$R^3$ de İzoperimetrik Eşitsizlik

Tülay Coşkun

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2008

Isoperimetric Inequality In $R^3$

Tülay Coşkun

**THESIS for MASTER DEGREE**

Department of Mathematics

Ocak 2008

$R^3$ de İzoperimetrik Eşitsizlik

Tülay Coşkun

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Ocak 2008

Tülay Coşkun’ un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “$R^3$ de İzoperimetrik Eşitsizlik” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Naci ÖZER

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Y.Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ............................ tarih ve ...................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı, düzlemdeki izoperimetrik teoremin ispatında yer alan çemberin sahip olduğu özelliğin, üç boyutlu uzaydaki izoperimetrik teoremi ifade ederek küre için geçerli olduğunu göstermeye çalışmaktır.

Tezin birinci ve ikinci bölümlerde, izoperimetrik teoremin tanımı ve tarihçesi verildi. Teorem kısaca şu şekilde ifade edilebilir:

"Aynı çevreye sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir".

Üçüncü bölümde, düzlemde izoperimetrik teoremin bazı farklı ispatları verildi. Buna göre, $L$ düzlemde kapalı bir eğrinin çevresi, $A$ da eğri tarafından çevrelenen bölgenin alanı olmak üzere, $\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$ dir. Eşitlik ancak kapalı eğrinin çember olması durumunda geçerlidir.

Dördüncü bölüm de, Steiner - Simetrileştirme metodunu kullanarak uzayda izoperimetrik teoremin ispatı verildi. Buna göre, $V$ uzay da verilen cismin hacmi, $O$ yüzey alanı olmak üzere $\frac{O^3}{V^2} \geq 36\pi$ dir.

Beşinci bölüm de ise karşılaştırma metodu adını verdiğimiz yöntemle, düzlemde kapalı eğriler için ispat, üç boyutlu uzayda verilmiştir. Özetle, $O_{Küre}, O_A, O_B, O_{Küp}, O_E$ sırasıyla Kürenin, Düzgün Altıgen prizmanın, Düzgün Beşgen prizmanın, Küpün ve Eşkenarüçgen prizmanın yüzey alanları olmak üzere;
diğer taraftan, $V_E, V_{Küp}, V_B, V_A, V_{Küre}$ sırasıyla Eşkenarüçgen prizmanın, Küpün, Düzgün Beşgen prizmanın, Düzgün Altıgen prizmanın, Kürenin hacimleri olmak üzere

$$O_{Küre} < O_A < O_B < O_{Küp} < O_E$$

ve

$$V_E < V_{Küp} < V_B < V_A < V_{Küre}$$

sıralaması vardır.

**Anahtar Kelimeler**: *İzoperimetrik eşitsizlik, İzoperimetrik teorem*.

## SUMMARY

The purpose of this thesis is to discuss the isoperimetric theorem in the three dimensional space. We will consider the circle in the plane and try to find out whether the sphere has the same role in three space.

In the first and second chapter of thesis, we gave the definition and the history of isoperimetric theorem. We can define the theorem as follows:

"Among all planer shapes with the same perimeter the circle has the maximum area ".

In the third chapter, we discussed different proves of the theorem in the plane.

Let $L$ be the perimeter (of a closed ) curve in the plane and $A$ be the area, then $\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$ with equality holds iff the curve is a circle.

In the fourth chapter, we discussed the proof of theorem in surface by Steiner – Symmetrization.

In this case, the theorem can be stated as $\frac{O^3}{V^2} \geq 36\pi$, where $V$ is the volume and $O$ is the surface area of the solid.

Finally, in the fifth chapter, we gave our new proof, named by "*Comparison method*".

As a result, we obtained the following order:

$$O_{Sphere} < O_A < O_B < O_{Cube} < O_E$$

also

$$V_E < V_{Cube} < V_B < V_A < V_{Sphere}$$

where $O_{Sphere}, O_A, O_B, O_{Cube}, O_E$ are the surface area of sphere, hexagonal prism, pentagonal prism, cube, triangular prism, respectively. Also, $V_E, V_{cube}, V_B, V_A, V_{sphere}$ are the volume of triangular prism, cube, pentagonal prism, hexagonal prism, sphere, respectively.


**Keywords**: *Isoperimetric theorem, Isoperimetric inequality*.

# TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın; Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU ve Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ ye teşekkürlerimi sunarım.

Tülay COŞKUN

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

ÖZET ........................................................................................................ v
SUMMARY .................................................................................................. vi
TEŞEKKÜR................................................................................................. vii

1. GİRİŞ ......................................................................................................... 1
2. İZOPERİMETRİK TEOREM İÇİN TEMEL KAVRAMLAR .................................. 4
3. DÜZLEMDE İZOPERİMETRİK TEOREM...…………………………….............. 8
4. UZAYDA İZOPERİMETRİK TEOREM (SİMETRİLEŞTİRME METODU İLE İSPAT) ........................................................................................................ 14
    4.1 Kürenin İzoperimetri Özelliği.................................................................. 14
    4.2 Steiner' in Simetrileştirme İşlemi............................................................. 15
5. UZAYDA İZOPERİMETRİK TEOREM (KARŞILAŞTIRMA METODU İLE İSPAT) ........................................................................................................ 24
    5.1 Geometrik Şekillerin Birbirleri İle Karşılaştırılması ........................................ 39
KAYNAKLAR ........................................................................................... 44

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

İzoperimetrik eşitsizlik oldukça eski bir problemdir. Problem, Grekçe "isos = aynı" , "peri = etrafında" ve "metron = ölçü" ifadelerinden gelir. İzoperimetrik teorem şu şekilde ifade edilebilir.

(a) "*Aynı çevreye sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir"*. Başka bir deyişle:

(b) "*Aynı alana sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en küçük çevreye sahip olan çemberdir*".

Teoremin 3 boyutlu uzayda karşılığını ise aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

(a) "*Aynı yüzey alanına sahip bütün cisimlerden, en büyük hacime sahip olan küredir*"

veya,

(b) "*Aynı hacime sahip bütün cisimlerden, en küçük yüzey alanına sahip olan küredir*".

Maksimum ve minimum problemleri, M.Ö. birçok geometriciler tarafından incelenmiştir. Bunların çoğu gözlemle ortaya çıkan saptamalardır. Örneğin, aşağıdaki problemler ilk bakışta matematiksel görünmese de, gözlemsel olarak ortaya çıkacak sorulardır.

**1**. Hemen hemen bütün ağaç gövdelerinin ve çiçek saplarının dairesel silindir şeklinde olmasının sebebi nedir?

**2**. Havada uçuşan su damlacıkları ve sabun köpüklerinin yaklaşık olarak küresel olmasının nedeni nedir?

**3**. Ren geyiği sürüsünün kurtların hücumlarına karşı bir çember meydana getirmesinin sebebi nedir?

Daha ilk bakışta matematikle ilgili olan problemler de vardır. Mesela,

**1**. Çitle çevireceğimiz bir araziye ne şekil vermeliyiz ki, uzunluğu sabit olan bir çit için en büyük alanı çevrelemiş olalım.

**2**. Silindirik haznenin boyutları, hangi durum da verilen bir yüzey alanı için en büyük hacme sahip olur.

Bu soruların çoğunun temelinde bulunan matematik soruları iki cinstir:

- Belirli bir özelliğe sahip bütün geometrik şekillerden, hangisi EN BÜYÜK alana veya hacme sahiptir?
- Belirli bir özelliğe sahip bütün geometrik şekillerden, hangisi EN KÜÇÜK çevreye veya yüzey alanına sahiptir?

Geniş anlamda her iki probleme de izoperimetri problemleri denir. İzoperimetrik teorem M.Ö.900' lü yıllardan beri bilinmektedir. Prenses Dido'nun hikayesinde teorem ile ilgili bir uygulama bulunmuştur.

Prenses Dido, kocası Sychaeus'un, Tyre kralı Pygmalion (Dido'nun erkek kardeşi) tarafından öldürüldüğünü öğrenince, Tyre'den ayrıldı. Halkı ile birlikte Kuzey Afrika' da bugün Tunus'un olduğu yerde bulunan Carthage'e gitti ve buranın hükümdarı Kral Jambas'dan bir arsa almak istedi. Ancak onlar Dido'nun gücünden korktukları için tüm araziyi alacağını düşündüler. Kral Jambas, Prensese zekice bir teklif sundu. Buna göre, Prensese bir boğa verildi ve bu boğanın derisiyle çevreleyebileceği araziyi alabileceği söylendi.

Kralın zekice olduğunu düşündüğü bu teklifi Prenses kabul etti ve dahiyane bir buluş ile herkesi şaşırtacak bir alan elde etti. Prenses, öncelikle boğanın derisini ince şeritlere böldü. Dido, Akdeniz kıyısını bir doğru kabul ederek elde ettiği şeridi bu doğrunun iki ucuna bağladı ve şeridi yarım çember haline getirdi. Böylece Prenses, alabileceği en büyük alanı elde etti.

Hikayeye göre, Prenses Dido 8 ile 32 hektar ( 1 hek = 10000 $m^2$ ) arası toprak kazandı. Dido, şeridi maksimum alanı kaplayacak şekilde arsaya yerleştirdi ve böylece farkında olmadan izoperimetrik teoremi çözdü (Kocayusufoğlu İ., Ekici C. ve Urfalı E. T, 2006).

Eğer Dido sahil kıyısından uzakta bir alan satın almak isteseydi ne olacaktı? Bu durum da toprağı boğa derisinden elde ettiği şeritle tamamen çevrelemek zorunda kalacaktı. Bu farklı bir izoperimetrik problemdir. Bu durumda daire en iyi şekil olarak ortaya çıkar. Bu oldukça akla yakındır: Daire hiçbir özel yöne doğru eğilimi olmayan çok düzgün, düzenli bir şekildir. Gerçek şu ki daire, geometrik düzlemdeki en iyi bilinen izoperimetrik şekildir. Bununla ilişkili 18. yüzyılda Euler ve 19. yüzyılda Steiner çalışmalar yapmışlardır. 20. yüzyılın başında yaşayan Minkowski bunu titiz bir çalışmayla kanıtlamıştır.

Çevre uzunluğu sabit iken maksimum alanı elde etme problemi, alanı sabit tutarak şeklin çevre uzunluğunu en aza indirmek ile aynıdır. Örneğin, havada yüzen sabun köpüğü üzerinde düşünelim. Köpük bir kez şekillenince, havanın sabit bir hacmini çevreler ve yüzey gerilimi yüzey alanını en aza indirmek için güç uygular. Gerçekte sabun köpüğü küreye işaret eder ve hacmi verilen şekiller içinde küre en küçük yüzey alanına sahiptir (Miller, 2000; Siegel,2003; Kazarinoff, 1963).

Eskişehir, 2008 Tülay Coşkun

# BÖLÜM 2

# İZOPERİMETRİK TEOREM İÇİN TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bazı eşitsizlikler ve onların geometrik yorumunu, aritmetik ve geometrik ortalama teoremlerini vereceğiz.

Şu tahmini göz önünde bulunduralım. Alanı 1 olan bütün dikdörtgenler arasında *kare*, alanı en küçük çevreye sahiptir. Alanı 1 olan uzun, sıska bir dikdörtgenin aynı yüzeye sahip şişman dikdörtgenin çevresinden çok daha büyük bir çevreye sahip olduğu aşikardır. Bu durumda, akla en yakın gelen, en şişman dikdörtgen olması dolayısıyla karenin en küçük çevreye sahip olduğudur.

Bunu şöyle ifade edebiliriz.

Dikdörtgenin alanını 1 kabul ettiğimiz için, uzunluğuna $x$ dersek, genişliği $\frac{1}{x}$, çevresi $2(x+\frac{1}{x})$ olup,

$$x > 0 \qquad \text{için} \qquad 2(x+\frac{1}{x}) \geq 4$$

eşitsizliği her zaman doğrudur.

Bu sonuç, çarpımları 1 olan pozitif iki sayının toplamının, sayıların her ikisininde "1" olması durumunda minimum olduğunu ifade eder. Bu eşitsizliğin genelleştirilmiş hali şudur:

**Teorem 2.1:**

Çarpımları 1 olan $n$ adet pozitif sayının toplamı daima $n$ den büyük veya ona eşittir (eşitlik hali ancak ve ancak bütün sayılar 1 iseler mümkündür). Yani,

$$a_i > 0 \;\; (i = 1, ..., n) \quad \text{ve} \quad a_1 a_2 ... a_n = 1 \quad \text{ise} \quad \sum_1^n a_i \geq n$$

olur (Kazarinoff, 1963).

Bu teoremin geometrik anlamı şudur: $n$ boyutlu bir (dik paralel yüzlü) kutunun hacmi 1 ise, kenarlarının uzunlukları toplamı, şeklin $n$ boyutlu birim küp olması halinde en küçük değere sahiptir.

**Teorem 2.2:**

Belirli bir toplama sahip n pozitif sayının çarpımı bütün bunlar birbirine eşitse en yüksek değere sahiptir. Yani $i = 1, 2, 3, ..., n$ için $a_i > 0$ ise ve $\sum_1^n a_i$ de sabit olup mesela $nA$ ya eşit ise bu takdirde

$$a_1 a_2 a_3 ... a_n \leq A^n$$

olur ve eşitlik hali ancak ve ancak

$$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$$

ise geçerlidir (Kazarinoff, 1963).

Geometrik olarak bu teorem şunu ifade etmektedir. Kenarlarının uzunlukları toplamı aynı olan bütün $n$ boyutlu kutulardan, $n$ boyutlu küp en büyük hacme sahip olandır. Bu teoremin başka bir geometrik ifadesi şudur: Eğer bir doğru parçası belli bir sonlu sayıda parçalara bölünmüşse bunların uzunlukları çarpımı, bütün parçalar birbirine eşitse maksimumdur.

**Tanım 2.1:**

a) $a_{1,} a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sayılarının Aritmetik Ortalaması,

$$(AO) = \frac{a_{1+} a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

b) negatif olmayan $a_{1,} a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sayılarının Geometrik Ortalaması,

$$(GO) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = [\prod_{k=1}^{n} a_k]^{\frac{1}{n}}$$

c) pozitif $a_{1,}a_2, a_3, ..., a_n \in$ R sayılarının Harmonik Ortalaması,

$$(HO) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

d) $a_{1,}a_2, a_3, ..., a_n \in$ R sayılarının Karesel Ortalaması,

$$(KO) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

e) pozitif $a_{1,}a_2, a_3, ..., a_n \in$ R sayılarının Kuvvet Ortalaması ($r$ inci dereceden kuvvet ortalaması , $P(r)$ )

$$P(r) = (\frac{a_1^r + a_2^r + ... + a_n^r}{n})^{\frac{1}{r}} = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^r)^{\frac{1}{r}}, (r \neq 0)$$

olarak tanımlanır (Karakaş-Aliyev, 2003).

**Teorem 2.3 (Jensen eşitsizliği):**

Eğer $[a, b]$ aralığında verilmiş sürekli $f$ fonksiyonunun belirttiği eğri konveks ise, bu takdirde her $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in [a, b]$ ve $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$ koşulunu sağlayan negatif olmayan her $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ için

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + ... + p_nf(x_n) \qquad (1)$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde, eğer $f$ fonksiyonunun belirttiği eğri konkav ise, eşitsizlik tersine döner (Karakaş-Aliyev, 2003).

**Not:** $f$ fonksiyonunu özel olarak seçersek, bazı eşitsizlikleri Jensen eşitsizliğinden "çekmek" mümkündür.

**Teorem 2.4:**

$(HO) \leq (GO) \leq (AO) \leq (KO)$ eşitsizlikleri daima doğrudur (eşitlik durumu yalnız ve yalnız $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ olduğunda mümkündür).

Yukarıdaki eşitsizlikler içinde, aritmetik ortalamalar ve geometrik ortalamalar arasındaki $[(GO) \leq (AO)]$ eşitsizliğini kullanacağız. Şimdi de Jensen eşitsizliğini kullanarak, bu eşitsizliğin ispatını yapalım (Karakaş-Aliyev, 2003).

**İspat:**

$f(x) = lnx$, $p_1 = p_2 = ... = p_n = \dfrac{1}{n}$ alınırsa, (1) eşitsizliğinden her pozitif $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ için

$$ln\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geq \frac{lnx_1 + lnx_2 + ... + lnx_n}{n}$$

elde edilir ve buradan da

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

olur. Bu sonucun eşiti de $AO \geq GO$ eşitsizliğidir.

# BÖLÜM 3

## DÜZLEMDE İZOPERİMETRİK TEOREM

Düzlemde izoperimetrik teoremin birçok farklı ispatı verilmiştir. Bu bölümde ilginç bulduğumuz Hurwitz' ın analitik yöntemi ve Dergiades' in poligon yöntemi ile teoremin ispatını vereceğiz.

İzoperimetrik teorem, genellikle düzlemde kapalı bir eğrinin çevre ve alanını ilişkilendiren bir eşitsizlik ile ifade edilir.

**Teorem 3.1:** $L$ düzlemde kapalı bir eğrinin çevresi, $A$ da eğri tarafından çevrelenen bölgenin alanı olmak üzere,

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

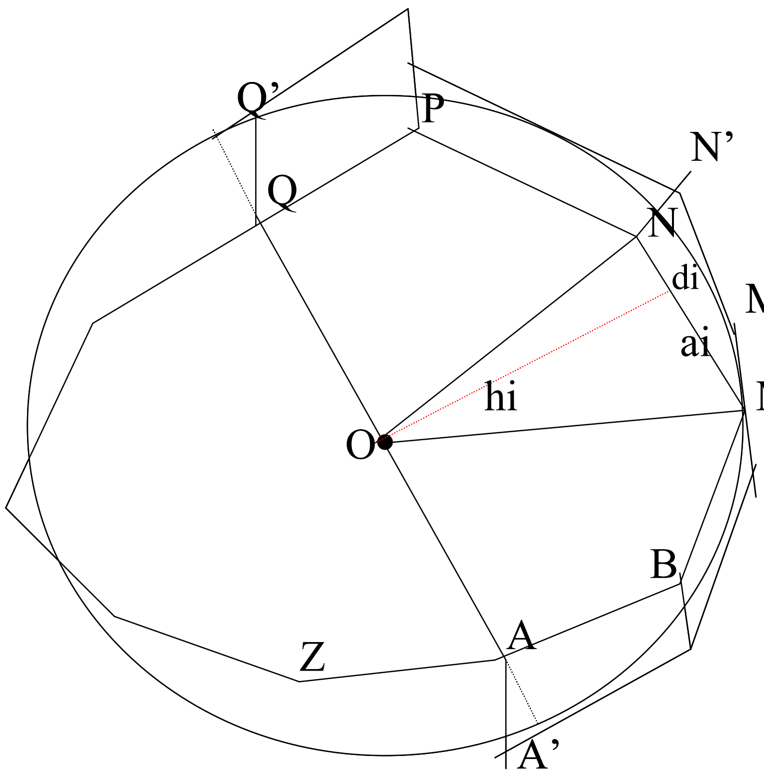
dir. Eşitlik ancak kapalı eğrinin çember olması durumunda geçerlidir (Dergiades, 2002).

**1. İspat:** $ABM...Z$ bir poligon (çokgen) olmak üzere, poligon içindeki $AQ$ doğrusu poligonu öyle iki eşit parçaya böler ki,

$$AB \ + \ BM \ + ... + \ PQ \ = \ \frac{1}{2}$$

$A(ABM...PQA) = A_1$ için $A_1 \geq \dfrac{A}{2}$ dir.

$O$ noktası $AQ$ nun orta noktası, $M$ ise $ABM...PQA$ nın $O$ ya en uzak noktası ve $OM \ = \ R$ olmak üzere $(O, R)$ çemberini çizelim. $A$ ve $Q$ dan $OM$ ye çemberin $A', Q'$ noktalarıyla kesişen dikeyler çizelim.




Şekil 2.1 Poligon Yöntemi

Simetriden dolayı $S = Alan(AA'MQ'QA)$ alanı, çemberin alanının yarısına eşittir. Yani,

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2$$

dir. $ABM...PQ$ çokgeninin dışı çembere değecek şekilde temel kenarları $MN = a_i$ ve diğer kenarlarda $AA'$ ye paralel olacak şekilde paralelkenarlar kurar.

$OMN$ üçgeninin yüksekliği $h_i$ ve $MM'N'N$ paralelkenarının yüksekliği $d_i$ olmak üzere,

$$h_i + d_i = R$$

dir. Ayrıca, $A_1$, $OAB, ..., OMN, ..., OPQ$ üçgenlerinin alanlarının toplamına eşittir. Dolayısıyla,

$$A_1 = \frac{1}{2}\sum_i a_i h_i$$

olur.

$A_2$, paralelkenarların alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_2 \quad = \quad \textstyle\sum_i a_i d_i \quad &= \quad \textstyle\sum_i a_i (R - h_i) \\ &= \quad \textstyle\sum_i a_i R - \sum_i a_i h_i \\ &= \quad R \textstyle\sum a_i - \sum a_i h_i \\ &= \quad R\frac{L}{2} - 2A_1 \end{aligned}$$

bulunur.

$$A_1 + A_2 \geq S$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \quad &\geq \quad \frac{1}{2}\pi R^2 \\ A_2 \quad &= \quad R\frac{L}{2} - 2A_1 \end{aligned}$$

ifadesi yerine konursa,

$$\begin{aligned} A_1 + \; R\frac{L}{2} - 2A_1 \quad &\geq \quad \frac{1}{2}\pi R^2 \\ R\frac{L}{2} - A_1 \quad &\geq \quad \frac{1}{2}\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \pi R^2 - LR + 2A_1 \; \leq \; 0 \\ & \qquad\qquad\quad\;\; \Rightarrow \quad \pi(R - \frac{L}{2\pi})^2 - (\frac{L^2}{4\pi} - 2A_1) \; \leq \; 0 \end{aligned}$$

olur. Burada uygun işlemler yapılır ve $A_1 \geq \dfrac{A}{2}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$L^2 \quad \geq \quad 4\pi 2A_1 \quad \geq \quad 4\pi A$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

bulunur.

Açıkca bu eşitsizlik, çember için eşitliğe dönüştüğünden; "*sabit $P$ çevresine sahip bütün kapalı eğriler içinde en büyük alana sahip olan çemberdir*" sonucuna varılır.

**2. İspat (Hurwitz' in ispatı):**

İzoperimetrik eşitsizliğin modern analitik ispatı 1902 de A. Hurwitz tarafından yapılmıştır. İspat, $R^2$ de bir $D$ bölgesinde $C$ sınırı etrafında (pozitif olarak yönlendirilmiş ) bir doğru integrali ile verilen A alanının formülü kullanılarak yapılmıştır.

Doğru integralleri Riemann toplamlarının alışılmış limiti ile tanımlanmak üzere;

$$A = \int_C xdy = -\int_C ydx = \frac{1}{2}\int_C [xdy - ydx]$$

dir.

Basit bir $C$ eğrisini, $a \leq t \leq b$ olmak üzere;

$$C : x = x(t), y = y(t)$$

ile parametrelendirirsek;

$$\int_C xdy = \int_a^b x(t)y^{'}(t)dt$$

$$\int_C ydx = \int_a^b y(t)x^{'}(t)dt$$

elde ederiz.

$V = (V^1, V^2)$ , iken;

$$divV(\overleftrightarrow{x}, y) = V_x^1 + V_y^2$$

$\overrightarrow{n}$ , $C$ ye dış birim normal ve $s$ yay uzunluğu olmak üzere, Divergence teoreminden $A$ alanı için formüller aşağıdaki gibidir;

$$\int_D divV(\overrightarrow{x}, y)dxdy = \int_C \overrightarrow{V}.\overrightarrow{n}ds$$

$V = (x, y)$ seçersek $div\overrightarrow{V} = 2$ olur.

$C$ için parametreler;

$$\overrightarrow{n} = \frac{(y'(t), -x^{'}(t))}{\sqrt{x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2}}$$

ve

$$ds = \sqrt{x^{'}(t)^2 + y^{'}(t)^2}dt$$

olmak üzere $A$ için formüller kolayca çıkarılabilir.

Hurwitz' in ispatında Wirtinger' in Eşitsizliği olarak bilinen ünlü eşitsizlik de kullanılmıştır.

**Lemma 1:** $f(t)$, $2\pi$ periyotlu sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$$

olsun. O zaman

$$f(t) = a\cos t + b\sin t$$

olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} f^{'}(t)dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$$

dir.

**İspat:** $f(t)$ yi Fourier serilerine genişletirsek;

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

( averaj 0 olduğundan $\frac{1}{2}a_0$, 0 dır.)

O halde

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

dir.

Porseval' ın formülünden,

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

dir.

Buradan, her $n > 1$ için, $a_n = b_n = 0$ olmadıkça;

$$\int_0^{2\pi} (f'(t)^2 f(t)^2) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2)$$

kesinlikle pozitiftir. Bu ise Lemmayı ispatlar.

Sadeleştirmek için $C$ nin $L$ uzunluğunu $2\pi$ kabul edelim. $C$ yi çevirerek;

$$\int_0^{2\pi} x(t) ds = 0$$

olduğunu da kabul edebiliriz. O zaman

$$2\pi = \int_0^{2\pi} ((x')^2 + (y')^2) ds$$

ve

$$A = \int_0^{2\pi} x(s) y'(s) ds$$

dir.

Buradan;

$$\begin{aligned} 2(\pi - A) &= \textstyle\int_0^{2\pi} ((x')^2 - 2xy' + (y')^2) ds \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} ((x')^2 - x^2)) ds + \int_0^{2\pi} (x - y')^2 ds \end{aligned}$$

elde edilir.

İlk integral Lemma 1 den dolayı negatif değildir. Açıkça ikinci integral de negatif değildir.

Buradan;

$$4\pi A \leq (2\pi)^2 = L^2$$

izoperimetrik eşitsizliği elde edilir.

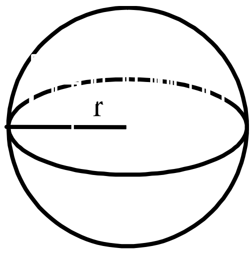
# BÖLÜM 4

# UZAYDA İZOPERİMETRİK TEOREM (SİMETRİLEŞTİRME METODU İLE İSPAT)

Uzayda izoperimetrik teoremin bazı farklı ispatları verilmiştir. Bu bölümde teoremin ispatına yönelik Steiner' in simetrileştirme işlemi ve Wilhelm Gross' un yakınsaklık yöntemini vereceğiz.

## 4.1 Kürenin İzoperimetri Özelliği

Düzlemde çemberin izoperimetri özeliğine uzayda karşılık olarak *"aynı yüzey alanına sahip cisimler (kapalı yüzeyler) arasında en büyük hacme sahip olan küredir"* veya bir başka ifadeyle *"aynı hacme sahip cisimler arasında en küçük yüzey alanına sahip olan küredir"* şeklinde ifade edebiliriz.




$r$ **yarıçaplı küre**

Kürenin hacminin $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, yüzey alanının $O = 4\pi r^2$ olduğu hatırlanırsa, hacim ile yüzey alanı arasında aşağıdaki bağıntıyı kolayca elde ederiz.

$$V^2 = \frac{16\pi^2 r^6}{9} \Rightarrow 36\pi V^2 = 64\pi^3 r^6 = O^3$$

olup, buradan

$$\frac{O^3}{V^2} = 36\pi$$

elde edilir. Küre için geçerli olan bu eşitlik, küre dışındaki oval yüzeyler için genelleştirilirse,

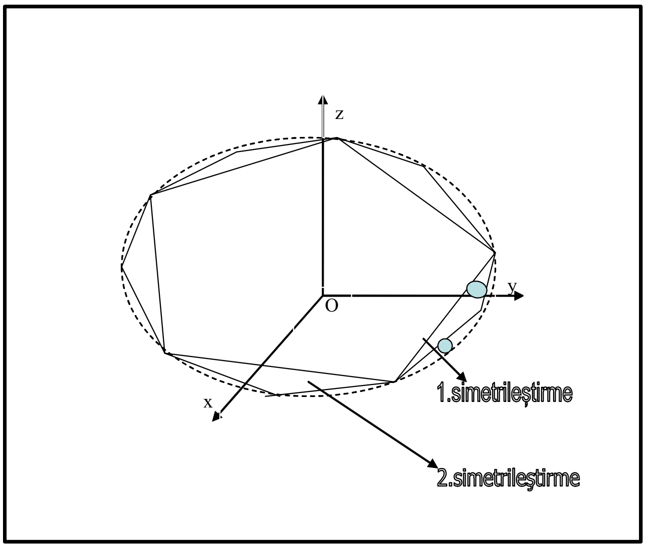
$$\frac{O^3}{V^2} \geq 36\pi$$

eşitsizliği elde edilir. Buna uzayda izoperimetrik eşitsizlik adı verilir.

Bu eşitsizliği bir teorem ile vermeden önce, ispatında kullanacağımız Steiner' in simetrileştirme işleminden bahsedelim.

### 4.2 Steiner' in Simetrileştirme İşlemi

Steiner  düzlem de maksimal şekillerin (maksimum alan ve maksimum çevreli şekillerin), çevrelerini iki eşit parçaya bölen her doğruya göre simetrik olduğunu ispatlamıştır. Uzayda da, Steiner' in simetrileştirme metodu ile her oval yüzey, yine bir düzgün oval yüzeye dönüştürülür. Oval yüzeye uygulanan simetrileştirme işlemi ile aynı hacime fakat daha küçük yüzey alanına sahip yeni bir oval şekil elde ederiz (Şekil 3.1). Bundan sonra bu yeni şekli, ilk şeklin yüzey alanına eşit bir yüzey alanı elde edinceye kadar büyütürüz.




Şekil 3.1

Eğer şekil her doğrultu da bir simetri eksenine sahip değilse aynı yüzey alanına sahip şekiller arasında maksimum hacminden söz edemeyiz. Bu durum maksimum şekil olarak küreyi işaret eder. Yeni elde edilen cismin, ilk yüzeyin simetrileştirme doğrultusuna dik bir simetri düzlemine sahip olması halinde, oval yüzeyin yüzey alanına eşit olur. Bu durum ispat gerektirmez.

**Teorem 4.1 (Uzayda izoperimetrik teorem):**

$V$ uzay da verilen cismin hacmi, $O$ yüzey alanı olmak üzere

$$\frac{O^3}{V^2} \geq 36\pi$$

dir ( Blaschke, 1949).

**İspat :** Teoremi Wilhelm Gross' un yakınsaklık yöntemini kullanarak ispatlayacağız.

Buna göre, her $F$ oval yüzeyi yeteri kadar $n-$sayıda simetrileştirme işlemi ile aynı hacime sahip yeni bir $F_n$ oval yüzeyine dönüştürülebilir. $F_n$ oval yüzeyinin $O_n$ yüzey alanı, $F$ oval yüzeyi ile aynı hacime sahip $K$ küresinin, $O_K$ yüzey alanından farkı çok az küçük olsun. Oval yüzeyin yüzey alanı ile $K$ küresinin yüzey alanı arasında Steiner' in simetrileştirme işlemine göre, şunlar geçerlidir.

$O$, $F$ nin yüzey alanı; $O_n$, $F_n$ oval yüzeyinin alanı ve $O_K$, $K$ küresinin yüzey alanı olmak üzere,

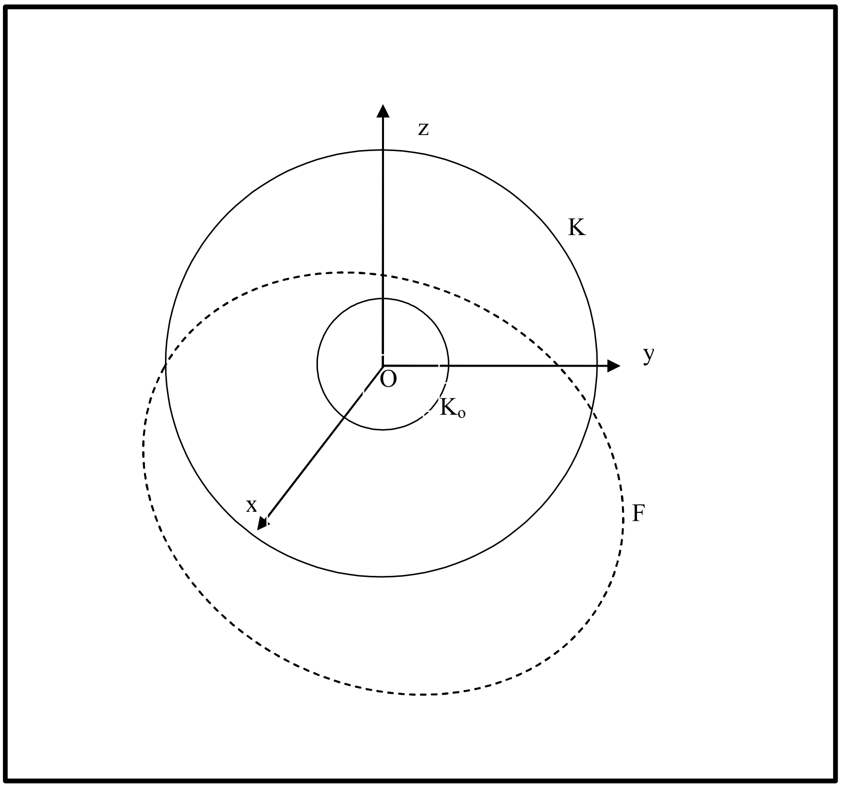
$$i) \quad O \geq O_n$$

$$ii) \quad \lim O_n = O_K$$

olup sonucun,

$$iii) \quad O \geq O_K$$

olduğunu göstereceğiz.

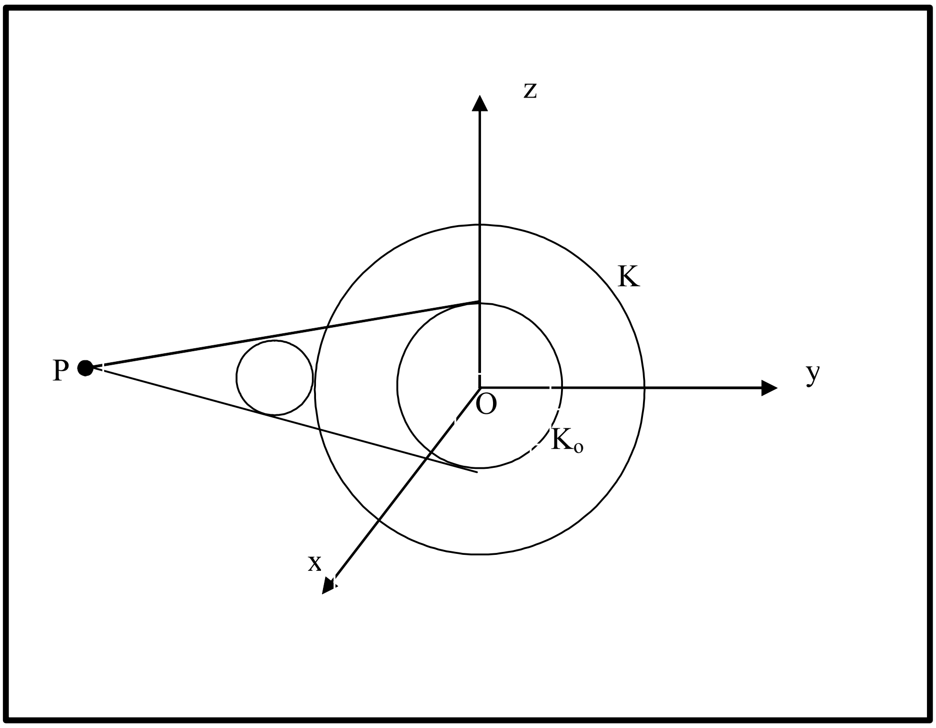



Şekil 3.2

$F$ nin içinde bir $O$ noktası alalım ve $O$ merkez olmak üzere iki küre gözönüne alalım. Bu kürelerden biri $F$ nin içinde bulunan $K_o$ küresi, diğeri ise $F$ ye hacim olarak eşit olan $K$ küresi olsun.

$K$ küresinin içinde, $F$ nin dışında kalan kısmının hacmini $\varphi$ ile gösterelim. $F$ ile $K$ aynı hacimli olduklarından, $F$ nin içinde $K$ küresinin dışında bulunan kısmının hacmide $\varphi$ dir.

$\varphi > 0$ için $\phi > 0$ olacak şekilde $\phi(\varphi)$ sürekli fonksiyonu verilsin. O zaman $K_o$ küresini içini alan ve $F$ ye hacim itibariyle eşit olan $K$ küresinden, $\varphi$ kadar dışarı çıkan her $F$ oval yüzeyine karşılık, $\phi$ hacmine sahip $S$ ve $S'$ gibi iki küre bulunabilir. Bunlardan $S$ küresi "$K$ nın dışında - $F$ nin içinde", diğer $S'$ küresi ise "$K$ nın içinde -$F$ nin dışında" olsun (Blaschke, 1949).




Şekil 3.3

$O$ merkezine sahip ($K$ dan büyük) öyle bir küre gözönüne getirelim ki, bunun $K$ ile meydana getirdiği aralığın hacmi $\varphi$ olsun. Bu yeni küre ($\overline{K}$), $K$ ya hacimce eşit olan $F$ nin tamamen dışında değildir. ($\overline{K}$) yeni küre yüzeyinde, $F$ nin içinde olmak üzere bir $P$ noktası vardır. Bir taraftan $K$ ya dıştan değen, diğer taraftan tepesi $P$ de olup $K_o$ küresine değen, koniye içten teğet olan küreyi çizelim.

$F$ nin içinde bulunan bu yeni kürenin hacmi $\phi_1(\varphi)$ olsun. $O$ merkezine sahip olup $K$ nın içinde bulunan ve $K$ ile arasında kalan kısmın hacmi $\varphi$ olacak şekilde yeni bir $\overline{K_o}$ küresi oluşturalım. Bu küre $K_o$ küresine göre daha büyük olacak ve $F$ nin dışına çıkacaktır. Bundan dolayı bu ara kısımda ($K$ ile $\overline{K_o}$ arası) her iki küreye teğet olan ve $F$ nin dışında bulunan bir küre bulabiliriz ($\overline{S}$ ile gösterelim).

$\overline{S}$ nin hacmi $\phi_2(\varphi)$ olsun. Bu $\overline{S}$ küresinin merkezini, $F$ nin üzerinde olup, $O$ ya en yakın bulunan noktayı $O$ ile birleştiren doğru üzerinde seçebiliriz. Bu şekilde tarif edilen $\phi_1(\varphi)$, $\phi_2(\varphi)$ fonksiyonları elemanter olarak hesaplanabilir. Bu fonksiyonlar sürekli ve pozitiftir.

Bunların en küçüğü olan,

$\phi(\varphi) = \frac{1}{2}[\phi_1(\varphi) + \phi_2(\varphi)] - \frac{1}{2} \mid \phi_1(\varphi) - \phi_2(\varphi) \mid$ özeliğine sahiptir. $\varphi$ nin büyümesi ile $S$, $S'$ küreleri de büyüyeceğinden $\phi(\varphi)$ fonksiyonu monoton olarak artar.

$F$ yi simetrileştirme işlemi ile $F_1$ oval yüzeyi haline dönüştürelim. Simetrileştirme doğrultusu ( $x_3$ doğrultusu) $S$ ve $S'$ kürelerinin merkezlerini birleştiren doğrununki ile aynı olsun ve simetri düzlemi ($x_3 = 0$ ) $O$ dan geçsin.

Bu takdirde $F_1$ yine eski $K_o$ küresini içinde bulundurur. $F_1$ in aynı hacme sahip olan $K$ küresinin dışında bulunan kısmının $\varphi_1$ hacmini şu şekilde yazabiliriz.

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi - \phi(\varphi)$$

şartını gerçekler, çünkü simetrileştirmede bütün $S$ küresi $K$ nın içinde yer alır. Bu metodu şimdi eski $K_o$ ve $K$ kürelerini kullanarak yeniden $F_1$ yüzeyine uygulayabiliriz. Yeni $F_2$ oval yüzeyinin $K$ nın dışında bulunan kısmının $\varphi_2$ hacmi için,

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 - \phi(\varphi_1)$$

bağıntısı geçerli olur. Böylece devam edelim. $\phi(\varphi)$ fonksiyonunun monoton artan olduğu kullanılırsa,

1. simetrileştirmeden,

$$\varphi - \varphi_1 \geq \phi(\varphi)$$

2. simetrileştirmeden,

$$\varphi_1 - \varphi_2 \geq \phi(\varphi_1)$$

$n$. simetrileştirme sonunda,

$$\varphi_{n-1} - \varphi_n \geq \phi(\varphi_{n-1})$$

elde edilir. Buradaki eşitsizliklerden bir tek eşitlik elde edelim.

1. ve 2. simetrileştirmeden elde edilen,

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_1 &\geq \phi(\varphi) \\ \varphi_1 - \varphi_2 &\geq \phi(\varphi_1) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\varphi - \varphi_2 \geq \phi(\varphi) + \phi(\varphi_1)$$

bulunur. Bu durumda,

**a)** $\phi(\varphi) \geq \phi(\varphi_1)$ olduğundan (simetrileştirme sonucu $\varphi_1 < \varphi$ olacağından, $\varphi_1$ içine yerleşecek $S$ küresi de $S_1$ şeklinde adlandırılacaktır. $S_1$ in hacmi $S$ nin hacminden küçük kalır),

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_2 &\geq \phi(\varphi_1) + \phi(\varphi_1) \\ \varphi - \varphi_2 &\geq 2\phi(\varphi_1) \end{aligned}$$

olur.

**b)** $\phi(\varphi_1) \geq \phi(\varphi_2)$ olduğundan,

$$\varphi - \varphi_2 \geq 2\phi(\varphi_2)$$

elde edilir. Bu eşitsizliği genellemek istersek, $n$ defa simetrileştirme için,

$$\varphi - \varphi_n \geq n\phi(\varphi_n)$$

veya

$$n \leq \frac{\varphi - \varphi_n}{\phi(\varphi_n)} < \frac{\varphi}{\phi(\varphi_n)}$$

bulunur.

Şu halde $n$ defa simetrileştirme işleminden sonra elde edilen oval yüzeyin, aynı hacime sahip $K$ küresinden ancak $\varepsilon$ kadar dışarı taşması istenirse simetri işleminin,

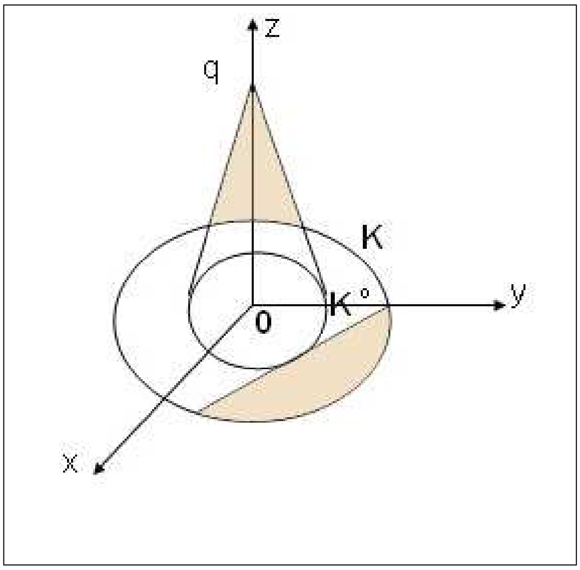
$$n \quad < \quad \frac{\varphi}{\phi(\varepsilon)}$$

defa tekrarı yeterlidir.

$K$ nın $F$ nin dışında kalan kısmı $\varepsilon$ olarak alınsın.

Bu şekilde metodumuzun yakınsaklığına dair tam bir fikir elde etmiş olur ve $F$ ye hacimce eşit olan bir $F_n$ oval yüzeyi buluruz ki; bunun yüzey alanı aynı hacime sahip $K$ küresinin yüzey alanından istenildiği kadar küçük bir miktar fark etsin.

Bunu şu şekilde tespit edebiliriz (Şekil 3.4).




Şekil 3.4

$O$ merkezine sahip öyle bir $K^{\star}$ küresi çizelim. Bu kürenin teğet düzlemleri, $K$ dan hacmi $\varepsilon$ olan bir uzay parçası ayırsın. Bu takdirde $K^{\star}$ muhakkak $F_n$

nin içindedir. Bundan başka $K$ nın dışında öyle bir $Q$ noktası arayalım ki, tepesi $Q$ de olup $K^\star$ a değen koni ile $K$ nın sınırladığı cisim $\varepsilon$ hacmine sahip olsun. Bu takdirde merkezi $O$ olan ve $Q$ dan geçen $K^{\star\star}$ küresi muhakkak $F_n$ in dışında bulunur (daima $F_n$ nin $K$ dan $\varepsilon$ kadar taştığını kabul ediyoruz). Buna göre,

$$K^\star < F_n < K^{\star\star}$$

veya

$$K^\star < K < K^{\star\star}$$

yazılır. Bu şartları sağlayan oval cisimlerin, yüzey alanları arasındaki

$$O^\star < O_n < O^{\star\star}$$

bağıntısından,

$$O^{\star\star} > O_k > O^\star$$

olur. Bu eşitsizlikler de

$$O^{\star\star} - O^\star > O_k - O_n > O^\star - O^{\star\star}$$

şeklinde yazılır. Düzenlersek,

$$|O_k - O_n| < O^{\star\star} - O^\star$$

elde edilir. Simetrileştirme işlemi kürenin içinde kalır, bu yüzden,

$$O > O^\star$$

dır. $K^\star$ küresi için 1. simetrileştirme sonucunda,

$$36\pi (V^\star)^2 = (O^\star)^3$$

geçerlidir.

Buradan simetrileştirme sonucunda hacim aynı kalıp, yüzey alanı küçüleceğinden,

$$36\pi(V^{\star})^2 < O^3$$

yazılabilir.

$$V = V^{\star}$$

olduğundan,

$$36\pi V^2 < O^3$$

dır. Sonuç olarak, bir oval yüzeyin $V$ hacmi ile $O$ yüzey alanı arasında,

$$0 < O^3 - 36\pi V^2$$

bağıntısı elde edilir. Eşitlik durumu oval yüzeyin küre olması durumunda geçerlidir. Dolayısıyla

$$\frac{O^3}{V^2} \geq 36\pi$$

bulunur.

# BÖLÜM 5

# UZAYDA İZOPERİMETRİK TEOREM

# (KARŞILAŞTIRMA METODU İLE İSPAT)

Bu bölümde, uzayda izoperimetrik teoreminin ispatını, farklı ve yeni ispatlama yöntemi ile adına "karşılaştırma metodu" dediğimiz yöntemle vereceğiz. Kısaca eşkenar üçgen dik prizma, küp, dikdörtgenler prizması, düzgün beşgen dik prizma ve düzgün altıgen dik prizma ile kürenin karşılaştırmasını yapacağız.

**Teorem 5.1(Uzayda izoperimetrik teorem):**

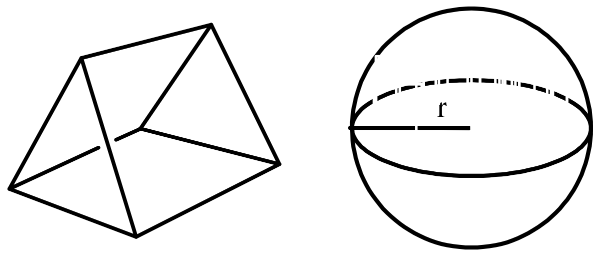
(1) *Uzayda yüzey alanları eşit kapalı cisimler içerisinde küre en büyük hacme sahiptir.*

(2) *Uzayda hacimleri eşit kapalı cisimler içerisinde küre en küçük yüzey alanına sahiptir.*

**İspat:** İspatı aşağıda karşılaştırmalar adı altında ayrı ayrı inceleyerek verdik.

**Karşılaştırma 5.1 (Eşkenar üçgen dik prizma - Küre)**

Eşkenar üçgen dik prizma ile kürenin yüzey alanları eşit olsun. Kürenin hacminin, eşkenar üçgen dik prizmanın hacminden büyük olduğunu gösterelim.




Şekil 5.1 Eşkenar üçgen dik prizma-Küre

Eşkenar üçgen dik prizmanın taban ayrıtı $a$, yüksekliği $h$; kürenin yarıçapı $r$ olsun. Yüzey alanları da,

$$O(E) = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah$$

ve

$$O(K) = 4\pi r^2$$

dir. $O(E) = O(K)$ alınırsa,

$$r^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{3ah}{4\pi}$$

veya

$$r^2 = \frac{a^2\sqrt{3} + 6ah}{8\pi}$$

elde edilir.

Şimdi hacimleri karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} V(K) - V(E) &= \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h \\ &= [\frac{4\pi}{3}(\frac{a^2\sqrt{3} + 6ah}{8\pi})\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3} + 6ah}{8\pi}}] - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h \end{aligned}$$

olur. Hacimlerin kareleri de,

$$\begin{aligned} V^2(K) - V^2(E) &= \frac{16\pi^2}{9}(\frac{a^2\sqrt{3} + 6ah}{8\pi})^3 - (\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h)^2 \\ &= \frac{16[a(a\sqrt{3} + 6h)]^3}{9.8^3\pi} - \frac{3a^4h^2}{16} \end{aligned}$$

veya

$$V^2(K) \ - V^2(E) \ = \ \frac{a^3}{16}[\frac{(a\sqrt{3}+6h)^3}{18\pi} - 3ah^2] \qquad (2)$$

bulunur.

Bu sonucun sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

Teorem 2.4 den hatırlanacağı gibi "farklı iki pozitif sayının geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasından küçük veya eşit $(G \leq A)$ " olduğundan $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &\geq (2\sqrt{xy})^2 \\ (x+y)^3 &\geq 4xy(x+y) \\ (x+y)^3 &> 4xy^2 \text{ ve} \\ (x+y)^3 &> 4x^2y\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonucu (2) eşitliğinde kullanırsak,

$$(a\sqrt{3}+6h)^3 \ > \ 4a\sqrt{3}(6h)^2$$

bulunur. Gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\frac{(a\sqrt{3}+6h)^3}{18\pi} \ > \ \frac{144\sqrt{3}ah^2}{18\pi}$$

veya

$$\frac{(a\sqrt{3}+6h)^3}{18\pi} \ > \ \frac{8\sqrt{3}ah^2}{\pi} > 3ah^2$$

elde edilir. Buradan da,

$$\frac{(a\sqrt{3}+6ah)^3}{18\pi} - 3ah^2 \ > \ 0$$

olur. Yani $V(K) > V(E)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.2 (Eşkenar üçgen dik prizma - Küre)**

Eşkenar üçgen dik prizma ile kürenin hacimleri eşit olsun. Eşkenar üçgen dik prizmanın yüzey alanının, kürenin yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

Eşkenar üçgen dik prizmanın taban ayrıtı $a$, yüksekliği $h$; kürenin yarıçapı $r$ olsun. Sırasıyla hacimleri de,

$$V(E) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h$$

ve

$$V(K) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

olur. $V(K) = V(E)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} r^3 &= \frac{3\sqrt{3}a^2h}{16\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}a^2h} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(E) - O(K) &= (2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah) - 4\pi r^2 \\ &= (\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah) - 4\pi(\sqrt[3]{\frac{(3\sqrt{3}a^2h)^2}{16^2\pi^2}}) \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$\begin{aligned} O^3(E) - O^3(K) &= (\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah)^3 - 64\pi^3(\frac{27a^4h^2}{256\pi^2}) \\ &= a^3(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h)^3 - \frac{27a^4h^2\pi}{4} \end{aligned}$$

veya

$$O^3(E) - O^3(K) = a^3[(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h)^3 - \frac{27ah^2\pi}{4}] \tag{3}$$

bulunur. Bu sonucun sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

Teorem 2.4 den $(x+y)^3 > 4xy^2$ eşitsizliğini (3) eşitliğinde kullanırsak,

$$\begin{aligned}(\frac{a\sqrt{3}}{2}+3h)^3 &> 4\frac{a\sqrt{3}}{2}(3h)^2\\ (\frac{a\sqrt{3}}{2}+3h)^3 &> \frac{36\sqrt{3}ah^2}{2} > \frac{27\pi ah^2}{4}\end{aligned}$$

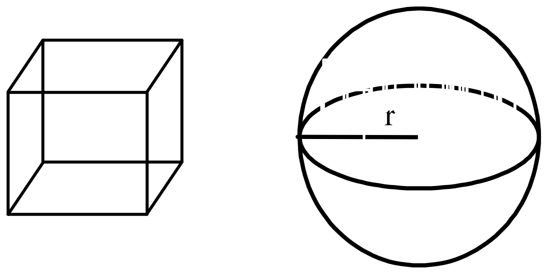
veya

$$(\frac{a\sqrt{3}}{2}+3h)^3-\frac{27\pi ah^2}{4} > 0$$

olur. Yani $O(E) > O(K)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.3 (Küp - Küre)**

Küp ile kürenin yüzey alanları eşit olsun. Kürenin hacminin, küpün hacminden büyük olduğunu gösterelim.




Şekil 5.2 Küp-Küre

Buna göre,

$$O(K\ddot{u}re) = 4\pi r^2$$

ve

$$O(K\ddot{u}p) = 6a^2$$

dır. $O(K\ddot{u}re) = O(K\ddot{u}p)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}6a^2 &= 4\pi r^2\\ r &= \sqrt{\frac{6a^2}{4\pi}}\\ r &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6a^2}{\pi}}\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi hacimleri karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} V(Küre) - V(Küp) &= \frac{4\pi r^3}{3} - a^3 \\ &= \frac{4\pi}{3}\frac{6a^2}{4\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6a^2}{\pi}} - a^3 \\ &= a^2\sqrt{\frac{6a^2}{\pi}} - a^3 \\ &= a^2(\sqrt{\frac{6a^2}{\pi}} - a) \end{aligned}$$

veya

$$V(Küre) - V(Küp) = a^3(\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1)$$

olur.

$a^3(\sqrt{\frac{6}{\pi}} - 1) > 0$ olduğundan, $V(Küre) > V(Küp)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.4 (Küp-Küre)**

Küp ile kürenin hacimleri eşit olsun. Küpün yüzey alanının, kürenin yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

$$V(Küre) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

ve

$$V(Küp) = a^3$$

dir. $V(Küre) = V(Küp)$ alınırsa,

$$\frac{4\pi r^3}{3} = a^3$$

veya

$$\begin{aligned} r^3 &= \frac{3a^3}{4\pi} \\ r^2 &= a^2\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

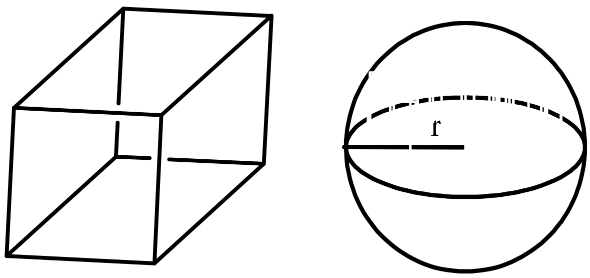
$$\begin{aligned} O(K\ddot{u}p) - O(K\ddot{u}re) &= 6a^2 - 4\pi r^2 \\ &= 6a^2 - 4\pi(a^2\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}}) \\ &= 6a^2 - 4^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}a^2 3^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2(6 - \sqrt[3]{36\pi}) \\ &= a^2 6^{\frac{2}{3}}(6^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{\pi}) \end{aligned}$$

olur.

$a^2 6^{\frac{2}{3}}(6^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{\pi}) > 0$ olduğundan, $O(K\ddot{u}p) > O(K\ddot{u}re)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.5 (Dikdörtgenler prizması - Küre)**

Küre ile dikdörtgenler prizmasının yüzey alanları eşit olsun. Kürenin hacminin, dikdörtgenler prizmasının hacminden büyük olduğunu gösterelim.




Şekil 5.3 Dikdörtgenler prizması-Küre

Dikdörtgenler prizmasının ayrıtları $a, b, c$ olmak üzere; yüzey alanları,

$$O(D) = 2(ab + ac + bc)$$

ve

$$O(K) = 4\pi r^2$$

dir. $O(D) = O(K)$ alınırsa,

$$2(ab + ac + bc) \;=\; 4\pi r^2$$

olur. Uygun düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{2(ab + ac + bc)}{4\pi} \\ r &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(ab + ac + bc)}{\pi}} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi hacimleri karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} V(K) - V(D) &= \frac{4\pi r^3}{3} - abc \\ &= [\frac{4\pi}{3}\frac{2(ab + ac + bc)}{4\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(ab + ac + bc)}{\pi}}] - abc \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{(ab + ac + bc)^3} - abc \end{aligned}$$

olur. Hacimlerin kareleri de,

$$V^2(K) - V^2(D) \;=\; \frac{2(ab + ac + bc)^3}{9\pi} - a^2b^2c^2$$

veya

$$V^2(K) - V^2(D) \;=\; \frac{1}{9\pi}[2(ab + ac + bc)^3 - 9\pi a^2b^2c^2] \tag{4}$$

bulunur. Bu ifadenin sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

Teorem 2.4 uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{ab + ac + bc}{3} &\geq (ab.ac.bc)^{\frac{1}{3}} \\ (ab + ac + bc)^3 &\geq 27a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonucu (4) eşitliğinde kullanırsak,

$$2(ab+ac+bc)^3 \quad > \quad 54a^2b^2c^2 \quad > \quad 9\pi a^2b^2c^2$$

olur. Yani $V(K) > V(D)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.6 (Dikdörtgenler prizması - Küre)**

Küre ile dikdörtgenler prizmasının hacimleri eşit olsun. Dikdörtgenler prizmasının yüzey alanının, kürenin yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

$$V(D) = abc$$

ve

$$V(K) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

dir. $V(K) = V(D)$ alınırsa,

$$\frac{4\pi r^3}{3} \quad = \quad abc$$

elde edilir ve buradan da,

$$\begin{aligned} r^3 &= \frac{3abc}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3abc}{4\pi}} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(D) - O(K) &= 2(ab+ac+bc) - 4\pi r^2 \\ &= 2(ab+ac+bc) - 4\pi\sqrt[3]{\frac{9a^2b^2c^2}{16\pi^2}} \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$O^3(D) - O^3(K) \quad = \quad 8(ab+ac+bc)^3 - 64\pi^3\frac{9a^2b^2c^2}{16\pi^2}$$

veya

$$O^3(D) - O^3(K) \quad = \quad 8(ab+ac+bc)^3 - 36\pi a^2b^2c^2 \qquad (5)$$

bulunur. Bu ifadenin sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

Teorem 2.4 uygulanırsa; buradan

$$\begin{aligned} \frac{ab+ac+bc}{3} &\geq (ab.ac.bc)^{\frac{1}{3}} \\ (ab+ac+bc)^3 &\geq 27a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonucu (5) eşitliğinde kullanırsak,

$$8(ab+ac+bc)^3 \geq 216a^2b^2c^2$$

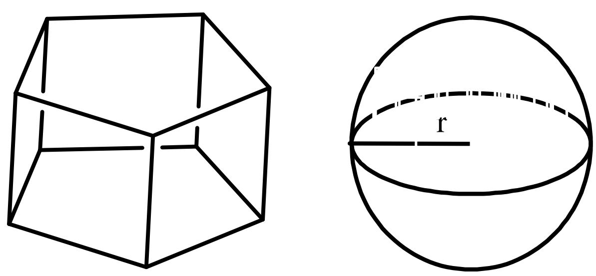
elde edilir.

$$8(ab+ac+bc)^3 \geq 216a^2b^2c^2 > 36\pi a^2b^2c^2$$

olur. Yani $O(D) > O(K)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.7 (Düzgün beşgen dik prizma - Küre)**

Küre ile düzgün beşgen dik prizmanın yüzey alanları eşit olsun. Kürenin hacminin, düzgün beşgen dik prizmanın hacminden büyük olduğunu gösterelim.




Şekil 5.4 Düzgün beşgen dik prizma-Küre

Düzgün beşgen dik prizmanın bir kenar uzunluğu $b$, iç teğet çemberinin yarıçapı $x$ olsun.

Düzgün beşgen dik prizmanın iç açısı $108^\circ$ derece olduğundan,

$$x = \frac{b.\tan 54}{2} = \frac{b.1,37}{2}$$

dir.

$$O(B) = 5bx + 5bh$$

$O(B) = O(K)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} 5bx + 5bh &= 4\pi r^2 \\ 5b\frac{b1,37}{2} + 5bh &= 4\pi r^2 \\ 3,42b^2 + 5bh &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

veya

$$r = \sqrt{\frac{3,42b^2 + 5bh}{4\pi}}$$

bulunur.

$V(K)$ ve $V(B)$ hacimlerini karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} V(K) - V(B) &= \frac{4\pi r^3}{3} - 5\frac{bx}{2}h \\ &= \frac{(3,42b^2 + 5bh)}{3}\sqrt{\frac{3,42b^2 + 5bh}{4\pi}} - 1,71b^2h \end{aligned}$$

olur. Hacimlerin kareleri de,

$$V^2(K) - V^2(B) = [\frac{1}{36\pi}(3,42b^2 + 5bh)^3] - 2,92b^4h^2 \qquad (6)$$

bulunur. Sonucun sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

Teorem 2.4 den,

$(x+y)^3 > 4xy^2$ sonucunu alıp; bunu (6) eşitliğinde uygularsak,

$$(3,42b^2 + 5bh)^3 > 4.(3,42b^2)(5bh)^2$$

elde edilir.

$$\frac{(3,42b^2+5bh)^3}{36\pi} > \frac{342b^4h^2}{36\pi} > 2,92b^4h^2$$

olur. Yani $V(K) > V(B)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.8 (Düzgün beşgen dik prizma - Küre)**

Küre ile düzgün beşgen dik prizmanın hacimleri eşit olsun. Düzgün beşgen dik prizmanın yüzey alanının, kürenin yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

Düzgün beşgen dik prizmanın tabanının bir kenar uzunluğu $b$, iç teğet çemberinin yarıçapı $x$, yüksekliği $h$ olmak üzere; hacmi ve iç teğet çemberinin yarıçapı,

$$V(B) = 5\frac{bx}{2}h$$

ve

$$x = \frac{b.\tan 54}{2} = \frac{b.1,37}{2}$$

dır. $V(B) = V(K)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3}{3} &= 5\frac{bx}{2}h \\ \pi r^3 &= \frac{15bxh}{8} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{15bxh}{8\pi}} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{20,55b^2h}{16\pi}} \end{aligned}$$

bulunur.

Yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(B) - O(K) &= (2.5\frac{bx}{2}h + 5bh) - 4\pi r^2 \\ &= (3,42b^2 + 5bh) - 4\pi\sqrt[3]{(\frac{20,55b^2h}{16\pi})^2} \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$
\begin{aligned}
O^3(B) - O^3(K) &= (3,42b^2 + 5bh)^3 - (4\pi)^3(\frac{20,55b^2h}{16\pi})^2 \\
&= (3,42b^2 + 5bh)^3 - \pi\frac{422,30b^4h^2}{4} \\
&= (3,42b^2 + 5bh)^3 - 105,57\pi b^4h^2)
\end{aligned}
$$

veya

$$
O^3(B) - O^3(K) = b^3[(3,42b + 5h)^3 - 105,57\pi bh^2] \qquad (7)
$$

bulunur. Sonucun sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

Teorem 2.4 den,

$(x + y)^3 > 4xy^2$ sonucunu alıp; bunu (7) eşitliğinde uygularsak,

$$
(3,42b + 5h)^3 > 4.(3,42b).(5h)^2
$$

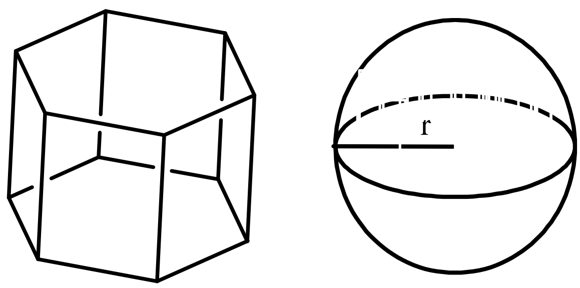
elde edilir.

$$
(3,42b + 5h)^3 > 342bh^2 > 105,57\pi bh^2
$$

olur. Yani $O(B) > O(K)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.9 (Düzgün altıgen dik prizma - Küre)**

Düzgün altıgen dik prizma ile kürenin yüzey alanları eşit olsun. Kürenin hacminin düzgün altıgen dik prizmanın hacminden büyük olduğunu gösterelim.




Şekil 5.5 Düzgün altıgen dik prizma-Küre

Düzgün altıgen dik prizmanın taban ayrıtı $a$, yüksekliği $h$ olmak üzere, $O(A) = O(K)$ alınırsa,

$$3\sqrt{3}a^2 + 6ah \;=\; 4\pi r^2$$

olur. $r$ yi yalnız bırakırsak

$$r \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{3\sqrt{3}a^2 + 6ah}$$

elde edilir.

Hacimlerini karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} V(K) - V(A) &= \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}h \\ &= [\frac{(3\sqrt{3}a^2 + 6ah)}{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{3\sqrt{3}a^2 + 6ah}] - \frac{3\sqrt{3}a^2h}{2} \\ &= (\frac{3^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\sqrt{3}a + 2h)^3}}{6\sqrt{\pi}}) - \frac{3\sqrt{3}a^2h}{2} \end{aligned}$$

olur. Hacimlerin kareleri de,

$$\begin{aligned} V^2(K) - V^2(A) &= \frac{27a^3(\sqrt{3}a + 2h)^3}{36\pi} - \frac{27a^4h^2}{4} \\ &= \frac{27a^3}{4}[\frac{1}{9\pi}(\sqrt{3}a + 2h)^3 - ah^2] \end{aligned}$$

bulunur. Sonucun sıfırdan büyük olduğunu ispatlayalım.

$a$ ve $h$ nın durumlarını inceleyelim.

$$\begin{aligned} a \geq h \quad ise \quad \frac{1}{9\pi}(\sqrt{3}a + 2h)^3 - ah^2 &\geq \frac{1}{9\pi}(\sqrt{3}h + 2h)^3 - h^3 > 0 \\ a < h \quad ise \quad \frac{1}{9\pi}(\sqrt{3}a + 2h)^3 - ah^2 &> \frac{1}{9\pi}(\sqrt{3}a + 2a)^3 - a^3 > 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $V(K) > V(A)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.10 (Düzgün altıgen dik prizma - Küre)**

Düzgün altıgen dik prizma ile kürenin hacimleri eşit olsun. Düzgün altıgen dik prizmanın yüzey alanının, kürenin yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

$V(K) = V(A)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3}{3} &= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}h \\ r &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}a^2h}{\pi}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yüzey alanlarına karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(A) - O(K) &= (6ah + 3\sqrt{3}a^2) - 4\pi r^2 \\ &= (6ah + 3\sqrt{3}a^2) - 4\pi\frac{1}{4}\sqrt[3]{(\frac{9\sqrt{3}a^2h}{\pi})^2} \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$\begin{aligned} O^3(A) - O^3(K) &= (6ah + 3\sqrt{3}a^2)^3 - \pi^3\frac{243a^4h^2}{\pi^2} \\ &= [3a(2h + \sqrt{3}a)]^3 - 243\pi a^4h^2 \\ &= 27a^3[(2h + \sqrt{3}a)^3 - 9\pi ah^2] \end{aligned}$$

bulunur.

$a$ ve $h$ nın durumlarını inceleyelim.

$$a \geq h \quad ise \quad (2h + \sqrt{3}a)^3 - 9\pi ah^2 \quad \geq \quad (2h + \sqrt{3}h)^3 - 9\pi h^3 \quad > \quad 0$$

$$a < h \quad ise \quad (\,2h + \sqrt{3}a)^3 - 9\pi ah^2 \quad > \quad (2a + \sqrt{3}a)^3 - 9\pi a^3 \quad > \quad 0$$

olur. Yani $O(A) > O(K)$ bulunur.

**Geometrik Şekillerin Birbirleri İle Karşılaştırılması**

Bu kısımda, bazı geometrik şekillerin yüzey alanı ile hacimlerinin karşılaştırmasını yapacağız.

**Karşılaştırma 5.1.1 (Eşkenar üçgen dik prizma - Küp)**

Eşkenar üçgen dik prizma ile küpün hacimleri eşit olsun. Eşkenar üçgen prizmanın yüzey alanının, küpün yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

Küpün bir ayrıtı $b$ olmak üzere, $V(E) = V(Küp)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h &= b^3 \\ b &= \sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(E) - O(Küp) &= (2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah) - 6b^2 \\ &= (\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah) - 6\sqrt[3]{\frac{3a^4h^2}{16}} \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$\begin{aligned} O^3(E) - O^3(Küp) &= (\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah)^3 - 6^3(\frac{3a^4h^2}{16}) \\ &= a^3[(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h)^3 - \frac{81}{2}ah^2] \end{aligned}$$

bulunur.

$a$ ve $h$ nın durumlarına bakalım.

$$\begin{array}{lllllll} h \geq a & ise & (\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h)^3 - \frac{81}{2}ah^2 & \geq & (\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3a)^3 - \frac{81}{2}a^3 & > & 0 \\ a > h & ise & (\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h)^3 - \frac{81}{2}ah^2 & > & (\frac{h\sqrt{3}}{2} + 3h)^3 - \frac{81}{2}h^3 & > & 0 \end{array}$$

elde edilir. Yani $O(E) > O(Küp)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.1.2 (Düzgün altıgen dik prizma - Küp)**

Düzgün altıgen dik prizma ile küpün hacimleri eşit olsun. Düzgün altıgen dik prizmanın yüzey alanının, küpün yüzey alanından küçük olduğunu gösterelim.

Küpün bir ayrıtı $b$ olmak üzere, $V(A) = V(K)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} b^3 &= \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}h \\ b &= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(K) - O(A) &= 6b^2 - (3\sqrt{3}a^2 + 6ah) \\ &= 6\sqrt[3]{\frac{27}{4}a^4h^2} - (3\sqrt{3}a^2 + 6ah) \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$\begin{aligned} O^3(K) - O^3(A) &= 1458a^4h^2 - (3\sqrt{3}a^2 + 6ah)^3 \\ &= a^3[1458ah^2 - (3\sqrt{3}a + 6h)^3] \end{aligned}$$

bulunur.

$a$ ve $h$ nın durumlarına bakalım.

$$h \geq a \quad ise \quad 1458ah^2 - (3\sqrt{3}a + 6h)^3 \;\geq\; 1458a^3 - (3\sqrt{3}a + 6a)^3 \;>\; 0$$

olur. Yani $O(Küp) > O(A)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.1.3 (Düzgün beşgen dik prizma - Küp)**

Düzgün beşgen dik prizma ile küpün hacimleri eşit olsun. Düzgün beşgen dik prizmanın yüzey alanının, küpün yüzey alanından küçük olduğunu gösterelim.

Küpün bir ayrıtı $a$ olmak üzere, $V(B) = V(K\ddot{u}p)$ alınırsa,

$$1,71b^2h \quad = \quad a^3$$

olur. Buradan

$$a \quad = \quad \sqrt[3]{1,71b^2h}$$

elde edilir.

Yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(K\ddot{u}p) - O(B) &= 6a^2 - (3,42b^2 + 5bh) \\ &= 6\sqrt[3]{(1,71b^2h)^2} - (3,42b^2 + 5bh) \end{aligned}$$

olur. Yüzey alanlarının küpleri de,

$$\begin{aligned} O^3(K\ddot{u}p) - O^3(B) &= 216(1,71b^2h)^2 - (3,42b^2 + 5bh)^3 \\ &= b^3[631,6bh^2 - (3,42b + 5h)^3] \end{aligned}$$

bulunur.

$b$ ve $h$ nın durumlarına bakalım.

$$h \geq b \quad ise \quad 631,6bh^2 - (3,42b + 5h)^3 \quad > \quad 631,6b^3 - (3,42b + 5b)^3 \quad > \quad 0$$

olur. Yani $O(K\ddot{u}p) > O(B)$ bulunur.

**Karşılaştırma 5.1.4 (Düzgün altıgen dik prizma - Düzgün beşgen dik prizma)**

Düzgün altıgen dik prizma ile düzgün beşgen dik prizmanın hacimleri ve yükseklikleri eşit olsun. Düzgün beşgen dik prizmanın yüzey alanının, düzgün altıgen dik prizmanın yüzey alanından büyük olduğunu gösterelim.

Düzgün beşgenin bir ayrıtı $b$, düzgün altıgenin bir ayrıtı $a$ olmak üzere, $V(B) = V(A)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} 1,71b^2h &= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h \\ 3,42b^2 &= 3\sqrt{3}a^2 \\ b &= 1,23a \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $b^2 > a^2$ olduğundan $b > a$ dır.

Yüzey alanlarını karşılaştıralım. Buna göre,

$$\begin{aligned} O(B) - O(A) &= (3,42b^2 + 5bh) - (3\sqrt{3}a^2 + 6ah) \\ &= 5bh - 6ah \end{aligned}$$

elde edilir. $b = 1,23a$ eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} O(B) - O(A) &= 5.(1,23ah) - 6ah \\ &= 6,15ah - 6ah > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $O(B) > O(A)$ bulunur.

**Sonuç**

Yukarıdaki alıştırmalar neticesinde, *uzayda hacimleri eşit olan geometrik şekiller arasında,* $O_{Küre}$, $O_A$, $O_B$, $O_{Küp}$, $O_E$ sırasıyla Kürenin, Altıgen prizmanın, Beşgen prizmanın, Küpün ve Eşkenar üçgen prizmanın yüzey alanları olmak üzere;

$$O_{Küre} < O_A < O_B < O_{Küp} < O_E$$

sıralaması vardır. Diğer taraftan,$V_E$, $V_{Küp}$, $V_B$, $V_A$, $V_{Küre}$ sırasıyla Eşkenar üçgen prizmanın, Küpün, Beşgen prizmanın, Altıgen prizmanın, Kürenin hacimleri olmak üzere; *"uzayda yüzey alanları eşit olan geometrik şekillerin hacimleri arasında"*

$$V_E < V_{Küp} < V_B < V_A < V_{Küre}$$

sıralaması vardır.

Bu sonuçta bulunan hacimler için verilen sıralama, yüzey alanları için Bölüm 5 de verilen ispata tamamen benzer bir şekilde elde edilebileceğinden okuyucuya bırakılmıştır.

## KAYNAKLAR


**Blaschke, W.,** Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. No. 433, (1949).

**Dergiades, N.,** An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality, Forum Geometricorum, Volume 2, 129-130, (2002).

**Karakaş, H. İ., Aliyev, I.,** Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, Tübitak Yayınları Bilgi Dizisi, (2003).

**Kazarinoff, N. D.,** Geometrik Eşitsizlikler, Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul - (1963).

**Kocayusufoğlu, İ., Ekici, C. and Urfalı, E. T. ,**Isoperimetric Inequality-A New Approach, Hadronic Journal, 29, Num. 2, 221-226, (2006).

**Millennium Mathematics Project**, University of Cambridge, (2002).

**Miller, A.,**The Isoperimetric Problem: A Motivated Look at the Calculus of Variations, (2000).

**Siegel, A.**, An Historical Review of The Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Planer Geometry, Courant Institute of Mathematical Sciences New York Universty, (2003).

**Treibergs, A.**, Universty of Utah, Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality.