bir yakın en büyük değer yoktur.

$\alpha = \beta$ nin kritik nokta olduğunu biliyoruz ama onun bir lokal maksimum mu, lokal minimum mu, yoksa bükülme noktası mı olduğunu bilmiyoruz. Hatırlamalıyız ki \overline{PQ} doğru parçasının bir tarafındaki ipin uzunluğuna w dediğimiz zaman oluşan alana $A(w)$ demiştik. $\alpha = \beta$ olduğunda $w = \frac{L}{2}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $A(w)$ grafiğinin $w = \frac{L}{2}$ ye göre simetrik olması gerektiğini biliyoruz çünkü \overline{PQ} uzunluğunun sağında bulunan w uzunluğundaki ipin şekli, \overline{PQ} uzunluğunun sağında bulunan $L - w$ uzunluğundaki ipin şeklinin aynadaki yansıması şeklindedir. $A(w)$, $w = \frac{L}{2}$ ye simetrik olduğu için $w = \frac{L}{2}$ nin bükülme noktası olamayacağını biliriz. Bu yüzden, bitiş noktaları ya da $w = \frac{L}{2}$ mutlak maksimum değerdir.

Aşağıdaki önerme ile $w = \frac{\alpha}{2}$ nin bir mutlak maksimum veya mutlak minimum olduğunu ispatlarız.

Lemma 5. $A(\frac{L}{2})$ mutlak maksimum veya minimumdur.

İspat: $A(\frac{L}{2})$ nin maksimum veya minimum olduğunu zaten biliyoruz. $A(\frac{L}{2})$ nin *mutlak* maksimum ya da minimum olduğunu ispatlayabilmemiz için

yalnızca, bitiş noktalarının $A(\frac{L}{2})$ den daha uç olmadığını göstermemiz gerekmektedir.

İlk olarak $A(\frac{L}{2})$ nin maksimum olduğunu varsayalım. Böylece $\varepsilon > 0$ için $A'[\frac{L}{2} + \varepsilon] < 0$ olur. Bu yüzden $A(\tau) < A(\frac{L}{2})$ gibi herhangi bir

$$\frac{L}{2} < \tau < \frac{L}{2} + \varepsilon$$

noktası vardır.

$A(L-1)$ uç noktasının $A(\frac{L}{2})$ den büyük olduğunu varsayalım. Ayrıca $A(L-1) > A(\tau)$ olsun. Bu yüzden, Mean Value Teoremine göre $\frac{L}{2}$ ile τ arasında

$$A'(\rho_1) = \frac{A(\tau) - A(\frac{L}{2})}{\tau - \frac{L}{2}}$$

gibi bir ρ_1 noktası bulunmaktadır.

Bu yüzden $A'(\rho_1) < 0$ olur.

Aynı sebeple, τ ile $L-1$ arasında

$$A'(\rho_2) = \frac{A(L-1) - A(\tau)}{(L-1) - \tau}$$

gibi bir ρ_2 noktası olduğunu görürüz. Bu yüzden $A'(\rho_2) > 0$ olur.

Eğer $A'(\rho_1) < 0$ ve $A'(\rho_2) > 0$ ise $A'(w)$ sürekli bir fonksiyon olduğu için A' belli bir noktada sifıra eşit olmalıdır. Bununla beraber, $w = \frac{L}{2}$

nin tek kritik nokta olduğunu bildiğimiz için burada bir çelişki vardır. Sonuçta $A(L-1) < A(\frac{L}{2})$ dir. Diğer bitiş noktası üzerinde aynı durum tatbik edilince, eğer $A(\frac{L}{2})$ maksimum ise, bunun *mutlak* maksimum olduğunu ispatlarız. Benzer şekilde, $A(\frac{L}{2})$ minimum ise bunun da *mutlak* minimum olduğunu gösterebiliriz.

Eğer herhangi bir $w \neq \frac{L}{2}$ durumu için $A(w) < A(\frac{L}{2})$ ise, $A(\frac{L}{2})$ mutlak maksimumdur. Nümerik değişimler $A(w) < A(\frac{L}{2})$ olduğunu gösterse de, onun *her zaman* mutlak maksimum olup olmadığını bilmiyoruz.

L değiştikçe, onun da mutlak maksimumdan mutlak minimuma dönüşmesi beklenmektedir. Biz tüm $2 < L < \pi$ değerleri için $A(\frac{L}{2})$ nin her zaman bir maksimum veya her zaman bir minimum olduğunu ispatlamalıyız. Sonra da eşit çember yayı uzunluklarının en geniş alanı verdiğini ispatlamak için sayısal bir örnek kullanacağız.

$A(\frac{L}{2})$ nin mutlak maksimum olduğunu düşünelim. Bu yüzden $s < \frac{L}{2}$ durumunda $A'(s) > 0$ ve $s > \frac{L}{2}$ durumunda da $A'(s) < 0$ olur. Eğer herhangi farklı bir L değeri için $A(\frac{L}{2})$ mutlak minimum ise, bunun tam tersi doğru olur. Ama A' sürekli olduğundan bu $A'(s) = 0$, $\frac{L}{2}$ den başka bir nokta için bir çelişki yaratır. Çünkü biliyoruz ki $\frac{L}{2}$ tek kritik noktadır. Bu yüzden $A(\frac{L}{2})$ her zaman bir mutlak maksimum ya da mutlak minimum olmalıdır.

$L = \frac{2\pi}{3}$ olsun. Hesaplayınca $A(\frac{L}{2}) = 0,18$ ve $A(1) = 0,13$ olduğunu görürüz. $A(\frac{L}{2}) > A(1)$ olduğundan, benzer iki çember yayının $2 < L < C$ olduğu bir durumda her zaman en geniş alanı verdiğini görürüz.

BÖLÜM 3

EŞİT UZAKLIKTA ÜÇ NOKTA

Şimdi de 1 birim uzaklıktaki üç noktanın durumunu inceleyeceğiz. Noktaları, bir eşkenar üçgen oluşturacak biçimde birleştirelim. İpimizin uzunluğunu da L olarak gösterelim. x , y ve z de üçgenin kenarları üzerinde oluşturulmuş çember yaylarının uzunlukları olsun.

Tanım 6. Birbirini tamamlayan çember yayları, şekilleri değiştirildiğinde ve/veya döndürüldüğünde bütün bir daire oluşturan çember yaylarıdır.

Teorem 7. $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ olan bir ikizkenar üçgen olsun. \overline{BC} doğru parçasını ve ipin L birimi şeklinde verilen A noktasını kapsayan alan parçasını en büyük hale getirmek için \overline{AB} ve \overline{AC} kenarlarına iki çember yayı oluştururuz. Eğer $2 < L < \pi$ ise iki eşit çember yayı bu alanı en geniş hale getirir. Eğer $L > \pi$ ise iki tamamlayıcı çember yayı alanı en geniş hale getirir.

İspat: Bu önermeyi, Teorem 2'nin bir uzatımı ile ispatlarız. Teorem 3 yoluyla

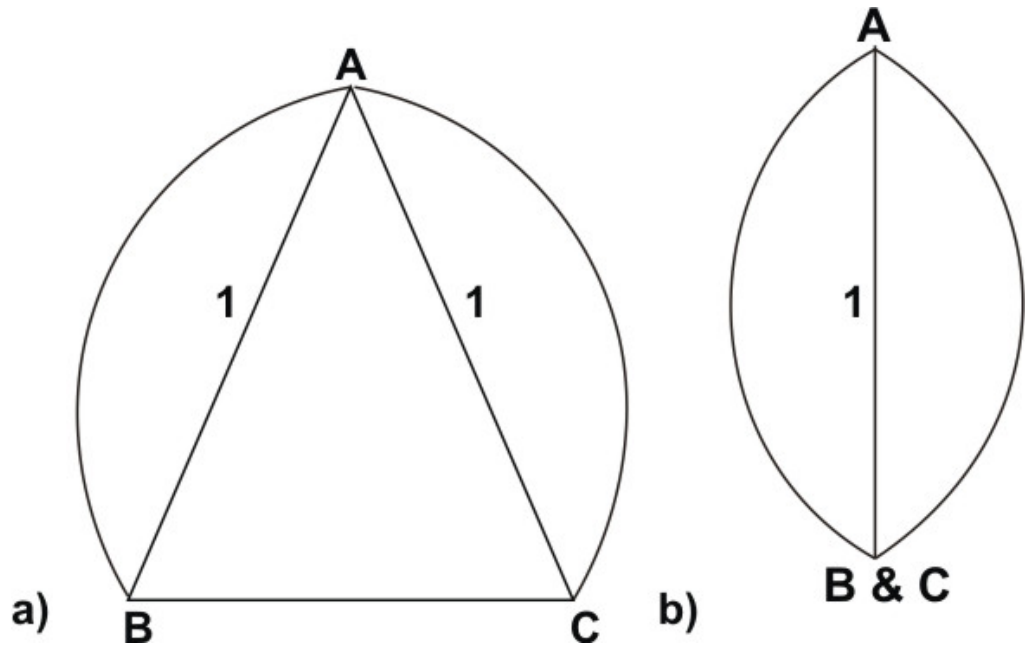
\overline{AB} ve \overline{AC} nin yanındaki yayları çizmek istiyoruz. $\triangle ABC$ nin alanı

değişmediği için $\triangle ABC$ nin dışındaki ve ipin içindeki alanı karşılaştırmaya ihtiyacımız var. $\angle BAC$ ' yi bir bağlantı noktası olarak düşünün (Şekil 3a).

Eğer bağlantı noktasını kapatırsak, iki nokta durumuna geri döneriz (Şekil 3b).

2.teoremde, eğer $2 < L \leq \pi$ ise, iki eşit dairesel yay alanı genişletir. Eğer

$L > \pi$ ise, iki tamamlayıcı dairesel yay alanı genişletir.



Şekil 5:

a)Bağlantı noktası açıktır.

b)İki bağlantı noktasını şekillendirmek için bağlantıyı birbirine kavuşturun.

Sonuç 1: Eğer $3 \leq L \leq \pi + 1$ ise, maksimum alan, $x = y = z$ iken elde edilir.

İspat: Lemma vasıtasıyla alanı genişletmek için, üçgenin her iki kenarı üzerinde dairesel bir yay oluşturmamız. Eğer $L - x \leq \pi$ ise, Teorem 7 $y = z$ olduğunu gösterir. $x \leq 1$ olduğunda, $L - 1 \leq \pi$ ve $L \leq \pi + 1$ olduğunu biliriz. Bu durumu farklı bir kombinasyon ile $3 \leq L \leq \pi + 1$ iken $x = y = z$ olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 8. $L \geq \frac{3\pi}{2}$ ise, maksimum alan $x = y$, $x, y < z$ iken ve

x, z tamamlayıcı iken elde edilir.

İspat: İspatı aşağıdaki lemma yardımıyla tamamlayacağız.

Lemma 9. $L \geq \pi + 1$ iken, maksimum alan için sadece iki olası konfigürasyon vardır.

Konfigürasyon I: $x = y$ ve $x, y < z$ ve x ve z tamamlayıcıdır.

Konfigürasyon II: $x = y = z$

İspat: Teorem 7 ile her bir yay çiftinin ya eşlenik ya da tamamlayıcı olması gerektiği bilinmektedir. Böylece, 3 olasılık vardır:

1. $x = y, x, y < z$, ve x, z bir daire oluşturur;
2. $x = y = z$;
3. $x = y, x, y > z$ bir daire oluşturur.

İlk iki olasılık, Teorem 7'yi takip ettiği için akla uygundur. Yine üçüncü olasılık alanı genişletmez. Çünkü sadece daireyi oluşturan eşlenik yaylar yarım dairedir. Çünkü $x + y > \pi$ ve kenar uzunluğu 1 olduğu için, iki yarım daire oluşturamayız ve böylece, bir daire oluşturan iki eşlenik yay oluşturamayız.

$L > \frac{3\pi}{2}$ iken Konfigürasyon II bize, herhangi iki nokta arasındaki

uzaklık 1 olduğu için, her yayın bir yarım daireden daha büyük olması gerektiğini gösterir. Bununla beraber, eğer her bir yay bir yarım daireden daha büyük ise, herhangi iki yayın boylarının toplamı π 'den daha büyük olur. Eğer toplam π 'den daha büyük ise, Lemma 9'dan bildiğimiz ispata göre,

maksimum alanı elde edemeyeceğimizi biliriz. $L = \frac{3\pi}{2}$ durumunda

Konfigürasyon I ve Konfigürasyon II aynı sonucu verir. Dolayısıyla, $L > \frac{3\pi}{2}$

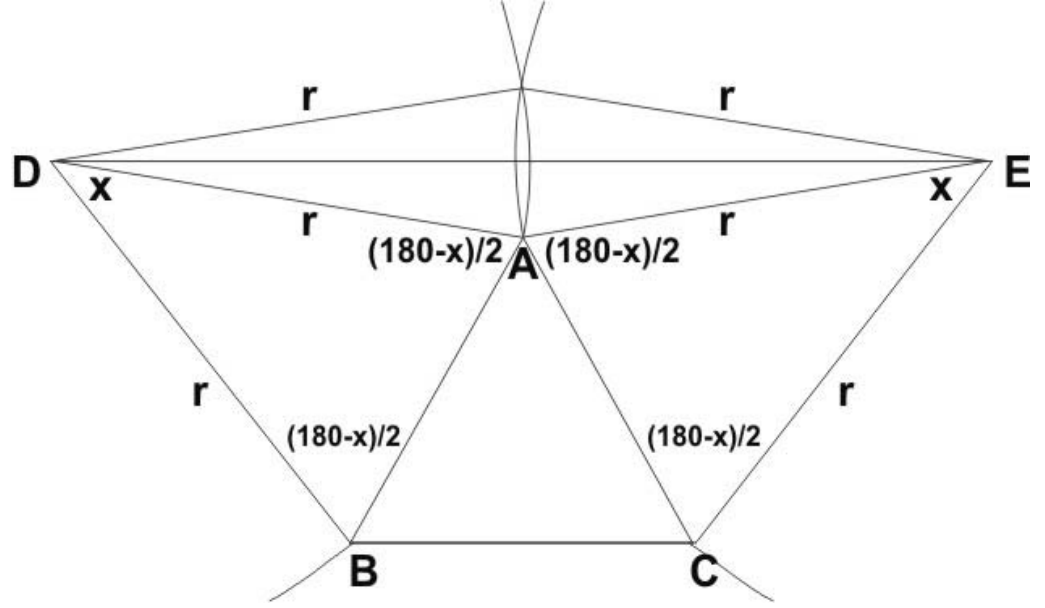
iken, Konfigürasyon I, maksimum alan sonucunu verdiğini belirtebiliriz.

Bununla beraber, Şu ana kadar yayların Őst Őste gelmeyeceklerini tahmin ediyorduk. Açıkça eğer yaylar Őst Őste gelirse, alanı en iyi Şekilde kullanamayız. AŞağıdaki iki önerme, Konfigürasyon I ve II deki yayların Őst Őste gelmediğini gösterir ve böylece daha önceki iddialarımızın doğruluğunu onaylar.

Lemma 10. Eğer bir eşkenar Őgenin kenarları üzerinde eşlenik yay oluşturursak, eğer her bir yayı oluşturan merkez açı $\frac{5\pi}{3}$ den azsa, yaylar Őst Őste gelmez.

İspat: Bir $\triangle ABC$ eşkenar Őgeni dŐŐün. Bir eşkenar Őgeni incelediğimiz için, önermeyi ispatlamak için, herhangi iki kenarı dŐŐünmemiz yeterlidir, Ő kenara da bakmamız gerekmez, \overline{AB} ve \overline{AC} 'yi seçelim. Eğer \overline{AB} ve \overline{AC} üzerinde oluŐturulan yaylar Őst Őste gelirse bunun anlamı, her bir yayın yarıçapının Őgenin dışında bir yerde olacağı anlamına gelir.

İki yayda eşlenik olduğu için, iki yarıçapı da r ile gösteririz. D ve E noktalarının yayların merkezi olsun. Şekil 10'dan eğer $m\angle DAC$ (reflex aı) π den büyük ise, Őst Őste gelme noktasının Őgenin dışında yer aldığı görülür. Bu Őst Őste gelme noktasını $\triangle DAE$ yi \overline{DE} üzerine yansıtarak bulabiliriz. Eğer $m\angle DAC$ π den az ise, Őst Őste gelme noktası Őgenin içine doğru uzanır.



Şekil 6:

Matematiksel olarak, eğer $2\left(\frac{\pi-x}{2}\right) + \frac{\pi}{3} > \pi$ ise, üst üste gelme oluşur.

Gerekli hesaplama yapıldığında, bunun $x < \frac{\pi}{3}$ için sağlandığını buluruz. x ve yayların toplamının merkez açısı 2π olduğu için, merkez açı $\frac{5\pi}{3}$ den küçük olduğu zaman üst üste gelme olduğunu biliyoruz.

Yayların yarım dairelerden büyük olduğu durumda, Konfigürasyon II nin alanı genişletmekte başarısız olduğunu zaten gösterdik.

Bu yüzden, Konfigürasyon II den kaynaklanan yayların merkez açıları, Konfigürasyon II alanı genişletmediği için π den daha azdır. Lemma 10 ile yaylar, yarım dairelerden küçük olduğu zaman bir üst üste gelme olmadığını biliriz.

Şimdi, Konfigürasyon I in tamamlayıcı yaylarında üst üste getirmenin geçleşmediği bir önerme kanıtlayacağız.

Lemma 11. O merkezli bir daire düşünün. Daireyi, bir \overline{RS} sekant çizgisi çizerek iki alana bölelim ve sekant çizgisinin üzerindeki bölgeye A , altındaki bölgeye B diyelim. Eğer A bölgesini saat yönü tersinde R noktasına kadar çevirirsek (Şekil 11), yaylar A yı π den daha fazla çevirmedikçe üst üste gelmez.

İspat: A bölgesini döndürdüğümüz zaman, dairenin onunla birlikte döndüğünü düşünün. Şimdi, O' merkezli ve $\overline{RS'}$ sekantlı yeni bir daireye sahibiz. İki daire ya 0, 1, 2 de kesişir ya da sonsuz noktada kesişir. Daire O ve daire O' , R noktasında kesiştiği için aynı zamanda karşılaşmaz, 0 durumu ve birçok sonsuz kesişme noktası olarak düşünülemez, böylece ya 1 ya da 2 kesişime sahiptir.

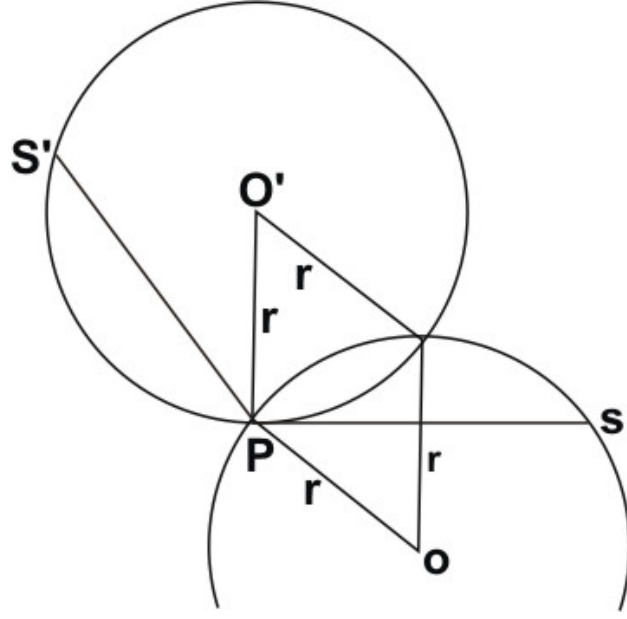
Eğer $m\angle O'RO < \pi$ ise, R noktasını $\overline{O'O}$ üzerine yansıtarak ikinci bir çakışma noktasını bulabiliriz. Bu çakışma noktası RS' deki küçük yayda veya büyük RS deki yayda olmayacağı için bunlar arasında çakışma yoktur. Lemmayı $m\angle O'RO = m\angle S'RS$ (dönüş açısı) olduğunu göstererek tamamlıyoruz.

Konfigürasyon I de, bizim segmentimizi sadece $\frac{\pi}{3}$ ile döndürürüz.

Böylece, Lemma 11 ile tamamlayıcı yaylar üzerinde bir çakışma gerçekleşmediğini anlarız. Konfigürasyon I de $x, y < z$ olduğu için, x ve y yarım daireden küçük yaylar oluşturmaldır. Lemma 10'u kullanarak, x ve y nin çakışmadığını anlarız.

Alan, L nin temel işlevleri açısından yazılamayacağı için, sayısal olarak çözülebilecek eşitlikler elde ederiz. Bu eşitlikler son durum olan

$$\pi + 1 < L < \frac{3\pi}{2} \text{ yi analiz ederken de faydalı olacaktır.}$$



Şekil 7:

Konfigürasyon I: Bütün yayların eşit yarıçapı paylaştığını biliyoruz. γ küçük yaylardan birinin merkez açısı olsun. Eşkenar üçgenin kenar uzunluğu 1 olduğu için,

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \quad (17)$$

olduğunu biliriz.

Ayrıca, yayların ikisi bir daire oluşturduğu ve toplam ip uzunluğu L olduğu için

$$2\pi r + r\gamma = L \quad (18)$$

olduğunu biliriz.

Bölümlerin alanı (eşkenar üçgen olmadan)

$$\pi r^2 + \frac{1}{2} r^2 (\gamma - \sin \gamma) \quad (19)$$

dir.

Eğer (17) yi (18)ve (19)'un yerine kullanırsak

$$\frac{2\pi + \gamma}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = L \quad (20)$$

elde ederiz ve alan açılımı

$$\frac{2\pi + \gamma - \sin \gamma}{4 - 4 \cos \gamma} \quad \text{dir. (21)}$$

Konfigürasyon II .

Konfigürasyon II deki yaylar da eşit yarıçapı paylaşır. θ nın herhangi bir yayın merkez açısı olduğunu düşünün. Eşkenar üçgenin kenar uzunluğu 1 olduğu için

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad (22)$$

olduğunu biliriz.

Ayrıca üç yay eşit olduğu ve ipin toplam uzunluğu L olduğu için,

$$3r\theta = L \quad (23)$$

olduğunu biliyoruz.

Çembersel bölgelerin alanı

$$3 \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin \theta) \quad (24)$$

dır.

(22) 'yi (23) ve (24)'ün yerine kullanırsak

$$\frac{3\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = L \quad (25)$$

elde ederiz ve alan açılımı

$$3 \left(\frac{\theta - \sin \theta}{4 - 4 \cos \theta} \right) \quad (26) \text{ olur.}$$

$L > \frac{3\pi}{2}$ ise, ip Konfigürasyon I e konmalıdır. İlginç olan $L > \frac{3\pi}{2}$ için,

ipi Konfigürasyon I de tutmak için sadece bir yol vardır.

$L > \frac{3\pi}{2}$ (25) için tek çözümü olduğu bilinir. Temel işlemleri kullanarak L açısından γ için çözemememize rağmen, sayısal γ için çözebiliriz.

Konfigürasyon I in $L > \frac{3\pi}{2}$ için alanı genişlettiğini ve Konfigürasyon II nin

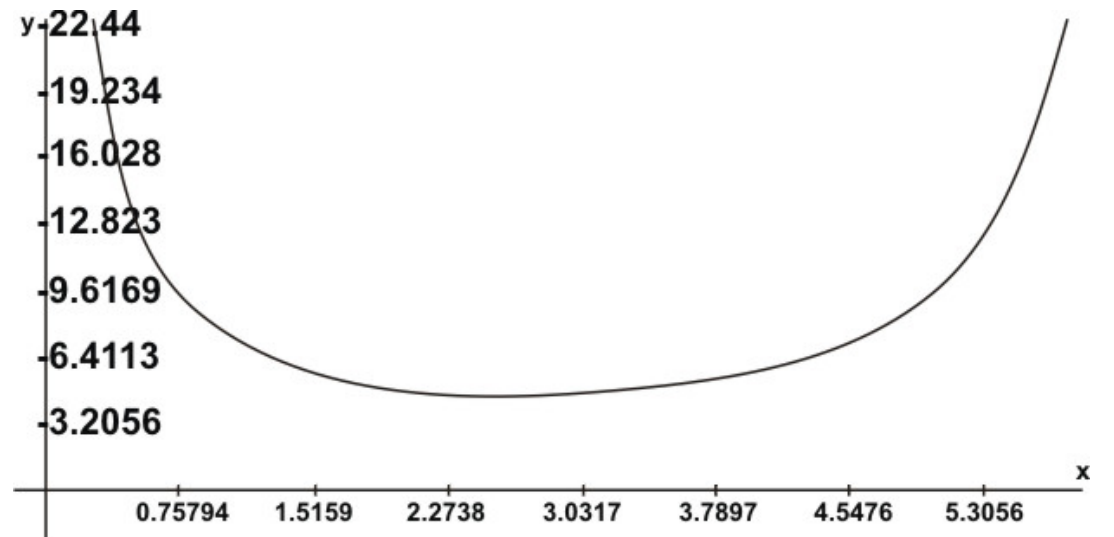
$$3 < L < \pi + 1$$

için alanı genişlettiğini gösterdik. Bazı L için maksimum alan sonucu veren Konfigürasyon I den II ye değişiklik göstermesi mantıklıdır.

$L = \frac{3\pi}{2}$ nin sınır noktası olması beklenebilir. Çünkü $L = \frac{3\pi}{2}$ olduğu zaman eşit ve tamamlayıcı olan yayları alırız. Yine de, grafikleri analiz ederek, Konfigürasyon II nin ne olursa olsun alanı genişlettiğini söyleyebiliriz. Ayrıca, Konfigürasyon I den Konfigürasyon II ye geçişte $\frac{3\pi}{2}$ oluşmadığını söyleyebiliriz.

$$y_1(\gamma) = \frac{2\pi + \gamma}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \text{ grafiğini inceleyelim.}$$

Grafikten:



Şekil 8:

γ için bütün y_1 değerlerini göremeyiz. Aslında, eğer $y < M$ olursa, minimum M değeri vardır, ama $y_1(\gamma) = y$ sonucu yoktur. y_1' e ait payda sıfırdan büyük olduğu için, minimum

$$2 \sin \frac{\gamma}{2} - (2\pi + \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} = 0$$

olduğu zaman görülür. Aralığımızdaki tek çözüm $\gamma = 2.7036336086$ dir. Böylece $M \approx 4.6033388488$ dir.

Konfigürasyon I v e II eşitliğini daha iyi açıklamak için $f(x)$ ve $g(x)$ in iki işlevini tanımlarız.

Tanım 12. $0 \leq x \leq \pi$ için $e(x) = \frac{x}{\sin x}$ dir.

Tanım 13. $f(x)$, $e(x)$ in tersidir.

$f(x)$ işlevimizi kullanarak, (20) ve (25)'i tekrar yazıyoruz.

$$\gamma = 2f(-L) \quad (27)$$

$$\theta = 2f\left(\frac{L}{2}\right) \quad (28)$$

Konfigürasyon I alanını A_1 ile ve Konfigürasyon II alanını A_2 ile ifade ediyoruz.

Eğer $f(x)$ fonksiyonumuzu kullanırsak, (21) ve (26) yı tekrar yazabiliriz.

$$A_1 = \frac{2L + 2 \cos(f(-L))}{-8 \sin f(-L)} \quad (29)$$

$$A_2 = \frac{2L - 6 \cos\left(f\left(\frac{L}{3}\right)\right)}{8 \sin f\left(\frac{L}{3}\right)} \quad (30)$$

$A_1 > A_2$ olduğunu iddia ediyoruz. Grafiksel olarak iddiayı desteklersek

$\pi + 1 < L < \frac{3\pi}{2}$ için

$$\sin\left(f\left(\frac{L}{3}\right)\right) > -\sin(f(-L))$$

olduğunu ispatlarız.

İddia 14. $\pi + 1 < L < \frac{3\pi}{2}$ için $f(\frac{L}{3}) > f(-L) - \pi$ dir.

Bu iddia için grafiksel bir kanıt sağlıyoruz. $f(\frac{L}{3})$ grafiği için, $x = 3\frac{y}{\sin y}$ yi kullanırız.

$f(-L) - \pi$ grafiği için, $x = -\frac{(y + \pi)}{\sin(y + \pi)}$ yi kullanırız.

Hesaplanınca, $L = \frac{3\pi}{2}$ ise,

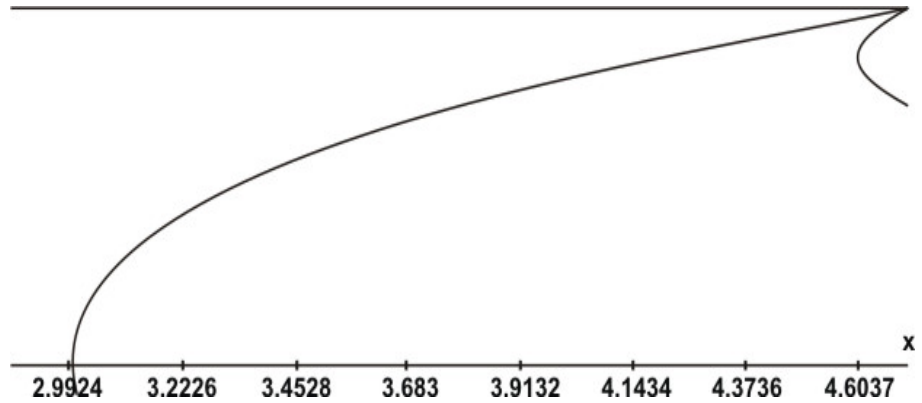
$$f(\frac{L}{3}) = f(-L) - \pi = \frac{\pi}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer bizim varsayımımız doğruysa,

$$\pi + 1 < L < \frac{3\pi}{2} \text{ için } (f(\frac{L}{3})) > -\sin f(-L)$$

olduğunu biliyoruz.

$$p(L) = -6 \cos(f(\frac{L}{3})) - 2(f(-L)) \text{ olsun.}$$



Şekil 9:

$p(L) < 0$ ın $A_1 > A_2$ yi ifade ettiğini biliyoruz. $L = \frac{3\pi}{2}$ de $p(L) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, eğer alan üzerinde $p'(L) > 0$ ise bu doğrudur. Biliyoruz ki;

$$p'(L) = 2f'(\frac{L}{3})\sin(f(\frac{L}{3})) - 2f'(-L)\sin f(-L)$$

dir.

Grafikten, $f(-L)$ için iki dal olduğunu görüyoruz. Bütün sayısal hesaplamalar daha yüksek dalın daha çok alan sonucu verdiğini ve böylece $f(-L) > 0$ olduğunu gösterir. Ayrıca grafik $\sin(f(-L)) < 0$ olduğunu gösterir.

Böylece $2f'(\frac{L}{3}) > 0$ olduğunu gördüğümüz için, grafiklerden $p'(L) > 0$ ve böylece $A_1 > A_2$ olma olasılığı çok yüksek olduğu görülmektedir

BÖLÜM 4

SONUÇ

Bu çalışmada, izoperimetri eşitsizliği, verilen iki nokta ve verilen eşit uzaklıktaki 3 nokta üzerinden geçen sınırlarla verilen şekiller üzerinde gösterdik. Eğer x iki nokta arasındaki uzaklığı simgeliyorsa ve L de ipin uzunluğu anlamına gelirse, $L \geq x\pi$ olduğu zaman, maksimum alanın, ip bir dairenin içinde düzenlendiğinde elde edildiğini kanıtladık. Eğer iki nokta durumundaki sınır alanı, eşit dairesel iki yayın alanından küçükse, iki eşit dairesel yayın $2x \leq L \leq x\pi$ için alanı genişlettiğini kanıtlayabiliriz.

İki nokta için maksimum konfigürasyonu kullanarak, eşkenar üçgenin 3 noktası için bir yayılma gösteriyoruz. İşlemin şekli ya konfigürasyon 1 : 3 eşlenik yay ya da konfigürasyon 2 : 2 eşlenik yay ve daha geniş tamamlayıcı yaydır.

Eğer x üç noktadan herhangi bir iki nokta arasındaki uzaklıksa,

$$3x \leq L \leq (\pi + 1)x$$

için, maksimum alanı konfigürasyon I ile elde ederiz.

Eğer

$$L \geq \frac{3\pi}{2} x$$

ise, maksimum alan sonucunu konfigürasyon II verir.

Grafiksel analiz yardımıyla, konfigürasyon I in $3x \leq L \leq M$ için maksimum alan sonucunu verir ve konfigürasyon II

$L > M$ için $M \approx L,6033388488$ olduğu zaman maksimum alan sonucunu verir.

Bu problem için daha fazla araştırma, grafiksel analizle yapılan iddiaları kanıtlamayı içerir. Eşit uzaklıktaki noktalar için tam bir kanıt sağladıktan sonra, üç nokta durumunu iki nokta uygulama kanıtına benzer bir şekilde, bundan daha fazla izoperimetri eşitsizliği geliştirmek için yararlanabiliriz.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bogomolny, A., 1996-2005, Isoperimetric inequality.

Bogomolny, A., 1996-2005, Line segments and the isoperimetric inequality.

Dergiades, N., 2002, An elementary proof of the isoperimetric inequality, Forum Geometricorum, Volume 2, 129–130.

Jessup, J., 2003, The isoperimetric inequality, Senior Project.

Siegel, A., 2003, A historical review of the isoperimetric theorem in 2-D, and its place in elementary plane geometry, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

Siegel, A., 2003, An isoperimetric inequality for self-intersecting polygons, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

Siegel, A., 2003, An isoperimetric theorem in plane geometry, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

Treibergs, A., 2002, Inequalities that imply the isoperimetric inequality, University of Utah.

Yang, D., 2004, Pointed isoperimetric inequalities, Research Science Institute.