Lie Cebirler Üzerinde İndirgenmiş ve Geri Çekme Çaprazlanmış Modüller

Elif Şirvan

YÜKSEK LİSANS
Matematik Anabilim Dalı
Haziran 2007

Induced and Pullback Crossed Modules Over Lie Algebras

Elif Şirvan

MASTER OF SCIENCE DISSERTATION
Department of Mathematics
June 2007

Lie Cebirler Üzerinde İndirgenmiş ve Geri Çekme Çaprazlanmış Modüller

Elif Şirvan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Haziran 2007

Elif Şirvan' ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " **Lie Cebirler Üzerinde İndirgenmiş ve Geri Çekme Çaprazlanmış Modüller**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

...../...../ 2007

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK (Danışman)

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Yrd. Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye: Yrd. Doç. Dr. E. Önder USLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

Lie Cebirler Üzerinde İndirgenmiş ve Geri Çekme Çaprazlanmış Modüller

Elif Şirvan

ÖZET

Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri üzerinde hazırlanan bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde kısa bir giriş verilmiştir.

İkinci bölümde cebirler ve Lie cebirlerinin çaprazlanmış modül kavramının bazı özellikleri verilerek Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kategorisi oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde ise Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüller kategorisinde Lie cebirlerinin morfizimlerinden indirgenmiş kısıtlama (veya pullback) funktorunun bir sol eşleği inşa edilmiştir. Özel olarak, Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüller kategorisinde colimitler ve ι bir idealin gömme fonksiyonu olmak üzere $\iota : P \to Q$ Lie cebirlerinin morfizmininden indirgenmiş çaprazlanmış modül elde edilmiştir.

Induced and Pullback Crossed Modules Over Lie Algebras

Elif Şirvan

SUMMARY

This thesis based on crossed modules of Lie algebras consist of three chapters. In the first chapter, we give a short introduction.

In the second chapter, we recall the elementary properties of crossed modules of algebras and Lie algebras.

In the third chapter, a left adjoint is constructed for the restriction (or pullback) functor associated to a morphism of Lie algebras in the category of crossed modules in Lie algebras. Colimits in the category of crossed modules in Lie algebras and result on crossed modules induced by a morphism of Lie algebras $\iota : P \to Q$ in the case where ι is the inclusion of an ideal, are obtained.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Hocam, Sayın;

Prof. Dr. Mahmut KOÇAK' a

bu vesileyle şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Grupların çaprazlanmış modülleri 1949 yılında Whitehed (Whitehead, 1949) tarafından relatif homotopi grupları çalışmak amacıyla verilmiştir. Cebirlerin ve Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri cebir, Lie cebirleri ve evrensel envolopin cebirleri üzerinde modüllerin bir genellemesi olup birer cebirsel objedir. Bunlar Lavendhomme ve Roisin (Lavendhomme and Roisin, 1980) tarafından T, K-Lie cebiri iken bir T-cebirinin abelyen olmayan katsayıları incelenirken kullanılmıştır. Kassel ve Loday (Kassl and Loday, 1982) birleşmeli cebirin devirli homolojini incelemek için kullanmıştır. Ayrıca Guin (Guin, 1995) bir Lie cebirinin abelyen olmayan (co)homolojisi ve devirli homoloji ve değişmeli olmayan bir halkanın Milnor toplamsal K-teorisini çalışmak için kullanmıştır.

Bu tezde önce cebirlerin çaprazlanmış modülleri verilerek bazı özellikleri incelenecektir. Daha sonra da Lie cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve bazı özellikleri incelenerek Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin $\mathcal{CM}$ kategorisi oluşturulacaktır.

Bu tezin son bölümünde $\lambda : G \to H$ Lie cebirlerinin bir homomorfizmi ise $\mathcal{CM}_G$, $\mathcal{CM}$ nin G-çaprazlanmış modüllerden oluşan alt kategorisi olmak üzere bir $\lambda^* : \mathcal{CM}_H \to \mathcal{CM}_G$ pullback veya kısıtlama funktoru olduğu gösterilerek λ^* funktoruna sol eşlek olan λ_* funktoru oluşturulacaktır. Çaprazlanmış gruplar kategorisi ve değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüller kategorisi için benzer sonuçlar sırasıyla (Brown and Higgins, 1978) ve (Porter, 1978) de verilmiştir. Bir G-modülünün λ^* altındaki görüntüsüne indirgenmiş çaprazlanmış modül denir. P bir ideal ve $\iota : P \to Q$ doğal gömme fonksiyonu olmak üzere indirgenmiş çaprazlanmış modül üzerinde bazı sonuçlar verilecektir. Ana sonuç P ve M nin Q nun ideali olması halinde $\iota_* M$ nin belirlenmesidir. Grupların çaprazlanmış modülleri üzerinde benzer sonuç için (Brown and Wensley, 1996) e bakınız.

BÖLÜM 2

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde önce cebirler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ve çaprazlanmış modüllerin bazı özelliklerini verelim. Daha sonra da Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ve çaprazlanmış modüllerin bazı özelliklerini verelim.

2.1 Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 2.1 R bir halka olsun. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{array}{c} R \times M \to M \\ (r, m) \mapsto rm \end{array}$$

çarpımı ile

$$\begin{array}{l} r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2 \\ (r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m \\ (r_1 r_2)m = r_1(r_2 m) \end{array}$$

şartlarını sağlayan bir M toplamsal abelyen gruba sol R-modül denir. Çarpım

$$\begin{array}{c} M \times R \to M \\ (m, r) \mapsto mr \end{array}$$

şeklinde sağdan tanımlı ise M toplamsal abelyen gruba sağ R-modül denir.

Örnek 2.1 R bir halka olmak üzere, herhangi bir A abelyen grubu $r \in R$, $a \in A$ için

$$\begin{array}{c} R \times A \to A \\ (r, a) \mapsto ra = 0 \end{array}$$

tanımlaması ile bir R-modül yapısı oluşturur.

Tanım 2.2 R ve S iki halka olsun. Bir M abelyen grubu hem sol R-modül hem de sağ S-modül ve her $r \in R$, $m \in M$ ve $s \in S$ için

$$r(ms) = (rm)s$$

özelliğini sağlıyor ise M ye $(R\text{-}S)$-bimodül denir ve ${}_R M_S$ olarak gösterilir.

Örnek 2.2 R halkasının kendisi bir $(R\text{-}S)$-bimodüldür. R halkası asosyatiflik şartını sağladığından istenilen elde edilir.

Tanım 2.3 R bir birimli bir hakla, M bir R-modül olmak üzere her $m \in M$ için $1_R m = m$ ise M ye birimli R-modül denir.

Örnek 2.3 Her G toplamsal abelyen grup bir birimli $\mathbb{Z}$-modüldür.

Tanım 2.4 M ve N iki R-modül olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu her $x,\ y \in M$ ve $r \in R$ için

i). $f(x+y) = f(x) + f\left(y\right)$

ii). $f(rx) = rf(x)$

şartlarını sağlıyor ise f ye bir R-modül homomorfizmi denir.

Tanım 2.5 M bir R-modül olsun. $M',\ M$ nin alt grubu olmak üzere

$m' \in M$ ve her $r \in R$ için $rm' \in M'$ ise M' ye M nin bir alt modülü denir.

Örnek 2.4 $f : M \to N$ bir R modül homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\ker f = \{m \in M : f(m) = 0\}$$

M nin alt modülüdür. Çünkü; $\ker f$, M nin bir alt grubu ve $m \in M,\ r \in R$ için

$$f(rm) = rf(m) = r0 = 0$$

olduğundan $rm \in \ker f$ dir. Ayrıca

$$f(M) = \{n \in N \mid n = f(m), m \in M\}$$

de N nin bir alt modülüdür. Çünkü; $f(M)$, N nin alt grubu ve $n \in f(M),\ r \in R$ için

$$nr = f(m)r = f(mr)$$

ve M bir R-modül olduğundan $mr \in M$ dir. Dolayısıyla $nr \in f(M)$ elde edilir.

Tanım 2.6 k bir değişmeli halka olsun. Bir M, **k**-cebir (k üzerinde bir M cebiri)

$$\begin{array}{l} M \times M \to M \\ (m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2 \\ (m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3) \end{array}$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir **k**-modüldür.

Tanım 2.7 R, bir **k**-cebir ise R üzerinde A cebiri

$$\begin{aligned} &A \times A \longrightarrow A \\ &(a_1, a_2) \longmapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

ve

$$(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir R-modüldür.

Örnek 2.5 Her halka bir $\mathbb{Z}$ cebirdir. Çünkü her R halkası bir toplamsal abelyen grup olduğundan bir $\mathbb{Z}$-modüldür ve $k \in K$, $r_1,\ r_2 \in R$ için

$$k(r_1 r_2) = (k r_1) r_2 = r_1 (k r_2)$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla R bir $\mathbb{Z}$-cebirdir.

Tanım 2.8 A bir R-cebir, $\emptyset \neq B \subset A$ olmak üzere $b,\ b' \in B,\ r \in R$ için $bb' \in B, b - b' \in B$, $br \in B$ ve $rb \in B$ ise B ye A nın alt cebiri denir. Aynı zamanda B de bir R-cebirdir.

Tanım 2.9 M ve R, **k**-cebirler olmak üzere

$$\begin{aligned} &R \times M \longrightarrow M \\ &(r, m) \longmapsto r.m \end{aligned}$$

dönüşümü her $k \in K$, $m, m' \in M$, $r, r' \in R$ için

i). $k(m.r) = (kr).m = r.(km)$

ii). $r.(m + m') = r.m + r.m'$

iii). $(r + r').m = r.m + r'.m$

iv). $r.(mm') = (r.m)m' = m(r.m')$

v). $(rr').m = r(r'.m)$

şartlarını sağlıyor ise bu dönüşüme bir sol etki (action) denir. $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r.m$ ile gösterilir. Benzer şekilde sağ etkide tanımlanır ve $m.r$ ile gösterilir.

Tanım 2.10 M bir **k**-cebir ve $n \geq 2$ için $M_1,\ M_2, \cdots,\ M_n$, M nin alt cebirleri olsun.

i). $1 \leq s \leq n$ için $M_1 + M_2 + \cdots + M_s$, M nin bir ideali

ii). $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M$

iii). $(M_1+M_2+\cdots+M_s)\cap M_t=0,\ \ 1\le s<t\le n$

şartlarını sağlayan M, **k**-cebirine $M_1,M_2,\cdots,M_n$ nin bir n-yarı dirkt çarpımı denir ve $M=M_1\bowtie M_2\bowtie\ldots\bowtie M_n$ ile gösterilir. Yarı direkt çarpımın herhangi bir elemanı $m_i\in M_i$ için $m_1+\cdots+m_n$ şeklinde tek türlü ifade edilir.

Tanım 2.11 R-birimli bir **k**-cebir ve

$$\partial : C\to R$$

bir R-cebir morfizmi olsun.

$$\begin{array}{c} R\times C\to C \\ (r,c)\mapsto r.c \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{c} C\times R\to R \\ (c,r)\mapsto c.r \end{array}$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c,c'\in C$ ve $r\in R$ için

ÇM1).

$$\begin{array}{c} \partial(r,c)=r\partial(c) \\ \partial(c,r)=\partial(c)r \end{array}$$

ÇM2).

$$\begin{array}{c} \partial c.c'=cc' \\ c.\partial c'=cc' \end{array}$$

şartlarını sağlıyor ise R üzerinde C cebirine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve (C,R,∂) ile gösterilir.

Tanım 2.12 (C,R,∂) ve (C',R',∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{array}{c} \theta(r.c)=\psi(r).\theta(c) \\ \theta(c.r)=\theta(c).\psi(r) \end{array}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\psi"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif yani

$$\partial'\theta(c)=\psi\partial(c)$$

olacak şekilde $\theta : C\to C'$ ve $\psi : R\to R'$, **k**-cebir morfizimleri varsa

$$(\theta,\psi):(C,R,\partial)\to(C',R',\partial')$$

ye çaprazlanmış modüller arasındaki morfizim denir. O halde $R = R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, θ bir R-cebir morfizmi olduğundan $\theta(r.c) = r\theta(c)$ dir ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ R & \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif olduğundan yani

$$\partial'\theta(c) = \partial(c)$$

sağlandığından θ bir çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

Örnek 2.6 R bir **k**-cebir ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{array}{c} i : I \to R \\ i \mapsto i \end{array}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{l} R \times I \to I \\ (r, i) \mapsto r.i = ri \end{array}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1).} & \partial(r.i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i) \\ \text{ÇM2).} & \partial i.r' = i.i' = ii' \end{array}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla (I, R, i) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.7 M herhangi bir R-modül olsun.

$$\begin{array}{l} M \times M \to M \\ (m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2 = 0 \end{array}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{array}{c} 0 : M \to R \\ x \mapsto 0(x) = 0 \end{array}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi

$$\begin{array}{c} R \times M \to M \\ (r, m) \mapsto r.m = rm \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1).} & 0(r.m) = 0(rm) = 0 = r0 = r0(m) \\ \text{ÇM2).} & 0m.m' = 0.m' = 0m' = 0 = mm' \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 2.8 L ve M birer R-modül ve

$$\theta : L \to M$$

R-modüllerin bir morfimi olsun. $R \bowtie M$ yarı direkt çarpımı

$$(r,m)(r',m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda L, her $l, l' \in L$ için

$$l.l' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$\begin{aligned} R \times M &\to R \\ (r,m) &\mapsto r \end{aligned}$$

şeklinde izdüşüm (projection) yoluyla bir $R \times M$ modül yapısı verildiğinde

$$\begin{aligned} \theta : L &\to R \times M \\ l &\mapsto (0, \theta(l)) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R \times M$ modül yapısı oluşturur.

$$\begin{aligned} &(R \times M) \times L \to L \\ &((r,m), l) \mapsto (r,m).l = rl \end{aligned}$$

şeklinde fonksiyonu etki fonksiyonu ile birlikte

$$\theta : L \to R \times M$$

fonksiyonu

$$\text{ÇM1).}\quad \begin{aligned} \theta((r,m).l) &= \theta(rl) && \text{(etki tanımından)} \\ &= (0, \theta(rl)) && (\theta \text{ tanımından}) \\ &= (0, r\theta(l)) && (\theta,\ R\text{-modül morfizmi}) \\ &= (r0, (r\theta(l) + 0m)) && \\ &= (r,m)(0,\theta(l)) && \text{(yarı direkt çarpım tanımı)} \\ &= (r,m)\theta(l) && (\theta \text{ tanımından}) \end{aligned}$$

$$\text{ÇM2).}\quad \begin{aligned} \theta l.l' &= (0, \theta(l)).l' && (\theta \text{ tanımından}) \\ &= 0l' && \text{(etki tanımından)} \\ &= 0 && \\ &= ll' && (L \text{ de sıfır çarpımdan }) \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlar. Bu örnekte sol etki kullanılmıştır. Çaprazlanmış modül aksiyomları benzer şekilde sağ etki kullanılarakda sağlanır.

Önerme 2.13 (C, R, ∂) bir çaprazlanmış R-modül olmak üzere,

i). $\ker\partial$, C nin bir merkez idealidir ve R üzerinde bir modüldür.

ii). $\partial(C), R$ de bir idealdir. Ayrıca, R nin bu ideali, $\ker\partial$ üzerinde sıfır olarak (trivally) etki eder ve $\ker\partial$ bir $R/\partial(C)$-modül yapısı oluşturur.

iii). C/C^2 ve $\partial C/\partial C^2$, birer $R/\partial(C)$-modül yapısı oluştururlar.

İspat. i). $a \in \ker\partial$ ve $c \in C$ için

$$\begin{array}{l} \partial(ca) = \partial(c)\partial(a) = \partial(c)0 = 0 \quad \text{ve} \\ \partial(ac) = \partial(a)\partial(c) = 0\partial(c) = 0 \end{array}$$

olduğundan $ca,\ ac \in \ker\partial$ elde edilir. Ayrıca

$$ac = \partial a.c = 0c = c0 = c.\partial a = ca$$

olduğundan $\ker\partial,\ C$ nin merkezindedir.

$\ker\partial$ nin bir R-modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{c} R \times \ker\partial \longrightarrow \ker\partial \\ (r, a) \longmapsto r.a \end{array}$$

dönüşümü, R nin C üzerine etki fonksiyonu olan

$$\begin{array}{c} R \times C \longrightarrow C \\ (r, c) \longmapsto r.c \end{array}$$

ile uyumlu olmak üzere, etki şartları her $a \in \ker\partial \subset C$ içinde geçerli olacağından, $\ker\partial$ bir R-modül yapısı oluşturur.

ii). $\partial(C)$ nin R de bir ideal olduğunu gösremek için, $\partial(c)$ nin R ile çarpım altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. (C, R, ∂) çaprazlanmış modül olduğundan,

$$\begin{array}{c} R \times C \longrightarrow C \\ (r, c) \longmapsto r.c \end{array}$$

etki fonksiyonu gereğince, $r.c \in C$ ve $\partial(r.c) \in \partial(C)$ dir. Ayrıca, $\partial c \in \partial(C)$ ve $r \in R$ için,

$$r\partial c = \partial(r.c) \in \partial(C)$$

eşitliği geçerlidir. Benzer olarak

$$\partial c r = \partial(c.r) \in \partial(C)$$

bulunur. Dolayısıyla, $\partial(C),\ R$ de bir idealdir.

$\partial(C)$ nin $\ker\partial$ üzerine sıfır etkisi, $a \in \ker\partial$, $\partial c \in \partial C$ için

$$\partial ca = ca = c\partial(a) = c0 = 0$$

ve benzer olarak

$$a\partial c = ac = \partial(a)c = 0c = 0$$

şeklinde görülür. Böylece

$$\begin{gathered} R/\partial(C) \times \ker\partial \to \ker\partial \\ (r+\partial c, a) \mapsto (r+\partial c).a = ra \end{gathered}$$

fonksiyonu yardımı ile $\ker\partial$ nin bir $R/\partial(C)$-modül yapısı oluşturduğu görülür. Etki fonksiyonunun tanımı ve $\ker\partial$ nin bir R-modül olması kullanılarak

a).

$$\begin{aligned} (r+\partial c)(a_1+a_2) &= r(a_1+a_2) \\ &= ra_1 + ra_2 \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned} ((r_1+\partial c)+(r_2+\partial c))a &= ((r_1+r_2)+\partial c)a \\ &= (r_1+r_2)a \\ & ra_1 + ra_2 \end{aligned}$$

c).

$$\begin{aligned} ((r_1+\partial c)+(r_2+\partial c))a &= (r_1r_2+\partial c)a \\ &= (r_1r_2)a \\ &= (r_1+\partial c)r_2a \\ &= (r_1+\partial c)((r_2+\partial c)a) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

(iii). ∂C nin C/C^2 üzerine etkisini inceleyelim. $b,\ c \in C$ ve $c + C^2 \in C/C^2$, için $x = \partial b \in \partial C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(c+C^2) &= xc + C^2 \\ &= \partial bc + C^2 \\ &= bc + c \end{aligned}$$

elde edilir. $bc \in C^2$ ve $C^2/C^2 \cong \{\overline{0}\}$ olduğundan bu ifade sıfırı verir. Dolayısıyla, ∂C nin C^2/C^2 üzerine etkisi sıfırdır. Böylece

$$\begin{gathered} R/\partial(C) \times C/C^2 \to C/C^2 \\ (r+\partial c, c+C^2) \mapsto (r+\partial c).(c+C^2) = rc + C^2 \end{gathered}$$

fonksiyonu ile

a).

$$\begin{aligned} (r+\partial c)(c_1+C^2+c_2+C^2) &= (r+\partial c)((c_1+c_2)+C^2) \\ &= r(c_1+c_2)+C^2 \\ &= (rc_1+rc_2)+C^2 \\ &= c_1+C^2+c_2+C^2 \\ &= (r+\partial c)(c_1+C^2)+(r+\partial c)(c_2+C^2) \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}((r_1+\partial c)+(r_2+\partial c))(c+C^2) &= ((r_1r_2)+\partial c)(c+C^2)\\ &= (r_1r_2)c+C^2\\ &= r_1(r_2c)+C^2\\ &= (r_1+\partial c)(r_2c+C^2)\\ &= (r_1+\partial c)((r_2+\partial c)(c+C^2))\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından, ∂C bir $R/\partial(C)$-modüldür.

Benzer düşünce ile $\partial C/\partial C^2$ nin $R/\partial(C)$-modül olduğu gösterilir. □

2.2 Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 2.14 R değişmeli halka, A, B ve G birer R-modül olmak üzere $f : A\times B \to G$ fonksiyonu

i). $f(a+a',b) = f(a,b)+f(a',b)$

ii). $f(a,b+b') = f(a,b)+f(a,b')$

iii). $rf(a,b) = f(ra,b) = f(a,rb)$

şartlarını sağlıyor ise f ye R-bilineer denir.

Tanım 2.15 A birimli ve değişmeli halka ve M de bir A-modül olsun. Eğer her $x,\ y,\ z \in M$ için

i). $[x,x] = 0$

ii). $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = 0$

özelliklerini sağlayan bir $[,] : M\times M \to M$ iki lineer (bilineer) fonksiyonu varsa M ye A üzerinde bir Lie cebiri denir. $[,]$ fonksiyonuna Lie braketi yada çarpımı ve (ii) deki özelliğe jakobi özdeşliği denir. İki linerlik özelliği ve (i) gereğince

$$0 = [x+y,x+y] = [x,y]+[y,x]$$

olduğundan

iii). $[x,y] = -[y,x]$ ve

iv). $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$ olduğu gösterilir. (Amoya, 1974)

Örnek 2.9 M, A üzerinde bir cebir olsun. $[,] : M \times M \to M$ fonksiyonu

$$[x,y] = xy - yx$$

şeklinde tanımlansın. $[,]$ fonksiyonun iki lineer olduğunu gösterelim.

i).

$$\begin{aligned} [x,x] &= xx - xx \\ &= 0 \end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned} [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\ &= x(yz - zy) - (yz - zy)x + (xy - yx)z \\ &\quad -(zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece M, $[,]$ ile birlikte Lie cebiridir.

Tanım 2.16 M bir Lie cebiri olsun. Her $x,y \in M$ için $[x,y] = 0$ oluyorsa M ye abelyen Lie cebiri denir. (Amoya 1974)

Tanım 2.17 M_1 ve M_2, A üzerinde iki Lie cebiri ve $\partial : M_1 \to M_2$ bir A modül homomorfimi olsun. Her $x,\ y \in M$ için $\partial([x,y]) = [\partial(x), \partial(y)]$ ise ∂ ye bir Lie cebir homomorfizmi denir. Eger ∂ bir Lie cebir homorfizmi ve birebir örtense ∂ ye bir Lie cebir izomorfizmi denir. Bu durumda M_1 ve M_2 ye izomorfiktirler denir. (Casas, 1990)

Tanım 2.18 L bir Lie cebiri ve $K \subseteq L$ olsun. Her $x,y \in K$ için $[x,y] \in K$ ve K, L nin alt modülü oluyorsa K ya L nin Lie alt cebiri denir.

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelliştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka $(cebir)$ bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genellemesi olarak görülebilir. Şimdi **k** sıfırdan farklı birimli olan değişmeli halka olmak üzere, T. Porter tarafından (Porter, 1986) de verilen **k**-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim.

Tanım 2.19 M ve G iki Lie **k**-cebirler olmak üzere M üzerinde G nin Lie etkisi aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g,m) &\mapsto g.m \end{aligned}$$

dönüşümüdür. (Norrie, 1987) Her $k \in K$, $m, m' \in M$, $g, g' \in G$ için i). $k(g.m)=(kg).m=g.(km)$

ii). $g.(m+m')=g.m+g.m'$

iii). $(g+g').m=g.m+g'.m$

iv). $[g,g'].m=g(g'.m)-g'(g.m)$

v). $g.[m,m']=[g.m,m']+[m,g.m']$

Tanım 2.20 G ve M iki Lie **k**-cebir olsun.

$$\mu: M \to G$$

bir G cebir morfizmi ve

$$\begin{aligned} G\times M &\to M \\ (g,m) &\mapsto g.m \end{aligned}$$

G nin M üzerine Lie etkisi ile birlikte her $m,m'\in M$ ve $g\in G$ için

ÇM1). $\mu(g,m)=[g,\mu(m)]$

ÇM2). $\mu(m).m'=[m,m']$

şartlarını sağlıyorsa $(M,\ G,\ \mu)$ üçlüsüne Lie çaprazlanmış (crossed) G-modül denir. Sadece (ÇM1) aksiyomunu sağlanıyorsa $(M,\ G,\ \mu)$ üçlüsüne ön çaprazlanmış (crossed) G-modül denir. (ÇM2) özelliğinede Peiffer özdeşliği denir. (Norrie 1987)

Örnek 2.10 R bir Lie cebiri ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{aligned} \partial: R &\to R \\ i &\mapsto i \end{aligned}$$

içine dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{aligned} R\times I &\to I \\ (r,i) &\mapsto [r,i] \end{aligned}$$

şeklinde Lie çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

ÇM1).

$$\begin{aligned} \partial(r,i) &= \partial[r,i] \\ &= [r,i] \\ &= [r,\partial i] \end{aligned}$$

ÇM2).

$$\begin{aligned} \partial r_{r'} &= r_{r'} \\ &= [r,r'] \end{aligned}$$

olduğundan dolayı (I,R,∂) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.11 $M,$ herhangi bir G-bimodül olsun.

$$\begin{gathered} M\times M \to M \\ (m_1,m_2)\mapsto [m_1,m_2]=0 \end{gathered}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir Lie G-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} &0: M\to R \\ &x\mapsto 0(x)=0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen verilen sıfır morfizminin

$$\begin{aligned} &G\times M\to M \\ &(g,m)\mapsto g.m=gm \end{aligned}$$

etkisi ile birlikte çaprazlanmış modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

ÇM1).

$$0(r,m)=0[r,m]=0=[r,0m]$$

ÇM2).

$$\partial m_{m'}=0m'=0=[m,m']$$

olduğundan dolayı $(M,G,0)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.12 M bir Lie G-cebir ve

$$\pi_2: M\to G$$

ikinci izdüşüm fonksiyonu bir Lie G-cebir morfizmidir. G nin $G\bowtie M$ üzerinde Lie etkisi $g'\in G$ ve $(g',m)\in G\bowtie M$ için

$$g'(m,g)=(g'm,[g',g])$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(G\bowtie M,G,\pi_2)$ bir ön çaprazlanmış modüldür. Genellikle $(G\bowtie M,G,\pi_2)$ bir çaprazlanmış modül değildir.

Şimdi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.21 $(M,\ G,\ \mu)$ ve $(M',\ G',\ \mu')$ iki Lie çaprazlanmış modül (çaprazlanmış ön modül) olsun.

$$f(g.m) = \phi(g).f(m)$$

ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & M' \arrow[d, "\mu'"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\mu' f(m) = \phi\mu(m)$$

olacak şekilde $f : M \longrightarrow M'$, $\phi : G \longrightarrow G'$ Lie G-Cebir morfizimleri varsa

$$(f,\phi) : (M,G,\mu) \to (M',G',\mu')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizim denir. Eğer f ve ϕ örtense $(f,\ \phi)$ ye örten, f ve ϕ bire bir ise $(f,\ \phi)$ ye bire bir denir. f, ϕ izomorfizma ise yani f ve ϕ birebir örtense

$$(f,\phi) : (M,G,\mu) \to (M',G',\mu')$$

morfizmine izomorfizm denir. Bu durumda

$$(f,\phi)^{-1} = (f^{-1},\phi^{-1}) : (M',G',\mu') \to (M,G,\mu)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve

$$(f,\phi)^{-1}(f,\phi) = (I_d, I_d) = (f,\phi)(f,\phi)^{-1}$$

dir.

Birleşim işlemi morfizimlerin bileşkesi ve birim morfizm

$$(Id_M, Id_G) = (1,1)$$

olmak üzere çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulur ve bu kategori $\mathcal{CM}$ (ön çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathcal{PCM}$) ile gösterilir. Özel olarak $G = G'$ ve ϕ birim dönüşüm ise, f bir Lie G-Cebir morfizmi olduğundan

$$f(gm) = gf(m)$$

dir ve diyagram değişmeli olduğundan, yani

$$\mu' f(m) = \mu(m)$$

sağlandığından, f bir çaprazlanmış Lie G-modül morfizmidir. G üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış Lie G-modül morfizmi olduğundan $\mathcal{CM}$ nin bir alt kategorisi elde edilir ve bu kategori $\mathcal{CM}_G$ ile gösterilir. (Casas 1990)

Örnek 2.13 $(f,I):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi ise (M,M',f) bir çaprazlanmış modüldür. Burada M' nün M ye etkisi μ' yardımıyladır. Yani $m'\in M'$ ve $m\in M$ için

$$m'm = \mu'(m')m$$

dir.

2.3 Çaprazlanmış Alt Modüller

Genel olarak bir matematiksel yapının alt yapıları ilgili alandaki çalışmalarda önemli yer tutar. Bir grubun (normal) alt grubu, bir cebrin alt cebiri, ideali, bir topolojik uzayın alt uzayı gibi. Benzer olarak, bir çaprazlanmış modülün, alt çaprazlanmış modülü, ideali ve bölüm çaprazlanmış modülü gibi kavramlar da çaprazlanmış modüllerle ilgili çalışmalarda önem kazanır. (Shammu, 1992) da $\mathcal{CM}_G$ de bunlara yer veilmiştir.

Tanım 2.22 $(G,\ M,\ \mu)$ bir çaprazlanmış modül olsun. M', M nin ve G', G nin bir alt Lie cebiri olmak üzere,

$$\mu' : \mu\,|_{M'} : M' \to G'$$

μ nin M' ye kısıtlanmışı ve G' nün M' ne etkisi G nin M üzerine etkisinin kısıtlanmışı olmak üzere (M',G',μ') çaprazlanmış modülüne (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü denir ve $(M',G',\mu')\leqslant(M,G,\mu)$ şeklinde gösterilir. (Casas 1990)

Örnek 2.14 A, G Lie cebirinin bir alt Lie cebiri olsun. Bu durumda (A,A,I_{dA}), $(0,A,i)$, (G,G,I_{dG}) ve $(0,G,i)$ birer çaprazlanmış modüldür. Üstelik, (A,A,I_{dA}), (G,G,I_{dG}) nin bir çaprazlanmış modülü ve $(0,A,i)$ de $(0,G,i)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür. (Casas 1990)

Örnek 2.15 I, G Lie cebirinin herhangi bir ideali olmak üzere (I,G,i), (G,G,I_d) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur. (Casas 1990)

Örnek 2.16 A ve B, G nin ideali, $B \subseteq A$ olmak üzere (B, A, i), (A, G, i) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur. (Casas 1990)

Örnek 2.17 A, G-modül, B, A içinde R-alt modül olmak üzere $(B, G, 0)$, $(A, G, 0)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur. (Casas 1990)

2.4 Çaprazlanmış İdeal

Tanım 2.23 (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün (M', G', μ') alt çaprazlanmış modülü olmak üzere

i). G', G cebirinin bir idealidir, yani $G' \trianglelefteq G$

ii). Her $g \in G$ ve $m' \in M'$ için $g.\ m' \in M'$

iii). Her $g' \in G'$ ve $m \in M$ için $g'.\ m \in M'$

şartını sağlıyorsa (M', G', μ') alt çaprazlanmış modülüne, (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün ideali denir ve $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ şeklinde gösterilir. Eğer $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ ise her $m \in M$ ve $m' \in M'$ için

$$[m, m'] = \mu(m).m' \in M'$$

olduğundan M', M nin bir idealidir. (Casas 1990)

Örnek 2.18 I, G Lie cebirinin bir ideali olmak üzere $(I,\ I,\ I_d)$, $(G,\ G, I_g)$ nin ve $(0, I, i)$ de $(0, G, i)$ nin birer çaprazlanmış idealidir. (Casas 1990)

Önerme 2.24 $(M', G', \mu') \leq (M'', G'', \mu'') \leq (M, G, \mu)$ şeklindeki alt çaprazlanmış modüller için (M', G', μ'), (M, G, μ) nin ideali ise (M', G', μ'), (M'', G'', μ'') nün idealidir. (Casas 1990)

İspat. i). $g \in G$, $g' \in G'$, $g'' \in G''$, $m \in M$ ve $m' \in M'$ için $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ olduğundan $G' \trianglelefteq G$ olur ve $G' \leq G'' \leq G$ olduğundan $[g', g''] \in G'$ olup, $G' \trianglelefteq G''$ olur.

ii). $(M', G', \mu') \trianglelefteq (M, G, \mu)$ olduğundan $g m' \in M'$ olur ve $G'' \leq G$ olduğundan $g'' m' \in M'$ sağlanır.

iii). $g m' \in M'$ ve $M' \leq M'' \leq M$ olduğundan $g' m'' \in M'$ olur.

Böylece $(M',G',\mu') \trianglelefteq (M'',G'',\mu'')$ elde edilir. $\square$

2.5 Bölüm Çaprazlanmış Modül

Tanım 2.25 (M',G',μ'), (M,G,μ) nin bir ideali olsun. Bu durumda G, M/M' üzerine etki eder. G' nün M/M' üzerine etkisi ise

$$\begin{gathered} G' \times M/M' \to M/M' \\ (g',(m+M')) \mapsto g'.(m+M') \end{gathered}$$

olmak üzere

$$g'.(m+M') = g'.m + M'$$

ve $g'm \in M'$ olduğundan sıfırdır. Dolayısıyla, G/G' bölüm Lie cebiri M/M' üzerine

$$\begin{gathered} G/G' \times M/M' \to M/M' \\ ((g+G'),(m+M')) \mapsto g.m + M' \end{gathered}$$

şeklinde etki eder ve bu etki bir Lie etkisidir.

$$\begin{gathered} \overline{\mu} : M/M' \to G/G' \\ (m+M') \mapsto \mu(m) + G' \end{gathered}$$

bölüm dönüşümü bir Lie cebir homomorfizmidir. Böylece bu dönüşüm ve etki fonksiyonuna göre

$$(M/M', G/G', \overline{\mu}) = \frac{(M,G,\mu)}{(M',G',\mu')}$$

Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturur ve buna bölüm çaprazlanmış modül denir. (Casas 1990)

Örnek 2.19 G', G nin ideali olmak üzere,

$$\frac{(0,G,i)}{(0,G,i)} = (0, G/G', i)$$

ve

$$\frac{(G,G,Id)}{(G,G,Id)} = (G/G', G/G', Id)$$

şeklinde bölüm çaprazlanmış modülleri elde edilir. (Casas 1990)

2.6 Çaprazlanmış Modüllerin Direkt Çarpımı

Tanım 2.26 $(S,\ H,\ \mu)$, (M,G,μ') çaprazlanmış modüller, $S\times M$ ve $H\times G$ Lie cebirlerin direkt çarpımı olmak üzere

$$\begin{gathered} \mu\times\mu' : S\times M \to H\times G \\ (s,m) \mapsto (\mu(s),\mu'(m)) \end{gathered}$$

dönüşümü ve

$$(H \times G) \times (S, M) \to S \times M$$
$$((h,g),(s,m)) \mapsto (h,g).(s,m) = (h.s, g.m)$$

şeklinde verilen çaprazlanmış modüllerin indirgenen Lie etkileriyle birlikte,

$$(S \times M, H \times G, \mu \times \mu')$$

çaprazlanmış modülünü oluşturur. Bu modüle $(S,\ H,\ \mu)$ ve (M, G, μ') çaprazlanmış modüllerinin direkt çarpımı denir ve $(S,\ H,\ \mu) \times (M, G, \mu')$ ile gösterilir. (Casas 1990)

2.7 Çaprazlanmış Modüllerin Çekirdeği ve Görüntüsü

Tanım 2.27 $(f, \phi) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\mu : \ker f \to \ker \phi$$

çaprazlanmış modülüne (f, ϕ) morfizminin çekirdeği denir ve $\ker(f, \phi) = (\ker f, \ker \phi)$ ile gösterilir.

$$\mu' : \operatorname{im} f \to \operatorname{im} \phi$$

çaprazlanmış modülüne (f, ϕ) morfizminin görüntüsü denir ve $\operatorname{im}(f, \phi) = (\operatorname{im} f, \operatorname{im} \phi)$ ile gösterilir.

Önerme 2.28 $(f, \phi) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun.

$$\ker(f, \phi) = (\ker f, \ker \phi)$$

çaprazlanmış modülü, (M, G, μ) nun bir idealidir. (Casas 1990)

İspat. $g \in G$ ve $g_1 \in \ker \phi$ için

$$\phi([g, g_1]) = [\phi(g), 0] = 0$$

olduğundan $[g, g_1] \in \ker \phi$ dir. Böylece $\ker \phi$, G nin idealidir. Ayrıca $g \in G$ ve $m_1 \in \ker f$ için

$$f(gm_1) = \phi(g) f(m_1) = \phi(g)0 = 0$$

olduğundan $gm_1 \in \ker f$ olur. $g_1 \in \ker \phi$, $m \in M$ için

$$f(g_1 m) = \phi(g_1) f(m) = 0 f(m) = 0$$

olduğundan $g_1 m \in \ker f$ elde edilir. □

Önerme 2.29 $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun.

$$\operatorname{im}(f,\phi)=(\operatorname{im}f,\operatorname{im}\phi),$$

(M,G,μ) nun bir alt çaprazlanmış modülüdür. (Casas 1990)

İspat. $g'\in G'$, $\operatorname{im}f\subseteq M'$, $\operatorname{im}\phi\subseteq G'$ ve M' üzerine G'-etkisi,

$$\phi(g)f(m)=f(gm)\in\operatorname{im}f$$

şeklinde, $\operatorname{im}f$ üzerine $\operatorname{im}\phi$-etkisine indirgendiğinden $\operatorname{im}(f,\phi)$, (M,G,μ) nun bir alt çaprazlanmış modülüdür. □

Önerme 2.30 $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M^*,G^*,\mu^*)$ çaprazlanmış modül morfizmi örten olsun. Bu durumda (M',G',μ'), (M,G,μ) nin bir ideali ise $(f,\phi)((M',G',\mu'))=(f(M'),\phi(G'),\mu^*)$ da (M^*,G^*,μ^*) nün bir idealidir. (Casas 1990)

İspat. i). $g^*\in G^*, g'\in G'$ olsun. Bu durumda $g^*=\phi(g)$ olacak şekilde bir $g\in G$ vardır. Böylece

$$[g^*,\phi(g')]=[\phi(g^*),\phi(g')]\in\phi(G)$$

olur.

ii). $g^*\in G^*, g\in G$ ve $m'\in M$ olsun. Bu durumda $g^*=\phi(g)$ olacak şekilde bir $g\in G$ vardır. Böylece

$$g^*f(m')=\phi(g)f(m')]\in f(M')$$

olur.

iii). $g'\in G', m^*\in M^*$ olsun. Bu durumda $m^*=f(m)$ olacak şekilde bir $m\in M$ vardır. Böylece

$$\phi(g')m^*=\phi(g')f(m)=f(g'm)\in f(M)$$

olur. □

Önerme 2.31 M ve G bir Lie cebiri olmak üzere G nin M üzerine bir Lie etkisi olsun. $\mu:M\to G$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir. (Casas and Ladra, 2000)

i). (M,G,μ) çaprazlamış modüldür.

ii).

$$(\mu, 1) : M \bowtie G \to G \bowtie G$$

ve

$$(1, \mu) : M \bowtie M \to M \bowtie G$$

Lie cebirlerinin homomorfizmidir. Burada $M \bowtie G$, M ve G nin yarı-direk çarpımıdır.

Yukarıdakilerden aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 2.32 i).(M, G, μ) ön çaprazlanmış modül ise $Im\ (\mu) = H$, G nin bir idealidir.

ii). (M, G, μ) çaprazlanmış modül ise,

a). $M \to H$ ve $H \to G$ çaprazlanmış modüldürler.

b). $\ker \mu = L \subseteq Z(M)$ burada $Z(M)$ M nin merkezi ve $0 \to L \to M \to H \to 0$ Lie cebirinin merkez genişlemesidir.

c). H nın $Z(M)$ üzerine Lie etkisi aşikardır, $Z(M)$ ve L, Q-modüldür. $Q = G/\mu(M)$

Tanım 2.33 (M, G, μ) çaprazlanmış modül olmak üzere G yardımıyla M nin sabit elemanlarının oluşturduğu küme

$$M^G = \{m \in M : \text{her } g \in G \text{ için } g.m = m\}$$

şeklinde tanımlanır ve M^G, M ve G nin idealidir. Aynı zamanda M^G, $Z(M)$ (M nin merkezi) nin idealidir.

Tanım 2.34 G bir Lie **k**-cebir ve $d : G \to M$, k-lineer dönüşümler olsun. Her g, $g' \in G$ için,

$$d\ [g, g'] = g d(g') - g' d\ (g)$$

özelliği sağlanıyorsa d ye bir derivasyon denir. G den M ye bütün derivasyonların kümesi $\text{Der}(G)$ ile gösterilir.

$d : G \to G$ derivasyonlarının kümeside $\text{Der}(G)$ ile gösterilir.

$\text{Der}(G)$ bir Lie cebiridir. $g \in G$ için $\text{ad}_g(g') = [g, g']$ şeklinde tanımlı $\text{ad}_g : G \to G$ fonksiyonu bir derivasyondur. $\text{ad}(g) = \text{ad}_g$ şeklinde tanımlanan $\text{ad} : G \to \text{Der}(G)$ fonksiyonu da bir Lie cebir morfizmidir.

Örnek 2.20 M Lie cebir olmak üzere $(M, \text{Der}(M), \text{ad})$ bir çaprazlamış modüldür.

2.8 İzomorfizma Teoremleri

Cebir teoriye benzer olarak, izomorfizm teoremleri çaprazlanmış modüller için de geçerlidir. Dolayısıyla bu teoremleri ispatsız olarak ifade edeceğiz.

Teorem 2.35 (I. İzomorfizm) $(f,\phi):(M,G,\mu)\longrightarrow(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\frac{(M,G,\mu)}{\ker(f,\phi)}\cong \mathrm{Im}(f,\phi)$$

izomorfizmi geçerlidir (Grandjean, 1971).

Teorem 2.36 (II. İzomorfizm) (M'',G'',μ''), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü ve (M',G',μ') , (M,G,μ) nün ideali ise

$$\frac{(M',G',\mu')+(M'',G'',\mu'')}{(M',G',\mu')}\cong\frac{(M'',G'',\mu'')}{(M',G',\mu')\cap(M'',G'',\mu'')}$$

izomorfizmi geçerlidir (Grandjean 1971).

Teorem 2.37 (III. İzomorfizm) (M',G',μ') ve (M'',G'',μ'') ,(M,G,μ) çaprazlanmış modülün ideali ve $(M'',G'',\mu'')\subset(M',G',\mu')$ ise

$$\frac{(M,G,\mu)(M'',G'',\mu'')}{(M',G',\mu')(M'',G'',\mu'')}\cong\frac{(M,G,\mu)}{(M',G',\mu')}$$

izomorfizmi geçerlidir (Grandjean 1971).

Tanım 2.38 (A,G,α) ön çaprazlanmış modül (precrossed module) olsun. Bu durumda A nın peiffer elemanları yada çaprazlanmış komütatörleri $a,a'\in A$ için

$$[a,a']_c=[a,a']-\alpha(a)\cdot a'$$

şeklinde tanımlanır. A nın Peiffer elemanları A nın bir alt cebirini üretir. Bu alt cebir $[A,A]_c$ ile gösterilir ve $[A,A]_c$ ye A nın Peiffer alt cebiri denir (Casas 1990).

Teorem 2.39 (A,G,α) ön çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a). A nın Peiffer altcebiri $[A,A]_c$, sabittir. Yani $[A,A]_c$ G etkisi altında kapalıdır.

b). A nın Peiffer altcebiri $[A,A]_c$, A nın idealidir.

c). $(A/[A,A]_c\,,G,\alpha^c)$ üçlüsü çaprazlanmış modüldür ve şu evrensel özelliği sağlar:

(M,H,μ) bir çaprazlanmış modül ve $(f,\phi):(A,G,\alpha)\longrightarrow(M,H,\mu)$ bir morfizm ise

$$\begin{tikzcd}
(A,G,\alpha) \arrow[r, "(\pi{,}1)"] \arrow[dr, "(f{,}\phi)"'] & (A/[A,A]_c,G,\alpha^c) \arrow[d, "(f^c{,}\phi)"] \\
 & (M,H,\mu)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek bir

$$(f^c,\phi):(A/[A,A]_c,G,\alpha^c)\longrightarrow(M,H,\mu)$$

vardır.

İspat. a). $g,g'\in G$, $a,a'\in A$ için

$$[g,g']\cdot a=g\cdot(g'\cdot a)-g'\cdot(g\cdot a)$$

olup buradan da

$$\begin{aligned}
g\cdot[a,a']_c &= g\cdot([a,a']-\alpha(a)\cdot a')\\
&= g\cdot[a,a']-g\cdot(\alpha(a)\cdot a')\\
&= [g\cdot a,a']+[a,g\cdot a']-g\cdot(\alpha(a)\cdot a')\\
&= [g\cdot a,a']+[a,g\cdot a']-[g,\alpha(a)]\,a'-\alpha(a)\cdot(g\cdot a')\\
&= [g\cdot a,a']+[a,g\cdot a']-\alpha(g\cdot a)\cdot a'-\alpha(a)\cdot(g\cdot a')\\
&= [g\cdot a,a']-\alpha(g\cdot a)\cdot a'+[a,g\cdot a']-\alpha(a)\cdot(g\cdot a')\\
&= [g\cdot a,a']_c+[a,g\cdot a']_c
\end{aligned}$$

elde edilir.

b). $[a,[a',a'']_c]\in[A,A]_c$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
[[a',a''],a]_c &=[[a',a''],a]-\alpha[a',a'']\cdot a\\
&=[[a',a''],a]-[\alpha(a'),\alpha(a'')]\cdot a\\
&=-[a,[a',a'']]-\alpha(a')\cdot(\alpha(a'')\cdot a)+\alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a)\\
&=-[a,[a',a'']]-\alpha(a')\cdot[a'',a]+\alpha(a')\cdot[a'',a]_c+\alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a)\\
&=-[a,[a',a'']]-\alpha(a')\cdot[a'',a]-[a'',\alpha(a')\cdot a]+\alpha(a')\cdot[a'',a]_c+\alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a)\\
&=-[a,[a',a'']_c]-[a'',\alpha(a')\cdot a]_c+\alpha(a')\cdot[a'',a]_c
\end{aligned}$$

ve böylece

$$[a,[a',a'']_c]=-[[a',a''],a]_c-[a'',\alpha(a')\cdot a]_c+\alpha(a')\cdot[a'',a]_c\in[A,A]_c$$

elde edilmiş olur.

c). G nin A üzerine etkisi (a) şıkkından dolayı G nin $A/[A,A]_c$ üzerine etkisi vardır. Ayrıca $[A,A]_c$ nın elemanlarının α altındaki görüntüleri

$$\begin{aligned}\alpha([a,a']) &= \alpha([a,a'] - \alpha(a)\cdot a')\\ &= [\alpha(a),\alpha(a')] - \alpha(a)\cdot\alpha(a')\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\alpha^c : A/[A,A]_c \longrightarrow G$$

şeklinde bir Lie G-cebir morfizmi vardır. $[A,A]_c$ nin tanımı gereğince $(A/[A,A]_c, G, \alpha^c)$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca

$$\begin{aligned}f([a,a']_c) &= f([a,a']) - f(\alpha(a)\cdot a')\\ &= [f(a),f(a')] - \phi\alpha(a)\cdot f(a')\\ &= [f(a),f(a')] - \mu f(a)\cdot f(a')\\ &= [f(a),f(a')] - [f(a),f(a')]\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f^c tek türlü belirlidir (Casas 1990). □

2.9 Derivasyonlar

Grup teoride bir grubun diğeri üzerine etkisinin otomorfizm grubuyla belirlendiği iyi bilinir. A grubunun B grubu üzerine etkisi $A \longrightarrow Aut(B)$ homomorfizmi ile verilir. A grubu ile B grubunun herhangi bir genişlemesi ile bir $A \longrightarrow Out(B)$ homomorfizması ilgilidir. Cebir teoride ise bir cebirin diğeri üzerine etkisi aşağıda söz edeceğimiz çarpım cebri ile verilir. Cebirsel genişlemede ise P_B dış (outer) çarpım yer alır. Çarpım cebri kavramı, S.Mac Lane tarafından (Maclane, 1958) da tanımlanmıştır. L. Lavendhomme ve T.H. Lucas ise (Lavendhomme and Lucas, 1966) çalışmalarında bu kavram ile çaprazlanmış modül yapısı arasındaki ilişkiden söz etmişlerdir.

Tanım 2.40 (M,G,μ) ve (N,G,ν) çaprazlanmış iki Lie modül ve $\alpha : M \longrightarrow N$ bir **k**-lineer dönüşüm olsun. Her $m,m' \in M$ için

$$\alpha[m,m'] = \mu(m)\cdot\alpha(m') - \mu(m')\cdot\alpha(m)$$

ise α ya M den N ye bir derivasyon denir. Bütün derivasyonların kümesi $\mathrm{Der}_G(M,N)$ şeklinde gösterilir.

$g \in G$, $\alpha \in \mathrm{Der}_G(M,N)$ ve $ad_g : M \longrightarrow G$ fonksiyonu $ad_g(m) = [g,\mu(m)]$ şeklinde tanımlanmak üzere $\nu(\alpha(m)) = ad_g(m)$ yani $\nu\alpha = ad_g$ ise (α,g) ikilisine $\mathrm{Der}_G(M,N)$ nin konjugate elemanı denir (Casas 1990).

Tanım 2.41 Her $g, g' \in G$ için

$$\mu : G \longrightarrow \mathrm{Der}(G)$$
$$g \mapsto \mu(g) = \mu_g$$

olmak üzere, $\mu(g)g' = gg'$ şeklinde tanımlı $\mu(g) = \mu_g : G \longrightarrow G$ dönüşümüne iç (inner) derivasyon denir (Casas 1990).

Yardımcı Teorem 2.42 $\mathrm{Der}_G(M,N)$ nin konjugate elemanlarının kümesi bir Lie **k**-cebiridir (Guin, 1986).

Tanım 2.43 G nin $\mathrm{Der}_G(M,N)$ üzerine etkisi $g \in G$, $(\alpha, h) \in \mathrm{Der}_G(M,N)$ ve her $m \in M$ için

$$\beta(m) = g \cdot \alpha(m) - \alpha(g \cdot m)$$

olmak üzere

$$g \cdot (\alpha, h) = (\beta, [g, h])$$

şeklinde tanımlanmıştır (Casas 1990).

Yardımcı Teorem 2.44 Yukarıda tanımlanan G nin $\mathrm{Der}_G(M,N)$ üzerine etkisi bir Lie etkisidir (Guin 1986).

Yardımcı Teorem 2.45 $\eta(\alpha, g) = g$ şeklinde tanımlanan $\eta : \mathrm{Der}_G(M,N) \longrightarrow G$ fonksiyonu bir Lie cebir homomorfizmidir ve $\eta(g \cdot (\alpha, h)) = [g, \eta(\alpha, h)]$ dır (Guin 1986).

Yukarıdaki yardımcı teoremler gereğince aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.46 (M, G, μ) bir Lie ön çaprazlanmış modül ve (N, G, ν) bir çaprazlanmış Lie modül olsun. Bu durumda $\mathrm{Der}_G(M,N)$ nin konjugati birön çaprazlanmış G-modüldür (Casas 1990).

2.10 Lie Cebirleri İçin Aktör Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde, çarpım cebri ile yakından ilgili olan Lie cebirler için aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlayacağız. Bu kavram yardımıyla, Lie cebirleri teorisinde önemli yeri olan, bir çaprazlanmış modülün merkezi, çaprazlanmış modüller arasındaki etki gibi temel kavramları tanımlayacağız. Benzer kavram gruplar için Norrie tarafından (Norrie 1987) da tanımlanmıştır. Norrie bu çalışmasında, aktör çaprazlanmış modül kavramının grupların otomorfizmler grubu ile benzerliğini göstermiş ve bu yapıyla çaprazlanmış modül etkilerini tanımlayarak, çaprazlanmış modüllerin yarı-direkt çarpımlarını oluşturmuştur.

2.10.1 Bir Çaprazlanmış modülün aktörü

Önceden verdiğimiz derivasyon tanımını kısaca hatırlayalım.

Tanım 2.47 G den M ye bütün derivasyonların kümesi Der(G) olsun. (M,G,μ) çaprazlanmış modül ve $f : M \longrightarrow M$, $\phi : G \longrightarrow G$ birer fonksiyon olmak üzere $(f,\phi):(M,G,\mu)\longrightarrow(M,G,\mu)$ verilsin.

i). $f \in \mathrm{Der}(M)$, $\phi \in \mathrm{Der}(G)$

ii). $\phi\mu = \mu f$

iii). Her $g \in G$ ve her $m \in M$ için $f(g\cdot m) = g\cdot f(m)+\phi(g)\cdot m$

özellikleri sağlanıyorsa (f,ϕ) ye (M,G,μ) nin bir derivasyonu denir. (M,G,μ) nin bütün derivasyonlarının kümesi $\mathrm{Der}(M,G,\mu)$ ile gösterilir (Casas 1990).

Önerme 2.48 $\mathrm{Der}(M,G,\mu)$ kümesi $(f,\phi),(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2) \in \mathrm{Der}(M,G,\mu)$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

+). $(f_1,\phi_1)+(f_2,\phi_2) = (f_1+f_2,\phi_1+\phi_2)$

·). $k(f,\phi) = (kf,k\phi)$

∘). $[(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2)] = ([f_1,f_2],[\phi_1,\phi_2])$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte bir Lie **k**-cebir yapısı oluşturur (Casas 1990).

İspat. $(f,\phi),(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2) \in \mathrm{Der}(M,G,\mu)$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{c}\mathbf{k}\times \mathrm{Der}(M,G,\mu) \longrightarrow \mathrm{Der}(M,G,\mu)\\ (k,(f,\phi)) \mapsto k\cdot(f,\phi) = k(f,\phi)\end{array}$$

olmak üzere

i).

$$\begin{aligned} k((f_1,\phi_1)+(f_2,\phi_2)) &= k(f_1+f_2,\phi_1+\phi_2)\\ &= (k(f_1+f_2),k(\phi_1+\phi_2))\\ &= (kf_1+kf_2,k\phi_1+k\phi_2)\\ &= k(f_1,\phi_1)+k(f_2,\phi_2)\end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)(f,\phi) &= ((k_1+k_2)f,(k_1+k_2)\phi)\\ &= (k_1f+k_2f,k_1\phi+k_2\phi)\\ &= (k_1f,k_1\phi)+(k_2f,k_2\phi)\\ &= k_1(f,\phi)+k_2(f,\phi)\end{aligned}$$

iii).

$$\begin{aligned}(k_1k_2)(f,\phi) &= (k_1k_2f,k_1k_2\phi)\\ &= k_1(k_2f,k_2\phi)\\ &= k_1(k_2(f,\phi))\end{aligned}$$

olduğundan (Der$(M,G,\mu),+,\cdot,(\circ)$) dörtlüsü bir **k**-modül yapısı oluşturur. Ayrıca,

iv).

$$\begin{aligned}k((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)) &= k(f_1f_2,\phi_1\phi_2)\\ &= (k(f_1f_2),k(\phi_1\phi_2))\\ &= ((kf_1)f_2,(k\phi_1)\phi_2)\\ &= (kf_1,k\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)\\ &= (k(f_1,\phi_1))\circ(f_2,\phi_2)\\ (f_1,\phi_1)\circ(k,(f_2,\phi_2)) &= (f_1,\phi_1)\circ(kf_2,k\phi_2)\\ &= (f_1,(kf_2)),\phi_1(k\phi_2))\\ &= (k(f_1f_2),k(\phi_1\phi_2))\\ &= k(f_1f_2,\phi_1\phi_2)\\ &= k((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2))\end{aligned}$$

olduğundan Der(M,G,μ), bir **k**-cebirdir. □

BÖLÜM 3

LİE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN KATEGORİSİNDE KOLİMİTLER

Bu bölümdeki sonuçlar (CasasLadra 2000) de bulunabilir. Çaprazlanmış gruplar kategorisi ve değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modüller kategorisi için benzer sonuçlar sırasıyla (BrownHiggins 1978), (BrownWensley 1996) ve (Porter 1978) de verilmiştir.

3.1 Geri Çekme (Pullback) Çaprazlanmış Modüller

$\lambda : G \to H$ Lie cebirlerinin bir morfizmi olsun. $\mathcal{CM}_H$ ve $\mathcal{CM}_G$ sırasıyla çaprazlanmış H modüller ve çaprazlanmış G modüller kategorisi olmak üzere $\lambda^* B$

$$\begin{tikzcd} \lambda^* B \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "p"'] & G \arrow[d, "\lambda"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & H \end{tikzcd}$$

kategorisinde λ ve β nın fibre-çarpımı olmak üzere

$$\lambda^*(B, H, \beta) = (\lambda^* B, G, \beta^*)$$

şeklinde tanımlı çaprazlanmış modülüne geri çekme çaprazlanmış B-modül denir. Böylece

$$\lambda^* : \mathcal{CM}_H \to \mathcal{CM}_G$$

bir kısıtlama veya pull-back funktoru vardır.

G nin $\lambda^* B$ üzerine Lie etkisi

$$g \in G, \left(b, g'\right) \in \lambda^* B \subseteq B \times G$$

olmak üzere

$$g\left(b, g'\right) = (\lambda(g)b, \left[g, g'\right])$$

şeklinde tanımlıdır.

Fibre çarpımın evrensel özelliği functorun morfizimler üzerindeki etkisini belirler. Üstelik aşağıdaki evrensel özelliği yazabiliriz.

Önerme 3.1 (M,G,μ) çaprazlanmış modül ve

$$(f,\lambda):(M,G,\mu)\to(B,H,\beta)$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & (M,G,\mu) \arrow[d, "(f,\lambda)"] \\ (\lambda^* B,G,\beta^*) \arrow[ur, "(f^*,1)"] \arrow[r, "(p,\lambda)"] & (B,H,\beta) \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak $\mathcal{CM}_G$ de tek bir $(f^*,1)$ morfizmi vardır.

λ^* ye sol eşlek olan

$$\lambda_*:\mathcal{CM}_G\to\mathcal{CM}_H$$

funktorunu oluşturalım.

(M,G,μ) bir çaprazlanmış modül ve aşağıdaki (1)-(5) özelliklerine göre gerilen en küçük H-ideali $\mathrm{U}H\times M$ (burada $\mathrm{U}H$, olmak üzere $\mathrm{U}H\times M$ ın elemanları tarafından üretilen $F(\mathrm{U}H\times M)$ serbest Lie cebiri M_H olsun. $u,\ u_1,\ u_2\in \mathrm{U}H,\ m,\ m_1,\ m_2\in M,\ g\in G,\ 1,\ k\in K$ için

1). $(u,\ m_1)+(u,\ m_2)=(u,\ m_1+m_2)$,

2). $(u,\ k.\,m)=k.(u,\ m)=(k.\,u,\ m)$,

3). $(u,\ {}^g m)=(u\lambda(g),\ m)$,

4). $(u_1,\ m)+(u_2,\ m)=(u_1+u_2,\ m)$,

5). $(1,\ [m_1,m_2])=[(1,m_1),(1,m_2)]$.

H dan $F(\mathrm{U}H\times M)$ ya işlem

$$h(u,m):=(hu,m)$$

$h \in H$; $u \in \mathrm{U}H$; $m \in M$ şeklinde tanımlıdır.

Yukarıdaki işlem (1)-(5) ile uyumlu olduğundan M_H üzerine bir etki indirger:

$$h((1,[m_1,m_2]) - [(1,m_1),(1,m_2)]) = (h,[m_1,m_2]) - [(h,m_1)(1,m_2)] - [(1,m_1),(h,m_2)]$$

elemanı (1)-(5) tarafından gerilen H-idealine aittir.

$\{h_i\}$, $i \in I$ H nın sıralı bir K-tabanı olsun. Poincaré-Birkhoff Witt teoremine (Dixmier, 1974) gereğince

$$\left\{1, h_{(i)}/h_{(i)} = h_{i1}h_{i2}\cdots h_{i\alpha(i)}, i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_j,\ i_j \in I\right\}$$

kümesi $\mathrm{U}H$ ın bir K-tabanıdır.

$$\mu_H : M_H \to H$$

dönüşümü $u = k.1 + \sum_{(i)} k_{(i)}h_{(i)}$ olmak üzere

$$\mu_H(u,m) := k\lambda\mu(m) + \sum_{(i)} k_{(i)} \left[h_{i1}, \left[h_{i2}, \cdots \left[h_{i\beta(i)}, \left[h_{i\alpha(i)}, \lambda\mu(m)\right]\right] \cdots \right]\right]$$

şeklinde tanımlıdır.

Sağ-normlu çarpan rotasyonunu (Bakhturin, 1987) kullanırsak

$$\mu_H(u,m) := k\lambda\mu(m) + \sum_{(i)} k_{(i)} \left[h_{i1}h_{i2}\cdots h_{i\beta(i)}\cdots h_{i\alpha(i)}\lambda\mu(m)\right]$$

yazabiliriz. μ_H, H-değişmezdir. Basitlik için h ın H ın K-tabanının bir elemanı olduğunu ve her i_j için $h \leq h_{ij}$ olduğunu kabul edebiliriz. $u = k.1 + \sum_{(i)} k_{(i)}h_{(i)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mu_H(h(u,m)) &= \mu_H(hu,m) \\
&:= k\left[h, \lambda\mu(m)\right] + \sum_{(i)} k_{(i)} \left[hh_{i1}h_{i2}...h_{i\beta(i)}...h_{i\alpha(i)}\lambda\mu(m)\right] \\
&= h\left(k\lambda\mu(m) + \sum_{(i)} k_{(i)} \left[h_{i1}h_{i2}...h_{i\beta(i)}...h_{i\alpha(i)}\lambda\mu(m)\right]\right) \\
&= h\mu_H(u,m)
\end{aligned}$$

dür.

Üstelik $\mu_H : M_H \to H$,

$$\begin{aligned}
\mu_H(u,gm) &= k\lambda\mu(gm) + \sum_{(i)} k_{(i)} \left[h_{i1}h_{i2}...h_{i\beta(i)}...h_{i\alpha(i)}\lambda\mu(gm)\right] \\
&= k\left[\lambda(g), \lambda\mu(m)\right] + \sum_{(i)} k_{(i)} \left[h_{i1}h_{i2}...h_{i\beta(i)}...h_{i\alpha(i)}\lambda(g)\lambda\mu(g)\right] \\
&= \mu_H(u\lambda(g), m)
\end{aligned}$$

ile uyumludur. Böylece (M_H, H, μ_H) ön çaprazlanmış modüldür.

Teorem 3.2 $\mathrm{U}_3(M,G,\mu)=(M,G,\mu)$ şeklinde tanımlı $\mathrm{U}_3:\mathcal{CM}\to\mathcal{PCM}$ forgetful funktoru $\mathrm{F}_3(A,G,\alpha)=(A/[A,A]_c,G,\alpha^c)$ şeklinde tanımlı $\mathrm{F}_3:\mathcal{PCM}\to\mathcal{CM}$ funktoruna sağ eşlektir.

Tanım 3.3 (M_H,H,μ_H) ön çaprazlanmış modül olsun. $(M_H/[M_H,M_H]_c,H,\mu_H^c)$ çaprazlanmış modülüne indirgenmiş çaprazlanmış modül denir ve (λ_*M,H,μ_*) ile gösterilir.

$$\lambda_*:\mathcal{CM}_G\to\mathcal{CM}_H$$

funktoru $\lambda_*(M,G,\mu)=(\lambda_*M,H,\mu_*)$ şeklinde tanımlanır.

λ_* ın funktor olması (1)-(5) özellikleri serbest Lie cebirlerinin evrensel özellikleri, kokernal ve $\mathrm{F}_3:\mathcal{PCM}\to\mathcal{CM}$ funktoru gereğince açıktır.

Önerme 3.4 $i:M\to\lambda_*M$, $1\in K$ olmak üzere $i(m)=(1,\ m)$ kanonik morfizm olsun. Bu durumda

$$(i,\lambda):(M,G,\mu)\to(\lambda_*M,H,\mu_*)$$

çaprazlanmış modül morfizmidir.

Önermede 3.1 de elde edilen özelliklere dual olan λ_* in evrensel özellikleri elde ederiz.

Önerme 3.5 (B,H,β) bir çaprazlanmış modül ve

$$(f,\lambda):(M,G,\mu)\to(B,H,\beta)$$

çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olsun. Bu durumda $\mathcal{CM}_H$ da

$$\begin{tikzcd}
(M,G,\mu) \arrow[r, "{(i,\lambda)}"] \arrow[d, "{(f,\lambda)}"'] & (\lambda^*M,H,\mu_*) \arrow[dl, "{(f_*,1)}"] \\
(B,H,\beta) &
\end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif yapacak şekilde tek bir

$$(f_*,1):(\lambda_*M,H,\mu_*)\to(B,H,\beta)$$

homomorfizmi vardır.

İspat. $\{h_i\}$, $i\in I$ H ın sıralı bir K-tabanı olmak üzere

$$f':F(\mathrm{U}H\times M)\to B$$

yi

$$f\prime(u,m)=kf(m)+\sum k_{(i)}(h_{i1}(h_{i2}(\ldots(h_{i\beta(i)}(^{h_{i\alpha(i)}}f(m)))\ldots)))$$

şeklinde tanımlayalım. Poincaré-Birkhoff Witt teoremi (Dixmier 1974) gereğince

$$\left\{1, h_{(i)}/h_{(i)}=h_{i1}h_{i2}\ldots h_{i\alpha(i)}, i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_j, i_j\in I\right\}$$

kümesi UH ın K-tabanıdır. Üstelik f', (1)-(5) ilişkileri ile uyumludur. Böylece

$$f_H : M_H \to B$$

yi elde ederiz. Teorem **??** (3) gereğince

$$f_* : \lambda_* M \to B$$

morfizmi elde edilir. f_* morfizminin evrensel özelliği oluşturulan morfizmin evrensel özelliğinin bir sonucudur. □

Teorem 3.6 $\lambda : G \to H$ Lie cebirlerinin bir morfizmi olsun. $\lambda_* : \mathcal{CM}_G \to \mathcal{CM}_H$ funktoru $\lambda^* : \mathcal{CM}_H \to \mathcal{CM}_G$ funktorunun sol eşleğidir.

İspat. $(M,\ G,\ \mu)$ bir çaprazlanmış modül olsun. Lie cebirlerinin

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\eta_M"] \arrow[drr, bend left, "\mu"] \arrow[ddr, bend right, "i"'] & & \\
& \lambda^*\lambda_* M \arrow[r, "(\mu_*)^*"] \arrow[d, "p"'] & G \arrow[d, "\lambda"] \\
& \lambda_* M \arrow[r, "\mu_*"] & H
\end{tikzcd}$$

diyagramı çaprazlanmış G-modüllerin

$$(\eta_M, 1) : (M, G, \mu) \to (\lambda^*\lambda_* M, G, (\mu_*)^*)$$

morfizmini belirler.

Bu morfizim (M,G,μ) dan λ^*a evrenseldir (Maclane, 1988). Kesinlikle $\mathcal{CM}_G$ de verilen

$$(t,1) : (M,G,\mu) \to \lambda^*(B,H,\beta) = (\lambda^* B, G, \beta^*)$$

morfizmi için

$$(M,G,\mu)\rightarrow(\lambda^*B,G,\beta^*)\rightarrow(B,H,\beta)$$

morfizimlerinin bileşkesini gözönüne alalım. Önerme 3.5 gereğince $\mathcal{CM}_H$ da

$$\begin{tikzcd}
(M,G,\mu) \arrow[r, "(i{,}\lambda)"] \arrow[d, "(pt{,}\lambda)"'] & (\lambda_*M,H,\mu_*) \arrow[dl, "((pt)_*{,}1)"] \\
(B,H,\beta) &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli kılan tek bir

$$(\lambda_*M,H,\mu_*)\rightarrow(B,H,\beta)$$

morfizmi vardır. $\Box$

Teorem 3.7 η_M ve λ^* ın oluşturulması boyunca aşağıdaki açıktır.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[drr, "\mu_M"] \arrow[drrrr, "\mu"] \arrow[ddr, "i"'] \arrow[dddrr, "t"] & & & & \\
 & & \lambda^*\lambda_*M \arrow[rr, "(\mu_*)^*"'] \arrow[dl, "p"] \arrow[dd, "(pt)_*"', "\lambda^*"] & & G \arrow[dl, "\lambda"] \arrow[dd, equal] \\
 & \lambda^*M \arrow[rr] \arrow[dd, "(pt)_*"'] & & H \arrow[dd, equal] & \\
 & & \lambda^*B \arrow[rr, "\beta^*"] \arrow[dl, "p"] & & G \arrow[dl, "\lambda"] \\
 & B \arrow[rr, "\lambda"] & & H &
\end{tikzcd}$$

diagramı gereğince

$$\begin{tikzcd}
(M,G,\mu) \arrow[r, "(\eta_M{,}1)"] \arrow[d, equal] & (\lambda^*\lambda_*M,H,(\mu_*)^*) \arrow[d, "\lambda^*((pt)_*{,}1))"] \\
(M,G,\mu) \arrow[r, "(\tau{,}1)"'] & (\lambda^*B,G,\beta^*)
\end{tikzcd}$$

dir. Böylece λ_*, λ^* nün sol eşleğidir (Maclane 1988).

Sonuç 3.8 $\lambda : G \rightarrow H$ çekirdeği G' olan Lie cebirlerinin örten bir morfizmi olsun. $g' \in G'$, $m \in M$ olmak üzere $g'm$ elemanları tarafından gerilen(üretilen) ideal $G' \circ M$ olmak üzere $M_H = M/G' \circ M$ dir. Üstelik $(M_H,\ H,\ \mu_H)$ bir çaprazlanmış modüldür ve

$$\lambda_*M = M_H \ \text{ ve } \ \mu_* = \mu_H$$

dır.

ι bir idealin gömme fonksiyonu olmak üzere $\iota : P \to Q$ morfizminin indirgediği çaprazlanmış modül üzerindeki bazı sonuçları verelim.

$n \in M$ ise M_{ab} içinde n nin sınıfını $[n]$ şeklinde yazalım. G bir Lie cebiri ise $I(G)$, G nin augmentation idealini göstersin. Q/P bölüm Lie cebirinin augmentation $I(Q/P)$ idaelinin tabanı $\overline{e}_{i_j}$ $\;e_{i_i} \in I(Q)$ temel elemanlarının Q/P üzerine izdüşümü, yani $\overline{e}_{i_j} = e_{i_j} + P$ ve $\{e_i\}_{i\in I}$, Q nun sıralı K-tabanı olmak üzere

$$\left\{\overline{e}_{(i)}/\overline{e}_{(i)} = \overline{e}_{i_1}\overline{e}_{i_2}\cdots\overline{e}_{i_p}, i_1 \leq i_2 \leq \cdots\; i_p, i_j \in I\right\}_{(i)\neq\emptyset}$$

dir.

Teorem 3.9 Q nun P ve M üzerine Lie etkisi eşlek temsili olan bir ideali $M \subseteq P$ olsun. $\mu : M \to P$, $\iota : P \to Q$ gömme ve M etkisi eşlek temsil olan $(M,\ G,\ \mu)$ çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda indirgenmiş $\iota_* M$ çaprazlanmış Q-modülü

$$\zeta : M \times (M_{ab} \otimes I(Q/P)) \to Q$$

çaprazlanmış Q-modülü izomorfiktir. Burada $m,\ n \in M$; $\overline{x} \in I(Q/P)$ için

1. $\zeta(m,\ [n] \otimes \overline{x}) = m \in Q$

2. Q nun Lie etkisi $\overline{q}$ ve $\overline{x}$ sırası ile Q/P de $q,\ x$ in görüntüleri olmak üzere

$$q(m,[n]\otimes\overline{x}) = (qm, [m]\otimes\overline{q} + [n]\otimes\overline{q}x - [xn]\otimes\overline{q})$$

dır.

$$i : M \to M \times (M_{ab} \otimes I(Q/P))$$

evrensel dönüşümü

$$m \longmapsto (m, 0)$$

şeklinde verilir ve eğer $(\beta, \imath)$, M den $C = (C, Q, \chi)$ çaprazlanmış modülüne bir morfizm ise

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[ddl, "\chi"] \\
M \arrow[r, "i"] \arrow[rru, "\beta"] \arrow[d, "\mu"'] & M \times (M_{ab} \otimes I(Q/P)) \arrow[ru, "\phi"] \arrow[d, "\zeta"] & \\
P \arrow[r, "\iota"'] & Q &
\end{tikzcd} \qquad (3.1)$$

β tarafından indirgenen

$$\phi : M \times (M_{ab} \otimes I(Q/P)) \to C$$

morfizm $m,\ n \in M$ ve

$$e_{(i)} = e_{i1} e_{i2} ... e_{ik} \in T^k(Q)$$

olmak üzere

$$\phi\left(m, [n] \otimes \overline{e}_{(i)} = \beta(m) + e(i)\beta(n) - \beta(e(i)n)\right) \tag{3.2}$$

şeklindedir.

İspat.

$$\zeta : M \times (M_{ab} \otimes I(Q/P)) \to Q$$
$$\zeta(m, [n] \otimes \overline{x}) = m$$

Lie etkisi ile birlikte çaprazlanmış modül olduğu açıktır. Bu çaprazlanmış modülü $\mathcal{Z}$ ile göstereceğiz.

Açıkça $(i, \iota) : M \to \mathcal{Z}$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Bu indirgenmiş çaprazlanmış modüllerin evrensel özelliğini sağladığını gösterelim. Diyagram 3.1 i göz önüne alarak aşağıdakileri gösterelim.

3.9.1. $\phi : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}$, $\phi i = \beta$ özelliğini sağlayan çaprazlanmış Q-modüllerin bir morfizmi olsun. Bu durumda ϕ formül 3.2 yardımıyla verilir.

Bu formülün çaprazlanmış Q-modüllerinin bir morfizmini tanımladığını gösterelim.

$q \in Q$ olsun. $\gamma_q : M \to C$, $\gamma_q(m) = q\beta(m) - \beta\left(qm\right)$ fonksiyonu tanımlayalım.

3.9.2. $\gamma_q(M),\ C$ nin merkezindedir.

3.9.3. γ_q morfizmi M_{ab} çarpanlarına ayırır.

3.9.4. γ_q sadece Q/P nin q elemanlarının $\overline{q}$ sınıfına bağlıdır ve bu yüzden Lie cebirlerinin

$$\gamma : M_{ab} \otimes I(Q/P) \to C$$
$$\left(\gamma\,[m] \otimes \overline{e}_{(i)}\right) = \gamma_{e(i)}(m)$$

şeklinde bir morfizmini tanımlar.

3.9.5. Teoremde tanımlanan ϕ dönüşümü $\phi i = \beta$ özelliğini sağlar ve çaprazlanmış modüllerin bir morfizmidir.

İspat 3.9.1. $\left(m,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}\right)=\phi(m,\ 0)+\left(0,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}\right)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\phi(m,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}) &=\phi(m,0)+\left(0,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}\right)\\ &=\phi\, i(m)+\phi(0,[n]\otimes\overline{e}_{(i)})\\ &=\beta(m)+\phi(0,[n]\otimes\overline{e}_{(i)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}) &=({}^{e(i)}n,[n]\otimes\overline{e}_{(i)})+(-{}^{e(i)}n,0)\\ &={}^{e(i)}(n,0)+(-{}^{e(i)}n,0)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\phi(0,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}) &=\phi({}^{e(i)}(n,0))+\phi(-{}^{e(i)}n,0)\\ &={}^{e(i)}\phi(n,0)-\phi({}^{e(i)}n,0)\\ &={}^{e(i)}\phi\, i(n)-\phi\, i({}^{e(i)}n)\\ &={}^{e(i)}\beta(n)-\beta({}^{e(i)}n)\\ &=\gamma_{e(i)}(n)\end{aligned}$$

olur.

İspat 3.9.2. $m\in M$ için $\chi\lambda_q(m)=0$ ve (C,Q,χ) çaprazlanmış modül olduğundan ispat açıktır.

İspat 3.9.3. $m,m'\in M$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\gamma_q[m,m'] &=q\beta[m,m']-\beta\left(q[m,m']\right)\\ &=q\left[\beta(m),\beta(m')\right]-\beta\left([qm,m']\right)-\beta\left([m,qm']\right)\\ &=\left[q\beta(m)-\beta(qm),\beta(qm')\right]\\ &=\left[\gamma_q(m),\beta(m')\right]+\left[\beta(m),\gamma_q(m')\right]\\ &=0\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $\gamma_q,\ M_{ab}$yi çarpanlarına ayıran Lie cebirlerinin bir morfizmidir.

İspat 3.9.4. β, P-invaryant homomorfizm olduğundan γ_q sadece, Q/P nin q elemanlarının $\overline{q}$ sınıfına bağlıdır. Böylece Lie cebirlerinin bir

$$\gamma: M_{ab}\otimes I(Q/P)\to C,\gamma\left([m]\otimes\overline{e}_{(i)}\right)=\gamma_{e(i)}(m)$$

homomorfizmi tanımlanır.

İspat 3.9.5. β ve γ Lie cebirlerinin morfizmi ve $\gamma(u)$, C nin merkezine ait olmak üzere $\phi(m,u)=\beta(m)+\gamma(u)$ olduğundan ϕ fonksiyonu açıkça Lie cebirlerinin iyi tanımlı bir morfizmidir.

$$\begin{aligned}\left[\phi(m,u),\phi\left(m',u'\right)\right] &= \left[\beta(m),\beta\left(m'\right)\right]+\left[\gamma(u),\gamma\left(u'\right)\right]\\ &= \phi\left(\left[m,m'\right],\left[u,u'\right]\right)\\ &= \phi\left[(m,u),\left(m',u'\right)\right].\end{aligned}$$

Üstelik $\chi\gamma$ aşikar (0 morfizmi):

$$\begin{aligned}\chi\gamma\left([n]\otimes\overline{e}_{(i)}\right) &= \chi\left({}^{e_{(i)}}\beta(n)-\beta\left({}^{\overline{e}_{(i)}}n\right)\right)\\ &= {}^{e_{(i)}}\chi\beta(n)-\chi\beta\left({}^{e_{(i)}}n\right)\\ &= {}^{e_{(i)}}\imath\mu(n)-\imath\mu\left({}^{e_{(i)}}n\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $\phi i=\beta$ ve $\chi\phi=\zeta$ dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\chi\left(e_{(i)}\beta(n)\right) &= \chi\left(e_{i1}\left(e_{i2}\left(\ldots\left(e_{ik}\beta(n)\right)\ldots\right)\right)\right)\\ &= \left[e_{i1},\chi\left(e_{i2},\ldots\left(e_{ik},\beta(n)\right)\ldots\right)\right]\\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &= \left[e_{i1},\left[e_{i2},\ldots\left[e_{ik},\chi\beta(n)\right]\ldots\right]\right]\\ &= e_{i1}\left(e_{i2}\left(\ldots\left(e_{ik}\chi\beta(n)\right)\ldots\right)\right)\\ &= e_{(i)}\chi\beta(n)\end{aligned}$$

Son olarak ϕ nin Q-equivariant olduğunu gösterelim. Bu ispatın en önemli kısmıdır. $m,\ n\in M$, $q\in Q$ ve $\overline{e}_{(i)}$, $I(Q/P)$ nin tabanının bir elemanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\phi\left(q\left(m,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}\right)\right) &= \phi\left(m,[n]\otimes\overline{q}+[n]\otimes\overline{q}e_{(i)}-\left[e_{(i)}n\right]\otimes\overline{q}\right)\\ &= \beta(qm)+\gamma\left([m]\otimes\overline{q}+[n]\otimes\overline{qe}_{(i)}-\left[e_{(i)}n\right]\otimes\overline{q}\right)\\ &= \beta\left(qm\right)+\gamma_q(m)+\gamma_{qe_{(i)}}(n)-\gamma_q\left(e_{(i)}n\right)\\ &= \beta\left(qm\right)+qe_{(i)}\beta(n)-q\beta\left(e_{(i)}n\right)\\ &= q\left(\beta(m)+e_{(i)}\beta(n)-\beta\left(e_{(i)}n\right)\right)\\ &= q\left(\beta(m)+\gamma_{e_{(i)}}(n)\right)\\ &= q\phi\left(m,[n]\otimes\overline{e}_{(i)}\right)\end{aligned}$$

olur.

$C=\imath_*M$ ve β kanonik $i:M\to\imath_*M$ gömme ise ϕ bir izomorfizmdir. □

Bu sonucun bir açıklaması şudur: $e_{(i)}\beta(n)-\beta\left(e_{(i)}n\right)$ kısmı Q-homomorfizmlerinden β morfizminin derivasyonunu gösterir.

3.2 $\mathcal{CM}$ Kategorisinde Amalgamated Toplamlar

$\mathcal{CM}_G$ kategorisinin amalgamated birleşmiş toplamları olduğunu göstereceğiz. İki yapı oluşturacağız. İlkinde Lie cebirlerinin amalgamated toplamlarını oluşturacak ve ikincisinde gruplar için çaprazlanmış G-modülleri için (Brown, 1984) de verilen yola benzer şekilde yarı direk çarpımları oluşturacağız. Sonuç olarak $\lambda_*\dashv\lambda$ ajduction ve $\mathcal{CM}_G$ kategorisinde amalgamated sumların varlığının kullanılması ile $\mathcal{CM}$ kategorisinin coproductları ve amalgamated sumlarının olduğunu gösteririz.

Önerme 3.10 Ön çaprazlanmış G modüllerin $\mathcal{PCM}_G$ kategorisinin amalgamated toplamları vardır.

$$\begin{tikzcd}
(A_0,G,\alpha_0) \arrow[r] \arrow[d] & (A_1,G,\alpha_1) \arrow[d] \\
(A_2,G,\alpha_2) \arrow[r] & (A,G,\alpha)
\end{tikzcd}$$

Burada A, Lie K-cebirlerinin $\mathbf{L}_K$ kategorisinde amalgamated toplamve α da α_1 ve α_2 den indirgenmiştir (induced).

İspat. A, $\mathbf{L}_K$ da amalgamated toplam olsun. (Ayadi, 1985). Yani V, K vektör uzayları kategorisinde amalgamated toplam, $L(V)$, V üzerindeki serbest Lie cebiri ($L(V)$, V tarafından gerilen $T(V)$ tensör cebirinin Lie cebiridir) ve I,

$$\begin{array}{ll}
\left[(a_1,0),\left(a_1',0\right)\right]-\left(\left[a_1,a_1'\right],0\right) & a_1,a_1'\in A_1 \text{ ve} \\
\left[(0,a_2),\left(0,a_2'\right)\right]-\left(0,\left[a_2,a_2'\right]\right) & a_2,a_2'\in A_2
\end{array}$$

ilişkisi tarafından gerilen $L(V)$ nin ideali olmak üzere $A=L(V)/I$ olsun. A bir Lie G-cebiridir. Burada üreteçler üzerindeki etki

$$g\,(a_1,a_2)=\left(ga_1,ga_2\right)$$

$$g\,[v,v']=[gv,v']+[v,gv']$$

$a_1\in A$; $a_2\in A_2$; $v,\ v'\in V$ olmak üzere şeklinde verilmiştir. Bu etki I daki ilişki ile uyumludur ve böylece (A,G,α) aranan evrensel objedir. □

Önerme 3.11 $\mathcal{CM}_G$ amalgamated toplamlara sahiptir.

$$\begin{tikzcd}
(M_0,G,\mu_0) \arrow[r] \arrow[d] & (M_1,G,\mu_1) \arrow[d] \\
(M_2,G,\mu_2) \arrow[r] & (M,G,\mu)
\end{tikzcd}$$

Burada $M=\left(M'/[M',M']_c\,,G,\mu'^c\right)$ ve $\left(M',G,\mu'\right)$, $\mathcal{P}\mathrm{CM}_G$ de amalgamated toplamdır.

İspat. Önerme 3.11, Teorem **??** ve $\mathcal{P}\mathrm{CM}_G$ de amalgamated toplamın evrensel özelliklerinin bir sonucudur. □

$(0,G,0)$, $\mathcal{CM}_G$ de başlangıç objesi olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.12 $\mathcal{CM}_G$, $(M_1, G, \mu_1) * (M_2, G, \mu_2) = (M, G, \mu)$ sonlu koprodukta sahiptir. Burada

$$M = M_1 * M_2 / [M_1 * M_2, M_1 * M_2]_c$$

ve μ, $\mu_1$ve μ_2 den elde indirgenmiştir.

Şimdi $\mathcal{CM}_G$ de amalgamated toplamın diğer bir yapısına bakalım.

Önerme 3.13 $\mathcal{CM}_G$ amalgamated toplamlara sahiptir.

$$\begin{tikzcd}
(M_0, G, \mu_0) \arrow[r, "(f_1{,}1)"] \arrow[d, "(f_2{,}1)"'] & (M_1, G, \mu_1) \arrow[d] \\
(M_2, G, \mu_2) \arrow[r] & (M, G, \mu)
\end{tikzcd}$$

Burada

$$M = \left(M' / \left[M', M'\right]_c, G, \mu'^c\right)$$

$$M' = M_1 \bowtie M_2 / \left\langle \left(f_1(m_0), -f_2(m_0)\right) \right\rangle_I$$

ve M_0, M_1, μ_2 üzerinden M_2-cebiridir.

İspat. $M' = M_1 \bowtie M_2 / \left\langle \left(f_1(m_0), -f_2(m_0)\right) \right\rangle_I$ nin $\mathcal{PCM}_G$ de amalgamated toplamların evrensel özelliğine benzer bir evrensel özelliği sağladığını göstermemiz yeterlidir.

$$\mu'(m_1, m_2) = \mu_1(m_1) + \mu_2(m_2)$$

olmak üzere (M', G, μ') ön çaprazlanmış modüldür. Üstelik $\left\langle \left(f_1(m_0), -f_2(m_0)\right) \right\rangle_I$, G-actionetkisi altında değişmezdir.

$\left(M' / [M', M']_c, G, \mu'^c\right)$, $\mathcal{P}$CM$_G$'deki evrensel özelliği sağladığını gösterelim:

$$(h_1, 1) : \left(M_1, G_1, \mu_1\right) \rightarrow (N, G, \nu)$$

ve

$$(h_2, 1) : \left(M_2, G_2, \mu_2\right) \rightarrow (N, G, \nu)$$

$$\begin{tikzcd}
(M_0, G, \mu_0) \arrow[r] \arrow[d] & (M_1, G, \mu_1) \arrow[d] \arrow[ddr, "(h_1{,}1)"] & \\
(M_2, G, \mu_2) \arrow[r] \arrow[drr, "(h_2{,}1)"'] & (M', G, \mu') \arrow[dr, "(h{,}1)"] & \\
 & & (N, G, \nu)
\end{tikzcd}$$

external square (dış kare) ile değişmeli iki morfizm olsun.

$$\begin{aligned} &h : M' \to N' \\ &h(m_1, m_2) = h_1(m_1) + h_2(m_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlasın. Açıkça $(h,\ 1)$ tektir ve ilgili üçgen ile değişmelidir. Teorem **??** ve önceki evrensel özellik gereğince $(M,\ G,\ \mu) = \left(M'/\left[M', M'\right]_c, G, \mu'^c\right)$, $\mathcal{CM}_G$ de amalgamated toplamdır. $\square$

Sonuç 3.14 $\mathcal{CM}_G$ kategorisinde $(M_1,\ G,\ \mu_1)$ ve $\left(M_2, G, \mu_2\right)$ nin koproduktı $(M,\ G,\ \mu)$ dür. Burada $M = M_1 \bowtie M_2/[M_1 \bowtie M_2, M_1 \bowtie M_2]_c$, M_2 nin M_1 üzerine etkisi μ_2 üzerinden ve μ morfizmi μ_1 ve μ_2 den indirgenmiş, $\mu(m_1 + m_2) = \mu_1(m_1) + \mu_2(m_2)$ dir.

Teorem 3.15 $\mathcal{CM}$ kategorisi

$$\begin{tikzcd} (M_0, G_0, \mu_0) \arrow[r, "(f_1,\phi_1)"] \arrow[d, "(f_2,\phi_2)"'] & (M_1, G_1, \mu_1) \arrow[d, "(\theta_1,\lambda_1)"] \\ (M_2, G_2, \mu_2) \arrow[r, "(\theta_2,\lambda_2)"'] & (M, G, \mu) \end{tikzcd}$$

amalgamated toplamlara sahiptir.

İspat. G Lie cebirlerin kategorisinde amalgamated toplam olsun.

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] \arrow[dr, "\lambda_0"] & G_1 \arrow[d, "\lambda_1"] \\ G_2 \arrow[r, "\lambda_2"'] & G \end{tikzcd}$$

M yi aşağıdaki şekilde oluşturacağız: $j = 0,\ 1,\ 2$ için $\lambda_{j*}(M_j,\ G_j,\ \mu_j) = (\lambda_{j*}M_j,\ G,\ \mu_{j*})$, 3.3 de çaprazlanmış G_j modülü ile ilişkili çaprazlanmış G modülü olsun. $\left(M, G, \mu\right)$ yu $\mathcal{CM}_G$ de amlagamated toplam

$$\begin{tikzcd} (\lambda_{0*}M_0, G, \mu_{0*}) \arrow[r, "((i_1f_1)_*,1)"] \arrow[d, "((i_2f_2)_*,1)"'] & (\lambda_{1*}M_1, G, \mu_{1*}) \arrow[d] \\ (\lambda_{2*}M_2, G, \mu_{2*}) \arrow[r] & (M, G, \mu) \end{tikzcd}$$

olarak tanımlayalım.

$\left(M, G, \mu\right)$ nün $\mathcal{CM}$ de amalgamated toplam olduğunu gösterelim.

Diyagramdan açıkça görüldüğü gibi verilen kare değişmelidir. Şimdi evrensel özelliğin sağlandığını gösterelim: $\left(B, H, \beta\right)$ çaprazlanmış modülü ve $j = 1,\ 2$ için

$$\left(h_j, \eta_j\right) : \left(M_j, G_j, \mu_j\right) \to \left(B, H, \beta\right)$$

morfizmi verilsin. G amalgamated toplam ve $j=1,\ 2$ için $\eta_j=\eta\lambda_j$ olduğundan $\eta_j^*=\lambda_j^*\eta^*$ $j=1,\ 2$ şeklinde tek bir $\eta: G\to H$ morfizmi vardır. Bu durumda

$$\eta_j^*\left(B,H,\beta\right)=\lambda_j^*\left(\eta^*\left(B,H,\beta\right)\right)$$

dır. Önerme 3.1 deki evrensel özellik gereğince $j=1,\ 2$ için $p_j h_j^*=h_j$ olacak şekilde $\mathcal{CM}_{Gj}$ de

$$\left(h_j,1\right):\left(M_j,G_j,\mu_j\right)\to\eta_j^*\left(B,H,\beta\right)$$

morfizmi vardır.

Üstelik iki morfizm fibre çarpımdan geldiğinden p ve β^* birleşimlerine eşit olduğundan

$$p_1h_1^*f_1=p_2h_2^*f_2$$

dir. Önerme 3.5 gereğince $j=1,\ 2$ için

$$(h_j^*)_*i_j=p_jh_j^*$$

olacak şekilde $\mathcal{CM}_G$ de

$$((h_1^*)_*,1):\left(\lambda_{j*}M_j,G,\mu_{j*}\right)\to\left(\eta^*B,G,\beta^*\right)$$

morfizmi vardır. Buradan

$$((h_1^*)_*,1)(i_1,\lambda_1)\left(f_1,\phi_1\right)=((h_2^*)_*,1)(i_2,\lambda_2)\left(f_2,\phi_2\right)$$

olur. Bu yüzden

$$((h_1^*)_*,1)((i_1f_1)_*,1)(i_0,\lambda_0)=((h_2^*)_*,1)((i_2f_2)_*,1)(i_0,\lambda_0)$$

elde edilir. Önerme 3.5 deki evrensel özellik gereğince

$$((h_1^*)_*,1)((i_1f_1)_*,1)=((h_2^*)_*,1)((i_2f_2)_*,1)$$

olur.

$\left(M,G,\mu\right)$, $\mathcal{CM}_G$ de amalgamated toplam olduğundan ilgili üçgen ile değişmeli olan

$$(h,1):\left(M,G,\mu\right)\to\left(\eta^*B,G,\beta^*\right)$$

vardır. İhtiyaç olan morfizm $\left(ph,\eta\right)$ dür. Tekliği önceki evrensel özelliklerin bir sonucudur.

$(0,0,0)$, $\mathcal{CM}$ sıfır objesi olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz. $\square$

Sonuç 3.16 $\mathcal{CM}$ kategorisi sonlu koprodukt ve cokernellara sahiptir.

Sonuç 3.8 gereğince

$$(f,\phi):(M,G,\mu)\rightarrow(M',G',\mu')$$

nün cokernelı

$$\left(M'/\left[f(M)\right]_{G'}+\left[\phi\left(G\right)\right]_{G'}\circ M',Co\ker\left(\phi\right),\overline{\mu}'\right)$$

dir. Burada $\left[f(M)\right]_{G'}$, M' de $f(M)$ yi kapsayan en küçük ideal, $\left[\phi\left(G\right)\right]_{G'}$ de G' nin $\phi(G)$ yi kapsayan en küçük ideali ve $\left[\phi\left(G\right)\right]_{G'}\circ M'$, M' nün $m'\in M'$ ve $x\in\left[\phi\left(G\right)\right]_{G'}$ için xm' elemanını kapsayan en küçük idealini göstermektedir.

Teorem 3.17 $\mathcal{CM}$ kategorisi tamdır.

İspat. $\mathcal{CM}$ nin amalgated toplamları olduğundan keyfi koproduktların varlığının gösterilemsi yeterlidir. $j\in J$ için $\left(M_j,G_j,\mu_j\right)$, $\mathcal{CM}$ de olsun. Eğer

$$G=\Pi_{j\in J}\star G_j$$

$\mathbf{L}_K$ da $\left\{G_j\right\}_{j\in J}$ ailesinin koproduktı ve $q_j:G_j\rightarrow G$ cononical injection ise $\left\{\left(M_j,G_j,\mu_j\right)\right\}_{j\in J}$ ailesinin koproduktı (M,G,μ) dür. Burada

$$M=\prod_{j\in J}\star q_{j\star}M_j/\left[\prod_{j\in J}\star q_{j\star}M_j,\prod_{j\in J}\star q_{j\star}M_j\right]_c$$

ve G den M ye etki Önerme 3.10 deki etkiye eşittir. Teorem 3.15 deki ispata benzer nedenlerden dolayı (M,G,μ) nün evrensel özelliği elde edilir. □

KAYNAKLAR DİZİNİ

Amoya, R., 1974. *Infinite-dimensional lie algébras,* Nordhoff.

Ayadi, M., 1985. *L'Homologie des algebres de Lie,* Universite Louis Pasteur, IRMA, Strasbourg.

Bakhturin, Yu. A., 1987. *Identical relations in Lie algebras,* VNU Science Press, Utrecht.

Brown, R., 1984. *Coproducts of crossed P-modules: applications to second homotopy groups and to the homology of groups,* Topology, 23, 337-345.

Brown, R., Higgins, P., 1978. *On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces,* Proc. London Math. Soc.,3, 36, 193-212.

Brown, R., Wensley, Ch. D., 1996. *Computing crossed modules induced by an inclusion of a normal subgroup, with applications to homotopy 2-types,* Theory Appl. Categ., 2, 1, 3-16.

Casas, J.M., 1990. *Invariantes de módulo cruzados en Álgebras de Lie,* Ph.D.Theses, University of Santiago, 173.

Casas, J.M., 1991. *Invariantes de módulos cruzados en álgebras de Lie. Ph. D. Thesis, Alxebra 57,* Universidad de Santiago de Compostela.

Casas, J.M., Ladra, M., 2000. *Colimits in the Crossed Modules Category in Lie Algebras,* Georgian Mathematical Journal, 7, 3, 461-474.

Dixmier, J., 1974. *Algébres enveloppantes,* Gauthier-Villars, Paris.

Grandjean, A.R., 1971. *Reticulo de ideales de un objeto en una R-categoria,* Rev. Mth. Hisp. Amer. T. 32, 14-20.

Guin, D., 1986. *Cohomologie non abelienne des algebras de lie,* Universite Louis Pasteur. Irma., Strasbourg.

Guin, D., 1995. *Cohomologie des algébree de Lie croisées et K-théorie de Milnor additive,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 45, 1, 93-118.

Kassl, C., Loday, J.L., 1982. *Extensions centrales d'algébres de Lie,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 32, 4, 119-142.

Lavendhomme, R., Lucas, T.H., 1966. *On Modules and Crosed Modules ,* Journal of Algebra, 179, 936-963.

Lavendhomme, R., Roisin, J.R., 1980. *Cohomologie non abélienne de structures algébriques,* J. Algebra, 67, 385-414.

Maclane, S., 1958. *Extensions and Obstructions for Rings,* Illinois J. Math., 121, 316-345.

Maclane, S., 1988. *Categories for the working mathematician,* Graduate Texts in Mathematics, 5 Springer, New York.

Norrie, K.J., 1987. *Crossed Modules and Analogues of Groups Teorems,* Ph.D.Thesis, Kings College.

Porter, T., 1978. *Some categorical results in the category of crossed modules in commutative algebra,* J. Algebra, 109, 415-429.

Porter, T., 1986. *Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles,* J. Algebra, 99, 458-465.

Shammu, N.M., 1992. *Algebraic and an Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras,* Ph.D. Thesis,U.C.N.W.

Whitehead, J. H. C., 1986. *Combinatorial homotopy II,* Bull. Amer. Math. Soc., 453-496.