

Regle Yüzeylerin Üretilmesine Yeni Bir Yaklaşım

Gökçe Dalkıran

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2008

A New Approach To Generation Of Ruled Surfaces

Gökçe Dalkıran

**THESIS for MASTER DEGREE**

Department of Mathematics

Ocak 2008

Regle Yüzeylerin Üretilmesine Yeni Bir Yaklaşım

Gökçe Dalkıran

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalında  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Ocak 2008

Gökçe Dalkıran 'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “ Regle Yüzeylerin Üretilmesine Yeni Bir Yaklaşım ” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ (Danışman)

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı, dual uzaydaki bir dual eğriye E. Study dönüşümü yardımıyla karşılık gelen regle yüzeyin üretimi hakkında yeni bir yaklaşım vermektir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, çalışma hakkında genel bir bilginin verildiği giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışma için gerekli temel kavramlar ve daha sonra kullanılacak olan teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde de, regle yüzeylerin, bir dayanak eğrisi veya iki dayanak eğrisi ile üretimi, dual anlamdaki temel tanımları ve açıklamaları, regle yüzeylerin bazı geometrik özellikleri olan boğaz eğrisi, dağılma parametresi, karşıt kesit yörüngesi ve regle yüzey alanı v.b. verilmiştir. Dual dönüşüm teorisi kullanılarak bir regle yüzeyin nasıl üretileceği ve nasıl açıklanacağı gösterilmiştir. Ayrıca regle yüzeyin en uygun üretimi ifade edilerek, regle yüzeylerin kullanıldığı bazı yerler ve sonuçlar ile sonraki çalışmalar için öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bilgisayar Destekli Tasarım, Dual Dönüşüm Yaklaşımı, En iyileştirme, Dağılma Parametresi, Regle Yüzey.

## SUMMARY

The purpose of the study, we will give a new approach about generation of ruled surface corresponds a dual curve in the dual space by E. Study displacive theory.

This work consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be needed for later use.

In the third chapter, describes the basic definitions and descriptions of ruled surfaces. Summaries some geometric problems which waist curve, distributing parameter, trajectory of a cross-section and area of ruled surfaces and shows how to describe and generate a ruled surface by using the dual mapping theory and approach. In addition to deals with the optimal generation of ruled surfaces and examples for the proposed generation approach of ruled surfaces and concluding remarks and ideas for future work.

**Keywords:** Indefinite Computer-aided geometric design (CAGD), Dual mapping approach, Optimisation, Distirbuting Parameter, Ruled surfaces

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ ve Yrd.Doç. Dr. Cumali EKİCİ' ye, değerleri fikirlerine başvurduğum hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her türlü desteğinden dolayı eşim, Yüzbaşı Necmettin DALKIRAN' a teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
SUMMARY .....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1 Dual Sayılar .....	3
2.2 Dual Vektörler Uzayı (D - Modül) .....	6
2.3 Regle Yüzeyler .....	12
3. REGLE YÜZEYLERİN ÜRETİLMESİNE YENİ BİR YAKLAŞIM .....	20
3.1 Hatırlatmalar .....	20
3.1.1 Regle Yüzeyler .....	20
3.1.2 Dual Sayı, Dual Vektör ve Dual Uzay.....	22
3.1.3 Plucker Lineer Koordinatları .....	22
3.2 Regle Yüzeyin Üretilmesine Dual Dönüşüm Yaklaşımı .....	23
3.2.1 Regle Yüzeyin Dual Eğri Tanımlaması .....	24
3.2.2 Regle Yüzeye Dual Dönüşüm Yaklaşımı .....	31
3.3 Regle Yüzeylerin Bazı Geometrik Problemleri .....	38
3.3.1 Boğaz Eğrisi.....	38
3.3.2 Dağılma Parametresi.....	38
3.3.3 Bir Karşıt Kesitin Yörüngesi .....	39
3.3.4 Dayanak Eğrisi.....	40
3.3.5 Regle Yüzeyin Alanı.....	42
3.3.6 Karşılıklı Noktalar .....	43
3.4 En Uygun Regle Yüzey Oluşumu.....	43
3.5 Regle Yüzeyin Kullanıldığı Bazı Yerler .....	49
KAYNAKLAR .....	54



## BÖLÜM 1

### Giriş

$X$  doğrusunun  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen regle yüzeyler Öklit geometrisinde, ilgi çekici bir araştırma konusudur. Regle yüzeyler ilk olarak bütün regle yüzeylerin sağladığı kısmi diferensiyel denklemi kuran G. Monge tarafından araştırılmıştır.

Regle yüzeyler teorisi, yüzey teorisini ve birtek gerçel parametre ile regle yüzeylerin geometrisini çalışmaya imkan sağlayan E.Study dönüşümünü kullanarak geliştirilmiştir.

1- parametrelili kapalı hareket araştırması önemli bir konu olmuştur. Bilinmektedir ki, regle yüzeyler teorisi teorik kinematik için uygulanabilmektedir ve birçok araştırma yapılmaktadır.

Regle yüzeyler ve özellikle açılabilir yüzeyler araba, gemi ürünlerinin imal edilmesi ve birçok diğer alanda örneğin hareket analizi , katı cisim simülasyonu ve model tabanlı nesne tanıma sistemlerinin tasarımında kullanılmıştır.

E.Study dönüşümüne göre  $\mathbb{E}^3$  3-boyutlu Öklid uzayındaki bir yönlü doğru ve  $\mathbb{D}^3$  3-boyutlu dual uzaydaki birim dual küre üzerindeki bir nokta arasında bir eşleşme vardır. Bu çalışma regle yüzeylerin birim dual küre üzerindeki bir noktasının yer hareketi ve onun mühendislikteki uygulamalarını tartışarak (fitting ve interpolasyon yöntemi ile) planlayarak açıklar. Bazı geometrik problemler ve regle yüzeyler için en uygun model detaylı olarak incelenir. Bu yöntemin doğruluğu ve etkinliği örneklerle ve uygulamalarla açıklanır.

Regle yüzeylerin açıklanması, tasarımı ve modellenmesi, makine mühendisliği ve mühendislik matematiğinde önemli bir konu olmuştur. CAD (Computer Aided Desing) ve CAM (Computer Aided Manufacturing ) programları örnek verilebilir. Son zamanlarda özellikle mühendislikteki çalışmalar, regle yüzey oluşturmak için

kullanılan neredeyse bütün yöntemler, parçaların yüzeylerinin aşağı ve yukarı profil eğrilerini belirler. Regle yüzeyler, türünlerin tasarım ve üretiminde de geniş ölçüde uygulanmıştır. Vida da ve dual sayı cebirinde Study dönüşümü teorisi, 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir yönlü doğru ile 3-boyutlu dual uzaydaki birim küre yüzeyi üzerindeki dual noktanın bire bir eşlediğini gösterir.

Bu teoriye dayanarak dual dönüştürme yaklaşımı  $\mathbb{D}^3$  uzayında birim dual küre yüzeyindeki bir noktayı,  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki yönlü bir doğruya dönüştürmek için sunulmuştur.  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki bir doğrunun hareket merkezi,  $\mathbb{D}^3$  uzayında birim dual küre yüzeyindeki bir nokta ile açıklanabilir ve  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir regle yüzey,  $\mathbb{D}^3$  uzayında birim dual küre yüzeyinde bir tek dual eğriye karşılık gelir. Bu yüzden bir regle yüzeyin üretimi karşılık getirilen birim dual eğrinin belirlenmesine dönüştürülebilir. Bu yeni yöntemin ayrıntıları ve uygulamaları çalışmada tartışılıyor.

Eskişehir, 2008

Gökçe Dalkıran

## BÖLÜM 2

### Temel Kavramlar

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir. Referans verilmemiş olanlar genel olarak (Hacısalihoglu, 1983) den alınmıştır.

#### 2.1 Dual Sayılar

Reel sayılar cümlesi (+) toplama ve (.) çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cümlesi  $\mathbb{R}$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.1:**  $\forall a, a^0 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $A = (a, a^0)$  ikilisine bir **sıralı ikili** denir.

Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cümlesi  $\mathbb{D}$  ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \{(a, a^0) : a, a^0 \in \mathbb{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır:

**Tanım 2.1.2:**  $A = (a, a^0)$  ve  $B = (b, b^0)$  olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \oplus B = (a, a^0) \oplus (b, b^0) = (a + b, a^0 + b^0)$$

şeklinde tanımlanır ve  $\mathbb{D}$  deki **toplama** olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.3:**  $A = (a, a^0)$  ve  $B = (b, b^0)$  olmak üzere

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \odot B = (a, a^0) \odot (b, b^0) = (a \cdot b, a \cdot b^0 + a^0 \cdot b)$$

şeklinde tanımlanır ve  $\mathbb{D}$  deki **çarpma** olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.4:**  $A = (a, a^0)$  ve  $B = (b, b^0) \in \mathbb{D}$  için

$$a = b \text{ ve } a^0 = b^0$$

ise  $A$  ile  $B$  eşittir denir ve  $A = B$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.5:**  $\mathbb{R}$  reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise  $\mathbb{D}$  cümlesine **dual sayılar sistemi** ve  $\forall (a, a^0) \in \mathbb{D}$  elemanına bir **dual sayı** denir.

**Teorem 2.1.1:**  $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$  üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır.

Bu halkanın toplamaya göre birim elemanı  $(0, 0)$ , çarpmaya göre birim elemanı ise,  $(1, 0)$  dır.

**Teorem 2.1.2:**  $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$  üçlüsü bir cisim değildir.

**Tanım 2.1.6:**  $a, a^0 \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  için  $A = (a, a^0)$ ,  $B = (b, b^0)$  ve  $X = (x, x^0)$  olmak üzere

$$A \odot X = B$$

denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten Tanım 2.1.3. den

$$(ax, ax^0 + a^0x) = (b, b^0)$$

ve Tanım 2.1.4. den de

$$X = \left( \frac{b}{a}, \frac{ab^0 - a^0b}{a^2} \right)$$

olur. Dolayısıyla  $X \in \mathbb{D}$  elde edilir.  $X$  dual sayısına,  $B$  nin  $A$  ya **bölümü** denir.

**Teorem 2.1.3:** Dual sayılar halkası,  $\mathbb{R}$  reel sayılar cisminde izomorf bir alt cümleyi, alt cisim olarak kapsar ( Duffy, 1980).

Bu teoremin bir sonucu olarak, reel sayılar cümlesine izomorf olan,

$$\{(a, 0) : a, 0 \in \mathbb{R}\}$$

dual sayılar cümlesinin herbir elemanı, izomorf olan reel sayı ile gösterilebilir.

Kısaca,

$$(a, 0) \cong a \quad , \quad (1, 0) \cong 1$$

olarak alınabilir. Genel olarak bu notasyonu kullanacağız ve ayrıca “ $\oplus$ ” ve “ $\odot$ ” işlemleri yerine “ $+$ ” ve “ $\cdot$ ” işaretlerini tercih edeceğiz.

$\mathbb{D}$  halkasında,  $(0, 1)$  dual sayısı **dual birim** olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon = (0, 1)$$

ile gösterilir. Çarpma işleminin tanımına göre,

$$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 0) \cong 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

**Teorem 2.1.4:** Her  $A = (a, a^0)$  dual sayısı,

$$A = a + \varepsilon a^0 \quad , \quad \varepsilon = (0, 1)$$

şeklinde yazılabilir.

**Tanım 2.1.7:** Bir  $A = a + \varepsilon a^0 \in \mathbb{D}$  dual sayısındaki “ $a$ ” reel sayısına  $A$  nın **reel kısmı**, “ $a^0$ ” reel sayısına da  $A$  nın **dual kısmı** denir.

**Teorem 2.1.5:** İki dual sayının çarpımı sıfır ise, çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir.

**Tanım 2.1.8:**  $Z = x + \varepsilon x^0$  dual sayısının **modül değeri** diye  $|x|$  reel sayısına denir ve

$$\begin{aligned} |Z| &= |x + \varepsilon x^0| \\ &= |x| \end{aligned}$$

ile gösterilir.

## 2.2 Dual Vektörler Uzayı ( $\mathbb{D}$ - Modül)

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3 = \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}\}$$

cümlesinin her bir elemanı bir büyük harf ile gösterilirse,  $A \in \mathbb{D}^3$  için  $A = (A_1, A_2, A_3)$  veya  $A = (A_i)$ ; ( $i = 1, 2, 3$ ) notasyonlarından birisi kullanılabilir.

Bu cümle içinde aşağıdaki tanımları verelim.

**Tanım 2.2.1:** Her  $A = (A_i)$ ,  $B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$  için

$$A = B \Leftrightarrow A_i = B_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

dır.

**Tanım 2.2.2:** Her  $A = (A_i)$ ,  $B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$  için, ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

iç işlemi

$$A + B = (A_i + B_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,  $A + B$  ye  $\mathbb{D}^3$  de  $A$  ile  $B$  nin **toplamı** denir.

**Tanım 2.2.3:**  $\lambda \in \mathbb{D}$  ve  $A \in \mathbb{D}^3$  için,

$$\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

dış işlemi

$$\lambda.A = (\lambda A_i) \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\lambda.A$  ya  $A$  nın  $\lambda$  **skaları ile çarpımı** denir.

**Teorem 2.2.1:**  $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$  sistemi  $\mathbb{D}$  halkası üzerinde bir modüldür.

**Tanım 2.2.4:**  $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$  üçlüsüne  $\mathbb{D}$  -Modül ve bunun elemanları olan sıralı dual üçlülere, dual vektörler diyeceğiz ve  $\vec{A} = (A_i)$  şeklinde göstereceğiz.

**Teorem 2.2.2:**  $\vec{a}, \vec{a}^0 \in \mathbb{R}^3$  olmak üzere  $\mathbb{D}$  -Modülde her bir  $\vec{A}$  dual vektörü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0, \quad \varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.1.3 ile benzer olarak;  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayı,  $\mathbb{D}$  -Modülün elemanları  $(\vec{a}, 0) = \vec{a} + \varepsilon \vec{0}$  şeklinde olan alt cümlesine izomorftur.

$\mathbb{D}$ -Modülün toplamaya göre birim elemanı,

$$\vec{0} = \vec{0} + \varepsilon \vec{0}$$

şeklinde gösterilir. Buna **sıfır dual vektörü** denir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0$  ve  $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^0$  dual vektörlerinin eşitliği,

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^0 = \vec{b}^0$$

ile verilir. Bu Tanım 2.2.1 ile eş anlamlıdır.

**Tanım 2.2.5:** Her  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}$ -Modül için,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\longrightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \left( \langle \vec{a}^0, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^0 \rangle \right) \end{aligned}$$

ile tanımlanan  $\langle, \rangle$  fonksiyonuna  $\mathbb{D}$ -Modülde bir **iç çarpım fonksiyonu** denir.

**Tanım 2.2.6:** Bir  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0$  dual vektörünün **normu** diye

$$\|\vec{A}\| = \left( \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^0 \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

dual sayısına denir.

**Tanım 2.2.7:** Normu reel birime karşılık gelen  $(1, 0)$  dual sayısı olan dual vektöre **birim dual vektör** denir.

**Tanım 2.2.8:**  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0 \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere,

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektörüne,  $\vec{A}$  **dual vektörünün eksenini** denir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , dual vektörünün eksenini,  $k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^0 \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$  olmak üzere,

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon \frac{\vec{a}^0 - k \vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

şeklinde yazabiliriz.

**Tanım 2.2.10:**  $K = \{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^0 : \|\vec{X}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^0 \in \mathbb{R}^3 \}$  cümlesine  $\mathbb{D}$ -Modülde **birim dual küre** denir.

**Teorem 2.2.3 (E. Study):**  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$  olmak üzere  $\mathbb{D}$ -Modül de denklemi,

$$\|\vec{A}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları,  $\mathbb{E}^3$  deki yönlü doğrulara bire-bir karşılık gelir.

Birim dual küre üzerindeki bir  $A$  dual noktasını merkeze birleştiren birim dual yer vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^0$$

ise Teorem 2.2.3. den dolayı, çizgiler uzayında bir tek yönlü doğruya karşılık gelir. Burada  $\vec{a} \in \mathbb{E}^3$  vektörü, bu yönlü doğrunun doğrultman vektörü,



$\vec{a}^0 \in \mathbb{E}^3$  vektörü ise,  $X$  bu doğrunun üzerinde bir nokta ve  $O$  bir başlangıç noktası olmak üzere,

$$\vec{a}^0 = \overrightarrow{OX} \times \vec{a}$$

ile belirlenen bir moment vektörüdür. Bu vektöre, çizgiler uzayındaki doğrunun başlangıca göre **vektörel momenti** denir.

**Tanım 2.2.11 (Taylor Açılımı):**  $Z = x + \varepsilon x^0 \in \mathbb{D}$  olmak üzere

$$f(Z) = f(Z_0) + \frac{Z - Z_0}{1!} f'(Z_0) + \frac{(Z - Z_0)^2}{2!} f''(Z_0) + \dots + \frac{(Z - Z_0)^n}{n!} f^{(n)}(Z_0) + \dots$$

serisine  $f$  dual fonksiyonunun  $Z_0 \in \mathbb{D}$  noktasındaki **Taylor açılımı** denir.

Bu tanım gereğince,  $f$  dual fonksiyonunun  $Z_0 = 0$  noktasındaki Taylor açılımı

$$f(x + \varepsilon x^0) = f(x) + \varepsilon x^0 f'(x)$$

şeklini alır. O halde,  $f(x + \varepsilon x^0) = \cos(x + \varepsilon x^0)$ ,  $\sin(x + \varepsilon x^0)$ ,  $sh(x + \varepsilon x^0)$  ve  $ch(x + \varepsilon x^0)$  dual fonksiyonlarının  $0 = (0, 0)$  dual noktasındaki Taylor açılımları:

$$\cos(x + \varepsilon x^0) = \cos x - \varepsilon x^0 \sin x$$

$$\sin(x + \varepsilon x^0) = \sin x + \varepsilon x^0 \cos x$$

$$sh(x + \varepsilon x^0) = shx + \varepsilon x^0 chx$$

$$ch(x + \varepsilon x^0) = chx + \varepsilon x^0 shx$$

olarak elde edilir.

**Tanım 2.2.12:**  $\mathbb{D}$ -Modül de açılı,  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  birer birim dual vektör olmak üzere,

$$\cos \Phi = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$$

ifadesi ile verilir.  $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^0$  dual sayısına  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  birim dual vektörleri arasındaki **dual açılı** denir.

Şimdi, iki birim dual vektör arasındaki dual açının,  $\mathbb{R}^3$  deki yönlü doğruların uzayı olan çizgiler uzayındaki anlamını araştıralım. Bunun için  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  birim dual vektörlerinin

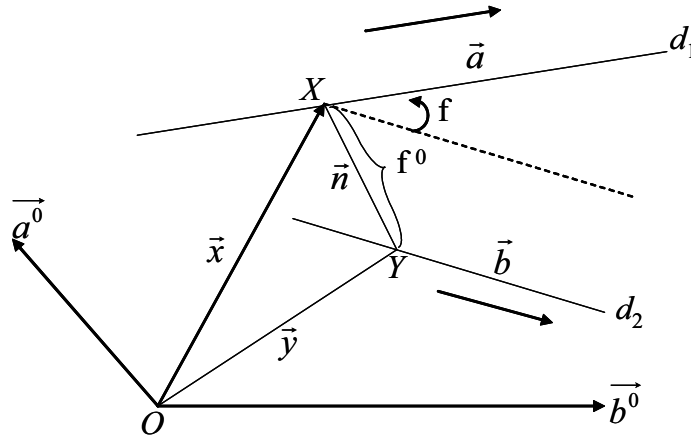
$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}^0, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^0 \rangle)$$

iç çarpımından hareket edelim. E. Study teoremi gereğince  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  birim dual vektörleri  $\mathbb{R}^3$  de iki yönlü  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularına karşılık gelirler,  $d_1$  in yönü  $\vec{a}$ , yeri (momenti)  $\vec{a}^0$ ,  $d_2$  nin yönü  $\vec{b}$ , yeri  $\vec{b}^0$  ile belli olduğundan  $\vec{a}$  ile  $\vec{b}$  arasındaki açı  $\varphi$  ise, yukarıdaki iç çarpımın reel kısmı,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi$$

dır. Şimdi de dual iç çarpımdaki  $\langle \vec{a}^0, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^0 \rangle$  dual kısmın anlamını araştıralım.

$\vec{a}^0$  ve  $\vec{b}^0$  momentleri, doğrular üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsız olduğundan,  $X$  ve  $Y$  noktalarını,  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının ortak dikmesinin dikme ayakları olarak seçebiliriz (Şekil 2.1). Bu ortak dikme doğrultusundaki birim vektör



Şekil 2.1

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

ile belirtilebilir.  $d_1$  ve  $d_2$  doğruları arasındaki en kısa uzaklık  $\varphi^0$  ile gösterilirse,

$$\vec{x} - \vec{y} = \pm \varphi^0 \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

yazılabilir. Vektörel momentler  $\vec{a}^0 = \vec{x} \times \vec{a}$ ,  $\vec{b}^0 = \vec{y} \times \vec{b}$  olduğundan

$$\langle \vec{a}^0, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

ve

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^0 \rangle = \langle \vec{a}, \vec{y} \times \vec{b} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

olur. Buradan dual kısım için,

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}^0, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^0 \rangle &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \\ &= \pm \left\langle \varphi^0 \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle \\ &= \pm \varphi^0 \sin \varphi \end{aligned}$$

bulunur. Reel ve dual kısımlar için bulduğumuz değerleri, dual iç çarpım ifadesinde yerine koyarsak,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi \pm \varepsilon \varphi^0 \sin \varphi$$

elde edilir. Bu ifade de  $(-)$  işareti gözönüne alınırsa,  $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^0$  bir dual sayı olmak üzere, Taylor formülü gereğince,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi$$

yazılabilir. O halde  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  birim dual vektörleri arasındaki  $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^0$  dual açısı, bunların  $\mathbb{R}^3$  de temsil ettikleri  $d_1$  ve  $d_2$ - yönlü doğrularının arasındaki  $\varphi$  açısı ve en kısa uzaklığı gösteren  $\varphi^0$  reel çiftinden oluşur.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$  ve  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B}$  birim dual vektörlerinin uçları  $\mathbb{D}$ -Modül de  $O$  merkezli birim dual kürenin  $A$  ve  $B$  dual noktalarını belirteceğinden  $\overrightarrow{A}$  ile  $\overrightarrow{B}$  arasındaki  $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^0$  dual açısı  $A$  ve  $B$  dual noktalarından geçen dual büyük dairenin  $\widehat{AB}$  dual yay uzunluğu olarak düşünilir.

**Tanım 2.2.13:** Her  $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\times : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir işlemdir ve

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \varepsilon \left( \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}^0 + \overrightarrow{a}^0 \times \overrightarrow{b} \right)$$

olarak tanımlanır.

### 2.3 Regle Yüzeyler

$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x}^0 = X(x_1, x_2, x_3; x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  doğrusunun  $(x_1, x_2, x_3; x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  normlanmış homogen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1x_1^0 + x_2x_2^0 + x_3x_3^0 = 0 \end{cases}$$

bağıntılarından başka

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$$

$$\Psi(x_1, x_2, x_3; x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0$$

bağıntıları da varsa  $\overrightarrow{X}$  doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir.

**Tanım 2.3.1:** E. Study tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı  $(\infty^1)$  sayıdaki  $X$  doğrularının cümlesine **regle yüzey** veya **ışın yüzeyi** denir.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  belli has dual vektörler olmak üzere,

$$\begin{aligned} F & \dots \langle \vec{a}, \vec{x}^0 \rangle + \langle \vec{a}^0, \vec{x} \rangle = 0 \\ \Phi & \dots \langle \vec{b}, \vec{x}^0 \rangle + \langle \vec{b}^0, \vec{x} \rangle = 0 \\ \Psi & \dots \langle \vec{c}, \vec{x}^0 \rangle + \langle \vec{c}^0, \vec{x} \rangle = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey  $F = 0, \Phi = 0, \Psi = 0$  ışın komplekslerinin üçünde de ortak olan  $(\infty^1)$  doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey,  $\vec{X} = \vec{X}(t)$  bir  $t$  parametresine bağlı birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\vec{X} = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^0(t)$$

birim dual vektörüne

$$\|\vec{X}\| = \|\vec{OX}\| = (1, 0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual  $X$  noktası karşılık gelir. Biliyoruz ki; bu noktaya da  $\mathbb{R}^3$  de bir  $\vec{X}$  doğrusu karşılık gelir.  $t$  parametresi değiştikçe

$$\vec{OX} = \vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^0(t)$$

birim dual vektörü birim dual küre üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye de  $\mathbb{R}^3$  de bir regle yüzey karşılık gelir.

$X$  dual eğrisine regle yüzeyin **dual küresel resmi** denir. Birim dual küre üzerinde  $\vec{X} = \vec{X}(t)$  dual eğrisinin

$$d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^0 \tag{2.1}$$

dual yay elementi için

$$d\Phi^2 = \langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle = \left\langle \dot{\vec{X}}, \dot{\vec{X}} \right\rangle dt^2 \tag{2.2}$$

yazılabilir. Tanım 2.1.4 den (2.2) ifadesi

$$d\Phi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi d\varphi^0 = \langle d\vec{x}, d\vec{x}^0 \rangle$$

şeklinde elde edilir.  $d\Phi$  dual büyüklüğü bilindiği gibi  $\vec{X}(t)$  ve  $\vec{X}(t + dt)$  komşu birim dual vektörler arasındaki dual açı, yani bu iki birim dual vektörün birim dual küre üzerindeki uç noktalarının dual kısımlarına  $\vec{X}(t)$  ve  $\vec{X}(t + dt)$  birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir.

$$\langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle + 2\varepsilon \langle d\vec{x}, dx^0 \rangle$$

dual ifadesi, iç çarpım olması nedeniyle koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Bu nedenle,

$$\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \text{ ve } \langle d\vec{x}, dx^0 \rangle$$

reel büyüklükleri de koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Dolayısıyla açı ile en kısa uzaklığın oranı regle yüzeyin en basit (yani en küçük mertebeden) diferensiyel değişmezi olur.

**Tanım 2.3.2:**

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, dx^0 \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\varphi \cdot d\varphi^0}{d\varphi \cdot d\varphi} = \frac{d\varphi^0}{d\varphi}$$

ifadesindeki  $\frac{1}{d}$  büyüklüğüne regle yüzeyin  $t$  parametresine ait olan  $\vec{X}$  anadoğrusu boyunca **dağılma parametresi** veya **drali** denir. Başka bir deyişle; regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir.

**Tanım 2.3.3:** Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere **torslar** veya **açılabilir regle yüzeyler** denir.

Torslar için dralin sıfır olması bir karakteristiktir. Zira,

$$\frac{1}{d} = \frac{d\varphi^0}{d\varphi} = 0 \Rightarrow d\varphi^0 = 0$$

dır. Bu ise,  $\vec{X}(t)$  ve  $\vec{X}(t + dt)$  birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğruların kesişmesi demektir. Dralin bu tanımı silindirler

için geçerli değildir. Drali sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu anadoğrular aykırıdır yani; komşu iki anadoğru bir düzlem teşkil etmez.

**Tanım 2.3.4:**  $\vec{X} = \vec{X}(t)$ ,  $\|\vec{X}(t)\| = 1, t \in \mathbb{R}$  regle yüzeyinde  $\vec{X}(t)$  ve  $\vec{X}(t+dt)$  komşu anadoğruların ortak dikmesinin,  $\vec{X}(t)$  anadoğrusu üzerindeki ayağına, **merkez noktası** veya **striksiyon noktası** denir. Bu noktaların geometrik yerine ise **boğaz çizgisi** veya **striksiyon çizgisi** adı verilir.

Verilen bir regle yüzey üzerinde bütün anadoğruları kesen bir  $(C)$  eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi (referans eğrisi) olarak alınabilir.

**Tanım 2.3.5:**  $\vec{X} = \vec{X}(t)$ ,  $\|\vec{X}(t)\| = 1, t \in \mathbb{R}$  regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörünge eğrisi** denir.

**Tanım 2.3.6:**  $\mathbb{E}^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında, verilen  $l$  doğrusunun, verilen  $r$  eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Öklid uzayında bir **regle yüzey** denir. Bu durumda verilen  $l$  doğrusu regle yüzeyin **anadoğrusu** ve  $r$  eğrisi de regle yüzeyin **dayanak eğrisi** olarak adlandırılır.

$\mathbb{E}^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında  $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$  olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$r : I \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$t \rightarrow r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$$

olsun. Her  $t \in I$  için  $r(t)$  noktasındaki  $T_{r(t)}$  teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$v \rightarrow l(v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t))$$

doğrusunu seçelim. Burada  $1 \leq i \leq 3$  olmak üzere  $a_i(t) \in \mathbb{R}$  skalarları  $r(t)$  noktasındaki doğrultman vektörü bileşenleridir.

$l$  doğrusunun  $r$  eğrisi boyunca hareket etmesiyle,  $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$  parametrizasyonu ile verilen bir

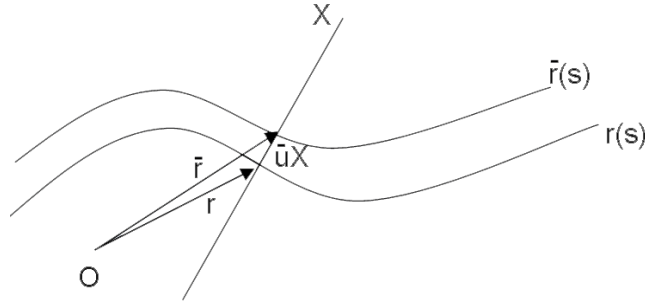
$$\begin{aligned} \varphi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

regle yüzeyi elde edilir.

**Tanım 2.3.7:** Bir  $\varphi(t, v)$  regle yüzeyinin merkez noktasının  $\bar{r}$  yer vektörü, dayanak eğrisinin  $r(s)$  yervektörü,  $x(s)$  doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan  $\bar{u}$  uzaklığı cinsinden

$$\bar{r}(s, \bar{u}) = r(s) + \bar{u}x(s) \quad (2.4)$$

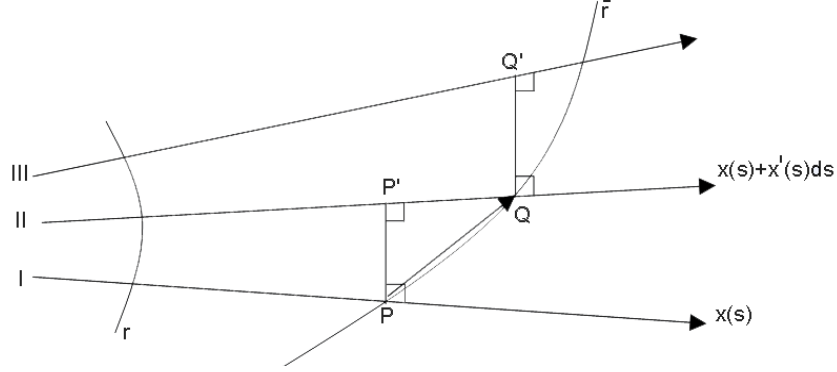
şeklinde ifade edilir (Şekil 2.2).  $\bar{u}$  parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden ifade edilebilir.



Şekil 2.2

Regle yüzeyin ilk ikisi  $x(s)$  ve  $x(s) + dx(s)$  olan komşu üç anadoğrusunu seçelim (Şekil 2.3).





Şekil 2.3

Burada  $P$  ve  $Q$  farklı iki boğaz noktasıdır. Buna göre,

$$\bar{r}(s, \bar{u}) = r(s) - \frac{\left\langle \frac{dx}{ds}, t \right\rangle}{\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2} x(s) \quad (2.5)$$

şeklinde dir. Eğer  $\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 = 0$  ise regle yüzey, striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu durum regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder.

Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için  $\bar{u} = 0$  veya  $\left\langle \frac{dx}{ds}, t \right\rangle = 0$  alınması yeterlidir.

**Tanım 2.3.8:**

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = r(t) + vx(t) \end{aligned}$$

regle yüzeyi  $\forall t \in I$  için

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v) \quad (2.6)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalıdır** denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Yani, bir periyot sonra her anadoğru kendi üzerine gelir.

**Tanım 2.3.9 (Lagrange Özdeşliği):** Uzayda herhangi  $a, b, c, d$  vektörleri için

$$\langle (a \times b), (c \times d) \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle \quad (2.7)$$

özdeşliği geçerlidir (Kaya, 1996.).

**Tanım 2.3.10:** Uzayda herhangi  $a, b, c$  vektörlerinin bir vektörel ve bir skalar çarpımının bileşimi olan

$$\langle a, b \times c \rangle$$

skalar değerine bu üç vektörün **karma çarpımı** denir. Bu karma çarpım

$$\langle a, b \times c \rangle = \det(a, b, c) \quad (2.8)$$

şeklinde de tanımlanabilir (Kaya, 1996.).

### **Tanım 2.3.11 (İnterpolasyon Yöntemi)**

İlk kez uygulamalı matematik biliminin bir alt kategorisi olan sayısal analiz yöntemlerinde tanımlanan ve elde var olan değer noktalarından yola çıkarak değeri bilinmeyen bir diğer noktadaki değeri tahmin etmeye yarayan yöntemlerin tümüne verilen genel isimdir. En basit tanımıyla "var olan sayısal değerleri kullanarak boş noktalardaki değerlerin tahmin edilmesi" olarak açıklanmaktadır.

İnterpolasyon genelde mühendislik ve ölçümlere dayalı benzeri bilim dallarında toplanan verilerin uygun bir fonksiyon eğrisine dönüştürülmesi amacıyla kullanılmaktadır. Elde toplanan verilerin heterojen olduğu durumlarda interpolasyon ile boş alanlardaki değerlerin bulunması önem kazanmaktadır.

Doğrusal interpolasyon, polinom interpolasyon ve spline interpolasyonu gibi çeşitleri vardır.

### **Tanım 2.3.12 (Fitting Eğri (Uygun Eğri ))**

Uygun eğriyi bulma olarak bilinen sayısal yöntem, bütün uygulamalı fizik, kimya, matematik vb. bilimler için çok önemli bir işlemdir. Uygun eğriyi bul-

manın amacı, ölçülen bir dağılıma uyan fonksiyonun bulunmasıdır. İstatistik biliminde regresyon olarak bilinen işlemler aslında bir uygun doğrusal eğriyi bulmadır.

Uygulamalı bilimler için doğrusal bir denklem takımının çözümü önemli ve vazgeçilmez işlemlerden biridir. Çok sık karşılaşılan bu işlemlerin çözümü bazı özel denklem takımları dışında elle yapılamayacak kadar uzun ve karmaşıktır. Bunun dışında denklem takımlarının çözümü bir bilgisayar programı gerektirebilir. Sayısal çözümlenmenin en çok kullanıldığı yerlerden biri olan bu denklem takımlarının çözümü için geliştirilmiş ve kullanıldığı yere bağlı olarak oldukça iyi yaklaşımlar yapan yöntemler vardır. Fitting yöntemi de bunlardan birisidir.

### **Tanım 2.3.13 (CAD / CAM)**

CAD yani Computer Aided Desing (drafting) yada dilimizdeki benimsenmiş karşılığıyla Bilgisayar destekli tasarım, adından da anlaşıldığı gibi “tasarımın yapılmasını kolaylaştırmak, hızlandırmak, kalitesini yükseltmek gibi amaçlara ulaşmak için araç olarak bilgisayardan yararlanma” eylemidir. Bilgisayar eğer doğru veriler girilirse, ileri matematik ve geometri yetenekleri sayesinde kusursuz eğriler, çemberler, çizgiler ve bunların gerek iki gerekse üç boyutta kombinasyonlarından oluşan nesnelere çizebilir. Bu nesnelere çoğaltılabilir, taşınabilir, döndürülebilir, ölçeklenebilir, silinebilir, birbiriyle kesiştirilebilir, eklenip çıkartılabilir, farklı açılardan görüntülenebilir. Bir CAD yazılımı, az önce yalnızca bir kaçını saydığımız çok sayıda işlemi, bir arayüz ile tasarımcı için kullanışlı hale getirerek, bilgisayar uzmanı olmasına gerek kalmadan tasarım eylemini bilgisayar üzerinde yapabilmesini sağlar.

Cam ise Computer Aided Manufacturing yani Bilgisayar Destekli Üretim, imalatta bilgisayar yardımıyla çalışılmasıdır.

## BÖLÜM 3

### Regle Yüzeylerin Üretilmesine Yeni Bir Yaklaşım

#### 3.1 Hatırlatmalar

Bu kısımda öncelikle çalışmada kullanılacak bazı kavramlar farklı bir anlatımla ifade edilmiştir.

##### 3.1.1. Regle Yüzeyler

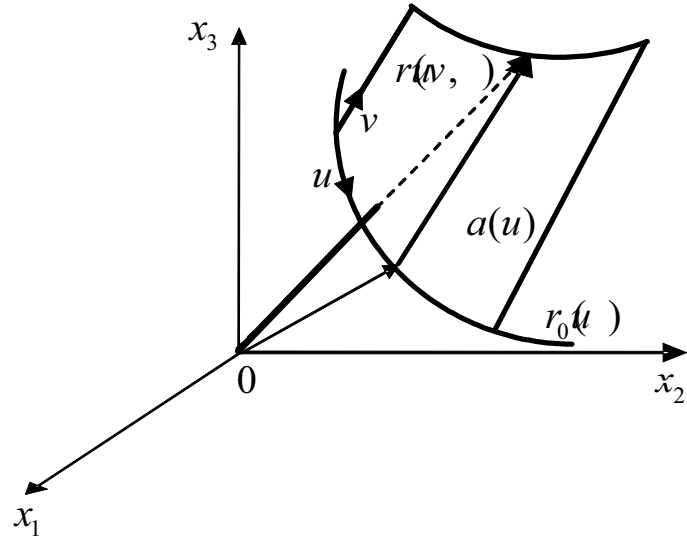
Bir regle yüzey bir doğru parçasının hareket merkezinin bir boyutta hareket ettirilmesiyle oluşan yüzeydir, yada uzaydaki doğruların ailesidir (Ding ve Davies, 1987). Bu

$$r(u, v) = r_0(u) + va(u) \quad (3.1)$$

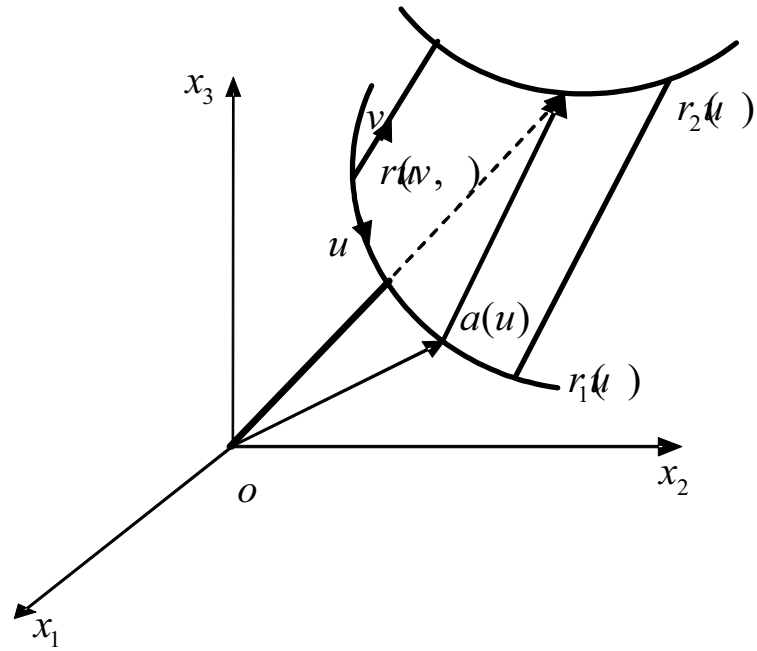
şeklinde ifade edilebilir. Burada  $u \in [u_1, u_2]$  ve  $v \in [v_1, v_2]$  için  $r_0(u)$  bir dayanak eğrisi  $a(u)$  doğrultman vektör ve  $r_0(u)$  dan  $r(u, v)$  noktasına uzaklığını  $v$  parametreleri gösterir. Ayrıca bir regle yüzey iki dayanak eğrisi  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  ile de ifade edilebilir. Şekil 3.1-b de görüldüğü gibi, verilen herbir  $u$  değeri için bulunan ve aynı zamanda anadoğru üzerinde olan  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  noktaları, dayanak eğrileri boyunca hareket eder. Buna göre  $u \in [u_1, u_2]$  ve  $v \in [v_1, v_2]$  olduğunda, regle yüzeyin parametrik ifadesi

$$r(u, v) = r_1(u) + v[r_2(u) - r_1(u)] \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Yüzey modelleme sistemlerinde doğrultman olarak, doğrular, yaylar, çemberler, konikler (parabol, elips, hiperbol vb.), spline eğrileri, bezier eğrileri, B-spline eğrileri ve rasyonel eğriler vb. seçilebilirler. Tipik regle yüzeyler ise silindirlere, konilere, hiperboloid, hiperbolik paraboloid ve bir uzay yüzeyinin tanjant (teğet) yüzeyleridir.



Şekil 3.1 a) Bir dayanak eğrisi ve doğrultman ile tanımlanan regle yüzey.



Şekil 3.1-b) İki dayanak eğrisi ile tanımlanan regle yüzey.

### 3.1.2 Dual Sayı, Dual Vektör ve Dual Uzay

Eğer  $a$  ve  $a^0$  reel sayı olarak alınırsa bir dual sayı

$$\hat{a} = a + \varepsilon a^0 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada  $\varepsilon$  bir kompleks birimi temsil eder. Bu karmaşık sayılardaki  $i$  ile benzerlik gösterir, fakat  $i$  den farklı karakteristik özelliklere sahiptir.  $i \neq 0, i^2 = -1$  iken  $\varepsilon \neq 0$  ve  $\varepsilon^2 = 0$  dır. Aslında bir dual sayı  $\varepsilon a$  göre bir polinom gibi düşünülebilir.  $a$  ve  $a^0$ ,  $u$  reel parametresinin bütün reel fonksiyonlarıysa, yani  $a = a(u)$  ve  $a^0 = a^0(u)$  olsun. O zaman  $\hat{a} = \hat{a}(u)$  bir dual fonksiyondur.  $(0 - x_1 x_2 x_3)$ ,  $E^3$  te bir ortogonal koordinat sistemi olarak verilmişse ve  $x_k$  ekseninin pozitif yönü sırasıyla  $i_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) birim vektörlerle açıklanırsa, o zaman

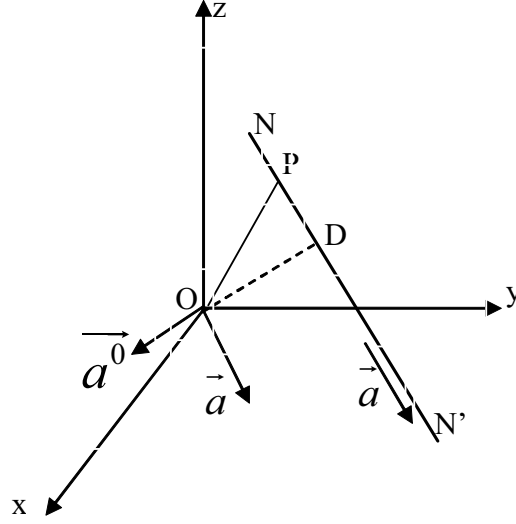
$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{x}_1 i_1 + \hat{x}_2 i_2 + \hat{x}_3 i_3 \quad (3.4)$$

bir dual vektör olarak isimlendirilir.

$\hat{x}_k = x_k + \varepsilon x_k^0 \dots (k = 1, 2, 3)$   $\hat{x}$  nın dual koordinatlarıdır. Eğer  $|\hat{x}| = 1$  veya  $\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = 1$  ise,  $\hat{x}$  bir dual birim vektördür. Lineer uzay bütün  $n$  boyutlu dual vektörlerden oluşan dual uzay olarak adlandırılır.  $D^3$  te, bir dual vektör  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ , bir dual nokta yer vektörü olarak tanımlanır ve bütün dual birim vektörlerden oluşan küme  $O$  merkezli bir birim dual küredir. Ayrıca  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi olmak üzere  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  kümesi üzerinde toplama çarpma ve eşitlik işlemleri Bölüm 1 deki gibi tanımlanmış ise  $\mathbb{D}$  kümesine dual sayılar sistemi ve  $\forall (a, a^0) \in \mathbb{D}$  elemanına da bir dual sayı denir.

### 3.1.3 Plücker Lineer Koordinatları

$\mathbb{E}^3$  uzayında uzaydaki doğrunun konumu ve doğrultusu  $a$  ve  $a^0$  gibi  $O$  noktasından geçen iki vektörle açıklanabilir ( Şekil 3.2 ye bakınız)  $a$ ,  $NN'$  doğrusuna paralel bir vektör ve  $a^0$ ,  $O$  noktasından başlayan bir moment vektörü olsun.



Şekil 3.2 Plücker lineer koordinatı

Buna göre

$$\begin{aligned} a^0 &= OP \times a \\ &= OD \times a \end{aligned}$$

şeklindedir.  $OP$ ,  $NN'$  doğrusu üzerindeki  $P$  noktasının yer vektörüdür.

$OD \perp NN'$  dir, bu yüzden  $NN'$  doğrusu bir  $\hat{a}$  dual vektörü yardımıyla

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a + \varepsilon a^0 \\ &= a + \varepsilon OP \times a \\ &= a + \varepsilon OD \times a \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilir.  $a$  ve  $a^0$  in altı bileşeni  $a_i$  ve  $a_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $NN'$  doğrusunun Plücker Lineer koordinatları olarak adlandırılır.

### 3.2 Regle Yüzeyin Üretilmesine Dual Dönüşüm Yaklaşımı

Bu kısımda, bir regle yüzey verildiğinde buna karşılık gelen dual eğrinin nasıl tanımlandığı ve regle yüzeye dual dönüşüm yaklaşımı ifade edilmiştir.

### 3.2.1 Regle Yüzeyin Dual Eğri Tanımlaması

Vida ve dual sayı cebirinde E. Study dönüşüm teorisi  $\mathbb{E}^3$  uzayında bir yönlü doğru ve  $\mathbb{D}^3$  te dual birim küre yüzeyindeki bir nokta arasında bire-bir eşleşme olduğunu gösteriyor. Bu teoriye göre bir doğrunun hareket merkezi veya bir

regle yüzey dual birim kürenin yüzeyindeki ilgili dual noktanın konumu tarafından oluşturulmuş dual eğri ile açıklanabilir. Daha sonra regle yüzeylerin oluşumu dual birim küredeki ilgili eğrinin belirlenmesine dönüştürülebilir.

Bu  $L(u)$  türetilmiş doğrular ailesi veya bir regle yüzeyi, dual birim küre yüzeyindeki bir türetilmiş  $\hat{x}(u)$  eğrisi ile ifade edilebilir. Dual eğri denklemi

$$\hat{x} = \hat{x}(u) = a(u) + \varepsilon a^0(u) \quad (3.6)$$

şeklinde de gösterilir. Bileşenleri

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \\ \hat{x}(u) &= a(u) + \varepsilon a^0(u) \end{aligned}$$

olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) &= (a_1(u), a_2(u), a_3(u)) + \varepsilon(a_1^0(u), a_2^0(u), a_3^0(u)) \\ &= (a_1 + \varepsilon a_1^0, a_2 + \varepsilon a_2^0, a_3 + \varepsilon a_3^0) \end{aligned}$$

olur. İki dual vektör eşitliğinden

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_1(u) = a_1(u) + \varepsilon a_1^0(u) \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_2(u) = a_2(u) + \varepsilon a_2^0(u) \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_3(u) = a_3(u) + \varepsilon a_3^0(u) \end{aligned} \quad (3.7)$$

bulunur. Burada

$$[a(u), a^0(u)] = [a_1(u), a_2(u), a_3(u), a_1^0(u), a_2^0(u), a_3^0(u)]$$



Plücker lineer koordinatlarıdır ve  $a(u)$ ,  $u$  nun herhangi bir değeri ile, regle yüzeyin  $l(u)$  üreticinin doğrultman vektörünü açıklar. (3.6) teki eşitliğe göre  $\hat{x}(u)$

$$\begin{aligned}\hat{x}(u) &= a(u) + \varepsilon a^0(u) \\ &= a(u) + \varepsilon 0P(u) \times a(u) \\ &= a(u) + \varepsilon 0D(u) \times a(u)\end{aligned}\tag{3.8}$$

şeklinde yazılır. Buna karşılık  $0P(u)$ ,  $l(u)$  doğrusu üzerindeki bir noktanın yer vektörüdür.  $0D(u)$  doğruya olan dikme ayak vektörüdür. O halde  $0D(u) \perp l(u)$  dur. (3.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\hat{x}(u) &= a(u) + \varepsilon a^0(u) \\ &= a(u) + \varepsilon 0P(u) \times a(u)\end{aligned}$$

veya

$$a + 0P(u) \times a(u) = a + \varepsilon 0D \times a(u)$$

şeklinde yazılır.  $0D \perp l(u)$  olduğundan

$$\langle (x_{1D}, x_{2D}, x_{3D}), (a_1, a_2, a_3) \rangle = 0$$

yani

$$a_1 x_{1D} + a_2 x_{2D} + a_3 x_{3D} = 0\tag{3.9}$$

olur. Ayrıca  $\hat{x}$  birim dual vektör olduğundan

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\tag{3.10}$$

dir.  $a$  ve  $a^0$  vektörlerinin bileşenleri kullanılırsa

$$(a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^0, a_2^0, a_3^0) = (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon [(x_{1D}, x_{2D}, x_{3D}) \times (a_1, a_2, a_3)]$$

yazılır. Bu ifade reel ve dual kısımların eşitliği kullanıldığında

$$(a_1^0, a_2^0, a_3^0) = (x_{1D}, x_{2D}, x_{3D}) \times (a_1, a_2, a_3)$$

olur. İkinci taraftaki vektörel çarpım yapılırsa

$$A = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_{1D}(u) & x_{2D}(u) & x_{3D}(u) \\ a_1(u) & a_2(u) & a_3(u) \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= e_1(x_{2D}(u)a_3(u) - x_{3D}(u)a_2(u)) - e_2(x_{1D}(u)a_3(u) - x_{3D}(u)a_1(u)) \\ &\quad + e_3(x_{1D}(u)a_2(u) - x_{2D}(u)a_1(u)) \\ &= e_1(x_{2D}(u)a_3(u) - x_{3D}(u)a_2(u)) + e_2(x_{3D}(u)a_1(u) - x_{1D}(u)a_3(u)) \\ &\quad + e_3(x_{1D}(u)a_2(u) - x_{2D}(u)a_1(u)) \\ &= (x_{2D}(u)a_3(u) - x_{3D}(u)a_2(u), x_{3D}(u)a_1(u) - x_{1D}(u)a_3(u), \\ &\quad x_{1D}(u)a_2(u) - x_{2D}(u)a_1(u)) \end{aligned}$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden

$$a_1^0(u) = x_{2D}(u)a_3(u) - x_{3D}(u)a_2(u) \quad (3.11)$$

$$a_2^0(u) = x_{3D}(u)a_1(u) - x_{1D}(u)a_3(u) \quad (3.12)$$

$$a_3^0(u) = x_{1D}(u)a_2(u) - x_{2D}(u)a_1(u) \quad (3.13)$$

olur. (3.12.) denklemi ile  $a_3$  ve (3.13.) denklemiyle  $a_2$  çarpılırsa

$$\begin{aligned} -a_2^0(u)a_3(u) &= -x_{3D}(u)a_1(u)a_3(u) + x_{1D}(u)a_3^2(u) \\ a_3^0(u)a_2(u) &= x_{1D}(u)a_2^2(u) - x_{2D}(u)a_1(u)a_2(u) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} a_3^0(u)a_2(u) - a_2^0(u)a_3(u) &= x_{1D}(u)a_2^2(u) - x_{2D}(u)a_1(u)a_2(u) \\ &\quad - x_{3D}(u)a_1(u)a_3(u) + x_{1D}(u)a_3^2(u) \end{aligned} \quad (3.14)$$

olur. Ayrıca (3. 9) denkleminde

$$-a_1x_{1D} = a_2x_{2D} + a_3x_{3D}$$

eşitliği (3.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_3^0(u)a_2(u) - a_2^0(u)a_3(u) &= a_2^2(u)x_{1D}(u) + a_3^2(u)x_{1D}(u) + a_1^2(u)x_{1D}(u) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x_{1D} \\ &= x_{1D} \end{aligned}$$

bulunur.  $x_{2D}$  için (3. 11.) denklemi  $a_3$  ile çarpılırsa

$$a_1^0(u)a_3(u) = a_3^2(u)x_{2D}(u) - a_2(u)a_3(u)x_{3D}(u)$$

ve (3.13.) denklemi de  $a_1$ , ile çarpılırsa

$$a_3^0(u)a_1(u) = a_2(u)a_1(u)x_{1D}(u) - a_1^2(u)x_{2D}(u)$$

olur. Taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} a_3(u)a_1^0(u) - a_1(u)a_3^0(u) &= a_3^2(u)x_{2D}(u) - a_2(u)a_3(u)x_{3D}(u) \\ &\quad - a_2(u)a_1(u)x_{1D}(u) + a_1^2(u)x_{2D}(u) \\ &= -a_2(u) [a_3(u)x_{3D}(u) + a_1(u)x_{1D}(u)] \\ &\quad + x_{2D}(u) [a_3^2(u) + a_1^2(u)] \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3. 9) dan

$$-a_2x_{2D} = a_1x_{1D} + a_3x_{3D}$$

ve (3. 10) dan

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_3(u)a_1^0(u) - a_1(u)a_3^0(u) &= a_2^2(u)x_{2D}(u) + x_{2D}(u) [a_3^2(u) + a_1^2(u)] \\ a_3(u)a_1^0(u) - a_1(u)a_3^0(u) &= x_{2D} \end{aligned}$$

elde edilir. Dual birim vektöründen eğrinin her bir noktasına bir yönlü doğru parçası karşılık getirir, bu da  $\mathbb{R}^3$  te regle yüzey oluşturur.  $x_{3D}$  yi elde etmek için (3. 11)  $a_2$  ile ve (3.12)  $a_1$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_1^0(u)a_2(u) &= x_{2D}(u)a_3(u)a_2(u) - x_{3D}(u)a_2^2(u) \\ a_2^0(u)a_1(u) &= x_{3D}(u)a_1^2(u) - x_{1D}(u)a_3(u)a_1(u) \end{aligned}$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} a_1^0(u)a_2(u) - a_2^0(u)a_1(u) &= x_{2D}(u)a_3(u)a_2(u) - x_{3D}(u)a_2^2(u) \\ &\quad - x_{3D}(u)a_1^2(u) + x_{1D}(u)a_3(u)a_1(u) \\ &= a_3(u) [x_{2D}(u)a_2(u) + x_{1D}(u)a_1(u)] \\ &\quad + x_{3D}(u) [-a_2^2(u) - a_1^2(u)] \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa

$$a_1^0(u)a_2(u) - a_2^0(u)a_1(u) = x_{3D}(u)$$

bulunur. Denklemi çözmek için  $OD(u)$  nun koordinatları

$$\begin{aligned} x_{1D}(u) &= a_3^0(u)a_2(u) - a_2^0(u)a_3(u) \\ x_{2D}(u) &= a_3(u)a_1^0(u) - a_1(u)a_3^0(u) \\ x_{3D}(u) &= a_1^0(u)a_2(u) - a_2^0(u)a_1(u) \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde belirlenir. Sonuç olarak  $OD(u)$  dikme ayağının yörüngesinin parametrik denklemi

$$r_D(u) = OD(u) = [x_{1D}(u), x_{2D}(u), x_{3D}(u)] \tag{3.16}$$

şeklinde belirlenir.  $\mathbb{E}^3$  uzayında  $r_D(u)$  yu dayanak eğrilerinden biri olarak ele alıp oluşturulan regle yüzeyin parametrik denklemi  $v \in [v_1, v_2]$  olmak üzere

$$r(u, v) = r_D(u) + va(u)$$

şeklinde gösterilebilir. (3.8) denkleminde anlaşılabileceği üzere,  $l(u)$  doğrusu üzerindeki  $OP(u)$  noktasının herhangi bir pozisyonu için

$$OP(u) \times a(u) = a^0(u)$$

eşitliğine ulaşılabilir. Bu yüzden  $a(u)$ ,  $l(u)$  boyunca serbest bir vektördür.  $l(u)$  üreteç doğrusu üzerindeki  $OP_1(u)$  ve  $OP_2(u)$  noktalarının konumu

$$r_{P_1}(u) = OP_1(u) = OD(u) + \delta_{P_1}(u)a(u) \quad (3.17)$$

$$r_{P_2}(u) = OP_2(u) = OD(u) + \delta_{P_2}(u)a(u) \quad (3.18)$$

şeklinde belirlenir. Burada  $\delta_{P_1}$  ve  $\delta_{P_2}$  doğrunun parametreleridir. Eğer onlar  $a(u)$  nun pozitif yönü boyunca uzanıyorsa değerleri pozitiftir.  $\mathbb{E}^3$  uzayında regle yüzeyin parametrik eşitliğinde  $r_{P_1}(u)$  ve  $r_{P_2}(u)$  iki dayanak eğrisidir.  $r_{P_1}(u)$  ve  $r_{P_2}(u)$  iki dayanak eğrisi yardımıyla temsil edilen regle yüzeyin parametrik denklemi  $u \in [u_1, u_2]$  ve  $v \in [v_1, v_2]$  olmak üzere

$$r(u, v) = r_{P_1}(u) + v[r_{P_2}(u) - r_{P_1}(u)] \quad (3.19)$$

ile ifade edilir. Yukarıdaki tartışmada  $\mathbb{D}^3$  te  $\hat{x} = \hat{x}(u)$  dual eğri denklemi olduğunda regle yüzeyin parametrik denklemi  $\mathbb{E}^3$  uzayında elde edilir. Sonuç olarak, regle yüzey oluşumunun anahtarını dual eğri  $\hat{x}(u)$  oluşturmaktadır.

### ÖRNEK1:

$\mathbb{E}^3$  uzayında bir hiperbolik paraboloid  $x_3 = x_1^2 - x_2^2$  bir regle yüzeydir. Bu  $x_1 + x_2 = ux_3$ , doğrularının ailesi tarafından oluşturulmuştur. Şimdi bu regle yüzeyin iki parametrik noktasını bulalım:  $x_3 = v$  alınırsa

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= uv \\ x_1 - x_2 &= \frac{1}{u} \end{aligned}$$

olur. Burada taraf tarafa toplama yapılırsa

$$\begin{aligned} 2x_1 &= uv + \frac{1}{u} \\ x_1 &= \frac{uv}{2} + \frac{1}{2u} \end{aligned}$$

bulunur. Buna bağı olarak

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2u} + \frac{uv}{2} - \frac{1}{u} \\ &= \frac{u^2v - 1}{2u} \end{aligned}$$

elde edilirse

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{u^2v + 1}{2u}, \frac{u^2v - 1}{2u}, v \right)$$

bulunur. Buna göre  $v = 0$  için.

$$r_{P_1}(u) = P_1 = \left( \frac{1}{2u}, \frac{-1}{2u}, 0 \right)$$

ve  $v = 1$  için

$$r_{P_2}(u) = P_2 = \left( \frac{u^2 + 1}{2u}, \frac{u^2 - 1}{2u}, 1 \right)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} r_{P_2} - r_{P_1} &= \left( \frac{u^2 + 1}{2u} - \frac{1}{2u}, \frac{u^2 - 1}{2u} + \frac{1}{2u}, 1 \right) \\ &= \left( \frac{u^2 + 1 - 1}{2u}, \frac{u^2 - 1 + 1}{2u}, 1 \right) \\ &= \left( \frac{u}{2}, \frac{u}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade birim hale getirilirse

$$a(u) = \frac{1}{\sqrt{2u^2 + 4}}(u, u, 2)$$

elde edilir. Eğrinin parametrik denklemi olan (3.8) de

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}(u) = a(u) + \varepsilon a^0(u) \\ &= a(u) + \varepsilon OP(u) \times a(u) \end{aligned}$$

dur ve

$$a^0 = OP(u) \times a(u)$$

olduğundan vektörel çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} a^0 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2u} & \frac{-1}{2u} & 0 \\ \frac{u}{\sqrt{2u^2+4}} & \frac{u}{\sqrt{2u^2+4}} & \frac{2}{\sqrt{2u^2+4}} \end{vmatrix} \\ &= e_1\left(-\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}\right) - e_2\left(\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}\right) + e_3\left(\frac{1}{2\sqrt{2u^2+4}} + \frac{1}{2\sqrt{2u^2+4}}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}, -\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}, \frac{u}{u\sqrt{2u^2+4}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değer (3.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{x} &= a(u) + \varepsilon a^0(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2u^2+4}}(u, u, 2) + \varepsilon\left(-\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}, -\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}, -\frac{u}{u\sqrt{2u^2+4}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2u^2+4}}(u, u, 2) + \varepsilon\frac{1}{u\sqrt{2u^2+4}}(-1, -1, u) \end{aligned}$$

elde edilir.

### 3.2.2 Regle Yüzeye Dual Dönüşüm Yaklaşımı

Regle yüzeylerin tasarım, üretim ve modellenmesi düşünülürse geleneksel fitting ve interpolasyon yöntemleri iki dayanak eğrisi veya bir dayanak eğrisi ve bir doğrultman ile dual eğri denklemi  $x(u)$  elde edildiğinde önem kazanır. Bütün pratik durumlarda yukarıdaki şartları sağlamak kolay olmaz. Fakat bazı anadoğrulara veya her ana doğruya iki belirlenmiş noktaya ulaşılabilir.

Bu anadoğrular fitting ve interpolasyon yapılarak regle yüzeye ulaşılır. Farz edelim ki,  $\mathbb{E}^3$  uzayında  $n$  tane doğru (veya her doğru üzerindeki iki nokta var).  $l_j$

( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) ve onlara uygun doğrultu vektörleri  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) olsun. Eğer bu doğrular belirli bir regle yüzey oluşturmak için kullanılırsa  $\mathbb{D}^3$  uzayında birim dual küre yüzeyindeki  $n$  doğruyu dönüştürmek için dual dönüşüm teorisi kullanılırsa,  $n$  tane dual dönüşüm noktası  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) elde edilir.  $n$  tane dual dönüşüm noktasından fitting ve interpolasyon yöntemiyle bir dual eğri  $\hat{x}(u)$  belirlenir.

Değişik fitting ve interpolasyon kuralları ve metodları farklı dual eğriler veya farklı regle yüzeylerle sonuçlanacaktır. Genel olarak dual noktaları dual eğrilere fitting ve interpolasyon yapmak için üç metod vardır.

Birincisi (Ravani, ve Roth, 1984) ve (Duffy, 1980) deki amacına ulaşmak için direkt olarak dual küresel analitik teoriye dayanır. İkincisi ise  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki parametrik eğrileri oluşturmak için kullanılan geleneksel fitting ve interpolasyon kurallarını  $\mathbb{D}^3$  uzayındakilere dönüştürmektir (dual uzay teorisine ve dual cebir uygulamalarını hesaplamaya göre ). Polinom spline, parametre spline, B-spline gibi eğrileri oluşturmak ve ananoktaları ayarlamak için birçok spline fonksiyon metodu vardır. (Ahlberg, Nilson, ve Walsh , 1967), (Zha, ve Wang, 1993), (Farin, 1991). Üçüncüsü ise  $\mathbb{E}^3$  uzayında verilen dual noktaları reel ve dual parçalarını sırasıyla fitting ve interpolasyon yapmaktır.

**ÖRNEK 2:** Farz edelim  $\mathbb{E}^3$  uzayında üç ana doğru  $l_1, l_2$  ve  $l_3$  olsun. Bu doğruların denklemi

$$\begin{aligned} l_1 & : x_1 = 10 - 5t_1, & x_2 = 0, & x_3 = 10t_1 \\ l_2 & : x_1 = 5\sqrt{2} - 2, 5\sqrt{2}t_2, & x_2 = 5\sqrt{2} - 2, 5\sqrt{2}t_2, & x_3 = 10t_2 \\ l_3 & : x_1 = 0 & x_2 = 10 - 5t_3 & x_3 = 10t_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

olsun.  $t_1, t_2$  ve  $t_3$ , sırasıyla  $l_1, l_2$  ve  $l_3$  doğrularının parametreleridir.  $l_1, l_2$  ve  $l_3$  doğrularından geçen bir regle yüzey yukarıda bahsi geçen dual dönüşüm metoduyla üretilebilir. Bu üç doğrunun doğrultuları  $a_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) lerdir. ( $d_1, d_2, d_3$ )



doğrultman vektörleri olmak üzere uzayda bir doğrunun parametrik gösterimi

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(d_1, d_2, d_3)$$

şeklindedir. Buna göre

$$l_1 : (x_1, x_2, x_3) = (10, 0, 0) + t_1(-5, 0, 10)$$

$$l_2 : (x_1, x_2, x_3) = (5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 0) + t_2(-2.5\sqrt{2}, -2.5\sqrt{2}, 10)$$

$$l_3 : (x_1, x_2, x_3) = (0, 10, 0) + t_3(0, -5, 10)$$

yazılır. Doğrultman vektörleri sırasıyla  $(-5, 0, 10)$ ,  $(-2.5\sqrt{2}, -2.5\sqrt{2}, 10)$ ,  $(0, -5, 10)$

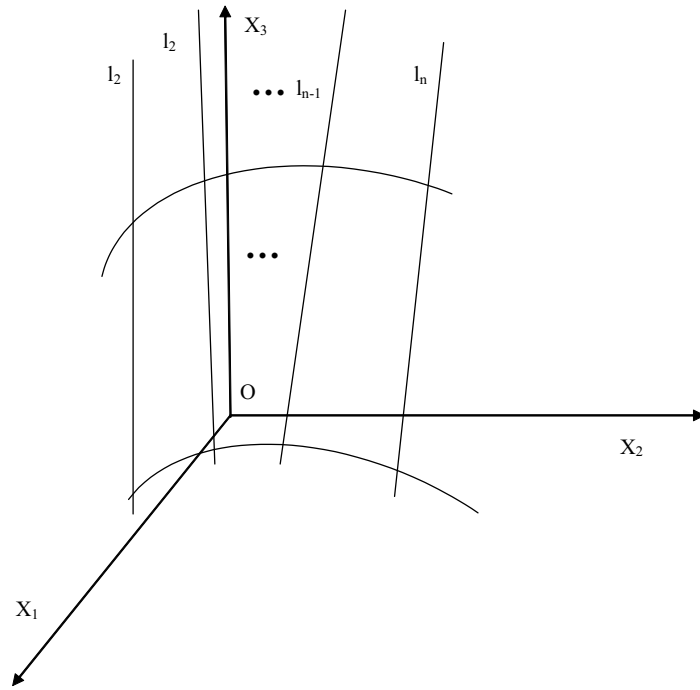
olmalıydı. Ama bunların katıda alınabilir. Buna göre  $t_1 = t_2 = t_3 = 0.08944$  alınırsa

$$l_1 : a_1 = 0.08944(-5, 0, 10) = (-0.4472, 0, 0.8944)$$

$$l_2 : a_2 = 0.08944(-2.5\sqrt{2}, -2.5\sqrt{2}, 10) = (-0.3162, -0.3162, 0.8944)$$

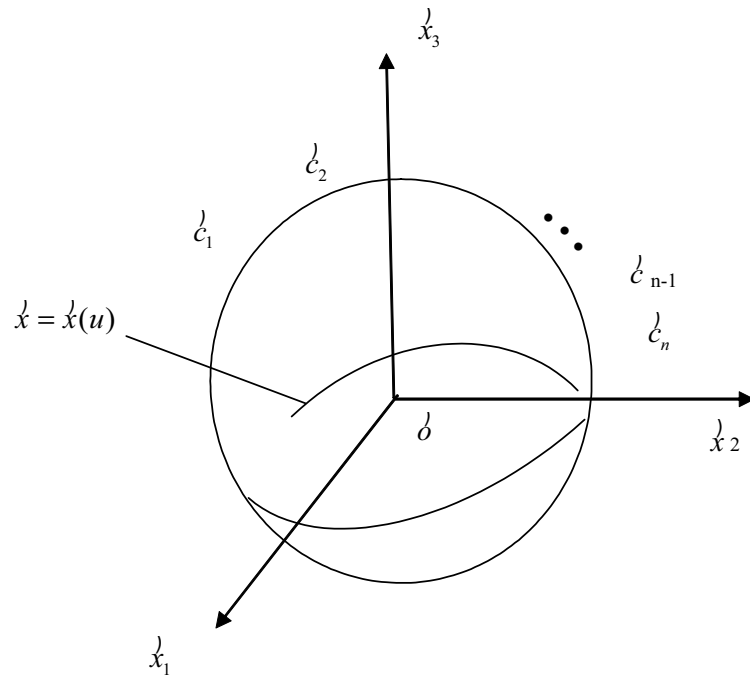
$$l_3 : a_3 = 0.08944(0, -5, 10) = (0, -0.4472, 0.8944)$$

bulunur. Burada  $c_1, c_2, c_3$ ,  $l_1, l_2, l_3$  ve  $a_1, a_2, a_3$  lere dönüşüm yardımıyla karşılık gelen birim dual küredeki dual noktalar olsun. Buna göre  $c_i = a_i + a_i^0$  olduğundan  $a_1^0, a_2^0, a_3^0$  dual kısımların bulması gerekecek. Bir regle yüzey E. Study dönüşümü ile  $E^3$ 'te ve  $\mathbb{D}^3$ 'te sırasıyla



Şekil 3.3 a)  $E^3$  de Regle Yüzeyin Dual Dönüştürme ile üretimi

ve



Şekil 3.3 b)  $\mathbb{D}^3$  de Regle Yüzeyin Dual Dönüştürme ile üretimi

şeklinde gösterilir.

$\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$  dual noktalarından geçen ve dual küre yüzeyi üzerinde bulunan dual eğrinin yay uzunluğu ile verildiğini varsayalım.  $c_1, c_2, c_3$  üzerinde üç nokta

$$\begin{aligned} P_1 &= (10, 0, 0) \\ P_2 &= (5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 0) \\ P_3 &= (0, 10, 0) \end{aligned}$$

olsun. Ayrıca

$$a_1^0 = P_1 \times a_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 10 & 0 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 0.8944 \end{vmatrix} = (0, -8.944, 0)$$

şeklinde bulunur. O halde  $a_1$  ve  $a_1^0$  yerine koyulursa

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= a_1 + \varepsilon a_1^0 \\ &= (-0.4472, 0, 0.8944) + \varepsilon(0, -8.944, 0) \\ &= (-0.4472, -\varepsilon 8.944, 0.8944) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$a_2^0 = P_2 \times a_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 7.07 & 7.07 & 0 \\ -0.3162 & -0.3162 & 0.8944 \end{vmatrix} = (6.325, -6.325, 0)$$

bulunur.  $a_2$  ve  $a_2^0$  1 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{c}_2 &= a_2 + \varepsilon a_2^0 \\ &= (-0.3162, -0.3162, 0.8944) + \varepsilon(6.325, -6.325, 0) \\ &= (-0.3162 + \varepsilon 6.325, -0.3162 - \varepsilon 6.325, 0.8944) \end{aligned}$$

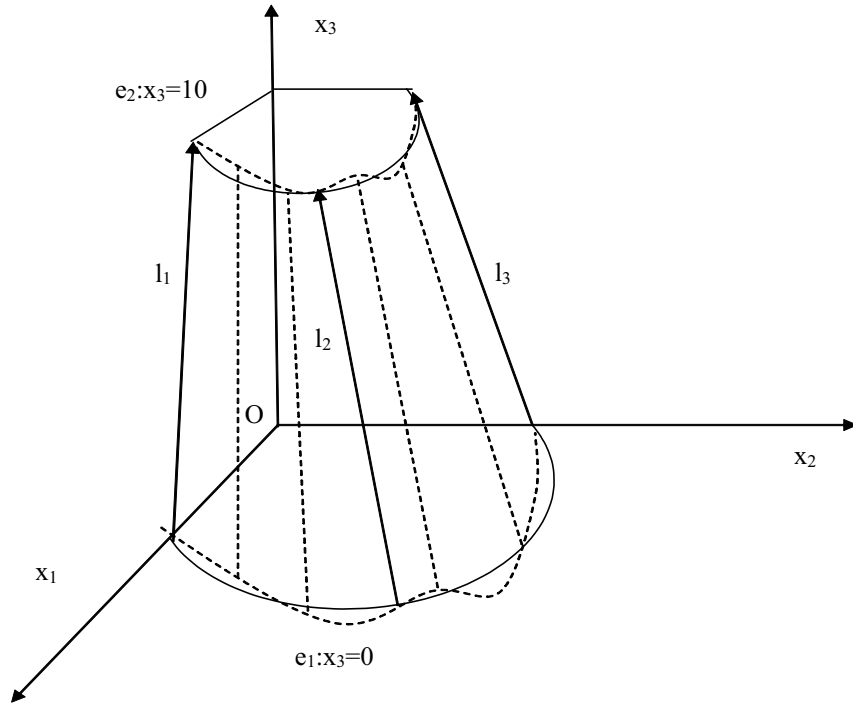
elde edilir. Ayrıca

$$a_3^0 = P_3 \times a_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0.4472 & 0.8944 \end{vmatrix} = (8.944, 0, 0)$$

olur.  $a_3$  ve  $a_3^0$  yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{c}_3 &= a_3 + \varepsilon a_3^0 \\ &= (0, 0.4472, 0.8944) + \varepsilon(8.944, 0, 0) \\ &= (\varepsilon 8.944, 0.4472, 0.8944) \end{aligned}$$

olur.



Şekil 3.4 Dual Dönüşüm üretimi

Buna göre dual eğri

$$a(u) = [-0,4472 \cos(1,571u), -0,4472 \sin(1,571u), 0,8944]$$

ve

$$a^0(u) = [(-0.474 \times 10^{-3}u + 8.944) \sin(1.571u) - 1.05 \times 10^{-3} \cos(1.571u) + 7.2 \times 10^{-4}, \\ -(0.474 \times 10^{-3}u + 8.944) \cos(1.571u) - 1.05 \times 10^{-3} \cos(1.571u) - 2.1 \times 10^{-4}, 0]$$

olmak üzere

$$\hat{x} = \hat{x}(u) = a(u) + \varepsilon a^0(u) \quad (3.21)$$

şeklinde dir. Bu yüzden  $l_1, l_2, l_3$  tarafından üretilen regle yüzey Şekil 3.4 te kesik çizgilerle gösterildiği gibi belirlenebilir. Sırasıyla regle yüzeyi kesen,  $e_1 : x_3 = 0$  ve  $e_2 : x_3 = 10$  ile özel olarak gösterilen düzlemleri kullanarak, Şekil 3.4 deki yörünge üzerinde (iki dayanak eğrisi) birbirine karşılık gelen noktaların koordinatları Tablo 1 de hesaplanmıştır.

$u_i$	$\delta_{1pi}$	$\delta_{2pi}$	$x_{11pi}$	$x_{21pi}$	$x_{31pi}$	$x_{12pi}$	$x_{22pi}$	$x_{32pi}$
0.00	-4.472	6.709	9.999	-2.95x10 <sup>-4</sup>	0	5.001	-2.94x10 <sup>-4</sup>	10
0.10	-4.472	6.709	9.876	1.564	0	4.939	0.782	10
0.20	-4.471	6.709	9.510	3.089	0	4.756	1.545	10
0.30	-4.471	6.709	8.909	4.539	0	4.456	2.270	10
0.40	-4.471	6.709	8.089	5.877	0	4.046	2.939	10
0.50	-4.472	6.709	7.070	7.071	0	3.536	3.536	10
0.60	-4.472	6.709	5.877	8.090	0	2.939	4.045	10
0.70	-4.471	6.709	4.539	8.910	0	2.269	4.455	10
0.80	-4.472	6.709	3.089	9.510	0	1.545	4.756	10
0.90	-4.471	6.709	1.563	9.877	0	0.782	4.939	10
1.00	-4.472	6.709	-1.84x10 <sup>-3</sup>	9.999	0	-8.3x10 <sup>-4</sup>	5.000	10

TABLO 1

### 3.3. Regle Yüzeylerin Bazı Geometrik Problemleri

Bu kısımda, regle yüzey ile ilgili boğaz eğrisi, dağılma parametresi, dayanak eğrisi ve regle yüzeyin alanı gibi bazı geometrik özellikler verilmiştir.

#### 3.3.1. Boğaz Eğrisi

Hesaplanabilir olduğundan ve diferensiyel geometriden bilindiği gibi regle yüzeylerin boğaz eğrileri dayanak eğrisi seçiminden bağımsızdır. Bölüm 3.1 de bulunduğu üzere  $r_D(u) = OD(u)$  doğrultmanların biri olarak seçilebilir. Eğer bu yapılırsa boğaz eğrisi  $r_w(u)$  nun parametrik denklemleri  $a(u) \neq 0$  olmak üzere,

$$v(u) = -\frac{[\langle r'_D(u), a'(u) \rangle]}{[\langle a'(u), a'(u) \rangle]}$$

olduğunda

$$r_w(u) = r_D(u) + v(u).a(u)$$

şeklinde gösterilir.

#### 3.3.2. Dağılma Parametresi

Diferensiyel geometride regle yüzeylerin dağılma parametresinin tanımını taban alırsak doğrultmanın seçiminden bağımsızdır. Bu yüzden dağılma parametresi  $\zeta(u)$

$$\zeta(u) = \frac{[r'_w(u), a(u), a'(u)]}{\langle a'(u), a'(u) \rangle} = \frac{[r'_w(u) \times a(u), a'(u)]}{\langle a'(u), a'(u) \rangle} \quad (3.22)$$

şeklinde açıklanabilir.  $\langle a'(u), a'(u) \rangle$  bir iç çarpım olduğundan

$$[r'_w(u), a(u), a'(u)] = [r'_w(u) \times a(u), a'(u)]$$

üç vektörün vektörel çarpımıdır. Eğer üreteç doğrusu  $l(u)$ 'daki bir noktanın normal vektörü ve boğaz noktasının normal vektörü arasındaki açı  $\theta$  ise

$$\tan \theta = \frac{v(u)}{\xi(u)} \quad (3.23)$$

olur.  $\tan \theta$ ,  $v(u)$  ya oranlanırsa ki bu iki nokta arasındaki uzaklıktır ve oran  $\frac{1}{\xi(u)}$  dur.

### 3.3.3. Bir Karşıt Kesitin Yörüngesi

Bir regle yüzeyin kesitinin yörüngesi, regle yüzeyi kesen bir  $e$  düzleminin kullanılmasıyla oluşturulan bir eğridir. Bunun anlamı parametre  $u$  ya karşılık gelen herhangi bir  $OP(u)$  noktası aynı düzlemedir.  $\mathbb{E}^3$  uzayında  $e$  düzleminin enine kesitinin denklemi  $(A, B, C)$  normal vektör ve

$$OP(u) = [x_{1P}(u), x_{2P}(u), x_{3P}(u)] = r_D(u) + \delta_P(u)a(u) \quad (3.24)$$

olmak üzere

$$e = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

şeklinde. (3.24) deki eşitlikler kullanılırsa

$$A(X_{1D} + \delta a_1) + B(X_{2D} + \delta a_2) + C(X_{3D} + \delta a_3) + D = 0$$

olur. Uygun işlemler yapılırsa

$$AX_{1D} + A\delta a_1 + BX_{2D} + B\delta a_2 + CX_{3D} + C\delta a_3 + D = 0$$

$$AX_{1D} + BX_{2D} + CX_{3D} + \delta(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) + D = 0$$

olur. Buradan,

$$\delta(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3) = -AX_{1D} - BX_{2D} - CX_{3D} - D$$

veya

$$\delta = -\frac{AX_{1D} + BX_{2D} + CX_{3D} + D}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$$

bulunur. Ayrıca  $X_{1D}, X_{2D}, X_{3D}$  nin (3.15) deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\delta = -\frac{[Aa_2a_3^0 + Aa_3a_2^0 + Ba_3a_1^0 - Ba_1a_3^0 + Ca_1a_2^0 - Ca_2a_1^0 + D]}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\delta = -\frac{a_3^0[Aa_2 - Ba_1] + a_2^0[Aa_3 + Ca_1] + a_1^0[Ba_3 - Ca_2] + D}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3} \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu yüzden karşıt kesitin yörüngesinin parametrik denklemi

$$r_c(u) = OD(u) + \delta(u)a(u) \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca  $\delta_P(u)$  (3.25) teki eşitliğin şartlarını sağlamalıdır.

### 3.3.4. Dayanak Eğrisi

Eğer bir regle yüzey bilinen bir dayanak eğrisinden geçiyorsa  $OP(u)$  verilen yörüngede hareket etmelidir. Buda

$$OP(u) = [f_1(u), f_2(u), f_3(u)] \quad (3.27)$$

olarak açıklanmıştır. (3.27) eşitliğinde, (3.17) ifadesi yerine yazılırsa

$$OP(u) = OD(u) + \delta_p(u)a(u)$$

elde edilir. Uygun işlem yapılırsa

$$OP(u) - OD(u) = \delta_p(u)a(u)$$

olur. Her iki taraf  $a(u)$  ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle OP(u) - OD(u), a(u) \rangle = \delta_p(u) &= \delta_p(u) \langle a(u), a(u) \rangle \\ &= \langle OP(u) - OD(u), a(u) \rangle \\ &= a_1(u)f_1(u) + a_2(u)f_2(u) + a_3(u)f_3(u) \end{aligned}$$



ve  $a^0(u) = OP(u) \times a(u)$  olduğundan

$$\begin{aligned} a^0(u) &= OP(u) \times a(u) \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) \\ a_1(u) & a_2(u) & a_3(u) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

yazılır. Determinant hesabı yapılırsa

$$a^0(u) = [f_2(u)a_3(u) - a_2(u)f_3(u), f_1(u)a_3(u) - f_3(u)a_1(u), f_1(u)a_2(u) - f_2(u)a_1(u)] \quad (3.28)$$

elde edilir. Bu durumda  $\hat{x}(u)$  dual eğrinin sadece  $a(u)$  reel kısmı regle yüzeyi oluşturmada planlanmalıdır. Diferensiyel geometride Gauss dönüşümü kullanılarak, bu kolayca gerçekleştirilebilir. Gauss dönüşüm teorisi, regle yüzeyin  $\vec{n}(u)$  birim normal vektörünü yada  $\vec{n}(u) \perp \vec{a}(u)$  olacak şekildeki  $\vec{a}(u)$  doğrultman vektörünü,  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki birim küre üzerindeki bir noktaya dönüştürür. Eğer bir regle yüzey verilen iki doğrultman  $OP_1(u)$  ve  $OP_2(u)$  dan geçiyorsa bunların eşitlikleri

$$OP_1(u) = [f_1(u), f_2(u), f_3(u)] \quad (3.29)$$

ve

$$OP_2(u) = [g_1(u), g_2(u), g_3(u)] \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanır. Dual eğri  $\hat{x}(u) = a(u) + \varepsilon a^0(u)$  için

$$\sigma = \sqrt{[g_1(u) - f_1(u)]^2 + [g_2(u) - f_2(u)]^2 + [g_3(u) - f_3(u)]^2}$$

alınırsa

$$a(u) = \frac{1}{\sigma} [g_1(u) - f_1(u), g_2(u) - f_2(u), g_3(u) - f_3(u)] \quad (3.31)$$

ve

$$\begin{aligned}
a^0(u) &= \frac{1}{\sigma} (OP(u) \times a(u)) \\
&= \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) \\ g_1(u) - f_1(u) & g_2(u) - f_2(u) & g_3(u) - f_3(u) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma} [f_2(u)g_3(u) - f_2(u)f_3(u) - f_3(u)g_2(u) + f_3(u)f_2(u), \\
&\quad -f_1(u)g_3(u) + f_1(u)f_3(u) + f_3(u)g_1(u) - f_3(u)f_1(u), \\
&\quad f_1(u)g_2(u) - f_1(u)f_2(u) - f_2(u)g_1(u) + f_1(u)f_2(u)]
\end{aligned}$$

veya

$$\sigma \cdot a^0(u) = [f_2(u)g_3(u) - f_3(u)g_2(u), f_3(u)g_1(u) - f_1(u)g_3(u), f_1(u)g_2(u) - f_2(u)g_1(u)]$$

koşullarını sağlamalıdır. Bu durumda aynı  $u$  parametresinde iki doğrultman ilgili noktaları,  $\mathbb{E}^3$  uzayındaki regle yüzeyi oluşturmak ve açıklamak için kullanılabilir. Regle yüzeyin eşitliği  $u \in [u_1, u_2]$  ve  $v \in [0, 1]$  olduğunda

$$r(u, v) = f(u) + v [g(u) - f(u)] \quad (3.32)$$

şeklindedir.

### 3.3.5. Regle Yüzeyin Alanı

$r_1(u) = OP_1(u)$  ve  $r_2(u) = OP_2(u)$  iki doğrultman olarak alınırsa regle yüzeyin alanı  $u \in [u_1, u_2]$  ve  $v \in [0, 1]$  olmak üzere

$$A = \int \int_{u,v} \| r_u(u, v) \times r_v(u, v) \| \, du \, dv$$

şeklindedir (Görgülü, 2007). Regle yüzey

$$r(u, v) = r_1(u) + v [r_2(u) - r_1(u)]$$

olarak alındığından  $u$  ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= r_{1u}(u) + v [r_{2u}(u) - r_{1u}(u)] \\ &= r_1(u) + v [r_2(u) - r_1(u)] \end{aligned}$$

ve  $v$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} r_v(u, v) &= 1 \cdot [r_{2u}(u) - r_{1u}(u)] \\ &= [r_{2u}(u) - r_{1u}(u)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre alan

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 dv \int_{u_1}^{u_2} \| r_u(u, v) \| \| r_2(u) - r_1(u) \| du \\ &= \int_0^1 \int_{u_1}^{u_2} \| r_u(u, v) \| |\delta_{p_2}(u) - \delta_{p_1}(u)| du \end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak ifade edilir.

### 3.3.6. Karşılıklı Noktalar

Karşılıklı nokta her iki dayanak eğrisindeki aynı  $u$  parametresi ile iki nokta olarak ifade edilir. Regle yüzey ve onun iki doğrultmanı  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  olarak planladıktan sonra karşılıklı noktaların koordinatlarını belirlemek kolaydır.  $u \in [u_1, u_2]$  olmak üzere

$$P_1 r_1(u) \leftrightarrow P_2 r_2(u)$$

ya da

$$[x_{11}(u), x_{12}(u), x_{13}(u)] \leftrightarrow [x_{21}(u), x_{22}(u), x_{23}(u)]$$

şeklindedir.

### 3.4. En Uygun Regle Yüzey Oluşumu

(3.34) eşitliğinden, bir regle yüzeyin toplam alan değeri  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  dayanak eğrilerinin bir fonksiyoneliidir. Bu yüzden, regle yüzeyin en küçük ya da en büyük değerinin belirlenmesiyle  $u \in [u_1, u_2]$  ve  $v \in [0, 1]$  olduğunda

$$r(u, v) = r_1(u) + v[r_2(u) - r_1(u)] \quad (3.34)$$

şeklinde bulunur. Bir yüzeyin alan formülü

$$F = \iint_{u,v} \| r_u(u, v) \| \| r_v(u, v) \| dudv \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer her iki  $r_1(u) = OP_1(u)$  ve  $r_2(u) = OP_2(u)$  doğrultmanlarıyla sırasıyla  $j$ . ve  $k$ . türev uzay polinom eğrileri olduğu kabul edilirse

$$r_1(u) = OP_1(u) = \left( \sum_{i=0}^j a_{1i}u^i, \sum_{i=0}^j b_{1i}u^i, \sum_{i=0}^j c_{1i}u^i \right) \quad (3.36)$$

şeklinde yazılır.  $u$  ya göre türevi alınırsa

$$r_{1u}(u) = OP_1(u) = \left( \sum_{i=0}^j ia_{1i}u^{i-1}, \sum_{i=0}^j ib_{1i}u^{i-1}, \sum_{i=0}^j ic_{1i}u^{i-1} \right)$$

elde edilir.

$$r_2(u) = OP_2(u) = \left( \sum_{i=0}^k a_{2i}u^i, \sum_{i=0}^k b_{2i}u^i, \sum_{i=0}^k c_{2i}u^i \right) \quad (3.37)$$

ifadesinin  $u$  ya göre türevini alınırsa

$$r_{2u}(u) = \left( \sum_{i=0}^k ia_{2i}u^{i-1}, \sum_{i=0}^k ib_{2i}u^{i-1}, \sum_{i=0}^k ic_{2i}u^{i-1} \right)$$

bulunur. (3.34) eşitliğinin  $u$  ya göre türevi

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= r'_1(u) + v[r'_2(u) - r'_1(u)] \\ &= \sum_{i=0}^j ia_{1i}u^{i-1} + v \left[ \sum_{i=0}^k ia_{2i}u^{i-1} - \sum_{i=0}^j ia_{1i}u^{i-1} \right], \\ &\quad \sum_{i=0}^j ib_{1i}u^{i-1} + v \left[ \sum_{i=0}^k ib_{2i}u^{i-1} - \sum_{i=0}^j ib_{1i}u^{i-1} \right], \\ &\quad \sum_{i=0}^j ic_{1i}u^{i-1} + v \left[ \sum_{i=0}^k ic_{2i}u^{i-1} - \sum_{i=0}^j ic_{1i}u^{i-1} \right] \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin birinci bileşeni  $R_{11}$ , ikinci bileşeni  $R_{12}$  ve üçüncü bileşeni  $R_{13}$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned} R_{11} &= \sum_{i=1}^j ia_{1i}u^{i-1} + v \left[ \sum_{i=1}^k ia_{2i}u^{i-1} - \sum_{i=1}^j ia_{1i}u^{i-1} \right] \\ &= (1-v) \sum_{i=1}^j ia_{1i}u^{i-1} + v \sum_{i=1}^k ia_{2i}u^{i-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_{12} &= \sum_{i=1}^j ib_{1i}u^{i-1} + v \left[ \sum_{i=1}^k ib_{2i}u^{i-1} - \sum_{i=1}^j ib_{1i}u^{i-1} \right] \\ &= (1-v) \sum_{i=1}^j ib_{1i}u^{i-1} + v \sum_{i=1}^k ib_{2i}u^{i-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_{13} &= \sum_{i=1}^j ic_{1i}u^{i-1} + v \left[ \sum_{i=1}^k ic_{2i}u^{i-1} - \sum_{i=1}^j ic_{1i}u^{i-1} \right] \\ &= (1-v) \sum_{i=1}^j ic_{1i}u^{i-1} + v \sum_{i=1}^k ic_{2i}u^{i-1} \end{aligned}$$

yazılır. Ohalde

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= r_2(u) - r_1(u) \\ &= \sum_{i=0}^k a_{2i}u^i - \sum_{i=0}^j a_{1i}u^i, \sum_{i=0}^k b_{2i}u^i - \sum_{i=0}^j b_{1i}u^i, \sum_{i=0}^k c_{2i}u^i - \sum_{i=0}^j c_{1i}u^i \end{aligned}$$

olduğundan

$$R_{21} = \sum_{i=0}^k a_{2i}u^i - \sum_{i=0}^j a_{1i}u^i$$

$$R_{22} = \sum_{i=0}^k b_{2i}u^i - \sum_{i=0}^j b_{1i}u^i$$

$$R_{23} = \sum_{i=0}^k c_{2i}u^i - \sum_{i=0}^j c_{1i}u^i$$

elde edilir. Buradan da

$$\| r_u(u, v) \| = \sqrt{R_{11}^2 + R_{12}^2 + R_{13}^2}$$

$$\| r_v(u, v) \| = \sqrt{R_{21}^2 + R_{22}^2 + R_{23}^2}$$

$$F = \int_0^1 dv \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{R_{11}^2 + R_{12}^2 + R_{13}^2} \sqrt{R_{21}^2 + R_{22}^2 + R_{23}^2} du$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bu şartlar altında  $3 \times (j + k + 2)$  optimum değerler vardır.  $(a_{1i}, b_{1i}, c_{1i})$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, j$ ) ve  $(a_{2i}, b_{2i}, c_{2i})$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ). Eğer bir regle yüzey  $n$  tane anadoğrudan veya iki karşılıklı noktadan oluşturuluyorsa aşağıdaki eşitliklerin eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyellenebilmesi için sınırlamalarda kullanılması beklenir. (3.36) ve (3.37) ifadelerinde  $u$  yerine  $u_m$  yazılırsa

$$r_1(u_m) = OP_1(u_m) = \left( \sum_{i=0}^j a_{1i} u_m^i, \sum_{i=0}^j b_{1i} u_m^i, \sum_{i=0}^j c_{1i} u_m^i \right) \quad (3.38)$$

ve

$$r_2(u_m) = OP_2(u_m) = \left( \sum_{i=0}^k a_{2i} u_m^i, \sum_{i=0}^k b_{2i} u_m^i, \sum_{i=0}^k c_{2i} u_m^i \right) \quad (3.39)$$

bulunur. ( $m = 1, 2, 3, \dots, n$ ).  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  ifadelerinin birinci türevi alınır

$$r_1'(u) = \left( \sum_{i=1}^j i a_{1i} u_m^{i-1}, \sum_{i=1}^j i b_{1i} u_m^{i-1}, \sum_{i=1}^j i c_{1i} u_m^{i-1} \right) \quad (3.40)$$

ve

$$r_2'(u) = \left( \sum_{i=1}^k i a_{2i} u_m^{i-1}, \sum_{i=1}^k i b_{2i} u_m^{i-1}, \sum_{i=1}^k i c_{2i} u_m^{i-1} \right) \quad (3.41)$$

$r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  ifadelerinin ikinci türevi alınır

$$r_1''(u) = \left( \sum_{i=2}^j i(i-1) a_{1i} u_m^{i-2}, \sum_{i=2}^j i(i-1) b_{1i} u_m^{i-2}, \sum_{i=2}^j i(i-1) c_{1i} u_m^{i-2} \right) \quad (3.42)$$

ve

$$r_2''(u) = \left( \sum_{i=2}^k i(i-1) a_{2i} u_m^{i-2}, \sum_{i=2}^k i(i-1) b_{2i} u_m^{i-2}, \sum_{i=2}^k i(i-1) c_{2i} u_m^{i-2} \right) \quad (3.43)$$

elde edilir. Optimum değişkenler veya polinom katsayıları belirlendikten sonra  $a(u)$  ve  $a_0(u)$  ( 3.29) ve ( 3.32) denklemlerinden elde edilebilir ve sonra regle yüzeyi temsil eden dual eğri  $\hat{x}(u)$  da belirlenebilir.

### ÖRNEK 3:

İyileştirme modelini Örnek 2 ye uygula. Kabul edelim ki regle yüzeyin iki dayanak eğrisinin denklemleri  $u$  ya göre 4. dereceden polinomlar olsun. Bunlar

$$r_1(u) = OP_1(u) = \left( \sum_{i=0}^4 a_{1i}u^i, \sum_{i=0}^4 b_{1i}u^i, \sum_{i=0}^4 c_{1i}u^i \right) \quad (3.44)$$

ve

$$r_2(u) = OP_2(u) = \left( \sum_{i=0}^4 a_{2i}u^i, \sum_{i=0}^4 b_{2i}u^i, \sum_{i=0}^4 c_{2i}u^i \right) \quad (3.45)$$

şeklinde gösterilir.

$i$	0	1	2	3	4
$a_{1i}$	10.00	0	-12.34	0	2.538
$b_{1i}$	0	15.71	0	-6.462	0
$c_{1i}$	0	0	0	0	0
$a_{2i}$	5.00	0	-6.17	0	1.27
$b_{2i}$	0	7.85	0	-3.23	0
$c_{2i}$	10.00	0	0	0	0

TABLO 2

Eğer regle yüzeyin doğrultmanları düzlemdeki  $e_1 : x_3 = 0$  ve  $e_2 : x_3 = 10$  olarak belirlenmiş dairesel hareketlerin yörüngeleri ise, bu iki doğrultman en uygun 4. dereceden polinom katsayıları,  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  sırasıyla Tablo 2 de görüldüğü gibi belirlenir. Dahası  $r_1(u)$  ve  $r_2(u)$  sırasıyla

$$r_1(u) = [10.00 - 12.34.u^2 + 2.538u^4, 15.71u - 6.462u^3, 0] \quad (3.46)$$

ve

$$r_2(u) = [5.00 - 6.17u^2 + 1.27u^4, 7.85u - 3.23u^3, 10.00] \quad (3.47)$$

şeklinde yazılabilir. (3.31) ve (3.32) eşitliklerinden dual eğri

$$\hat{x} = \hat{x}(u) = a(u) + \varepsilon a^0(u) \quad (3.48)$$

olmak üzere

$$a(u) = [-0.4472 + 0.5519u^2 - 0.114u^4, -0.7021u + 0.289u^3, 0.8944]$$

ve

$$a^0(u) = [14.051u - 5.779u^3, -8.944 + 11.037u^2 - 2.269u^4, 0]$$

şeklinde yazılabilir.

$u_i$	$\Delta x_{11P_i}$	$\Delta x_{21P_i}$	$\Delta x_{31P_i}$	$\Delta x_{12P_i}$	$\Delta x_{22P_i}$	$\Delta x_{32P_i}$
0.00	9.999	0.000	0	4.999	0	10
0.10	9.876	1.564	0	4.937	0.782	10
0.20	9.510	3.089	0	4.754	1.545	10
0.30	8.909	4.537	0	4.453	2.269	10
0.40	8.089	5.868	0	4.042	2.935	10
0.50	7.069	7.041	0	3.530	3.520	10
0.60	5.877	8.014	0	2.930	4.002	10
0.70	4.545	8.741	0	2.258	4.355	10
0.80	3.116	9.175	0	1.537	4.550	10
0.90	1.645	9.267	0	0.799	4.559	10
1.00	0.196	9.976	0	$8.23 \times 10^{-2}$	4.359	10

TABLO 3

Şekil 3.4 bu en uygun regle yüzeyi üç boyutlu doğrularla gösteriyor. En uygun regle yüzeyin karşılıklı noktaları  $P_1$  ve  $P_2$  koordinatları Tablo 3 te verilmiştir.



Dual görüntüleme üretimi ve optimal üretim ile  $l_1, l_2$  ve  $l_3$  ten geçen regle yüzeyin karşılıklı noktaları  $P_1$  ve  $P_2$  nin koordinat hataları ise Tablo 4 te verilmiştir.

$u_i$	$\Delta x_{11P_i}$	$\Delta x_{21P_i}$	$\Delta x_{31P_i}$	$\Delta x_{12P_i}$	$\Delta x_{22P_i}$	$\Delta x_{32P_i}$
0.00	$9.346 \times 10^{-5}$	0	0	$-1.024 \times 10^{-3}$	0	0
0.10	$5.817 \times 10^{-5}$	0	0	$-1.049 \times 10^{-3}$	0	0
0.20	$4.196 \times 10^{-5}$	0	0	$-1.037 \times 10^{-3}$	0	0
0.30	$1.583 \times 10^{-4}$	0	0	$-9.145 \times 10^{-4}$	0	0
0.40	$8.354 \times 10^{-4}$	0	0	$-4.838 \times 10^{-4}$	0	0
0.50	$3.196 \times 10^{-3}$	0	0	$8.973 \times 10^{-4}$	0	0
0.60	$9.542 \times 10^{-3}$	0	0	$4.182 \times 10^{-4}$	0	0
0.70	$2.398 \times 10^{-2}$	0	0	$1.164 \times 10^{-2}$	0	0
0.80	$5.316 \times 10^{-2}$	0	0	$2.655 \times 10^{-2}$	0	0
0.90	0.1070	0	0	0.0539	0	0
1.00	0.1998	0	0	0.1008	0	0

TABLO 4

### 3.5. Regle Yüzeyin Kullanıldığı Bazı Yerler

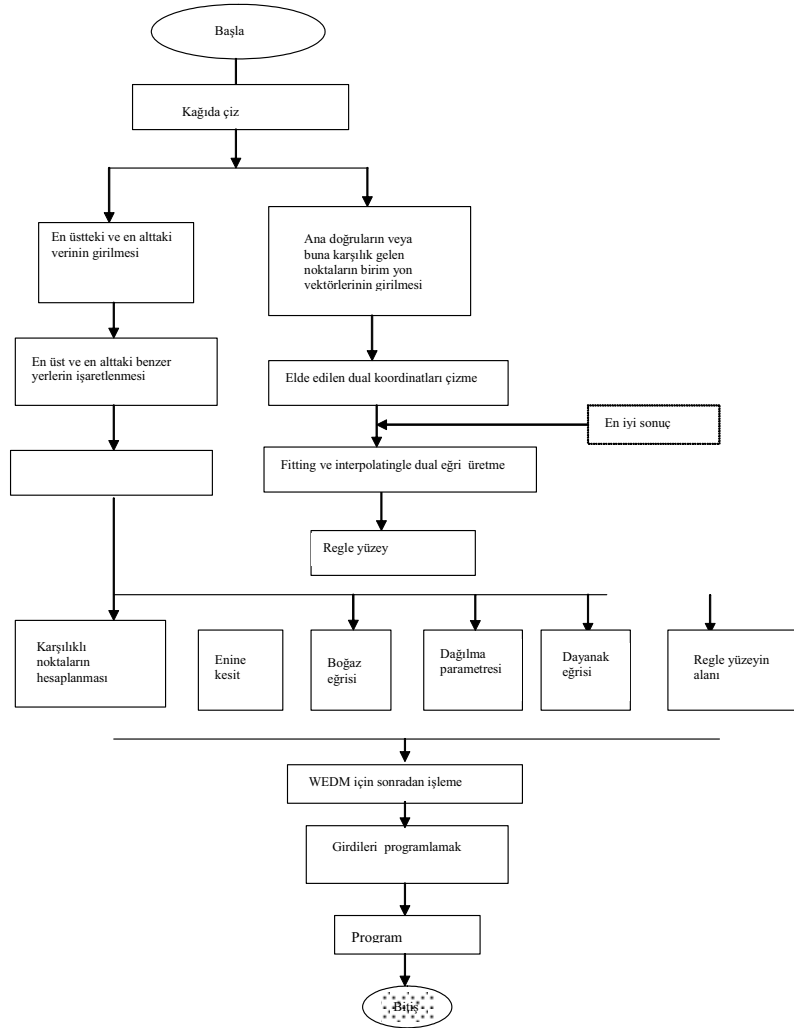
Regle yüzeyler büyük ölçüde matematik ve mühendislikte çalışılmış ve uygulanmıştır. Regle yüzeylerin meydana getirilmesi ve makine ile şekil verilmesi ürünlerin tasarımı ve imalatında ve daha birçok alanda önemli rol oynar. Regle yüzeylerin önerilen üretim metodları için uygulamaları mühendislikte şu şekilde kullanılabilir:

- 1- Eğri ve yüzey sayısal geometri ve diferensiyel geometri
- 2- Ürünlerin CAD/CAM için modellenmesi, tasarımı ve makine ile üretimi.
  - a) Ürün modelleme ve açıklama
  - b) Makine parçalarının ürünlerin görüntüş-şekil tasarımı ve uygulanması

c) Yüzeyleri ve mühendislik hesaplamalarında 3-boyutlu grafiklerini hazırlamak ve iç değerlendirmelerini yapmak ve modellemek,

d) CAD/CAM ve WEDM (Wire Electrical Discharge Machining: Kablolü Elektrikli Deşarj Makinası) için otomatik programlama sistemi

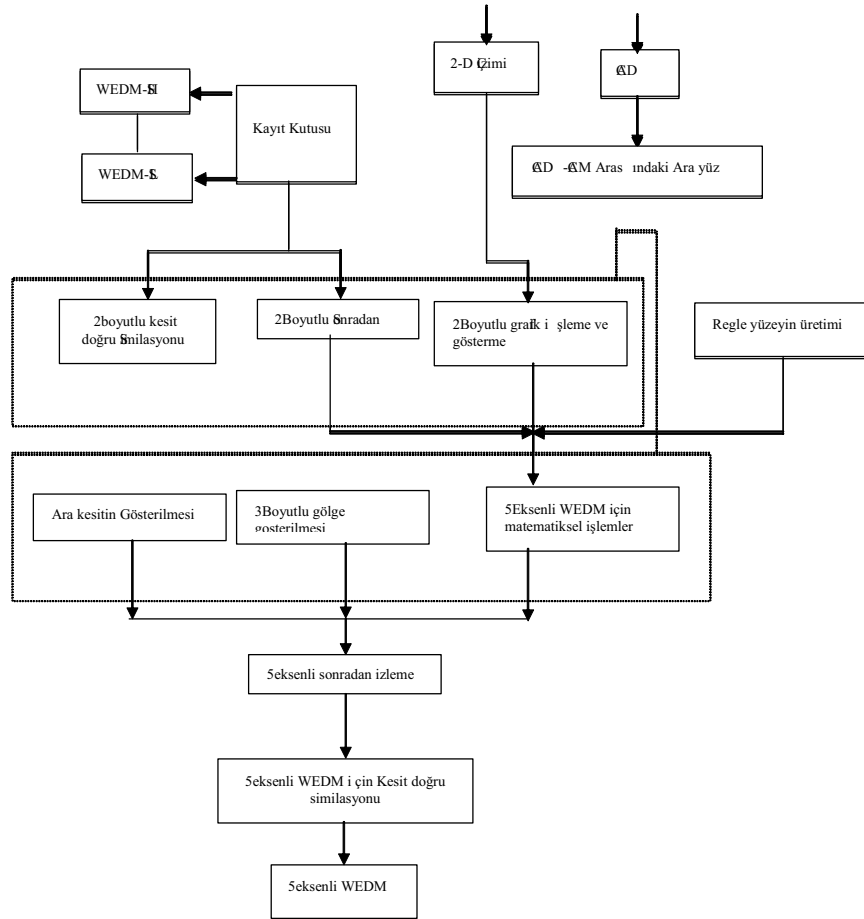
3- 3-boyutlu obje taşıma ve yeniden yapılandırma



Şekil 3.5. WEDM nin Programlama Aşamaları

4- Bilgisayar destekli hareket analizi ve katı cisimlerin hareket similasyonu (örneğin robot idare edicileri, uzay mekanizması)

- a) Regle yüzeyin ilkelerini oluşturmaya dayalı robot idare edicileri için en uygun yörünge planlama,
- b) Dual görüntülemeye dayalı robot idarecileri için yörünge üretimi ve analizi,
- c) Mekanizmaların kinematik geometrisi,
- d) Vida ve vida sistem analizi.



Şekil 3.6. WEDM için CAD/CAM in blok diyagramı

Bu makalede regle yüzeyler için önerilen üretim metodları dayalı olarak, 3-boyutlu

karışık regle yüzeylerin wire-EDM (WEDM) tasarım ve üretimi için bir otomatik programlama çevresi olan CAD/CAM sistemi geliştirilmiştir.

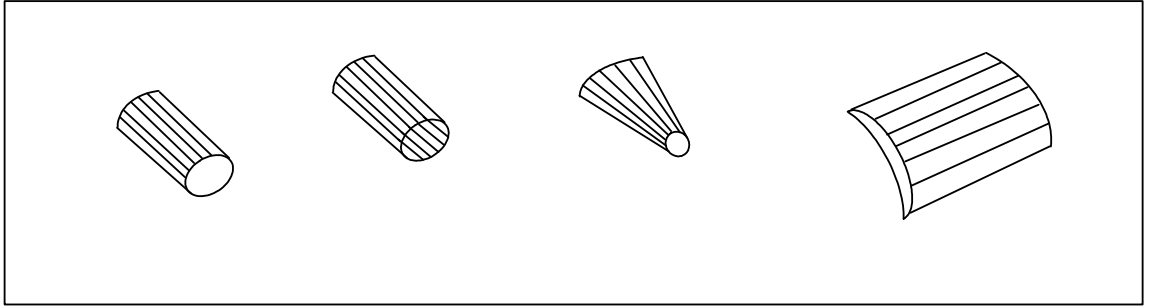
a) Programlama Süreci

WEDM için iki üretim metodunun programlama süreci Şekil 3.5 te gösterilmiştir.

b) Sistem Yapısı

WEDM tarafından karışık regle yüzeyler için geliştirilen CAD / CAM sisteminin yapısı Şekil 3.6 da gösterilmiştir.

Ayrıca, WEDM yüzeyleri olan regle yüzeylerin çeşitli makina parça örnekleri Şekil 3 7 de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Tipik WEDM Yüzeyleri

## Sonuçlar

Bu makalede sunulan metodlar, teorik olarak herhangi bir regle yüzeyin planlama ve en iyileştirilmesi için uygulanabilir, bu aslında regle yüzeylerde Gaussian görüntüleme teorisinin dual uzantısının uygulamasıdır. Bu sayısal ve diferensiyel geometride, CAD / CAM, bilgisayar destekli hareket analizi ve katı cisimlerin simülasyonunda, eğri ve yüzeylerin hazırlanması ve iç değerlendirmesi için mühendislikte geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Regle yüzeylerin üretimi ile ilgili bazı geometrik problemler ayrıntılı olarak tartışılmıştır. WEDM ile, karışık regle yüzeyler için bir otomatik programlama çevresi olan tipik bir CAD / CAM sistem yapısı tanıtılmıştır. Bundan sonraki araştırma çalışmalarında dual ters

görüntüleme ve dual birim küredeki dual eğrinin hazırlama ve iç değeriendirme yapılarak regle yüzeylerin en iyileştirilmiş üretimi yapılması önerilir.

**KAYNAKLAR**

- Zha, X. F., A New Approach to Generation of Ruled Surfaces and its Applications in Engineering, *Int J Adv Manuf Technol* (1997) 13, 155-163.
- Zha, X. F. and Wang, M., Theory of planning generation of ruled surface and its applications in CAD/CAM, Proceedings, 2nd International Conference on Manufacturing Technology, Hong Kong, pp. 253-258, 1993.
- Ravani, B. and Roth, B., Mapping of spatial kinematics, *ASME Journal of Mechanical Transmissions, and Automation in Design*, 106(3), pp. 341-347, 1984
- Ding, Q. L. and Davies, B. J., *Surface Engineering Geometry for Computer Aided Design and Manufacture*, Ellis Horwood, Halsted Press, 1987.
- Gürsoy, O., Some results on closed ruled surfaces and closed space curves, *Mechanism and Machine Theory*, 27(3), pp. 323-330, 1992.
- Kaya R., *Analitik Geometri*, Bilim Teknik Yayınevi, 1996.
- Görgülü, A., *Genel Matematik Diferensiyel ve İntegral Hesap*, Cilt I-II, Eskişehir, 2004.
- Farin, G. (ed.), *NURBS for Curve & Surface Design*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1991.

- Hicks, N.J., Notes on differential geometry, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1974.
- Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2000.
- Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt III, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2004.
- Hacısalihoğlu, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.
- Lu, H. Q. and Sze, T. W. Description of a class of surfaces for 3D recognition, Proceedings, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Shenyang, PR China, pp. 1113-1116, 1988.
- Ahlberg, J. Nilson, E. and Walsh, J. The Theory of Splines and their Applications, Academic Press, 1967.
- Duffy, J. Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators, Wiley, 1980.
- Ekici, C., Bir Kapalı Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları Arasındaki Bağntılar, Anadolu Üniversitesi, 1992.
- Blaschke, W., Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. No. 433, 1949.