TEMEL ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL

Nurcan SANCAKTUTAN

Matematik Anabilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
2008

FUNDAMENTAL CROSSED MODULE

Nurcan SANCAKTUTAN

Department of Mathematics
MASTER OF SCIENCE DISSERTATION
2008

TEMEL ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL

Nurcan SANCAKTUTAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Ağustos 2008

ONAY

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Nurcan SANCAKTUTAN ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " **TEMEL ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

İkinci Danışman:

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Yrd.Doç. Dr.Ummahan EGE ERSLAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Enver USLU

Üye: Yrd.Doç. Dr.İ.İlker AKÇA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

TEMEL ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL

Çaprazlanmış modül kavramı, J.H.C. Whitehead [8] tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Çaprazlanmış modüller temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinatör grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli rolü vardır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, homotopi teori ile ilgili bazı temel kavramlara ve örneklere yer verilmiştir. İkinci bölümde homotopi grupları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Son bölümde ise, çaprazlanmış modül tanımı verilerek, gruplar üzerinde tanımlanmış olan Temel çaprazlanmış modüller incelenmiştir. Daha sonra çaprazlanmış kare tanımlanmış ve sonuç olarak temel çaprazlanmış kare rneği incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış Modüller, Temel Çaprazlanmış Modül, Homotopi Grupları.

SUMMARY

FUNDAMENTAL CROSSED MODULE

Crossed modules were invented by J.H.C. Whitehead [8] in his work on combinatorial homotopy theory. They have since found importent roles in many areas of mathematics including homotopy theory, homology and cohomology of groups, algebraic K-theory, cyclic homology, combinatorial group theory and differential geometry. Possibly crossed modules should now be considered one of the fundamental algebraic structures.

This master thesis consists of three chapters. In the first chapter we recall soma basic notions and examples about homotopy theory. In the following chapter, homotopy groups are examined detailed. In the last chapter, the notion of crossed module is given and fundamental crossed modules over groups are examined. Then the notion of fundamental crossed square is given and fundamental crossed square example is examined.

Keywords: Crossed Modules, Fundamental Crossed Module , Homotopy Groups.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten değerli hocalarım Prof.Dr. Mahmut Koçak ve Prof.Dr. Zekeriya Arvasi ye, bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr.İ.İlker Akça'ya ve ayrıca desteği için Ar.Gör.Dr. Dursun Irk'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET **v**

SUMMARY **vi**

TEŞEKKÜR **vii**

BÖLÜM 1. Homotopi Teorisi **1**

1.1 **HOMOTOPİ** 2

1.1.1 Homotopi Örnekleri 4

1.1.2 Relatif Homotopi 7

1.2 **Homotopi Denkliği ve Geri Çekmeler** 7

1.2.1 Homotopi Denkliği 7

1.2.2 Büzülebilir Uzay 8

1.2.3 Geri Çekmeler (Retract) 9

BÖLÜM 2. HOMOTOPİ GRUPLARI **12**

2.1 Topolojik Gruplar 12

BÖLÜM 3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER **19**

3.1 GİRİŞ 19

3.2 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 19

3.3 Temel (Fundamental) Çaprazlanmış Modül 22

3.4 Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Temel Özellikleri 32

3.5 Alt Çaprazlanmış Modüller 34

3.5.1 Normal Alt Çaprazlanmış Modüller ve Çaprazlanmış Bölüm Modülleri 34

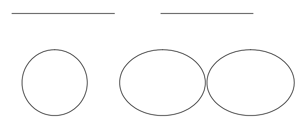
3.5.2 Çaprazlanmış kare (crossed square) 35

KAYNAKLAR DİZİNİ **39**

BÖLÜM 1

Homotopi Teorisi

Topolojinin temel problemlerinden biri, verilen iki topolojik uzayın homeomorf olup olmadığına karar vermektir. Bunu yaparken de kompaktlık, bağlantılılık, metriklenebilirlik...vb. topolojik özellikleri düşünebiliriz. Fakat çoğunlukla bu özellikler problemi çözmede yetersiz kalır. Örneğin $\mathbb{R}^2$ nin aşağıda verilen A, B, C, D gibi dört altuzayının herhangi ikisinin homeomorf olmadığını gösterelim.



Şekil 1.1:

İlk olarak B, C, D kompakt, A kompakt olmasın. Böylece A, diğer uzaylardan herhangi birine homeomorf olamaz. Eğer C den herhangi iki nokta çıkarırsak geriye kalan uzay her zaman iki bağlantılı bileşenlidir. Diğer yandan, B nin iç kısmından iki nokta yada D den merkezi de dahil olmak üzere iki nokta çıkarırsak, üç bağlantılı bileşene sahip uzaylar elde ederiz. Bu nedenle C, B ya da D ye homeomorf olamaz. Son olarak B yi D den ayırmak için, basitçe gözlemleyebiliriz ki $D \backslash \{d\}$ iki bileşenli olacak şekilde yalnızca bir $d \in D$ noktası vardır, o da D nin merkezidir,oysa B de $B \backslash \{b\}$ iki bileşene sahip olacak şekilde sayısız b noktası vardır. Böylece dört uzaydan herhangi ikisi homeomorf değildir.

Daha yüksek boyutlu örneklerde, genellikle verilen iki uzayın homeomorf olup olmadığına karar vermek daha zordur ve elementer işlemler bunun için yetersiz kalacaktır. Örneğin $\mathbb{R}^2$ düzleminin $\mathbb{R}^3$ uzayına homeomorf olmadığı nasıl gösterilebilir? Yukarıda saydığımız topolojik özelliklerden herhangi biri, bu iki uzayı birbirinden ayırmada kullanılamaz. Bundan başka S^2 küresi, T tor yüzeyi ve T_2 çift tor yüzeyi gibi yüzeyler düşünüldüğünde, şu ana kadar gördüğümüz hiçbir topolojik özellik bu yüzeyleri birbirinden ayırt etmeye yetmeyecektir. Bundan dolayı yeni özellikler ve teknikler sunmalıyız. Bu özelliklerin en doğalı basit bağlantılılıktır. Kabaca söylersek eğer, bir X uzayındaki her kapalı eğri X içindeki bir noktaya büzülebilirse, X uzayına basit bağlantılı denir.

Basit bağlantılılık, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ arasındaki ayrımı ortaya çıkaran bir özelliktir. Çünkü

$\mathbb{R}^3$ den bir nokta çıkarıldığında geriye basit bağlantılı bir uzay kalırken $\mathbb{R}^2$ den bir nokta çıkarıldığında geriye kalan uzay basit bağlantılı değildir. Bu özellik aynı zamanda S^2(basit bağlantılıdır) ile T tor yüzeyi (basit bağlantılı değildir) arasındaki ayrımı ortaya çıkarır. Fakat bu özellik T ile T_2 arasındaki ayrımı ortaya çıkaramaz, çünkü her iki uzay da basit bağlantılı değildir.

Basit bağlantılılığı özel bir hal olarak içeren, basit bağlantılılıktan daha genel bir kavram mevcuttur. Bu kavram, bir uzayın *"Temel Grubu"* olarak adlandırılan belirli bir gruptur. Homeomorf olan iki uzayın temel grupları izomorftur. Uzay basit bağlantılı olduğunda X in temel grubu aşikar gruptur. Böylece S^2 ve T nin homeomorf olmadığının ispatı, S^2 nin temel grubunun aşikar grup ve T nin temel grubunun aşikar grup olmadığının gösterilmesi ile yapılır.

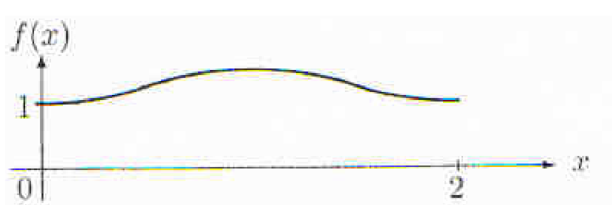
Temel grup kavramı, basit bağlantılılık özelliği ile yapılacağından daha çok sayıda uzay arasında ayrım yapılmasını sağlar. Örneğin T nin ve T_2 nin homeomorf olmadığının gösterilmesinde kullanılır.

1.1 HOMOTOPİ

Homotopi tanımını vermeden önce, bu kavramı anlamamızı kolaylaştıracak bir motivasyon örneği ile konuya giriş yapalım. Kapsaml bilgi için [1] ve [2] e baklabilir.

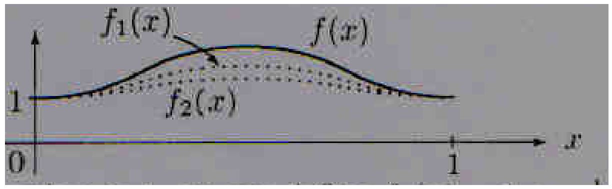
$$\begin{array}{cccc} f & : & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = 1 + x^2 (x-2)^2 \end{array}$$

fonksiyonunu ele alalım, bu fonksiyonun grafiği



Şekil 1.2:

biçimindedir. Şekil 1.2den de görüldüğü gibi bu fonksiyonun grafiği 1 sabit fonksiyonunun grafiğine çok benzerdir, sadece $x = 1$ noktasının civarında küçük bir salınıma sahiptir. $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 (x-2)^2$ fonksiyonunu ele alırsak, bu fonksiyonun da grafiği aynı şekle sahiptir fakat daha küçük salınım mevcuttur. Benzer şekilde $f_2(x) = 1+\frac{1}{3}x^2(x-2)^2$ fonksiyonu da aynı şekle sahiptir fakat daha da küçük salınımı vardır. Böylece daha genel



Şekil 1.3:

olarak $n \geq 1$ için $f_n(x) = 1 + \frac{1}{(n+1)}x^2(x-2)^2$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz. O halde f fonksiyonu ile 1 sabit fonksiyonu arasında değişen ara değer fonksiyonlarının ailesi elde edilir.

Bir fonksiyondan diğer bir fonksiyon üzerine sürekli bir deformasyon elde edebilmek için yukarıdaki gibi ara değer fonksiyonları gereklidir. Bunu oluşturmak için yani sürekli bir deformasyon elde edebilmek için f_1, f_2, $f_3, ...$ ara değer fonksiyonlarını tamsayılar ile değil, genelde 0 ile 1 arasındaki reel sayılar ile indislemeliyiz. Böylece $f_0 = f$ ve $f_1 = 1$ sabit fonksiyonu olacak şekilde bir $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ fonksiyonlar ailesi oluşturmak mümkündür.

Yukarıdaki örnekte her bir $t \in [0,1]$ için $f_t(x) = 1+(1-t)x^2(x-2)^2$ fonksiyonlarını ele alalım. Burada $f_0(x) = 1+x^2(x-2)^2 = f(x)$ ve $f_1(x) = 1$ sabit fonksiyonudur.

Böyle bir deformasyon yardımı ile $[0,1]$ içindeki herbir nokta için bir fonksiyon elde edilir, böylece deformasyon $[0,1]$ den $[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların kümesine bir fonksiyondur yani $t \in [0,1]$ noktasını f_t fonksiyonuna dönüştürür. Deformasyonun sürekli olması için ise bu fonksiyonun sürekli olması gerekir.

$\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ ailesi, herbir $t \in [0,1]$ için bir $f_t : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu belirler. Ayrıca her bir $x \in [0,2]$ için $f_t(x) \in \mathbb{R}$ dir. Böylece bu aileyi herbir $(x,t) \in [0,2] \times [0,1]$ ikilisini $f_t(x) \in \mathbb{R}$ değerine dönüştüren bir kural olarak düşünebiliriz. Diğer bir deyişle bir $[0,2] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu elde ederiz. $[0,2]$ ve $[0,1]$ üzerindeki topolojiler ele alındığında, çarpım topolojisi ile $[0,2] \times [0,1]$ üzerinde bir topoloji oluşturulur ve böylece $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ ailesi bu iki topolojik uzay arasında bir fonksiyona karşılık gelir. O halde karşılık gelen fonksiyon sürekli ise, sürekli olan bir fonksiyonlar ailesi tanımlamış oluruz. Böylece adına "homotopi" denilen aşağıdaki kavram elde edilir.

Tanım 1.1 X ve Y topolojik uzaylar,

$$f, g \ : \ X \longrightarrow Y$$

sürekli fonksiyonlar olsun.

$$\begin{array}{rcccl} F & : & X \times [0,1] & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \longmapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu her $x \in X$ için

$$\begin{array}{rcl} F(x,0) & = & f(x) \\ F(x,1) & = & g(x) \end{array}$$

şartlarını sağlayacak şekilde mevcutsa, f ile g fonksiyonlarına homotopiktir denir. F fonksiyonuna da f ile g arasındaki homotopi denir. f ile g arasındaki bu homotopi $f \simeq g$ şeklinde gösterilir.

İki matematiksel nesnenin homotopik olması, birinin diğeri üzerine sürekli olarak deforme edilebilmesi ile aynı anlamdadır. Örneğin gerçel sayı doğrusu tek bir noktaya homotopiktir. Ancak çember, tek bir nokta uzayına homotopik değildir.

1.1.1 Homotopi Örnekleri

Örnek 1.1 Her $(x,y) \in S^1$ için

$$\begin{array}{ccc} f : S^1 \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ & (x,y) \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

doğal içine (inclusion) fonksiyon ve

$$\begin{array}{ccc} g : S^1 \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ & (x,y) \longmapsto & (0,0) \end{array}$$

sabit fonksiyon olmak üzere

$$F \ : \ S^1 \times I \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^2$$

$(I = [0,1])$ fonksiyonu $F((x,y),t) = (1-t)f(x,y)$ şeklinde tanımlandığında süreklidir. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} F((x,y),0) & = & (1-0)f(x,y) \\ & = & f(x,y) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} F((x,y),1) & = & (1-1)f(x,y) \\ & = & (0,0) \\ & = & g(x,y) \end{array}$$

olup f ve g homotopiktir.

Örnek 1.2 $\forall x$ için $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ birim dönüşüm ve $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ sabit dönüşümü $g(x) = 0$ olacak şekilde verilsin. Böylece $F : [0,1] \times I \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$F(x,t) \;=\; (1-t)x$$

şeklinde tanımlandığında, f ile g arasında bir homotopi belirtir.

Örnek 1.3 $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi iki sürekli fonksiyon olsun.

$$F : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ şeklinde tanımlansın. F, sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak yazıldığından süreklidir. Ayrıca $F(x,0) = (1-0)f(x) + 0 = f(x)$ ve $F(x,1) = 0 + 1g(x) = g(x)$ olup F, f ve g arasında bir homotopidir.

Sonuç 1.2 $\mathbb{R}$ de herhangi iki sürekli fonksiyon alındığında, bu iki fonksiyon daima homotopiktir.

Bu düşünceyi konveks uzaylar için de kullanabiliriz. $\mathbb{R}^n$ in bir T alt uzayının konveks olması: T de herhangi x, y noktaları alındığında, x ile y yi birleştiren doğrunun yine T de olması demektir. Diğer bir deyişle, herhangi $t \in [0,1]$ sayısı için $tx + (1-t)y$ noktası T dedir.

Önerme 1.3 T konveks, S herhangi bir topolojik uzay ise, herhangi iki fonksiyon - $f, g : S \longrightarrow T$ homotopiktir.

İspat.

$$F : S \times [0,1] \longrightarrow T$$

fonksiyonu $F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$ şeklinde tanımlandığında, f ile g arasında bir homotopi belirtir. $\square$

Şimdi, homotopik fonksiyonların denklik sınıflarını oluşturalım. Bunun için homotopi bağıntısının, bir denklik bağıntısı olduğunu göstermemiz gerekecek.

Yardımcı Teorem 1.4 Homotopi bağıntısı "$\simeq$" bir denklik bağıntısıdır.

İspat. "$\simeq$" bağıntısının bir denklik bağıntısı olması için yansıma, simetri ve geçişme özelliğine sahip olduğunu göstermeliyiz.

i) $\simeq$ bağıntısının yansıyan olduğunu göstermek için $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = f(x)$ olacak şekilde bir $F : X \times I \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun tanımlanması gerekir. Burada $F(x,t) = f(x)$ olacak şekilde tanımlanırsa $f \simeq f$ olduğu görülür.

ii) $\simeq$ bağıntısının simetrik olduğunu göstermek için $f \simeq g$ iken $g \simeq f$ olduğunu göstermeliyiz. $f \simeq g$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rcccl} F & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \mapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan

$$\begin{array}{rcccl} G & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \mapsto & F(x,1-t) \end{array}$$

fonksiyonu da sürekli olup $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$ ve $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ elde edilir. O halde $g \simeq f$ dir.

iii) $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ olsun. O halde

$$\begin{array}{rcccl} F & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \mapsto & F(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ olacak şekilde ve

$$\begin{array}{rcccl} G & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \mapsto & G(x,t) \end{array}$$

sürekli fonksiyonu $G(x,0) = g(x)$ ve $G(x,1) = h(x)$ olacak şekilde mevcuttur. F ve G yardımı ile

$$\begin{array}{rcccl} H & : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & & (x,t) & \mapsto & H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \end{array}$$

sürekli fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Buradan $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ elde edilir. O halde $f \simeq h$ dır. $\square$

Bu teoreme göre sonuç olarak, iki topolojik uzay arasındaki homotopik fonksiyonların denklik sınıflarının bir kümesini oluşturabiliriz. Eğer f sürekli fonksiyon ise f in homotopi sınıfı, f e homotopik olan bütün sürekli fonksiyonlardan oluşur ve $[f]$ biçiminde gösterilir. Bir X uzayından Y uzayına $X \longrightarrow Y$ dönüşümlerin homotopi sınıflarının kümesini $[X,Y]$ olarak yazarız. Örneğin $X = Y = \mathbb{R}$ alırsak $X \longrightarrow Y$ tüm fonksiyonlar homotopiktirler (örnek 1.1.4). Böylece $[\mathbb{R},\mathbb{R}]$ tek bir elemandan oluşur.

1.1.2 Relatif Homotopi

Tanım 1.5 $A \subset X$, $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $a \in A$ için f ve g arasında $t \in I$ dan bağımsız $F(a,t)$ homotopisi mevcutsa f ve g fonksiyonlarına A ya göre homotopiktirler denir. Diğer bir deyişle $\forall a \in A$ ve $\forall t \in I$ için $F(a,t) = f(a) = g(a)$ olacak şekildeki F homotopisine A ya göre homotopi denir. Bu homotopi $f \simeq g\,(relA)$ veya $F : f \simeq g\,(relA)$ biçiminde gösterilir.

$F : f \simeq g\,(relA)$ ise $\forall x \in X$ için $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ olup $\forall x_0 \in A$, $\forall t \in I$ için $F(x_0,t) = f(x_0) = g(x_0)$ elde edilir. Eğer $A = \emptyset$ ise A ya göre homotopiye null homotopi denir.

Teorem 1.6 A ya göre homotopi olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Yardımcı teorem 1.1.7 ye benzer şekilde ispat yapılır.

Uyarı 1.7 $a \in A$ noktalarının görüntüleri, Y nin aynı noktasına dönüşecek şekilde tüm $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonlarının kümesi, denklik sınıfları biçiminde ayrıştırılabilir.

Böylece f ve g iki sürekli fonksiyonlarının, aynı sınıfa ait olabilmesi için gerek ve yeter şart $f \simeq g\,(relA)$ olmasıdır. Sürekli fonksiyonların bu sınıfları, homotopi sınıfları olarak adlandırılır.

1.2 Homotopi Denkliği ve Geri Çekmeler

1.2.1 Homotopi Denkliği

İki sürekli fonksiyonun homotopik iken denk oluğunu düşünecek isek, homeomorfizm tanımını değiştirmemiz gerekir '=' işareti yerine homotopiyi koymalıyız. Bu bizi aşağıdaki 'homotopi denkliği' kavramına götürür:

Tanım 1.8 X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $g \circ f \simeq I_X : X \longrightarrow X$ ve $f \circ g \simeq I_Y : Y \longrightarrow Y$ olacak şekilde $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow X$ sürekli fonksiyonları mevcutsa, X ve Y uzaylarına aynı homotopi tipindendir ya da homotop olarak denktir denir. f ile g fonksiyonlarına ise homotopi denklikleri denir.

Yazarken 'homotopi denkliği' kavramından ziyade 'iki uzayın homotopik olması kavramı daha yaygındır.

Yardımcı Teorem 1.9 S ve T homeomorf ise, bu uzaylar homotopi denktirler.

İspat. $f : S \longrightarrow T$ ve $g : T \longrightarrow S$ homeomorfizmler olmak üzere $f \circ g$ ve $g \circ f$ sırasıyla birim dönüşümler ise bu bileşkeler sırasıyla birim dönüşümlere homotopiktir (yardımcı teorem 1.1.7). $\square$

Açıktır ki homeomorf uzaylar aynı homotopi tipindedir, yani homotop olarak denktirler. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 1.4 S tek bir nokta içeren bir uzay ise S ve $\mathbb{R}$ homotopi denktir. Bunu görmek için $f : \mathbb{R} \longrightarrow S$ sabit bir fonksiyon (f i nasıl tanımladığımıza dair herhangi bir seçim yok) ve $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, S deki tek noktayı $\mathbb{R}$ de 0 a götüren bir fonksiyon olsun. $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 0 a göre sabit fonksiyon iken, $f \circ g : S \longrightarrow S$ birim fonksiyondur. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tüm fonksiyonlar homotopik olduğundan (örnek1.1.4) $g \circ f$, birime homotopiktir.

Sonuç 1.10 $[\mathbb{R}, \mathbb{R}] = [\{0\}, \{0\}]$ dır. $\{0\} \longrightarrow \{0\}$ şeklinde yalnızca bir sürekli fonksiyon olduğundan, $\{0\} \longrightarrow \{0\}$ dönüşümlerin yalnızca bir homotopi sınıfı olabilir. Böylece $[\{0\}, \{0\}]$ yalnızca bir eleman içerir. Sonuç olarak $[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ de bir elemana sahiptir.

O halde şu tanımı verebiliriz:

1.2.2 Büzülebilir Uzay

Tanım 1.11 Bir X uzayı bir noktaya homotopi denk ise, yani tek nokta kümesi ile aynı homotopi tipinden ise bu X uzayına büzülebilir (contractible) uzay denir.

Örnek 1.5 $[0, 1]$ aralığı tek nokta uzayı $\{0\}$ a homotopi denktir.

$f : [0, 1] \longrightarrow \{0\}$ fonksiyonu $f(x) = 0$ ve $g : \{0\} \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $g(0) = 0$ şeklinde tanımlansın. $f \circ g : \{0\} \longrightarrow \{0\}$ birim dönüşüm olup, bu bileşke kesinlikle birim dönüşüme homotopiktir. Tersine $\forall x$ için $(g \circ f)(x) = 0$. olsun. Bu, birim dönüşüme homotopiktir (örnek 1.1.3).

Örnek 1.6 Aynı şekilde $(0, 1)$ açık aralığının $\{0\}$ a homotopi denk olduğu gösterilebilir.

Örnek 1.7 Sonuç olarak, (a, b) açık aralığı $(0, 1)$ e homeomorf olduğundan, (a, b) $\{0\}$ a homotopi denktir. Bu sonuç, sonlu olmayan (a, ∞) ve $(-\infty, b)$ aralıkları için dahi geçerlidir.

İki uzayın homotopi denk olmadığını ispatlamak zordur, tıp ki iki uzayın direkt olarak homeomorf olmadığını ispatlamanın zor olduğu gibi.

Uyarı 1.12 m nokta içeren bir uzay, n nokta içeren bir uzaya $m = n$ olduğu durumda homotopi denktir. Ayrıca bu ifadeyi, bağlantısız bir uzay bağlantılı bir uzaya homotopi denk olamaz şeklinde genişletebiliriz. Buradan aşağıdaki önermeye varmak mümkündür.

Önerme 1.13 S bağlantılı ve T bağlantısız ise S ve T homotopi denk değildir.

Sonuç olarak bağlantılılığı, homotopi denk olmayan uzayları ayırmada kullanabiliriz. Ancak kompaktlığı aynı yolla kullanamayız, şöyle ki örnek 1.2.6 ve 1.2.7 deki her iki uzay büzülebilir ve böylece homotopi denktir. Fakat uzaylardan biri kompakt olup, diğeri ise kompakt değildir. Benzer şekilde Hausdorff olmayan uzaylara homotopi denk olan Hausdorff uzaylar vardır.

1.2.3 Geri Çekmeler (Retract)

Tanım 1.14 $A \subset X$ olsun. $i : A \longrightarrow X$ içine fonksiyon olmak üzere bir

$$r : X \longrightarrow A$$

sürekli fonksiyonu $r \circ i = I_A$ olacak şekilde mevcutsa A ya X in bir geri çekmesi, r fonksiyonuna ise geri çekme (retract) fonksiyonu denir.

Şimdi de homotopi denkliğin özel bir durumu olan 'deformasyon geri çekme' (deformation retract) tanımını verelim.

Tanım 1.15 $A \subset X$ olsun.

$$i : A \longrightarrow X$$

içine dönüşüm olmak üzere

$$r : X \longrightarrow A$$

geri çekme fonksiyonu $i \circ r \approx I_x$ olacak şekilde mevcutsa A ya X in deformasyon geri çekmesi denir. Denk olarak, eğer $\forall x \in X$ için $F : X \times I \rightarrow X$ homotopisi $F(x,1) \in A$ olacak şekilde mevcutsa A, X in deformasyon geri çekmesidir. Diğer bir deyişle, bir deformation retract X deki birim dönüşüm ve bir retract arasında bir homotopidir.

Örnek 1.8

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ -1 \leq z \leq 1\right\}$$

ve

$$S^1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ z = 0\right\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{cccll} i & : & S^1 & \longrightarrow & C \\ & & (x,y,0) & \mapsto & i(x,y,o) = (x,y,0) \end{array}$$

içine fonksiyonu ile

$$\begin{array}{cccll} r & : & C & \longrightarrow & S^1 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & r(x,y,z) = (x,y,0) \end{array}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccccccc} r \circ i & : & S^1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & S^1 \\ & & (x,y,0) & \mapsto & (x,y,0) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$$

olup $r \circ i = I_{S^1}$ dir. Ayrıca

$$\begin{array}{ccccccc} i \circ r & : & C & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & C \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,0) & \mapsto & (x,y,0) \end{array}$$

şeklindedir.

$$\begin{array}{cccll} F & : & C \times I & \longrightarrow & C \\ & & ((x,y,z),t) & \mapsto & F((x,y,z),t) = (x,y,tz) \end{array}$$

biçiminde tanımlı F fonksiyonu, $i \circ r$ ve $I : C \longrightarrow C$ arasında bir homotopi dönüşümüdür. Böylece S^1 ve C homotop olarak denk uzaylardır.

Yukarıdaki örnekte çember, silindirin geri çekmesidir.

Örnek 1.9 X herhangi bir uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $\{x_0\}$, X uzayının bir geri çekmesidir.

$$\begin{array}{cccll} f & : & \{x_0\} & \longrightarrow & X \\ & & x_0 & \mapsto & f(x_0) = x_0 \end{array}$$

içine fonksiyonu ve

$$\begin{array}{rcccl} g & : & X & \longrightarrow & \{x_0\} \\ & & x & \mapsto & g(x) = x_0 \end{array}$$

sabit fonksiyonu için $g \circ f = I_{x_0}$ olduğu açıktır.

$$\begin{array}{rcccl} F & : & X \times I & \longrightarrow & X \\ & & (x_0, t) & \mapsto & tx_0 + (1-t)\, x_0 \end{array}$$

biçiminde tanımlanan F, $f \circ g$ ve $I \ : \ X \ \longrightarrow \ X$ fonksiyonları arasında bir homotopidir. O halde $\{x_0\}$, X uzayının bir geri çekmesidir.

BÖLÜM 2

HOMOTOPİ GRUPLARI

2.1 Topolojik Gruplar

Bu bölümün amacı, grup teorinin, topolojide uygulamasının nasıl olduğunu göstermek ve bu disiplindeki önemli sonuçlarını araştımaktır. Topolojik problemleri grup teorideki problemlere dönüştürme işlemi şu şekildedir. Her bir X topolojik uzayına bir $F(X)$ grubu ve her bir sürekli $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümüne bir $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ grup homomorfizmi karşılık getirilmesiyle

$(1) F(id_X) = id_{F(X)}$ ve $(2) F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ şartları sağlanır.

Kategori teori dilinde bu şekildeki bir F dönüşümüne, topolojik uzaylar kategorisi ve gruplar kategorisi arasında bir 'kovaryant funktor' denir. (1) ve (2) şartları gösteriyor ki $F(X)$, X in bir topolojik değişmezi, yani X ve Y topolojik uzayları homeomorf ise karşılık gelen gruplar izomorftur. Gerçekten de $f : X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm ise $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ bir izomorfizmdir, çünkü (1) ve (2) şartlarından dolayı $F(f^{-1})$, $F(f)$'e terstir. Şayet $F(X)$, $F(Y)$ ye izomorf değilse biliyoruz ki X, Y ye homeomorf olamaz. Böylece F funktoru, topolojik uzayları birbirinden ayırmada bize yardımcı olur.

Tanım 2.1 X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$, X de bir nokta olsun. X de x_0 tabanlı bir 'singüler $n-$küre'

$$\alpha : [0,1]^n \longrightarrow X$$

sürekli dönüşümü olup α, $[0,1]^n$ in $\partial[0,1]^n$ sınırını x_0 a dönüştürür. Bu şekildeki tüm singüler n-kürelerin kümesi $\Omega_n(X, x_0)$ ile gösterilir. Özel olarak singüler $1 - küre$ 'loop' adını alır.

$n = 1$ ve $n = 2$ durumlarında kolaylıkla, sezgimizle bu soyut tanımı bağdaştırabiliriz. $n = 1$ için $[0,1]$ aralığını elastik bir ip olarak düşünebiliriz öyle ki, α dönüşümü bu aralığın uç noktalarını X uzayındaki x_0 noktasında birleştirir. $n = 2$ durumunda, $[0,1]^2$ karesini, bir kare elastik kumaş olarak düşünebiliriz ve α dönüşümü bu kumaşın sınırlarından çekerek, bu sınırları X uzayındaki x_0 noktasında birleştirir.

Tanım 2.2

$$\alpha, \beta \ : \ [0,1]^n \ \longrightarrow \ X$$

$x_0 \in X$ tabanlı iki singüler n-küre olsun. α ve β nin birleşimi

$$(\alpha\#\beta)(s_1,...,s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, ..., s_n) & , 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, ..., s_n) & , \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde olup,bu birleşim bir singüler n-küredir.

Bu birleşim bize $\# \ : \ \Omega_n(X,x_0) \times \Omega_n(X,x_0) \ \longrightarrow \ \Omega_n(X,x_0)$ şeklinde bir ikili işlem verir, fakat bu işlem zayıf cebirsel özelliklere sahip, genellikle birleşimli değildir. Aşağıdaki teorem bu zayıf cebirsel yapıyı zenginleştirmede bize yardımcı olacaktır.

Teorem 2.3 X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun.

(a)$\simeq$, $\Omega_n(X,x_0)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

(b)$a \simeq \beta$ ve $\alpha' \simeq \beta'$ ise $\alpha\#\beta \simeq \alpha'\#\beta'$ dır.

(c)$\forall\alpha \in \Omega_n(X,x_0)$ için $\alpha\#1_{x_0} \simeq 1_{x_0}\#\alpha \simeq \alpha$ elde edilir.

(d)$a \in \Omega_n(X,x_0)$ için $\overline{\alpha}(s_1,s_2,...,s_n) = \alpha(1-s_1,s_2,...,s_n)$ olacak şekilde $\overline{\alpha} \in \Omega_n(X,x_0)$ tanımlayalım. Böylece $\overline{\alpha}\#\alpha \simeq \alpha\#\overline{\alpha} \simeq 1_{x_0}$ dır.

(e)$\forall\alpha,\beta,\gamma \in \Omega_n(X,x_0)$ için $(\alpha\#\beta)\#\gamma \simeq \alpha\#(\beta\#\gamma)$ elde edilir.

İspat. **(a)**Yansıma: $\alpha \in \Omega_n(X,x_0)$ ise $F(s,t) = \alpha(s)$, α dan α ya bir homotopidir.O halde $\alpha \simeq \alpha$ dır.

Simetri: α dan β ya bir F homotopisi var ise, β dan α ya bir $G(s,t) = F(s,1-t)$ homotopisi elde ederiz.

Geçişme: α dan β ya bir F homotopisi, β dan α ya bir G homotopisi var ise, α dan γ ya

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde bir H homotopisi vardır.

(b)$F:\alpha\simeq\beta$ ve $G:\alpha^{'}\simeq\beta^{'}$ ise $H:\alpha\#\beta\simeq\alpha^{'}\#\beta^{'}$ homotopisi,

$$H(s_1,s_2,...,s_n,t)=\begin{cases} F(2s_1,s_2,...,s_n,t) & ,0\leq s_1\leq\frac{1}{2} \\ G(2s_1-1,s_2,...,s_n,t) & ,\frac{1}{2}\leq s_1\leq 1\end{cases}$$

şeklindedir.

(c)

$$F(s_1,s_2,...,s_n,t)=\begin{cases} \alpha(0,s_2,...,s_n)=x_0 & ,2s_1+t\leq 1 \\ \alpha(\dfrac{2s_1+t-1}{1+t}),s_2,...,s_n) & ,2s_1+t\geq 1\end{cases}$$

ve

$$G(s_1,s_2,...,s_n,t)=\begin{cases} \alpha(\dfrac{2s_1}{1+t},s_2,...,s_n) & ,2s_1\leq 1+t \\ \alpha(1,s_2,...,s_n)=x_0 & ,2s_1\geq 1+t\end{cases}$$

verilsin. Böylece F, $1_{x_0}\#\alpha$ dan α ya bir homotopi iken G de $\alpha\#1_{x_0}$ dan α ya bir homotopidir.

(d)1_{x_0} dan α ya bir homotopi:

$$F(s_1,s_2,...,s_n,t)=\begin{cases} \alpha(2ts_1,s_2,...,s_n) & ,0\leq s_1\leq\frac{1}{2} \\ \alpha(2t(1-s_1),s_2,...,s_n) & ,\frac{1}{2}\leq s_1\leq 1\end{cases}$$

şeklinde verilsin. Böylece $\forall\alpha\in\Omega_n(x,x_0)$ için $\alpha\#\overline{\alpha}\simeq 1_{x_0}$ dır. $\overline{\alpha}$ yerine α koyarak ve $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$ olduğunu gözlemleyerek $\overline{\alpha}\#\alpha\simeq 1_{x_0}$ elde edilir.

(e)$(\alpha\#\beta)\#\gamma$ dan $\alpha\#(\beta\#\gamma)$ ya bir homotopi:

$$F(s_1,s_2,...,s_n,t)=\begin{cases} \alpha(\dfrac{4s_1}{1+t},s_2,...,s_n) & ,0\leq s_1\leq\dfrac{t+1}{4} \\ \beta(4s_1-1-t,s_2,...,s_n) & ,\dfrac{t+1}{4}\leq s_1\leq\dfrac{t+2}{4} \\ \gamma(\dfrac{4s_1-2-t}{2-t},s_2,...,s_n) & ,\dfrac{t+2}{4}\leq s_1\leq 1\end{cases}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. □

Şimdi bu teoremin içeriğine bakalım: **(a)** şıkkında $\Omega_n(X,x_0)$ ın denklik bağıntısı '$\simeq$' altında bölüm uzayını düşünebiliriz, bu bölüm uzayı $\pi_n(X,x_0)$ ile gösterilir ve bir $\alpha\in\Omega_n(x,x_0)$ elemanının denklik sınıfı $[\alpha]$ şeklinde gösterilir. **(b)** şıkkı gösteriyor ki $\Omega_n(X,x_0)$ üzerindeki birleşme işlemi, $\pi_n(X,x_0)$ üzerinde iyi tanımlı bir ikili işlem indirger. **(c)** şıkkı $[1_{x_0}]$ ın $\pi_n(X,x_0)$ üzerindeki $\#$ çarpımının bir etkisiz elemanı olduğunu söylemektedir. **(d)** şıkkı $(\pi_n(X, x_0), \#)$ da her bir elemanın tersi olduğunu ve son olarak **(e)** şıkkı ise $\#$ ın asosyatif olduğunu söylemektedir. Böylece grup aksiyomlarının tamamını gösterdik.

Tanım 2.4 $\pi_n(X, x_0), \#)$ grubuna X in x_0 tabanlı $n - inci$ homotopi grubu denir. Özel olarak $\pi_1(X, x_0)$ a X in x_0 tabanlı temel grubu (fundamental group) denir.

Esas olarak $\pi_n(X, x_0)$ ın x_0 taban noktasının seçimine bağlı olmadığını aşağıdaki teoremle görebiliriz:

Teorem 2.5 X de, x_0 dan y_0 a bir γ yolu var ise $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, y_0)$ dır.

Teoremden anlaşılacağı üzere, X yol bağlantılı ise $x_0 \in X$ tüm taban noktaları için $\pi_n(X, x_0)$ aynı gruptur (izomorfizme göre). Şayet taban noktası önemli değilse, yalnızca $\pi_n(X)$ şeklinde yazarız ve (bir taban noktası belirtmeksizin) bu gruba X in $n - inci$ homotopi grubu deriz.

Şimdi homotopi gruplarının topolojik değişmezler olduğunu göreceğiz: X ve Y homeomorf yol bağlantılı uzaylar ise $\forall n$ için $\pi_n(X) = \pi_n(Y)$ dir.

Teorem 2.6 (a) $f : X \longrightarrow Y$ topolojik uzaylar arasında sürekli bir dönüşüm olsun. Dahası $x_0 \in X$ ve $y_0 = f(x_0)$ olsun. Böylece

$$\begin{array}{rccc} \pi_n(f) : & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, y_0) \\ & [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

iyi tanımlı bir grup homomorfizmdir.

(b)$id : X \longrightarrow X$, X in birim dönüşümü olsun. Böylece $\pi_n(id) = id$, $\pi_n(X, x_0)$ üzerinde birim dönüşümdür.

(c) $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ sürekli dönüşümler ise, $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ dir.

(d)X, Y ye homeomorf ise her n için $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$ dir.

İspat. (a)$\pi_n f$ in iyi tanımlı olduğunu göstermek için, X de $\alpha \simeq \beta$ iken Y de $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi F, α dan β ya bir homotopi ise, $f \circ F$, $f \circ \alpha$

dan $f \circ \beta$ ya bir homotopidir. Böylece $f \circ (\alpha \# \beta) = (f \circ \alpha) \# (f \circ \beta)$ gösterir ki $\pi_n(f)$ bir grup homomorfizmidir.

(b)Aşikardır.

(c)$\alpha \in \Omega_n(X, x_0)$ herhangi bir singüler küre ise,

$\pi_n(g \circ f)[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = (\pi_n g)([f \circ \alpha]) = (\pi_n g)((\pi_n f)[\alpha])$ dir.

(d) $f \; : \; X \longrightarrow Y$ bir homeomorfizm ise $\pi_n f \; : \; \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ bir grup izomorfizmidir. Bu ise $g = f^{-1}$ alındığı takdirde (c) nin bir sonucudur.

Bu bölümün başında da bahsettiğimiz gibi 2.1.6 (b) ve (c) gösteriyor ki π_n, topolojik uzaylar kategorisi ve gruplar kategorisi arasında bir funktordur.

Şimdi, bir abelyen temel gruba sahip olduğu gösterilebilen topolojik uzayların, oldukça geniş bir sınıfını tanımlamak istiyoruz. Böylece bu sonucu, keyfi bir topolojik uzayın yüksek homotopi gruplarının abelyen olduğunu göstermek için kullanabiliriz. $\square$

Tanım 2.7 Bir topolojik monoid, etkisiz elemanı 1 olan sürekli bir

$$* \; : \; X \times X \longrightarrow X$$

ikili işlemi ile birlikte bir X topolojik uzayıdır.

Teorem 2.8 $(X, *)$, etkisiz elemanı 1 olan bir topolojik monoid olsun. α, β, α' ve β' 1 tabanlı loop'lar olsun.

(a)$\alpha \simeq \alpha'$ ve $\beta \simeq \beta'$ ise $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ dir.

(b)$\alpha * \beta \simeq \beta * \alpha \simeq \alpha \# \beta$ dır.

(c)$\pi_1(X, 1)$ temel grubu abelyendir.

İspat. **(a)**$F : \alpha \simeq \alpha'$ homotopisi ve $G : \beta \simeq \beta'$ homotopisi var ise $H : \alpha * \alpha' \simeq \beta * \beta'$ homotopisi $H(s,t) = F(s,t) * G(s,t)$ şeklinde vardır. Burada H ın sürekliliği, $*$ çarpımının sürekliliğinden kaynaklanmaktadır.

(b)

$$\overline{\alpha}(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$\overline{\beta}(s) = \begin{cases} 1 & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

verilsin. Ayrıca

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2s}{2-t}\right) & ,0 \le s \le 1-\dfrac{t}{2} \\ 1 & ,1-\dfrac{t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

ve

$$G(s,t) = \begin{cases} 1 & ,0 \le s \le \frac{t}{2} \\ \beta\left(\dfrac{2s-t}{2-t}\right) & ,\frac{t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

tanımlayalım. Böylece F, α dan $\overline{\alpha}$ ya bir homotopi ve G, β dan β ya bir homotopidir. (a) şıkkından dolayı $\alpha * \beta \simeq \overline{\alpha} * \overline{\beta}$ ve $\beta * \alpha \simeq \overline{\beta} * \overline{\alpha}$ dır. Diğer yandan $\overline{\alpha}$ ve $\overline{\beta}$ tanımından $\overline{\alpha} * \overline{\beta} = \overline{\beta} * \overline{\alpha} = \alpha \# \beta$ elde edilir.

(c)(a) ve (b) şıkkının bir sonucudur. □

Şimdi de keyfi bir X topolojik uzayının, yüksek mertebeden homotopi gruplarının değişmeliliğini ortaya koymak istiyoruz. Bir x_0 taban noktasını seçtikten sonra kompakt-açık topoloji ile birlikte $\Omega_1(X, x_0)$ uzayını ele alalım. Bu topoloji hakkında bilmemiz gereken yalnızca iki şey var, Evaluation fonksiyonu

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X, x_0) \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ (\alpha, t) & \longmapsto & \alpha(t) \end{array}$$

süreklidir ve # işlemi ile birlikte $\Omega_1(X, x_0)$ bir topolojik monoid dir.

Teorem 2.9 X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun.

(a)$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega_1(X, x_0), 1_{x_0})$ dır.

(b)$n \ge 2$ ise $\pi_n(X, x_0)$ abelyendir.

İspat. (a)$\Omega_1(X, x_0)$ da 1_{x_0} tabanlı herhangi bir α singüler $(n-1)-küre$ için, X de x_0 tabanlı bir $\alpha_\natural$ singüler $n-$küresi $\alpha_\natural(s_1, ..., s_n) = \alpha(s_1, ..., s_{n-1})(s_n)$ şeklinde tanımlansın. $\alpha(s_1, ..., s_{n-1})$ in, $\Omega_1(X, x_0)$ ın bir elemanı, yani x_0 tabanlı bir loop olduğuna dikkat ediniz. Böylece evaluation fonksiyonu sürekli olduğu için $\alpha_\natural$ süreklidir ve α, $\partial[0,1]^n$ i 1_{x_0} a dönüştürdüğü için $\alpha_\natural$, $\partial[0,1]^n$ i x_0 a dönüştürür.Ayrıca $\alpha(s_1, ..., s_{n-1})$, 0 ve 1 i x_0 a dönüştürür. Dahası β, X de x_0 tabanlı bir singüler $n-$küre ise, $\Omega_n(X, x_0)$ da

1_{x_0} tabanlı bir $\beta_\flat$ singüler $(n-1)-$küresini, $\beta_\flat(s_1,...,s_{n-1})(s_n) = \beta(s_1,...,s_n)$ şeklinde tanımlarız. $\beta : [0,1]^n \longrightarrow X$ ın sürekliliğinin $\beta_\flat : [0,1]^{n-1} \longrightarrow \Omega_1(X,x_0)$ nın sürekliliğini gerektirdiğini göstermek kolaydır.

Açık olarak $\forall\alpha$ ve β için $\alpha_{\natural\flat} = \alpha$ ve $\beta_{\flat\natural} = \beta$ dır. Dahası, $\alpha \simeq \alpha'$, $\alpha_\natural \simeq \alpha'_\natural$ olmasını gerektirir ve $\beta \simeq \beta'$, $\beta_\flat \simeq \beta'_\flat$ yi gerektirir. Bu, istenilen izomorfizmi verir.

(b)n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 2$ için $\pi_2(X,x_0) \cong \pi_1(\Omega_1(X,x_0),1_{x_0})$ olup (2.1.9) dan dolayı abelyendir, çünkü $\Omega_1(X,x_0)$ bir topolojik monoiddir. $n \geq 3$ olsun. Tümevarım hipotezinden ((X,x_0) yerine $(\Omega_1(X,x_0),1_{x_0})$ a uygulanır) biliyoruz ki $\pi_{n-1}(\Omega(X,x_0),1_{x_0})$ abelyendir. Böylece $\pi_n(X,x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0),1_{x_0})$ izomorfizmi istenilen sonucu verir. $\square$

Şimdiye kadar bu bölümde neler yaptığımızı özetleyelim. Her bir X topolojik uzayı ile grupların (X in homotopi gruplarının) bir $\pi_n(X)$ $(n \geq 1)$ dizisini ilişkilendirdik, öyle ki bir $f : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü, $\pi_n f : \pi_n X \longrightarrow \pi_n Y$ grup homomorfizmlerini indirger. $\pi_n(id_X) = id_{\pi_n X}$ ve $\pi_n(g \circ f) = (\pi_n g) \circ (\pi_n f)$ özellikleri, topolojik problemleri cebirsel problemlere dönüştürmemize olanak sağlıyor. Ayrıca bu özellikler, $\pi_n(X)$ gruplarının topolojik değişmezler olduğunu gösteriyor.

Homotopi gruplarının belirlenmesi genellikle zordur. Bu yüzden hesaplaması daha kolay değişmezlere bakılır(bu değişmezler, bir uzay hakkında homotopi grupları kadar bilgi içermese dahi).

BÖLÜM 3

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

3.1 GİRİŞ

Çaprazlanmış modül kavramı, J.H.C. Whitehead [8] tarafından tanımlanmıştır. Bu kavram homotopi teoride önemli bir yer tutmuştur. Whitehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerinde yaptığı çalışmasında, çaprazlanmış modüllere yer vermiştir.

Çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinatör grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin bir çok alanında önemli rolü vardır.

Çaprazlanmış modül kavramının Whitehead tarafından grup yapısı üzerinde tanımlanmasından sonra, cebir yapısı üzerine de aktarılmıştır. Norrie [5] gruplar üzerinde çaprazlanmış modülleri ayrıntılıbiçimde incelemiştir.

3.2 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak, bazı standart örnekleri inceleyeceğiz. Daha sonra bazı temel özelliklere yer vereceğiz. Son olarak da alt çaprazlanmış modül, normal alt çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış bölüm modülü tanımlarını ifade edeceğiz.

Tanım 3.1

$$\partial \; : \; C \longrightarrow G$$

grup homomorfizmi ve

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \longrightarrow & C \\ (g, c) & \longmapsto & g_c \end{array}$$

G nin C üzerine etkisi ile birlikte her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için

ÇM1) $\partial(g_c) = g\partial(c)g^{-1}$

ÇM2) $\partial c_{c'} = cc'c^{-1}$ şartları sağlanıyor ise ∂ ye bir çaprazlanmış modül denir ve (C, G, ∂) ile gösterilir. Şimdi, herhangi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını verelim.

Tanım 3.2 (C, G, ∂) ve (C', G', ∂') iki çaprazlanmış modül olsun. Her $c \in C$ ve $g \in G$ için

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \times C \arrow[r, "\psi\times\varphi"] \arrow[d] & G' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\varphi"'] & C' \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları göz önüne alındığında

$$\begin{tikzcd} (g, c) \arrow[r] \arrow[d] & (\psi(g), \varphi(c)) \arrow[d] \\ g_c \arrow[r] & \varphi(g_c) = \psi(g)_{\varphi(c)} \end{tikzcd}$$

olup $\varphi(g_c) = \psi(g)_{\varphi(c)}$ elde edilir. Böylece

$$(\varphi, \psi) \ : \ (C, G, \partial) \ \longrightarrow \ (C', G', \partial')$$

homomorfizm çiftine çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Örnek 3.1 N, G grubunun normal alt grubu olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \partial & : & N & \longrightarrow & G \\ & & n & \longmapsto & n \end{array}$$

içine (inclusion) homomorfizmi ve

$$\begin{array}{ccl} G \times N & \longrightarrow & N \\ (g, n) & \longmapsto & g_n = gng^{-1} \end{array}$$

şeklindeki G nin N üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten

ÇM1)

$$\begin{array}{rcl} \partial({}^{g}n) & = & \partial(gng^{-1}) \\ & = & gng^{-1} \\ & = & g\partial(n)g^{-1} \end{array}$$

ÇM2)

$$\begin{array}{rcl} {}^{\partial n}n' & = & {}^{n}n' \\ & = & nn'n^{-1} \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 3.2 M, bir $\mathbb{Z}G-$modül olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \partial = 1 \ : & M & \longrightarrow & G \\ & m & \longmapsto & 1_G \end{array}$$

aşikar (trivial) homomorfizmi ve

$$\begin{array}{rcl} G \times M & \longrightarrow & M \\ (g,m) & \longmapsto & {}^{g}m = gm \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

ÇM1)

$$\begin{array}{rcl} \partial({}^{g}m) & = & \partial(gm) \\ & = & 1 \\ & = & g1g^{-1} \\ & = & g\partial(m)g^{-1} \end{array}$$

ÇM2)

$$\begin{array}{rcl} {}^{\partial m}m' & = & {}^{1}m' \\ & = & 1m' \\ & = & m'mm^{-1} \\ & = & mm'm^{-1}(M \text{ abelyen grup}) \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 3.3 K bir grup ve

$$G = \{f_k : f_k : K \longrightarrow K; \ f_k(k') = kk'k^{-1}\}$$

kümesi K nın iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} \partial \ : & K & \longrightarrow & G \\ & k & \longmapsto & f_k \end{array}$$

homomorfizmi

$$\begin{array}{rcl} G \times K & \longrightarrow & K \\ (f_k, k') & \longmapsto & (f_k)_{k'} = kk'k^{-1} \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten

ÇM1)

$$\begin{array}{rcl} \partial((f_k)_{k'}) & = & \partial(kk'k^{-1}) \\ & = & \partial(k)\partial(k')\partial(k^{-1}) \\ & = & f_k\partial(k')\partial(k)^{-1} \\ & = & f_k\partial(k')f_k^{-1} \end{array}$$

ÇM2)

$$\begin{array}{rcl} \partial k_{k'} & = & (f_k)_{k'} \\ & = & kk'k^{-1} \end{array}$$

eşitlikleri sağlanır.

Örneklerden görülmektedir ki, çaprazlanmış modüller, normal alt grupların genelleştirilmişidir. Dahası, otomorfizm grubuyla birlikte herhangi bir grup çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

3.3 Temel (Fundamental) Çaprazlanmış Modül

Çaprazlamış modüllerin en önemli topolojik örneği Whitehead tarafından ortaya konmuştur. Whitehead bu örneğinde, ikinci relatif homotopi gruplarından temel gruba tanımlanan

$$\partial \ : \ \pi_2(X, A, a) \ \longrightarrow \ \pi_1(A, a)$$

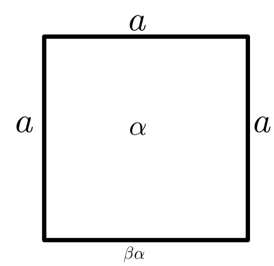
sınır (boundary) morfizminin, $\pi_1(A, a)$ ın $\pi_2(X, A, a)$ üzerine standart etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermiştir. Daha sonra [4], [3], [7] gibi bir çok çalşmada incelenmiştir.

X bir noktasal (pointed) uzay, yani X, seçilen bir $a \in X$ taban noktası ile birlikte bir topolojik uzay olsun. $a \in A$ olmak üzere A, X in bir alt uzayı olarak verilsin. İkinci relatif homotopi grubu $\pi_2(X, A, a)$,

$$\alpha \ : \ (I^2, \partial I^2, J^1) \ \longrightarrow \ (X, A, a)$$

şeklindeki sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarından oluşmaktadır. Burada $I = [0, 1]$ ve ∂I^2, $[0, 1] \times [0, 1]$ karesinin sınırı, $J^1 = (\{0, 1\} \times I) \cup (I \times \{1\}) \subset I^2$ dir. Ayrıca $\alpha : I^2 \longrightarrow X$, $\alpha(\partial I^2) \subseteq A$ ve $\alpha(J^1) = \{a\}$ dır. Bu şekildeki her bir α, birim kareden

X uzayına tanımlanan, karenin sol, üst ve sağ kenarlarını a noktasına, alt kenarını ise a tabanlı bir β_α loopuna dönüştüren bir fonksiyondur. Böyle bir fonksiyonu şekil 3.1 de olduğu gibi temsil edebiliriz.



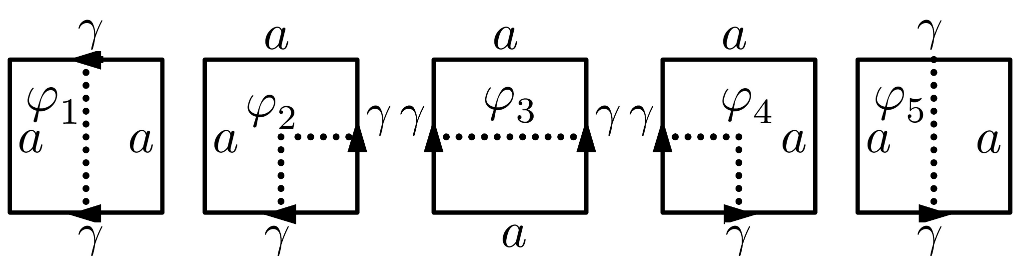
Şekil 3.1:

$\pi_1(A, a)$ temel grubunu hatırlatmak gerekirse, bu grup

$$\gamma \;:\; I \longrightarrow A$$

$\gamma(0) = \gamma(1) = a$ olacak şekilde γ sürekli fonksiyonlarının homotopi sınıflarından oluşmaktadır ($\gamma : A$ da, a noktasında başlayıp, a noktasında biten yoldur).

Bu şekildeki bir γ yardımı ile, karenin iki kenarını a ya, iki kenarını γ ya dönüştüren $I^2 \longrightarrow A$ fonksiyonlarını şekil 3.2 deki gibi oluşturmak kolaydır.



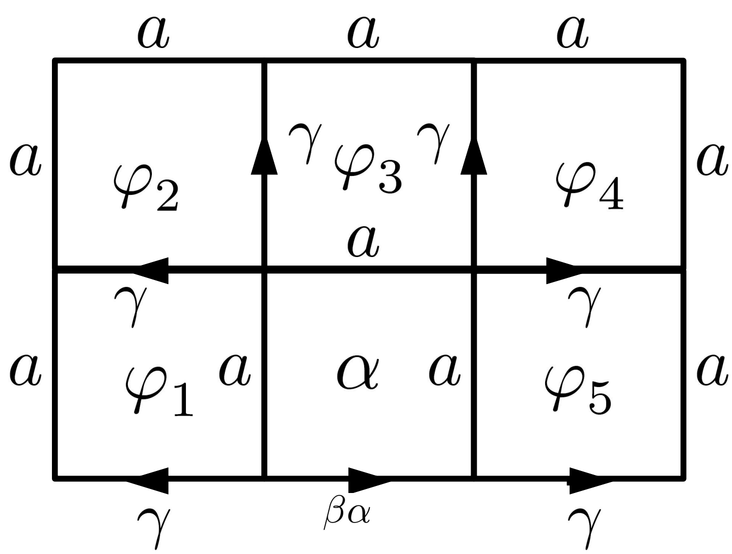
Şekil 3.2:

$$\begin{array}{rccl} \partial \;:\; & \pi_2(X, A, a) & \longrightarrow & \pi_1(A, a) \\ & \alpha & \longmapsto & \beta_\alpha \end{array}$$

sınır dönüşümünün bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermek için, $\gamma \in \pi_1(A, a)$ nın $\alpha \in \pi_2(X, A, a)$ üzerine etkisini tanımlamamız gerekir. Bu etki altında α nın görüntüsü: α yı çevreleyen beş dönüşümün (şekil 2 de verilen) şekil 3.3 deki gibi birleşimidir.

Bu birleşimin nasıl olduğunu gösterelim:

Şekil 2 de verilen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanır.



Şekil 3.3:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 & : & I^2 & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \varphi_1(t,s) \end{array}$$

$\varphi_1(0,s) = a$, $\varphi_1(1,s) = a$, $\varphi_1(t,0) = \gamma(1-t)$, $\varphi_1(t,1) = \gamma(1-t)$ şeklinde tanımlanır.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 & : & I^2 & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \varphi_2(t,s) \end{array}$$

$\varphi_2(0,s) = a$, $\varphi_2(1,s) = \gamma(s)$, $\varphi_2(t,0) = \gamma(1-t)$, $\varphi_2(t,1) = a$ şeklinde tanımlanır.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3 & : & I^2 & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \varphi_3(t,s) \end{array}$$

$\varphi_3(0,s) = \gamma(s)$, $\varphi_3(1,s) = \gamma(s)$, $\gamma_3(t,0) = a$, $\varphi_3(t,1) = a$ şeklinde tanımlanır.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_4 & : & I^2 & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \varphi_4(t,s) \end{array}$$

$\varphi_4(0,s) = \gamma(s)$, $\varphi_4(1,s) = a$, $\varphi_4(t,0) = \gamma(t)$, $\varphi_4(t,1) = a$ şeklinde tanımlanır ve

$$\begin{array}{rccc} \varphi_5 & : & I^2 & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \varphi_5(t,s) \end{array}$$

$\varphi_5(0,s) = a$, $\varphi_5(1,s) = a$, $\varphi_5(t,0) = \gamma(t)$, $\varphi_5(t,1) = \gamma(t)$ tanımlanır.

φ_1 ile φ_2 nin çarpımı:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(t,s) = \begin{cases} \varphi_1(t,2s) & ,0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_2(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve $(\varphi_1 * \varphi_2)(t,0) = \varphi_1(t,0) = \gamma(1-t)$, $(\varphi_1 * \varphi_2)(t,\frac{1}{2}) = \varphi_1(t,1) = \gamma(1-t)\gamma(1-t) = \varphi_2(t,0)$, $(\varphi_1 * \varphi_2)(t,1) = \varphi_2(t,1) = a$ elde edilir. Benzer şekilde

$$(\alpha * \varphi_3)(t,s) = \begin{cases} \alpha(t,2s) & ,0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_3(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

α ile φ_3 ün çarpımı tanımlanır.

Buradan $(\alpha * \varphi_3)(t,0) = \alpha(t,0) = \beta_\alpha$, $(\alpha * \varphi_3)(t,\frac{1}{2}) = \alpha(t,1) = \varphi_3(t,0) = a$, $(\alpha * \varphi_3)(t,1) = \varphi_3(t,1) = a$ elde edilir. Son olarak

$$(\varphi_5 * \varphi_4)(t,s) = \begin{cases} \varphi_5(t,2s) & ,0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \varphi_4(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

tanımlanırsa, $(\varphi_5 * \varphi_4)(t,0) = \varphi_5(t,0) = \gamma(t)$, $(\varphi_5 * \varphi_4)(t,\frac{1}{2}) = \varphi_5(t,1) = \varphi_4(t,0) = \gamma(t)$, $(\varphi_5 * \varphi_4)(t,1) = \varphi_4(t,1) = a$ olduğu görülür.

Bu çarpımlar yardımıyla

$$A(t,s) = [((\varphi_1 * \varphi_2) * (\alpha * \varphi_3)) * (\varphi_5 * \varphi_4)](t,s) = \begin{cases} (\varphi_1 * \varphi_2)(4t,s) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\alpha * \varphi_3)(4t-1,s) & ,\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\varphi_5 * \varphi_4)(2t-1,s) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tanımlanır ve $A(0,s) = (\varphi_1 * \varphi_2)(0,s) = a$, $A(1,s) = (\varphi_5 * \varphi_4)(1,s) = a$,

$$\begin{aligned} A(t,1) &= \begin{cases} (\varphi_1 * \varphi_2)(4t,1) \\ (\alpha * \varphi_3)(4t-1,1) \\ (\varphi_5 * \varphi_4)(2t-1,1) \end{cases} \\ &= a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A(t,0) &= \begin{cases} (\varphi_1 * \varphi_2)(4t,0) \\ (\alpha * \varphi_3)(4t-1,0) \\ (\varphi_5 * \varphi_4)(2t-1,0) \end{cases} \\ &= (\gamma^{-1} * \beta_\alpha * \gamma)(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $A(t,s) \in \pi_2(X,A,a)$ elde edilir. Buna göre $\pi_1(A,a)$ nın $\pi_2(X,A,a)$ grubu üzerine etkisi

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A,a) \times \pi_2(X,A,a) & \longrightarrow & \pi_2(X,A,a) \\ (\gamma,\alpha) & \longmapsto & \gamma \cdot \alpha = A \end{array}$$

şeklinde tanımlanmış olur. Bu etki için

$$\begin{aligned} \partial(\gamma(t,s) \cdot \alpha(t,s)) &= A(t,0) \\ &= (\gamma^{-1} * \beta_\alpha * \gamma)(t) \end{aligned}$$

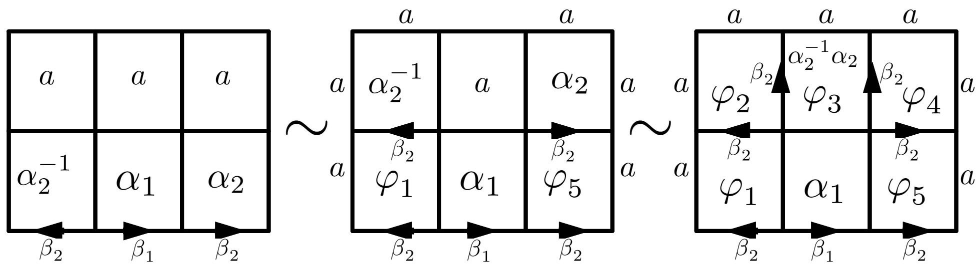
olduğu görülür. Böylece $\partial : \pi_2(X,A,a) \longrightarrow \pi_1(A,a)$ için CM1) şartı sağlanmış olur.

CM2) şartının sağlanması için, $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_2(X,A,a)$ gibi iki eleman seçelim.

$$\begin{array}{ccccc} \partial & : & \pi_2(X,A,a) & \longrightarrow & \pi_1(A,a) \\ & & \alpha & \longmapsto & \partial(\alpha) = \beta_\alpha \end{array}$$

olmak üzere

$$\partial(\alpha_2) \cdot \alpha_1 = \alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2$$



Şekil 3.4:

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için şekil 4 ile temsil edilen fonksiyonların denk olduğunu göstereceğiz.

Şekil 3.4 te verilen ilk dikdörtgen ile temsil edilen fonksiyon için, birleşimin nasıl olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcccc} a & : & I \times I & \longrightarrow & \{a\} \\ & & (t,s) & \longmapsto & a(t,s) = a \end{array}$$

sabit dönüşüm,

$$\begin{array}{rcccc} \alpha_1 & : & I \times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \alpha_1(t,s) \end{array}$$

$\alpha_1(t,0) = \beta_1$, $\alpha_1(t,1) = a$, $\alpha_1(0,s) = a$, $\alpha_1(1,s) = a$.

$$\begin{array}{rcccc} \alpha_2 & : & I \times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \alpha_2(t,s) \end{array}$$

$\alpha_2(t,0) = \beta_2$, $\alpha_2(t,1) = a$, $\alpha_2(0,s) = a$, $\alpha_2(1,s) = a$.

$$\begin{array}{rcccc} \alpha_2^{-1} & : & I \times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s) & \longmapsto & \alpha_2^{-1}(t,s) \end{array}$$

$\alpha_2^{-1}(t,0) = \beta_2^{-1}$, $\alpha_2^{-1}(t,1) = a$, $\alpha_2^{-1}(0,s) = a$, $\alpha_2^{-1}(1,s) = a$ olmak üzere, a, α_1, α_2, α_2^{-1} dönüşümleri kullanılarak

$$(\alpha_2^{-1} * a)(t,s) = \begin{cases} \alpha_2^{-1}(t,2s) & ,0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ a(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

için $(\alpha_2^{-1} * a)(t,0) = \alpha_2^{-1}(t,0) = \beta_2^{-1}$, $(\alpha_2^{-1} * a)(t,\frac{1}{2}) = \alpha_2^{-1}(t,1) = a(t,0) = a$, $(\alpha_2^{-1} * a)(t,1) = a(t,1) = a$ elde edilir.

$$(\alpha_1 * a)(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ a(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\alpha_1 * a)(t,0) = \alpha_1(t,0) = \beta_1$, $(\alpha_1 * a)(t,\frac{1}{2}) = \alpha_1(t,1) = a(t,0) = a$, $(\alpha_1 * a)(t,1) = a(t,1) = a$ elde edilir.

$$(\alpha_2 * a)(t,s) = \begin{cases} \alpha_2(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ a(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\alpha_2 * a)(t,0) = \alpha_2(t,0) = \beta_2$, $(\alpha_2 * a)(t,\frac{1}{2}) = \alpha_2(t,1) = a(t,0) = a$, $(\alpha_2 * a)(t,1) = a(t,1) = a$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} K(t,s) &= [((\alpha_2^{-1} * a) * (\alpha_1 * a)) * (\alpha_2 * a)](t,s) \\ &= \begin{cases} (\alpha_2^{-1} * a)(4t,s) & ,0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (\alpha_1 * a)(4t-1,s) & ,\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ (\alpha_2 * a)(2t-1,s) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= (\alpha_2^{-1} * \alpha_1 * \alpha_2)(t,s) \end{aligned}$$

tanımlanır ve $K(0,s) = (\alpha_2^{-1} * a)(0,s) = a$, $K(1,s) = (\alpha_2 * a)(1,s) = a$, $K(t,1) = a$, $K(t,0) = \beta_2^{-1}\beta_1\beta_2$ elde edilir.

Şekil 3.4 te verilen, ikinci dikdörtgen ile temsil edilen fonksiyon için,

$$\begin{aligned} \varphi_1 : I \times I &\longrightarrow A \\ (t,s) &\longmapsto \varphi_1(t,s) \end{aligned}$$

$\varphi_1(t,0) = \beta_2^{-1}$, $\varphi_1(t,1) = \beta_2^{-1}$, $\varphi_1(0,s) = a$, $\varphi_1(1,s) = a$.

$$\begin{aligned} \varphi_5 : I \times I &\longrightarrow A \\ (t,s) &\longmapsto \varphi_5(t,s) \end{aligned}$$

$\varphi_5(t,0) = \beta_2$, $\varphi_5(t,1) = \beta_2$, $\varphi_5(0,s) = a$, $\varphi_5(1,s) = a$ olacak şekilde φ_1 ve φ_5 dönüşümleri tanımlanırsa

$$(\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(t,s) = \begin{cases} \varphi_1(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha_2^{-1}(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(t,0) = \varphi_1(t,0) = \beta_2^{-1}$, $(\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(t,\frac{1}{2}) = \varphi_1(t,1) = \alpha_2^{-1}(t,0) = \beta_2^{-1}$, $(\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(t,1) = \alpha_2^{-1}(t,1) = a$ elde edilir.

$$(\alpha_1 * a)(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ a(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\alpha_1 * a)(t,0) = \alpha_1(t,0) = \beta_1$, $(\alpha_1 * a)(t,\frac{1}{2}) = \alpha_1(t,1) = a(t,0) = a$, $(\alpha_1 * a)(t,1) = a(t,1) = a$ elde edilir.

$$(\varphi_5 * \alpha_2)(t,s) = \begin{cases} \varphi_5(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \alpha_2(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\varphi_5 * \alpha_2)(t,0) = \varphi_5(t,0) = \beta_2$, $(\varphi_5 * \alpha_2)(t,\frac{1}{2}) = \varphi_5(t,1) = \alpha_2(t,0) = \beta_2$, $(\varphi_5 * \alpha_2)(t,1) = \alpha_2(t,1) = a$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} L(t,s) &= [((\varphi_1 * \alpha_2^{-1}) * (\alpha_1 * a)) * (\varphi_5 * \alpha_2)] \\ &= \begin{cases} (\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(4t,s) & ,0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (\alpha_1 * a)(4t-1,s) & ,\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ (\varphi_5 * \alpha_2)(2t-1,s) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

tanımlanır ve $L(0,s) = (\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(0,s) = a$, $L(1,s) = (\varphi_5 * \alpha_2)(1,s) = a$, $L(t,1) = a$ ve $L(t,0) = \beta_2^{-1}\beta_1\beta_2$ elde edilir.

Şekil 3.4 te verilen, üçüncü dikdörtgen ile temsil edilen fonksiyon için,

$$\begin{aligned} \varphi_2 \ : \ I \times I &\longrightarrow A \\ (t,s) &\longmapsto \varphi_2(t,s) \end{aligned}$$

$\varphi_2(t,0) = \beta_2^{-1}$, $\varphi_2(t,1) = a$, $\varphi_2(0,s) = a$, $\varphi_2(1,s) = \beta_2$.

$$\begin{aligned} \varphi_3 = \alpha_2^{-1} * \alpha_2 \ : \ I \times I &\longrightarrow A \\ (t,s) &\longmapsto \varphi_3(t,s) \end{aligned}$$

$\varphi_3(t,0) = a$, $\varphi_3(t,1) = a$, $\varphi_3(0,s) = \beta_2$, $\varphi_3(1,s) = \beta_2$.

$$\begin{aligned} \varphi_4 \ : \ I \times I &\longrightarrow A \\ (t,s) &\longmapsto \varphi_4(t,s) \end{aligned}$$

$\varphi_4(t,0) = \beta_2$, $\varphi_4(t,1) = a$, $\varphi_4(0,s) = \beta_2$, $\varphi_4(t,1) = a$ dönüşümlerini tanımlayarak

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(t,s) = \begin{cases} \varphi_1(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \varphi_2(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\varphi_1 * \varphi_2)(t,0) = \varphi_1(t,0) = \beta_2^{-1}$, $(\varphi_1 * \varphi_2)(t,\frac{1}{2}) = \varphi_1(t,1) = \varphi_2(t,0) = \beta_2^{-1}$, $(\varphi_1 * \varphi_2)(t,1) = \varphi_2(t,1) = a$ elde edilir.

$$(\alpha_1 * \varphi_3)(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \varphi_3(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\alpha_1 * \varphi_3)(t,0) = \alpha_1(t,0) = \beta_1$, $(\alpha_1 * \varphi_3)(t,\frac{1}{2}) = \alpha_1(t,1) = \varphi_3(t,0) = a$, $(\alpha_1 * \varphi_3)(t,1) = \varphi_3(t,1) = a$ elde edilir.

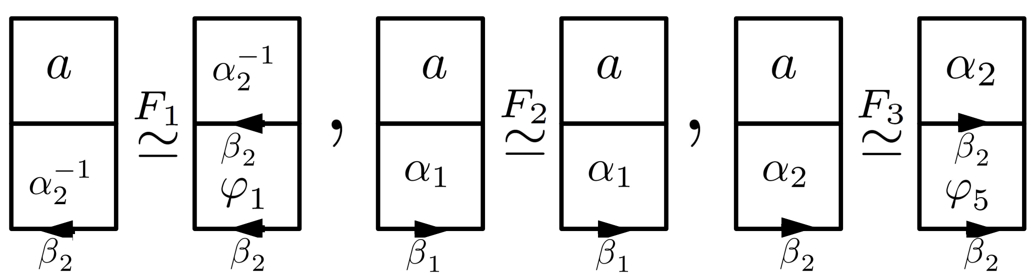
$$(\varphi_5 * \varphi_4)(t,s) = \begin{cases} \varphi_5(t,2s) & ,0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \varphi_4(t,2s-1) & ,\frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

için $(\varphi_5 * \varphi_4)(t,0) = \varphi_5(t,0) = \beta_2$, $(\varphi_5 * \varphi_4)(t,\frac{1}{2}) = \varphi_5(t,1) = \varphi_4(t,0) = \beta_2$, $(\varphi_5 * \varphi_4)(t,1) = \varphi_4(t,1) = a$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} [((\varphi_1 * \varphi_2) * (\alpha_1 * \varphi_3)) * (\varphi_5 * \varphi_4)](t,s) &= \begin{cases} (\varphi_1 * \varphi_2)(4t,s) & ,0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (\alpha_1 * \varphi_3)(4t-1,s) & ,\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ (\varphi_5 * \varphi_4)(2t-1,s) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= A(t,s) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu, CM1) şartında verilen etkidir.

Şimdi $K(t,s)$ ve $L(t,s)$ arasındaki homotopi için şekil 3.5 te verilen F_1, F_2 ve F_3 homotopilerini tanımlarsak



Şekil 3.5:

$$\begin{aligned} F_1 \ : \ I^2 \times I &\longrightarrow A \\ (t,s,x) &\longmapsto F_1(t,s,x) \end{aligned}$$

için

$$F_1(t,s,x) = x(\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(t,s) + (1-x)(\alpha_2^{-1} * a)(t,s)$$

$$\begin{array}{rcccc} F_2 & : & I^2\times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s,x) & \longmapsto & F_2(t,s,x) \end{array}$$

için

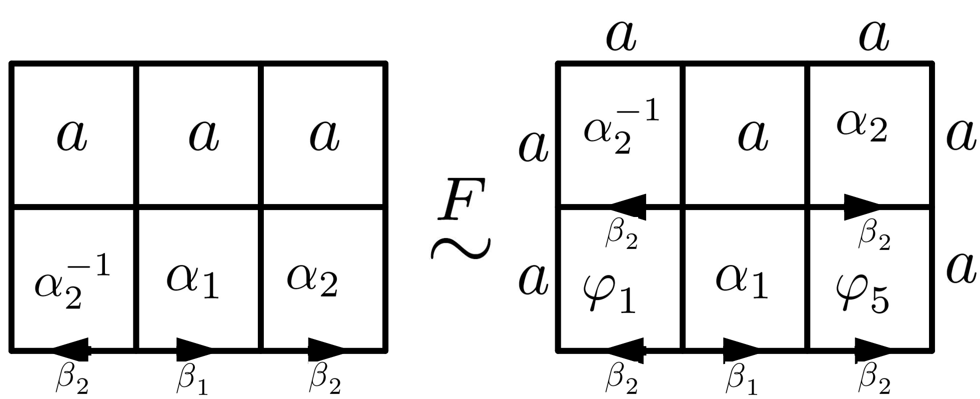
$$F_2(t,s,x) = x(\alpha_1 * a)(t,s) + (1-x)(\alpha_1 * a)(t,s)$$

$$\begin{array}{rcccc} F_3 & : & I^2\times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s,x) & \longmapsto & F_3(t,s,x) \end{array}$$

için

$$F_3(t,s,x) = x(\varphi_5 * \alpha_2)(t,s) + (1-x)(\alpha_2 * a)(t,s)$$

olmak üzere, şekil 3.6 da verilen bir F homotopisini



Şekil 3.6:

$$\begin{array}{rcccl} F & : & I^2\times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s,x) & \longmapsto & F(t,s,x) = \begin{cases} F_1(4t,s,x) & ,0\le t\le \frac{1}{4} \\ F_2(4t-1,s,x) & ,\frac{1}{4}\le t\le \frac{1}{2} \\ F_3(2t-1,s,x) & ,\frac{1}{4}\le t\le 1 \end{cases} \end{array}$$

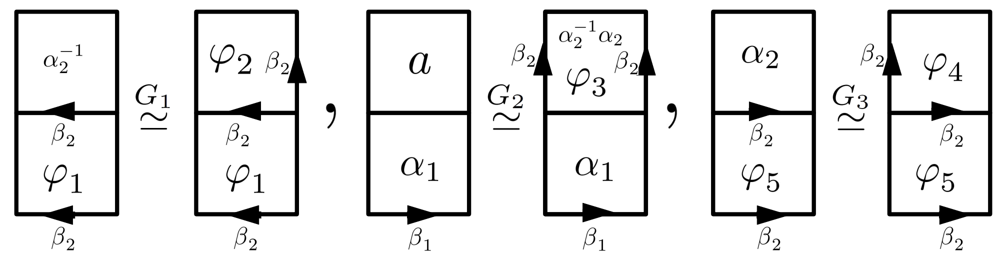
şeklinde tanımlayabiliriz. Böylece şekil 3.6 daki dikdörtgenler ile temsil edilen fonksiyonlar arasında bir homotopi elde ettik.

Benzer şekilde şekil 3.4 te verilen, 2. ve 3. dikdörtgenler ile temsil edilen fonksiyonlar için, şekil 3.7 deki gibi G_1, G_2, G_3 homotopileri tanımlanırsa

$$\begin{array}{rcccc} G_1 & : & I^2\times I & \longrightarrow & A \\ & & (t,s,x) & \longmapsto & G_1(t,s,x) \end{array}$$

için

$$G_1(t,s,x) = x(\varphi_1 * \varphi_2)(t,s) + (1-x)(\varphi_1 * \alpha_2^{-1})(t,s).$$



Şekil 3.7:

$$
\begin{array}{rccc}
G_2 & : & I^2 \times I & \longrightarrow & A \\
 & & (t,s,x) & \longmapsto & G_2(t,s,x)
\end{array}
$$

için

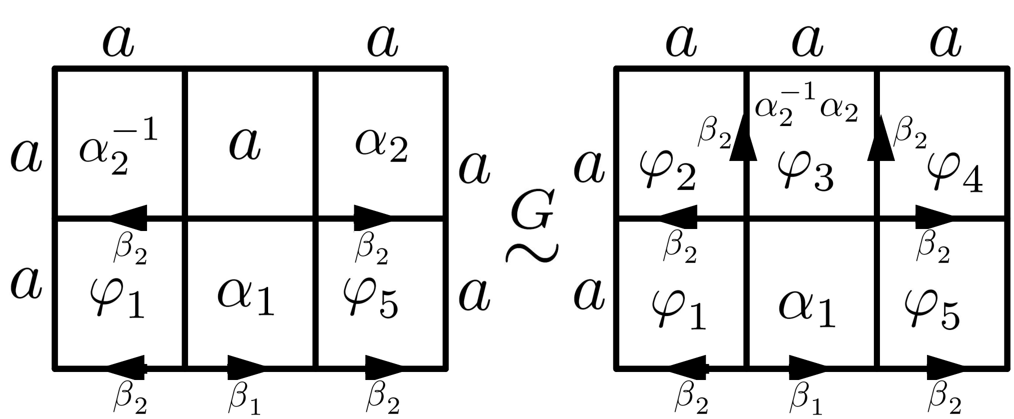
$$G_2(t,s,x) = x(\alpha_1 * \varphi_3)(t,s) + (1-x)(\alpha_1 * a)(t,s).$$

$$
\begin{array}{rccc}
G_3 & : & I^2 \times I & \longrightarrow & A \\
 & & (t,s,x) & \longmapsto & G_3(t,s,x)
\end{array}
$$

için

$$G_3(t,s,x) = x(\varphi_5 * \varphi_4)(t,s) + (1-x)(\varphi_5 * \alpha_2)(t,s)$$

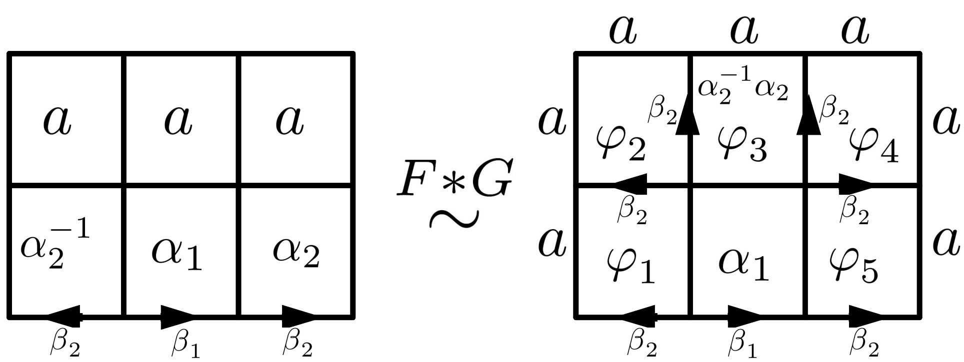
olmak üzere



Şekil 3.8:

şekil 3.8 deki G homotopisini

$$
\begin{array}{rcccc}
G & : & I^2 \times I & \longrightarrow & A \\
 & & (t,s,x) & \longmapsto & G(t,s,x) = \begin{cases} G_1(4t,s,x) & , 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ G_2(4t-1,s,x) & , \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ G_3(2t-1,s,x) & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}
\end{array}
$$



Şekil 3.9:

şeklinde tanımlayabiliriz. Buna göre şekil 3.9 daki $F*G$ homotopisi

$$\begin{array}{rcl} F*G \ : \ I^2\times I & \longrightarrow & A \\ & \longmapsto & (F*G)(t,s,x) = \begin{cases} F(t,s,x) & ,0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ G(t,s,2x-1) & ,\frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise şekil 3.4 te verilen 1. ve 3. dikdörtgenlerin temsil ettiği fonksiyonların denkliğini ifade eder. Böylece

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_2^{-1}*\alpha_1*\alpha_2) & = & A(t,s) \\ & = & \beta_2\cdot\alpha_1 \\ & = & \partial(\alpha_2)\cdot\alpha_1 \end{array}$$

elde edilir.

Burada görüldüğü gibi $\alpha_1,\alpha_2\in\pi_2(X,A,a)$ olmak üzere $\partial(\alpha_2)\in\pi_1(A,a)$ için $\partial(\alpha_2)\alpha_1 = \alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2$ elde edilir. Bu ise CM2) şartının sağlandığını göstermektedir.

3.4 Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Temel Özellikleri

$\partial : C \rightarrow G$ herhangi bir çaprazlamış modül olmak üzere, çaprazlanmış modül kavramının temel bir sonucu olarak aşağıdaki önermeleri verebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.3

$$\begin{array}{rcl} \partial \ : \ C & \longrightarrow & G \\ c & \longmapsto & \partial c = g \end{array}$$

grupların bir çaprazlanmış modülü olsun.

i)∂ nin çekirdeği, C nin merkezinin bir alt grubudur.

ii)∂C, G nin normal alt grubudur.

İspat. i)G nin C üzerine etki fonksiyonu

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \longrightarrow & C \\ (g, c) & \longmapsto & g_c = gc \end{array}$$

ve

$$\text{Çek}\partial = \{a \in C \mid \partial(a) = 1_G\}$$

$$Z(C) = \{x \in C \mid \forall y \in C \text{ için, } xy = yx\}$$

olmak üzere, $a \in$Çek∂, $y \in C$ için

$$\begin{array}{rcll} ay & = & aya^{-1}a & \\ & = & (\partial(a)_y)a & ((C, G, \partial), \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & = & 1_y a & (a \in \text{Çek}\partial) \\ & = & 1ya & (\text{grup etkisi}) \\ & = & ya & \end{array}$$

olduğundan Çek$\partial \subset Z(C)$ sağlanır. Ayrıca, $a_1, a_2 \in$Çek∂ için, $\partial(a_1 a_2^{-1}) = \partial(a_1)\partial(a_2^{-1}) = \partial(a_1)\partial(a_2)^{-1} = 1$ olduğundan $a_1 a_2^{-1} \in$Çek∂ dir. Dolayısıyla Çek$\partial < Z(C)$ elde edilir. □

ii)(C, G, ∂) çaprazlanmış modül olduğundan

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(g_c)$$

eşitliği geçerlidir ve G nin C üzerine etkisinden dolayı $g_c \in C$ dir.Dolayısıyla

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(g_c) \in \partial(C)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.4 $\partial : C \longrightarrow G$ çaprazlanmış modül ve $\pi_1(\partial) = G/\partial(C)$ olmak üzere Çek∂ bir $\pi_1(\partial)-$modül yapısı oluşturur.

İspat. İspat için $\partial(C)$ nin Çek∂ üzerine birim etki ettiğini göstermek yeterlidir.

Şimdi, $\partial(C)$ nin Çek∂ üzerine birim etki ettiğini göstermek için, $n \in \partial(C)$ ve $a \in$Çek∂ alalım. Bu durumda $n = \partial c$ olacak şekilde en az bir $c \in C$ vardır. Böylece bir önceki önermenin (i) şıkkı gereğince $a \in$Çek$\partial \subset Z(C)$ olduğundan $n_a = \partial c_a = cac^{-1} = a$ elde ederiz. Dolayısıyla ∂C, Çek∂ üzerine sıfır etki yapar. □

3.5 Alt Çaprazlanmış Modüller

(C, G, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun.

(i)S, C nin, H ise G nin bir altgrubu

(ii)$\partial' = \partial\mid_S$, ∂ nin S ye kısıtlanmışı ve

(iii)H ın S üzerine etkisi, G nin C üzerine etkisi tarafından indirgenir ise (S, H, ∂') ye, (C, G, ∂) nin bir **alt çaprazlanmış modülü** denir ve

$$(S, H, \partial') \leq (C, G, \partial)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 3.4 N, G grubunun herhangi bir normal alt grubu ve iç, içine fonksiyonu id_G birim fonksiyonu tarafından

$$\text{iç} \;:\; id_G\mid_N \;:\; N \subset G \longrightarrow G$$

şeklinde indirgenmek üzere $(N, G, \text{iç})$, (G, G, id_G) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.

3.5.1 Normal Alt Çaprazlanmış Modüller ve Çaprazlanmış Bölüm Modülleri

(C, G, ∂) nin (S, H, ∂') alt çaprazlanmış modülü,

(i)H, G nin bir normal alt grubu

(ii) Her $g \in G$, $s \in S$ için, $g_s \in S$

(iii) Her $h \in H$, $c \in C$ için, $h_{cc^{-1}} \in S$

şartlarını sağlıyor ise (S, H, ∂') ye (C, G, ∂) nin normal alt çaprazlanmış modülü denir ve $(S, H, \partial') \trianglelefteq (C, G, \partial)$ ile gösterilir.

(S,H,∂'), (C,G,∂) nın bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun.

$$\overline{\partial} \ : \ C/S \longrightarrow G/H$$

∂ tarafından indirgenmek üzere

$$\begin{array}{rcl} G/H \times C/S & \longrightarrow & C/S \\ (gH, cS) & \longmapsto & (g_c)S \end{array}$$

etki fonksiyonu ile birlikte $(C/S, G/S, \overline{\partial})$ üçlüsünü ele alalım. Burada (C,G,∂) bir çaprazlanmış modüldür ve G nin C üzerine etkisinden dolayı $g_c \in C$ dir. Dolayısıyla $(g_c)S \in C/S$ olduğundan yukarıda tanımlanan G/H ın C/S üzerine etki fonksiyonu iyi tanımlıdır. Ayrıca, $\overline{\partial}$ bu etki ile birlikte çaprazlanmış modül şartlarını sağlar. Şöyleki $\overline{\partial}$, ∂ tarafından indirgendiğinden

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\partial} & : & C/S & \longrightarrow & G/H \\ & & cS & \longmapsto & gH = (\partial c)H \end{array}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial}(gH_{cS}) & = & \overline{\partial}((g_c)S) \\ & = & \partial(g_c)H \\ & = & (g\partial c g^{-1})H \\ & = & gH(\partial c)Hg^{-1}H \\ & = & gH\overline{\partial}(cS)(gH)^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial}(cS)_{c'S} & = & (\partial c)H_{c'S} \\ & = & (\partial c_{c'})S \\ & = & cc'c^{-1}S \\ & = & cSc'Sc^{-1}S \\ & = & cSc'S(cS)^{-1} \end{array}$$

elde edilir. Bu çaprazlanmış modüle çaprazlanmış bölüm modülü denir ve

$$\frac{(C,G,\partial)}{(S,H,\partial')}$$

ile gösterilir.

3.5.2 Çaprazlanmış kare (crossed square)

L, M , N ve P nin her biri birer grup olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} P \times L & \longrightarrow & L \\ (p,l) & \longmapsto & p_l \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} P \times N & \longrightarrow & N \\ (p,n) & \longmapsto & p_n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} P \times M & \longrightarrow & M \\ (p,m) & \longmapsto & p_m \end{array}$$

etkileri ve

$$\lambda : L \longrightarrow M \ , \ \lambda' : L \longrightarrow N \ , \ \mu : M \longrightarrow P \ , \quad \upsilon : N \longrightarrow P$$

grup homomorfizmleri ve

$$h : M \times N \longrightarrow L$$

olmak üzere, her $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $p \in P$ için

(i)$\mu, \upsilon, \lambda, \lambda'$ ve $\mu\lambda$ homomorfizmleri birer çaprazlanmış modül ve λ, λ' $P-$equivariant.

(ii)$h(mm', n) = h(m_{m'}, m_n)h(m, n), h(m, nn') = h(m, n)h(n_m, n_{n'})$

(iii)$\lambda h(m, n) = m^n, m^{-1}, \lambda' h(m, n) = m_{nn^{-1}}$

(iv)$h(\lambda l, n) = l^n l^{-1}, h(m, \lambda' l) = m_{ll^{-1}}$

(v)$h(p_m, p_n) = p_{h(m,n)}$

şartları sağlanıyor ise

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\upsilon"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & P \end{tikzcd}$$

karesine bir **çaprazlanmış kare** denir.

Çaprazlanmış karelerin

$$\Phi : \begin{pmatrix} L & N \\ M & P \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} L' & N' \\ M' & P' \end{pmatrix}$$

biçimindeki morfizmi, $\Phi_L : L \longrightarrow L'$, $\Phi_M : M \longrightarrow M'$, $\Phi_N : N \longrightarrow N'$, $\Phi_P : P \longrightarrow P'$ grup homomorfizmlerinden oluşur öyle ki grup homomorfizmlerinin oluşturduğu küp değişmelidir. $m \in M$, $n \in N$ için $\Phi_L h(m, n) = h(\Phi_M m, \Phi_N n)$ olup Φ_L, Φ_M, Φ_N homomorfizmlerinden her biri Φ_P-equivariant.

Örnek 3.5 G bir grup, N ve M, G nin normal alt grupları olsun.

Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & G \\ n & \longmapsto & n \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & G \\ m & \longmapsto & m \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} N \cap M & \hookrightarrow & N \\ a & \longmapsto & a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} N \cap M & \hookrightarrow & M \\ b & \longmapsto & b \end{array}$$

gömme fonksiyonlarının birer çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. Ayrıca $N, M, N \cap M$ kümeleri G nin birer normal alt grubu olduğundan

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \longrightarrow & N \\ (g,n) & \longmapsto & {}^g n \end{array} \text{ ve } \begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & m \\ (g,m) & \longmapsto & {}^g m \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} (N \cap M) \times G & \longrightarrow & N \cap M \\ (a,g) & \longmapsto & a^g \end{array}$$

etkileriyle ve

$$\begin{array}{cccc} h & : & [n] & \longrightarrow & N \cap M \\ & & (n,m) & \longmapsto & n^m \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} M \cap N \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & N \arrow[d, hook] \\ M \arrow[r, hook] & G \end{tikzcd}$$

karesi bir çaprazlanmış karedir.

Örnek 3.6 M, N birer $R-$modül ve C abelyen grup olsun.

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r \cdot m = 0 \end{array} \text{ ve } \begin{array}{ccc} R \times N & \longrightarrow & N \\ (r,n) & \longmapsto & r \cdot n = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R \times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & r.c = 0 \end{array}$$

etkisiyle birlikte

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & N \arrow[d, "0"] \\ M \arrow[r, "0"'] & R \end{tikzcd}$$

karesi,

$$\begin{array}{ccccc} 0 = h & : & M \times N & \longrightarrow & C \\ & & (m,n) & \longmapsto & h(m,n) = m \cdot n = 0 \end{array}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış karedir.

Daha önce bu bölümde temel çaprazlanmış modülü tanımlamıştık. Şimdi ise temel çaprazlanmış kare tanımını verelim.

Örnek 3.7 .Temel çaprazlanmış kare(Fundamental crossed square):$A \subseteq X, \ B \subseteq X$ noktasal uzayların bir üçlüsünden elde edilir. Sınır (boundary) homomorfizmlerinin karesi

$$\begin{tikzcd}
\pi_3(X;A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_2(B,A\cap B) \arrow[d] \\
\pi_2(B,A\cap B) \arrow[r] & \pi_1(A\cap B)
\end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış karedir. Yukarıdaki diyagramda verilen π_2 nin π_1 üzerindeki etkisi, temel çaprazlanmış modül tanımında, detaylı olarak verilmişti.

Üçlü homotopi grubu $\pi_3(X;A,B)$

$$(E^3;E^2_+,E^2_-) \quad \longrightarrow \quad (X;A,B)$$

noktasal üçlü fonksiyonların homotopi sınıflarından oluşur. Burada E^3, solid birim $3-$top ve E^2_+, E^2_- sırasıyla E^3 ün üst ve alt yarım kürelerinin yüzeylerini belirtmektedir.

$$h \ : \ \pi_2(A,A\cap B)\times \pi_2(B,A\cap B) \ \longrightarrow \ \pi_3(X;A,B)$$

fonksiyonu üçlü Whitehead çarpımıdır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Brown, R, Villanueva,R.F. Nonabelian Algebraic Topology 2004.

[2] Crossley,D.M., Essential Topology, University of Wales Swansea, Springer-Verlag, 2005.

[3] Ellis, G.J., Crossed squares and Combinatorial Homotopy, Math. Z.214 (1993), 93-110.

[4] Hilton,P.J., An Introduction to Homotopy Theory Cambridge 1961.

[5] Norrie, K.J. Crossed Modules and Analogues of Group Theorems,Ph.D.Thesis, Kings College(1987).

[6] Spindler,K. Abstract Algebra With Applications Marcel Dekker 1994.

[7] Wensley,C.D., Notes on Higher Dimensional Groups and Related Topics, June 8, 2006

[8] Whitehead,J.H.C., Combinatorial Homotopy II, Bull. American Math. Society. 55 (1949), 453-456.