Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerden Çok Ölçekli Açılım Metodu ile İntegrallenebilen Denklemlerin Bulunması

Murat Koparan

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2008

Derivation of Integrable Equations
from Nonlinear Partial Equations by Multiple Scales Methods

Murat Koparan

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

July 2008

Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerden Çok Ölçekli Açılım Metodu ile İntegrallenebilen Denklemlerin Bulunması

Murat Koparan

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. M. Naci Özer

Temmuz 2008

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Murat KOPARAN'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı " Lineer Olmayan Kısmı Türevli Denklemlerden Çok Ölçekli Açılım Metodu ile İntegrallenebilen Denklemlerin Bulunması" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Prof. Dr. Vakıf CAFER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma AYAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Pınar ANAPA P. Anapa

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma, lineer olmayan oluşum (evolution) denklemlerine bir bozulma (perturbation) metodu olan çok ölçekli açılım metodunun uygulanmasıyla ilgilidir.

Uygulamalı matematikte lineer olmayan oluşum denklemleri, zamana göre türeve bağlı olarak yazılmış olan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin en iyi bilinenleri, bir kanalda su yüzeyindeki dalgalanmaları ifade eden Korteweg-de Vries (KdV) ve lineer olmayan optik, bio-fizik ve plazma teorisi gibi fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemleridir. Zaman ve uzay değişkenleri bir parametreye bağlı olarak tanımlanan ve yavaş değişkenler olarak bilinen çok ölçekli açılım metodu, lineer olan kısmın çözümüne bağlı olarak verilen lineer olmayan denklemlerin çözümünü bulmamıza olanak verir.

Bu tezde, lineer olmayan oluşum denklemi olan bazı dalga denklemlerine çok ölçekli açılım metodu uygulanarak, KdV denklemlerinin solitari-dalga çözümleri ve integrallenebilme şartıyla birlikte, bu dalga denklemlerinden integrallenebilen KdV tipi oluşum denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca yüksek dereceden yavaş değişkenler içeren farklı bir açılım metodu kullanılarak, integrallenebilen lineer olmayan Schrödinger tipi denklemlerden KdV tipi oluşum denklemleri çıkarılmıştır. Son olarak, bir bozulma tekniği olan çok ölçekli açılım metodu ile KdV tipi oluşum denklemlerinden lineer olmayan Schrödinger tipi denklemlerin bulunması üzerinde durulmuştur.

Çok ölçekli açılım metodundaki hesaplamalar için REDUCE cebirsel paket programı kullanılmıştır (Hearn,1995).

Anahtar Kelimeler: Çok ölçekli açılım metodu, solitari-dalga çözümü, KdV denklemi, Schrödinger denklemi.

SUMMARY

This research is related to the application of the multiple scales method, known as a perturbation method to nonlinear evolution equations.

Nonlinear evolution equations are nonlinear partial differential equations, written according to derivative with respect to time in applied mathematics. The most well-known ones of these equations are Korteweg-de Vries (KdV) equation conveying water surface to waves from a channel and nonlinear Schrödinger (NLS) equation consisting of many physics areas such as nonlinear optics, bio-physics and plasma theory. Time and space variables which are defined according to a parameter and known as slow variables of the multiple scales method allow to find the solutions of non-linear equations, which are found according to the solution of the linear part.

In this thesis, some wave equations known as nonlinear evolution equations by applying the multiple scales method were obtained integrable KdV type evolution equations that are solitary-wave solution and integrability condition. In addition, through using a different multiple scales method including higher order slow variables, KdV type evolution equations were derived from integrable nonlinear Schrdinger type equations. Finally, nonlinear Schrödinger type equations are focused on finding from KdV type evolutation equations by the multiple scale method known as a perturbation technique.

For the multiple scales calculations REDUCE computer algebraic packet program is used (Hearn,1995).

Keywords: The multiple scales method, solitary-wave solution, KdV equation, Schrödinger equation.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmasının, gerek ders aşamasında ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan sayın hocam;

Prof. Dr. M. Naci ÖZER'e

ve katkılarından dolayı Yrd. Doç. Filiz TAŞCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2008 Murat KOPARAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v

SUMMARY vi

TEŞEKKÜR vii

KISALTMALAR DİZİNİ x

1. GİRİŞ 1

1.1 Lineer Denklemler için Yayılma Bağıntısı 2

1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri 5

1.3 Korunum Kanunları 6

1.4 Ters Saçılım Dönüşüm (TSD) 8

1.5 Sıfır Eğrilik Gösterimi 10

1.5.1 2x2 Tipindeki Spektral Problem 11

1.6.1 Lax Çiftleri (Lax Pairs) 14

1.7 Ardıştırma Operatörü 15

1.8 Çok Ölçekli Açılım Metodu 19

1.9 Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri 24

1.10 Tezin Organizasyonu 27

2. DALGA DENKLEMLERİNİN SOLİTARİ-DALGA ÇÖZÜMÜ İLE KdV DENKLEMİNİN HİYERARŞİSİ 28

2.1 Giriş 28

2.2 Regularized long-wavelenght (RLW) Denkleminden KdV Tipi Denklemlerinin Hiyerarşisinin Bulunması 28

2.3 Oluşum Denkleminden KdV Tipi Denklemlerinin Hiyerarşisinin Bulunması 31

3. NLS TİPİ DENKLEMLERDEN KDV TİPİ DENKLEMLERİN BULUNMASI

3.1 Giriş 35

3.2 Çok Ölçekli Açılım Metodu 35

3.3 Türevli NLS (DNLS) Denkleminden KdV Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi 36

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.3.1 Türevli NLS (DNLS) Denkleminden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi 42
3.3.2 Türevli NLS (DNLS) Denkleminden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde Edilmesi 43
3.4 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden KdV Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi 44
3.4.1 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi 49
3.4.2 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde edilmesi 50
3.5 İki Kuple NLS Denklemi İçeren Manakov Sistemden KdV Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi 51
3.5.1 İki Kuple NLS Denklemi İçeren Manakov Sistemden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi 56
3.5.2 İki Kuple NLS Denklemi İçeren Manakov Sistemden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde Edilmesi 57

4. KdV TİPİ DENKLEMLERDEN NLS TİPİ DENKLEMLERİN BULUNMASI
4.1 Griş 59
4.2 KdV Denkleminden NLS tipi Denklemlerin Elde Edilmesi 59
4.3 Beşinci Mertebeden KdV Denkleminde NLS Denklemleri 64
4.4 Sonuç ve Öneriler 70
4.5 Örnek REDUCE Programları 71

5. KAYNAKLAR DİZİNİ 77
6. ÖZGEÇMİŞ

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
c.c.	Kompleks eşlenik
DNLS	Derivative Nonlinear Schrödinger
KdV	Korteweg-de Vries
MKdV	Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries
MNLS	Modifiye Edilmiş Nonlinear Schrödinger
NLS	Nonlinear Schrödinger
PDE	Partial differential equations
RLW	Regularized long-wavelength
TSD	Ters saçılım dönüşüm

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Lineer olmayan diferensiyel denklemler uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendisliğin bir çok alanında önemli rol oynamaktadır. Uygulamalı matematikte sıkça karşılaşılan, zamana göre türeve bağlı olarak yazılmış olan lineer olmayan oluşum (evolution) denklemleri olarak bilinen lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirlikleri üzerindeki araştırmalar günümüze kadar devam etmiş ve önemli gelişmeler elde edilmiştir.

Bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin integrallenebilirliği veya analitik çözümünün varlığının gösterilmesi için bazı ölçütler geliştirilmiştir. Bu ölçütlerden sıkça kullanılan ve iyi bilinenler; Ters Saçılım Dönüşümü (TSD), Hamiltoniyen Yapılar, Korunum Kanunları, Lax Çiftleri, Lineer Spektral Problem, Ardıştırma Operatörü ve Painleve Analizi...vb (Calegora et al., 2000; Ablowitz et al., 1974; Gelfand and Levitan, 1995; Özer, 1995).

Özellikle Hamiltoniyen sistemlere uygulanabilen integrallenebilirlik kavramı, yeterli sayıda tek-değerli, analitik fonksiyonlardan oluşan hareket sabitlerini aramaktır. N serbestlik derecesine sahip bir sistemin N tane hareket sabitleri (integrali) bulunmalıdır (Özer, 1995).

Bir bozulma (perturbation) metodu olan çok ölçekli açılım metodu, lineer olmayan oluşum denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmaktadır. Bu metot zaman, ve uzay değişkenleri; bir parametreye bağlı olarak tanımlanan ve yavaş değişkenler olarak bilinen çok ölçekli açılım kullanılarak, lineer olan kısmın çözümüne bağlı olarak verilen lineer olmayan denklemin çözümünü bulmamıza olanak vermektedir (Zakharov and Kuznetzov 1998).

Çok ölçekli açılım metodunu kullanarak integrallenebilir Korteweg-de Vries (KdV) ve lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemleri ve bu denklemlerin spektral problemleri arasında ilişki kurulmuştur (Zakharov and Kuznetzov 1998). Çok ölçekli açılım metodunu kullanarak bazı oluşum (evolution) denklemlerinden NLS veya KdV tipi denklemleri elde edilmiştir (Özer, 1995; Özer and Dağ, 2001). Ayrıca çok ölçekli açılım metodu sadece KdV denkleminin spektral problemine değil ardıştırma operatörüne de uygulanmış ve NLS denklemi için ardıştırma operatörü çıkarılmıştır (Özer, 1999).

Durgun sudaki uzun dalgaların yayılımını ifade eden ve her iki doğrultuda hareketli dalga çözümleri bulunan KdV denkleminden daha genel bir oluşum denklemi olan Boussinesq denklemine çok ölçekli açılım metodu uygulanarak standart lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) ve Lax Çiftleri bulunmuştur (Maccari, 1997). Çok ölçekli açılım metodunu kullanarak Boussinesq denkleminden Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin ve modifiye edilmiş Boussinesq denkleminden modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (MKdV) denkleminin hiyerarşileri bulunmuşdur (Kraenkel et al., 1995; Manna and Merle, 1997). Ayrıca Peregrine veya Benjamin-Bona-Mahony olarak bilinen; aslında KdV denklemi için bir seçenek olarak ifade edilen regularized long-wavelength (RLW) denklemine de çok ölçekli açılım metodu uygulanarak KdV denkleminin hiyerarşisi bulunmuşdur (Kraenkel et al., 1996).

Bu bölümde, alanda kullanılan bazı temel kavramlardan kısaca bahsedilecektir. Ayrıca lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemler ile çok ölçekli açılım metodu kullanılarak KdV denkleminden NLS denkleminin elde edilmesi ve Boussinesq denkleminden KdV hiyerarşisinin bulunması incelenmişdir.

1.1 Lineer Denklemler için Yayılma (Dispersiyon) Bağıntısı

Bu kısımda, genel olarak

$$P\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right] \mathrm{u(x,t)} = 0 \tag{1.1}$$

şeklindeki lineer sabit katsayılı kısmi diferensiyel denklemler incelenecektir. $\theta(x,t)$; faz, k; dalga sayısı ve w; frekans olmak üzere, (1.1) kısmi diferensiyel denklemlerinin

$$u(x,t) = e^{i\theta(x,t)} = e^{i(kx-wt)} \tag{1.2}$$

formunda bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu çözüm (1.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$P\left[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right]e^{i(kx-wt)} = P\left[-iw,ik\right]e^{i(kx-wt)} = 0 \tag{1.3}$$

veya $e^{i\theta}$ sonlu θ değerleri için sıfırdan farklı olduğundan,

$$P\left[-iw,ik\right] = 0 \tag{1.4}$$

bulunur. Eğer (1.4) sağlanırsa, (1.2) ; (1.1) kısmi türevli diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. (1.4) denklemi yayılma bağıntısı olarak adlandırılır. Verilen her k için $w = w(k)$ şeklindeki w yayılma bağıntısından faz hızı ve grup hızı sırasıyla,

$$c = \frac{w}{k}, \quad c_g = \frac{dw}{dk} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır.

i) Eğer $w(k)$ gerçel ve c sabit olmayan bir değer ise, (1.1) denkleminin çözümüne bir yayılma terimine sahiptir denir.

ii) $w(k)$; $w = w_R + iw_I$ olacak şekilde kompleks bir değer ise, çözüm:

$$u_k = e^{w_I t}.e^{i(kx-w_R t)} \tag{1.6}$$

şeklinde $e^{iw_I t}$ durduran (damping) terimi ve $e^{i(kx-w_R t)}$ dağıtmaya devam eden (oscillator) terimden oluşur.

$$t \to \infty \quad iken\, u_k = \begin{cases} 0 & w_I < 0 \quad \text{dağıtma} \\ \infty & w_I > 0 \quad \text{kararsız} \end{cases}$$

dır.

1.1.1 Örnek

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{1.7}$$

KdV denkleminin yayılma bağıntısı, (1.4) yayılma bağıntısından

$$P[-iw, ik] = (-iw) - (ik)^3 = 0 \Rightarrow w(k) = k^3 \tag{1.8}$$

bulunur. Faz hızı

$$c = \frac{w}{k} = k^2$$

ve grup hızı

$$c_g = \frac{dw}{dk} = 3k^2$$

olarak elde edilir. Faz ve grup hızı k-değişkenine bağlı değerler olduğundan (1.7) denkleminin çözümü $u = e^{i(kx - k^3 t)}$ yayılma terimine sahiptir.

1.1.2 Örnek

$$u_t = -u_x + u_{xxt} + 6uu_x \tag{1.9}$$

regularized long-wavelength (RLW) denkleminin yayılma bağıntısı, (1.4) denkleminden

$$P[-iw, ik] = (-iw - ik^2 w) + (ik) = 0 \Rightarrow w(k) = \frac{k}{1+k^2} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k^2}}\right) \tag{1.10}$$

bulunur.

1.1.3 Örnek Başka bir örnek olarak

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.11}$$

dalga denklemi ele alındığında; (1.4) denkleminden

$$P[-iw, ik] = (-iw)^2 - c^2 (ik)^2 = 0 \Rightarrow w(k) = \pm ck \tag{1.12}$$

yayılma bağıntısı elde edilir. Faz ve grup hızları ise, sırasıyla

$$c = \frac{w}{k} = \frac{\pm ck}{k} = \pm c$$

$$c_g = \frac{dw}{dk} = \pm c$$

olarak elde edilir. Faz ve grup hızı k-değişkeninden bağımsız olduğundan, (1.11) denkleminin çözümü yayılma terimine sahip değildir.

1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Genel lineer olmayan oluşum denklemleri, $K[u]$; u ve u nun x-uzaysal değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere,

$$u_t = K[u] \tag{1.13}$$

formundadır.

Bu tür denklemlerin en iyi bilineni; bir kanalda su yüzeyindeki dalgalanmaları ifadeden ve Korteweg-de Vries tarafından bulunan (1.7) KdV denklemidir. Bu denklem fizik, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği gibi birçok çalışma alanında yer almaktadır. Bu denklem için;

$$u(x,t) = \phi(x+ct) \tag{1.14}$$

şeklindeki hareketli dalga çözümü θ faz ve $2a^2$ büyüklüğü, hızın yarısı olmak üzere,

$$u(x,t) = 2a^2 \sec h^2 a(x + 4a^2 t + \theta) \tag{1.15}$$

olarak bulunmuştur (Tabor 1989).

(1.13) denkleminde $u_t = 0$ olarak alınırsa, bulunan $K[u] = 0$ adi diferensiyel denklemi, (1.10) denkleminin durgun (stationary) denklemi olarak adlandırılır.

1.3 Korunum Kanunları

(1.13) lineer olmayan oluşum denklemlerinin korunum kanunu

$$T_t + X_x = 0 \tag{1.16}$$

formundadır. Burada $T[u]$ ve $X[u]$ sırasıyla, u ve u fonksiyonunun x-değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır. X_x ve T_t sırasıyla x ve t ye göre tam (total) türevi ifade eder ve

$$T_t = \frac{\partial T}{\partial u} u_t + \frac{\partial T}{\partial u_x} u_{tx} + \cdots \tag{1.17}$$

$$X_x = \frac{\partial X}{\partial u} u_x + \frac{\partial X}{\partial u_x} u_{xx} + \cdots \tag{1.18}$$

şeklindedir.

Eğer T, u nun lokal bir fonksiyonu ise, yani; herhangi bir T değeri sadece x değişkeninin küçük bir komşuluğundaki u fonksiyonuna bağlı ise, bu durumda T lokal korunumlu yoğunluktur. Eğer, X de lokal ise, bu durumda (1.16) denklemine lokal korunum kanunu adı verilir.

Özel olarak, eğer T ifadesi açık olarak x ve t ye bağlı olmayıp u ve u un x değişkenine göre türevlerinin polinomsal bir ifadesi ise, T değerine polinomsal korunumlu yoğunluk denir. X de polinomsal ifadesi ise, (1.16) denklemine polinomsal korunum kanunu adı verilir. Uygun sınır koşulları kullanıldığında, lokal korunum kanunları ile hareket sabitleri arasında yakın bir ilişki ortaya çıkar. (1.16) denkleminin x değişkenine göre integrali alındığında,

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} T dx + \left[X\right]_A^B = \frac{d}{dt}\int_A^B T dx + \left[X\right]_A^B = 0 \tag{1.19}$$

elde edilir. (B-A) nın periyodun tam katı olduğu veya $u(x,t)$ nin $x \to \mp\infty$ ve (A,B) = $(-\infty,\infty)$ iken sıfıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında, (1.19) denkleminden

$$\frac{d}{dt}\int_A^B T dx = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan t-değişkenine göre integral alınarak,

$$\int_A^B T dx = sbt.$$

hareket sabiti elde edilir.

Soliton teoride fazlaca ilgilenilen (1.7) KdV denkleminin sonsuz sayıda korunum kanunları vardır. Bunlardan birkaçı,

$$
\begin{aligned}
T_0 &= u, & X_0 &= -u_{xx} - 3u^2, \\
T_1 &= \tfrac{1}{2}u^2, & X_1 &= -uu_{xx} + \tfrac{1}{2}u_x^2 - 2u^3, \\
T_2 &= u^3 - \tfrac{1}{2}u_x^2, & X_2 &= u_x u_{xxx} - \tfrac{1}{2}u_{xx}^2 - 3u^2 u_{xx} + 6uu_x^2 - \tfrac{9}{2}u^4
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada T_i $(i = 0,1,2)$ ifadeleri (1.7) KdV denklemi için sırasıyla kütle, momentum ve enerjidir.

1.4 Ters Saçılım Dönüşüm (TSD)

Ters saçılım dönüşüm metodu, KdV denkleminin çözümü için kullanılmıştır (Gardner, et al., 1967; Gardner, et al., 1974). Bu metodun amacı yeterince hızlı bozulan başlangıç değerleriyle verilen (1.7) KdV denkleminin tam çözümünü bulmaktır. Yani; $f(x)$, $|x| \to \infty$ iken yeterince hızlı bozulan bir fonksiyon olmak üzere,

$$x \in R,\ t \geq 0 \quad u(x,0) = f(x) \tag{1.20}$$

başlangıç şartıyla verilen (1.7) KdV denklemini çözmektir.

$$w_t = (w_{xx} + 3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3)_x \tag{1.21}$$

Gardner denklemi olmak üzere, burada ayrıca w değişkeni

$$w = u + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n \tag{1.22}$$

şeklinde seriye açılabilir.

Gardner dönüşümü (1.21), Riccati tipi diferensiyel denklemdir. Eğer

$$w = \frac{1}{\in}\frac{\Phi_x}{\Phi} + \frac{1}{2\in^2} \tag{1.23}$$

dönüşümü yapılırsa, $\lambda = \frac{1}{4\epsilon^2}$ olmak üzere,

$$L\Phi := \Phi_{xx} + u(x,t)\Phi = \lambda\Phi \tag{1.24}$$

şeklinde lineerleştirilebilir. Bu denklem ise, quantum teoride $u(x,t)$; potansiyel ve λ; enerji olmak üzere, zaman bağımlı Schrödinger denklemi olarak bilinir.

(1.24) denkleminin özfonksiyonlarının zaman oluşumu,

$$\Phi_t = P\Phi = 4\Phi_{xxx} + 6u\Phi_x + 3u_x\Phi \tag{1.25}$$

ile verilir. $\lambda_t = 0$ kabulü ile, (1.24) ve (1.25) denklemlerinden, $\Phi_{xxt} = \Phi_{txx}$ değişimlilik şartının sağlanması için gerek koşul, u un (1.7) KdV denklemini sağlamasıdır. Benzer şekilde (1.14) KdV denklemi sağlanıyorsa, özdeğerler zamandan bağımsız olmalıdır.

Adi diferensiyel denklemlerin spektral teorisine göre, (1.24) denklemi için $\lambda_n = \kappa_n^2$, $n = 1,2,\ldots,N$ sonlu ayrık özdeğerler vardır. Sınırlardaki çözümlere bakılırsa,

$$\begin{aligned} &x \to -\infty \quad için \quad \Phi_n(x) \sim e^{\mathrm{K}_n x} \\ &x \to \infty \quad için \quad \Phi_n(x) \sim b_n(t) e^{-\mathrm{K}_n x} \end{aligned} \tag{1.26}$$

bulunur.

$\lambda = -k^2$ sürekli spektrumu için karşı gelen sınır şartları ise,

$$\begin{aligned} &x \to -\infty \quad için \quad \Phi_n(x) \sim T(k,t) e^{ikx} \\ &x \to \infty \quad için \quad \Phi_n(x) \sim e^{-ikx} + R(k,t) e^{ikx} \end{aligned} \tag{1.27}$$

dır. Buradaki $T(k,t)$ ve $R(k,t)$ fonksiyonları geçiş (transmission) ve yansıma (reflection) katsayılarıdır. Verilen $u(x)$ potansiyeli ile K_n, b_n, $R(k,t)$, $T(k,t)$ ifadeleri hesaplanabilir.

Genel olarak t zamanındaki saçılım verisi

$$S(\lambda,t)=\left\{(\mathrm{K}_n,b_n)_{n=1}^{N}\ ,\ R(k,t)\ ,\ T(k,t)\ ,\ k\ reel\right\} \tag{1.28}$$

ile verilir.

$t=0$ zamanında $S(\lambda,0)$ saçılım verisi verildiğinde, t zamanındaki saçılım verisi oluşturulabilir. Buradaki problem, saçılım verisinden, (1.7) KdV denkleminin istenen çözümü olan $u(x,t)$ potansiyelinin oluşturulmasıdır. Gel'fand ve Levitan $S(\lambda,t)$ saçılım verisinin $u(x,t)$ potansiyelinin elde edilmesi için yeterli olduğunu göstermişlerdir (Gelfand and Levıtan, 1995).

KdV denkleminin çözümü ters saçılım metodu kullanılarak üç adımda bulunabilir:

i) $u(x,0)=u_0(x)$ başlangıç koşullarından, $t=0$ zamanında S_0 saçılım verisi oluşturulur.

ii) $u(x,t)$ ye karşı gelen genel t zamanı için $S(\lambda,t)$ saçılım verisi hesaplanır.

iii) $S(\lambda,t)$ saçılım verisinden $u(x,t)$ potansiyeli bulunur.

Burada ilk adım direkt spektral problem, üçüncü adım ise, ters spektral problem olarak isimlendirilir.

1.5 Sıfır Eğrilik Gösterimi

U ve V matrisler olmak üzere,

$$\psi_x = U(u,\lambda)\psi \tag{1.29}$$

$$\psi_t = V(u,\lambda)\psi \tag{1.30}$$

ifadelerinin $\psi_{xt}=\psi_{tx}$ değişimlilik (integrallenebilme) şartı

$$U_t - V_x + [U,V] = 0 \tag{1.31}$$

sıfır eğrilik şartını verir. Bu ise (1.13) genel lineer olmayan oluşum denkleminin bulunması ve integrallenebilmesi için alternatif bir yoldur.

1.5.1 2x2 Tipinde Spektral Problem

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin büyük bir kısmı için başlangıç değer problemini çözmede bir yöntem geliştirilmiştir (Ablowitz et al.,1974). Bu yöntemde A, B, C, ψ den bağımsız ve $q(x,t), r(x,t) : \mu$ nün skaler fonksiyonları ve

$$\psi = (\psi_1, \psi_2)^T, \quad U = \begin{pmatrix} -i\mu & q \\ r & i\mu \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

olmak üzere, (1.29) ve (1.30) ile verilen spektral problemi kullanılmış ve (1.31) sıfır eğrilik (integrallenebilme) şartından

$$\begin{aligned} A_x &= qC - rB \\ q_t &= B_x + 2i\mu B + 2Aq \\ r_t &= C_x - 2i\mu C - 2Ar \end{aligned} \tag{1.33}$$

denklemleri bulunmuştur. Bu denklemlerden, A, B, C değerleri çözülerek, q ve r için integrallenebilen bazı oluşum denklemleri bulunmuştur. Burada μ parametresi spektral parametredir. A, B, C için,

$$V = \sum_{i=0}^{N} V_i - i\mu^i \tag{1.34}$$

şeklinde polinomsal açılımını yerine yazarak, integrallenebilir oluşum denklemleri bulunabilir. Bu açılım, (1.33) denklemlerinde yerine yazıldığında ve μ parametresinin kuvvetlerinin katsayıları birbirine eşitlendiğinde, $i = 0,1,\ldots,N$ olmak üzere, V_i

ifadelerinden q ve r değişkenlerine göre lineer olmayan iki tane oluşum denklemi bulunur.

Özel olarak $a = 2i$ ve $r = \pm q^*$ olmak üzere, birinci ve ikinci mertebeden

$$\begin{aligned} A &= a(\mu^2 + \tfrac{2}{2}qr) \\ B &= a(i\mu q - \tfrac{1}{2}q_x) \\ C &= a(i\mu r + \tfrac{1}{2}r_x) \end{aligned} \tag{1.35}$$

açılımlarından, kompleks eşleniği ile birlikte

$$iq_t = q_{xx} \pm 2|q|^2 q \tag{1.36}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi bir oluşum denklemi olarak bulunur.

a_0, a_1, a_2, a_3 sabitler olmak üzere, üçüncü mertebeden

$$\begin{aligned} A &= a_0\mu^3 + a_1\mu^2 + \tfrac{1}{2}(a_0 qr + a_2)\mu + \tfrac{1}{2}a_1 qr - \tfrac{1}{4}ia_0(qr_x - rq_x) + a_3 \\ B &= ia_0\mu^2 q + (ia_1 q - \tfrac{1}{2}a_0 q_x)k + \left[ia_2 q - \tfrac{1}{2}a_1 q_x + \tfrac{1}{4}a_0(2rq_2 - q_{xx})\right] \\ C &= ia_0\mu^2 r + (ia_1 r + \tfrac{1}{2}a_0 r_x)k + \left[ia_2 r + \tfrac{1}{2}a_1 r_x + \tfrac{1}{4}ia_0(2qr_2 - r_{xx})\right] \end{aligned} \tag{1.37}$$

açılımları ile

$$\begin{aligned} q_t &= \tfrac{1}{4}ia_0(6qrq_x - q_{xxx}) + \tfrac{1}{2}a_1(2q^2 r - q_{xx}) + ia_2 q_x - 2a_3 q \\ r_t &= \tfrac{1}{4}ia_0(6qrr_x - r_{xxx}) - \tfrac{1}{2}a_1(2q^2 r - q_{xx}) + ia_2 r_x + 2a_3 r \end{aligned} \tag{1.38}$$

oluşum denklemleri elde edilir. Eğer $r = q$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_0 = 4i$ alırsak, bir oluşum denklemi olarak

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2 v_x \tag{1.39}$$

MKdV denklemi bulunur. Yine $r = -1$ durumunda, (1.7) KdV denklemi elde edilir.

$r=-1+\varepsilon^2 q$ aldığımızda ise, Gardner denklemi bulunur. $\mu^2=-\lambda$ olmak üzere, (1.24) denklemine eşit olan

$$\psi_{2xx}+(\mu^2+q)\psi_2=0 \tag{1.40}$$

Schröndinger spektral problemi elde edilir.

Ayrıca μ parametresinin negatif kuvvetlerinde, A,B,C açılımlarını

$$A=\frac{a(x,t)}{\mu},\quad B=\frac{b(x,t)}{\mu},\quad C=\frac{c(x,t)}{\mu} \tag{1.41}$$

olarak aldığımızda integrallenebilme şartından

$$a_x=\frac{1}{2}(qr)_t,\quad q_{xt}=-4iaq,\quad r_{xt}=-4iar \tag{1.42}$$

elde edilir. Yine a,b,c için iki özel seçim yapmak mümkündür:

i)

$$a=\frac{i}{4}\cos u,\quad b=c=\frac{i}{4}\sin u,\quad q=-r=-\frac{1}{2}u_x \tag{1.43}$$

alındığında bir oluşum denklemi olarak

$$u_{xt}=\sin u \tag{1.44}$$

Sine-Gordon denklemi bulunur.

ii)

$$a=\frac{i}{4}\cosh u,\quad b=c=\frac{i}{4}\sinh u,\quad q=r=\frac{1}{2}u_x \tag{1.45}$$

alındığında ise, başka bir oluşum denklemi olarak

$$u_{xt} = \sinh u \tag{1.46}$$

Sinh-Gordon denklemi elde edilir.

1.6 Lax Çiftleri (Lax Pairs)

L, spektral operatör ve P ise özfonksiyonların ilgili zaman oluşumlarını ifade eden operatör olmak üzere;

$$L\Phi = \lambda\Phi \tag{1.47}$$

$$\Phi_t = P\Phi \tag{1.48}$$

lineer denklem çiftini ele alalım. (1.47) denkleminin t zamanına göre türevini alıp (1.48) denkleminde kullanılırsa, $\lambda_t = 0$ olmak üzere,

$$L_t = [P, L] = PL - LP \tag{1.49}$$

elde edilir. Buradaki L ve P diferensiyel operatörlerine Lax çiftleri ve (1.49) denklemine de Lax denklemi denir ve uygun seçilmiş L ve P operatörleriyle lineer olmayan oluşum denklemini içerir. Örneğin (1.7) KdV denklemi için Lax Çiftleri, ∂ türev operatörü; herhangi bir $u(x,t)$ fonksiyonu için

$$\partial u \equiv u_x + u\partial \tag{1.50}$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$L = \partial^2 + u\,, \quad P = 4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x \tag{1.51}$$

dir ve KdV denklemi bu Lax çiftlerinin değişimlilik şartı olarak düşünülebilir.

Lax çiftleri TSD için başlangıç noktası olduğundan, Lax denklemlerini ve Lax çiftlerini bulmak önemlidir. Verilen bir sistem için Lax çiftlerini bulma işlemi sistemin integrallenebilme olasılığını verir.

1.7 Ardıştırma Operatörü

Eğer $v = P[u]$ fonksiyonu

$$v_t = K'[v] \tag{1.52}$$

lineerleştirilmiş denkleminin çözümü ise, $v = P[u]$, (1.13) oluşum denkleminin genelleştirilmiş simetrisidir. Burada $P[u]$, u ve u nun x-değişkenine göre türevlerinin bir fonksiyonudur ve $K'[u]$ diferensiyel operatörü, $K[u]$ nun Frechet türevidir ve

$$K'[u]v = \frac{d}{d\varepsilon} K[u + \varepsilon v]_{\varepsilon=0} \tag{1.53}$$

olarak tanımlanır.

u nun $K[u]$ diferensiyel operatörünün τ bağımsız değişkenine göre oluşumu

$$(K[u])_\tau = K'[u]u_\tau \tag{1.54}$$

ile verilir. $v = P[u]$ nun (1.52) denkleminin çözümü olabilmesi için

$$(P[u])_\tau = (K[u])_\tau \tag{1.55}$$

olmalıdır. (1.52) ve

$$u_\tau = P[U] \tag{1.56}$$

akışları değişimlidir. Burada $u\,;t$ ve τ akış zamanlarının ve x-değişkeninin bir fonksiyonudur.

$R[u]$ ile gösterilen ardıştırma operatörü, genelleştirilmiş simetrileri genelleştirilmiş simetrilere dönüştürür ve

$$(R[u])_t = [K'[u], R[u]] \equiv K'[u]R[u] - R[u]K'[u] \tag{1.57}$$

denklemini sağlar. (1.31) ile (1.57) ifadelerini karşılaştırdığımızda, $R[u]$ ve $K'[u]$ operatörleri Lax çifti formundadır. Lax çiftlerinin bileşenlerinin diferensiyel operatör olması beklenirken, $R[u]$ ardıştırma operatörü genellikle integro-diferensiyel operatörü içerir. Örneğin (1.14) KdV denkleminin ardıştırma operatörüne göre Lax çiftleri

$$R\Phi = \left(\partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1}\right)\Phi = 4\lambda\Phi, \quad \Phi_t = \left(\partial^3 + 6u\partial + 6u_x)\Phi\right) \tag{1.58}$$

şeklindedir. Eğer

$$[R', R][v]w \equiv R'[Rv]w - R(R'[v]w) \tag{1.59}$$

ifadesi v ve w ya göre simetrik ise ardıştırma operatörüne hereditary denir (Fuchssteıner and Focas, 1981).

Örnek 1.7.1

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \tag{1.60}$$

Burger denklemi için hereditary ardıştırma operatörü;

$$R[u] = \partial + u + u_x\partial^{-1} \tag{1.61}$$

olup, sonsuz tane akış dizisi

$$
\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_x, \\
u_{t_2} &= \left(u_x + u^2\right)_x, \\
u_{t_3} &= \left(u_{xx} + 3uu_x + u^3\right)_x, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.62}
$$

olarak bulunur. Genel formda, ardıştırma operatörü ile akışlar arasındaki bağıntı ise

$$
u_{t_{n+1}} = R^n[u]\,u_x = K_{n+1}[u], \quad n = 0,1,\ldots \tag{1.63}
$$

şeklindedir.

Örnek 1.7.2

(1.7) KdV denkleminin hereditary ardıştırma operatörü:

$$
R[u] = \partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1}
$$

dir. Ardıştırma operatörüne u_x ifadesine uyguladığımızda, ardışık olarak

$$
\begin{aligned}
u_{t_1} &= u_x \\
u_{t_3} &= R[u]u_x = (\partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1})u_x = u_{xxx} + 6uu_x \\
u_{t_5} &= R^2[u]u_x = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x \\
u_{t_7} &= R^3[u]u_x = u_{xxxxxxx} + 14uu_{xxxxx} + 42u_xu_{xxxx} + 70u_{xx}u_{xxx} + 70u^2u_{xxx} + \\
&\qquad 280uu_xu_{xx} + 70u_x^3 + 140u^3u_x \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.64}
$$

KdV tipi denkleminin hiyerarşisi elde edilir. Bu oluşum denklemleri sırasıyla KdV, beşinci mertebeden KdV ve yedinci mertebeden KdV denklemi olarak bilinirler. Genel formda, ardıştırma operatörü ile akışlar arasındaki bağıntı ise

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[u]u_x = K_{2n+1}[u], \quad n = 0,1,\ldots \tag{1.65}$$

formundadır.

(1.39) MKdV denkleminin hereditary ardıştırma operatörü;

$$R[v] = \partial^2 - 4v^2 - 4v_x\partial^{-1}v \tag{1.66}$$

olmak üzere, akış hiyerarşisi

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[v]v_x = K_{2n+1}[v], \quad n = 0,1,\ldots \tag{1.67}$$

olarak verilir.

Örnek 1.7.3

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q|q|^2 \tag{1.68}$$

NLS denkleminin ardıştırma operatörü,

$$A = \begin{pmatrix} \partial - 2q\partial^{-1}q^* & -2q\partial^{-1}q \\ 2q^*\partial^{-1}q^* & -\partial + 2q^*\partial^{-1}q \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

ile tanımlanmıştır ve ardıştırma operatörü ile Lax çiftlerinin gösterimi

$$(A - 2\mu I)\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1^* \end{pmatrix} = 0 \tag{1.70}$$

$$i\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_1^*\end{pmatrix}_\tau=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2\begin{pmatrix}2qq^*&q^2\\ \left(q^*\right)^2&2qq^*\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_1^*\end{pmatrix}\qquad(1.71)$$

şeklindedir.

1.8 Çok Ölçekli Açılım Metodu

Bu kısımda bir bozulma (pertürbasyon) metodu olan çok ölçekli açılım metodu hakkında kısa bilgi verilecektir. (1.13) lineer olmayan oluşum denkleminin ε ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\begin{aligned}\xi_i&=\xi_i(x,t,\varepsilon)\\ \tau_i&=\tau_i(x,t,\varepsilon)\end{aligned}\qquad(1.72)$$

olmak üzere,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n)\qquad(1.73)$$

formunda yaklaşık çözümü aramaktır. Bu çözüm (1.13) lineer olmayan oluşum denkleminde yerine yazıldığında ε nun kuvvetlerinin katsayılarında u_n değerleri elde edilir. Şimdi metodu açıklayıcı örnekler verelim.

Örnek 1.8.1

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x\qquad(1.74)$$

KdV denkleminin (1.73) formunda çözümünü arayalım. Burada yavaş değişkenler

$$\xi_0=x,\quad \xi_1=\varepsilon(x-3k^2t),\quad \tau_0=t,\quad \tau_1=-3k^2\varepsilon^2 t\qquad(1.75)$$

olmak üzere, varsayılan çözüm; (1.74) KdV denkleminde yerine yazılırsa ve ε nun kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$u_{1\tau_0} - u_{1\xi_0\xi_0\xi_0} = 0 \tag{1.76}$$

$$u_{2\tau_0} - u_{2\xi_0\xi_0\xi_0} = 3k^2 u_{1\xi_1} + 6u_1 u_{1\xi_0} + 3u_{1\xi_0\xi_0\xi_1} \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned} u_{3\tau_0} - u_{3\xi_0\xi_0\xi_0} = {} & 3k^2 u_{1\tau_1} + 6u_1 u_{1\xi_1} + 3k^2 u_{2\xi_1} + 6u_2 u_{1\xi_0} + 6u_1 u_{2\xi_0} + \\ & 3u_{1\xi_0\xi_1\xi_1} + 3u_{2\xi_0\xi_0\xi_1} \end{aligned} \tag{1.78}$$

$$\begin{aligned} u_{4\tau_0} - u_{4\xi_0\xi_0\xi_0} = {} & -3ku_{1\tau_2} + 3k^2 u_{2\tau_1} + 6u_2 u_{1\xi_1} + 6u_1 u_{2\xi_1} + 3k^2 u_{3\xi_1} + u_{1\xi_1\xi_1\xi_1} \\ & + 6u_3 u_{1\xi_0} + 6u_2 u_{2\xi_0} + 6u_1 u_{3\xi_0} + 3u_{2\xi_0\xi_1\xi_1} + 3u_{3\xi_0\xi_0\xi_1} \end{aligned} \tag{1.79}$$

$$\vdots$$

denklemleri bulunur. c.c.; kompleks eşlenik olmak üzere, (1.76) denkleminin çözümü

$$u_1(\xi_0, \xi_1, \tau_0, \tau_1) = v_1(\xi_1, \tau_1) e^{i(kx - k^3 t)} + c.c \tag{1.80}$$

olacaktır. Bu çözüm (1.77) denkleminde yerine yazıldığında; bu denklemin çözümü, f_0; integrasyon sabiti olmak üzere,

$$u_2(\xi_0, \xi_1, \tau_0, \tau_1) = v_2(\xi_1, \tau_1) e^{2i(kx - k^3 t)} + c.c. + f_0(\xi_1, \tau_1) \tag{1.81}$$

olarak bulunur. (1.80) ve (1.81) çözümleri, (1.78) denkleminde yerine yazılırsa

$$v_2 = \frac{1}{k^2} v_1^2, \quad v_{-2} = \frac{1}{k^2} v_{-1}^2 \tag{1.82}$$

elde edilir. Bunlar kullanılarak (1.78) denkleminin çözümü

$$u_3(\xi_0,\xi_1,\tau_0,\tau_1)=v_3(\xi_1,\tau_1)e^{3i(kx-k^3t)}+c.c.+f_1(\xi_1,\tau_1)e^{2i(kx-k^3t)} \tag{1.83}$$

formunda seçilirse;

$$v_3=\frac{3}{4k^4}v_1^2,\quad f_0=-\frac{2}{k^2}v_1v_{-1},\quad f_1=\frac{2i}{k^3}v_1v_{1\xi_1} \tag{1.84}$$

ve seküler terim

$$iv_{1\tau_1}=v_{1\xi_1\xi_1}-\frac{2}{k^2}v_1v_1^* \tag{1.85}$$

olarak bulunur. Eğer $q=\frac{v_1}{k}$ olarak tanımlanırsa, (1.85) denkleminden

$$iq_{\tau_1}=q_{\xi_1\xi_1}-2q|q|^2 \tag{1.86}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi bulunur.

Böylece (1.74) KdV denkleminin çözümü; q (1,86) Schrödinger denkleminin çözümü olmak üzere,

$$u(x,t)=\varepsilon kq(\xi_1,\tau_1)e^{i(kx-k^3t)}+\varepsilon^2\left(q^2(\xi_1,\tau_1)+2iq(\xi_1,\tau_1)q_{\xi_1}(\xi_1,\tau_1)\right)e^{2i(kx-wt)}+\ldots c.c. \tag{1.87}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 1.8.2

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{xxxx}+3(u^2)_{xx} \tag{1.88}$$

Boussinesq denklemine, $n=0,2,4,\ldots$ için,

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n+2}u_n\left(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n\right) \tag{1.89}$$

formunda çözümünü arayalım. Burada ε ; ölçek parametresi , yavaş değişkenler

$$\xi_0=x,\ \tau_0=t,\ \xi=\varepsilon(x-t),\quad \tau_3=h_1\varepsilon^3 t,\ \ \tau_5=-h_2\varepsilon^5 t,\ \ \tau_7=h_3\varepsilon^7 t,\ \ldots, \tag{1.90}$$

ve türevden

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}\quad \text{ve}\quad \frac{\partial}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial\tau_3}-\varepsilon^5\frac{\partial}{\partial\tau_5}+\varepsilon^7\frac{\partial}{\partial\tau_7}-\cdots \tag{1.91}$$

olmak üzere, varsayılan çözüm; (1.88) Boussinesq denkleminde yerine yazılır ve ε ölçek parametresinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse; ardışık olarak,

$$-2h_1u_{0\tau_3}-u_{0\xi\xi\xi\xi}+6u_0u_{0\xi\xi}+6u_{0\xi}^2=0 \tag{1.92}$$

$$2h_2u_{0\tau_5}+6u_{0\xi\xi}u_2+12u_{0\xi}u_{2\xi}+h_1^2u_{0\tau_3\tau_3}-2h_1u_{2\xi\tau_3}-u_{2\xi\xi\xi\xi}+6u_0u_{2\xi\xi}=0 \tag{1.93}$$

$$\begin{aligned}&-2h_3u_{0\xi\tau_7}+6u_4u_{0\xi\xi}+12u_{0\xi}u_{4\xi}-2h_1h_2u_{0\tau_3\tau_5}+2h_2u_{2\xi\tau_5}+6u_2u_{2\xi\xi}+6u_{2\xi}^2\\&+h_1^2u_{2\tau_3\tau_3}-2h_1u_{4\xi\tau_3}-u_{4\xi\xi\xi\xi}+6u_0u_{4\xi\xi}=0\end{aligned} \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned}&-2h_4u_{0\xi\tau_9}+6u_6u_{0\xi\xi}+12u_{0\xi}u_{6\xi}+2h_1h_3u_{0\tau_3\tau_7}+h_2^2u_{\tau_5\tau_5}-2h_3u_{2\xi\tau_7}+6u_4u_{2\xi\xi}\\&+12u_{2\xi}u_{4\xi}-2h_1h_2u_{2\tau_3\tau_5}+2h_2u_{4\xi\tau_5}+6u_2u_{4\xi\xi}+h_1^2u_{4\tau_3\tau_3}-2h_1u_{6\xi\tau_3}-u_{6\xi\xi\xi\xi}\\&+6u_0u_{6\xi\xi}=0\\&\vdots\end{aligned} \tag{1.95}$$

denklemleri elde edelir.

ε^0 ın katsayısından, $h_1=\frac{1}{2}$ alarak (1.92) denkleminin; integral sabiti sıfır olmak şartıyla integrali alınırsa;

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau_3} = -\frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} + 6\frac{\partial u_0}{\partial \xi} u_0 \tag{1.96}$$

KdV denklemini elde ederiz.

ε^2 nin katsayısından, $h_2 = -\frac{1}{8}$ alarak (1.93) denklemini çözersek;

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau_5} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi_5} - 10\frac{\partial u_0}{\partial \xi_3} u_0 - 20\frac{\partial u_0}{\partial \xi_2}\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 30u_0^2\frac{\partial u_0}{\partial \xi} \tag{1.97}$$

beşinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

ε^4 un katsayısından, $h_3 = \frac{1}{16}$ ve $u_0 = a_2 u_0$ alarak (1.94) denklemini çözersek;

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial \tau_7} = &-\frac{\partial u_0}{\partial \xi_7} + 14\frac{\partial u_0}{\partial \xi_5} u_0 + 42\frac{\partial u_0}{\partial \xi_4}\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 140u_0^3\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 70\frac{\partial u_0}{\partial \xi_3}\frac{\partial u_0}{\partial \xi_2} \\ &- 280\frac{\partial u_0}{\partial \xi_2}\frac{\partial u_0}{\partial \xi} u_0 - 70(\frac{\partial u_0}{\partial \xi})^3 - 70u_0^2\frac{\partial u_0}{\partial \xi_3}\end{aligned} \tag{1.98}$$

yedinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz. Böyle devam ederek, ardıştırma operatörü

$$R[u] = \partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1} \tag{1.99}$$

ve ardıştırma operatörü ile akışların hiyerarşisi

$$u_{\tau_{2n+1}} = R^n[u]\, u_\xi = K_{2n+1}[u],\ n = 1,2,3,\ldots \tag{1.100}$$

olmak üzere KdV denkleminin hiyerarşisini elde ederiz.

1.9 Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri

Lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerini bulmak için son yıllarda bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin başlıcaları; homojenleştirilmiş denge yöntemi, Sine-Cosine yöntemi, tanh-sech yöntemi, F-açılım yöntemi ve Jakobi eliptik fonksiyon yöntemidir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümleri periyodik, kompleks, kink, soliton ve kompakton çözümler şeklinde elde edilir. Periyodik çözümler trigonometrik fonksiyonları içeren, kompleks çözümler karmaşık sonuçlar içeren, kink çözümler $(a+\tanh)$ ve $(a+\coth)$ fonksiyonlarını içeren, soliton çözümler hiperbolik çözümleri içeren ve kompakton çözümler $\sin^2, \cos^2, \sec^2, \cos ec^2$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir. Şimdi Sine-Cosine yöntemiyle KdV denkleminin tam çözümlerinin elde edilişini bir örnekle gösterelim.

Örnek 1.9.1

a ve b sabitler ve $u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0 \tag{1.101}$$

KdV denkleminin hareketli dalga çözümünü bulmak için, dalga değişkeni olarak $\xi = x - ct$ seçer ve $u(x,t) = u(\xi)$ olmak üzere, $u_\xi = \dfrac{du}{d\xi}$ için,

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2\frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2} \tag{1.102}$$

değişken değiştirmelerini yaparsak, (1.101) KdV denklemi

$$-cu_\xi + \frac{a}{2}u^2{}_\xi + bu_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{1.103}$$

denklemine dönüşür. (1.103) denkleminin bir kez integralini alır ve integral sabitini sıfır kabul edersek;

$$-cu+\frac{a}{2}u^2+bu_{\xi\xi}=0 \tag{1.104}$$

denklemini elde edriz. λ, β, μ belirlenecek parametreler olmak üzere;

$$u(x,t)=\lambda\sin^{\beta}[\mu\xi] \tag{1.105}$$

veya

$$u(x,t)=\lambda\cos^{\beta}[\mu\xi] \tag{1.106}$$

formunda çözümler ararsak; (1.104) denklemi

$$\begin{aligned}&-c\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+\frac{a}{2}\lambda^2\cos^{2\beta}(\mu\xi)-b\mu^2\beta^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)\\&+b\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)=0\end{aligned} \tag{1.107}$$

denklemine dönüşür. (1.105) denkleminden elde edilen,

$$\begin{aligned}&\beta-1\neq 0,\\&\beta-2=2\beta,\\&\frac{a}{2}\lambda=-b\mu^2\beta(\beta-1),\\&-c=b\mu^2\beta^2.\end{aligned} \tag{1.108}$$

cebirsel denklemler sistemini çözersek; $\beta=-2$, $\mu=\sqrt{\frac{-c}{4b}}$, ve $\lambda=\frac{3c}{a}$ çözümlerini elde ederiz. Bu durumda $c<0$ için,

$$u(x,t)=\frac{3c}{a}\sec^2\left[\sqrt{\frac{-c}{4b}}(x-ct)\right],$$

$$u(x,t)=\frac{3c}{a}\csc^2\left[\sqrt{\frac{-c}{4b}}(x-ct)\right] \qquad (1.109)$$

ve $c>0$ için,

$$u(x,t)=\frac{3c}{a}\sec h^2\left[\sqrt{\frac{c}{4b}}(x-ct)\right],$$

$$u(x,t)=-\frac{3c}{a}\csc h^2\left[\sqrt{\frac{c}{4b}}(x-ct)\right] \qquad (1.110)$$

çözümleri elde edilir. $\beta-1=0$, durumu sadece $a=0$ ise sağlanır. Sonuç olarak,

λ =herhangi bir gerçek sayı, $\mu=\sqrt{\frac{-c}{b}}$

elde edilir ve A ile B keyfi sabitler olmak üzere;

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\cos\left[\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right]+B\sin\left[\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right], c<0, \\ u(x,t) &= A\cosh\left[\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right]+B\sinh\left[\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right], c>0 \end{aligned} \qquad (1.111)$$

tam çözümleri bulunur.

1.10 Tezin Organizasyonu

Bu çalışma, matematikte, fizikte ve mühendisliğin bir çok alanında önemli rol oynayan uygulamalı matematikte zamana göre türeve bağlı yazılmış olan lineer olmayan oluşum denklemleri olarak adlandırılan kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirlikleri üzerinedir.

Dört bölümden oluşan çalışmanın giriş bölümünde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin integrallenebilmesi veya analitik çözümünün varlığının gösterilmesi için geliştirilen, Ters Saçılım Dönüşümü (TSD), korunum kanunları, yayılma bağıntısı, lax çiftleri, ardıştırma operatörü gibi temel kavramlar verilmiştir. Bir bozulma metodu olan çok ölçekli açılım metodu uygulamalı olarak tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, çok ölçekli açılım metodunu kullanarak Regularized long-wavelenght (RLW) ve PDE denklemlerinden; Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin solitari-dalga çözümleri ve integrallenebilme şartını kullanarak, integrallenebilen KdV tipi oluşum denklemlerinin hiyerarşisi elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, yüksek dereceden yavaş değişkenler içeren farklı bir çok ölçekli açılım metodu tanıtılmıştır. Bu metot kullanılarak, İntegrallenebilen Nonlinear Schrödinger (NLS) tipi (türevli NLS, modifiye edilmiş NLS, iki kuple NLS denklemi içeren Manakov sistem) denklemlerden, KdV tipi oluşum denklemlerinin hiyerarşisi elde edilmiştir.

Son bölümde, yine bir bozulma tekniği olan çok ölçekli açılım metodu kullanılarak KdV tipi oluşum (KdV ve beşinci mertebeden KdV) denklemlerinden yeni NLS tipi denklemleri bulunmuştur.

BÖLÜM 2

DALGA DENKLEMLERİNİN SOLİTARİ-DALGA ÇÖZÜMÜ İLE KdV DENKLEMİNİN HİYERARŞİSİ

2.1 Giriş

Düzgün uzun dalga genliği (RLW) denkleminden KdV denkleminin hiyerarşisi (Kraenkel et al., 1995), Boussinesq ve modifiye edilmiş Boussinesq denkleminden; sırasıyla KdV denkleminin ve modifiye edilmiş KdV denkleminin hiyerarşileri bulunmuştur. Ayrıca, KdV hiyerarşisindeki denklemler solitari-dalga çözümlerinin özel durumunda pertürbasyon teoride istenmeyen (seküler) terimleri önceden önlem almada kesin bir rol oynadığını, ayrıca ilgili pertürbasyon seri açılımlarının toplanabilir ve RLW denkleminin solitari-dalga çözümünü tamamıyla verdikleri de gösterilmiştir (Kraenkel et al., 1996; Manna and Merle, 1997).

Bu çalışmalardan yararlanarak bu bölümde çok ölçekli açılım metodu ve integrallenebilme şartı (bağdaşma şartı) kullanılarak RLW ve bazı KTD denklemlerden KdV tipi lineer olmayan oluşum denklemlerinin hiyerarşisinin bulunması üzerinde durulacaktır.

2.2 Regularized long-wavelength (RLW) Denkleminden KdV Tipi Denklemlerinin Hiyerarşisinin Bulunması

$$u_t + u_x = u_{xxt} + 6uu_x \tag{2.1}$$

uzun dalga genliği RLW denkleminin, $n = 0,2,4,\ldots$ için

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+2} u_n\left(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\right) \tag{2.2}$$

formunda çözümünü arayalım. Burada k; sabit (dalga sayısı) olmak üzere, RLW denkleminin $w=\dfrac{k}{1+k^2}=k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n k^{2n}$; yayılma bağıntısı, durgun suda dalga denkleminin yayılma bağıntısıyla aynı olduğundan, $w=k-k^3+k^5-k^7+O(k^9)$ olarak genişletebilir. Ayrıca ε ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\xi_0=x,\tau_0=t\,,\ \xi=\varepsilon(x-t)\,,\quad \tau_3=h_1\varepsilon^3 t\,,\ \tau_5=-h_2\varepsilon^5 t\,,\ \tau_7=h_3\varepsilon^7 t\,,\ \ldots, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}\quad \text{ve}\quad \frac{\partial}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial\tau_3}-\varepsilon^5\frac{\partial}{\partial\tau_5}+\varepsilon^7\frac{\partial}{\partial\tau_7}-\cdots \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (2.2) varsayılan çözüm; (2.1) RLW denkleminde yerine yazılır ve ε ölçek parametresinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse; ardışık olarak,

$$h_1 u_{0\tau_3}+u_{0\xi\xi\xi}-6u_0u_{0\xi}=0 \tag{2.5}$$

$$u_{2\xi\xi\xi}-6u_{2\xi}u_0+h_1u_{2\tau_3}-h_1u_{0\xi\xi\tau_3}-6u_{0\xi}u_2-h_2u_{0\tau_5}=0 \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&u_{4\xi\xi\xi}-6u_{4\xi}u_0+h_1u_{4\tau_3}-h_1u_{2\xi\xi\tau_3}-6u_{2\xi}u_2-h_2u_{2\tau_5}-2h_2u_{0\xi\xi\tau_5}-6u_{0\xi}u_4\\&-h_3u_{0\tau_7}=0\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&u_{6\xi\xi\xi}-6u_{6\xi}u_0+h_1u_{6\tau_3}-h_1u_{4\xi\xi\tau_3}-6u_{4\xi}u_2-h_2u_{4\tau_5}+h_2u_{2\xi\xi\tau_5}-6u_{2\xi}u_4\\&-h_3u_{2\tau_7}+h_3u_{0\xi\xi\tau_7}-6u_{0\xi}u_6-h_4u_{0\tau_9}=0\\&\vdots\end{aligned} \tag{2.8}$$

denklemleri elde edilir.

(2.5) denkleminde $h_1=1$ alırsak;

$$u_{0t_3}=-u_{0\xi\xi\xi}+6u_0u_\xi \tag{2.9}$$

KdV denklemini buluruz. Bu denklem için; $u(x,t)=\phi(x+ct)$ şeklindeki hareketli dalga çözümü θ faz olmak üzere, $u(x,t)=2a^2\sec h^2 a(x+4a^2t+\theta)$ olarak bulunmuştu (Tabor 1989). (2.9) KdV denklemi için $\theta_3=k(\xi-4k^2\tau_3)$ olarak fazı seçersek $u_0=-2k^2\sec h^2(k\xi-4k^3\tau_3)$ solitari-dalga çözümüdür.

(2.6) denkleminde $h_2=1$ alırsak;

$$u_{0\tau_5}=u_{2\xi\xi\xi}-6u_{2\xi}u_0+h_1u_{2\tau_3}-h_1u_{0\xi\xi\tau_3}-6u_{0\xi}u_2 \tag{2.10}$$

denklemini ve bu denklemde $u_2=4k^2u_0$, $\theta_5=k(\xi-4k^2\tau_3+16k^4\tau_5)$, $u_0=-2k^2\sec h^2(k\xi-4k^3\tau_3+16k^5\tau_5)$ seçer ve

$$(u_{0\tau_3})_{\tau_5}=(u_{0\tau_5})_{\tau_3} \tag{2.11}$$

integrallenebilirlik şartını kullanırsak τ_5 zamanında oluşum denklemi olarak

$$u_{0\tau_5}=u_{0\xi\xi\xi\xi\xi}-10u_0u_{0\xi\xi\xi}-20u_{0\xi}u_{0\xi\xi}+30u_0^2u_{0\xi} \tag{2.12}$$

beşinci mertebeden KdV denklemini buluruz.

(2.7) denkleminde $h_3=-1$ alırsak;

$$u_{0\tau_7}=u_{4\xi\xi\xi}-6u_{4\xi}u_0+h_1u_{4\tau_3}-h_1u_{2\xi\xi\tau_3}-6u_{2\xi}u_2-h_2u_{2\tau_5}-2h_2u_{0\xi\xi\tau_5}-6u_{0\xi}u_4 \tag{2.13}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde $u_2=4k^2u_0$, $u_4=(4k^2)^2u_0$,
$\theta_7=k(\xi-4k^2\tau_3+16k^4\tau_5-64k^6\tau_7)$ ve
$u_0=-2k^2\sec h^2(k\xi-4k^3\tau_3+16k^5\tau_5-64k^7\tau_7)$ alır ve

$$(u_{0\tau_3})_{\tau_7}=(u_{0\tau_7})_{\tau_3} \tag{2.14}$$

integrallenebilirlik şartını kullanırsak τ_7 zamanında u_0 oluşumunu

$$\begin{aligned} u_{0\tau_7} &= -u_{0\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + 14u_0u_{0\xi\xi\xi\xi\xi} + 42u_{0\xi}u_{0\xi\xi\xi\xi} + 70u_{0\xi\xi}u_{0\xi\xi\xi} - 280u_0u_{0\xi}u_{0\xi\xi} \\ &\quad - 70u_0^2u_{0\xi\xi\xi} - 70u_{0\xi}^3 + 140u_0^3u_{0\xi} \end{aligned} \tag{2.15}$$

yedinci mertebeden KdV denklemi olarak buluruz. Böyle devam ederek, ardıştırma operatörü

$$R[u] = \partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1} \tag{2.16}$$

ve ardıştırma operatörünü kullanarak akışların hiyerarşisinden

$$u_{\tau_{2n+1}} = R^n[u]u_\xi = K_{2n+1}[u], \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{2.17}$$

KdV denkleminin hiyerarşisini elde ederiz.

2.3 Bazı Oluşum Denklemlerinden KdV Tipi Denklemlerinin Hiyerarşisinin Bulunması

α ve β sabitler olmak üzere,

$$u_t + \alpha u_x - u_{xxt} + (\beta+1)uu_x = \beta u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{2.18}$$

oluşum denklemine; ε küçük pozitif parametresi için zaman ve uzay değişkenleri

$$\tau = \varepsilon t, \qquad \xi = \varepsilon^{-1}x, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{2.20}$$

ve $n = 0,2,4,\ldots$ $\xi_0 = x$, $\tau_0 = t$ alınıp,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+2} u_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) \tag{2.21}$$

açılımı kullanılarak, ε parametresinin ilk kuvvetinden

$$\alpha u_x - u_{xxt} = \beta u_x u_{xx} + u u_{xxx} \tag{2.22}$$

denklemi elde edilmiştir (Matsuno, 2006). β özel değerleri için (2.18) denklemi tamamen integrallenebilen oluşum denklemlerine dönüşmektedir. $\beta = 2$ için,

$$u_t + \alpha u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + u u_{xxx} \tag{2.23}$$

Camassa-Holm (CH) denklemi, $\beta = 3$ için,

$$u_t + \alpha u_x - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + u u_{xxx} \tag{2.24}$$

Degasperis-Procesi (DP) denklemi bulunur. (2.18) denkleminin short-wave limitinden elde edilen (2.22) denkleminde $\beta = 2$ için,

$$\alpha u_x - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} + u u_{xxx} \tag{2.25}$$

Harry-Dym denklemi ve $\alpha = 0$ için Hunter-Saxton (HS) denklemi bulunur.

Biz de (2.18) denklemine, ε ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\xi = \varepsilon(x - t), \quad \tau_3 = h_1 \varepsilon^3 t, \quad \tau_5 = -h_2 \varepsilon^5 t, \quad \tau_7 = h_3 \varepsilon^7 t, \ \ldots, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau_3} - \varepsilon^5 \frac{\partial}{\partial \tau_5} + \varepsilon^7 \frac{\partial}{\partial \tau_7} - \cdots \tag{2.27}$$

ile $n=0,2,4,\ldots$ $\xi_0=x, \tau_0=t$ olmak üzere,

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n+2}u_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n) \tag{2.28}$$

açılımını uygularsak; yayılma bağıntısı $w=\alpha(k-k^3+k^5-k^7+O(k^9))$ olmak üzere, $\alpha=1$ ve $\beta=-7$ durumunda bu değerler (2.18) denklemde yerine yazılır ve ε ölçek parametresinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$h_1u_{0\tau_3}+u_{0\xi\xi\xi}-6u_0u_{0\xi}=0 \tag{2.29}$$

$$u_{2\xi\xi\xi}-6u_{2\xi}u_0+h_1u_{2\tau_3}-u_{0\xi\xi\xi}u_0-h_1u_{0\xi\xi\tau_3}+7u_{0\xi\xi}u_0-6u_{0\xi}u_2-h_2u_{0\tau_5}=0 \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}&u_{4\xi\xi\xi}-6u_{4\xi}u_0+h_1u_{4\tau_3}-u_{2\xi\xi\xi}u_0-h_1u_{2\xi\xi\tau_3}+7u_{2\xi\xi}u_{0\xi}+7u_{2\xi}u_{0\xi\xi}-6u_{2\xi}u_2\\&-h_2u_{2\tau_5}-u_{0\xi\xi\xi}u_2+h_2u_{0\xi\xi\tau_5}-6u_{0\xi}u_4-h_3u_{0\tau_7}=0\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}&u_{6\xi\xi\xi}-6u_{6\xi}u_0+h_1u_{6\tau_3}-u_{4\xi\xi\xi}u_0-h_1u_{4\xi\xi\tau_3}+7u_{4\xi\xi}u_{0\xi}+7u_{4\xi}u_{0\xi\xi}-6u_{4\xi}u_2\\&-h_2u_{4\tau_5}-u_{2\xi\xi\xi}u_2+h_2u_{2\xi\xi\tau_5}+7u_{2\xi\xi}u_{2\xi}-6u_{2\xi}u_4-h_3u_{2\tau_7}-u_{0\xi\xi\xi}u_4+h_3u_{0\xi\xi\tau_7}\\&-6u_{0\xi}u_6-h_4u_{0\tau_9}=0\\&\vdots\end{aligned} \tag{2.32}$$

denklemleri elde edilir.

(2.29) denkleminde $h_1=1$ alırsak;

$$u_{0t_3}=-u_{0\xi\xi\xi}+6u_0u_{0\xi} \tag{2.33}$$

KdV denklemini elde ederiz. KdV denklemi için $\theta_3=k(\xi-4k^2\tau_3)$ fazı seçersek $u_0=-2k^2\sec h^2(k\xi-4k^3\tau_3)$ solitari-dalga çözümüdür.

(2.30) denkleminde $h_2 = 1$ alırsak;

$$u_{0\tau_5} = u_{2\xi\xi\xi} - 6u_{2\xi}u_0 + h_1 u_{2\tau_3} - u_{0\xi\xi\xi}u_0 - h_1 u_{0\xi\xi\tau_3} + 7u_{0\xi\xi}u_0 - 6u_{0\xi}u_2 \qquad (2.34)$$

denklemini ve bu denklemde $u_2 = 4k^2 u_0$, $\theta_5 = k(\xi - 4k^2\tau_3 + 16k^4\tau_5)$ ve $u_0 = -2k^2 \sec h^2(k\xi - 4k^3\tau_3 + 16k^5\tau_5)$ seçer; (2.11) integrallenebilirlik şartını kullanırsak, τ_5 zamanında oluşum denklemi olarak (2.12) beşinci mertebeden KdV denklemini buluruz.

(2.31) denkleminde $h_3 = -1$ alırsak;

$$\begin{aligned} u_{0\tau_7} = {} & u_{4\xi\xi\xi} - 6u_{4\xi}u_0 + h_1 u_{4\tau_3} - u_{2\xi\xi\xi}u_0 - h_1 u_{2\xi\xi\tau_3} + 7u_{2\xi\xi}u_{0\xi} + 7u_{2\xi}u_{0\xi\xi} - 6u_{2\xi}u_2 \\ & - h_2 u_{2\tau_5} - u_{0\xi\xi\xi}u_2 - h_2 u_{0\xi\xi\tau_5} - 6u_{0\xi}u_4 \end{aligned} \qquad (2.35)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde $u_2 = 4k^2 u_0$, $u_4 = (4k^2)^2 u_0$, $\theta_7 = k(\xi - 4k^2\tau_3 + 16k^4\tau_5 - 64k^6\tau_7)$ ve $u_0 = -2k^2 \sec h^2(k\xi - 4k^3\tau_3 + 16k^5\tau_5 - 64k^7\tau_7)$ alır; (2.14) İntegrallenebilirlik şartını kullanırsak τ_7 zamanında u_0 oluşumunu (2.15) yedinci mertebeden KdV denklemi olarak buluruz.

Böyle devam ederek, (2.16) ardıştırma operatörü ve ardıştırma operatörü ile akışların hiyerarşisi olan (2.17) KdV denkleminin hiyerarşisini elde ederiz.

BÖLÜM 3

NLS TİPİ DENKLEMLERDEN KdV TİPİ DENKLEMLERİN BULUNMASI

3.1 Giriş

Çok ölçekli açılım metodu ile NLS denkleminden KdV denklemini bulunmuştur (Zakharov and Kuznetsov, 1986). Bu metodu kullanarak NLS denkleminden KdV denklemlerinin hiyerarşisini , MNLS (modifiye NLS) denkleminden MKdV (modifiye KdV) denklemini, tek ve iki boyutlu yüksek mertebeden türevli NLS denklemlerinden KdV ve KKdV (kuple KdV) denklemleri de bulunmuştur (Özer and Taşcan, 2002; Özer and Taşcan, 2003; Özer and Taşcan, 2007).

Bu bölümde, integrallenebilir lineer olmayan Schrödinger tipi denklemlerden çok ölçekli açılım metodunu kullanarak integrallenebilir lineer olmayan oluşum denklemlerinin elde edilmesi üzerinde durulacaktır.

3.2 Çok Ölçekli Açılım Metodu

L; q nun ξ-değişkenine göre kısmi türevlerinin lineer bir fonksiyonu olmak üzere kompleks eşleniği ile birlikte,

$$iq_\tau = L[q] + \alpha q|q|^2 + i(\beta_k(q|q|^2))_\xi \quad q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.1}$$

formundaki lineer olmayan Schrödinger tipi (NLS) denklemlerini ele alalım. Bu tip denklemler için, $N_k(\xi,\tau)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$q_k(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N_k(\xi,\tau)}, \quad q_k^*(\xi,\tau) = e^{-i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N_k(\xi,\tau)} \tag{3.2}$$

formunda çözümler arayacağız. (3.2), varsayılan çözüm; (3.1) denkleminde yerine yazılırsa, üst indisler ξ-değişkenine göre kısmi türevlerin mertebesini göstermek üzere ve $j = 1,2,\ldots$ için,

$$\begin{aligned}(N_k)_\tau &= f(N_k, N_k^{(j)}, \theta^{(j)}) \\ \theta_\tau &= g(N_k, N_k^{(j)}, \theta^{(j)})\end{aligned} \tag{3.3}$$

olacak şekilde iki denklem bulunur. Burada $\theta_\xi(\xi,\tau) = V(\xi,\tau)$ yazarsak, (3.3) sistemi

$$\begin{aligned}(N_k)_\tau &= f(N_k, N_k^{(j)}, V^{(j)}) \\ V_\tau &= g(N_k, N_k^{(j)}, V^{(j)})\end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. $\varepsilon > 0$ ölçek parametresine bağlı olarak, yavaş değişkenler

$$x = \varepsilon(\xi + 2\tau), \quad t_n = \varepsilon^{2n+1}\tau, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.5}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\theta &= -\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n-1}\theta_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ N &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} N_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ V &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} V_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n)\end{aligned} \tag{3.6}$$

seri açılımları (3.4) sisteminde yerine yazılıp ve ε parametresinin kuvvetlerindeki katsayılar sıfıra eşitlendiğinde, farklı mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri elde edilebilir.

3.3 Türevli NLS (DNLS) Denkleminden KdV Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi

(3.1) genel formundaki lineer olmayan Schrödinger tipi (NLS) denkleminde

$$n = 1, \quad \alpha = 0, \quad L[q] = q_{\xi\xi}, \quad \beta_k = \rho$$

olmak üzere,

$$iq_t = -q_{\xi\xi} + i\rho(q|q|^2)_\xi \tag{3.7}$$

DNLS denklemine;

$$\begin{aligned}
\theta &= -\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n-1}\theta_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\
N &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} N_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\
V &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} V_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

çok ölçekli açılım metodunu uygulayarak KdV denklemini bulacağız. (3.2) de varsayılan çözümlerden $N(\xi,\tau)$ gerçel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$q(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi,\tau)}, \quad q^*(\xi,\tau) = e^{-i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi,\tau)} \tag{3.9}$$

olarak alır ve (3.7) DNLS denkleminde yerine yazılırsa, reel ve sanal kısımlarından sırasıyla,

$$\begin{aligned}
N_\tau &= -2(\theta_{\xi\xi} N + \theta_\xi N_\xi) + 2NN_\xi \\
\theta_\tau &= -\theta_\xi^2 + \rho N\theta_\xi - \frac{N_\xi^2}{4N^2} + \frac{N_{\xi\xi}}{2N}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklinde diferensiyel denklemler elde edilir. Eğer $\theta_\xi(\xi,\tau) = V(\xi,\tau)$ alırsak denklemler (3.4) ün özel hali olan,

$$\begin{aligned}
N_\tau &= -2(V_\xi N + VN_\xi) + 3\rho NN_\xi \\
V_\tau &= (-V^2 + \rho NV - \frac{N_\xi^2}{4N^2} + \frac{N_{\xi\xi}}{2N})_\xi
\end{aligned} \tag{3.11}$$

sistemine dönüşür. (3.5) ile birlikte (3.8) seri açılımlarını (3.11) sisteminde yerine yazar ve ε -nun kuvvetlerindeki ifadeleri sıfıra eşitlersek;

ε^3 ün katsayısından,

$$\begin{aligned} &-3\rho N_{1x} + 2V_{1x} = 0 \\ &2\rho N_{1x} - 2\rho V_{1x} = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

ε^5 ün katsayısından,

$$\begin{aligned} &-3\rho N_{2x} - 3\rho N_{1x}N_1 + 2N_{1x}V_1 + N_{1t_1} + 2V_{2x} + 2V_{1x}N_1 = 0 \\ &2\rho N_{2x} - N_{1xxx} + 6\rho N_{1x}N_1 - 2\rho N_{1x}V_1 - 2\rho V_{2x} - 8\rho V_{1x}N_1 \\ &+ 4V_{1x}V_1 + 2V_{1t_1} = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

ε^7 ün katsayısından,

$$\begin{aligned} &-3\rho N_{3x} - 3\rho N_{2x}N_1 + 2N_{2x}V_1 + N_{2t_1} - 3\rho N_{1x}N_2 + 2N_{1x}V_2 + N_{1t_2} + 2V_{3x} \\ &+ 2V_{2x}N_1 + 2V_{1x}N_2 = 0 \\ &2\rho N_{3x} - N_{2xxx} + 6\rho N_{2x}N_1 - 2\rho N_{2x}V_1 - 2N_{1xxx}N_1 + 2N_{1xx}N_{1x} + 6\rho N_{1x}N_2 \\ &+ 6\rho N_{1x}N_1^2 - 2\rho N_{2x}N_1V_1 - 2\rho N_{1x}V_2 - 2\rho V_{3x} - 8\rho V_{2x}N_1 + 4V_{2x}V_1 + 2V_{2t_1} \\ &- 8\rho V_{1x}N_2 - 12\rho V_{1x}N_1^2 + 12V_{1x}N_1V_1 + 4V_{1x}V_2 + 6V_{1t_1}N_1 + 2V_{1t_2} = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ε^9 ün katsayısından,

$$-3\rho N_{4x}-3\rho N_{3x}N_1+2N_{3x}V_1+N_{3t_1}-3\rho N_{2x}N_2+2N_{2x}V_2+N_{2t_2}-3\rho N_{1x}N_3$$
$$2N_{1x}V_3+V_{1t_3}+2V_{4x}+2V_{3x}N_1+2V_{2x}N_2+2V_{1x}N_3=0$$

$$\begin{aligned}&2\rho N_{4x}-N_{3xxx}+6\rho N_{3x}N_1-2\rho N_{3x}V_1-2N_{2xxx}N_1+2N_{2xx}N_{1x}+2N_{2x}N_{1xx}\\&+6\rho N_{2x}N_2+6\rho N_{2x}N_1^2-6\rho N_{2x}N_1V_1-2\rho N_{2x}V_2-2N_{1xxx}N_2-N_{1xxx}N_1^2\\&+2N_{1xx}N_{1x}N_1-N_{1x}^3+6\rho N_{1x}N_3+12\rho N_{1x}N_2N_1-6\rho N_{1x}N_2V_1+2\rho N_{1x}N_1^3\\&-6\rho N_{1x}N_1^2V_1-6\rho N_{1x}N_1V_2-2\rho N_{1x}V_3-2\rho V_{4x}-8\rho V_{3x}N_1+4V_{3x}V_1+2V_{3t_1}\\&-8\rho V_{2x}N_2-12\rho V_{2x}N_1^2+12V_{2x}N_1V_1+4V_{2x}V_2+6V_{2t_1}N_1+2V_{2t_2}-8\rho V_{1x}N_3\\&-24\rho V_{1x}N_2N_1+12V_{1x}N_2V_1-8\rho V_{1x}N_1^3+12V_{1x}N_1^2V_1+12V_{1x}N_1V_2+4V_{1x}V_3\\&+6V_{1t_1}N_2+6V_{1t_1}N_1^2+6V_{1t_2}N_1+2V_{1t_3}=0\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir. Eğer (3.12) denkleminden $\rho=\frac{2}{3}$ alınır ve

$$N_1=V_1 \tag{3.16}$$

Seçilir ve (3.13) denklem sisteminde yerine yazarsak,

$$N_2=V_2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}V_{1xx}+V_1^2\right) \tag{3.17}$$

olmak üzere,

$$V_{t_1}=\frac{3}{8}V_{1xxx}-V_1V_{1x} \tag{3.18}$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme

$$t_1\to\frac{3}{8}t_1,\quad V_1\to-\frac{9}{4}u \tag{3.19}$$

ötelemelerini uygularsak, akış denklemlerinden

$$u_{t_1} = u_{xxx} + 6uu_x \tag{3.20}$$

KdV denklemini elde ederiz.

(3.17) denkleminde

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.21}$$

olarak alınır ve elde edilen değerler (3.14) denklem sisteminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} V_{1t_2} = \frac{1}{128}(256N_{3x} - 256V_{3x} - (48k_2 + 9)V_{1xxxxx} - (96k_1 + 128k_2)V_{1xxx}V_1 \\ + (128k_2 + 72)V_{1xx}V_{1x} + (-512k_1 + 64)V_{1x}V_1^2) \end{aligned} \tag{3.22}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde

$$k_1 = \frac{9}{20}, \quad k_2 = -\frac{399}{640} \tag{3.23}$$

olmak üzere,

$$N_3 = V_3 + \frac{1}{10240}(-567V_{1xxxx} - 1944V_{1xx}V_1 + 648V_{1x}^2 + 230V_1^3) \tag{3.24}$$

seçilmesiyle, (3.22) denklemi

$$V_{1t_2} = \frac{27}{512}(V_{1xxxxx} - \frac{16}{9}V_{1xxx}V_1 - \frac{32}{9}V_{1xx}V_{1x} + \frac{128}{135}V_{1x}V_1^2) \tag{3.25}$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to \frac{27}{512} t_2, \quad V_1 \to -\frac{45}{8} u \tag{3.26}$$

ötelemelerini yaparsak, KdV akış denklemlerinden

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x \tag{3.27}$$

integrallenebilen beşinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

Bulduğumuz (3.21) ve (3.22) sonuçlarını (3.15) denklem sisteminde yerine yazar ve

$$V_3 = k_3 V_{1xxxx} + k_4 V_{1xx} V_1 + k_5 V_{1x}^2 + k_6 V_1^3 \tag{3.28}$$

olarak seçersek, ε^9 ün katsayısından

$$\begin{aligned} V_{1t_3} = \frac{1}{16384}&(243V_{1xxxxxxx} - 648V_{1xxxxx}V_1 + (-36864k_1k_2 + 8640k_1 - 32768k_2^2 \\ &+ 3072k_2 + 65536k_3 + 18432k_4 - 2268)V_{1xxxx}V_{1x} + (110592k_1k_2 + 17280k_1 \\ &- 114688k_2^2 - 1536k_2 + 163840k_3 + 18432k_4 + 36864k_5 - 5652)V_{1xxx}V_{1xx} + \\ &(-1536k_1 + 1152)V_{1xxx}V_1^2 + (-73728k_1^2 - 7680k_1 - 32768k_2 + 32768k_6 - \\ &2688)V_{1xx}V_{1x}V_1 + (32768k_1k_2 + 1536k_1 - 16384k_2 + 16384k_5 + 36864k_6 - \\ &2496)V_{1x}^3 + (16384k_1 - 16384k_6)V_{1x}V_1^3) \end{aligned} \tag{3.29}$$

denklemini elde ederiz. Eğer,

$$\begin{aligned} &k_1 = \frac{39}{112}, \quad k_2 = \frac{3(\sqrt{7009} - 535)}{3584}, \quad k_3 = \frac{9(-743\sqrt{7009} + 494377)}{12845056}, \\ &k_4 = \frac{3(7\sqrt{7009} - 10048)}{25088}, \quad k_5 = \frac{3(17\sqrt{7009} - 53993)}{200704}, \quad k_6 = \frac{1137}{3136} \end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak seçersek,

$$V_{1t_3}=\frac{27}{16384}(V_{1xxxxxxx}-\frac{8}{3}V_1V_{1xxxxx}-8V_{1x}V_{1xxxx}-\frac{40}{3}V_{1xx}V_{1xxx}+\frac{160}{63}V_1^2V_{1xxx}$$
$$+\frac{640}{63}V_1V_{1x}V_{1xx}+\frac{160}{63}V_{1x}^3-\frac{1280}{1320}V_1^3V_{1x}) \tag{3.31}$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_3\to\frac{27}{16384}t_3,\quad V_1\to-\frac{21}{4}u \tag{3.32}$$

ötelemelerini yaparsak, KdV akış denklemlerinden

$$u_{t_3}=u_{xxxxxxx}+14uu_{xxxxx}+42u_xu_{xxxx}+70u_{xx}u_{xxx}+70u^2u_{xxx}$$
$$+280uu_xu_{xx}+70u_x^3+140u^3u_x \tag{3.33}$$

integrallenebilen yedinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

Böyle devam ederek, ardıştırma operatörü

$$R[u]=\partial^2+4u+2u_x\partial^{-1} \tag{3.34}$$

ve ardıştırma operatörü ile akışların hiyerarşisi

$$u_{\tau_{2n+1}}=R^n[u]u_\xi=K_{2n+1}[u],\ n=1,2,3,\ldots \tag{3.35}$$

olmak üzere KdV denkleminin hiyerarşisini elde ederiz.

3.3.1 Türevli NLS (DNLS) Denkleminden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi

(3.17) denkleminde;

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.36}$$

olarak alınır ve (3.36) eşitliğinde

$$k_1 = \frac{7}{15}, \quad k_2 = -\frac{381}{640} \tag{3.37}$$

olarak seçilmesiyle, (3.22) denklemi

$$V_{1t_2} = \frac{27}{512}(V_{1xxxxx} - \frac{16}{9}V_{1xxx}V_1 - \frac{16}{9}V_{1xx}V_{1x} + \frac{256}{405}V_{1x}V_1^2) \tag{3.38}$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to \frac{27}{512}t_2, \quad V_1 \to -\frac{45}{16}u \tag{3.39}$$

ötelemelerini yaparsak,

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x \tag{3.40}$$

Sawada-Kotera denklemini elde ederiz (Fujimoto and Watanabe, 1983; Mikhailov et al., 1991).

3.3.2 Türevli NLS (DNLS) Denkleminden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde Edilmesi

(3.17) denkleminde;

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.41}$$

olarak alınır ve (3.41) eşitliğinde

$$k_1 = \frac{7}{15}, \quad k_2 = -\frac{213}{320} \tag{3.42}$$

olmak üzere seçilmesiyle, (3.22) denklemi

$$V_{1t_2} = \frac{27}{512}(V_{1xxxxx} - \frac{16}{9}V_{1xxx}V_1 - \frac{40}{9}V_{1xx}V_{1x} + \frac{256}{405}V_{1x}V_1^2) \tag{3.43}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to \frac{27}{512}t_2, \quad V_1 \to -\frac{45}{8}u \tag{3.44}$$

ötelemelerini yaparsak,

$$u_{t_2} = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_x u_{xx} + 20u^2 u_x \tag{3.45}$$

Kaup-Kupershmidt denklemini elde ederiz (Fujimoto and Watanabe, 1983; Mikhailov et al., 1991).

3.4 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden KdV Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi

Genel formundaki lineer olmayan (3.1) Schrödinger tipi (NLS) denkleminde,

$$n = 1, \quad \alpha = -2\rho, \quad L[q] = -q_{\xi\xi}, \quad \beta_k = 1 \tag{3.46}$$

ρ reel sabit olmak üzere alırsak,

$$iq_t = -q_{\xi\xi} - i(q|q|^2)_\xi - 2\rho q|q|^2 \tag{3.47}$$

olacak şekilde MNLS denklemidir (Chen and Huang, 1989). (3.2) de varsayılan çözümlerden $N(\xi,\tau)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, (3.11) dönüşümleri alır ve (3.47) MNLS denkleminde yerine yazılırsa, $\theta_\xi(\xi,\tau) = V(\xi,\tau)$ olmak üzere reel ve sanal kısımlarından sırasıyla,

$$\begin{aligned} N_\tau &= -2(V_\xi N + VN_\xi) - 3NN_\xi \\ V_\tau &= (V^2 + \frac{N}{V} - 2\rho N + \frac{N_\xi^2}{4N^2} - \frac{N_{\xi\xi}}{2N})_\xi \end{aligned} \tag{3.48}$$

denklemleri elde edilir. (3.8) çözümleri, (3.48) denklem sisteminde yerine yazıldığında ε^3 ün katsayısından,

$$\begin{aligned} &3\rho N_{1x} + 2V_{1x} = 0 \\ &(4\rho - 2)N_{1x} + 6V_{1x} = 0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

ε^5 ün katsayısından,

$$\begin{aligned} &3N_{2x} + 3N_{1x}N_1 + 2N_{1x}V_1 + N_{1t_1} + 2V_{2x} + 2V_{1x}N_1 = 0 \\ &4\rho N_{2x} - 2N_{2x} + N_{1xxx} + (12\rho - 2)N_{1x}N_1 + 2N_{1x}V_1 + 20V_{1x}N_1 + 6V_{2x} \\ &- 4V_{1x}V_1 + 2V_{1t_1} = 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

ε^7 ün katsayısından,

$$3N_{3x}+3N_{2x}N_1+2N_{2x}V_1+N_{2t_1}+3N_{1x}N_2+2N_{1x}V_2+N_{1t_2}+2V_{3x}$$
$$+2V_{2x}N_1+2V_{1x}N_2=0$$

$$(4\rho-2)N_{3x}+N_{2xxx}+(12\rho-2)N_{2x}N_1+2N_{2x}V_1+2N_{1xxx}N_1-2N_{1xx}N_{1x} \tag{3.51}$$
$$+(12\rho-2)N_{1x}N_2+12\rho N_{1x}N_1^2+2N_{2x}N_1V_1+2N_{1x}V_2+6V_{3x}+20V_{2x}N_1$$
$$-4V_{2x}V_1+2V_{2t_1}+20V_{1x}N_2+22V_{1x}N_1^2-12V_{1x}N_1V_1-4V_{1x}V_2+6V_{1t_1}N_1$$
$$+2V_{1t_2}=0$$

ε^9 ün katsayısından,

$$3N_{4x}+3N_{3x}N_1+2N_{3x}V_1+N_{3t_1}+3N_{2x}N_2+2N_{2x}V_2+N_{2t_2}+3N_{1x}N_3$$
$$2N_{1x}V_3+N_{1t_3}+2V_{4x}+2V_{3x}N_1+2V_{2x}N_2+2V_{1x}N_3=0$$

$$(4\rho-2)N_{4x}+N_{3xxx}+(12\rho-2)N_{3x}N_1+2N_{3x}V_1+2N_{2xxx}N_1-2N_{2xx}N_{1x}$$
$$-2N_{2x}N_{1xx}+(12\rho-2)N_{2x}N_2+12\rho N_{2x}N_1^2+2N_{2x}N_1V_1+2N_{2x}V_2$$
$$+2N_{1xxx}N_2+N_{1xxx}N_1^2-2N_{1xx}N_{1x}N_1+N_{1x}^3+(12\rho-2)N_{1x}N_3$$
$$+(24\rho+2)N_{1x}N_2N_1+2N_{1x}N_2V_1+4\rho N_{1x}N_1^3+2N_{1x}N_1V_2+2N_{1x}V_3 \tag{3.52}$$
$$+6V_{4x}+20V_{3x}N_1-4V_{3x}V_1+2V_{3t_1}+20V_{2x}N_2+22V_{2x}N_1^2-12V_{2x}N_1V_1$$
$$-4V_{2x}V_2+6V_{2t_1}N_1+2V_{2t_2}+20V_{1x}N_3+44V_{1x}N_2N_1-12V_{1x}N_2V_1$$
$$+8V_{1x}N_1^3-12V_{1x}N_1^2V_1-12V_{1x}N_1V_2-4V_{1x}V_3+6V_{1t_1}N_2+6V_{1t_1}N_1^2$$
$$+6V_{1t_2}N_1+2V_{1t_3}=0$$
$$\vdots$$

denklemleri elde edilir. Eğer (3.49) denklem sisteminden, $\rho=\dfrac{11}{4}$ alınarak;

$$N_1=-\frac{2}{3}V_1 \tag{3.53}$$

Seçilirse ve (3.50) denklem sisteminde yerine yazarsak,

$$N_2=-\frac{2}{3}V_2+\frac{1}{27}V_{1xx}+\frac{20}{81}V_1^2 \tag{3.54}$$

olmak üzere,

$$V_{t_1}=\frac{1}{18}(3V_{1xxx}+4V_1V_{1x}) \tag{3.55}$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme

$$t_1\to\frac{3}{18}t_1,\quad V_1\to-\frac{9}{2}u \tag{3.56}$$

ötelemelerini uygularsak, akış denklemlerinden

$$u_{t_1}=u_{xxx}+6uu_x \tag{3.57}$$

KdV denklemini elde ederiz.

(3.54) denkleminde

$$V_2=k_1V_1^2+k_2V_{1xx} \tag{3.58}$$

olarak alınır ve elde edilen değerler (3.51) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}V_{1t_2}=\frac{1}{972}&(4374N_{3x}+2916V_{3x}-(162k_2-9)V_{1xxxxx}\\&-(324k_1+2160k_2-132)V_{1xxx}V_1+(2592k_2+36)V_{1xx}V_{1x}\\&+(-6264k_1+160)V_{1x}V_1^2)\end{aligned} \tag{3.59}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$k_1=-\frac{82}{27},\quad k_2=-\frac{133}{18} \tag{3.60}$$

olmak üzere,

$$N_3 = -\frac{2}{3}V_3 + \frac{1}{26244}(-7263V_{1xxxx} - 102096V_{1xx}V_1 - 6156V_{1x}^2 - 38848V_1^3) \tag{3.61}$$

seçilmesiyle, (3.59) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{216}(V_{1xxxxx} - \frac{40}{3}V_{1xxx}V_1 - \frac{80}{3}V_{1xx}V_{1x} + \frac{160}{3}V_{1x}V_1^2) \tag{3.62}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to -\frac{1}{216}t_2, \quad V_1 \to -\frac{3}{4}u \tag{3.63}$$

ötelemelerini yaparsak, KdV akış denklemlerinden (3.27) integrallenebilen beşinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

Bulduğumuz (3.58) ve (3.59) sonuçlarını (3.52) denklem sisteminde yerine koyduğumuzda ve

$$V_3 = k_3V_{1xxxx} + k_4V_{1xx}V_1 + k_5V_{1x}^2 + k_6V_1^3 \tag{3.64}$$

olarak seçersek, ε^9 ün katsayısından

$$\begin{aligned} V_{1t_3} = \frac{1}{314928}(&81V_{1xxxxxxx} - 1620V_{1xxxxx}V_1 + (-314928k_1k_2 - 14580k_1 + 139968k_2^2 \\ &- 38880k_2 - 279936k_3 + 157464k_4 - 216)V_{1xxxx}V_{1x} + (-944784k_1k_2 - 29160k_1 \\ &+ 489888k_2^2 + 77760k_2 - 699840k_3 + 157464k_4 + 314928k_5 - 540)V_{1xxx}V_{1xx} + \\ &(19440k_1 - 5040)V_{1xxx}V_1^2 + (-629856k_1^2 + 38880k_1 - 539136k_2 - 1399684k_4 + \\ &94478446k_6 - 107712)V_{1xx}V_{1x}V_1 + (-139968k_1k_2 - 77760k_1 - 269568k_2 - \\ &699844k_5 + 314928k_6 - 31752)V_{1x}^3 + (269568k_1 + 69984k_6 + 167296)V_{1x}V_1^3) \end{aligned} \tag{3.65}$$

denklemini elde ederiz. Eğer,

$$k_1=\frac{323}{378},\ k_2=\frac{-i\sqrt{12548407}-5769}{2016},\quad k_3=\frac{817i\sqrt{12548407}-132195829}{4064256},$$

$$k_4=\frac{182i\sqrt{12548407}-5402217}{95256},\ k_5=\frac{1051i\sqrt{12548407}-17213059}{381024},\tag{3.66}$$

$$k_6=-\frac{659513}{107163}$$

olarak seçersek,

$$\begin{aligned}V_{1t_3}&=\frac{1}{3888}(V_{1xxxxxxx}-20V_1V_{1xxxxx}-60V_{1x}V_{1xxxx}-100V_{1xx}V_{1xxx}+\frac{1000}{7}V_1^2V_{1xxx}\\&+\frac{4000}{7}V_1V_{1x}V_{1xx}+\frac{1000}{7}V_{1x}^3-\frac{20000}{49}V_1^3V_{1x})\end{aligned}\tag{3.67}$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_3\rightarrow\frac{1}{3888}t_3,\quad V_1\rightarrow-\frac{7}{10}u\tag{3.68}$$

ötelemelerini yaparsak, KdV akış denklemlerinden (3.33) integrallenebilen yedinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

Böyle devam ederek, ardıştırma operatörü (3.34) ve ardıştırma operatörü ile akışların hiyerarşisi (3.35) olmak üzere KdV denkleminin hiyerarşisini elde ederiz.

3.4.1 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi

(3.58) denkleminde;

$$V_2=k_1V_1^2+k_2V_{1xx}\tag{3.69}$$

olarak alınır ve (3.69) eşitliğinde

$$k_1 = -\frac{8}{3}, \quad k_2 = -\frac{77}{12} \tag{3.70}$$

olarak seçilmesiyle, (3.59) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{216}(V_{1xxxxx} - \frac{40}{3}V_{1xxx}V_1 - \frac{40}{3}V_{1xx}V_{1x} + \frac{320}{9}V_{1x}V_1^2) \tag{3.71}$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to -\frac{1}{216}t_2, \quad V_1 \to -\frac{3}{8}u \tag{3.72}$$

ötelemelerini yaparsak, (3.40) Sawada-Kotera denklemini elde ederiz.

3.4.2 Modifiye Edilmiş NLS (MNLS) Denkleminden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde Edilmesi

(3.58) denkleminde;

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.73}$$

olarak alınır ve (3.73) eşitliğinde

$$k_1 = -\frac{8}{3}, \quad k_2 = -\frac{53}{8} \tag{3.74}$$

olarak seçilmesiyle, (3.59) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{216}(V_{1xxxxx} - \frac{40}{3}V_{1xxx}V_1 - \frac{100}{3}V_{1xx}V_{1x} + \frac{320}{9}V_{1x}V_1^2) \qquad (3.75)$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to -\frac{1}{216}t_2, \quad V_1 \to -\frac{3}{4}u \qquad (3.76)$$

ötelemelerini yaparsak, (3.45) Kaup-Kupershmidt denklemini elde ederiz.

3.5 İki Kuple NLS Denklemi İçeren Manakov Sistemden KdV Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi

μ pozitif parametre, x ve t normalleştirilmiş uzay ve zaman , $q_1 = (x,t)$ ve $q_2 = (x,t)$ karşılıklı birbirlerini etkileyen bileşenler olmak üzere Manakov denklem sistemi

$$\begin{aligned} &iq_{1t_1} + q_{1xx} + 2\mu(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 = 0, \\ &iq_{2t_1} + q_{2xx} + 2\mu(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.77)$$

formundadır(Jakubowski et al., 1998). $N(\xi,\tau)$ ve $M(\xi,\tau)$ reel değerli bir fonksiyonlar olmak üzere; bu sisteme kompleks eşlenikleri ile birlikte,

$$q_1(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{N(\xi,\tau)}, \quad q_2(\xi,\tau) = e^{i\theta(\xi,\tau)}\sqrt{M(\xi,\tau)} \qquad (3.78)$$

dönüşümlerini uyguladığımızda, (3.77) Manakov denklem sisteminde yerine yazılırsa, $\theta_\xi(\xi,\tau) = V(\xi,\tau)$ olmak üzere reel ve sanal kısımlarından sırasıyla,

$$\begin{aligned}
N_{\tau} &= -2(V_{\xi}N + VN_{\xi}), \\
V_{\tau} &= (V^2 - 2\mu N - 2\mu M + \frac{N_{\xi}^2}{4N^2} - \frac{N_{\xi\xi}}{2N})_{\xi}, \\
M_{\tau} &= -2(V_{\xi}M + VM_{\xi}), \\
V_{\tau} &= (V^2 - 2\mu N - 2\mu M + \frac{M_{\xi}^2}{4M^2} - \frac{M_{\xi\xi}}{2M})_{\xi}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
N &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} N_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\
M &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} M_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n), \\
V &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} V_n(x, t_1, t_2, \ldots, t_n)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

seri açılımları denklemde yerine yazıldığında, ε^3 ün katsayısından,

$$\begin{aligned}
&2N_{1x} + 2V_{1x} = 0 \\
&4\mu N_{1x} + 4\mu M_{1x} + 4V_{1x} = 0 \\
\\
&2M_{1x} + 2V_{1x} = 0 \\
&4\mu N_{1x} + 4\mu M_{1x} + 4V_{1x} = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

ε^5 ün katsayısından,

$$\begin{aligned}
&2N_{2x} + N_{1t_1} + 2N_{1x}V_1 + 2V_{2x} + 2V_{1x}N_1 = 0 \\
&4\mu N_{2x} + N_{1xxx} + 12\mu N_{1x}N_1 + 4\mu M_{2x} + 12\mu M_{1x}N_1 + 4V_{2x} + 2V_{1t_1} + 12V_{1x}N_1 \\
&- 4V_{1x}V_1 = 0 \\
\\
&2M_{2x} + M_{1t_1} + 2M_{1x}V_1 + 2V_{2x} + 2V_{1x}M_1 = 0 \\
&4\mu N_{2x} + M_{1xxx} + 12\mu N_{1x}V_1 + 4\mu M_{2x} + 12\mu M_{1x}M_1 + 4V_{2x} + 2V_{1t_1} + 12V_{1x}N_1 \\
&- 4V_{1x}V_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

ε^7 ün katsayısından,

$$\begin{aligned}
&2N_{3x}+N_{2t_1}+2N_{2x}V_1+N_{1t_2}+2N_{1x}V_2+2V_{3x}+2V_{2x}N_1+2V_{1x}N_2=0\\
&4\mu N_{3x}+N_{2xxx}+12\mu N_{2x}N_1+2N_{1xxx}N_1-2N_{1xx}N_{1x}+12\mu N_{1x}N_2\\
&+12\mu N_{1x}N_1^2+4M_{3x}+12\mu M_{2x}N_1+12\mu M_{1x}N_2+12\mu M_{1x}N_1^2+4V_{3x}\\
&-4V_{2x}N_1+2V_{2t_1}+12V_{2x}N_1-4V_{2x}V_1+6V_{1t_1}N_1+2V_{1t_2}+12V_{1x}N_2\\
&+12V_{1x}N_1^2-12V_{1x}N_1V_1-4V_{1x}V_2=0\\
\\
&2M_{3x}+M_{2t_1}+2M_{2x}V_1+M_{1t_2}+2M_{1x}V_2+2V_{3x}+2V_{2x}M_1+2V_{1x}M_2=0\\
&4\mu N_{3x}+M_{2xxx}+12\mu N_{2x}M_1+2M_{1xxx}M_1-2M_{1xx}M_{1x}+12\mu N_{1x}M_2\\
&+12\mu N_{1x}M_1^2+4M_{3x}+12\mu M_{2x}M_1+12\mu M_{1x}M_2+12\mu M_{1x}N_1^2+4V_{3x}\\
&-4V_{2x}M_1+2V_{2t_1}+12V_{2x}M_1-4V_{2x}V_1+6V_{1t_1}N_1+2V_{1t_2}+12V_{1x}M_2\\
&+12V_{1x}M_1^2-12V_{1x}M_1V_1-4V_{1x}V_2=0\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.83}$$

denklemleri elde edilir.

Eğer $\mu=\dfrac{1}{2}$ alırsak; (3.81) denklem sisteminden,

$$N_1=-V_1=M_1 \tag{3.84}$$

elde edilir. Bu çözümü (3.82) denklem sisteminde yerine yazarsak,

$$N_2=M_2 \tag{3.85}$$

$$M_2=-V_2+\frac{1}{8}V_{1xx}+\frac{3}{4}V_1^2 \tag{3.86}$$

olmak üzere,

$$V_{t_1}=\frac{1}{4}(V_{1xxx}-4V_1V_{1x}) \tag{3.87}$$

denklemini elde ederiz. Bu denkleme

$$t_1 \to \frac{1}{4}t_1, \quad V_1 \to -\frac{3}{2}u \tag{3.88}$$

ötelemelerini uygularsak, akış denklemlerinden

$$u_{t_1} = u_{xxx} + 6uu_x \tag{3.89}$$

KdV denklemini elde ederiz.

(3.86) denkleminde

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.90}$$

olarak alınır ve elde edilen değerler (3.83) denklem sisteminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} V_{1t_2} = \frac{1}{32}(&64N_{3x} + 64V_{3x} - (8k_2 - 1)V_{1xxxxx} - (16k_1 + 96k_2 - 16)V_{1xxx}V_1 \\ &- (32k_2 + 4)V_{1xx}V_{1x} - (32k_1 - 96)V_{1x}V_1^2) \end{aligned} \tag{3.91}$$

$$N_3 = M_3 \tag{3.92}$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemde

$$k_1 = \frac{9}{5}, \quad k_2 = -\frac{141}{160} \tag{3.93}$$

olmak üzere,

$$N_3 = -V_3 + \frac{1}{1280}(-171V_{1xxxx} - 1356V_{1xx}V_1 + 516V_{1x}^2 + 3136V_1^3) \tag{3.94}$$

seçilmesiyle, (3.91) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{64}(V_{1xxxxx} - 8V_{1xxx}V_1 - 16V_{1xx}V_{1x} + \frac{96}{5}V_{1x}V_1^2) \tag{3.95}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to -\frac{1}{64}t_2, \quad V_1 \to -\frac{5}{4}u \tag{3.96}$$

ötelemelerini yaparsak, KdV akış denklemlerinden (3.27) integrallenebilen beşinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

Bulduğumuz (3.90) ve (3.91) sonuçlarını bir sonraki denklem sisteminde yerine yazar ve

$$V_3 = k_3V_{1xxxx} + k_4V_{1xx}V_1 + k_5V_{1x}^2 + k_6V_1^3 \tag{3.97}$$

olarak seçersek, ε^9 ün katsayısından

$$N_4 = M_4 \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned} V_{1t_3} = \frac{1}{512}(&V_{1xxxxxxx} - 12V_{1xxxxx}V_1 + (-768k_1k_2 - 80k_1 + 1024k_2^2 - 128k_2 + 2048k_3 \\ &+ 384k_4 + 50)V_{1xxxx}V_{1x} + (-2304k_1k_2 - 160k_1 - 3584k_2^2 + 704k_2 + 5120k_3 \\ &+ 384k_4 + 768k_5 + 70)V_{1xxx}V_{1xx} + (64k_1 - 64)V_{1xxx}V_1^2 + (-1536k_1^2 + 320k_1 \\ &- 3072k_2 + 1024k_4 + 2304k_6 - 256)V_{1xx}V_{1x}V_1 + (1024k_1k_2 - 704k_1 - 1536k_2 \\ &+ 512k_5 + 768k_6 + 32)V_{1x}^3 + (1536k_1 - 512k_6 + 256)V_{1x}V_1^3) \end{aligned} \tag{3.99}$$

denklemlerini elde ederiz. Eğer,

$$k_1=\frac{101}{56},\quad k_2=\frac{\sqrt{195361}-815}{896},\quad k_3=\frac{3(-219\sqrt{195361}+498965}{802816},$$

$$k_4=\frac{3(7\sqrt{195361}-21997}{6272},\ k_5=\frac{-17\sqrt{195361}-151889}{25088},\ k_6=-\frac{4769}{784} \tag{3.100}$$

olarak seçersek,

$$\begin{aligned} V_{1t_3} &= \frac{1}{512}(V_{1xxxxxxx}-12V_1V_{1xxxxx}-36V_{1x}V_{1xxxx}-60V_{1xx}V_{1xxx}+\frac{360}{7}V_1^2V_{1xxx} \\ &+\frac{1440}{7}V_1V_{1x}V_{1xx}+\frac{360}{7}V_{1x}^3-\frac{4320}{49}V_1^3V_{1x}) \end{aligned} \tag{3.101}$$

elde edilir. Bu denklemde de

$$t_3\to\frac{1}{512}t_3,\quad V_1\to-\frac{7}{6}u \tag{3.102}$$

ötelemelerini yaparsak, KdV akış denklemlerinden (3.33) integrallenebilen yedinci mertebeden KdV denklemini elde ederiz.

Böyle devam ederek, ardıştırma operatörü (3.34) ve ardıştırma operatörü ile akışların hiyerarşisi (3.35) olmak üzere KdV denkleminin hiyerarşisini elde ederiz.

3.5.1 İki Kuple NLS Denklemi İçeren Manakov Sistemden Sawada-Kotera Denkleminin Elde Edilmesi

(3.86) denkleminde

$$V_2=k_1V_1^2+k_2V_{1xx} \tag{3.103}$$

olarak alınır ve (3.103) eşitliğinde

$$k_1 = \frac{17}{10}, \quad k_2 = -\frac{139}{160} \tag{3.104}$$

olarak seçilirse, (3.91) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{64}(V_{1xxxxx} - 8V_{1xxx}V_1 - 8V_{1xx}V_{1x} + \frac{64}{5}V_{1x}V_1^2) \tag{3.105}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to -\frac{1}{64}t_2, \quad V_1 \to -\frac{5}{8}u \tag{3.106}$$

ötelemelerini yaparsak, (3.40) Sawada-Kotera denklemini elde ederiz.

3.5.2 İki Kuple NLS Denklemi İçeren Manakov Sistemden Kaup-Kupershmidt Denkleminin Elde Edilmesi

(3.86) denkleminde

$$V_2 = k_1 V_1^2 + k_2 V_{1xx} \tag{3.107}$$

olarak alınır ve (3.107) eşitliğinde

$$k_1 = \frac{17}{10}, \quad k_2 = -\frac{31}{40} \tag{3.108}$$

olarak seçilirse, (3.91) denklemi

$$V_{1t_2} = -\frac{1}{64}(V_{1xxxxx} - 8V_{1xxx}V_1 - 20V_{1xx}V_{1x} + \frac{64}{5}V_{1x}V_1^2) \tag{3.109}$$

olarak elde edilir. Bu denklemde de

$$t_2 \to -\frac{1}{64}t_2, \quad V_1 \to -\frac{5}{4}u \tag{3.110}$$

ötelemelerini yaparsak, (3.45) Kaup-Kupershmidt denklemini elde ederiz.

BÖLÜM 4

KdV TİPİ DENKLEMLERDEN NLS TİPİ DENKLEMLERİN BULUNMASI

4.1 Giriş

Bir bozulma (perturbation) metodu olan çok ölçekli açılım metodu, lineer olmayan oluşum denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmaktadır. Bu metot zaman, ve uzay değişkenleri; bir parametreye bağlı olarak tanımlanan ve yavaş değişkenler olarak bilinen çok ölçekli açılım metodu kullanılarak, lineer olan kısmın çözümüne bağlı olarak verilen lineer olmayan denklemin çözümünü bulmamıza olanak vermektedir.

Çok ölçekli açılım metodunu kullanarak integrallenebilir Korteweg-de Vries (KdV) ve lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemleri ve bunların spektral problemleri arasında ilişki bulunmuştur (Zakharov and Kuznetzov, 1986).

Bu bölümde, bir bozulma tekniği olan çok ölçekli açılım metodu kullanarak KdV tipi oluşum denklemlerinden lineer olmayan Schrödinger tipi denklemlerin elde edilmesi üzerinde durulacaktır.

4.2 KdV Denkleminden NLS Tipi Denklemlerin Elde Edilmesi

Genel lineer olmayan oluşum denklemleri, $K[u]$; u ve u nun x-değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere,

$$u_t = K[u] \tag{4.1}$$

formundadır. Bu tür denklemlerin en iyi bilineni; bir kanalda su yüzeyindeki dalgalanmaları ifada eden

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{4.2}$$

KdV (Korteweg-de Vries) denklemidir.

Çok ölçekli açılım metodu, lineer olmayan oluşum denkleminin ε ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(x,t,\varepsilon) \\ \tau_i &= \tau_i(x,t,\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.3}$$

olmak üzere,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n) \tag{4.4}$$

açılımında yaklaşık çözümünü ararsak. Burada k; sabit (dalga sayısı),

$$\theta(x,t)=kx-w(k)t \tag{4.5}$$

faz, $w(k)=k^3$; yayılma bağıntısı ve $v_{-n}=v_n^*$ (v_{-n}; v_n nin komplex eşleniği) dir. ε -na bağlı yavaş değişkenler

$$\xi_0=x,\quad \xi_1=\varepsilon\left(x-\frac{dw}{dk}t\right), \tag{4.6}$$

$$\tau=t,\quad \tau_1=-\frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{dw}{dk}t,\quad \tau_2=-\frac{\varepsilon^3}{3!}\frac{d^2w}{dk^2}t,\quad \tau_3=-\frac{\varepsilon^4}{4!}\frac{d^3w}{dk^3}t \tag{4.7}$$

şeklinde olmak üzere; KdV tipi oluşum denklemine bir parametreye bağlı olan yavaş değişkenleri artırarak çok ölçekli açılım metodunu kullanarak varsayılan çözüm KdV denkleminde yerine yazılır ve ε ölçek parametresinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$u_{1\tau_0} - u_{1\xi_0\xi_0\xi_0} = 0 \tag{4.8}$$

$$u_{2\tau_0} - u_{2\xi_0\xi_0\xi_0} = 3k^2 u_{1\xi_1} + 6u_1 u_{1\xi_0} + 3u_{1\xi_0\xi_0\xi_1} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} u_{3\tau_0} - u_{3\xi_0\xi_0\xi_0} = {} & 3k^2 u_{1\tau_1} + 6u_1 u_{1\xi_1} + 3k^2 u_{2\xi_1} + 6u_2 u_{1\xi_0} + 6u_1 u_{2\xi_0} + \\ & 3u_{1\xi_0\xi_1\xi_1} + 3u_{2\xi_0\xi_0\xi_1} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} u_{4\tau_0} - u_{4\xi_0\xi_0\xi_0} = {} & -3ku_{1\tau_2} + 3k^2 u_{2\tau_1} + 6u_2 u_{1\xi_1} + 6u_1 u_{2\xi_1} + 3k^2 u_{3\xi_1} + \\ & u_{1\xi_1\xi_1\xi_1} + 6u_3 u_{1\xi_0} + 6u_2 u_{2\xi_0} + 6u_1 u_{3\xi_0} + 3u_{2\xi_0\xi_1\xi_1} + \\ & 3u_{3\xi_0\xi_0\xi_1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} u_{5\tau_0} - u_{5\xi_0\xi_0\xi_0} = {} & u_{1\tau_3} - 3ku_{2\tau_2} + 3k^2 u_{3\tau_1} + 6u_3 u_{1\xi_1} + 6u_2 u_{2\xi_1} + 6u_1 u_{3\xi_1} + \\ & 3k^2 u_{4\xi_1} + u_{2\xi_1\xi_1\xi_1} + 6u_4 u_{1\xi_0} + 6u_3 u_{2\xi_0} + 6u_2 u_{3\xi_0} + \\ & 6u_1 u_{4\xi_0} + 3u_{3\xi_0\xi_1\xi_1} + 3u_{4\xi_0\xi_0\xi_1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\vdots$$

denklemleri bulunur. $c.c$; kompleks eşlenik olmak üzere, (4.8) denklemini çözersek

$$u_1(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_1(\xi_1, \tau_1) e^{i(kx-wt)} + c.c \tag{4.13}$$

bulunur. Bu çözüm (4.9)denkleminde yerine yazılırsa, (4.9) denkleminin çözümü, f_0 integrasyon sabiti olmak üzere,

$$u_2(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_2(\xi_1, \tau_1) e^{2i(kx-wt)} + c.c. + f_0(\xi, \tau) \tag{4.14}$$

bulunur. Çözümler (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$v_2 = \frac{1}{k^2} v_1^2, \quad v_{-2} = \frac{1}{k^2} v_{-1}^2, \tag{4.15}$$

ve (4.10) denkleminin çözümü f_1 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$u_3(\xi_0,\xi_1.\tau_0,\tau_1)=v_3(\xi_1,\tau_1)e^{3i(kx-wt)}+c.c.+f_1(\xi,\tau) \tag{4.16}$$

formunda,

$$v_3=\frac{3}{4k^4}v_1^3,\quad v_{-3}=\frac{3}{4k^4}v_{-1}^3,\quad f_0=\frac{-2}{k^2}v_1v_{-1} \tag{4.17}$$

ve

$$iv_{1\tau_1}=v_{1\xi_1\xi_1}-\frac{2}{k^2}v_1^2v_1^*,\qquad iv_{1\tau_1}^*=-v_{1\xi_1\xi}^*+\frac{2}{k^2}v_1^{*2}v_1, \tag{4.18}$$

olarak bulunur. Eğer $v_1=kq$ ve $v_1^*=kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$iq_{\tau_1}=q_{\xi_1\xi_1}-2q^2p,\qquad ip_{\tau_1}=-p_{\xi_1\xi_1}+2p^2q, \tag{4.19}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi bulunur.

Elde edilen çözümle (4.11) denkleminde yerine yazılırsa, f_2 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$u_4(\xi_0,\xi_1.\tau_0,\tau_1)=v_4(\xi_1,\tau_1)e^{4i(kx-wt)}+c.c.+f_2(\xi,\tau) \tag{4.20}$$

formunda,

$$v_4=\frac{1}{2k^6}v_1^4,\quad v_{-4}=\frac{1}{2k^6}v_{-1}^4,\quad f_1=\frac{2i}{k^3}(-v_{1\xi_1}v_{-1}+v_1v_{-1\xi_1}) \tag{4.21}$$

ve

$$v_{1\tau_2} = \frac{1}{3k} v_{1\xi_1\xi_1\xi_1} - \frac{4}{k^3} v_1 v_1^* v_{1\xi_1} - \frac{6}{k^3} v_1^2 v_{1\xi_1}^*$$
$$v_{1\tau_2}^* = \frac{1}{3k} v_{1\xi_1\xi_1\xi_1}^* - \frac{4}{k^3} v_1^* v_1 v_{1\xi_1}^* - \frac{6}{k^3} v_1^{*2} v_{1\xi_1} \tag{4.22}$$

olarak bulunur. Eğer $v_1 = kq$ ve $v_1^* = kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$q_{\tau_2} = q_{\xi_1\xi_1\xi_1} - 12qpq_{\xi_1} - 18q^2 p_{\xi_1}$$
$$p_{\tau_2} = p_{\xi_1\xi_1\xi_1} - 12pqp_{\xi_1} - 18p^2 q_{\xi_1} \tag{4.23}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde; bir sonraki denklemden f_3 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$u_5(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_5(\xi_1, \tau_1) e^{5i(kx-wt)} + c.c. + f_3(\xi, \tau) \tag{4.24}$$

formunda,

$$v_5 = \frac{5}{16k^8} v_1^5, \quad v_{-5} = \frac{5}{16k^8} v_{-1}^5, \quad f_2 = \frac{2}{k^3}(v_1 v_{-1\xi_1\xi_1} + v_{-1} v_{1\xi_1\xi_1} - v_{1\xi_1} v_{-1\xi_1}) \tag{4.25}$$

ve

$$v_{1\tau_3} = -\frac{24}{k^3} i v_1^2 v_{1\xi_1\xi_1}^* - \frac{12}{k^3} i v_1 v_{1\xi_1} v_{1\xi_1}^* + \frac{6}{k^3} i v_1^* v_{1\xi_1}^2 - \frac{3}{2k^5} i v_1^3 v_1^{*2}$$
$$v_{1\tau_3}^* = \frac{24}{k^3} i v_1^{*2} v_{1\xi_1\xi_1} + \frac{12}{k^3} i v_1^* v_{1\xi_1}^* v_{1\xi_1} - \frac{6}{k^3} i v_1 v_{1\xi_1}^{*2} + \frac{3}{2k^5} i v_1^{*3} v_1^2 \tag{4.26}$$

olarak bulunur. Eğer $v_1 = kq$ ve $v_1^* = kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$q_{\tau_3} = -16iq^2 p_{\xi_1\xi_1} - 8iqq_{\xi_1} p_{\xi_1} + 4ipq_{\xi_1}^2 - iq^3 p^2 \tag{4.27}$$

$$p_{\tau_3} = 16ip^2 q_{\xi_1\xi_1} + 8ipp_{\xi_1} q_{\xi_1} - 4iqp_{\xi_1}{}^2 + ip^3 q^2$$

olarak elde edilir.

4.3 Beşinci Mertebeden KdV Denkleminden NLS Denklemleri

Beşinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklerinin genel formu

$$u_t = K[u] = u_{xxxxx} + Auu_{xxx} + Bu_x u_{xx} + Cu^2 u_x \tag{4.28}$$

şeklindedir. Beşinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerinin verilen A,B,C katsayılarına göre;

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x \tag{4.29}$$

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x \tag{4.30}$$

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_x u_{xx} + 20u^2 u_x \tag{4.31}$$

şeklinde integrallenebilen oluşum denklemleri vardır (Fujimoto and Watanabe, 1983; Mikhailov et al., 1991). Bu denklemler sırasıyla beşinci mertebeden KdV, Sawada-Kotera ve Kaup-Kupershmidt denklemleridir.

Bu denklemlerden; beşinci mertebeden (4.29) KdV denkleminin ε ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial \tau_4} + \cdots \tag{4.32}$$

olmak üzere;

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}u_{n}\left(\xi_{0},\xi_{1},\ldots,\xi_{n},\tau_{0},\tau_{1},\ldots,\tau_{n}\right) \tag{4.33}$$

formunda çözümünü arayalım. Burada k; sabit (dalga sayısı), $w=-k^{5}$; yayılma bağıntısıdır. Beşinci mertebeden KdV tipi oluşum denklemine bir parametreye bağlı olan yavaş değişkenleri artırarak çok ölçekli açılım metodunu kullanarak varsayılan çözüm denkleminde yerine yazılır ve ε ölçek parametresinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$u_{1\tau_0}-u_{1\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}=0 \tag{4.34}$$

$$u_{2\tau_0}-u_{2\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}=-5k^{4}u_{1\xi_1}+5u_{1\xi_1\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}+10u_{1}u_{1\xi_0\xi_0\xi_1}+20u_{1\xi_0}u_{1\xi_0\xi_0} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}u_{3\tau_0}-u_{3\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}&=10k^{3}u_{1\tau_1}-5k^{4}u_{2\xi_1}+5u_{2\xi_1\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}+10u_{1}u_{2\xi_0\xi_0\xi_0}+20u_{1}u_{2\xi_0\xi_0}\\&+20u_{1\xi_0\xi_1}u_{2\xi_0}+30u_{1\xi_0\xi_1\xi_1}+40u_{1\xi_0\xi_1}u_{1\xi_0}+10u_{1\xi_1\xi_1\xi_0\xi_0\xi_0}\\&+20u_{1\xi_0\xi_0}u_{1\xi_1}+10u_{2}u_{1\xi_0\xi_0\xi_0}+30u_{1\xi_0}u_{1}^{2}\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}u_{4\tau_0}-u_{4\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}&=10k^{2}u_{1\tau_2}+10k^{3}u_{2\tau_1}-5k^{4}u_{3\xi_1}+5u_{1\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0}+10u_{1}u_{3\xi_0\xi_0\xi_0}\\&+20u_{3\xi_0\xi_0}u_{1\xi_0}+20u_{1\xi_0\xi_0}u_{3\xi_0}+30u_{2\xi_0\xi_0}u_{1}+40u_{1\xi_1}u_{2\xi_1\xi_0}\\&+10u_{2\xi_1\xi_1\xi_0\xi_0\xi_0}+20u_{2\xi}u_{1\xi_1\xi_0}+10u_{2}u_{2\xi_0\xi_0\xi_0}+20u_{2\xi_0}u_{2\xi_0\xi_0}\\&+20u_{1\xi_1}u_{2\xi_0\xi_0}+40u_{2\xi_0}u_{1\xi_1\xi_0}+30u_{2\xi_0}u_{1}^{2}+30u_{2}u_{1\xi_1\xi_0\xi_0}\\&+40u_{1\xi_1}u_{2\xi_1\xi_0}+10u_{1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_0\xi_0}+30u_{1}u_{1\xi_1\xi_1\xi_0}+20u_{1\xi_0}u_{1\xi_1\xi_1}\\&+30u_{1\xi_1}u_{1}^{2}+10u_{1\xi_0\xi_0\xi_0}u_{3}+60u_{1\xi_1}u_{2}u_{1}\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$
\begin{aligned}
u_{5\tau_0} - u_{5\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0} = & -5ku_{1\tau_3} + 10k^2 u_{2\tau_2} + 10k^3 u_{3\tau_1} - 5k^4 u_{4\xi_1} + 5u_{4\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0\xi_0} \\
& + 10u_1 u_{4\xi_0\xi_0\xi_0} + 20u_{4\xi_0\xi_0} u_{1\xi_0} + 20u_{1\xi_0\xi_0} u_{4\xi_0} + 30u_{3\xi_1\xi_0\xi_0} u_1 \\
& + 40u_{1\xi_1} u_{3\xi_1\xi_0} + 10u_{3\xi_1\xi_1\xi_0\xi_0\xi_0} + 20u_{3\xi}\, u_{1\xi_1\xi_0} + 10u_2 u_{3\xi_0\xi_0\xi_0} \\
& + 20u_{2\xi_0} u_{3\xi_0\xi_0} + 20u_{1\xi_1} u_{3\xi_0\xi_0} + 20u_{3\xi_0} u_{2\xi_0\xi_0} + 40u_{3\xi_0} u_{1\xi_1\xi_0} \\
& + 30u_{3\xi_0} u_1^2 + 30u_2 u_{2\xi_1\xi_0\xi_0} + 40u_{2\xi_0} u_{2\xi_1\xi_0} + 40u_{1\xi_1} u_{2\xi_1\xi_0} \\
& + 10u_{2\xi_1\xi_1\xi_1\xi_0\xi_0} + 30u_1 u_{2\xi_1\xi_1\xi_0} + 20u_{1\xi_0} u_{2\xi_1\xi_1} + 20u_{2\xi_1} u_{2\xi_0\xi_0} \\
& + 40u_{2\xi_1} u_{1\xi_1\xi_0} + 30u_{2\xi_1} u_1^2 + 10u_{2\xi_0\xi_0\xi_0} u_3 + 20u_{2\xi_0} u_{1\xi_1\xi_1} \\
& + 60u_{2\xi_0} u_2 u_1 + 30u_{1\xi_1\xi_0\xi_0} u_3 + 5u_{1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_0} + 10u_{1\xi_1\xi_1\xi_1} u_1 \\
& + 30u_{1\xi_1\xi_1\xi_0} u_2 + 20u_{1\xi_1\xi_1} u_{1\xi_1} + 60u_{1\xi_1} u_2 u_1 + 10u_{1\xi_0\xi_0\xi_0} u_4 \\
& + 60u_{1\xi_0} u_3 u_1 + 30u_{1\xi_0} u_2^2
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

$\vdots$

denklemleri elde edilir. *c.c*; kompleks eşlenik olmak üzere, (4.34) denklemini çözersek

$$u_1(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_1(\xi_1, \tau_1)e^{i(kx-wt)} + c.c \tag{4.39}$$

bulunur. Bu çözüm (4.35) denkleminde yerine yazılırsa, denkleminin çözümü, f_0 integrasyon sabiti olmak üzere,

$$u_2(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_2(\xi_1, \tau_1)e^{2i(kx-wt)} + c.c. + f_0(\xi, \tau) \tag{4.40}$$

olarak bulunur. Çözümler (4.36) denkleminde yerine yazılırsa

$$v_2 = \frac{1}{k^2} v_1^2, \quad v_{-2} = \frac{1}{k^2} v_{-1}^2, \tag{4.41}$$

ve (4.36) denkleminin çözümü f_1 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$u_3(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_3(\xi_1, \tau_1)e^{3i(kx-wt)} + c.c. + f_1(\xi, \tau) \tag{4.42}$$

formunda,

$$v_3 = \frac{3}{4k^4} v_1^3, \quad v_{-3} = \frac{3}{4k^4} v_{-1}^3, \quad f_0 = \frac{-2}{k^2} v_1 v_{-1} \tag{4.43}$$

ve

$$i v_{1\tau_1} = v_{1\xi_1\xi_1} - \frac{2}{k^2} v_1^2 \overset{*}{v}_1, \qquad i \overset{*}{v}_{1\tau_1} = -\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi} + \frac{2}{k^2} \overset{*}{v}_1^{2} v_1, \tag{4.44}$$

olarak bulunur. Eğer $v_1 = kq$ ve $\overset{*}{v}_1 = kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$iq_{\tau_1} = q_{\xi_1\xi_1} - 2q^2 p, \qquad ip_{\tau_1} = -p_{\xi_1\xi_1} + 2p^2 q, \tag{4.45}$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi bulunur.

Elde edilen çözümle (4.37) denkleminde yerine yazılırsa, f_2 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$u_4(\xi_0, \xi_1.\tau_0, \tau_1) = v_4(\xi_1, \tau_1) e^{4i(kx-wt)} + c.c. + f_2(\xi, \tau) \tag{4.46}$$

formunda,

$$v_4 = \frac{1}{2k^6} v_1^4, \quad v_{-4} = \frac{1}{2k^6} v_{-1}^4, \quad f_2 = \frac{2i}{k^3}(v_{1\xi_1} v_{-1} - v_{-1\xi_1} v_1) \tag{4.47}$$

ve

$$\begin{aligned} v_{1\tau_2} &= v_{1\xi_1\xi_1\xi_1} - \frac{8}{k^2} v_{1\xi_1} v_1 \overset{*}{v}_1 - \frac{6}{k^2} v_1^2 \overset{*}{v}_{1\xi_1} \\ \overset{*}{v}_{1\tau_2} &= \overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1\xi_1} - \frac{8}{k^2} \overset{*}{v}_{1\xi_1} \overset{*}{v}_1 v_1 - \frac{6}{k^2} \overset{*}{v}_1^{2} v_{1\xi_1} \end{aligned} \tag{4.48}$$

denklemleri elde edilir. Eğer $v_1 = kq$ ve $v_1^* = kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$
\begin{aligned}
q_{\tau_2} &= q_{\xi_1\xi_1\xi_1} - 8qpq_{\xi_1} - 6q^2 p_{\xi_1} \\
p_{\tau_2} &= p_{\xi_1\xi_1\xi_1} - 8pqp_{\xi_1} - 6p^2 q_{\xi_1}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

olarak elde edilir.

Denklemleri çözmeye devam edersek ve çözümleri (4.38) de yerine yazarsak, f_3 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$
u_5(\xi_0,\xi_1.\tau_0,\tau_1) = v_5(\xi_1,\tau_1)e^{5i(kx-wt)} + c.c. + f_3(\xi,\tau) \tag{4.50}
$$

formunda,

$$
v_5 = \frac{5}{16k^8}v_1^5, \quad v_{-5} = \frac{5}{16k^8}v_{-1}^5, \quad f_3 = \frac{-2}{k^4}v_{1\xi_1}v_{-1\xi_1} \tag{4.51}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
iv_{1\tau_3} &= v_{1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1} - \frac{12}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1}v_1v_{-1} - \frac{14}{k^2}v_{1\xi_1}^2 v_1^* - \frac{52}{k^2}v_1v_{1\xi_1}v_{1\xi_1}^* - \frac{18}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1}^* v_1^2 + \frac{9}{k^4}v_1^3 v_1^{*2} \\
iv_{1\tau_3}^* &= -v_{1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1}^* + \frac{12}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1}^* v_1 v_1^* + \frac{14}{k^2}v_{1\xi_1}^{*2} v_1 + \frac{52}{k^2}v_1^* v_{1\xi_1}^* v_{1\xi_1} + \frac{18}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1}v_1^{*2} - \frac{9}{k^4}v_1^{*3}v_1^2
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

olarak bulunur. Eğer $v_1 = kq$ ve $v_1^* = kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$
\begin{aligned}
iq_{\tau_3} &= q_{\xi\xi\xi\xi} - 12q_{\xi\xi}qp - 14q_\xi^2 p - 52qq_{\xi_1}p_{\xi_1} - 18p_{\xi\xi}q^2 + 9q^3p^2 \\
ip_{\tau_3} &= -p_{\xi\xi\xi\xi} + 12p_{\xi\xi}qp + 14p_\xi^2 q + 52pp_{\xi_1}q_{\xi_1} + 18q_{\xi\xi}p^2 - 9p^3q^2
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

olarak elde edilir.

Son olarak, çözümleri bir sonraki denklemde yerine yazarsak, f_4 integrasyon sabiti olmak üzere;

$$u_6(\xi_0,\xi_1.\tau_0,\tau_1)=v_6(\xi_1,\tau_1)e^{6i(kx-wt)}+c.c.+f_4(\xi,\tau) \tag{4.54}$$

formunda,

$$v_6=\frac{3}{16k^{10}}v_1^6,\quad v_{-6}=\frac{3}{16k^{10}}v_{-1}^6,\quad f_4=\frac{4i}{k^5}(v_{1\xi_1\xi_1}v_{-1}-v_{-1\xi_1\xi_1}v_1) \tag{4.55}$$

ve

$$\begin{aligned}
v_{1\tau_4}&=v_{1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1}-\frac{20}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1\xi_1}v_1\overset{*}{v}_1-\frac{160}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1}v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_1-\frac{280}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1}\overset{*}{v}_{1\xi_1}v_1-\frac{310}{k^2}v_{1\xi_1}^2\overset{*}{v}_{1\xi_1}\\
&\quad+\frac{80}{k^2}v_{1\xi_1}^2\overset{*}{v}_1-\frac{480}{k^2}v_1v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1}+\frac{160}{k}v_1v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_{1\xi_1}+\frac{135}{k^4}v_{1\xi_1}v_1^2\overset{*}{v}_1^2\\
&\quad-\frac{110}{k^2}\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1\xi_1}v_1^2+\frac{80}{k^2}\overset{*}{v}_{1\xi_1}v_1^2+\frac{270}{k^4}\overset{*}{v}_{1\xi_1}v_1^3\overset{*}{v}_1\\
\overset{*}{v}_{1\tau_4}&=\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1}-\frac{20}{k^2}\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1\xi}v_1\overset{*}{v}_1-\frac{160}{k^2}\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1}\overset{*}{v}_{1\xi_1}v_1-\frac{280}{k^2}v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_{1\xi_1\xi_1}\overset{*}{v}_1-\frac{310}{k^2}\overset{*}{v}_{1\xi_1}^2v_{1\xi_1}\\
&\quad+\frac{80}{k^2}\overset{*}{v}_{1\xi_1}^2v_1-\frac{480}{k^2}\overset{*}{v}_1v_{1\xi_1\xi_1}\overset{*}{v}_{1\xi_1}+\frac{160}{k}\overset{*}{v}_{1\xi_1}v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_1+\frac{135}{k^4}\overset{*}{v}_{1\xi_1}v_1^2\overset{*}{v}_1^2\\
&\quad-\frac{110}{k^2}v_{1\xi_1\xi_1\xi_1}\overset{*}{v}_1^2+\frac{80}{k^2}v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_1^2+\frac{270}{k^4}v_{1\xi_1}\overset{*}{v}_1^3v_1
\end{aligned} \tag{4.56}$$

olarak bulunur. Eğer $v_1=kq$ ve $\overset{*}{v}_1=kp$ olarak tanımlanırsa, denklemler

$$\begin{aligned}
q_{\tau_4}&=q_{\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1}-20q_{\xi_1\xi_1\xi_1}qp-16q_{\xi_1\xi_1}q_{\xi_1}p-280q_{\xi_1\xi_1}p_{\xi_1}q-310q_{\xi_1}^2p_{\xi_1}+80q_{\xi_1}^2p\\
&\quad-480q_{\xi_1}p_{\xi_{11}\xi_1}q+160q_{\xi_1}p_{\xi_1}q+135q_{\xi_1}q^2p^2-110p_{\xi_1\xi_1\xi_1}q^2+80p_{\xi_1}q^2\\
&\quad+270p_{\xi_1}q^3p
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$p_{\tau_4} = p_{\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1} - 20p_{\xi_1\xi_1\xi_1}qp - 16p_{\xi_1\xi_1}p_{\xi_1}q - 280p_{\xi_1\xi_1}q_{\xi_1}p - 310p_{\xi_1}^2 q_{\xi_1} + 80p_{\xi_1}^2 q$$
$$-480p_{\xi_1}q_{\xi_1\xi_1}p + 160q_{\xi_1}p_{\xi_1}p + 135p_{\xi_1}q^2p^2 - 110q_{\xi_1\xi_1\xi_1}p^2 + 80q_{\xi_1}p^2$$
$$+270q_{\xi_1}p^3q$$

olarak elde edilir.

4.4 Sonuç ve Öneriler

İkinci bölümde; bazı dalga denklemlerinden, her biri farklı yavaş zaman değişkenleri için solitari-dalga çözümleri ve integrallenebilirlik şartı ile KdV denkleminin hiyerarşisi bulunmuştur. Fakat bu denklemlerin tam çözümleri ile ilgilenilmemiştir. Üçüncü bölümde; farklı lineer olmayan Schrödinger tipi denklemlerinden KdV akış denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerin Hamiltoniyen fonksiyonları arasındaki ilişkiye bakılmamıştır. Son bölümde; çok ölçekli açılım metodu kullanarak KdV ve beşinci mertebeden KdV denklemlerinden elde edilen çeşitli mertebeden türeve sahip lineer olmayan Schrödinger tipi denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerin integrallenebilirlik ölçütlerinden olan spektral problemleri ve ardıştırma operatörleri ile ilgilenilmemiştir. Bu bahsedilen problemler tez çalışmamızda yer almayıp ileri çalışmalara bırakılmıştır.

4.5 Örnek REDUCE Programları

Çok ölçekli açılım metodunu için, cebirsel hesaplarımızı yaparken yazmış olduğumuz reduce programlarından örnekler vereceğiz:

1-)

```
COMMENT Multiple scale method for pde;
operator q,qm,q1,q1m,p,n,m;
depend q,x,y,t;
depend qm,x,y,t;
depend q1,x,y,t;
depend q1m,x,y,t;
depend p,x,y,t;
depend n,x,y,t;
depend m,x,y,t;
being;
GO TO DATA;
DATA:
COMMENT ---------------------------------------------------Manakov Sistem;
let a=i*df(q,t)+df(q,x,2)+2*d*q*((q*qm)+(q1*q1m));
let b=i*df(q1,t)+df(q1,x,2)+2*d*q1*((q*qm)+(q1*q1m));
Comment The assumed solutions;
let q=exp(i*p)*sqrt(n);
let qm=exp(-i*p)*sqrt(n);
let q1=exp(i*p)*sqrt(m);
let q1m=exp(-i*p)*sqrt(m);
;END;
```

2-)

```
COMMENT Multiple scale method for pde and spectral problem;
operator u,v,p,q,s;
depend u,x,t;
depend v,x,t;
depend p,x,t,x1,t1,t2,t3;
depend q,x,t,x1,t1,t2,t3;
depend q,x,t,x1,t1,t2,t3;
being;
GO TO DATA;
DATA:
COMMENT --------------------------------------------------Manakov Sistem;
let a=df(n,t)+2*(n*df(v,x)+v*df(n,x));
let b=df(v,t)-2*v*df(v,x)+2*d*df(n,x)+2*d*df(m,x)-df(df(n,x)^2/(4*n^2)),x)
    +df(df(n,x,2)/(2*n),x);
let a1=df(m,t)+2*(m*df(v,x)+v*df(m,x));
let b1=df(v,t)-2*v*df(v,x)+2*d*df(n,x)+2*d*df(m,x)-df(df(m,x)^2/(4*m^2),x)
     +df(df(m,x,2)/(2*m),x);
L:=5;
End;
Comment The assumed solutions;
let n=1+for j:=1:L sum p(x,t,x1,t1,t2,t3,j)*h**(2*j);
let m=1+for j:=1:L sum q(x,t,x1,t1,t2,t3,j)*h**(2*j);
let v=for j:=1:L sum s(x,t,x1,t1,t2,t3,j)*h**(2*j);
Comment The assumed derivatives;
for j:=1:L do
df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x):=h*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1);
for j:=1:L do
df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1):=h*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,2);
for j:=1:L do
df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,2):=h*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,3);
```

```
for j:=1:L do
df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,3):=h*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,4);
for j:=1:L do
df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,4):=h*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,5);
for j:=1:L do
df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t):=2*h*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1)
                        +h**3*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t1)
                        +h**5*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t2)
                        +h**7*df(p(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t3);
for j:=1:L do
df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x):=h*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1);
for j:=1:L do
df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1):=h*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,2);
for j:=1:L do
df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,2):=h*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,3);
for j:=1:L do
df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,3):=h*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,4);
for j:=1:L do
df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,4):=h*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,5);
for j:=1:L do
df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t):=2*h*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1)
                         +h**3*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t1)
                         +h**5*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t2)
                         +h**7*df(q(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t3);
for j:=1:L do
df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x):=h*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1);
for j:=1:L do
df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1):=h*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,2);
for j:=1:L do
df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,2):=h*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,3);
for j:=1:L do
df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,3):=h*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,4);
```

```
for j:=1:L do
df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x,x1,4):=h*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1,5);
for j:=1:L do
df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t):=2*h*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),x1)
                         +h**3*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t1)
                         +h**5*df(s(x,t,x1,t1,t2;t3,j),t2)
                         +h**7*df(s(x,t,x1,t1,t2,t3,j),t3);
Comment Coeff.at r(s) for each j;
out "mannls.dat";
off nat;
Comment Coeff.at r(s) for each j;
c:=coeff(num(a),h)$
c1:=coeff(num(b),h)$
c2:=coeff(num(a1),h)$
c3:=coeff(num(b1),h)$
shut "mannls.dat";
;END;
```

3-)

```
COMMENT Multiple scale method for RLW Denk ;
operator u,v,r,s,p,q,n,m;
depend u,x,y;
depend p,x1,y3,y5,y7,y9;
depend v0,x,y,x1,y3,y5,y7,y9;
being;
GO TO DATA;
DATA:
COMMENT------------------------------------------------------------------- RLW;
let a=df(u,y)+df(u,x)-6*u*df(u,x)-df(df(u,x,2),y);
L:=10;w:=k-k**3+k**5-k**7+k**9;h^(12):=0;
Comment The assumed solutions;
let u=for j:=0 step 2 until L sum v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j)*h^(j+2);
Comment The assumed derivatives;
for j:=0 step 2 until L do
df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x):=h*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x1);
for j:=0 step 2 until L do
df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x,x1):=h*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x1,2);
for j:=0 step 2 until L do
df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x,x1,2):=h*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x1,3);
for j:=0 step 2 until L do
df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x,x1,3):=h*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x1,4);
for j:=0 step 2 until L do
df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x,x1,4):=h*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x1,5);
for j:=0 step 2 until L do
df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),y):=-h*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),x1)
                               +h1*h**3*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),y3)
                               -h2*h**5*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),y5)
                               -h3*h**7*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),y7)
                               -h4*h**9*df(v(x,y,x1,y3,y5,y7,y9,j),y9);

off nat;
```

```
out"rlvs.txt";
Comment Coeff.at r(s) for each j;
c:=coeff(num(a),h);
shut "mannls.dat";
;END;
```

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ablowıtz, M.J., Kaup, D.J., Newel, A.C. and Segur, H., 1974, The Invers Scattering Transform-Fourier Analysis for nonlinear problems, Stud. Appl. Math., V-53, 249-315.

Calegora, F., Degasperis, A. and Xiaosdo, J., 2000, Nonlinear Schrödinger-type equations from multiscale reduction of PDEs I. Systematic derivation, J. Math. Phys., V-41, 6399-6443.

Chen, Z. and Huang, N., 1990, Explicit N-soliton solution of the modified Nonlinear Schrödinger equation, Phys. Review A, V-41, 4065-4069.

Fuchssteıner, B. and Focas, S., 1981, Symplectic stuctures their Baclund Transformations and Hereditary Symmetris, Physica D., V-4, 47-66.

Fujimoto, A. and Watanabe, E.A., 1983, Classification of fifth-order evolution equations with nontrivial Symmetries, Math. Japonica, V-28, 111-113.

Gelfand, I.M. and Levıtan, B.M., 1995, On the determination of a differential equation from its spectral function, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 97-133.

Gardner, C.S., Grene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1967, Method for solving KdV equation, Phys. Rev. Lett, V-19, 1097-1095.

Gardner, C.S., Grene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1974, The KdV equation and generalizations VI, Method for exact solution, Pure Appl. Math, V-27, 97-133.

Hearn, A., 1995, Reduce user's Manual, Vers 3.6, Santa Monica, California U.S.A.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Jakubowski, M. H., Stieglitz, K. and Squier, R., 1998, State transformationsof colliding optical solitons and possible application to computation in bulk media, Phsy. Review E, V-58, 6752-6758.

Kundu, A., 2006, Integrable hierarch of Higher nonlinear Schrödinger type equations, Symmetry, Integrability and Geometry, V-2, 12 p.

Kraenkel, R.A., Manna, M.A., Merle, V., Montero, J.C. and Pereira, J.G., 1995, Boussinesq solitary-wave as a multiple-time solution of Korteweg-de Vries hierarchy, J. Math. Phys., V-36, 6822.

Kraenkel, R.A., Manna, M.A., Merle, V., Montero, J.C. and Pereira, J.G., 1996, Multiple-time higher-order perturbation analysis of the regularized long-wavelength equation, Phys. Review E, V-54, 2976-2981.

Maccari, A., 1997, The Boussinesq equation as a source of equations integrable by the spectral transform, Nonlinearity, V-10, 849-856.

Manna, M.A. and Merle, V., 1998, Modified Korteweg-de Vries hierarchies in multiple-time variables and the solutions of modified Boussinesq equations, The Royal Society, V-454, 1445-1456.

Matsuno, Y., 2006, Cups and loop soliton solutions of short-wave models for the Camassa-Holm and Degaperis-Procesi equations, Phys. Letters A, 359, 451-457.

Mıkhaılov, A.V., Sabat, A.B. and Sokolov, V.V., 1991, The symmetry approach to classification of integrable equations, Published in: What is integrability, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 115-184.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Morris, H.C. and Dodd, R.K., 1979, The two component derivative nonlinear Schrödinger equation, Physica Scripta., V-20, 505-508.

Özer, M.N., 1995, Related integrable Hamiltonian systems, Doctor thesis,University of Leeds, s. 177.

Özer, M.N., 1998, A new Integrable Reduction of Matrix NLS equation, Hadronic J., V-21, 387-1404.

Özer, M.N., 1999, Derivation of recursion operator for NLS equation, Hadronic J., V-22, 93-103.

Özer, M.N., 2000, Derivation of Integrable Coupled NLS equation, J.the Kazakh State Nation. Univ. on the section, Mathematics, Mechanics and Informatics, V-20, 62-168.

Özer, M.N.and Dağ, I., 2001, The famous NLS equation from fifth order integrable nonlinear evolution, Hadronic J., V-24, 195-206.

Özer, M.N.and Taşcan, F., 2003 a, Derivation of integrable Coupled Nonlinear Evolution equations, Hadronic J., V-18, 89-98.

Özer, M.N.and Taşcan, F., 2003 b, Derivation of integrable Nonlinear Evolution equations from the higher order NLS equation, J. Phys A, V-36, 2319-2323.

Özer, M.N.and Taşcan, F., 2007, Derivation of Korteweg-de Vries flow equations Nonlinear Schrödinger equation, Chaos Solitons & Fractals, 6051, (in press).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Pıckering, A., 1992, Testing nonlinearevolution equations for complete integrability, The University of Leeds, Department of Applied Mathematical Studies.

Tabor, M.,1989, Nonlinear Evolution Equations and Solitons, Newyork Wiley.

Taşcan, F.,2002, Integrability and Perturbation theory, Doctor thesis, Eskişehir Osmangazi University, s. 63.

Zakharov, V.E. and Kuznetsov, E.A., 1986, Multiscale expansions in the theory of systems ıntegrable by the Scattering Transform, Phys. D., V-18, 455-463.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.04.1971	
Doğum yeri	Eskişehir	
Lise	1986-1989	Eskişehir Atatürk Lisesi
Lisans	1989-1993	Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1997-2001	Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Cebirsel Topoloji
Doktora	2003-2008	Osman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

Çalıştığı kurumlar

	1994- Devam ediyor	Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Programı Öğretim Görevlisi